



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Dinámica de dos superfluidos acoplados en el interior de estrellas de neutrones

Juan Antonio Gil Granados



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution 4.0. Spain License.**

TESIS DOCTORAL

Dinámica de dos superfluidos
acoplados en el interior de estrellas de
neutrones



Juan Antonio Gil Granados



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Dinámica de dos superfluidos acoplados en el interior de estrellas de neutrones

Memoria presentada para optar al grado de doctor por
la Universidad de Barcelona

Programa de Doctorado en Física

Autor

Juan Antonio Gil Granados

Directores

Drs. Xavier Viñas y Mario Centelles

Tutor

Dr. Joan Soto

Departamento de Física Cuántica y Astrofísica

Junio 2025



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Somos polvo de estrellas que piensa acerca de las estrellas
Carl Sagan

Aquesta tesi doctoral, titulada **Dinàmica de dos superfluids acoblats a l'interior d'estrelles de neutrons**, s'ha elaborat en format de compendi d'articles.

Les publicacions derivades d'aquest treball són les següents:

- Transverse Josephson vortices and localized states in stacked Bose–Einstein condensates.

J. A. Gil Granados, A. Muñoz Mateo, M. Guilleumas and X. Viñas.

New J. Phys. 21 043036 – Published 17 April 2019

Dipòsit Digital Universitat de Barcelona

- Roton instabilities in the superfluid outer core of neutron stars.

J. A. Gil Granados, A. Muñoz Mateo and X. Viñas.

Phys. Rev. C 103, 065803 – Published 14 June 2021

Dipòsit Digital Universitat de Barcelona

- Half-vortex states in the rotating outer core of neutron stars.

J. A. Gil Granados, A. Muñoz Mateo and X. Viñas.

Phys. Rev. C 111, 065802 – Published 2 June 2025

Dipòsit Digital Universitat de Barcelona

Paraules clau: *superfluids, condensat de Bose-Einstein, estrelles de neutrons, púlsars, vòrtexs, hidrodinàmica, equació d'estat, matèria nuclear.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Mario Centelles por haber asumido la dirección de esta tesis en la etapa intermedia del programa, garantizando así la continuidad del vínculo institucional con la Universidad de Barcelona tras la jubilación del Dr. Xavier Viñas. Gracias por mantener siempre la puerta abierta y por estar disponible con generosidad para atender todo tipo de cuestiones, tanto administrativas como relacionadas con la investigación.

En segundo lugar, quiero agradecer profundamente a mi director y amigo, el Dr. Xavier Viñas, por su paciencia, dedicación y compromiso inquebrantable con este proyecto hasta el final, incluso después de su jubilación. Gracias por las innumerables horas de conversación y discusión telefónica, por tu constante disponibilidad y por haber sido, desde el inicio, un referente para mí en el ámbito de la física nuclear.

En tercer y último lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi querido Dr. Antonio Muñoz, por haber co-dirigido externamente mi trabajo de final de grado, de final de máster y ahora también esta tesis doctoral. Has sido quien me ha enseñado todo lo que sé sobre gases fríos y superfluidos. Gracias por haberme acompañado con tanta dedicación y generosidad a lo largo de todas las etapas académicas que hoy culminan con la presentación de esta tesis, la cual no habría sido posible sin tu criterio, tu guía constante y tu profundo conocimiento en el campo de los gases fríos.

Research on neutron stars is garnering increasing attention, driven by the availability of more precise observational data and increasingly realistic computational simulations of their interiors. In neutron stars, matter density spans an extraordinary range, from the density of iron (7.5 g/cm^3) at the surface to several times the nuclear matter saturation density ($2.6 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$) at the core. This vast density gradient defines distinct layers within the star: the outer crust, the inner crust, and the core. The key to understanding these different regions lies in the neutron star equation of state (EoS), which is formulated to reflect the relevant physical processes in each layer. Furthermore, the Bose-Einstein condensation of neutron and proton pairs gives rise to superfluidity, a phenomenon that manifests across various layers of the star. This feature is essential for explaining the observed low moment of inertia and the cooling process of neutron stars. It also provides insight into the remarkably stable rotation of pulsars and their occasional sudden spin-ups, known as glitches. To better understand these phenomena, hydrodynamical models have been developed that incorporate the coupling between a normal fluid and a superfluid, or between two coupled superfluids (a neutronic superfluid and a protonic superconductor). These models aim to identify dynamical instabilities that could account for the observed astronomical behavior. This thesis explores the superfluid dynamics of the outer core of neutron stars using a hydrodynamic model consisting of a neutronic superfluid and a protonic superconductor. These two fluids are coupled through the phenomenon known as dynamic entrainment, as well as by the EoS based on the short range interactions between nucleons (Skyrme SLy4), which characterizes neutron star matter composed of neutrons, protons, and electrons in charge and beta equilibrium. The resulting nonlinear

equations of motion are analyzed to investigate dynamical instabilities induced by the relative motion of the superfluids, which may be relevant to the observational characteristics of neutron stars. A linear analysis is conducted to explore the origin and expected growth of these instabilities across different nuclear matter densities. The superfluid dynamics of the outer core, influenced by both rotation and the presence of a magnetic field, has also been extensively investigated. This research specifically focuses on single vortices within the superconducting proton component of the fluid, which induce hydrodynamic perturbations in the dominant superfluid neutron component. The study narrows its focus to cases where the typical fermionic and bosonic length scales of the proton fluid are approximately matched. This alignment enables the consideration of proton-superconductor vortices characterized by a single length scale, which, in turn, generate hydrodynamic perturbations in the underlying neutron superfluid. Additionally, the influence of realistic angular rotation and electromagnetic fields on the vortex structure is thoroughly examined. The entire work is highly interdisciplinary, integrating knowledge and techniques from nuclear physics, astrophysics, superfluid dynamics, and degenerate quantum gases. This thesis includes preliminary research conducted prior to the study of superfluidity in neutron stars, which has enabled a deeper understanding of the analytical and computational techniques employed in the analysis of simple one-dimensional models that encompass the essential features, coupling and interaction, of a binary system. In this study, a stack of linearly coupled one-dimensional Bose-Einstein condensates with repulsive interparticle interactions is investigated, resulting in an underlying array of coupled-parallel long Josephson junctions. Specifically, stacks with periodic boundary conditions that form closed, ring-shaped arrays are examined. By solving the Gross–Pitaevskii (GP) equation, the dynamics of stationary states that compose a transverse, discrete Bloch band are explored. The rich phenomenology observed in these systems could also manifest, under certain conditions, in the inner crust of neutron stars, albeit at different density and energy scales. The British astrophysicist Jocelyn Bell Burnell, a staunch advocate for research in this field, stated that "neutron stars are the lighthouses of the universe, guiding us toward a deeper understanding of extreme physics". This thesis aims to delve deeper into the study of the physics occurring in these exotic and fascinating systems.

La recerca sobre les estrelles de neutrons està generant un interès creixent, impulsat per la disponibilitat de dades observacionals més precises i per simulacions computacionals cada cop més realistes dels seus interiors. En les estrelles de neutrons, la densitat de la matèria abasta un rang extraordinari, des de la densitat del ferro (7.5 g/cm^3) a la superfície fins a diversos cops la densitat de saturació de la matèria nuclear ($2.6 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$) al nucli. Aquest gradient de densitat defineix capes diferents dins l'estrella: l'escorça externa, l'escorça interna i el nucli. La clau per entendre aquestes diferents regions rau en l'equació d'estat (EoS) de la matèria nuclear de les estrelles de neutrons, necessària per estudiar els processos físics rellevants que tenen lloc a cada regió. A més, la condensació de Bose-Einstein dels parells de neutrons i protons dona lloc a la superfluidesa, un fenomen que es manifesta en diverses capes de l'estrella. Aquesta propietat és fonamental per explicar el baix moment d'inèrcia observat i el procés de refredament d'algunes estrelles de neutrons. A més, proporciona informació sobre l'extraordinària estabilitat en la rotació dels púlsars i els seus sobtats augments de velocitat, coneguts com a glitches. Per comprendre millor aquests fenòmens, s'han desenvolupat models hidrodinàmics que incorporen l'acoblament entre un fluid normal i un superfluid, o entre dos superfluids. Un dels objectius principals d'aquests models és cercar possibles inestabilitats dinàmiques que puguin explicar el comportament astronòmic observat. Aquesta tesi explora la dinàmica superfluida del nucli extern de les estrelles de neutrons mitjançant un model hidrodinàmic basat en un superfluid neutrònic i un superconductor protònic. Aquests dos superfluids estan acoblats a través del fenomen conegut com a "arrossegament dinàmic", així com per l'equació d'estat fonamentada en les interaccions de curt abast entre nucleons (Skyrme

SLy4), la qual descriu la matèria de les estrelles de neutrons composta per neutrons, protons i electrons en equilibri químic i de càrrega. Les equacions del moviment resultants, de caràcter no lineal, s'analitzen per identificar possibles inestabilitats dinàmiques induïdes pel moviment relatiu entre els dos superfluids, que podrien ser rellevants per explicar algunes de les característiques observacionals de les estrelles de neutrons. A més, es duu a terme una anàlisi lineal per investigar l'origen i el creixement esperat d'aquestes inestabilitats en funció de la densitat de la matèria nuclear. La dinàmica superfluida del nucli extern, influenciada tant per la rotació com per la presència d'un camp magnètic, ha estat objecte d'estudi en la present tesi. Aquesta recerca se centra específicament en els vòrtexs individuals dins del component superconductor protònic del fluid, els quals indueixen pertorbacions hidrodinàmiques en el component dominant, el superfluid neutrònic. L'estudi es focalitza en situacions en què les escales de longitud fermiòniques i bosòniques típiques del fluid protònic són aproximadament coincidents. Aquesta alineació permet considerar vòrtexs del superconductor protònic caracteritzats per una única escala de longitud, que al seu torn generen pertorbacions hidrodinàmiques en el superfluid de neutrons subjacent. A més, s'examina detalladament la influència de la rotació angular i dels camps electromagnètic estelars en l'estructura dels vòrtexs. Aquest treball és altament interdisciplinari, ja que integra coneixements i tècniques de la física nuclear, l'astrofísica, la dinàmica de fluids i els gasos quàntics degenerats. La tesi inclou una recerca preliminar prèvia a l'estudi de la superfluidesa en estrelles de neutrons, la qual ha permès aprofundir en les tècniques analítiques i computacionals emprades en l'anàlisi de models unidimensionals senzills que encapsulen les característiques essencials: l'acoblament i la interacció d'un sistema binari. En aquest estudi, s'analitza un conjunt de condensats de Bose-Einstein unidimensionals acoblats (en paral·lel) mitjançant unions Josephson llargues. En particular, s'examinen configuracions amb condicions de contorn periòdiques que formen estructures tancades en forma d'anell. Mitjançant la resolució de l'equació de Gross-Pitaevskii (GP), s'explora la dinàmica dels estats estacionaris que generen una banda de Bloch discreta transversal. La rica fenomenologia observada en aquests sistemes també podria manifestar-se, sota certes condicions, en l'escorça interna de les estrelles de neutrons, tot i que a escales de densitat i energia diferents. L'astrofísica britànica Jocelyn Bell Burnell, una fermíssima defensora de la recerca en aquest camp, va afirmar que "les estrelles de neutrons són els fars de l'univers, guiant-nos cap a una comprensió més profunda de la física extrema". Aquesta

tesis té com a objectiu aprofundir en l'estudi i la comprensió de la física que es manifesta en aquests sistemes exòtics i fascinants.

