



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

DIDÀCTICA DELS GRUPS DE TRENES EN E^2 I S^2

Autora: Maria Pascual i Queralt

Director: Jordi Font González

Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica. UB

Barcelona, 10 de juny de 2025

Abstract

This thesis studies braid groups of the plane, E^2 , and the sphere, S^2 . These groups are presented through relations defined by the permutations of the strands. The first group, also known as the Artin braid group, is presented by two relations: the Artin relations. The second group can be constructed by analogy with the first, but it includes an additional relation, which distinguishes the two groups. It is proved that these presentations are complete and also the Dirac's string problem, where the relations are used.

Following this theoretical study, a didactic proposal is presented for a high school classroom, where several concepts related to braid groups are introduced and the Dirac string problem is explored using hands-on materials.

Resum

En aquest treball, s'estudien els grups de trenes en el pla, E^2 , i en l'esfera, S^2 . Aquests grups es presenten a partir de les relacions definides per les permutacions dels fils. El primer grup, també anomenat grup de trenes d'Artin, està presentat per dues relacions: les relacions d'Artin. El segon es pot construir a partir d'analogies amb el primer, i observem que es presenta amb una relació addicional, fet que els fa diferents. Es prova que la presentació d'aquests grups és completa i el problema de la corda de Dirac, on s'utilitzen les relacions.

Després d'aquest estudi, es fa una proposta didàctica a una aula d'institut, on s'introdueixen diversos conceptes dels grups de trenes i es treballa el problema de la corda de Dirac mitjançant material manipulable.

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria donar les gràcies a en Jordi Font, el meu tutor, per la seva supervisió durant l'elaboració d'aquest treball. També vull agrair a en Carles Cascuberta, per totes les hores dedicades i per transmetre el seu entusiasme en aquest tema.

Vull també donar les gràcies a la meva família i amics que m'han acompanyat durant els anys de carrera. Als meus pares i a la Marta, per la paciència i per haver estat sempre recolzant-me. Als meus amics i amigues per fer-ho tot més divertit i donar-me suport, en especial a la Maria, perquè sense ella no hauria estat el mateix.

Finalment, m'agradaria agrair a en Manuel Cuadrado, professor de l'institut, per saber transmetre la seva passió per les matemàtiques i per permetre'm dur a terme la meva proposta didàctica.

Índex

1	Introducció	1
2	Objectius	3
3	Conceptes previs	4
3.1	Espais de configuració de conjunts de punts i les seves fibracions	4
3.2	El lema dels cinc	7
4	Grup de trenes d'Artin	8
4.1	Definició geomètrica	8
4.2	Grup de trenes en E^2 com a grup fonamental d'un espai de configuracions	11
4.3	Relacions d'Artin	14
5	Grup esfèric de trenes	20
5.1	Definició geomètrica	20
5.2	Grup de trenes en S^2 com a grup fonamental d'un espai de configuracions	21
5.3	Relacions en $B_n(S^2)$	22
5.4	Problema de la corda de Dirac	24
6	Didàctica	30
6.1	Referents didàctics	30
6.2	Fitxa de l'activitat	31
6.3	Implementació de l'activitat	34
6.4	Preguntes per anar més enllà	35
7	Conclusions	38
A	Fitxa alumnat	42
B	Guia per al professorat	43
B.1	Primera sessió	43
B.2	Segona sessió	50

1 Introducció

El projecte

Al llarg de la història, les trenes han estat objectes molt presents per tal de facilitar la producció de certs objectes o per a simplement ornamentar. La primera trena que se sap que va existir va ser a la prehistòria, en la figura de l'anomenada Venus Willendorf, que sembla que porta un pentinat trenat. També s'han trobat evidències de trenes a la Mesopotàmia, a l'Antic Egipte, a l'Antiga Grècia, l'Imperi Romà, poblacions maies, asteques, navajos, inques, vikings i celtes, entre d'altres. Es trenaven fibres vegetals o altres materials per a fer cordes resistents, poder construir cases, vaixells, armes, cistells, calçat, teixits, joies, entre d'altres objectes. Per tant, podem dir que les trenes són un objecte molt antic.

Tot i així, les trenes no es van estudiar com a objectes matemàtics fins l'any 1891, quan van aparèixer en un article d'Adolf Hurwitz [19] descrites de forma implícita com a grup fonamental d'un espai de configuració, és a dir en el context de les cobertures ramificades. No se'n va parlar més fins que Emil Artin [1], basant-se en la feina de Hurwitz, va formalitzar el concepte de grup de trenes i ho va descriure com una estructura algebraica independent tot veient generadors i relacions. Artin les va proposar per tal d'estudiar nusos i enllaços. Fadell i Van Buskirk[12] van fer un gran estudi del grup de trenes, el grup esfèric de trenes i la seva relació, que és el que es treballa principalment en aquest treball.

Amb l'estudi de les trenes, es poden estudiar altres camps de les matemàtiques com per exemple, en topologia, podem estudiar nusos, enllaços, la teoria del punt fix, espais recorridors, entre d'altres; a geometria, es poden estudiar grups de classes de difeomorfismes. També es poden estudiar certes temàtiques en teoria de singularitats o sistemes dinàmics. Al final d'aquest treball, es fa una relació del problema de la corda de Dirac utilitzant el grup esfèric de trenes, una connexió que es descriu per primer cop de forma escrita a [21].

El grup de trenes és un tema que abasta diferents branques de les matemàtiques com la topologia, l'àlgebra i la geometria. En aquest treball, es vol treballar mitjançant la topologia algebraica, és a dir, veient l'isomorfisme del grup de trenes amb el grup fonamental de l'espai de configuració de punts en una varietat. Això ho podem fer tant en E^2 com en S^2 , tot i que es podria estudiar en altres superfícies com el tor o el pla projectiu. Es veuran molts conceptes algebraics i geomètrics per a demostrar teoremes o proposicions, degut al fet que les branques de les matemàtiques molts cops estan molt interconnectades.

A part de veure-ho com un objecte topològic, també és útil veure-ho en diferents àrees científiques com la física, la química de polímers, la biologia molecular, la criptografia o la robòtica, però no tractarem aquestes relacions.

Tal i com hem dit, les trenes han estat un objecte d'estudi de les últimes dècades. Després de l'aportació d'Artin, aquest camp va estar en el seu punt àlgid als anys 80, quan Vaughan Jones va establir una connexió entre les trenes i els nusos, però en aquest treball només parlarem de trenes, ja que si s'hagués ampliat a nusos o enllaços hauria estat un treball molt extens i no s'hagués pogut enfocar en les relacions d'Artin i les addicionals per a parlar de la relació entre els dos grups de trenes.

Estructura de la memòria

Aquest treball comença parlant del grup de trenes d'Artin tot veient dues formes de descriure-les, una més geomètrica i l'altra des d'un punt de vista de la topologia algebraica. Després es parla de les anomenades relacions d'Artin, les quals presenten el grup, fet que també es demostra no mitjançant la demostració d'Artin[1], sinó la de Fadell i Van Buskirk[12]. Més endavant, es presenta un altre tipus de grup de trenes: el grup esfèric de trenes. L'estudi que s'ha fet ha estat veure que les relacions d'Artin es compleixen en ambdós grups i que, a més, en aquest grup nou hi ha una relació addicional. Per tant, a més de les semblances entre els dos grups també s'observen les diferències, que es poden resumir amb la relació addicional del grup esfèric de trenes. Després d'analitzar el grup esfèric de trenes, es demostra el problema de la corda de Dirac. Aquest és un problema molt relacionat amb el grup esfèric de trenes i que tindrà a veure amb la part del treball que vindrà a continuació: la proposta didàctica.

Després de l'estudi, es fa una proposta didàctica de com es podria aplicar aquest tema a una aula de batxillerat. S'han preparat dues sessions, una introductòria sobre el grup de trenes i les relacions d'Artin per a identificar trenes equivalents. I l'altra, que parla sobre el grup esfèric de trenes i totes les relacions entre ambdós grups. A més, en aquesta segona sessió, per a justificar aquest estudi, l'alumnat treballarà el problema de la corda de Dirac i com resoldre'l després de conèixer el funcionament de les trenes en S^2 .

El motiu de la proposta didàctica és voler mostrar que és possible ensenyar conceptes topològics a l'alumnat d'institut tot adaptant-los a l'edat i als coneixements que tenen. És molt interessant ja que la topologia és una branca de les matemàtiques molt manipulable i molt útil per a treballar amb infants o adolescents per tal de veure les matemàtiques com una assignatura més àmplia del que es veu, a més de treballar un concepte relativament contemporani.

El treball es completa amb dos annexos: la fitxa de l'alumnat i la fitxa del professorat. La primera consisteix en una síntesi dels conceptes de les dues sessions i la segona consisteix en una explicació del que es fa en cada sessió d'una manera més estesa i divulgativa.

2 Objectius

Aquest treball s'ha basat en els objectius següents:

- Estudiar les trenes com a objectes topològics.
- Demostrar que les relacions que presenten els grups de trenes en E^2 i S^2 generen totes les igualtats possibles entre trenes, és a dir, que la presentació és completa.
- Fer una proposta didàctica a una aula de batxillerat sobre el grup de trenes d'Artin i el grup esfèric de trenes.
- Dur a terme l'activitat dissenyada a l'aula.

3 Conceptes previs

3.1 Espais de configuració de conjunts de punts i les seves fibracions

Per a poder tractar les trenes des d'un punt de vista de topologia algebraica, necessitarem tractar conceptes com els que veurem a continuació.

Definició 3.1. Sigui M una varietat connexa de dimensió ≥ 2 . Sigui $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 1$. Considerem el subespai $F_n(M)$ definit de la següent manera:

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M \times \dots \times M \mid x_i \neq x_j \text{ per } i \neq j\}$$

$F_n(M)$ s'anomena *espai de configuracions* d'un conjunt de n punts de M .

Observació 3.2. Aquest espai que hem definit, el podem entendre com $M \times \dots \times M$ i traient les subvarietats on dues o més coordenades són iguals, que correspon a un nombre finit de subvarietats.

Ara prenem $m \geq 0$ enter. Prenem també $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$ un subconjunt arbitrari i fix de M amb punts diferents dos a dos. Considerem els espais de configuració definits de la següent manera:

$$F_{m,n}(M) := F_n(M \setminus Q_m)$$

Si $Q'_m = \{q'_1, \dots, q'_m\}$ és un altre subconjunt de M que conté m punts diferents dos a dos, aleshores existeix un homeomorfisme a M que porta Q_m a Q'_m . Això significa que els complements $M \setminus Q_m$ i $M \setminus Q'_m$ són conjunts homeomorfs oberts de M . També els espais $F_n(M \setminus Q_m)$ i $F_n(M \setminus Q'_m)$ són homeomorfs. Com a conseqüència, l'espai de configuracions $F_{m,n}(M)$ és independent al subconjunt $Q_m \subset M$ triat.

Observació 3.3. Veiem els següents casos particulars d'espais de configuracions.

$$F_{0,n}(M) = F_n(M) \quad \text{i} \quad F_{m,1}(M) = M \setminus Q_m$$

Per a propietats que venen a continuació, necessitarem la següent definició.

Definició 3.4. Sigui $\{A_i, f_i\}$ un conjunt consistent, és a dir A_i són un grup, anell, mòdul o espai vectorial i f_i morfismes tals que es forma un complex de cadenes

$$\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \rightarrow \dots$$

i satisfan

$$\text{im}(f_{n+1}) = \ker(f_n)$$

per a tot n . Aleshores, es diu que el conjunt forma una *successió exacta*.

Ara veurem què és un fibrat, ja que el grup de trenes és isomorf al grup fonamental d'un fibrat.

Definició 3.5. Un *fibrat* és una quaterna (E, B, p, F) , on E, B i F són espais topològics i $p : E \rightarrow B$ és una aplicació contínua i exhaustiva tal que per a tot $\alpha \in B$, existeix un entorn $U_\alpha \subset B$ tal que $p^{-1}(U_\alpha)$ és homeomorf a $U_\alpha \times F$ mitjançant un homeomorfisme $\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ que fa commutatiu el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \downarrow p & \swarrow & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

La varietat B s'anomena *base del fibrat*, E es diu *espai total*, $p^{-1}(\alpha)$ és la *fibra* en α per a tot $\alpha \in B$ i p és la *funció de projecció*.

Exemple 3.6. Sigui G un grup que actua de manera lliure i pròpiament discontinua sobre un espai topològic E . Llavors la projecció $p : E \rightarrow E/G$ és un fibrat amb fibra G . Els fibrats amb fibra discreta s'anomenen *espais recobridors* i, per tant, p s'anomena *aplicació recobridora* en el sentit de [18].

Com en tota aplicació recobridora, si escollim un punt base $e_0 \in E$, hi ha una successió exacta curta de grups induïda per p [18]

$$1 \rightarrow \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(E/G, p(e_0)) \rightarrow G \rightarrow 1$$

Veiem les següents definicions més bàsiques:

Definició 3.7. Sigui $f, g : X \rightarrow Y$ dues aplicacions contínues. Una *homotopia* de f a g és una aplicació contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H_0 = f$ i $H_1 = g$.

Definició 3.8. Si $A \subseteq X$ és un subespai qualsevol tal que $f(a) = g(a)$ per a tot $a \in A$, una *homotopia de f a g relativa a A* és una aplicació contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ i tal que $H_t(a) = f(a) = g(a)$ per a tot $t \in [0, 1]$ i tot $a \in A$.

Definim els *grups d'homotopia* de la manera següent:

Definició 3.9. $\pi_n(X, x_0)$ és el grup de classes d'homotopia relativa al punt base d'aplicacions contínues $S^n \rightarrow X$, per a $n \geq 1$. En el cas $n = 1$, és el *grup fonamental*. Per a valors de n més grans, $\pi_n(X, x_0)$ és un grup abelià [18].

En el treball ens trobarem que haurem de tractar conceptes com els de fibració. Per això, cal definir-los. Una fibració és un concepte més general que el de fibrat. Abans de tot, però, haurem de dir què és la propietat d'elevació d'homotopia.

Definició 3.10. Una aplicació $p : E \rightarrow B$ es diu que té la *propietat d'elevació d'homotopia* respecte a l'espai X si, donada una homotopia $G : X \times [0, 1] \rightarrow B$ i una aplicació $\tilde{G}_0 : X \rightarrow E$ tal que

$$p \circ \tilde{G}_0 = G(\cdot, 0)$$

existeix una homotopia $\tilde{G} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ tal que

$$\begin{cases} p \circ \tilde{G}(x, t) = G(x, t), & \text{per a tot } (x, t) \in X \times [0, 1] \\ \tilde{G}(x, 0) = \tilde{G}_0(x), & \text{per a tot } x \in X \end{cases}$$

Definició 3.11. Una *fibració* és una aplicació $p : E \rightarrow B$ que té la propietat d'elevació d'homotopia respecte a tots els espais X . La *fibra* de p d'una fibració en un punt $b \in B$ és el subespai $F = p^{-1}(b) \subset E$, encara que depengui del punt b escollit. És a dir, la fibra és el conjunt de punts del total E que es projecten sobre un mateix punt $b \in B$.

Observació 3.12. De la definició 3.10, es dedueix que si b_1 i b_2 són dos punts de B , llavors

$$p^{-1}(b_1) \simeq p^{-1}(b_2)$$

és a dir que són homotòpicament equivalents.

Proposició 3.13. *Sigui $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ una fibració on $F = p^{-1}(b)$, amb $b_0 \in B$, és el que s'anomena la fibra, E l'espai total i B el que anomenem espai base. Aleshores, tota fibració dona lloc a una successió exacta de grups d'homotopia:*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \rightarrow \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

per a cada elecció d'un punt base $e_0 \in F$. El darrer morfisme en aquesta successió és exhaustiu si la fibra F és arc-connexa [18].

Observació 3.14. Aquesta successió exacta llarga de grups és el cas general de la que hem vist per a les aplicacions recobridores.

El següent teorema ens proporciona una descomposició fibrada de l'espai de configuració, la qual cosa facilita la connexió entre els espais de configuració i el grup fonamental. Va ser demostrat per Fadell i Neuwirth [10] l'any 1962.

Teorema 3.15. *Sigui $n \geq 2$ i $1 \leq r < n$. Aleshores l'aplicació:*

$$p : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,r}(M)$$

definida com

$$p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$$

és una fibració trivial local que té com a fibra $F_{m+r, n-r}(M)$.

Ara considerarem el cas en què prenem la varietat M per a que sigui el pla euclidià E^2 .

A partir del teorema 3.15, es pot deduir el següent per al pla euclidià:

Corol·lari 3.16 (Fadell i Neuwirth). *Per a l'espai de configuracions $F_n(E^2)$ de n punts ordenats en el pla E^2 , tenim*

$$\pi_i(F_n(E^2)) = 0$$

per a tot $i \geq 2$. Més generalment,

$$\pi_i(F_{m,n}(E^2)) = 0$$

per a tot $i \geq 2$, $n \geq 1$ i $m \geq 0$.