1.	Introducción	1
2.	Superfluidez y Superconductividad en estrellas de neutrones	8
2.1.	Historia	8
2.2.	Interiores superfluidos en estrellas de neutrones	10
2.3.	Evidencias observacionales de superfluidez en los interiores de las estrellas de neutrones	12
2.3.1.	Glitches	12
2.3.2.	Ritmo de enfriamiento de Casiopea A	13
2.3.3.	Oscilaciones y modos colectivos	13
2.4.	Apareamiento N-N en estrellas de neutrones	14
2.4.1.	Teoría BCS	14
2.4.2.	Gaps en estrellas de neutrones	16
3.	Ecuación de estado de la materia nuclear	18
3.1.	Densidad de energía	18
3.2.	Equilibrio β	19
3.3.	Interacciones efectivas N-N. Fuerzas de Skyrme	20
3.4.	Fuerza SLy4	22
4.	Dinámica superfluida en el outer core	26
4.1.	Aproximación hidrodinámica	26
4.2.	Modelo hidrodinámico generalizado del outer core	27

4.3. Arrastre dinámico no disipativo	28
4.4. Ecuaciones hidrodinámicas	29
4.5. Inestabilidades hidrodinámicas en el outer core	32
5. Vórtices y superfluidez	47
5.1. Cuantización de la circulación	47
5.2. Vórtices y rotación	49
5.3. Rotación y partículas cargadas. Campo de London	50
5.4. Efecto Meissner. Longitud de penetración	52
5.5. Superconductores de tipo I y II	52
5.6. Cuantización del flujo magnético	54
5.7. Vórtices en el outer core de estrellas de neutrones	54
6. Outer core magnetizado y en rotación	56
6.1. Ecuaciones hidrodinámicas con rotación y campo magnético	56
6.2. Vórtice aislado de protones	58
7. Efecto Josephson en sistemas de dos componentes	68
7.1. Efecto Josephson interno y externo	69
7.2. Crust	70
7.3. Efecto Josephson en el inner crust	72
8. Conclusiones	90
Bibliografía	96

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Entre finales del siglo XIX y mediados del siglo XX se asentaron las bases teóricas de los modelos atómico y nuclear que continúan vigentes actualmente. El descubrimiento del neutrón en 1932 por James Chadwick, mientras irradiaba berilio con partículas alfa, completó el modelo del núcleo atómico propuesto por Ernest Rutherford dos décadas antes. Con este nuevo ingrediente, el neutrón, se pudo explicar la estabilidad de los núcleos atómicos y la existencia de isótopos de diferentes elementos, asentando la base de la física nuclear moderna. El neutrón se integró en la astronomía con una rapidez asombrosa. Dos años después de su descubrimiento, W. Baade y F. Zwicky [BZ34] predijeron la aparición de una estrella de neutrones como etapa final de una estrella masiva tras colapsar el núcleo de dicha estrella después de una explosión supernova. Esta hipótesis teórica tuvo que esperar tres décadas para ser validada hasta que se registraron las primeras observaciones astronómicas compatibles con tales predicciones. Dichas observaciones vinieron de la mano de A. Hewish y J. Bell [Hew+68] en 1968 tras detectar una señal de radio producida por la rotación rápida y regular de una estrella de neutrones, el púlsar PSR B1919+21. Hoy en día, se han detectado varios miles de estrellas de neutrones y se está realizando un gran esfuerzo en establecer restricciones precisas en los modelos que describen su naturaleza, composición y estructura. Desde su descubrimiento las estrellas de neutrones se han convertido en “laboratorios naturales” para estudiar una gran variedad de fenómenos físicos en condiciones extremas: alta densidad, campos gravitatorios y magnéticos intensos, rotación que induce velocidades relativistas, ondas gravitacionales,..., lo que las convierte en objetos de alto interés científico.

Los resultados observacionales y los modelos de evolución estelar sugieren que la estrella de neutrones puede formarse a partir de explosiones supernova de estrellas de masas alrededor de entre diez y veinte masas solares. Para estrellas de masa inferior a unas diez masas solares el remanente de la supernova (o de la gigante roja para estrellas poco masivas como el Sol) será lo suficientemente ligero (por debajo del límite de Chandrasekhar de 1.4 masas solares) como para evitar el colapso gravitacional mediante la presión de degeneración electrónica. El final de estas estrellas será una enana blanca. Para estrellas de masa superior a unas veinte masas solares, el remanente después de la supernova será tan masivo que no existirá ningún mecanismo físico interno capaz de compensar el colapso gravitacional creándose un agujero negro. Las estrellas con masas comprendidas entre diez y veinte masas solares conseguirán estabilizarse mediante la degeneración neutrónica (consecuencia del principio de exclusión de Pauli) y perdurar en el universo como estrellas de neutrones.

La mayoría de las estrellas de neutrones detectadas tienen masas comprendidas entre 1.2 y 2.1 masas solares ampliando ligeramente, por debajo y por arriba, los valores críticos de Chandrasekhar y Tolman-Oppenheimer-Volkov, que pueden depender del modelo utilizado y que continúan refinándose actualmente. Estas estrellas suelen tener radios que van de unos 10 a 15 km y que varían muy ligeramente con la masa de la estrella. La relación masa-radio para una estrella dada puede obtenerse resolviendo de forma autoconsistente las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) dada una ecuación de estado para la materia nuclear e imponiendo unas condiciones de contorno determinadas (tales como la densidad central y la presión superficial). Esta gran cantidad de masa comprendida en un espacio tan reducido dota a la estrella de densidades extremadamente elevadas que van entre la densidad terrestre del hierro en su superficie (7.5 g/cm^3) hasta varias veces la densidad de saturación nuclear $\rho_0 \sim 0.16 \text{ fm}^{-3} (= 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3)$ en el núcleo, convirtiendo a las estrellas de neutrones en los objetos (visibles) más densos del universo.

Desde un punto de vista teórico, el interior de una estrella de neutrones puede modelarse como una secuencia de capas esféricas concéntricas donde la densidad de la materia bariónica y leptónica que la componen aumentan radialmente a medida que nos adentramos en la estrella. Podemos distinguir cuatro regiones principales (como se muestra esquemáticamente en la figura 1.2): el outer crust, el inner crust, el outer core y el inner core. Desde la superficie de la estrella hasta densidades $\sim 6 \times 10^{-11} \text{ fm}^{-3} (= 10^5 \text{ g/cm}^3)$ la

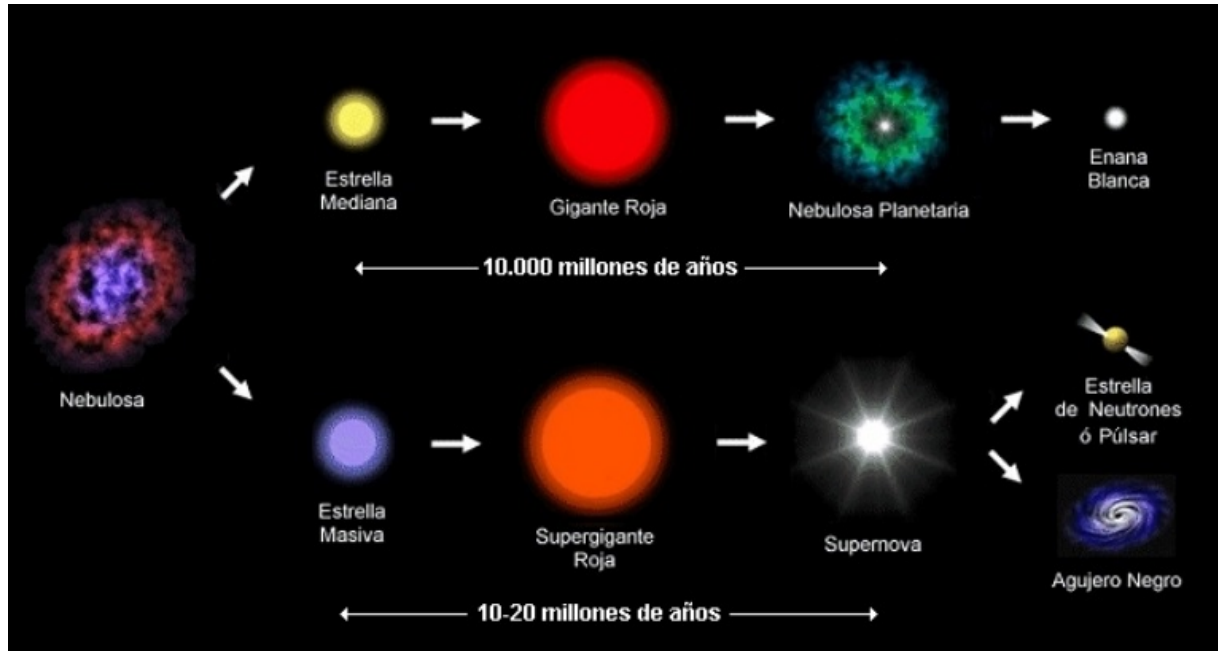


Figura 1.1: Esquema de los posibles escenarios finales de una estrella según su masa.

materia está formada por átomos de hierro distribuidos a lo largo de una red cristalina a fin de minimizar la energía coulombiana del sistema. Para densidades mayores, pero por debajo de $\sim 2.5 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ ($= 4.2 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$), los átomos de hierro se ionizan y se forma una red de núcleos enriquecidos en neutrones (gracias a las capturas electrónicas y a las desintegraciones beta inversas) inmersos en un gas de electrones libres (outer crust). Si aumentamos más la densidad adentrándonos en la estrella, los núcleos de la red serán incapaces de asumir el incremento de neutrones y comenzarán a cederlos al continuo (neutron drip) obteniendo una red de núcleos envuelta en gases de neutrones y electrones (inner crust). Si nos adentramos aún más en la estrella hasta alcanzar densidades $\sim 0.1 \text{ fm}^{-3}$ ($= 1.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$), a los agregados nucleares les resulta favorable energéticamente descomponerse y formar un fluido homogéneo de protones, neutrones y electrones en equilibrio beta (neutralidad de carga y equilibrio químico). Esta región "líquida", que también podría contener muones por encima de cierta densidad umbral, se denomina outer core y representa aproximadamente el 90% de la estrella (radialmente). El outer core se extiende hasta densidades del orden de dos o tres veces la densidad de saturación nuclear ($2 - 3\rho_0$). Para densidades más elevadas entraríamos finalmente en el inner core, región donde es posible energéticamente la aparición de hiperones en el sistema o incluso llegar a desconfinarsse la estructura quark subyacente de los bariones formando un plasma de quarks y gluones.

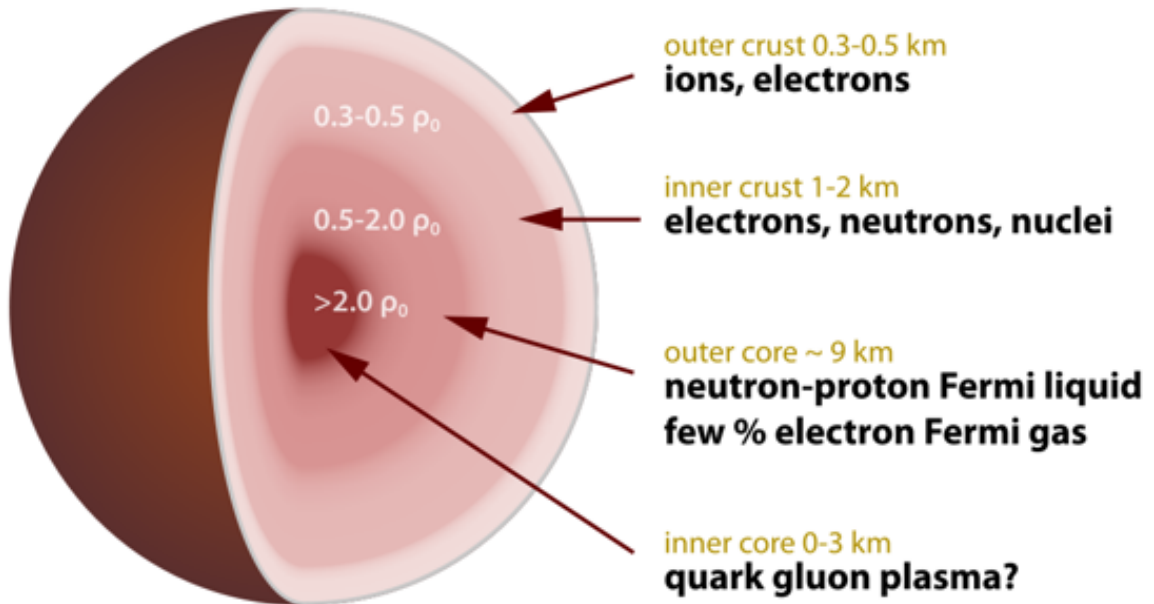


Figura 1.2: Esquema de la estructura interna de una estrella de neutrones.

El colapso gravitacional que induce la formación de la estrella de neutrones va acompañado de un aumento enorme de su velocidad de rotación, pudiendo alcanzar velocidades de $\Omega \sim 1 - 10^3$ rad/s. Este hecho puede explicarse mediante la conservación del momento angular: si la estrella reduce su momento de inercia por contracción, aumentará su velocidad rotacional. La energía cinética de rotación de la estrella, sin embargo, no se conservará y se verá incrementada a costa del trabajo de la fuerza gravitatoria que provoca su contracción. El colapso gravitacional también genera campos magnéticos extremadamente intensos en el interior estelar. La materia bariónica y leptónica que compone la estrella en contracción arrastra consigo las líneas de campo magnético, incrementando su densidad a medida que el volumen estelar disminuye. Este fenómeno se explica mediante el teorema del flujo magnético congelado (o teorema de Alfvén), según el cual las líneas de campo permanecen "congeladas" en el plasma conductor. Para conservar el flujo magnético que atraviesa la superficie de la estrella, la intensidad del campo magnético debe aumentar conforme se reduce el área. Como resultado, se originan campos magnéticos de gran intensidad en la superficie estelar, que típicamente alcanzan valores del orden de $10^8 - 10^{12}$ G, e incluso hasta 10^{15} G en el caso de las magnetoestrellas. Para un tratamiento más detallado de la magnetohidrodinámica en contextos astrofísicos, véase [GP04].

La rápida rotación y el intenso campo magnético de muchas estrellas de neutrones pro-

vocan la emisión de haces estrechos y colimados de radiación electromagnética desde sus polos magnéticos (cubriendo el rango de frecuencias radio - gamma). En general, los polos magnéticos de la estrella no están alineados con su eje de rotación. Este hecho provoca que los chorros de radiación electromagnética barran el espacio de manera similar a un faro. A este tipo de estrellas de neutrones se les conoce como púlsares, los cuales pueden ser detectados desde la Tierra cuando su alineación permite que los haces crucen nuestra línea de visión.

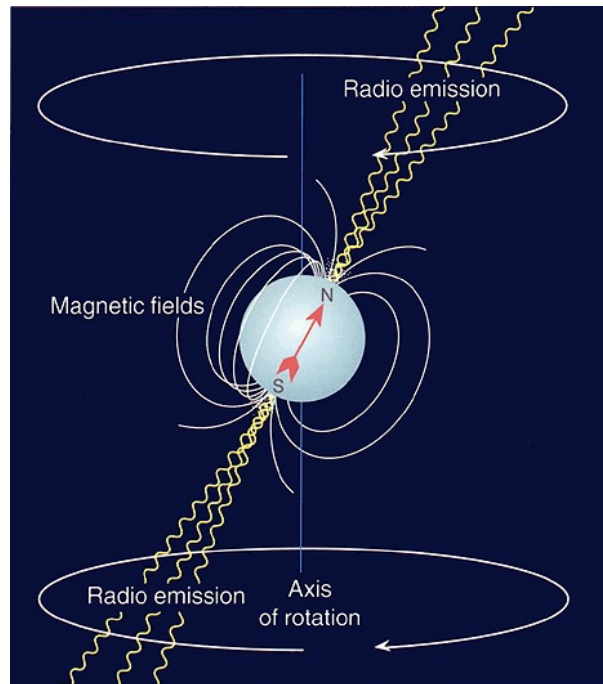


Figura 1.3: Esquema de un púlsar.

Existen diversas evidencias observacionales que sugieren que la materia nuclear en los interiores de las estrellas de neutrones pueda encontrarse en una fase superfluida. Los cambios bruscos en la frecuencia de rotación medidos en algunos radiopúlsares (como el púlsar Vela o Cangrejo), el ritmo acelerado de enfriamiento de Casiopea A o las oscilaciones cuasiperiódicas en las emisiones de alta frecuencia de algunas magnetoestrellas podrían explicarse suponiendo interiores superfluidos y estudiando su dinámica (ver capítulo 2).

En general, la hidrodinámica de los interiores superfluidos de estrellas de neutrones puede describirse mediante modelos de dos fluidos acoplados, uno de los cuales corresponde a los neutrones y el otro representa el resto de los constituyentes (clusters en el crust, protones, electrones, etc...). Estos modelos también suelen incorporar los efectos de arrastre

dinámico, que implican que la corriente de uno de los constituyentes transporta parte de la masa del otro constituyente. Mediante este método pueden estudiarse distintos modos de oscilación de estrellas de neutrones [ACP04], modos colectivos de materia y glitches en estrellas de neutrones en rotación [HM15].

El objetivo de esta tesis es profundizar en el estudio de la dinámica superfluida que se desarrolla en el interior de estos sistemas. Para ello, se utilizará un modelo hidrodinámico de dos fluidos, conformado por un superfluido de neutrones (n) y un superconductor de protones (p), acoplados de manera doble: a través del momento (arrastré no disipativo) y mediante la densidad, a través de la interacción efectiva nucleón-núcleon. El análisis se centrará en el outer core, la región más extensa de la estrella, donde neutrones y protones se encuentran en equilibrio químico y de carga con un gas ultrarelativista de electrones (e). En primer lugar, se deducirán las ecuaciones hidrodinámicas del sistema npe , que rigen la dinámica superfluida en esta región, en ausencia de rotación y de campo electromagnético. En estas condiciones, se perturbarán las ecuaciones obtenidas y se analizará el diagrama de dispersión y el espectro de excitaciones elementales en búsqueda de inestabilidades hidrodinámicas para diferentes valores de la densidad en el outer core y de la velocidad relativa entre protones y neutrones. Posteriormente se generalizarán las ecuaciones hidrodinámicas obtenidas introduciendo la rotación y el campo electromagnético (este último como un potencial con simetría gauge) de la estrella. La rotación y el campo electromagnético inducirán, respectivamente, en los neutrones y protones dos redes de vórtices cuantizados con diferentes densidades, siendo la distancia entre vórtices de neutrones mucho mayor que la distancia entre vórtices de protones. Esta disparidad en la densidad de las dos redes permitirá analizar la estructura de un vórtice de protones aislado, inmerso en un fluido continuo de neutrones. El modelo propuesto permite el estudio de la estructura (perfil) del vórtice de protones en el estado estacionario, así como el efecto de este vórtice sobre el superfluido de neutrones que lo envuelve.

Esta tesis se organiza en ocho capítulos, que abordan los fundamentos teóricos del estudio, el modelo empleado y los resultados obtenidos. El capítulo 2 presenta la motivación del trabajo, exponiendo las evidencias observacionales que sugieren que la materia nuclear en el interior de las estrellas de neutrones se encuentra en estado superfluido. El capítulo 3 está dedicado a la interacción efectiva nucleón-nucleón y a la ecuación de estado. El capítulo 4 introduce el modelo hidrodinámico del outer core y examina los modos de os-

cilación, así como el espectro de excitaciones elementales del sistema npe , en función de la densidad y la velocidad relativa entre protones y neutrones. El capítulo 5 expone los fundamentos teóricos sobre vórtices en superfluidos y los mecanismos que los generan, con énfasis en su excitación en estrellas de neutrones debido a la rotación y al campo magnético estelar. El capítulo 6 amplía el modelo hidrodinámico del capítulo 4 para incluir los efectos de la rotación y el campo magnético. Con este modelo generalizado, se examina el perfil de un vórtice de protones aislado y su influencia en el superfluido de neutrones, así como el impacto de la rotación y el campo magnético en la estructura del vórtice. El capítulo 7 analiza la compleja fenomenología que emerge en sistemas de condensados de Bose-Einstein acoplados. Este modelo permite explorar de forma simplificada aspectos relevantes de la llamada fase de pasta en el inner crust de la estrella, donde diferentes capas (slabs) de protones superconductores están separadas por uniones Josephson formadas por el fluido de neutrones. Tal configuración, en presencia de campos magnéticos, da lugar a una red de fluxones (o vórtices de Josephson) que canalizan el flujo de campo magnético en una unión con superconductividad débil, de igual manera que la red de vórtices de Abrikosov lo hace en un superconductor de tipo II. Finalmente, el capítulo 8 recopila de forma sintética las discusiones de los aspectos relevantes estudiados en la tesis, presenta las correspondientes conclusiones y señala posibles vías de extensión o continuación de esta investigación.

CAPÍTULO 2

SUPERFLUIDEZ Y SUPERCONDUCTIVIDAD EN

ESTRELLAS DE NEUTRONES

2.1. Historia

La mayoría de las sustancias solidifican por debajo de cierta temperatura. Sin embargo, en 1908 el holandés H. Kamerlingh Onnes obtuvo helio líquido al enfriarlo hasta 4.2 K. Este hallazgo lo motivó a investigar las propiedades de la materia a muy bajas temperaturas (cerca al cero absoluto). En 1911, utilizando helio líquido para enfriar mercurio, Onnes descubrió que éste dejaba de resistirse al paso de la corriente eléctrica a temperaturas alrededor de 4 K. Bautizó este fenómeno como superconductividad. Tres años después, en 1914, el mismo Onnes observó como la superconductividad se destruía cuando se aplicaba un campo magnético sobre el superconductor y dicho campo excedía un valor crítico.

En 1938 el físico soviético P.L. Kapitsa observó como el helio líquido enfriado por debajo de 2.17 K fluía sin viscosidad a través de un capilar estrechísimo por el que otros fluidos son incapaces de deslizarse. Este flujo sin resistencia, en analogía con los superconductores, fue bautizado por Kapitsa como superfluidez.

S. N. Bose y Albert Einstein predijeron en 1924 y 1925 respectivamente que un gas ideal de bosones (partículas con espín entero) podía condensar en un estado cuántico macroscópico si se enfriaba lo suficiente [Bos24; Ein25]. Por debajo de cierta temperatura crítica (cerca al cero absoluto), una gran cantidad de bosones del gas pueblan el estado de

más baja energía (estado fundamental) perdiendo su identidad de partícula y formando un estado coherente colectivo que se manifiesta a escala macroscópica. A este nuevo estado de la materia se le confirió el nombre de condensado de Bose-Einstein en deferencia a sus precursores. En 1938, Fritz London sugirió que el mecanismo que podría explicar los fenómenos de la superfluidez en el helio-4 (único superfluido conocido en ese momento) y de la superconductividad en metales es la condensación de Bose-Einstein [Lon38]. London destacó el paralelismo que existía entre la superfluidez y la superconductividad: ambos fenómenos se explican por la existencia de un estado cuántico coherente colectivo (formado por pares de electrones en los superconductores y por átomos de helio en la superfluidez) que se manifiesta macroscópicamente dando lugar a propiedades fascinantes como la resistencia nula en superconductores y la fricción nula en superfluidos.

Hubo que esperar unos cuarenta años para comprender el fenómeno de la superconductividad hasta que se desarrollaron la teoría cuántica y la teoría de las transiciones de fase. En 1957 Bardeen, Cooper y Schrieffer construyeron la teoría que explicaba el fenómeno de la superconductividad (teoría BCS). La idea básica de esta teoría es que los electrones del metal, por debajo de cierta temperatura crítica, se acoplan a momento angular cero (pares de Cooper) formando un estado cuántico colectivo (condensado) que se extiende a través de todo el metal. Estos pares de electrones, que se encuentran separados espacialmente en el metal (longitud de coherencia), están acoplados entre ellos a través de las vibraciones térmicas de la red de iones del metal mediante el intercambio de fonones. El acoplamiento conforma un singlete de espín ($S = 0$) con momento lineal total nulo (momentos de los dos electrones \vec{k} y $-\vec{k}$). La ruptura del par de electrones requiere la aportación de una cierta cantidad de energía conocida como gap que, en general, puede depender de diversos factores como la temperatura del metal, la interacción de los electrones con la red (tipo de metal), la presión externa, etc.

El descubrimiento en 1972 de la superfluidez del helio-3 (fermión) por D. Lee, D. Osheroff y R. Richardson mostró aún más la relación entre los dos fenómenos. La superfluidez en el helio-3 involucra la formación de pares de átomos de helio-3 de forma muy similar a los pares de electrones en la superconductividad. Este hallazgo reforzó el vínculo entre los dos fenómenos que bastantes años antes había observado London.

En 1958, A. Bohr y colaboradores tuvieron la idea de aplicar la teoría BCS a núcleos atómicos medios y pesados (con un número elevado de nucleones). Propusieron que los

nucleones también podrían aparearse de la misma manera que lo hacen los electrones en los superconductores [BMP58]. El suponer que los núcleos atómicos pueden ser superfluidos ha permitido explicar diversas propiedades nucleares colectivas como, por ejemplo, la mayor estabilidad de los núcleos con un número par de nucleones (energías anómalas) o la disminución de las energías de excitación de los modos vibracionales y rotacionales de núcleos pesados deformados [Mig60]. Además, la superfluidez en núcleos finitos es fundamental para entender el comportamiento de algunos núcleos exóticos alejados del valle de estabilidad [Bri06].

La búsqueda de sistemas físicos donde la superfluidez estuviese presente no cesó durante la segunda mitad del siglo veinte. En 1960, A. Migdal buscó este fenómeno fuera de los confines de nuestro planeta.