Demostració. Per a fer la demostració necessitem conceptes que no hem introduït i, per tant, no la farem. Tot i això, està demostrada a [10].

Definició 3.17. Sigui $p : E \rightarrow B$ una aplicació contínua. Siguin $f, g : X \rightarrow E$ dues aplicacions sobre B , és a dir:

$$p \circ f = p \circ g : X \rightarrow B$$

Lavors, es diu que f i g són *homòtopes sobre B* o que estan relacionades per una *homotopia fibra a fibra* si existeix una aplicació contínua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow E$$

tal que

1. $H(x, 0) = f(x)$
2. $H(x, 1) = g(x)$
3. $p \circ H(x, t) = p \circ f(x)$ per a tot $x \in X, t \in [0, 1]$.

Observació 3.18. Podem entendre l'homotopia fibra a fibra com una relació que no mou els punts verticalment respecte a la base B , sinó que cada punt de X es relaciona dins la seva pròpia fibra $p^{-1}(b)$.

El següent concepte ens serà útil per a demostrar l'isomorfisme entre dos grups lliures finitament generats.

Definició 3.19. Un *grup hopfià* és un grup G pel qual tot epimorfisme $G \rightarrow G$ és un isomorfisme.

Exemple 3.20. • $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ és un grup hopfià.

- Qualsevol grup finit és un grup hopfià.
- Tot grup lliure finitament generat és un grup hopfià.

3.2 El lema dels cinc

El següent lema ens serà molt útil per a demostrar isomorfismes per quan haguem de justificar les relacions d'Artin.

Lema 3.21. Sigui el següent diagrama commutatiu en qualsevol categoria abeliana o de grups

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow p & & \downarrow q \\ A' & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{s} & C' & \xrightarrow{t} & D' & \xrightarrow{u} & E' \end{array}$$

El lema dels cinc diu que si les files són exactes, m i p són isomorfismes, l és un epimorfisme i q és un monomorfisme, aleshores n és un isomorfisme.

4 Grup de trenes d'Artin

4.1 Definició geomètrica

En aquest apartat veurem una definició de les trenes que es pot representar gràficament. Veurem com el grup de trenes d'Artin és un grup generat per permutacions. A més, veurem una representació més senzilla per a representar les trenes a partir d'ara.

Sigui E^3 un espai euclidià de nombres reals i tres dimensions que es forma prenent un sistema de coordenades (x, y, z) on l'eix de les z apunta verticalment cap a baix.

Considerem dos plans paral·lels, per exemple $z_0 = 0$ i $z_1 = 1$. Sempre amb $z_1 > z_0$. Anomenarem pla superior a z_0 i pla inferior a z_1 . Ara fixem el mateix nombre de punts dins d'aquests plans. Els del pla superior seran $P_1, \dots, P_n$ i els del pla inferior $P'_1, \dots, P'_n$, els quals seran projeccions ortogonals dels punts del pla superior.

Definició 4.1. Una *trena geomètrica de n fils* β , també anomenada *n -trena*, és un sistema de n arcs $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ en E^3 , definits com $\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow E^3$, on $\mathcal{A}_i$ connecta el punt P_i del pla superior amb $P'_{\tau(i)}$ del pla inferior, amb la permutació τ tal que $\forall \mathcal{A}_i$ interseca amb tot pla que estigui entre el pla superior i el pla inferior i que sigui paral·lel a aquests exactament un cop.

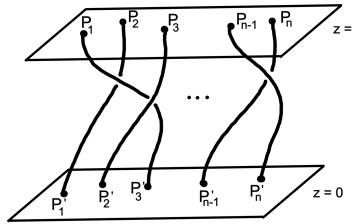


Figura 1: Representació d'una trena d'Artin.

Amb aquesta definició, es poden acceptar com a trenes determinats objectes de trenat infinit, denominades *trenes salvatges*. Però a partir d'ara, exclourem aquestes trenes i ens centrarem en les de trenat finit, anomenades *trenes dòcils*, és a dir aquelles que els seus arcs tenen finits encreuaments entre ells.

Per a veure si dues trenes són equivalents, la idea general és veure si els seus fils estan entrellaçats de la mateixa manera tot fent certes deformacions que després explicarem en forma de relacions.

A continuació, definirem diferents conceptes que ens portaran a definir l'equivalència entre dues trenes.

Definició 4.2. Si f i g són homeomorfismes, llavors una *isotopia de f a g* és una aplicació contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que, si $H_t(x) = H(x, t)$, $H_0 = f$, $H_1 = g$ i tal que $H_t : X \rightarrow Y$ és un homeomorfisme per a tot t .

Definició 4.3. Una *isotopia relativa a un subespai $A \subseteq X$* es defineix de la mateixa manera que hem vist per a l'homotopia relativa (definició 3.8), tot suposant que f i g siguin homeomorfismes i que fixin A punt a punt.

Ara ja podem definir l'equivalència entre trenes.

Definició 4.4. Siguin β_0 i β_1 dues trenes a E^2 . Aleshores, β_0 i β_1 estan contingudes a $E^2 \times [0, 1]$. Direm que β_0 i β_1 són *equivalents* si existeix una aplicació contínua

$$H : E^2 \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E^2 \times [0, 1]$$

que denotem per $H(x, s, t)$ i escrivim $H_t(x, s) = H(x, s, t)$, tal que H_t és un homeomorfisme de $E^2 \times [0, 1]$ en ell mateix que deixa fix el subespai $A = (E^2 \times \{0\}) \cup (E^2 \times \{1\})$ per a tot t , i tal que $H_0 = id$ i $H_1(\beta_0) = \beta_1$.

Observació 4.5. H és una isotopia de H_0 a H_1 relativa a A .

Observació 4.6. El subespai A és la unió de les dues *bases* de $E^2 \times [0, 1]$, és a dir, la vora $\partial(E^2 \times [0, 1])$.

A partir d'ara, per a facilitar la representació de les trenes, farem una homotopia de projecció d'una trena tal i com l'hem descrita al que s'anomena *diagrama de trena*.

Sigui $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ una n -trena en E^3 , descrita per $\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow E^3$, $i = 1, \dots, n$, on cada $\mathcal{A}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ descriu la trajectòria del fil i i connecta els punts inicials $P_i = (x_i(0), y_i(0), 1)$ en un pla superior $z = 1$ i els punts finals $P_{\tau(i)} = (x_{\tau(i)}(1), y_{\tau(i)}(1), 0)$ en el pla inferior $z = 0$.

Definim l'homotopia $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E^3$ com:

$$H(s, t) = (x_i(t), (1 - s)y_i(t), z_i(t))$$

on s és el paràmetre de deformació i quan $s = 1$, la trena queda continguda en el pla xz .

Hem de tenir present aquestes tres coses:

- Les projeccions dels fils no són tangents entre elles.
- Cap punt del pla xz és la projecció de tres o més punts de diferents fils.
- Tots els encreuaments passen a diferents altituds (sempre sobre el pla xy).

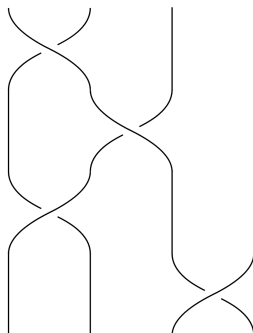


Figura 2: Representació de les trenes a partir d'ara.

A continuació, veurem que el grup de trenes d'Artin és un grup que té com a elements classes d'equivalència de n -trenes i la seva operació és la composició de trenes. Anomenarem $B_n(E^2)$ el conjunt de totes les classes d'equivalència de les n -trenes geomètriques.

Definició 4.7. Anomenem σ_i a la n -trena geomètrica elemental, la qual el fil i -èsim creua el fil $(i + 1)$ -èsim un cop i la resta de fils no fan cap encreuament.

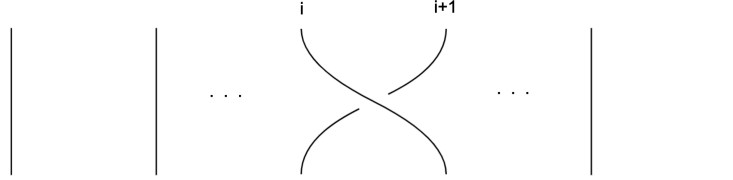


Figura 3: Trena σ_i .

Observació 4.8. Notem que la trena elemental σ_i existeix en n -trenes per a tot $1 \leq i \leq n - 1$.

Definició 4.9. Siguin β_1 i β_2 n -trenes geomètriques. Els punts del pla inferior de la trena β_1 són P'_i , i els del pla superior de la trena β_2 són Q_i , per a tot $0 \leq i < n$.

Definim el *producte o composició* $\beta_1 \cdot \beta_2$ prenent la trena β_2 i contraient-la en direcció vertical a la meitat de la seva alçada, és a dir fent que el seu pla superior sigui $z = 1/2$, i contraient la trena β_1 també verticalment però fent que el seu pla inferior sigui $z = 1/2$. Aleshores les unim, traiem el pla entre les dues trenes i fem que els $P'_i = Q_i$ per a tot $0 \leq i < n$.

Definició 4.10. Anomenem ϵ a la n -trena trivial, en la qual tots els fils van del pla superior a l'inferior sense fer cap encreuament.

Observació 4.11. Observem que en la n -trena trivial la permutació dels punts del pla inferior és la identitat.

La classe d'equivalència de ϵ és l'element neutre pel producte a $B_n(E^2)$.

Definició 4.12. La trena inversa β^{-1} de la trena β és aquella tal que $\beta^{-1} \cdot \beta \sim \beta \cdot \beta^{-1} \sim \epsilon$. Es descriu com la imatge mirall de la trena β (simètrica sobre l'eix $z = 1$).

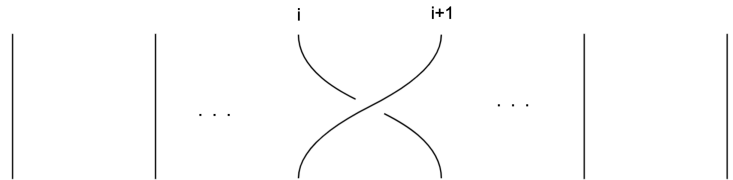


Figura 4: Trena σ_i^{-1} , inversa de σ_i .

La classe d'equivalència de β^{-1} és l'element invers pel producte a $B_n(E^2)$.

Observació 4.13. La trena inversa de σ_i és σ_i^{-1} , la qual creua el fil $(i + 1)$ -èsim amb el fil i -èsim.

Exemple 4.14. Per exemple, la trena representada anteriorment a la Figura 2, es podria escriure de la següent manera

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1}$$

Teorema 4.15. *El conjunt de classes d'equivalència de les n -trenes, $B_n(E^2)$, forma un grup. Aquest grup s'anomena grup de n -trenes en E^2 o grup de n -trenes d'Artin.*

Demostració. L'operació binària és el producte descrit anteriorment. Igual que hem definit l'element neutre i l'invers ($[\beta]^{-1} = [\beta^{-1}]$).

També veiem que el producte és associatiu: $([\beta_1] \cdot [\beta_2]) \cdot [\beta_3] = [\beta_1] \cdot ([\beta_2] \cdot [\beta_3])$. $\square$

Observació 4.16. La classe d'equivalència de qualsevol n -trena es pot escriure com a producte de n -trenes elementals. Per tant, les n -trenes elementals $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ generen el grup $B_n(E^2)$.

Definició 4.17. Una *trena pura* és aquella que els punts inicials i els punts finals no experimenten cap permutació.

Exemple 4.18. Per exemple la trena de la Figura 5 és una trena pura perquè comença als punts P_i i acaba a P'_i per a tot i .

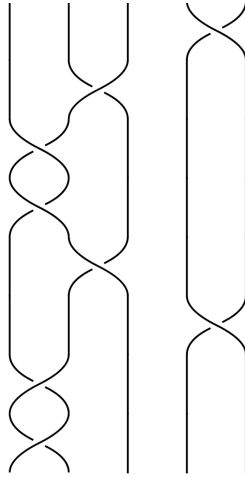


Figura 5: Exemple de trena pura.

4.2 Grup de trenes en E^2 com a grup fonamental d'un espai de configuracions

Per a poder demostrar les relacions que presenten el grup de trenes, haurem de veure l'isomorfisme que té amb el grup fonamental de l'espai de configuracions de n punts no ordenats en el pla.

No és la definició clàssica de trenes tal i com l'hem vist en l'apartat anterior o tal i com la va definir Artin, però es pot entendre més com el moviment de punts en una varietat. Aquesta relació serveix per a reduir el cas clàssic, on es pren com a varietat E^2 , per això diem grup de trenes en E^2 . A més, veurem que és equivalent a la definició d'Artin.

Una trena és un camí continu en aquest espai, és a dir, una deformació d'una configuració inicial de punts cap a una configuració final.

El grup de trenes $B_n(E^2)$ va ser introduït per E. Artin l'any 1925 i més tard estudiat ja l'any 1947. Fox [13] va fer la generalització del grup de trenes en espais topològics arbitraris, i va utilitzar la relació d'isomorfia que veurem.

Sigui M una varietat connexa de dimensió ≥ 2 . Anomenarem Σ_n el grup simètric de n elements, és a dir, el grup de totes les permutacions del conjunt $\{1, \dots, n\}$.

Hi ha una acció natural per la dreta de Σ_n sobre l'espai de configuracions $F_n(M)$:

$$\mu : F_n(M) \times \Sigma_n \rightarrow F_n(M)$$

definit per:

$$\mu((x_1, \dots, x_n), \sigma) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

és a dir, la permutació de les coordenades.

L'espai quocient de l'acció μ es defineix com

$$C_n(M) = F_n(M) / \Sigma_n$$

Podem pensar l'espai $C_n(M)$ com l'espai de totes les possibles configuracions d'un conjunt de n punts diferents dos a dos continguts a M .

Definició 4.19. $C_n(M)$ s'anomena *espai de configuracions per a un conjunt de n punts de M no ordenats*.

Els espais de configuració els utilitzarem per a definir les trenes en M . Les trenes d'Artin seran doncs quan $M = E^2$.

Veiem com la projecció de $F_n(M)$ a l'espai quocient $C_n(M)$ defineix el fibrat següent:

$$p_n : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$$

Ara prenem un punt base $c \in F_n(M)$ i obtenim $p_n(c) = c_0 \in C_n(M)$. Un element β del grup fonamental de $C_n(M)$ es representa amb el llaç $f : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$ amb $f(0) = f(1) = c_0$.

Existeix una única elevació de f en p_n , definit com $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$ amb $\bar{f}(0) = c$.

Pensarem aquestes funcions com n camins $\bar{f}_i : [0, 1] \rightarrow M$, amb $1 \leq i \leq n$, pels quals $\bar{f}_i(t) \neq \bar{f}_j(t)$ per a tot $i \neq j$ i $t \in [0, 1]$. El conjunt de punts ordenats $(\bar{f}_1(1), \dots, \bar{f}_n(1))$ és un subconjunt de M i és una permutació del conjunt $(\bar{f}_1(0), \dots, \bar{f}_n(0))$ de M també, ja que $p_n(\bar{f}(1)) = p_n(\bar{f}(0)) = c_0$.

Ara definim les immersions $\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ per $1 \leq i \leq n$, definides com $\mathcal{A}_i(t) = (\bar{f}_i(t), t)$.

El sistema $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ és un sistema de n cordes a l'espai producte $M \times [0, 1]$ que satisfà els mateixos requisits que quan hem definit la trena de forma geomètrica. El sistema de cordes $\mathcal{A} \in M \times [0, 1]$ connecta el conjunt de punts $P_1, \dots, P_n \in M \times \{0\}$, que és el conjunt de coordenades per a $c \in F_n(M)$, al conjunt de punts $P'_1, \dots, P'_n \in M \times \{1\}$, conforme amb la permutació τ que transforma $\bar{f}(0)$ a $\bar{f}(1)$.

També coincideix la definició d'equivalència entre dues trenes, l'únic que difereix és que només depèn de $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$ i no en $f : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$.

Proposició 4.20. *Una n -trena amb la permutació τ en M a $\mathcal{A}$, es pot definir com la classe d'homotopia $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$.*

El grup de n -trenes en M es defineix com

$$\pi_1(C_n(M), c_0)$$

Ara veiem doncs com descriu Fox les anomenades trenes pures.

Proposició 4.21. *El grup fonamental*

$$\pi_1(F_n(M), \bar{c}_0)$$

és isomorf al que s'anomena grup de n -trenes pures a la varietat M .

Observació 4.22. Veiem que el grup de trenes pures de forma gràfica es representen com les que tenen com a punt inicial P_i i punt final P'_i . Es representa com $\pi_1(F_n(M), \bar{c}_0)$ ja que $F_n(M)$ és l'espai de configuració de n punts ordenats.