2.2. Interiores superfluidos en estrellas de neutrones

Pocos años antes de la detección y observación del primer púlsar, A. Migdal ya señaló que la superfluidez de la materia nuclear podría manifestarse como un fenómeno macroscópico si existiesen estrellas de neutrones. Llegó a esta conclusión mientras analizaba la influencia de la superfluidez en los espectros de energía y el momento de inercia de los núcleos [Mig60]. La formalización de la hipótesis de A. Migdal y el desarrollo de la teoría que explicaba la superfluidez en los interiores de las estrellas de neutrones vino de la mano de V.L. Ginzburg y D. A. Kirzhnits al darse cuenta de que la interacción entre dos neutrones en un estado de singlete es atractiva para momentos alrededor de la superficie de Fermi [GK64]. Como consecuencia de este hecho, de acuerdo con la teoría BCS, el gas de Fermi neutrónico puede reducir su energía mediante el emparejamiento de neutrones (formando bosones) y acabar sufriendo la condensación de Bose-Einstein por debajo de una cierta temperatura crítica.

Los interiores de las estrellas de neutrones tienen densidades promedio de $\sim 10^{14}$ g/cm³ con temperatura equivalente de los niveles de Fermi de $T_{Fermi} \sim 100$ MeV. Esta temperatura es varios órdenes de magnitud superior a las temperaturas típicas de $T \sim 10^8$ K (~ 10 keV) que podemos encontrar en dichas estrellas. En estas condiciones extremas, y a efecto práctico de cálculo, podemos aproximar la temperatura interior de la estrella por $T = 0$ K, ya que la energía de interacción entre las partículas es mucho mayor que

su energía térmica. Paradójicamente, debido a las altas densidades, a pesar de estar a millones de grados, las estrellas de neutrones son objetos extremadamente fríos en esta escala de energía.

La longitud de onda térmica de De Broglie de protones y neutrones es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura $\lambda_{DB} = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$, mientras que la distancia de separación promedio de las partículas escala como $\rho^{-1/3}$. Para valores típicos de densidad y temperatura en los interiores de las estrellas de neutrones se tiene que $\lambda_{DB} \gg \rho^{-1/3}$, encontrándose la materia nuclear (tanto protones como neutrones) en el régimen de degeneración cuántica. En estas condiciones, la superfluidez de la materia nuclear aparecerá de forma natural si existe algún mecanismo físico que favorezca la condensación de Bose-Einstein. Este mecanismo es la formación de pares de Cooper, de neutrones y de protones por separado, a través del potencial nucleón-nucleón (N-N). Este potencial contiene un término central que resulta atractivo para distancias $r \gtrsim 0.5$ fm y repulsivo para distancias menores. El potencial también depende del acoplamiento de los momentos angulares (\vec{L}), espines (\vec{S}) e isospines (\vec{I}) de los dos nucleones en interacción. Para cada densidad, el acoplamiento será aquel que minimice su energía. J.A. Sauls discutió cuál es el acoplamiento más favorable a cada densidad (ver figura 2 de [Sau89]): a "baja densidad" ($\lesssim 2.7 \times 10^{14}$ g/cm³) el estado singlete en el canal de onda -s (1S_0) es el más atractivo mientras que para densidades mayores los canales más atractivos son $^3P_2 - ^3F_2$. Para las densidades típicas en las diferentes regiones internas de las estrellas de neutrones, se espera que existan neutrones superfluidos en el estado 1S_0 en el gas del inner crust y en los estados $^3P_2 - ^3F_2$ en el outer core [Sau89]. También se prevé la existencia de protones superconductores en el estado 1S_0 en el outer core [CH06]. No se contempla, en principio, el apareamiento neutrón-protón en ninguna región de la estrella debido a la considerable asimetría entre las densidades de las dos especies [KP13].

Respecto a los electrones, no se espera que presenten superconductividad, ya que su temperatura de transición a la fase superconductora es extremadamente pequeña en comparación con las temperaturas típicas que encontramos en las estrellas de neutrones [BPP69]. Los electrones forman un plasma ultrarrelativista que interactúa muy débilmente con los superfluidos de protones y neutrones, y cuyo comportamiento puede describirse microscópicamente mediante teoría de perturbaciones [Kob+17].

2.3. Evidencias observacionales de superfluididad en los interiores de las estrellas de neutrones

2.3.1. Glitches

Los radiopúlsares con períodos de milisegundos muestran una estabilidad excepcional siendo uno de los relojes más precisos del universo rivalizando con los relojes atómicos. En la mayoría de estos objetos se observa un decrecimiento de la rotación debido a la pérdida de energía cinética por la emisión electromagnética (y quizás de ondas gravitacionales). No obstante, muchos púlsares muestran aumentos bruscos de su frecuencia de rotación ($\Delta\Omega/\Omega$ entre 10^{-9} y 10^{-5}) acompañados de un largo tiempo de relajación. A este fenómeno se le conoce con el nombre de glitch. El primer glitch fue observado en 1969 por P. Reichley y G. Downs en el púlsar Vela [RD69]. Este púlsar sigue siendo objeto de estudio en la actualidad debido a su corto periodo de repetición del glitch (aproximadamente cada tres años) y por su cercanía a la Tierra, permitiendo tomar mediciones precisas. Hasta

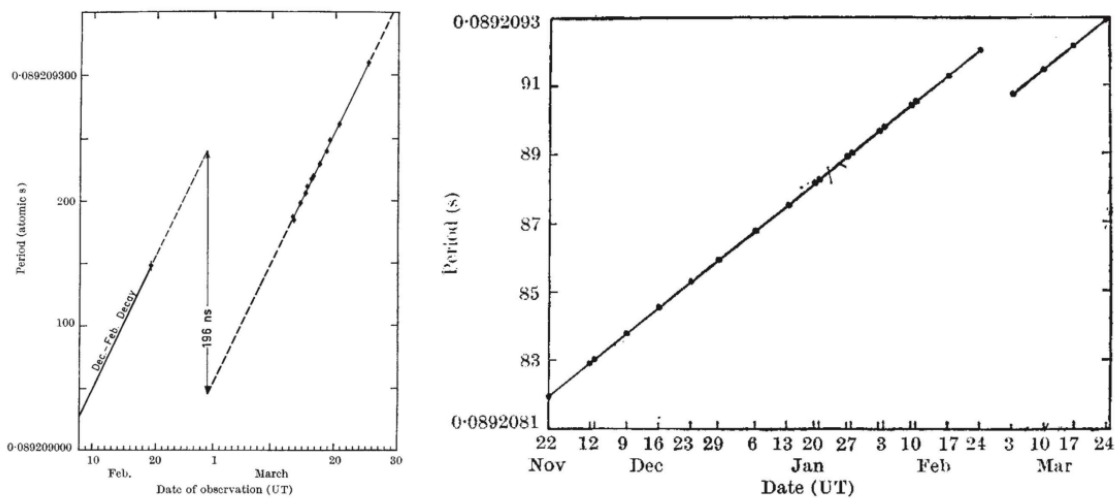


Figura 2.1: Glitch detectado en el púlsar Vela a finales de 1968 y principios de 1969. El panel izquierdo muestra las mediciones desde el observatorio Parkes (Australia) tomadas por V. Radhakrishnan y V. Manchester y el panel derecho muestra las mediciones tomadas desde el observatorio JPL Goldstone (California) tomadas por P. Reichley y G. Downs.

la fecha, se han detectado y medido 482 glitches en 160 púlsares, lo que ha permitido desarrollar y refinar modelos teóricos sobre la composición, estructura y dinámica interna de las estrellas de neutrones. Aunque aún no se comprende completamente el mecanismo

que origina este fenómeno, el modelo estándar propuesto por Anderson e Itoh [AI75] lo explica como el resultado del desprendimiento de vórtices cuantizados en el crust. Estos vórtices, pertenecientes al superfluido de neutrones y anclados a la red cristalina de núcleos en el inner crust, pueden liberarse bruscamente, transfiriendo momento angular a las regiones no superfluidas de la estrella [Alp+84]. Si bien esta teoría reproduce con éxito la magnitud de muchos de los glitches observados, aún persisten interrogantes sobre el papel que desempeñan las distintas capas superfluidas en el fenómeno [WP17]. Observaciones recientes sugieren que el superfluido de neutrones en el inner crust no posee suficiente momento angular para explicar los glitches gigantes [Ho+15], lo que apunta a que el superfluido del outer core también podría jugar un papel [Cha12; And+12].

2.3.2. Ritmo de enfriamiento de Casiopea A

Un evento importante para el estudio del enfriamiento de las estrellas de neutrones es el proporcionado por Casiopea A, que es el remanente de una supernova que se detectó hace 340 años y que se encuentra a unos 11.000 años luz de la Tierra en la constelación de Casiopea, a quien debe su nombre. Esta estrella de neutrones es la más joven que se conoce y es la primera estrella de neutrones aislada cuyo enfriamiento ha sido observado directamente. Los resultados observacionales parecen indicar que su temperatura ha decrecido de forma relativamente rápida desde su descubrimiento en 1999 [HH10]. De confirmarse esta tasa de decrecimiento, la descripción teórica de su ritmo de enfriamiento requeriría la existencia de neutrones superfluidos, que no serían necesarios para explicar el enfriamiento de otras estrellas de neutrones más maduras cuya tasa de enfriamiento es bien conocida. Una hipótesis que se baraja es que la superfluidez de los neutrones en el interior de la estrella abriría un nuevo canal de emisión de neutrinos que aceleraría el ritmo de enfriamiento de la estrella. Estos neutrinos procederían de la ruptura-creación continua de pares de Cooper de neutrones en el canal 3P_2 en el núcleo superfluido de la estrella [Pag+11].

2.3.3. Oscilaciones y modos colectivos

Algunas magnetoestrellas monitorizadas presentan variaciones periódicas en la intensidad de radiación de alta frecuencia (rayos X y gamma). Estas oscilaciones han sido medidas con precisión recientemente en las colas de grandes deflagraciones de los púlsares

SGR 1806-20, SGR 1900+14 y SGR 0526-66 [RW15]. Dichas oscilaciones podrían estar relacionadas con vibraciones (modos) magnetoelásticas globales en la estrella [Dun98] que podrían explicarse mediante la dinámica superfluida en el interior. La identificación de los modos de oscilación y de las frecuencias resonantes podría evidenciar la existencia de fases superfluidas y superconductoras en el core [Gab+13].

2.4. Apareamiento N-N en estrellas de neutrones

2.4.1. Teoría BCS

El núcleo atómico es un sistema físico altamente complejo. Hay que abordarlo acudiendo a los métodos de la teoría cuántica de muchos cuerpos en interacción. Una primera aproximación que permite obtener información física relevante sobre un sistema de muchas partículas interactuantes son las teorías de campo medio. Dentro de las teorías de campo medio, un procedimiento habitual para evaluar funciones de onda y energías de sistemas de fermiones es el método autoconsistente de Hartree-Fock (HF). Como todos los métodos basados en el campo medio, el método de HF supone que cada nucleón experimenta un potencial efectivo (campo medio) generado por el resto de nucleones. Mediante el método variacional, pueden obtenerse soluciones aproximadas del estado fundamental del sistema y describirse la dinámica colectiva a baja energía. No obstante, el método no contempla las correlaciones de corto alcance, que son las responsables del apareamiento entre nucleones que dan lugar a la superfluidez. Una extensión del método de HF que incorpora dichas correlaciones mediante el formalismo de pares partícula-hueco es el método de Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB). Este método se ha utilizado con éxito en estructura nuclear para describir diversas propiedades nucleares (energías de ligadura, barreras de fisión, estados excitados, etc) teniendo en cuenta la superfluidez de la materia nuclear. La teoría BCS es una simplificación de HFB aplicable a sistemas con densidad homogénea [RS80]. En un sistema infinito, los pares con energías cercanas al nivel de Fermi pueden tratarse como ondas planas descritas por los estados (\vec{k}, \uparrow) y $(-\vec{k}, \downarrow)$ y acoplados a espín total $S = 0$. El punto de partida de esta aproximación es el hamiltoniano efectivo

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} \epsilon_{\vec{k}} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{\vec{k}'\uparrow} c_{-\vec{k}'\downarrow}, \quad (2.1)$$

donde $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 \vec{k}^2 / 2m - E_F$ es la energía por nucleón medida respecto al mar de Fermi y $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \langle \vec{k}, -\vec{k} | V | \vec{k}', -\vec{k}' \rangle$ es el elemento de matriz correspondiente al potencial de interacción atractivo ($V_{\vec{k}\vec{k}'} < 0$) entre los dos nucleones con momentos \vec{k} y \vec{k}' . La notación \uparrow y \downarrow indica los dos posibles estados de espín de los nucleones. En la teoría BCS el estado de más baja energía se obtiene cuando el par tiene momento total nulo ($\vec{k} = -\vec{k}'$). En estas condiciones, la función de onda del par puede escribirse como

$$|BCS\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}}^* + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (2.2)$$

donde $v_{\vec{k}}$ y $u_{\vec{k}}$ son las amplitudes de probabilidad de que el par ocupe o no, respectivamente, el estado con momento \vec{k} . La normalización del estado $\langle BCS | BCS \rangle = 1$ requiere que las amplitudes cumplan $|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$.