Ara veurem que les trenes que estem descrivint tenen una definició equivalent a la que hem donat prèviament, la que va fer Artin[1].

La varietat M serà el pla euclidià E^2 . Prenem els punts

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 0, 0), \quad P_2 = (2, 0, 0), \dots, P_n = (n, 0, 0) \\ P'_1 &= (1, 0, 1), \quad P'_2 = (2, 0, 1), \dots, P'_n = (n, 0, 1) \end{aligned}$$

En els plans $z = 0$ i $z = 1$, respectivament. Sigui $p_n : F_n(E^2) \rightarrow C_n(E^2)$ el Σ_n -espai de configuracions canònic principal i prenem $c_0 = (P_1, \dots, P_n) \in F_n(E^2)$ el punt inicial i $c_0 = p_n(\bar{c}_0) \in C_n(E^2)$ el punt base de $C_n(E^2)$.

Aleshores, la trena $\mathcal{A}$ en E^2 tal i com la defineix Fox és la trena geomètrica de n cordes tal i com la va definir Artin i tal i com l'hem vist a la definició geomètrica.

Teorema 4.23. *El grup de trenes d'Artin $B_n(E^2)$ es pot identificar canònicament amb el grup fonamental*

$$\pi_1(C_n(E^2), c_0)$$

Utilitzant el Corol·lari 3.16, podem definir la següent successió exacta:

$$1 \rightarrow \pi_1(F_n(E^2), \bar{c}_0) \rightarrow \pi_1(C_n(E^2), c_0) \rightarrow \Sigma_n \rightarrow 1 \quad (4.1)$$

Observem que tenim un homomorfisme entre les trenes pures i el grup de trenes, ja que les trenes pures les hem identificat com $\pi_1(F_n(E^2), \bar{c}_0)$.

Definició 4.24. La successió (4.1) s'anomena la *successió del grup de trenes*. L'homomorfisme $\tau_n : \pi_1(C_n(E^2), c_0) \rightarrow \Sigma_n$ s'anomena l'*homomorfisme permutació*.

Teorema 4.25. Per a l'espai de configuració $C_n(E^2)$ tenim que

$$\pi_1(C_n(E^2)) = B_n(E^2) \quad \pi_i(C_n(E^2)) = 0$$

per a $i \geq 2$.

Aquest teorema és conseqüència del teorema 3.16. En conseqüència, tenim el següent corol·lari, que va ser demostrat primerament per Fox, Fadell i Neuwirth [13] l'any 1962 i, més tard i d'una manera purament teòrica dels grups, la va fer Joan Dyer [8] l'any 1980.

Corol·lari 4.26. El grup de trenes $B_n(E^2)$ conté elements no trivials d'ordre finit.

És un resultat molt important en grup de trenes perquè descriu l'estructura interna del grup de trenes, com els seus elements interactuen i es poden combinar degut al seu ordre finit.

En el següent apartat, veurem com es poden combinar aquests elements.

4.3 Relacions d'Artin

Les relacions d'Artin són en realitat restriccions imposades per la topologia dels espais. En aquest apartat del treball, es vol demostrar que les dues relacions d'Artin presenten el grup de trenes de forma completa, és a dir, que són certes sempre i que no n'existeixen més que no siguin equivalents. Ho farem a partir dels generadors que hem definit a la definició 4.7, on σ_i creua el fil i amb el $i + 1$ per sobre.

Per a tractar les relacions d'Artin mitjançant l'isomorfisme que acabem de veure, ho farem considerant les permutacions com el grup fonamental d'aquest espai, és a dir, cada σ_i representa un camí fonamental on dues partícules intercanvien la seva posició sense col·lidir. Les relacions d'Artin venen imposades per com els camins es poden deformar de forma contínua (són moviments fonamentals en l'espai de configuracions).

Definim els punts següents $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, ..., $P_n = (n, 0)$ com el conjunt de punts inicials per les cordes en les n -trenes. Aleshores, definim σ_i per a tot $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ com el camí

$$\begin{aligned} \bar{f} : [0, 1] &\rightarrow F_n(E^2) \\ t &\mapsto (P_1, \dots, P_{i-1}, \bar{f}_i(t), \bar{f}_{i+1}(t), P_{i+2}, \dots, P_n) \end{aligned}$$

on $\bar{f}_i(t) = (i + \sin \frac{\pi}{2}t, \sin \pi t)$ i $\bar{f}_{i+1}(t) = (i + \cos \frac{\pi}{2}t, -\sin \pi t)$. I veiem que $\bar{f}(0) = (P_1, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots, P_n)$ i $\bar{f}(1) = (P_1, \dots, P_{i+1}, P_i, \dots, P_n)$.

El camí $\bar{f}$ es pot projectar al llaç $f : [0, 1] \rightarrow C_n(E^2)$ amb $f(0) = f(1) = c_0$, el punt base que hem pres. Aquest llaç representa σ_i en $\pi_1(C_n(E^2), c_0)$.

Per exemple, per a $\pi_n(C_n(E^2))$, la permutació σ_i es representaria de la següent manera:



Figura 6: $\sigma_i \in \pi_n(C_n(E^2))$.

La mateixa permutació però feta dos cops no permutaria els punts inicials amb els finals, per tant:

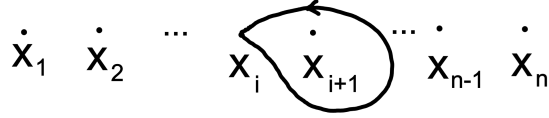


Figura 7: $\sigma_i^2 \in \pi_n(C_n(E^2))$.

També veiem que $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\dots\sigma_{i-2}^{-1}\sigma_{i-1}^2\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1$, que tampoc permuta els punts, es representaria:

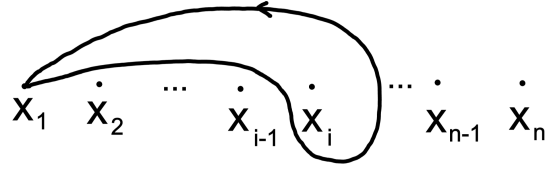


Figura 8: $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\dots\sigma_{i-2}^{-1}\sigma_{i-1}^2\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1 \in \pi_n(C_n(E^2))$.

I, finalment, veiem que $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\sigma_{n-1}\dots\sigma_2\sigma_1$ és:

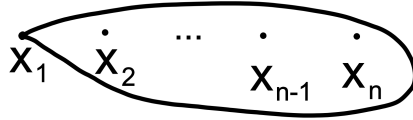


Figura 9: $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\sigma_{n-1}\dots\sigma_2\sigma_1$

Tal i com hem dit prèviament, l'objectiu és demostrar la presentació del grup de trenes d'Artin:

Teorema 4.27. *El grup de trenes $B_n(E^2)$ de n cordes té com a generadors $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ i les següents relacions:*

1. $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$ per a $|i - j| \geq 2$ i per a tot $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$
2. $\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}$ per a tot $i = 1, \dots, n - 2$

La demostració que veurem no és la que va fer Artin, sinó l'alternativa que van proposar Fadell i van Buskirk [12], la qual es pot fer el cas anàleg pel grup esfèric de trenes.

Demostració. Sigui $B(n)$ el grup abstracte que té com a generadors $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}$ i les relacions

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_j &= \tilde{\sigma}_j \cdot \tilde{\sigma}_i, & |i - j| \geq 2 & \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i &= \tilde{\sigma}_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_{i+1}, & i \in \{1, \dots, n-1\}\end{aligned}$$

Existeix un homomorfisme $\iota_n : B(n) \rightarrow B_n(E^2)$ que porta $\tilde{\sigma}_i$ a σ_i . Com que les dues relacions es compleixen, l'homomorfisme ι_n està ben definit. Ara ens falta veure que ι_n és un isomorfisme.

Tal i com hem definit prèviament a 3.6, tenim:

$$1 \rightarrow \pi_1(F_n(E^2), \overline{c_0}) \rightarrow \pi_1(C_n(E^2), c_0) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \rightarrow 1$$

O el que és el mateix si definim $H_n := \pi_1(F_n(E^2), \overline{c_0})$ i ja sabem que $B_n(E^2) \cong \pi_1(C_n(E^2), c_0)$:

$$1 \rightarrow H_n \rightarrow B_n(E^2) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \rightarrow 1$$

Per tant, si induïm, podem definir un homomorfisme exhaustiu:

$$\tilde{\tau}_n : B(n) \rightarrow \Sigma_n$$

És un homomorfisme perquè la permutació $\tilde{\sigma}_i$ intercanvia i amb $i+1$, posició que està en Σ_n . Com que les relacions del teorema es mantenen en les permutacions dins de Σ_n , l'homomorfisme $\tilde{\tau}$ està ben definit, i com que les permutacions generen Σ_n aleshores és exhaustiu. Sigui $H(n) = \ker(\tilde{\tau}_n)$.

Pel grup $B(n)$ que hem definit, tenim:

$$1 \rightarrow H(n) \rightarrow B(n) \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} \Sigma_n \rightarrow 1$$

La funció que va de $H(n)$ a $B(n)$ és l'homomorfisme d'inclusió. Si $\iota_n : B(n) \rightarrow B_n(E^2)$ és l'homomorfisme que relaciona $B(n)$ amb $B_n(E^2)$, aleshores la restricció de ι_n al subgrup $H(n)$ en $B(n)$ serà $\iota'_n : H(n) \rightarrow H_n$.

Com que $\tau_n(\sigma_i) = (i, i+1)$, és a dir que també intercanvia i amb $i+1$, aleshores obtenim:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H(n) & \longrightarrow & B(n) & \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} & \Sigma_n \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \iota'_n & & \downarrow \iota_n & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & B_n(E^2) & \xrightarrow{\tau_n} & \Sigma_n \longrightarrow 1 \end{array}$$

Si apliquem el lema dels cinc 3.21 a aquest diagrama, tenim el següent:

Lema 4.28. *L'homomorfisme $\iota_n : B(n) \rightarrow B_n(E^2)$ és un isomorfisme si i només si l'homomorfisme $\iota'_n : \ker(\tilde{\tau}_n) \rightarrow \pi_1(F_n(E^2), \overline{c_0})$ és un isomorfisme.*

Si veiem doncs que ι'_n és un isomorfisme, haurem vist que $B_n(E^2)$ i $B(n)$ són isomorfs.

Una característica de $\pi_1(F_n(E^2), \overline{c_0})$ que hem vist prèviament és que no hi ha permutació dels punts finals i els punts inicials, ja que es tracta del grup fonamental del grup de configuracions de punts ordenats. Per tant, per la reducció del grup de trenes al subgrup de trenes pures es pot aplicar inducció sobre el nombre de cordes.

Per a demostrar que ι'_n és un isomorfisme, necessitem una presentació de $H(n)$.

Lema 4.29. *El grup $H(n)$ es presenta amb els generadors*

$$a_{ij} = \tilde{\sigma}_{j-1}\tilde{\sigma}_{j-2}\cdots\tilde{\sigma}_{i+1}\tilde{\sigma}_i^2\tilde{\sigma}_{i+1}^{-1}\cdots\tilde{\sigma}_{j-2}^{-1}\tilde{\sigma}_{j-1}^{-1}$$

per a $1 \leq i < j \leq n$, i les relacions següents:

$$a_{rs}^{-1}a_{ij}a_{rs} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < r < s < j \text{ o bé } r < s < i < j \\ a_{rj}a_{ij}a_{rj}^{-1} & \text{si } r < i = s < j \\ a_{rj}a_{sj}a_{ij}a_{sj}^{-1}a_{rj}^{-1} & \text{si } i = r < s < j \\ a_{rj}a_{sj}a_{rj}^{-1}a_{sj}^{-1}a_{rj}a_{sj}^{-1}a_{rj}^{-1} & \text{si } r < i < s < j \end{cases}$$

Demostració. La demostració d'aquesta presentació de $H(n)$ es basa en el procés de re-escriptura de Reidemeister-Schreier que podem trobar a [21]. És una demostració que utilitza conceptes de teoria de grups que no s'han introduït en aquest treball. Així doncs, assumirem el resultat per a poder seguir.

Recordem que $H_n = \pi_1(F_n(E^2), \overline{c_0})$ i sigui $H(n) = \ker(\tilde{\tau}_n)$, assumirem el resultat final. Per a visualitzar-ho millor, veiem que la n -trena que correspon a a_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, agafa la corda j i envolta la corda i tot passant per sota de la resta de cordes. La trena a_{ij}^{-1} fa el mateix però envoltant la corda i en el sentit oposat.

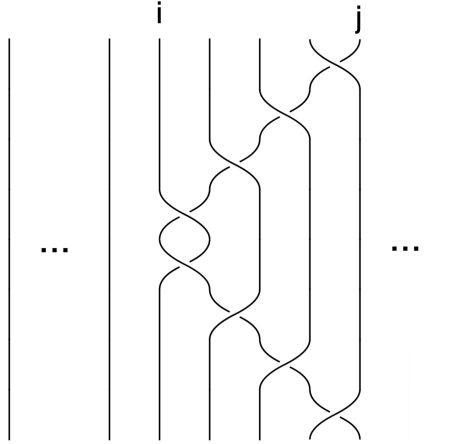


Figura 10: n -trena geomètrica $a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$.

Totes les trenes pures es poden representar d'aquesta manera.

Exemple 4.30. Si tenim la 5-trena pura de la Figura 5, que en el llenguatge de permutacions de $B_n(E^2)$ s'escriuria com

$$\sigma_4\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_4\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}$$

Per tant, hem vist gràficament que es tracta d'una trena pura perquè els punts inicials i els punts finals no permuten.

Ara, el que volem veure és que es podien escriure amb les noves permutacions presentades al lema 4.29. La presentació d'aquesta trena pura particular en $H(n)$ seria:

$$a_{45}a_{23}^{-1}a_{13}a_{23}a_{12}^{-1} = (\sigma_4^2)(\sigma_2^{-2})(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1})(\sigma_2^2)(\sigma_1^{-2})$$

Sigui $H(n-1)$ un subgrup de $H(n)$ generat per $\{a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n-1\}$. Aleshores, hi ha un homomorfisme natural $\eta : H(n) \rightarrow H(n-1)$, on $\eta(a_{ij}) = a_{ij}$ si $1 \leq i < j \leq n-1$ i $\eta(a_{in}) = 1$ si $1 \leq i < n$. És a dir, estem traient l'últim fil.

El nucli de η és la clausura normal en $H(n)$ (el subgrup normal més petit que conté aquest subgrup) dels elements $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{(n-1)n}$. Sigui $U(n)$ un subgrup de $H(n)$ generat pels elements $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{(n-1)n}$ és normal. Com que $\ker(\eta) = U(n)$, tenim la següent successió:

$$1 \rightarrow U(n) \rightarrow H(n) \rightarrow H(n-1) \rightarrow 1$$

Ara usarem el teorema 3.15 que hem vist a l'apartat de conceptes previs. Considerem la fibració

$$\pi : F_n(E^2) \rightarrow F_{n-1}(E^2)$$

on $F_{n-1,1}(E^2) = E^2 \setminus Q_{n-1}$ és la fibra. Com que els grups d'homotopia dels espais en aquesta fibració s'anul·len en dimensions més grans o iguals que 2, la successió d'homotopia per a π es pot reduir de la següent manera:

$$1 \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(E^2)) \rightarrow \pi_1(F_n(E^2)) \rightarrow \pi_1(F_{n-1}(E^2)) \rightarrow 1$$

Això equival a la següent successió:

$$1 \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(E^2)) \rightarrow H_n \rightarrow H_{n-1} \rightarrow 1$$

on $H_n = \pi_1(F_n(E^2))$ i $H_{n-1} = \pi_1(F_{n-1}(E^2))$.

L'aplicació $\pi_* : H_n \rightarrow H_{n-1}$ elimina la corda n . Notem que

$$\ker(\pi_*) = \pi_1(F_{n-1,1}(E^2)) = \pi_1(E^2 \setminus Q_{n-1})$$

és un grup de $n-1$ generadors.

La trena geomètrica que correspon a a_{ij} té el mateix comportament a π_* que a η . A més, existeix la restricció de ι'_n a $U(n)$, que anomenarem ι''_n :

$$\iota''_n : U(n) \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(E^2))$$

A més, podem veure que hi ha un homomorfisme, aplicació de ι'_n però quan hi ha $n-1$ fils, que porta $H(n-1)$ a H_{n-1} , això ho denotarem com ι'_{n-1} :

$$\iota'_{n-1} : H(n-1) \rightarrow H_{n-1}$$

Per tant, veiem que el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U(n) & \longrightarrow & H(n) & \xrightarrow{\eta} & H(n-1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \iota''_n & & \downarrow \iota'_n & & \downarrow \iota'_{n-1} \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(F_{n-1,1}(E^2)) & \longrightarrow & H_n & \xrightarrow{\pi_*} & H_{n-1} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Ara prenem els punts de E^2 que hem pres anteriorment $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (2,0), \dots$, $P_n = (n,0)$. Les trenes de H_n són considerades llaços en $F_n(E^2)$ i basades al punt

$\bar{c}_0 = (P_1, \dots, P_n) \in F_n(E^2)$. Passa el mateix amb les trenes de H_{n-1} , que són llaços a $F_{n-1}(E^2)$ basats al punt $(P_1, \dots, P_{n-1}) \in F_{n-1}(E^2)$.