La energía viene dada por

$$E = \langle BCS | H | BCS \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}, \quad (2.3)$$

donde se ha definido el gap generalizado como $\Delta_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$.

Para obtener el estado fundamental del par debe acudir al método variacional. Hay que encontrar las amplitudes $v_{\vec{k}}$ y $u_{\vec{k}}$ que minimicen la energía, esto es $dE/dv_{\vec{k}}^* = 0$ [Gen89], bajo la condición $|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$. El resultado son las siguientes amplitudes de probabilidad

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_{\vec{k}}}{\sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}} \right), \quad (2.4)$$

$$v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{\vec{k}}}{\sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}} \right), \quad (2.5)$$

y adicionalmente la ecuación

$$\Delta_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{2 \left(\epsilon_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2 \right)^{1/2}} \quad (2.6)$$

que se conoce como ecuación del gap. Esta ecuación puede resolverse de forma autoconsistente para un potencial N-N dado (V). Haciendo el salto al continuo, integrando sobre todos los momentos \vec{k}' , se obtiene la ecuación

$$\Delta_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda dk' k'^2 V(k, k') \frac{\Delta_{k'}}{\left(\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2 \right)^{1/2}} \quad (2.7)$$

donde se introduce un cut-off Λ en los momentos para garantizar la convergencia de la integral. Para una interacción de alcance finito, por ejemplo la de Gogny, puede tomarse con seguridad $\Lambda \rightarrow \infty$, ya que el término gaussiano en el potencial de interacción cae a cero para momentos \vec{k}' grandes.

La energía del estado fundamental del par es $E_0 \approx 2E_F - 2\Delta$. Esto significa que el mar de Fermi puede reducir su energía mediante la formación de pares, sufriendo el fluido de neutrones (o protones) una transición de fase a un condensado de Bose-Einstein de pares de Cooper. La materia nuclear en estrellas de neutrones es altamente asimétrica (representando los neutrones cerca del 90 % de la materia bariónica de la estrella) provocando una asimetría en las superficies de Fermi de neutrones y protones. Esta asimetría impide la formación de pares de Cooper neutrón-protón [KP13] y únicamente se formarán pares de neutrones y pares de protones por separado.

Un parámetro importante para la descripción superfluida del sistema es la longitud de coherencia ξ del par. Este parámetro es del orden de [BCS57]

$$\xi \approx \frac{\hbar^2 k_F}{\pi m \Delta}, \quad (2.8)$$

y proporciona una escala para la distancia de correlación del par y para el ritmo de variación del gap [Gen89].

2.4.2. Gaps en estrellas de neutrones

La aparición de la superfluidez en la materia nuclear será favorable cuando la energía asociada a las excitaciones térmicas sea menor que el gap, esto es $k_B T \ll \Delta$, donde k_B es la constante de Boltzman. De hecho, la temperatura de transición al estado superfluido será aquella para la cual $k_B T_c \approx \Delta$. Las temperaturas de transición típicas para las densidades bariónicas que podemos encontrar en los interiores de las estrellas de neutrones son del orden de 10^9 K (0.1 MeV) o 10^{10} K (1 MeV) [Alp+84], muy por debajo de las temperaturas asociadas a los niveles de Fermi $T_{Fermi} \sim 100$ MeV. La fuerte interacción entre los nucleones abre diversos canales de interacción en los cuales el apareamiento es posible. Para las densidades del crust, los neutrones se acoplarán al canal 1S_0 . En el outer core, donde protones y neutrones se encuentran en equilibrio beta, los protones se acoplarán al canal 1S_0 [CH06] mientras que los neutrones lo harán a los canales $^3P_2 - ^3F_2$ [Sau89; Bal+98]. El valor máximo del gap obtenido mediante cálculo microscópico para

diferentes potenciales de interacción en el canal S es $\Delta_{n,p} \sim 1$ MeV (para una densidad de $\rho_{n,p} \sim 0.12$ fm $^{-3}$) mientras que para el acoplamiento a ${}^3P_2 - {}^3F_2$ es $\Delta_n \sim 0.6$ MeV (para una densidad $\rho_n \sim 0.24$ fm $^{-3}$) [Zho+04].

Las energías asociadas al apareamiento van como $E_{pair} \sim \Delta_{n,p}$ y son muy pequeñas en comparación con las energías de los niveles de Fermi ($E_{pair} \ll E_F$) pero relevantes para que el sistema macroscópicamente tenga comportamiento superfluido.

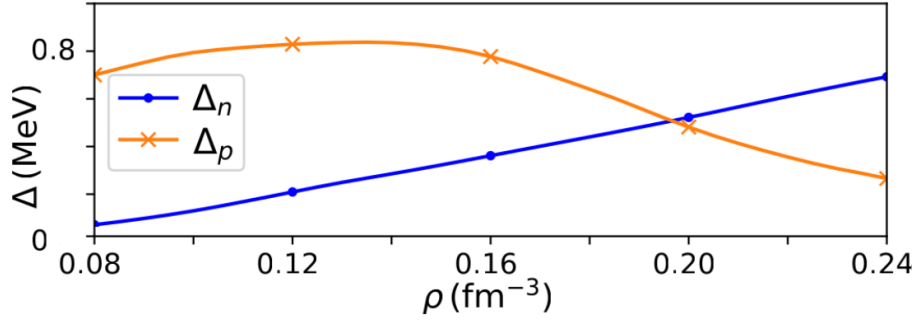


Figura 2.2: Valor del gap para protones (canal 1S_0) y del gap para neutrones (canales ${}^3P_2 - {}^3F_2$) obtenidos mediante cálculo microscópico con un potencial de interacción a dos cuerpos de tipo Argonne v_{18} y un potencial fenomenológico a tres cuerpos Urbana IX [Zho+04].

CAPÍTULO 3

ECUACIÓN DE ESTADO DE LA MATERIA NUCLEAR

El conocimiento de la ecuación de estado (EoS) de la materia nuclear en el interior de una estrella de neutrones es un ingrediente esencial para realizar cálculos y simulaciones con modelos astrofísicos. En particular, la EoS de la materia nuclear es imprescindible si queremos desarrollar una descripción hidrodinámica de la estrella, donde la materia que la compone (neutrones, protones, electrones, ...) puede tratarse como un fluido macroscópico (medio continuo). La construcción de la EoS supone que la materia que compone el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico. Esto implica que las variables termodinámicas (temperatura, presión, potencial químico, ...) están bien definidas y que el sistema se encuentra en equilibrio térmico, mecánico y químico.

3.1. Densidad de energía

El punto de partida para construir la termodinámica del interior de una estrella de neutrones es la densidad de energía (\mathcal{H}). En general, la densidad de energía de la materia bariónica del sistema puede descomponerse como la suma de dos términos: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{kin} + \mathcal{H}_{nuc}$, un término cinético que depende de las velocidades de las partículas y un término potencial que contiene la interacción nuclear y depende, en el caso de las fuerzas de Skyrme, de las densidades de protones y neutrones (y de sus gradientes). En materia nuclear no uniforme, como núcleos finitos o materia atravesada por vórtices, tanto el término cinético como el potencial podrían incluir términos correctivos en gradientes de la densidad (ver secciones 3.3 y 4.4). A su vez, en presencia de campos

electromagnéticos y de rotación, es necesario agregar términos adicionales en la densidad de energía para reflejar el acoplamiento de la materia nuclear con dichos campos (véase el capítulo 6).

Conocida la densidad de energía, pueden obtenerse otras magnitudes del sistema a partir de las relaciones termodinámicas estándar. Por ejemplo, puede calcularse el potencial químico del sistema

$$\mu(\rho) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho}, \quad (3.1)$$

la presión

$$P(\rho) = \rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} - \mathcal{H}, \quad (3.2)$$

o la incompresibilidad de la materia nuclear

$$K(\rho) = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{\mathcal{H}}{\rho} \right), \quad (3.3)$$

que nos da una idea de la curvatura alrededor del mínimo de energía de ligadura y, que en interacciones efectivas de campo medio, toma un valor de $K \sim 230$ MeV para la densidad desaturación nuclear ρ_0 .

3.2. Equilibrio β

La materia estelar que constituye la estrella de neutrones está formada esencialmente por neutrones y una pequeña concentración de protones y electrones. En el core, donde las densidades son mayores, pueden aparecer (por encima de una determinada densidad umbral) muones o incluso hiperones (Λ, Σ, \dots), ya que habrá energía disponible en el sistema para producirlos. No obstante, en los modelos utilizados en esta tesis no se consideran otras partículas que no sean las tres principales (npe). Para cada densidad, la proporción del conjunto npe puede determinarse exigiendo neutralidad local de carga y equilibrio químico frente a los procesos de interacción débil que tienen lugar en todas las regiones de la estrella. Es bien conocido que el neutrón libre tiene un tiempo de vida de $\tau \approx 14.7$ min, decayendo mediante desintegración β en un protón, un electrón y un antineutrino electrónico ($n \mapsto p + e + \bar{\nu}_e$). En el medio estelar, en principio, esta desintegración está "bloqueada" por el principio de exclusión de Pauli, puesto que protones y electrones tienen sus propios mares de Fermi ocupados. Paralelamente, se producen capturas electrónicas

por parte de los protones ($p + e \mapsto n + \nu_e$) que dejan huecos en los mares de Fermi de protones y electrones, permitiendo la desintegración del neutrón y equilibrando ambos procesos.

Sean ρ_n, ρ_p y ρ_e las densidades de neutrones, protones y electrones respectivamente. Pueden obtenerse las condiciones de equilibrio químico minimizando la densidad de energía $\mathcal{H}(\rho_n, \rho_p, \rho_e)$ bajo las condiciones de conservación del número bariónico y de la carga eléctrica. El resultado es

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad \rho_p = \rho_e, \quad \rho = \rho_n + \rho_p, \quad (3.4)$$

donde los potenciales químicos de neutrones y protones se obtienen como $\mu_n = \partial\mathcal{H}/\partial\rho_n$ y $\mu_p = \partial\mathcal{H}/\partial\rho_p$, respectivamente, y donde se trata a los electrones como un gas degenerado ultrarelativista con $\mu_e = \hbar c(3\pi^2\rho_e)^{1/3}$. Hemos supuesto que el potencial químico de los neutrinos es nulo puesto que escapan de la estrella sin interactuar. Los neutrinos son los principales responsables del enfriamiento progresivo de la estrella ya que, en cada reacción, se llevan energía del sistema en forma de energía cinética [US96].

Fijado un potencial de interacción N-N y, por lo tanto, una densidad de energía, la densidad de cada componente del sistema npe puede obtenerse resolviendo la beta estabilidad (3.4).

3.3. Interacciones efectivas N-N. Fuerzas de Skyrme

La complejidad del sistema nuclear y la imposibilidad de obtener soluciones exactas, ya que esto implicaría acudir a la teoría fundamental (QCD), nos animan a buscar alternativas que permitan realizar cálculos de una forma sencilla y que puedan reproducir datos experimentales. Una alternativa es utilizar interacciones fenomenológicas que respeten las propiedades de la fuerza nuclear y sus simetrías.