El punt base en la fibra $F_{n-1,1}(E^2)$ per a la fibració $\pi : F_n(E^2) \rightarrow F_{n-1}(E^2)$ és $P_n \in F_{n-1,1}(E^2) = E^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$.

Si tenim la trena $\iota'_n(a_{ij}) \in H_n$ degut a que $a_{ij} \in H(n)$, veiem que pren el fil j i el passa al voltant del fil i . Això significa que $\iota''_n(a_{jn}) \in \pi_1(F_{n-1,1}(E^2))$ per a $1 \leq j < n$ està representat pel llaç en $F_{n-1,1}(E^2) = E^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$, el qual surt el punt P_n i passa al voltant del punt P_j , tal i com hem vist a la Figura 8, però separant el punt P_j dels punts $P_1, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_{n-1}$.

Aleshores, tenim que el conjunt d'elements $\{\iota''_n(a_{jn}) \mid 1 \leq j < n\}$ és una base lliure per al grup lliure $\pi_1(F_{n-1,1}(E^2)) = \pi_1(E^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\})$ de rang $n - 1$.

Encara ens queda veure que ι'_n és un isomorfisme.

El grup $U(n) = \ker(\eta) \subset H(n)$ està generat per $\{a_{jn} \mid 1 \leq j < n\}$, és a dir $n - 1$ elements. Tal i com hem vist, tenim el morfisme de grups $\iota''_n : U(n) \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(E^2))$ on $\pi_1(F_{n-1,1}(E^2))$ és un grup lliure finitament generat. Aquest morfisme envia generadors de $U(n)$ a una base de $\pi_1(F_{n-1,1}(E^2))$, com a grup lliure. Per tant, és un morfisme exhaustiu.

Podem escriure $U(n) = F(\{a_{jn}\})/R$, on $F(\{a_{jn}\})$ és el grup lliure generat per a_{jn} i R les relacions. Per tant, tenim el següent diagrama

$$\begin{array}{ccc} U(n) = F(\{a_{jn}\})/R & \xrightarrow{\iota''_n} & \pi_1(F_{n-1,1}(E^2)) \\ \uparrow p & \nearrow \iota''_n \circ p & \\ F(\{a_{jn}\}) & & \end{array}$$

On p és la projecció del grup lliure generat per $\{a_{jn}\}$ al quocient amb les relacions i que, per tant, també és exhaustiva.

Veiem també que la composició de morfismes exhaustius $\iota''_n \circ p$ és un morfisme exhaustiu.

Ara sabem que $\pi_1(F_{n-1,1}(E^2))$ és lliure i de rang $n - 1$, per tant, pel que sabem de l'apartat de conceptes previs, és hopfià. Com que $F(\{a_{jn}\})$ també és lliure i de rang $n - 1$, aleshores per hopfianitat, tenim que $\iota''_n \circ p$ és un isomorfisme. Això implica que p és injectiva i que per tant $R = \{1\}$ i aleshores $U(n)$ és lliure de rang $n - 1$ i ι''_n un isomorfisme, tal com volíem veure.

Per a veure que ι'_n és un isomorfisme, farem inducció sobre n . Veiem que $H_1 = 1$ i que $\pi_1(F_{0,1}(E^2)) = 1$. Per tant ι'_1 és un isomorfisme. Ara assumim que ι'_{n-1} és un isomorfisme. Pel lema dels cinc, tenim que ι'_n també és un isomorfisme, ja que tenim que ι'_{n-1} i ι''_n ho són.

Aplicant un altre cop el lema dels cinc, com que ι'_n és un isomorfisme, aleshores ι_n és un isomorfisme. Per tant, hem demostrat la completesa de la presentació del grup de trenes d'Artin amb les relacions que tenim en el teorema. $\square$

5 Grup esfèric de trenes

Fins ara, hem vist el grup de trenes d'Artin. Ara veurem un altre grup molt relacionat: el grup esfèric de trenes o grup de trenes en S^2 .

Va ser estudiat per primer cop per Zariski, i més tard per Fadell i Van Buskirk[11], els quals van demostrar que la presentació amb les relacions d'Artin i una relació addicional era completa, tal i com van fer amb el grup de trenes d'Artin.

En aquest capítol, veurem les definicions tal i com les hem vist en el grup de trenes en E^2 i la relacions que el completa. Al final del capítol, veurem una aplicació d'un problema de física de partícules i camps quàntics al grup esfèric de trenes: el problema de la corda de Dirac.

5.1 Definició geomètrica

Les trenes d'aquest grup tenen una característica que difereix de les trenes d'Artin. En comptes de veure les trenes com a camins continus que surten de punts del pla $z = 1$ fins a $z = 0$, seran camins continus igual però en comptes de plans tindrem esferes. Això farà que els fils puguin tenir més moviment, ja que podran voltejar les esferes, que es mantindran fixes. Es pot representar de diferents maneres. Una molt utilitzada és una esfera dins de l'altra, de les quals els punts surten de l'interior de l'esfera exterior fins els punts de l'exterior de l'esfera interior. La definició formal és la següent:

Definició 5.1. Siguin $S_0 = S^2$ l'esfera unitat en $\mathbb{R}^3$ i sigui S_1 l'esfera de radi 2. Una n -trena β en S^2 és un sistema de n arcs $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ en $S^2 \times [0, 1]$ que connecten el conjunt de punts $P_1, \dots, P_n$ de S_0 amb $P'_1, \dots, P'_n$ de S_1 tals que:

1. Cada arc $\mathcal{A}_i$ interseca cada esfera exactament una vegada.
2. Els arcs $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ intersequen cada esfera en exactament n punts diferents.

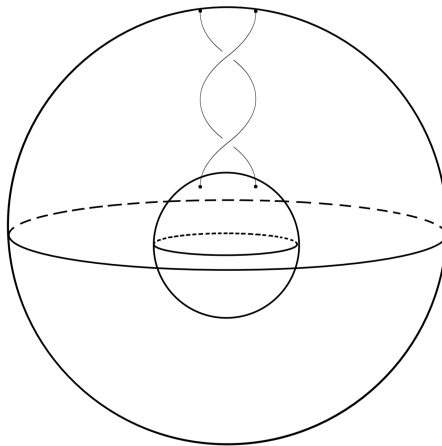


Figura 11: Una de les diferents representacions de les trenes del grup esfèric de trenes.

Definició 5.2. Siguin β_1 i β_2 dues trenes del grup de trenes en S^2 . Les podem pensar com contingudes a $S^2 \times [0, 1]$. Direm que són *equivalents* si existeix una aplicació contínua

$$H : S^2 \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^2 \times [0, 1]$$

que denotem per $H(x, s, t)$ i escrivim $H_t(x, s) = H(x, s, t)$, tal que H_t és un homeomorfisme de $S^2 \times [0, 1]$ en ell mateix que deixa fix el subespai $A = (S^2 \times \{0\}) \cup (S^2 \times \{1\})$ per a tot t , i tal que $H_0 = id$ i $H_1(\beta_0) = \beta_1$.

Observació 5.3. Veiem que la condició que H_t deixi fix el subespai A és necessària per a que les esferes no puguin rotar. Si poguessin rotar o fer algun altre tipus de moviment, estaríem parlant d'un altre tipus de grup amb més relacions. El conjunt A representa els extrems de $S^2 \times [0, 1]$.

Notació 1. Denotarem el grup esfèric de n -trenes com $B_n(S^2)$.

Observació 5.4. Anàlogament al grup de trenes d'Artin $B_n(E^2)$, el grup esfèric de trenes $B_n(S^2)$ és un grup.

Observació 5.5. Per la semblança que té amb $B_n(E^2)$, podem veure fàcilment que els generadors σ_i també generen $B_n(S^2)$. Per tant, utilitzarem els mateixos símbols.

5.2 Grup de trenes en S^2 com a grup fonamental d'un espai de configuracions

Per a poder demostrar la completesa de la presentació del grup de trenes en S^2 , cal que, tal i com hem fet amb el grup de trenes d'Artin, veiem l'isomorfisme que hi ha amb el grup fonamental de l'espai de configuracions de punts, però aquest cop dels punts de S^2 . Aquest isomorfisme, el va idear Fox[13]:

Definició 5.6. Una n -trena β en S^2 és un llaç $f : [0, 1] \rightarrow C_n(S^2)$ amb $f(0) = f(1) = [P_1, \dots, P_n]$ on $[P_1, \dots, P_n]$ és la configuració no ordenada dels punts $P_1, \dots, P_n$.

Definició 5.7. Una n -trena pura en S^2 es pot definir com la classe d'homotopia del llaç $f : [0, 1] \rightarrow F_n(S^2)$ amb $f(0) = f(1) = (P_1, \dots, P_n)$.

Per tant, podem veure aquests grups com el grup fonamental d'aquests fibrats, és a dir, el grup esfèric de trenes es pot identificar canònicament amb el grup fonamental:

$$\pi_1(C_n(S^2), c_0)$$

De la mateixa manera que el grup esfèric de trenes pures es pot identificar com a cas particular:

$$\pi_1(F_n(E^2), \bar{c}_0)$$

5.3 Relacions en $B_n(S^2)$

Teorema 5.8. *El grup esfèric de trenes $B_n(S^2)$ és el grup amb $n-1$ generadors $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ i amb les relacions següents:*

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ per a $|i - j| \geq 2$ i per a tot $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ per a tot $i = 1, \dots, n-2$.
3. $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = 1$.

Veiem alguns exemples abans de fer la demostració.

Exemple 5.9. • $B_1(S^2) = \{1\}$

• $B_2(S^2) = \langle \sigma_1 \mid \sigma_1^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

• $B_3(S^2) = \left\langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \begin{array}{l} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 = 1 \end{array} \right\rangle$

Demostració. Ara volem, de forma anàloga, demostrar que aquesta presentació del grup esfèric de trenes és completa. Ho farem per sobre perquè s'ha fet de forma detallada pel grup de trenes d'Artin i és una demostració molt semblant.

Primer de tot, volem relacionar el grup de trenes en E^2 i el grup de trenes en S^2 , i ho farem tal i com es fa en [12].

Sigui $x_n = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1$, aleshores hi ha un homomorfisme:

$$\beta : B_n(E^2) \rightarrow B_n(S^2) \rightarrow 1$$

amb nucli $R(x_n)$, on és el subgrup normal més petit de $B_n(E^2)$ que conté x_n . Com que $\tau_n(R(x_n)) = 1$, podem definir l'homomorfisme $\tau'_n : B_n(S^2) \rightarrow \Sigma^n$ i tenim el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccc} B_n(E^2) & \xrightarrow{\beta} & B_n(S^2) & \longrightarrow & 1 \\ & \searrow \tau_n & \swarrow \tau'_n & & \\ & & \Sigma^n & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

És a dir que podem entendre el grup esfèric de trenes com el grup quocient següent:

$$B_n(S^2) \cong B_n(E^2)/R(x_n)$$

A més, veiem que $x_n \in H(n)$ tal i com l'hem definit a 4.29 i per tant $R(x_n) \subset H(n)$.

Per tant, ara el nostre objectiu és demostrar que el següent morfisme de grups és un isomorfisme

$$\phi_n : SB(n) \rightarrow B_n(S^2)$$

on $SB(n)$ és el grup abstracte que es presenta amb els generadors $\tilde{\sigma}_1 \dots, \sigma_{n-1}$ i les relacions

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_j &= \tilde{\sigma}_j \cdot \tilde{\sigma}_i, & |i-j| \geq 2, & i, j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \tilde{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i &= \sigma_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} & i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \tilde{\sigma}_1 \cdot \tilde{\sigma}_2 \cdots \tilde{\sigma}_{n-2} \tilde{\sigma}_{n-1} \tilde{\sigma}_{n-1} \tilde{\sigma}_{n-2} \cdots \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1 &= 1 \end{aligned}$$

Igual que en el cas de les trenes a E^2 , existeix l'homomorfisme ϕ_n que porta $\tilde{\sigma}_i$ a σ_i per tota $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Com que les tres relacions es compleixen, l'homomorfisme està ben definit.

Ara veiem que tots els grups que hem definit anteriorment, els podem tractar amb l'homomorfisme β . Per tant, definim:

$$H(n)' := \beta(H(n)) \quad U(n)' := \beta(U(n))$$

Definim H'_n com el grup fonamental de $F_n(S^2)$ i ja sabem que $B_n(S^2)$ serà el grup fonamental de $C_n(S^2)$, tot distingint l'espai de configuracions dels punts ordenats i no ordenats, respectivament.

Tenim doncs la següent successió

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H(n)' & \longrightarrow & SB(n) & \xrightarrow{\tilde{\tau}'_n} & \Sigma_n \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \phi'_n & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H'_n & \longrightarrow & B_n(S^2) & \xrightarrow{\tau'_n} & \Sigma_n \longrightarrow 1 \end{array}$$

Ara definim el morfisme ϕ'_n com la restricció de ϕ_n al grup $H(n)'$. Així doncs, si ϕ'_n és un isomorfisme, aleshores ϕ_n també ho és degut al lema dels cinc 3.21.

La restricció de ϕ'_n a $U'(n)$ l'anomenarem ϕ''_n :

$$\phi''_n : U(n) \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(S^2))$$

Així doncs, podem escriure la següent successió

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U(n) & \longrightarrow & H(n) & \xrightarrow{\eta} & H(n-1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ 1 & \longrightarrow & U(n)' & \longrightarrow & H(n)' & \longrightarrow & H(n-1)' \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \phi''_n & & \downarrow \phi'_n & & \downarrow \phi'_{n-1} \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(F_{n-1,1}(S^2)) & \longrightarrow & \pi_1(F_{0,n}(S^2)) & \longrightarrow & \pi_1(F_{0,n-1}(S^2)) \longrightarrow 1 \end{array}$$

De la mateixa manera que hem vist al grup de trenes en E^2 , podem veure que la successió

$$1 \rightarrow U(n)' \rightarrow H(n)' \rightarrow H(n-1)' \rightarrow 1$$

és la successió exacta per a $B_n(S^2)$.

Anàlogament al grup de trenes d'Artin, hem vist que ι'_n era un isomorfisme i que, per tant, ι_n era un isomorfisme, podem veure que ϕ'_n és un isomorfisme i que, per tant, ϕ_n ho és.

Això ho podem demostrar veient que $U(n)'$ és un grup lliure finitament generat pels elements de $U(n)$ aplicats a β , és a dir $\beta(a_{jn})$ per a tot $1 \leq j < n$. Això significa que $U(n)'$ també té rang $n - 1$. Per tant ϕ''_n és un morfisme exhaustiu, ja que envia els generadors de $U(n)'$ a una base de $\pi(F_{n-1,1}(S^2))$.

Si escrivim $U(n)'$ com a grup finit tal i com l'hem escrit amb les trenes d'Artin quotient les relacions, veurem que per hopfianitat ϕ''_n és isomorfisme, ja que $\pi(F_{n-1,1}(S^2))$ és un grup lliure de rang $n - 1$ finitament generat i per tant hopfià.

Si fem el mateix procés que anteriorment, acabem veient per inducció que ϕ'_n és un isomorfisme i pel lema dels cinc ϕ_n també ho és. $\square$

5.4 Problema de la corda de Dirac

El problema de la corda de Dirac va ser plantejat per primer cop per Paul Dirac l'any 1931. Es va plantejar per l'observació de la noció de mig gir de partícules elementals. Les partícules elementals amb mig gir s'anomenen fermions, i inclouen l'electró, el protó i el neutró, entre d'altres. Dirac va predir que si fas una volta sencera de la partícula al voltant d'un eix, llavors ja no és la mateixa partícula sinó que està en un estat diferent. En canvi, si fas dos girs sencers sobre el mateix eix, torna a ser la mateixa partícula. Per als neutrons no es va poder veure experimentalment fins l'any 1975. En aquest apartat, veurem com el problema de la corda de Dirac és un fenomen que es pot aplicar al món macroscòpic i mitjançant la topologia podem veure el perquè i demostrar-lo.

El problema de Dirac el va resoldre M.H.A. Newman [24] l'any 1942. Quan ho va fer, encara no s'havia parlat del grup esfèric de trenes. Qui ho va formalitzar van ser E. Fadell i Van Buskirk [11] l'any 1962. Per això, utilitzarem la notació i la solució d'ells dos i alguns conceptes del problema de Dirac fets per E. Fadell [9].

Per a obtenir el model pel problema de Dirac, utilitzarem la representació que hem vist pel grup esfèric de trenes on tenim dues esferes, l'una dins de l'altra. Un fet important a tenir en compte és que les dues esferes estan fixes, és a dir no poden rotar, de la mateixa manera que ho hem vist anteriorment.

Definició 5.10. La *trena de Dirac* és la trena en S^2 que es forma mitjançant una trena trivial del grup esfèric de trenes i girant l'esfera interior sobre l'eix vertical una volta sencera, és a dir una rotació de 2π .

Observació 5.11. Veiem que es tracta d'una trena pura perquè partim de la trena trivial. La seva forma general es pot escriure de la següent manera:

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$$

Notació 2. La trena de Dirac la denotarem com Δ i la que fa dues voltes senceres (4π) sobre l'eix vertical la denotem com Δ^2 .

Teorema 5.12. *Si Δ la trena de Dirac en S^2 i sigui $m \geq 1$ enter. Aleshores, Δ^m és una trena no trivial en S^2 per m senar i és una trena trivial en S^2 per m parell.*

Abans d'entrar a la demostració, veurem el cas visual i un exemple del problema mitjançant les relacions per a la 3-trena de Dirac. En el llibre [21], resol l'equivalència de la 2-trena de Dirac al quadrat amb la trena trivial de forma visual.

A la Figura 12, podem veure el procés de desfer la 3-trena de Dirac al quadrat i veure que és equivalent a la trena trivial en $B_3(S^2)$. Ho fem al quadrat perquè és el nombre parell més petit i, per tant, que pot simplificar més la representació, però per a la resta d'exponents parells serà fer el mateix però aplicar els passos més cops.

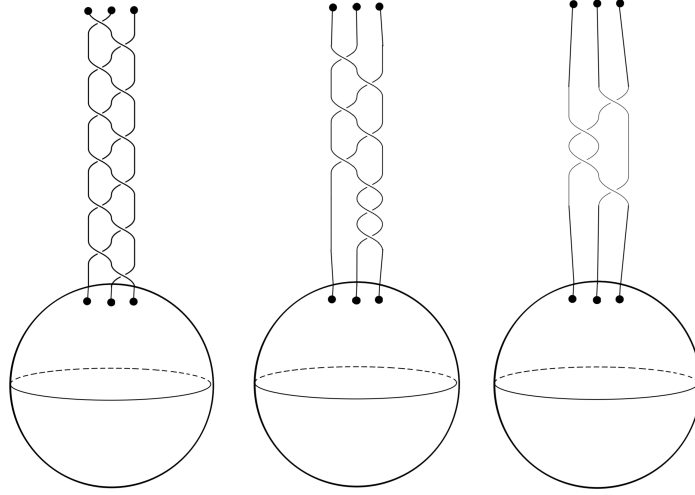


Figura 12: Resolució visual que $\Delta_3^2 = 1$.

La primera imatge és la 3-trena de Dirac, és a dir $\Delta_3^2 = (\sigma_1\sigma_2)^6$, ja que $\Delta_3 = (\sigma_1\sigma_2)^3$. Si prenem el primer fil per baix i el passem per sota de l'esfera interior rodejant-la d'esquerra a dreta, obtindrem la segona imatge, que correspon a la trena $(\sigma_1\sigma_2)^3\sigma_2^2$. Prenent el segon fil per baix també, i passant-lo per sota l'esfera de dreta a esquerra, obtindrem la tercera trena. Aquesta ja sabem que correspon a la trena trivial, ja que és $\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2$, i la podem desfer prenent el tercer fil i rodejant l'esfera. Tot això sense fer cap gir a les esferes.

Ara veiem que mitjançant les relacions que presenten aquest grup, es compleix el problema de Dirac per a $m = 1$ i per a $m = 2$ per a trenes de 3 fils, és a dir per a $B_3(S^2)$. Tenim que aquest grup es presenta de la següent manera:

$$B_3(S^2) = \left\langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \begin{array}{l} \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = 1 \end{array} \right\rangle$$

Tenim que la 3-trena de Dirac és:

$$\Delta_3 = (\sigma_1\sigma_2)^3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

Pel problema de la corda de Dirac, tindríem que aquesta trena no és trivial:

$$\Delta_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_2$$

On a l'últim pas estem aplicant la relació addicional que caracteritza el grup esfèric de trenes. Aleshores, ens falta veure que σ_2^2 no és trivial, i això ho veurem a la proposició 5.22, on veiem que σ_1 i σ_2 tenen ordre 4.

Veiem doncs el cas per a $m = 2$, on hem de veure que la trena Δ_3^2 és trivial:

$$\begin{aligned}\Delta_3^2 &= (\sigma_1\sigma_2)^6 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \\ &= \sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

Per a seguir, podem tenir en compte la següent igualtat, que resulta de la relació addicional:

$$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = 1 \Rightarrow \sigma_2^2\sigma_1 = \sigma_1^{-1} \Rightarrow \sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1 = 1$$

I també:

$$\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1 = 1 \Rightarrow \sigma_2\sigma_1 = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \Rightarrow \sigma_2\sigma_1\sigma_1 = \sigma_2^{-1} \Rightarrow \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2 = 1$$

Per tant:

$$\Delta_3^2 = \sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2 = 1$$

Ara ja podem procedir a la demostració del teorema.

Demostració. Per tal de veure que quan m és senar la trena no és trivial utilitzarem la següent proposició.

Proposició 5.13. *Sigui β una n -trena de $B_n(S^2)$. Si escrivim $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$, aleshores:*

$$\exp(\beta) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k \quad (\text{mod } 2(n-1))$$

és un invariant de $B_n(S^2)$.

Demostració. Considerem les relacions d'Artin. Aleshores $\exp(\beta)$ és constant per totes dues relacions. Però per la tercera relació addicional, $\exp(\beta)$ difereix del factor $\pm 2(n-1)$ pels dos costats de la relació, ja que $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2\sigma_1 = 1$ té com a suma d'exponents $2(n-1)$. $\square$

Com que la trena trivial té $\exp(1_n) = 0$, aleshores $\exp(\beta)$ és el mateix per a trenes equivalents a la trivial en $B_n(S^2)$.

Observació 5.14. Si $\beta = \beta'$ en $B_n(S^2)$, aleshores $\exp(\beta) = \exp(\beta') \pmod{2(n-1)}$.

D'aquesta proposició tenim que, per exemple en una 3-trena, $\exp(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1) = 4 \equiv 0 \pmod{4}$, però $\exp((\sigma_1\sigma_2)^6) = 6 \not\equiv 0 \pmod{4}$. Per tant, la 3-trena de Dirac no pot ser la trena trivial en $B_3(S^2)$.

Per ara veure el cas general, suposem que $m = 2k + 1$. Pel cas de nombre senar de fils, sigui $n = 2q + 1$ amb $q \geq 1$. Per tant

$$\begin{aligned}\exp(\Delta^m) &= mn(n-1) = (2k+1)(2q+1)2q = \\ &= (4kq + 2k + 2k + 1)2q \equiv 4qk + 4q^2 + 2q \equiv 2q \not\equiv 0 \pmod{4q}\end{aligned}$$

Com que $\exp(1_n) = 0$, ara hem vist que per una trena amb un nombre senar de fils, Δ^m no és equivalent a la trena trivial quan m és senar.

Veiem-ho ara per a una trena amb un nombre parell de fils $n \geq 4$. Si traiem l'últim fil de la trena, obtindrem la trena en $B_{n-1}(S^2)$

$$(\Delta')^m = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2})^{m(n-1)}$$

Com que m és senar i $n - 1$ també, pel que acabem de veure Δ' no pot ser trivial en $B_{n-1}(S^2)$ i, per tant, Δ tampoc ho pot ser en $B_n(S^2)$.

Per a demostrar que $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})$ té ordre $2n$ en $B_n(S^2)$ necessitarem veure diverses propietats d'aquest grup.

Lema 5.15. $\sigma_i(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j) = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j) \sigma_{i-1}$, $1 < i \leq j$.

Demostració. Veiem que la demostració és simplement aplicar les dues primeres relacions, és a dir les relacions d'Artin:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j) &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j) \sigma_{i-1} \end{aligned}$$

□

Observació 5.16. Aquest lema implica que $\sigma_i = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{i-1} \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{-(i-1)}$ per a tot $1 < i \leq n - 1$. Això implica que els generadors de $B_n(S^2)$ tenen el mateix ordre.

Lema 5.17. $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n = (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})^{n-1}$.

Demostració. Repetint la propietat del lema anterior i la relació addicional de $B_n(S^2)$, obtenim el resultat.

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{n-2} \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_{n-1} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{n-2} (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \end{aligned}$$

Degut al lema anterior i l'observació on veiem que $\sigma_i(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{i-1} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{i-1} \sigma_1$ prenent $i = n - 1$. Si repetim iterativament obtenim el següent:

$$\begin{aligned} &(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_{n-1} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{n-2} (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_{n-1} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{n-3} \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})^2 = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{n-3} (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})^2 = \cdots = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})^{n-2} = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1) (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})^{n-1} = (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})^{n-1} \end{aligned}$$

□

Lema 5.18. $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j)^{j+1} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1})^j (\sigma_{j+1}^{-1} \sigma_{j+2}^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_{j+2}^{-1} \sigma_{j+1}^{-1})$.

Demostració. Mitjançant les relacions del grup i el lema 5.15, podem arribar al resultat.

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j)^{j+1} &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) \sigma_j (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j)^{j-1} (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j)^{j-1} \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1})^2 (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j)^{j-2} \sigma_2 \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j) = \cdots = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1})^j (\sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_j) = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1})^j (\sigma_{j+1}^{-1} \sigma_{j+2}^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_{j+2}^{-1} \sigma_{j+1}^{-1}) \end{aligned}$$

□

Lema 5.19. $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_j)^{j+1}(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_j^{-1})^{j+1} = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{j-1})^j(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})^j$

Demostració. Pel lema anterior aplicat tal i com està descrit i per a l'invers, és a dir

$$(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_j^{-1})^{j+1} = (\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})^j(\sigma_{j+1}\sigma_{j+2}\cdots\sigma_{n-1}\sigma_{n-1}\cdots\sigma_{j+2}\sigma_{j+1})$$

I també utilitzant les relacions que presenten el grup, tenim el següent:

$$\begin{aligned} (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_j)^{j+1}(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_j^{-1})^{j+1} &= (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{j-1})^j(\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_{j+2}^{-1}\cdots\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+2}^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}) \cdot \\ &\cdot (\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})^j(\sigma_{j+1}\sigma_{j+2}\cdots\sigma_{n-1}\sigma_{n-1}\cdots\sigma_{j+2}\sigma_{j+1}) = \\ &= (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{j-1})^j(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})^j \end{aligned}$$

□

Lema 5.20. $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^{2n} = 1$

Demostració. Per la relació addicional que té el grup de trenes en $B_n(S^2)$ sabem que $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{n-1}^{-1}$ i pel lema que acabem de demostrar, tenim:

$$\begin{aligned} (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^{2n} &= (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{n-1}^{-1})^n = \\ &= (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-2})^{n-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1})^{n-1} = \cdots = \sigma_1^2(\sigma_1^{-1})^2 = 1 \end{aligned}$$

□

Proposició 5.21. *Sigui $a = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ i $b = \sigma_1\sigma_2$. Aleshores, $B_3(S^2)$ té la següent presentació*

$$B_3(S^2) = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 \rangle$$

Demostració. La presentació estàndard de $B_3(S^2)$ és

$$B_3(S^2) = \left\langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \begin{array}{l} \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = 1 \end{array} \right\rangle$$

Amb els nous generadors a i b , busquem relacions entre ells:

$$a = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \Rightarrow a^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = (\sigma_2\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)\sigma_2 = \sigma_2^2$$

Calculem b^3

$$b^3 = (\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = (\sigma_2\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1)\sigma_2 = \sigma_2^2$$

Ara tenim que $a^2 = b^3$. Ens falta veure que $\sigma_2^2 = (ab)^2$.

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= (\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2)^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2) = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2) = \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1)\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Com que els generadors a i b corresponen a combinacions naturals dels σ_i per $i = 1, 2$ i les relacions reflecteixen les que generen el grup $B_3(S^2)$, tenim que el grup es pot presentar així. □

Proposició 5.22. $B_3(S^2)$ és un grup finit d'ordre 12. A més, σ_1 i σ_2 tenen ordre 4.

Demostració. Tal i com acabem de veure, el grup esfèric de 3-trenes es pot presentar amb els dos generadors a i b . També sabem que $a^4 = (\sigma_1\sigma_2)^6 = 1$.

Sigui N una clausura normal de a^2 . Mitjançant la Proposició 5.13, tenim:

$$a^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2 = (\sigma_1\sigma_2)^3 \neq 1$$

Aleshores $N \neq \{1\}$, però $|N| = 2$. El grup quocient $B_3(S^2)/N$ té la presentació

$$B_3(S^2)/N = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

Aquesta és la mateixa presentació del grup simètric de tres lletres S_3 . Per tant:

$$|B_3(S^2)| = |N||S_3| = 2 \times 6 = 12$$

Ara ens falta veure que les dues permutacions σ_1 σ_2 tenen ordre 4. Sabem que $a^2 = \sigma^2$ i com que $a^4 = 1$, aleshores $\sigma_2^4 = 1$.

Ara tenim en compte que $\sigma_1 \neq 1$ i $\sigma_1^2 \neq 1$. A partir de la proposició de la suma d'exponents, podem obtenir el mateix per a σ_1 , veient doncs que les dues permutacions tenen ordre 4 en $B_3(S^2)$. $\square$

Proposició 5.23. $B_n(S^2)$ és un grup infinit per $n \geq 4$.

A continuació, amb tot el que hem vist, ja podem demostrar el problema de la corda de Dirac.

Teorema 5.24. $(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})$ té ordre $2n$ en $B_n(S^2)$.

Demostració. Només ens cal veure que $(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n \neq 1$, ja que $(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^{2n} = 1$ ja ho hem vist al lema 5.20 i a més $\alpha'(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) = (1nn - 1 \cdots 32)$ té ordre n , on recordem que $\alpha' : B_n(S^2) \rightarrow \Sigma_n$. Pel lema 5.17, tenim que

$$(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{m-1})^m = (\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{m-1})^{-1}$$

on el terme de l'esquerra de la igualtat pertany a $B_m(S^2)$ i el de la dreta a $H(m)'$.

Si ara tenim en compte l'homomorfisme que hem definit anteriorment

$$\eta_m : H(m)' \rightarrow B_{m-1}(S^2)$$

Per tant, $\eta_m : ((\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{m-1})^m) = (\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{m-1})^{m-1}$. Si això ho apliquem reiteradament, obtenim:

$$\eta_4\eta_5 \cdots \eta_n((\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n) = (\sigma_{n-2}\sigma_{n-1})^3 \in B_3(S^2)$$

Aquest terme que hem obtingut pertany al grup esfèric de 3-trenes. Si suposem que $(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n = 1$, aleshores arribem a contradicció, ja que a la proposició 5.21 hem vist que $(\sigma_1\sigma_2)^3 = a^2 \neq 1$ i que tenia ordre 2. $\square$

6 Didàctica

6.1 Referents didàctics

L'aplicació de matemàtiques avançades a una aula d'institut pot tenir un gran impacte en l'aprenentatge de l'alumnat. En el cas d'explicar el grup de trenes d'Artin i el grup esfèric de trenes, fa connectar el món abstracte amb el món real. Aquest enfocament pot ajudar a l'alumnat a veure la rellevància pràctica de conceptes abstractes com el grup de trenes. És un tema que pot fer entendre les matemàtiques com un camp molt ampli i en el que hi ha moltes branques, on totes estan interconnectades i totes es complementen entre elles, veient les matemàtiques com una xarxa de coneixements interconnectats, no una matèria aïllada. Es barregen conceptes topològics, geomètrics, algebraics, entre d'altres, i això és el que el fa enriquidor.

Maria Antònia Canals [4] va ser una mestra i matemàtica catalana que va defensar profundament l'ensenyament de branques de les matemàtiques com la topologia. De fet, va fer la següent afirmació:

La topologia és una part de les matemàtiques que es pot començar a treballar amb els nens petits perquè no necessita nocions numèriques complicades, sinó només nocions espacials bàsiques.

Amb aquesta frase, podem afirmar doncs que la topologia es pot ensenyar a l'ESO, tot estimulant el pensament abstracte i la creativitat matemàtica. Podem dir que la seva introducció pot ser molt positiva i té motius pedagògics i conceptuals.

A l'institut es treballa principalment l'àlgebra i és molt útil veure que l'àlgebra també es pot entendre i es pot utilitzar per a representar un objecte tan abstracte i alhora molt visual com les trenes. És una manera de fer ponts entre les habilitats algebraiques bàsiques que es tenen a l'institut i conceptes nous.