Un modelo popular utilizado en estructura nuclear para simular la interacción N-N son las fuerzas de Skyrme, propuestas por T. Skyrme en 1950 [VB72]. Se trata de una interacción fenomenológica de alcance nulo que depende de aproximadamente una decena de parámetros libres. El valor de estos parámetros se ajusta a datos experimentales de núcleos finitos y a datos empíricos de materia nuclear. Existen alrededor de unas 240 fuerzas de Skyrme diferentes [Dut+12] y se distinguen unas de otras por el valor de los parámetros que varían según el ajuste. La expresión más general para la interacción de Skyrme es

[Cha+98]

$$V_{12} = t_0 (1 + x_0 P_\sigma) \delta(\vec{r}) + t_1 (1 + x_1 P_\sigma) \left(\vec{k}'^2 \delta(\vec{r}) + \vec{k}^2 \delta(\vec{r}) \right) + t_2 (1 + x_2 P_\sigma) \vec{k} \delta(\vec{r}) \vec{k} + t_3 (1 + x_3 P_\sigma) \rho^\alpha \delta(\vec{r}) + iW_0 (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \left(\vec{k} \times \vec{k} \delta(\vec{r}) \right), \quad (3.5)$$

donde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = (\nabla_1 - \nabla_2)/2i$ son los operadores posición relativa y momento relativo, respectivamente, entre los dos nucleones en interacción. $\vec{\sigma}_1$ y $\vec{\sigma}_2$ son las matrices de Pauli. La notación \vec{k}' indica que el operador actúa hacia la izquierda (mientras que el operador \vec{k} actúa hacia la derecha). El operador P_σ intercambia los espines de la función de onda de las dos partículas. Esto es

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 | P_\sigma | \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_2, \sigma_1 \rangle = \delta_{\sigma_1, \sigma_2}. \quad (3.6)$$

El primer sumando del potencial (3.5) es un término central en la interacción a dos cuerpos, mientras que el segundo y tercer término son no locales y simulan el alcance finito de la interacción. El cuarto término simula la interacción a tres cuerpos, describiendo cómo la interacción entre dos nucleones se ve afectada por el resto (a través de la densidad) [VB72]. El último término es la contribución de espín-órbita de la interacción, que aportará términos proporcionales al gradiente de la densidad.

El potencial de Skyrme (3.5) proporciona la siguiente densidad de energía

$$\mathcal{H}_{skyrme} = \mathcal{T} + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_{eff} + \mathcal{H}_{fin} + \mathcal{H}_{so}, \quad (3.7)$$

donde \mathcal{T} es la densidad de energía cinética, \mathcal{H}_0 es el término de “alcance nulo” correspondiente a la interacción atractiva a dos cuerpos, \mathcal{H}_3 es el término “dependiente de la densidad” que simula la interacción a tres cuerpos, \mathcal{H}_{eff} es el término en masa efectiva que proviene de la dependencia en momento de la interacción, \mathcal{H}_{fin} es un término que simula el rango finito de la interacción mediante gradientes de la densidad y \mathcal{H}_{so} es el término de espín órbita. Las expresiones de cada uno de estos términos son

$$\mathcal{T} = \frac{\hbar^2}{2m} (\tau_n + \tau_p),$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{t_0}{4} [(2 + x_0) \rho^2 - (2x_0 + 1)(\rho_n^2 + \rho_p^2)],$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{t_3}{24} \rho^\alpha [(2 + x_3) \rho^2 - (2x_3 + 1)(\rho_n^2 + \rho_p^2)],$$

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{8} \left[[t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)] (\tau_n + \tau_p)\rho + [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)] (\tau_n\rho_n + \tau_p\rho_p) \right],$$

$$\mathcal{H}_{fin} = \frac{1}{32} \left[[3t_1(2 + x_1) - t_2(2 + x_2)] (\nabla\rho)^2 - [3t_1(2x_1 + 1) + t_2(2x_2 + 1)] [(\nabla\rho_n)^2 + (\nabla\rho_p)^2] \right],$$

$$\mathcal{H}_{so} = \frac{W_0}{2} \left(\vec{J} \cdot \nabla\rho + \vec{J}_n \cdot \nabla\rho_n + \vec{J}_p \cdot \nabla\rho_p \right),$$

donde τ_i (con $i = n, p$) es la densidad de energía cinética de cada componente y $\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p$ es la densidad total de espín. Si asumimos que los nucleones pueden describirse mediante ondas planas, cuyas funciones de onda son del tipo $\phi_i \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\xi_\sigma\zeta_\tau$ (con ξ_σ y ζ_τ como espinores de espín e isospín respectivamente), la densidad de energía cinética es $\tau_i = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3}\rho_i^{5/3}$. Para materia nuclear (uniforme), los términos en gradiente de la densidad no contribuyen a la densidad de energía, esto es $\mathcal{H}_{fin} = \mathcal{H}_{so} = 0$, y la expresión de la densidad de energía se simplifica. La densidad de energía para materia simétrica se obtiene tomando $\rho_n = \rho_p = \rho/2$, y para materia neutrónica tomando $\rho_n = \rho$ y $\rho_p = 0$.

Las fuerzas de Skyrme son sencillas de utilizar tanto algebraicamente como computacionalmente debido a su alcance nulo (dan cuenta de ello los términos δ en la expresión del potencial de interacción) [VB72]. No obstante, a pesar de su simplicidad, son una buena aproximación para describir la estructura de núcleos finitos en su estado fundamental y son especialmente útiles para cálculos astrofísicos.

3.4. Fuerza SLy4

Propuesta por Chabanat et al. en 1998 [Cha+98], la fuerza de Skyrme SLy4 ha sido ampliamente utilizada en cálculos tanto de núcleos finitos como astrofísicos. En particular, se ha utilizado para describir tanto el inner crust como el outer core en estrellas de neutrones. El ajuste de esta fuerza busca reproducir las siguientes características:

- proporcionar un buen valor del punto de saturación nuclear para materia nuclear simétrica: $\rho_0 \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$ y $E/A \simeq -16 \text{ MeV}$.
- proporcionar un módulo de incompresibilidad de la materia nuclear simétrica de $K_\infty \simeq 230 \text{ MeV}$.
- proporcionar una energía de simetría de $a_S \simeq 32 \text{ MeV}$.

- reproducir correctamente las energías de ligadura y los radios cuadráticos medios (r.m.s) de los núcleos mágicos: ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{132}Sn y ^{208}Pb .
- reproducir razonablemente la ecuación de estado para materia neutrónica, obtenida mediante cálculo microscópico, por R.B. Wiringa et al. [WFF88].
- mejorar un factor $\kappa = 0.25$ la regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn para la resonancia dipolar gigante E1, $T=1$.

Con este ajuste, los parámetros libres de la interacción para SLy4 toman los valores: $t_0 = -2488.91 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^3$, $t_1 = 486.82 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^5$, $t_2 = -546.39 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^5$, $t_3 = 13777.0 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3+3\rho}$, $x_0 = 0.834$, $x_1 = -0.344$, $x_2 = -1.000$, $x_3 = 1.354$, $\alpha = 1/6$ y $W_0 = 123.0 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^5$.

Resolviendo el equilibrio beta (3.4) con esta parametrización, se obtiene la proporción de protones y neutrones para cada densidad (ver figura 3.1). Observamos que la materia en el interior de las estrellas de neutrones está formada en $\sim 90\%$ por neutrones y en un $\sim 10\%$ por protones, con la misma proporción de electrones que de protones para garantizar el equilibrio global de carga.

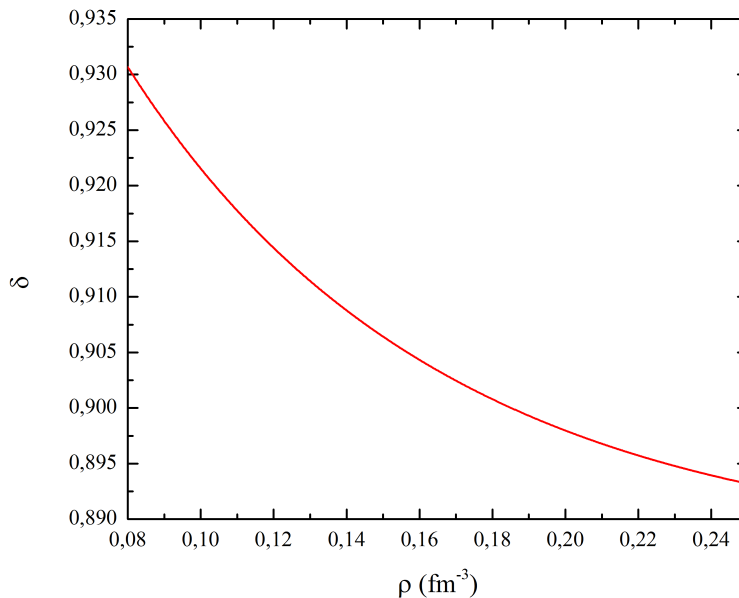


Figura 3.1: Equilibrio β obtenido para la fuerza de Skyrme SLy4. Asimetría $\delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ en función de la densidad bariónica total $\rho = \rho_n + \rho_p$.

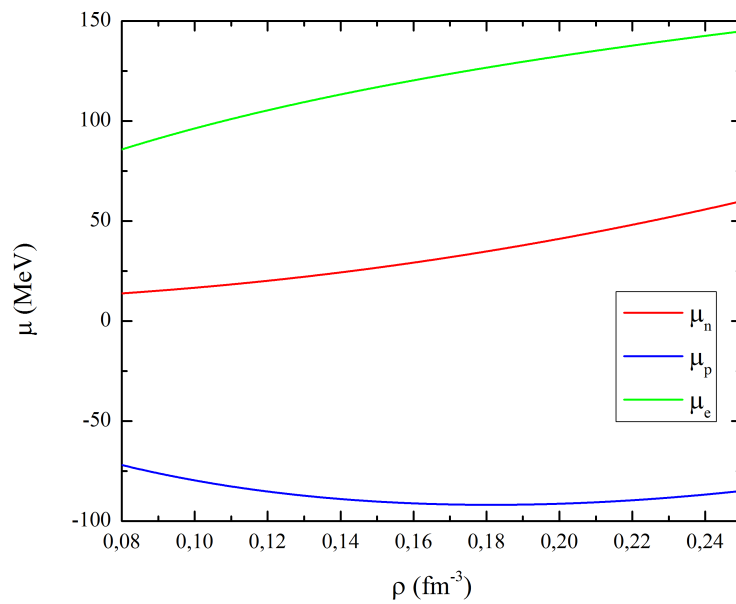


Figura 3.2: Potenciales químicos de protones, neutrones y electrones en equilibrio β . Potenciales químicos de protones y neutrones obtenidos a partir de la fuerza de Skyrme SLy4 y potencial químico de un gas ideal de electrones ultrarelativistas $\mu_e = \hbar c(3\pi\rho_e)^{1/3}$ en función de la densidad bariónica total.

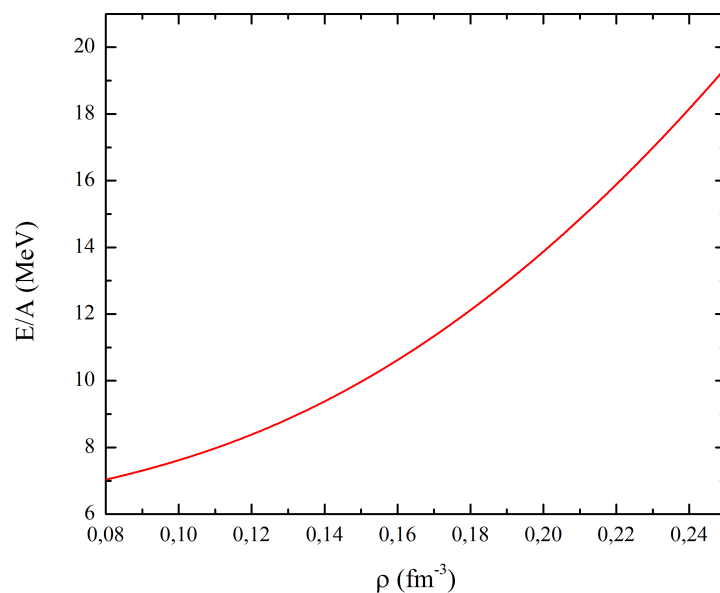


Figura 3.3: Energía por partícula en materia betaestable obtenida a partir de la fuerza de Skyrme SLy4 en función de la densidad bariónica total.