L'objectiu de treballar un tema com el grup de trenes a una aula d'institut és fer una activitat que connecti les matemàtiques abstractes amb elements visuals que, a més, es poden manipular. Tot i que el contingut formal pot ser universitari, hi ha maneres i recursos per a adaptar-lo per tal de fer-ho accessible. Cal trobar el punt just entre formalitat i intuïció visual, perquè encara no tenen tot el bagatge tècnic. Mostrar que no cal arribar a un nivell de coneixement profund per a començar a entendre aquests temes és una manera de motivar a l'alumnat. Si es vol explicar un concepte d'una branca de les matemàtiques tan abstracta com la topologia, és molt important el fet de poder manipular-lo. Així s'entrena el pensament formal sense perdre la connexió amb allò que poden tocar, dibuixar o manipular.

Treballant el grup de trenes a l'institut, s'introdueixen conceptes topològics com les transformacions contínues en espais, ja que les trenes són una representació d'aquestes transformacions. Tal i com va dir Canals,

Amb activitats com enllaçar i desenllaçar cordills o construir trenes, els infants interioritzen nocions de continuïtat, connexió i transformació sense necessitat d'explicacions formals.

Veiem que amb les trenes es treballa el concepte d'homeomorfisme, ja que quan fem qual-sevol encreuament de fils sense trencar la trena, es tracta de transformacions contínues entre dos espais topològics que conserven la seva estructura, una idea central en la topologia. Així doncs, alhora també es treballa la continuïtat, tot fent transformacions contínues. Un altre concepte molt interessant que es treballa és la connexitat i la no compacitat dels fils, ja que creen un espai connex i el conjunt de fils no es pot fer més petit de manera contínua sense trencar els encreuaments. Tot i que ja és un concepte molt més complex, les trenes també es poden entendre com a espais de configuració, ja que és un conjunt de totes les maneres possibles de disposar els fils dins d'un cert espai.

També és molt interessant per a l'alumnat el fet de treballar i conèixer conceptes matemàtics que són relativament contemporanis i recents, ja que estem estudiant un concepte que Artin va definir l'any 1925 o que E. Fadell i van Buskirk van relacionar amb el grup esfèric de trenes demostrant la unicitat de la relació addicional l'any 1962, dates relativament recents. És una manera de veure les matemàtiques com una cosa que encara està per investigar i estudiar, ja que no tot està demostrat. D'aquesta manera, es poden veure com un camp viu que encara evoluciona, i no com coneixements de fa molts anys. El fet que sigui un tema de la branca de la topologia, també fa que pensin les matemàtiques d'una forma diferent, trenca amb les intuïcions habituals i fa que pensem d'una forma diferent en la que un alumne d'institut no està acostumat a pensar.

6.2 Fitxa de l'activitat

Objectius

1. Conèixer les trenes com a objectes topològics.
2. Treballar les relacions que presenten el grup de trenes en E^2 i en S^2 .
3. Identificar trenes equivalents en el grup de trenes d'Artin i el grup esfèric de trenes.
4. Relacionar els dos grups tot veient semblances i diferències.

Descripció de la proposta

La proposta consisteix a introduir la topologia a una aula d'institut tot explicant el grup de trenes i el grup esfèric de trenes. Aquests dos grups es tractaran en dues sessions diferents, tot veient la relació que hi ha entre ells, tant les semblances com les diferències.

A la primera sessió, s'introdueix què és una trena tot fent la definició geomètrica i explicant els generadors i per què són un grup. Tot seguit, es fan una sèrie d'experiments mitjançant fils que cada alumne tindrà. D'aquesta manera trobaran les relacions d'Artin i buscaran la manera d'escriure-les de forma general. Aquest últim pas és una mica més complicat perquè implica una visió més abstracta. Un cop s'han treballat les relacions d'Artin, les utilitzarem per a poder identificar trenes equivalents. La idea és fer-ho de forma escrita mitjançant les permutacions, tot i que també es pot dur a terme mitjançant la representació de les trenes amb els fils. Sinó es pot plantejar de fer com a comprovació.

A la segona sessió, com que ja coneixem el llenguatge de les trenes, tenim molt més temps per a explicar el grup esfèric de trenes. L'objectiu de la sessió és resoldre el problema de Dirac. Aquest grup de trenes s'explicarà amb els mateixos fils que teníem però mitjançant una bola de porexpan a un extrem de cada fil. El que es farà primer és trobar la relació addicional que té aquest grup, a part de les dues relacions d'Artin que ja coneixem. Així doncs, veure tant les semblances com les diferències d'aquests dos grups, ja que veurem trenes que poden no ser equivalents al grup de trenes en E^2 i que ho siguin en l'esfera². Després de conèixer la presentació d'aquest grup, s'introduirà el problema de la corda de Dirac mitjançant el truc del cinturó de Dirac, també anomenat *belt trick*, on si fem dues voltes senceres tenim la trena identitat sense trencar els extrems ni el cinturó. Així doncs, l'objectiu serà saber per què succeeix aquest fenomen i demostrar-ho tant amb els fils com de forma escrita mitjançant les relacions de les permutacions que hem estudiat. Si es vol anar més enllà es pot intentar demostrar o pensar per què la trena de Dirac no és trivial.

Aspectes didàctics i metodològics

L'activitat es fa amb tota l'aula amb estones d'explicació i estones de descoberta autònoma mitjançant material. Aquesta estona de descoberta la poden fer per parelles o per grups. Com que hauran de comparar entre dues trenes per a poder trobar les relacions d'Artin, seria ideal que treballessin en parelles o en trios per a poder comparar les dues trenes, veure si són equivalents i trobar l'equivalència general.

Per fer una petita avaluació, es poden donar diverses trenes en forma de paraula o en forma geomètrica i que diguin si són trenes trivials, equivalents entre elles, etc. També es poden plantejar preguntes per a reflexionar com les que es veuran a l'apartat 6.4.

Recursos emprats

Per a la primera part on es treballa el grup de trenes, s'utilitzen fils de diferents colors col·locats paral·lelament i fixant un extrem amb cinta adhesiva. Se'n poden prendre els que es vulguin, tot i que el recomanable és 4 o 5. El més òptim seria repartir-ne per a cadascú, tot i que també es pot repartir un per parelles. També cal tenir en compte que cal intentar evitar combinar els colors més difícils de distingir per als daltònics com el verd i el vermell.

Per a la segona part on es treballa el grup esfèric de trenes, s'utilitzen els mateixos fils també fixats per un extrem. L'altre extrem estarà fixat per una bola de porexpan. Els fils es poden anusar i al mateix temps enroscar a la bola amb un cargol d'ull, tal i com es pot veure a la Figura 13.

En el cas de tenir una aula on cadascú té un ordinador, pot ser molt útil l'aplicació KnotPlot, ja que amb la funció 'braid' es poden dibuixar trenes i es pot treballar una altra manera d'experimentar amb elles.

²Per a més informació i més detalls, es poden consultar els annexos, on hi ha una fitxa amb les explicacions necessàries per al professorat d'una forma més extensa i amb les representacions que es poden ensenyar a l'aula i la fitxa de l'alumne.



Figura 13: Exemple del material utilitzat a classe per a treballar el grup de trenes en S^2 .

Una altra activitat per a treballar l'escriptura de les trenes com a permutacions amb la representació geomètrica pot ser amb cartes on hi hagi la paraula escrita amb permutacions i la seva respectiva representació, amb les quals es poden fer diversos jocs tot fent parelles. Per exemple, un memory.

Continguts, processos i competències que es treballen de forma destacada

En aquesta activitat es treballen les trenes, com un concepte topològic; les permutacions, ja que les trenes es poden escriure com a combinació de permutacions; i altres conceptes no tant explícits com el de grup, d'homeomorfisme, de transformació contínua, entre d'altres.

Alumnat a qui s'adreça especialment

És una activitat pensada per a l'alumnat de batxillerat, però es pot adaptar per a l'alumnat de l'ESO. Com que és un tema nou per a l'alumnat que no requereix coneixements previs, ja que només s'utilitzen nocions bàsiques de l'àlgebra, es pot fer a cursos com 3r o 4t d'ESO, sobretot la primera part, ja que el problema de la corda de Dirac és més complex.

Al ser un tema molt manipulable, visual i que no requereix un gran raonament pels conceptes bàsics, es podria adaptar a un alumnat amb necessitats educatives especials. Es podria fer només tractant la part visual i no tractant tant l'escriptura de les trenes com a permutacions. A més, el fet de trobar trenes equivalents mitjançant l'aplicació de les relacions pot apropar els alumnes al pensament computacional.

Interdisciplinarietat, transversalitat, relacions amb l'entorn

Es pot treballar amb altres àrees com la informàtica, mitjançant aplicacions com Knot-Plot per a representar trenes, o bé si no es vol instal·lar cap aplicació es poden utilitzar webs com CoCalc, on s'utilitza SageMath online.

A més, el grup de trenes és una àrea de la topologia que s'ha relacionat amb la biologia molecular, la física, la química de polímers, la criptografia i la robòtica, així que es podria buscar una manera de treballar-ho transversalment.

6.3 Implementació de l'activitat

El dia 9 de maig vaig anar a l'Institut La Llauna a realitzar la primera sessió que havia preparat per a tractar el grup de trenes d'Artin amb alumnes de primer de batxillerat. Va ser una experiència molt interessant i a l'alumnat li va agradar tractar les matemàtiques des d'un punt de vista més manipulatiu i veure una branca de les matemàtiques que no es tracta a l'institut. Era una classe de primer de batxillerat científic formada per 29 alumnes.

Vam començar introduint les diferents representacions de les trenes: la gràfica i l'escriptura en paraules mitjançant les permutacions que descriu Artin. Tot i que no havien fet geometria en l'espai i per tant la definició geomètrica de trena podia ser complicada, ja que no coneixien termes de la geometria del pla com la idea d'agafar n punts o els plans $z = 0$ i $z = 1$ els eren desconeguts, després amb exemples van entendre-ho més i li van trobar un sentit.

L'altra part de la sessió consistia en deduir les relacions d'Artin, ja que en comptes d'explicar-los les relacions per a que les apliquessin, volia que ho veiessin i ho pensessin ells. Això els va ser relativament fàcil, ja que els vaig repartir 5 fils encintats per un extrem a cadascú i havien de representar les trenes que els deia jo. Primer vam practicar la representació algebraica i gràfica mitjançant aquests fils. N'hi ha que van ser més ràpids que d'altres però ho van acabar entenent tots. Un cop assimilat el llenguatge els vaig anar dient a uns que representessin una trena i a d'altres que en representessin una altra, de forma intercalada. Així, podien comparar si eren trenes equivalents o no. Mitjançant aquests exemples, van poder deduir les relacions d'Artin. El que va costar més va ser la fórmula general de cada relació, ja que és un fet bastant abstracte per a ells i tampoc estan acostumats a treballar amb sub-índexs.

Un cop vam tenir les relacions d'Artin ben definides, vam passar a les trenes més complexes. Els vaig posar unes quantes trenes per tal que veiessin que eren equivalents. La gran majoria ho va fer utilitzant les relacions d'Artin i la relació de l'invers, però hi va haver una minoria que va resoldre-ho amb els fils que els havia proporcionat.

La valoració de la sessió és principalment positiva. Tot allò que havia preparat va funcionar segons el previst, i a nivell de temps també vam poder seguir el ritme adequadament: vam fer tot el que estava planificat i no ens va sobrar temps. Tot i això, sí que és veritat que per la falta d'experiència i per la desconexença prèvia de l'alumnat, alguns moments d'experimentació podien haver estat més efectius. En determinades situacions, potser hauria estat útil fer més èmfasi en certes explicacions, per a que els alumnes tinguessin

més clar què estaven buscant exactament. Tanmateix, això va comportar que els que ho havien entès ajudessin als que no ho estaven trobant i s'ajudessin els uns als altres, una dinàmica molt enriquidora.

No vaig poder implementar la segona sessió del grup esfèric de trenes perquè el professor em va dir que anaven molt justos de temps per a fer tot el temari.

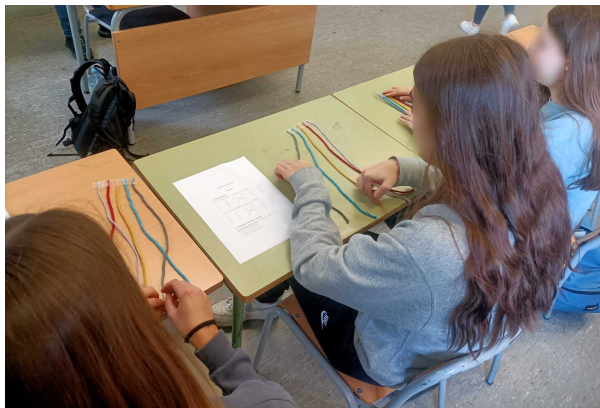


Figura 14: Alumnes fent trenes durant la sessió.

6.4 Preguntes per anar més enllà

Un cop es fan les sessions o mentre es fan les sessions, poden sorgir diferents qüestions, tant per part de l'alumnat com del professorat. Una part del que es treballa a les sessions, es pot ampliar el contingut i, de fet, que els mateixos alumnes facin preguntes i conjectures per tal d'anar més enllà. A continuació, es fa un seguit de preguntes o temes que són interessants de tractar per tal d'ampliar aquest tema.

1. Podem reduir una paraula d'una trena utilitzant només les relacions d'Artin?

Sí, les relacions d'Artin són les que presenten el grup i, per tant són suficients per a simplificar totes les trenes.

2. Si una trena β és igual a la seva inversa β^{-1} , què podem dir d'ella i quines propietats pot tenir aquest conjunt de trenes?

Es diu trena involutiva, i significa que si la fas dues vegades et torna al principi. És un tipus especial de trenes. Algunes propietats que tenen les trenes involutives són:

- (a) El seu quadrat és la identitat.
- (b) De forma visual, són simètriques, ja que desfan els mateixos encreuaments en ordre invers.
- (c) Aquests encreuaments que desfà no cal que siguin consecutius.
- (d) No cal que siguin pures.

3. Quantes 3-trenes es poden fer amb tres encreuaments? I de diferents?

Aquesta pregunta pot ser útil per a treballar amb la combinatòria del grup. En B_3 els generadors són σ_1 i σ_2 . Els seus inversos són σ_1^{-1} i σ_2^{-1} . Per tant, tenim 4 elements possibles a combinar. Per tant, n'hi haurà $4^3 = 64$ elements, ja que volem fer 3 encreuaments.

Ara bé, si volem descartar les trenes que siguin equivalents amb les relacions

- $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$
- $\sigma_1\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_1 = 1$
- $\sigma_2\sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_2 = 1$

Això sabem que serà menor que 64, però per a fer això hauríem de fer una classificació modulant per les relacions, i això és un problema complex. Tot i així, es pot dir que hi ha 13 3-trenes diferents de 3 encreuaments.

4. Com podríem dissenyar un algorisme per a simplificar una trena en el grup esfèric de trenes?

Utilitzant les relacions d'Artin, per a fer possibles simplificacions i eliminant tots els encreuaments que siguin la identitat. És una activitat que es podria fer escrivint un codi.

5. Què passaria si afegíssim una nova relació a les que ja té el grup esfèric de trenes? Quines propietats tindria el grup de trenes?

Aquesta pregunta és útil per a reflexionar sobre com noves condicions o restriccions podrien modificar les propietats del grup de trenes i com es representarien.

6. Què passaria si al grup esfèric de trenes li poséssim la propietat que l'esfera pot girar? Seria el grup esfèric de trenes igual?

Aquesta propietat és la que tenen les trenes del grup que va descriure Magnus[22]. Podríem veure que les relacions d'Artin es compleixen igualment i la relació addicional també, però no és el mateix que el grup de trenes en S^2 , ja que en aquest no es pot girar l'esfera sobre un eix. En aquest nou grup la trena de Dirac seria equivalent a la trena trivial amb qualsevol exponent, per exemple. Per tant hi hauria més relacions per a presentar-les.

7. Fins ara, hem vist com demostrar que dues trenes són equivalents, però com podem veure que no ho són?

És més difícil veure que no són equivalents a veure que ho són. Alguns mètodes per a veure-ho són:

- Mètode visual: representar les dues trenes i si tenen més encreuaments entre certs fils, no seran equivalents.

- Invariants de trenes equivalents: si una trena té un nombre de encreuaments parell i l'altra senar, sabrem que no són trenes equivalents perquè les relacions d'Artin anul·len les permutacions de dos en dos.
- Si una trena pertany al grup esfèric de trenes i l'altra al grup de trenes d'Artin no poden ser equivalents.
- Invariant de Jones: és un polinomi que permet diferenciar entre dues trenes no equivalents.

8. És possible que una trena no tingui inversa en el grup esfèric de trenes?

No, qualsevol element del grup té un element invers. Com que és un grup que es representa a partir de les relacions d'Artin, totes les accions d'encreuaments es poden desfer.

7 Conclusions

Conclusions dels fonaments teòrics

En aquest treball, s'han estudiat els grups de trenes en E^2 i en S^2 . Aquest estudi ha permès caracteritzar l'equivalència entre trenes, demostrar la completesa de la presentació d'ambdós grups i fer una comparació entre els dos grups.