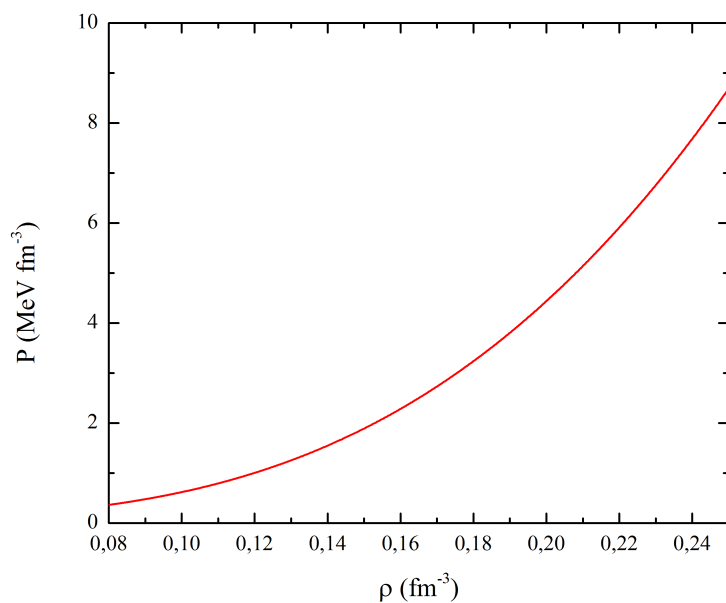


Figura 3.4: Presión total de la materia betaestable obtenida a partir de la fuerza de Skyrme SLy4 en función de la densidad bariónica total.

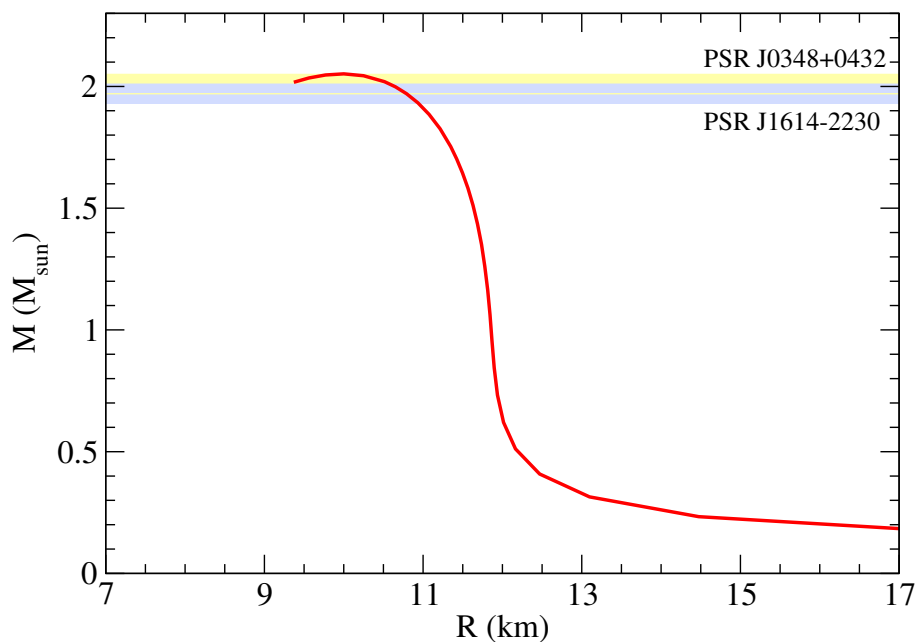


Figura 3.5: Relación masa-radio para una estrella de neutrones obtenida mediante la integración de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, utilizando una ecuación de estado basada en la interacción efectiva SLy4. La EoS incluye una descripción unificada del core y del crust.

CAPÍTULO 4

DINÁMICA SUPERFLUIDA EN EL OUTER CORE

En los modelos que describen la estructura y composición de los interiores de las estrellas de neutrones, el outer core es la región más extensa de la estrella (radialmente). Las densidades en esta región van desde $\sim 0.08 \text{ fm}^{-3}$ (en la parte más externa) hasta dos o tres veces la densidad de saturación nuclear. En esta región, la materia nuclear se encuentra formando dos superfluidos, uno de neutrones y otro de protones (superconductor), acoplados por densidad a través de la interacción nucleón-nucleón y a través del momento mediante el arrastre no disipativo. También encontraremos un plasma de electrones ultra-relativista en equilibrio beta y de carga con los dos superfluidos. Suponiendo un modelo de tres fluidos npe , el análisis hidrodinámico nos permite estudiar el comportamiento del outer core y obtener información relevante acerca de su dinámica y evolución.

4.1. Aproximación hidrodinámica

El análisis hidrodinámico permite explorar y obtener información dinámica del sistema en el límite $\vec{k} \rightarrow \vec{0}$, que corresponde al caso de longitud de onda larga (o baja frecuencia). Este límite considera que las longitudes de onda de las perturbaciones y/o de las excitaciones en el sistema son grandes en comparación con las longitudes microscópicas características de dicho sistema. Así pues, las longitudes de onda de las perturbaciones serán mucho mayores que las longitudes de coherencia de los pares ($\xi_{n,p}$) y que las longitudes de Fermi de los dos superfluidos ($\lambda_{n,p}^F = 2\pi/k_{n,p}^F$). Respecto a los electrones, la escala hidrodinámica supone que las longitudes de onda de las perturbaciones serán mucho ma-

yores que la longitud de apantallamiento de Debye de los electrones $\lambda_e^D = \sqrt{\epsilon_e k_B T / \rho_e e^2}$ y que las frecuencias asociadas a dichas perturbaciones, serán pequeñas en comparación con la frecuencia de oscilación del plasma de electrones $\omega_e = \sqrt{\rho_e e^2 / m_e \epsilon_e}$. En el análisis hidrodinámico se considera que un pequeño elemento de fluido, de volumen dV , contiene un gran número de partículas. En estas condiciones, la dinámica de cada uno de los fluidos del sistema puede describirse mediante funciones macroscópicas dependientes de la posición y del tiempo. El estado de cada uno de los fluidos, queda perfectamente determinado si conocemos simultáneamente su campo de velocidades $\vec{v}_i = \vec{v}_i(\vec{r}, t)$ con $i = n, p, e$, su distribución de densidad $\rho_i = \rho_i(\vec{r}, t)$ y una ecuación de estado que relacione, por ejemplo, la presión del fluido y la densidad. La presión en función de la densidad puede obtenerse mediante (3.2) a partir de la densidad de energía asociada a la interacción nucleón-nucleón.

4.2. Modelo hidrodinámico generalizado del outer core

El superfluido de neutrones y el superconductor de protones pueden describirse mediante dos parámetros de orden complejos, ψ_n y ψ_p , respectivamente. En la aproximación hidrodinámica, estos parámetros de orden pueden escribirse como $\psi_i = \sqrt{n_i} e^{i2\theta_i}$ con $i = n, p$, donde n_i y $2\theta_i$ son la densidad local de pares de Cooper y la fase de cada condensado respectivamente [LL35]. Asumiendo que todos los protones y neutrones están apareados, las densidades superfluidas de protones y neutrones pueden obtenerse a partir de $n_i = |\psi_i|^2$. La fase contiene la información dinámica del sistema y proporciona el campo de velocidades de cada componente a partir de la relación $\vec{v}_i^B = \hbar \nabla 2\theta_i / 2m$, donde el superíndice B indica el carácter bosónico del sistema. Por comodidad, vamos a trabajar con magnitudes referentes a los nucleones (fermiónicas) y no a los pares de Cooper (bosónicas). Así pues, las densidades fermiónicas serán $\rho_i = 2n_i$, los momentos fermiónicos $\vec{p}_i = \vec{p}_i^B / 2$ y los potenciales químicos fermiónicos $\mu_i = \mu_i^B / 2$. Las velocidades fermiónicas y bosónicas serán iguales $\vec{v}_i = \vec{v}_i^B$.

Si asumimos un potencial nucleón-nucleón tipo Skyrme, la densidad de energía total del sistema npe viene dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{kin} + \mathcal{H}_{skyrme} + \mathcal{H}_e. \quad (4.1)$$

El primer término, \mathcal{H}_{kin} , es un término dinámico que corresponde a la energía cinética debida a los nucleones acoplados mediante el arrastre no disipativo (entrainment). El

segundo término, $\mathcal{H}_{\text{skyrme}}$, es la densidad de energía nuclear (ecuación (3.7)). El último término, \mathcal{H}_e , es la energía de los electrones y podemos descomponerla como $\mathcal{H}_e = \mathcal{T}_e + \mathcal{U}_e$, donde $\mathcal{T}_e = 3\hbar c(3\pi^2\rho_e)^{1/3}/4$ es la densidad de energía cinética de un gas degenerado en el límite ultrarelativista ($m_e c^2 \ll \hbar k_e^F c$) y donde $\mathcal{U}_e = e\rho_e\Phi/2$ es la energía electrostática. El potencial de Coulomb Φ sigue la ecuación de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi e(\rho_e - \rho_p)$, donde asumimos que la densidad de electrones, $\rho_e = (\mu_e/\hbar c)^3/3\pi^2$, se ajusta de forma instantánea a la densidad local de protones para garantizar el equilibrio de carga ($\rho_p = \rho_e$).

4.3. Arrastre dinámico no disipativo

Se define la matriz de arrastre del sistema de dos componentes como la matriz 2x2

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \rho_{nn} & \rho_{np} \\ \rho_{pn} & \rho_{pp} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde los elementos ρ_{ij} tienen unidades de densidad. El término dinámico de la densidad de energía (4.1) puede escribirse, a partir de los elementos de la matriz de arrastre, como [AB76]

$$\mathcal{H}_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{ij} \rho_{ij} \nabla\theta_i \nabla\theta_j, \quad (4.3)$$

donde los términos no diagonales de (4.2) cumplen que $\rho_{np} = \rho_{pn}$ y juegan el papel de un arrastre no disipativo de una componente sobre la otra acoplando (dinámicamente) las velocidades de los dos superfluidos. La relación entre los elementos de (4.2) y las densidades de protones y neutrones es

$$\rho_n = \rho_{nn} + \rho_{np}, \quad (4.4)$$

$$\rho_p = \rho_{pp} + \rho_{pn}, \quad (4.5)$$

verificándose que $|\mathcal{D}| = \rho_{nn}\rho_{pp} - \rho_{np}^2 > 0$ para todo el rango de densidades del outer core. Esta condición es necesaria para que el sistema sea estable [KKM05] y para garantizar la invariancia galileana [AB76].

El acoplamiento en velocidad de las dos componentes se pone de manifiesto escribiendo las densidades de corriente

$$\vec{j}_n = \rho_{nn}\vec{v}_n + \rho_{np}\vec{v}_p, \quad (4.6)$$

$$\vec{j}_p = \rho_{pp}\vec{v}_p + \rho_{np}\vec{v}_n, \quad (4.7)$$

o equivalentemente

$$\frac{\vec{j}_n}{\rho_n} = \vec{v}_n + \frac{\rho_{np}}{\rho_n}\Delta\vec{v}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\vec{j}_p}{\rho_p} = \vec{v}_p - \frac{\rho_{np}}{\rho_p}\Delta\vec{v}, \quad (4.9)$$

donde $\Delta\vec{v} = \vec{v}_p - \vec{v}_n$ es la velocidad relativa entre los dos superfluidos. En ausencia de velocidad relativa ($\Delta\vec{v} = 0$) tenemos que $\vec{j}_n = \rho_n\vec{v}_n$ y $\vec{j}_p = \rho_p\vec{v}_p$.

Los términos cruzados de la matriz de arrastre (4.2) en el límite de baja temperatura ($T \ll \Delta_n, \Delta_p$) vienen dados por [CH06]

$$\frac{\rho_{np}}{m} = \frac{(k_n^F k_p^F)^2}{9\pi^4} f_1^{np}, \quad (4.10)$$

donde los momentos de Fermi de los nucleones son $k_i^F = (3\pi^2\rho_i)^{1/3}$ y donde el parámetro f_1^{np} para interacciones de Skyrme es [CH06]

$$f_1^{np} = -\frac{k_n^F k_p^F}{2} \left[t_1 \left(1 + \frac{x_1}{2} \right) + t_2 \left(1 + \frac{x_2}{2} \right) \right]. \quad (4.11)$$

que depende de los parámetros (x_1, t_1, x_2, t_2) de la interacción. Para la fuerza SLy4 se obtiene que $\rho_{np} = -1.566\rho_n\rho_p$ donde $\nu = -1.566 \text{ fm}^3$ es el parámetro de arrastre.

Los elementos de la matriz de arrastre obtenida con SLy4 se representan en la figura 4.1 donde observamos que el arrastre afecta más a los protones que a los neutrones. Este efecto puede verse también en las ecuaciones (4.8) y (4.9) donde el término de arrastre es proporcional a ρ_{np}/ρ_i y en todo el outer core $\rho_p \ll \rho_n$.