A la primera part, s'han detallat com es definia el grup de trenes i com era isomorf al grup fonamental de l'espai de configuracions del conjunt de punts no ordenats en E^2 . D'aquesta manera, hem vist que era un fet necessari per a poder demostrar que la seva presentació amb les dues relacions d'Artin era completa.

D'altra banda hem vist com es pot construir el grup esfèric de trenes a partir del grup de trenes d'Artin $B_n(E^2)$ que acabàvem de definir mitjançant un quocient per una relació. A partir d'aquesta construcció, hem justificat que $B_n(S^2)$ admet una presentació amb els mateixos generadors i relacions que $B_n(E^2)$ però amb una relació addicional. Així doncs, aquesta relació modifica l'estructura del grup.

Aquesta construcció també s'ha interpretat a partir del grup fonamental d'espais de configuració, fet que ha facilitat la demostració de la completesa de la presentació, de forma anàloga a la demostració del grup de trenes d'Artin.

D'aquesta manera, s'ha observat que els grups abstractes $B(n)$ i $SB(n)$, definits mitjançant generadors i relacions, són isomorfs a $B_n(E^2)$ i $B_n(S^2)$, respectivament. Això ha donat lloc a demostrar que tal i com es presenten aquests grups, és la forma completa, és a dir, no existeixen més relacions que no impliquin les que els presenten.

Aquest resultat exemplifica la riquesa de la interacció entre la topologia i l'àlgebra i, a més, porta a adonar-se de l'amplitud d'aquest camp, ja que es poden estudiar grups de trenes en altres superfícies com el tor, el pla projectiu, entre d'altres, on l'estructura és encara més complexa.

Finalment, a partir de tots els coneixements del grup de trenes en E^2 i S^2 , hem pogut demostrar el cas particular del problema de la corda de Dirac. Això ho hem fet utilitzant les tres relacions que definien el grup esfèric de trenes i veient que la relació addicional tenia ordre $2n$, fet que justifica el problema de la corda de Dirac.

Conclusions didàctiques

Un cop recollits tots aquests coneixements, un dels objectius d'aquest treball era fer una proposta didàctica. Es van preparar dues sessions: una per a treballar el grup de trenes en E^2 i l'altra en S^2 , tot tancant amb el problema de la corda de Dirac.

La primera sessió es va poder aplicar a una aula de primer de batxillerat. Va ser molt ben acollida i molt productiva, ja que tot l'alumnat va aprofitar l'hora i va gaudir de conèixer un tema que no havia sentit a parlar mai. A més, el fet que hi hagués material manipulable i poguessin trobar relacions generals a partir de l'experimentació va ser un

fet clau i que va motivar a gran part de l'aula. Això mostra que a l'institut es poden treballar branques de les matemàtiques que no es tracten habitualment.

Fent aquest treball, s'ha pogut veure que hi ha molts recursos per a poder ensenyar matemàtiques més enllà dels convencionals i que hi ha molts referents didàctics que porten anys utilitzant i mostrant materials manipulatius a l'aula i maneres diferents d'ensenyar. A més a més, és molt interessant i important que els i les alumnes vegin que les matemàtiques són coneixement viu perquè se segueixen estudiant i un coneixement molt més ampli del que molts cops es planteja i del que es mostra a l'aula.

Referències

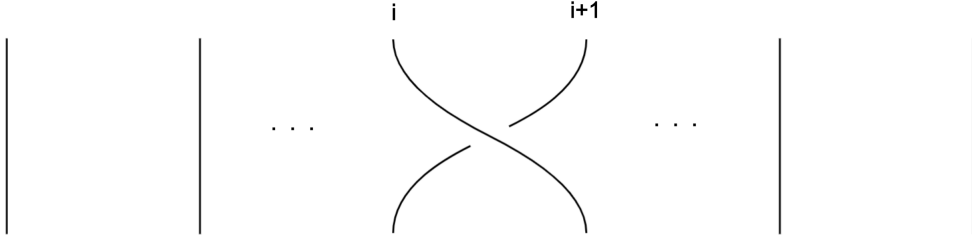
- [1] Artin, E.: Theory of braids, *Ann. of Math.*, 48:101–126, 1946.
- [2] Birman, J. S.: *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies, No. 82, Princeton University Press, 1974.
- [3] Bredon, G. E.: *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] Biniés, P.: *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals: o com fer de les matemàtiques un aprenentatge apassionant*, Graó, 2008.
- [5] Castel, F.: *Geometric Representations of the Braid Groups*, Société Mathématique de France, 2016.
- [6] Dehornoy, P.; Dynnikov, I.; Rolfsen, D.; Wiest, B.: *Ordering Braids*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 148, American Mathematical Society, 2008.
- [7] Dold, A.: Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. of Math. (2)*, 78:223–225, 1963.
- [8] Dyer, J. L.: The algebraic braid groups are torsion-free: an algebraic proof, *Math. Z.*, 172(1):157–160, 1980.
- [9] Fadell, E.: Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac, *Duke Math. J.*, 29:231–242, 1962.
- [10] Fadell, E.; Neuwirth, L.: Configuration spaces, *Math. Scand.*, 10:111–118, 1962.
- [11] Fadell, E.; Van Buskirk, J.: On the braid groups of E^2 and S^2 , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67(2):211–213, 1961.
- [12] Fadell, E.; Van Buskirk, J.: The braid groups of E^2 and S^2 , *Duke Math. J.*, 29(2):243–257, 1962.
- [13] Fox, R. H.; Neuwirth, L.: The braid groups, *Math. Scand.*, 10:119–126, 1962.
- [14] Gillette, R.; Van Buskirk, J.: The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 131:277–296, 1968.
- [15] Gonçalves, D. L.; Guaschi, J.: *The Classification of the Virtually Cyclic Subgroups of the Sphere Braid Groups*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2013.
- [16] Guaschi, J.; Juan-Pineda, D.; Millán López, S.: *The Lower Algebraic K-Theory of Virtually Cyclic Subgroups of the Braid Groups of the Sphere and of $\mathbb{Z}(B_4(S^2))$* , SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2018.
- [17] Hansen, V. L.: The Magic World of Geometry – III. The Dirac String Problem, *Elemente der Mathematik*, 49(4):149–154, 1994.
- [18] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [19] Hurwitz, A.: Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, *Math. Ann.*, 39(1):1–60, 1891.

- [20] Kassel, C.; Turaev, V.: *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 247, Springer, 2008.
- [21] Lundsgaard Hansen, V.: *Braids and Coverings: Selected Topics*, London Mathematical Society Student Texts, No. 18, Cambridge University Press, 1989.
- [22] Magnus, W.: Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen, *Math. Ann.*, 109:617–646, 1934.
- [23] Murasugi, K.; Kurpita, B. I.: *A Study of Braids*, World Scientific, 1992.
- [24] Newman, M. H. A.: On a string problem of Dirac, *J. London Math. Soc.*, 17:173–178, 1942.
- [25] Prasolov, V. V.; Sossinsky, A. B.: *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 154, American Mathematical Society, 1997, pp. 47–54.
- [26] Van Buskirk, J.: Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 122:81–97, 1966.

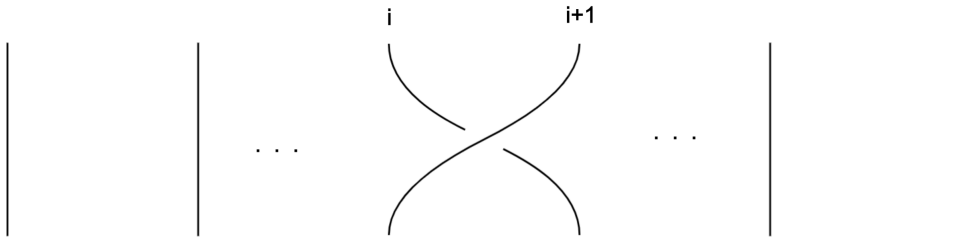
A Fitxa alumnat

Permutacions

Creuar el fil i sobre el següent, $i + 1$, s'escriu com σ_i i es representa:



Creuar el fil $i + 1$ sobre l'anterior, i , s'escriu com σ_i^{-1} i es representa:



Relacions d'Artin i inversa

Les dues relacions d'Artin i la relació de la inversa que necessitem per a demostrar l'equivalència de trenes d'Artin són:

1. $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$ per a tot i .
2. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ per a $|i - j| \geq 2$.
3. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ per a tot i .

Relació addicional (grup esfèric de trenes)

A més de les relacions d'Artin i de la inversa, en el grup esfèric de trenes tenim una relació addicional per a trenes de n fils:

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = 1$$

B Guia per al professorat

Aquest document és una guia per a poder explicar o saber en què consisteixen les dues sessions preparades sobre el grup de trenes i el grup esfèric de trenes. La primera sessió és molt introductòria sobre què és una trena, per què diem que és un grup i les relacions d'Artin que compleixen. En la segona sessió, es definirà el grup esfèric de trenes. Es veurà que té les mateixes propietats que el grup de trenes i que en té una d'addicional que permet explicar el Problema de Dirac, una aplicació d'aquesta relació nova.

B.1 Primera sessió

La primera sessió és molt introductòria i l'objectiu principal és entendre què és una trena com a objecte matemàtic i com representar-la de forma visual i de forma algebraica. Veuran per què es diu grup de trenes i quines propietats han de complir com a grup. En aquesta primera sessió també es treballa una de les coses més importants en la teoria de trenes: les relacions d'Artin. De forma intuïtiva, descobriran les relacions per a després poder-les utilitzar per a trobar trenes equivalents.

Per a les parts on l'alumnat ha d'experimentar amb trenes, podran fer-ho amb fils (amb 5 n'hi ha prou i si són de colors diferents millor) amb un extrem fix.

QUÈ ÉS UNA TRENA?

Tothom sap què és una trena i, de fet, estem envoltats de trenes. Fins i tot podem trobar trenes allà on no pensaríem que hi ha trenes. Segurament sempre que pensem en trenes, pensem en les de cabell, però en podem trobar en tots els teixits, en cistelles, en cinturons, catifes, tot el que sigui encreuaments de cordills. Fins i tot els mateixos cordills poden estar formats per fils més primers encreuats mitjançant trenes. Són una tècnica que la humanitat porta utilitzant des de fa molts anys i que actualment seguim utilitzant. Ens han facilitat molt la fabricació de molts objectes que encara utilitzem avui en dia.

Les trenes han estat estudiades els últims anys com a objectes matemàtics. Hi ha una branca de les matemàtiques que es diu topologia i estudia les propietats de les formes de l'espai després de modificar-les sense trencar-les ni enganxar-les. Pots estirar-les, aixafar-les, doblegar-les, però no trencar-les o fer-lis forats nous i seguiran sent la mateixa figura en la topologia. Ara veurem com es defineix una trena vista com un objecte matemàtic, és a dir topològic.

Definició B.1. Una *trena* de n fils és un conjunt de n arcs continus a l'espai tridimensional, que connecten n punts fixos $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ en un pla superior $z = 1$ amb n punts fixos $P' = \{p'_1, \dots, p'_n\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en un pla inferior $z = 0$. Cada arc és un camí continu que connecta un punt de dalt amb un de baix sense fer cap salt, retrocedir i sense tocar-se amb altres arcs.

Així doncs, un exemple de trena seria la representació següent:

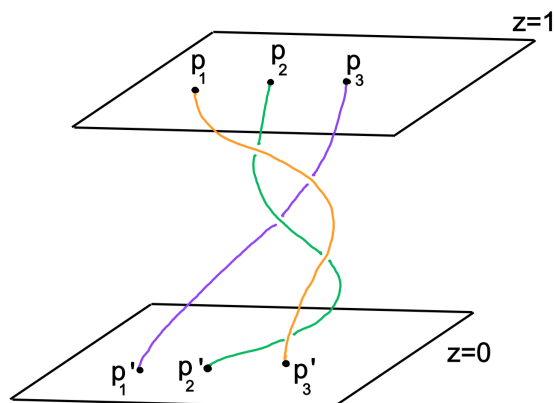


Figura 15: Representació gràfica de la definició geomètrica d'una trena.

A continuació, veiem representacions de trenes i de no trenes per a saber-les distingir a partir de la definició.

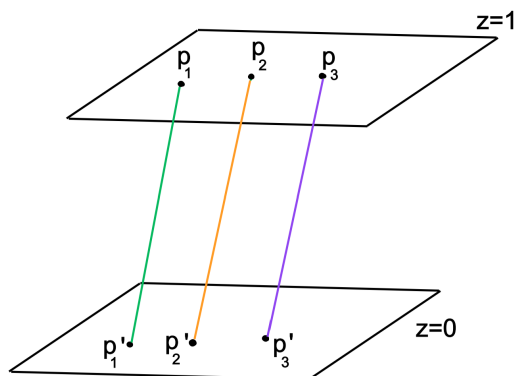


Figura 16: Exemple de trena. De fet aquesta trena s'anomena *trena trivial*.

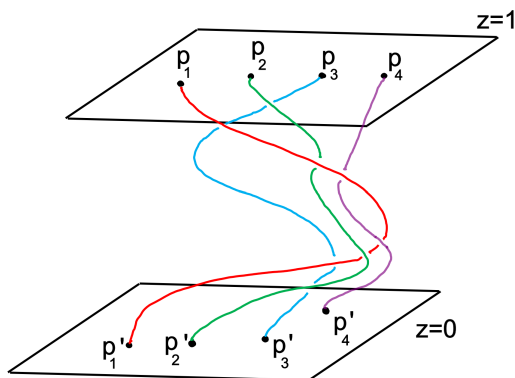


Figura 17: Exemple de trena. De fet, aquesta trena s'anomena *trena pura* perquè els punts on comencen i acaben els fils no permuten.

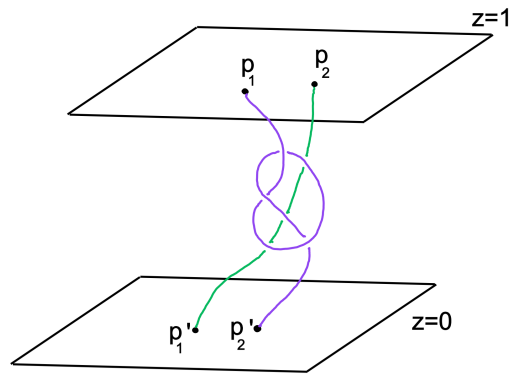


Figura 18: Exemple d'un objecte que no és una trena pel fet que hi ha un fil que s'embolica amb ell mateix i retrocedeix.

Per a expressar les trenes de forma més senzilla, les dibuixarem en dues dimensions però tenint en compte els encreuaments, ja que és dels fets més importants en les trenes. Per a representar un encreuament, la línia discontinua indica el fil que va per sota i la línia contínua és el fil que passa per sobre. Així doncs, serà com alinear els punts dels dos plans. A més, separarem cada encreuament per files, com podem veure a la imatge següent.

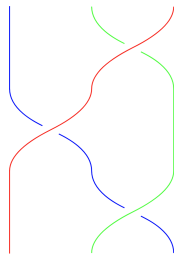


Figura 19: Exemple de com representarem les trenes a partir d'ara.

PARAULES

Les trenes es poden dibuixar però a vegades per a poder-hi treballar i estudiar-les d'una forma més senzilla les podem escriure com a expressions algebraiques. Totes les trenes es poden expressar com a combinació de les σ_i per a $i = 1, \dots, n - 1$.

1. Veiem què són σ_i i σ_i^{-1} .

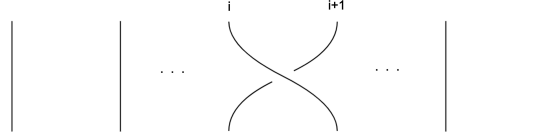


Figura 20: Representació geomètrica de σ_i .

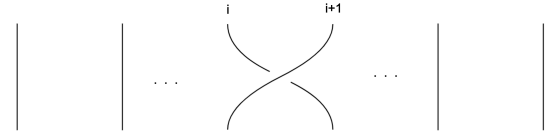


Figura 21: Representació geomètrica de σ_i^{-1} .

2. Per què $i = 1, \dots, n - 1$ (veure que no té sentit σ_n en una n -trena).
3. Veiem que podem separar les trenes en petites permutacions σ_i per a tot $i = 1, \dots, n - 1$.
4. Veiem que totes les trenes es poden expressar com a combinació de σ_i .

Aquesta separació d'encreuaments sempre la podrem fer i la majoria de cops hem de tenir en compte l'ordre. Per exemple, la treneta pura que hem vist en l'apartat anterior, es representaria així:

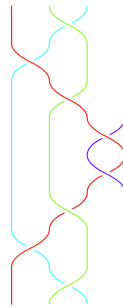


Figura 22: Representació de la treneta pura que hem vist anteriorment de forma simplificada.

A més, la paraula d'aquesta treneta pura és:

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$$

Podem practicar l'expressió de les trenes en paraules amb el joc de cartes jugant al memory o a qualsevol altre joc.

GRUP DE TRENES

En matemàtiques existeix una estructura que s'anomena grup. Un grup és un conjunt d'elements que compleixen certes propietats. Aquestes són:

- Dos elements combinats resulta un element del grup.
- Tenen un element neutre, és a dir que si el combines amb qualsevol altre no canvia res.
- Cada element té un que el desfà, un element contrari.
- Associativitat, és igual com agrupes els elements que el resultat no canvia.

Les trenes, tal i com estan definides, podem dir que són un grup. En aquest apartat, veurem que compleixen totes les característiques d'un grup. Ho veurà cada alumne amb els seus fils.

- Si β' i β'' són trenes, $\beta'\beta''$ és una trena, per tant està dins del grup.
Per exemple, si $\beta' = \sigma_1\sigma_2$ i $\beta'' = \sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}$, aleshores la combinació serà $\beta = \beta'\beta'' = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}$. És a dir que simplement unim la primera trena amb la segona.

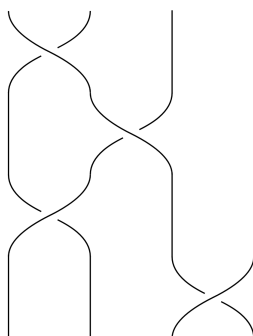


Figura 23: Representació de β .

- L'element identitat, que és la trena trivial, no canvia res combinada amb qualsevol element.
- Si tenim una trena β , el seu element invers és aquell que li fa mirall.
Per exemple, si $\beta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}$, aleshores $\beta^{-1} = \sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$. Veiem-ho gràficament a la representació de la pàgina següent. La inversa serà la trena simètrica respecte al pla inferior. Observem que $\beta\beta^{-1} = 1$.
- Associativitat: $\beta\beta'\beta'' = (\beta\beta')\beta'' = \beta(\beta'\beta'')$

També podem dir que els elements σ_i amb $i = 1, \dots, n-1$ són els generadors d'una n -trena, és a dir, són els elements que combinant-los entre ells podem obtenir totes les trenes del grup.

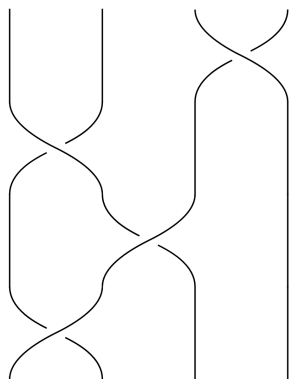


Figura 24: Representació de β^{-1} .

RELACIONS D'ARTIN

Aquesta és de les parts més importants de la sessió, ja que determina molt el que farem a continuació. Un fet molt important en els grups és que no tenen per què ser commutatius, i les trenes no ho són, en general. Només ho són en certs casos. Mitjançant l'experimentació, veurem això i com ho podem escriure com les relacions d'Artin:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ per a $|i - j| \geq 2$
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ per a tot $i = 1, \dots, n - 1$

A través dels fils que té cadascú veurem com es compleixen les relacions en casos concrets per a poder deduir la relació general. Per exemple, si tenim una 5-trena, veurem que es compleix $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$, $\sigma_1 \sigma_4 = \sigma_4 \sigma_1$, $\sigma_2 \sigma_4 = \sigma_4 \sigma_2$ per a la primera relació. I per a la segona podem fer el mateix per a tot $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$.

EQUIVALÈNCIA DE TRENES

Per a veure l'equivalència entre trenes, hem de tenir en compte sobretot tres propietats que hem obtingut fins ara:

1. $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$ per a tot i
2. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ per a $|i - j| \geq 2$
3. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ per a tot i

Posarem diversos exemples per a veure que són trenes equivalents.

1. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1$$

2. $\sigma_1 \sigma_4 \sigma_1^{-1} = \sigma_4$

$$\sigma_1 \sigma_4 \sigma_1^{-1} = \sigma_4 \sigma_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_4$$

$$3. \sigma_5^{-1} \sigma_1 \sigma_5 \sigma_1^{-1} = 1$$

$$\sigma_5^{-1} \sigma_1 \sigma_5 \sigma_1^{-1} = \sigma_5^{-1} \sigma_5 \sigma_1 \sigma_1^{-1} = 1$$

$$4. \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$$

$$\sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 = \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 = \sigma_4^{-1} \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$$

$$5. \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_3$$

$$\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_3$$

$$6. \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$7. \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 = \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1 = \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1$$

$$8. \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} = \sigma_3 \sigma_4$$

$$\sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3^{-1} = \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_3^{-1} = \sigma_3 \sigma_4$$

$$9. \sigma_3 (\sigma_2 \sigma_3)^{-1} \sigma_2 = 1$$

$$\sigma_3 (\sigma_2 \sigma_3)^{-1} \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_2 = 1$$

$$10. \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1$$

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1$$

$$11. \sigma_2^{-1} (\sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1})^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} = \sigma_3$$

$$\sigma_2^{-1} (\sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1})^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_2^{-1} = \sigma_3$$

Després de resoldre-ho de forma algebraica, ho poden fer de forma geomètrica comparant les dues trenes.

Una manera de veure que dues trenes no són equivalents és veient que una té un nombre parell d'encreuaments i l'altra un nombre senar d'encreuaments. Això ho podem saber perquè si desapareixen termes algebraics de la trena serà en parelles, ja que serà degut a l'invers.

B.2 Segona sessió

En aquesta segona sessió, es repassaran alguns conceptes de la sessió anterior degut a que el grup esfèric de trenes comparteix moltes propietats del grup de trenes. Un dels objectius de la sessió és descobrir la propietat addicional que tenen les trenes del grup esfèric de trenes i poder-la aplicar per a resoldre el Problema de Dirac.

Per a representar-les i experimentar tal i com hem fet amb el grup de trenes, farem el mateix sistema però amb una esfera a l'extrem que abans quedava lliure. Podem prendre una esfera de porexpan amb cargols d'ull clavats per a anular-hi els fils.

GRUP ESFÈRIC DE TRENES

Fins ara, teníem els dos plans amb el conjunt de punts fixos. Ara anem a suposar que el pla inferior es converteix en una esfera i, per tant, podem passar els fils per sota, és a dir, ara els moviments que podem fer per a trobar trenes equivalents van més enllà de l'espai entre els plans, ara és com si es poguessin estirar lliurement en tot $\mathbb{R}^3$.

Aquest grup és un grup pels mateixos motius pels que el grup de trenes ho és. Les relacions d'Artin també es compleixen perquè els moviments per sota l'esfera no impedeixen que no es compleixin les relacions. Ho comprovem igualment amb exemples. Per això, utilitzarem els mateixos símbols per a representar les paraules d'aquest grup.

Les trenes del grup esfèric de trenes es representen normalment amb una esfera dins d'una altra esfera, on els fils estan connectats amb interior de l'esfera gran i l'exterior de l'esfera petita. El que sempre han de mantenir-se fixos són els punts.

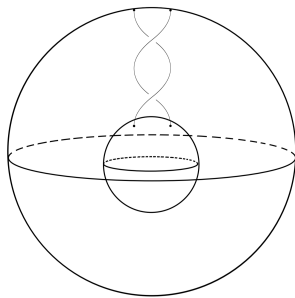


Figura 25: Representació d'una trena del grup esfèric de trenes.

RELACIÓ ADDICIONAL

Per a trobar la relació addicional, partirem d'una trena trivial del grup esfèric. Com que podem moure els fils per sota l'esfera, prenem un fil qualsevol i el passem per sota com a la Figura 26.

Veiem la relació que ens queda en diferents casos, i trobem finalment la paraula general:

$$\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\cdots\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\sigma_{n-3}\cdots\sigma_i = 1$$

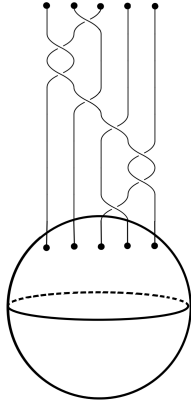


Figura 26: Trena que obtenim si prenem el fil 3 i el passem per sota l'esfera.

Aquesta paraula és conseqüència de la següent:

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1 = 1$$

Ho demostrem. Definim de la següent manera les seqüències:

$$\begin{aligned} w &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 = 1 \\ \tau &= \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_1 \\ \tau^{-1} &= (\sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_1)^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{i-2}^{-1} \sigma_{i-1}^{-1} \end{aligned}$$

Ara fem $\tau w \tau^{-1}$:

$$\begin{aligned} \tau w \tau^{-1} &= (\sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_1) (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1) (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{i-2}^{-1} \sigma_{i-1}^{-1}) = \\ &= \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_i \end{aligned}$$

Ja que a la cua es va identificant cada permutació amb la seva inversa fins a σ_i .

Aquesta relació no es pot desfer de cap manera en el grup de trenes. Ara bé, en el grup esfèric de trenes, si els fils es poden moure al voltant de l'esfera, sí que es pot desfer i tornar aquesta paraula en una trena trivial. Per tant, el grup esfèric de trenes té els mateixos generadors i relacions que el grup de trenes, però amb una relació de més. La relació es representa amb la trena de la Figura 27.

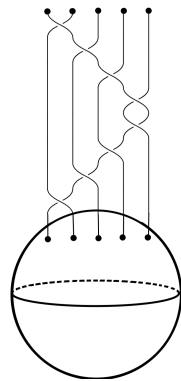


Figura 27: Trena que obtenim quan $i = 1$ i que generalitza la identitat anterior.

EQUIVALÈNCIES

En aquest grup hem de tenir en compte les següents relacions:

1. $\sigma_i \sigma_i^{-1}$ per a tot i
2. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| \geq 2$
3. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ per a tot i
4. $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = 1$

Podem fer les següents equivalències. En aquest cas, és important saber de quina trena estem parlant per a poder aplicar l'última relació, ja que per exemple $\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1$ és la trena trivial per a una 3-trena però no per a una 4-trena.

1. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2$ en una 4-trena.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2$$

2. $\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_2^2$ en una 4-trena.

$$\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1^2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_2^2$$

3. $\sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2 = (\sigma_1)^{-1}$ en una 4-trena.

$$\sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2 = (\sigma_1^{-1})^2 \Rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1$$

4. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2^2 \sigma_3$ en una 5-trena.

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 = \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_2 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1) \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_2^2 \sigma_3 \end{aligned}$$

5. $\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_3 = \sigma_2^{-1}$ en una 5-trena.

$\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_3 = 1$ és la identitat que hem trobat abans per a $i = 3$. Així doncs, si fem la permutació σ_2^{-1} per l'esquerra, tenim la igualtat que volíem.

PROBLEMA DE DIRAC

La sessió acabarà amb una aplicació a un problema molt interessant on es pot aplicar el que hem après de les trenes en el grup esfèric de trenes. Aquesta part pot servir com a motivació i com a part central o objectiu de la sessió.

El problema de Dirac va ser formulat pel físic Paul Dirac i resolt per Newman l'any 1942. Aquest problema el resoldrem primer experimentalment i després veurem que és cert mitjançant permutacions i relacions, ja que és una mica més complicat.

Prenem una trena trivial en el grup esfèric de trenes. Si agafem l'esfera interior i la girem sobre el mateix eix una volta (2π), denotarem aquesta trena Δ i l'anomenarem trena de Dirac. Per tant, denotarem Δ^2 com la trena trivial que es crea prenent l'esfera interior i fent dues voltes senceres (4π) sobre el mateix eix. El problema de Dirac és el plantejament del següent teorema:

Teorema B.2. *Sigui Δ una trena de Dirac en S^2 . Sigui $m \geq 1$ un enter. Aleshores, Δ^m és una trena no trivial en S^2 quan m és senar i és una trena trivial en S^2 quan m és parell.*

Començarem veient-lo de forma manipulativa per a dos fils, després per a 3, 4 i fins i tot 5.

L'objectiu d'aquesta part de la sessió és veure per què passa per a un nombre de voltes parell i no senar. Per al cas d'una 2-trena sí que pot passar, però no per a la resta.

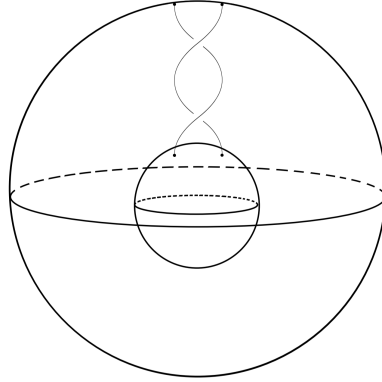


Figura 28: Trena de Dirac Δ .

Pel cas de la 3-trena, tenim la Figura 29, on podem veure el procés de desfer la 3-trena de Dirac al quadrat i veure que és equivalent a la trena trivial en $B_3(S^2)$, és a dir el grup esfèric de trenes de 3 fils. Ho fem al quadrat perquè és el nombre parell més petit i, per tant, que pot simplificar més la representació, però per a la resta d'exponents parells serà fer el mateix però aplicar els passos més cops.

La primera imatge és la 3-trena de Dirac, és a dir $\Delta_3^2 = (\sigma_1\sigma_2)^6$, ja que $\Delta_3 = (\sigma_1\sigma_2)^3$. Si prenem el primer fil per baix i el passem per sota de l'esfera interior rodejant-la d'esquerra a dreta, obtindrem la segona imatge, que correspon a la trena $(\sigma_1\sigma_2)^3\sigma_2^2$.

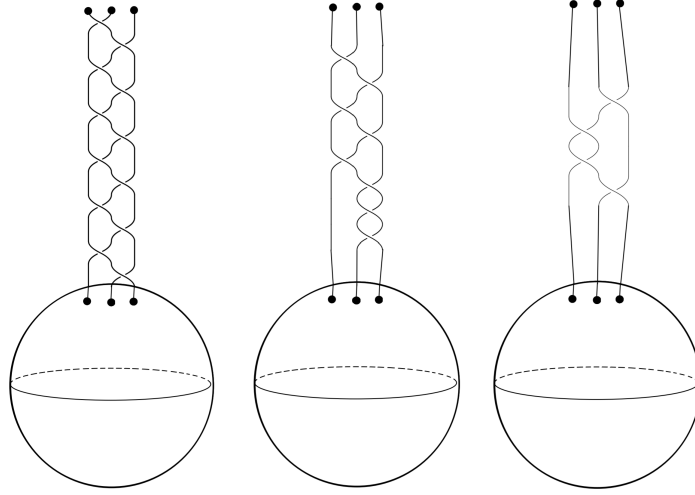


Figura 29: Resolució visual que $\Delta_3^2 = 1$.

Prenent el segon fil per baix també, i passant-lo per sota l'esfera de dreta a esquerra, obtindrem la tercera trena. Aquesta ja sabem que correspon a la trena trivial, ja que és $\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2$, i la podem desfer prenent el tercer fil i rodejant l'esfera. Tot això sense fer cap gir a les esferes.

Un cop ho hem vist de forma manipulativa, ho veurem mitjançant les relacions que hem après durant la sessió i per a $B_3(S^2)$. Aquest grup té les següents relacions:

$$B_3(S^2) = \left\langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \begin{array}{l} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 = 1 \end{array} \right\rangle$$

Tenim que la 3-trena de Dirac és:

$$\Delta_3 = (\sigma_1 \sigma_2)^3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

Pel problema de la corda de Dirac, tindríem que aquesta trena no és trivial:

$$\Delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_2$$

On a l'últim pas estem aplicant la relació addicional que caracteritza el grup esfèric de trenes. Aleshores, ens falta veure que σ_2^2 no és trivial, i això ho veurem a la proposició 5.22, on veiem que σ_1 i σ_2 tenen ordre 4.

Veiem doncs el cas per a $m = 2$, on hem de veure que la trena Δ_3^2 és trivial:

$$\begin{aligned} \Delta_3^2 &= (\sigma_1 \sigma_2)^6 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \\ &= \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

Per a seguir, podem tenir en compte la següent igualtat, que resulta de la relació addicional:

$$\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 = 1 \Rightarrow \sigma_2^2 \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \Rightarrow \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 = 1$$

I també:

$$\sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 = 1 \Rightarrow \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \Rightarrow \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 = \sigma_2^{-1} \Rightarrow \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 = 1$$

Per tant:

$$\Delta_3^2 = \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 = 1$$

Això es pot fer també per a m parells tot repetint el procés més cops.

La sessió pot començar o acabar amb el famós *belt trick* o truc del cinturó, també anomenat *Dirac's string trick*, que bàsicament resumeix el problema que acabem de veure. Aquest experiment mostra que si fas una volta completa d'un objecte tridimensional, no és equivalent a cap rotació, però si fas dues voltes senceres sí que es pot desfer sense trencar res ni moure l'objecte de lloc. Així doncs, el que es fa és agafar un cinturó pels dos extrems i girar un extrem una volta sencera. El cinturó queda enredat de manera que no es pot desfer, però si hi fas una altra volta, es pot desenredar el cinturó tot fent moviments sense desfer els extrems.