4.4. Ecuaciones hidrodinámicas

En esta sección presentamos las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan la dinámica superfluida en el outer core. Por simplicidad, de momento, no consideramos la rotación ni el campo electromagnético en la estrella. Las ecuaciones del movimiento para protones y neutrones pueden obtenerse a partir de la densidad de energía (4.1). El hamiltoniano

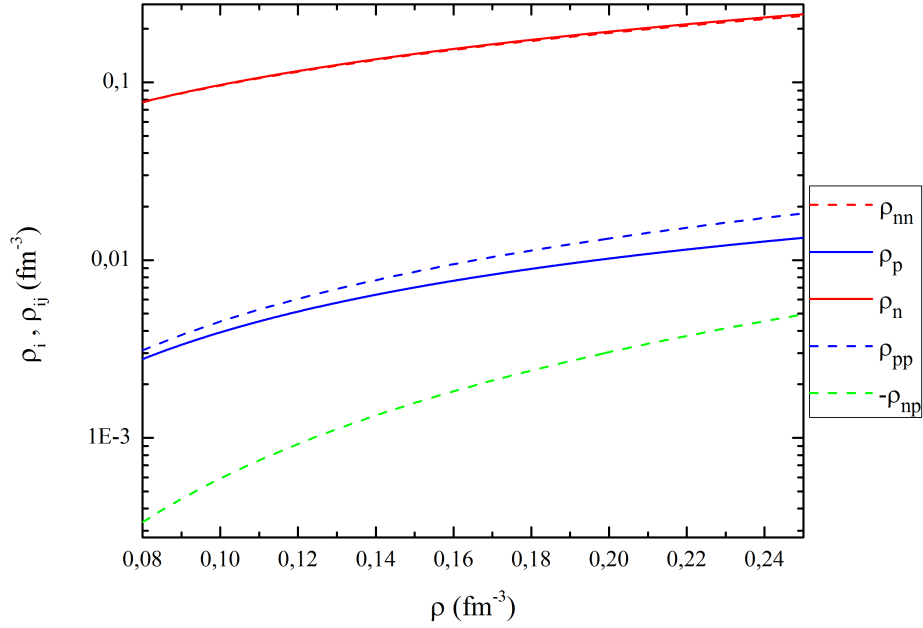


Figura 4.1: Matriz de arrastre obtenida considerando la fuerza de Skyrme SLy4 para materia betaestable a cada densidad.

del sistema es $H = \int \mathcal{H}(\rho_n, \rho_p, \nabla \rho_n, \nabla \rho_p, \nabla \theta_n, \nabla \theta_p) d\vec{r}$, donde tomamos $\{\rho_i, \theta_i\}$ como variables conjugadas. Este Hamiltoniano ha de cumplir las ecuaciones variacionales [LP80]

$$\frac{\delta H}{\delta \theta_i} = \hbar \frac{\partial \rho_i}{\partial t}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \rho_i} = -\hbar \frac{\partial \theta_i}{\partial t}, \quad (4.13)$$

donde las variaciones se calculan como

$$\frac{\delta H}{\delta \theta_i} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial \nabla \theta_i} \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \rho_i} = \frac{\partial H}{\partial \rho_i} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial \nabla \rho_i} \right). \quad (4.15)$$

A partir de (4.12) se obtienen las ecuaciones de continuidad

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_n = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_p = 0, \quad (4.17)$$

donde las corrientes \vec{j}_i vienen dadas por las ecuaciones (4.6) y (4.7). Las ecuaciones de continuidad corresponden a la conservación del número de partículas, suponiendo que los tiempos asociados a la dinámica son mucho más cortos que los tiempos característicos de las desintegraciones débiles ($\tau_{dyn} \ll \tau_{weak}$).

A partir de (4.13) se obtiene

$$\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + \nabla \left[\frac{\mu_n}{m} + \frac{\vec{v}_n^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m} (C_{nn} \nabla^2 \rho_n + C_{np} \nabla^2 \rho_p) - \nu \rho_p \frac{(\Delta \vec{v})^2}{2} \right] = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} + \nabla \left[\frac{\mu_p + e\Phi}{m} + \frac{\vec{v}_p^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m} (C_{pp} \nabla^2 \rho_p + C_{pn} \nabla^2 \rho_n) - \nu \rho_n \frac{(\Delta \vec{v})^2}{2} \right] = 0, \quad (4.19)$$

donde $\mu_i = \partial \mathcal{H}_{skyrme} / \partial \rho_i$ son los potenciales químicos y donde los coeficientes C_{ij} provienen de los términos en gradiente de la densidad presentes en la parte finita (\mathcal{H}_{fin}) de la fuerza de Skyrme (3.7). El valor de estos coeficientes es

$$C_{nn} = C_{pp} = \frac{3}{8\hbar^2} [t_2(1 + x_2) - t_1(1 - x_1)], \quad (4.20)$$

$$C_{np} = C_{pn} = \frac{1}{8\hbar^2} [t_2(2 + x_2) - 3t_1(2 + x_1)]. \quad (4.21)$$

Las ecuaciones (4.18) y (4.19) nos dan la conservación de la cantidad de movimiento de cada componente y son equivalentes a la segunda ley de Newton, donde el término afectado por el gradiente juega el papel de un potencial.

Es habitual introducir términos correctivos en la densidad de energía cinética (4.3) en presencia de inhomogeneidades en la densidad. Trabajos anteriores que emplean el método dinámico para estimar la densidad de transición core-crust han incorporado términos de tipo Weizsäcker (véase, por ejemplo, [Gon+19]), lo que permite reducir la densidad de transición y mejorar la concordancia con las estimaciones obtenidas desde el lado del crust. Estos términos pueden incorporarse explícitamente en las ecuaciones (4.18) y (4.19) como contribuciones adicionales a la presión, conocidas como presión cuántica en el contexto de gases fríos. Por otra parte, la inclusión del término de Weizsäcker, junto con el término finito (\mathcal{H}_{fin}) en la interacción nucleón-nucleón, permite extender la relación de dispersión más allá del límite $k = 0$, haciendo posible la aparición de excitaciones de tipo rotón [GMV21]. Estas excitaciones se suman a los modos de tipo fonón, que son los únicos accesibles si solo se consideran términos homogéneos en la densidad de energía (véase sección 4.5).

4.5. Inestabilidades hidrodinámicas en el outer core

El sistema de ecuaciones hidrodinámicas (4.16)-(4.19) admite una solución estacionaria de densidad $\{\rho_n^0, \rho_p^0\}$ y velocidad relativa $\Delta\vec{v} = \vec{v}_p^0 - \vec{v}_n^0$ constantes. Por simplicidad, pero sin perder generalidad, podemos escoger velocidades iguales en módulo y sentido opuesto para las dos componentes ($\vec{v}_n = -\vec{v}_p = \vec{V}$), siendo la velocidad relativa $\Delta\vec{v} = 2\vec{V}$. Los potenciales químicos estacionarios, obtenidos haciendo las derivadas temporales iguales a cero en (4.18) y (4.19), resultan:

$$\mu_n^0 = \mu_n(\rho_n^0, \rho_p^0) + \frac{m\vec{V}^2}{2}(1 - 4\nu\rho_p^0), \quad (4.22)$$

$$\mu_p^0 = \mu_p(\rho_n^0, \rho_p^0) + \frac{m\vec{V}^2}{2}(1 - 4\nu\rho_n^0). \quad (4.23)$$

La estabilidad dinámica del sistema puede estudiarse perturbando el estado estacionario y analizando los modos de oscilación y el espectro de excitaciones, que son la respuesta del sistema a dichas perturbaciones. Para ello se introduce una perturbación en las densidades y velocidades estacionarias $\{\rho_i^0, \vec{v}_i^0\} \rightarrow \{\rho_i^0 + \delta\rho_i, \vec{v}_i^0 + \delta\vec{v}_i\}$ y se sustituyen las cantidades perturbadas en las ecuaciones dinámicas (4.16)-(4.19). Las ecuaciones para la densidad y la velocidad de la perturbación que se obtienen son:

$$\frac{\partial\delta\rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_n}{\rho_n}\delta\rho_n + \nu\rho_n\Delta\vec{v}\delta\rho_p + \rho_{nn}\delta\vec{v}_n + \rho_{np}\delta\vec{v}_p \right) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial\delta\rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_p}{\rho_p}\delta\rho_p - \nu\rho_p\Delta\vec{v}\delta\rho_n + \rho_{pp}\delta\vec{v}_p + \rho_{np}\delta\vec{v}_n \right) = 0, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\vec{v}_n}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{m} \left(\frac{\partial\mu_n}{\partial\rho_n} - \frac{\hbar^2}{2m}C_{nn}\nabla^2 \right) \delta\rho_n + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial\mu_n}{\partial\rho_p} - \frac{\hbar^2}{2m}C_{np}\nabla^2 - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\nu}{2}\Delta\vec{v}^2 \right) \delta\rho_p + \frac{\vec{j}_n}{\rho_n} \cdot \delta\vec{v}_n - \nu\rho_p\Delta\vec{v} \cdot \delta\vec{v}_p \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\vec{v}_p}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{m} \left(\frac{\partial\mu_p}{\partial\rho_p} - \frac{\hbar^2}{2m}C_{pp}\nabla^2 + e\frac{\partial\Phi}{\partial\rho_p} \right) \delta\rho_p + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial\mu_p}{\partial\rho_n} - \frac{\hbar^2}{2m}C_{np}\nabla^2 - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\nu}{2}\Delta\vec{v}^2 \right) \delta\rho_n + \frac{\vec{j}_p}{\rho_p} \cdot \delta\vec{v}_p + \nu\rho_n\Delta\vec{v} \cdot \delta\vec{v}_n \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Las ecuaciones dinámicas obtenidas para la perturbación del estado estacionario (4.24)-(4.27) requieren una ecuación adicional que nos informe de cómo se comporta el potencial

electrostático bajo una perturbación en la densidad de protones. El tratamiento de la respuesta electrónica ante una perturbación depende de la escala de longitud de onda considerada, ya que los electrones pueden comportarse como colisionantes o no colisionantes. En particular, pueden tratarse como no colisionantes cuando la longitud de onda de la perturbación es mucho menor que su recorrido libre medio, es decir, cuando $k \gg l_e^{-1}$. Para la densidad de la materia nuclear ($\sim \rho_0$) y una temperatura típica del outer core ($\sim 10^8$ K) se estima que $l_e \sim 10^{10}$ fm = 10^{-3} cm [SY08]. En ausencia de colisiones, la respuesta de los electrones en materia densa puede describirse mediante la aproximación de fase aleatoria [Kob+17], que supone una respuesta lineal de los electrones del tipo

$$4\pi e\delta\rho_e = k^2(\epsilon_e - 1)\delta\Phi, \quad (4.28)$$

donde la constante dieléctrica es

$$\epsilon_e \approx 1 + \frac{4\pi e^2}{\hbar c k^2} \left(\frac{3\rho_e}{\pi} \right)^{2/3}. \quad (4.29)$$

Mediante esta aproximación, el término electrostático en la ecuación (4.27) puede aproximarse como $e\Phi \approx 4\pi e^2/\epsilon_e k^2$. Además de romper el equilibrio de carga, la perturbación podría romper el equilibrio beta del estado estacionario (4.22)-(4.23). Sin embargo, por simplicidad, este modelo no considera la ruptura local del equilibrio beta como fuente de perturbaciones (ver por ejemplo [VH05] sobre procesos beta fuera del equilibrio).

El sistema de ecuaciones para la perturbación (4.24)-(4.27) puede escribirse matricialmente como:




$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \delta\rho_n \\ \delta\rho_p \\ \delta\vec{v}_n \\ \delta\vec{v}_p \end{bmatrix} = -\nabla \begin{bmatrix} \frac{\vec{j}_n}{\rho_n} & \frac{\rho_{np}}{\rho_p} \Delta\vec{v} & \rho_{nn} & \rho_{np} \\ -\frac{\rho_{np}}{\rho_n} \Delta\vec{v} & \frac{\vec{j}_p}{\rho_p} & \rho_{np} & \rho_{pp} \\ \frac{g_{nn}}{m} & \frac{g_{np}}{m} - \frac{\nu}{2} \Delta\vec{v}^2 & \frac{\vec{j}_n}{\rho_n} & -\frac{\rho_{np}}{\rho_n} \Delta\vec{v} \\ \frac{g_{pn}}{m} - \frac{\nu}{2} \Delta\vec{v}^2 & \frac{g_{pp} + e\Phi'}{m} & \frac{\rho_{np}}{\rho_p} \Delta\vec{v} & \frac{\vec{j}_p}{\rho_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\rho_n \\ \delta\rho_p \\ \delta\vec{v}_n \\ \delta\vec{v}_p \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

donde $g_{ij} = \partial\mu_i/\partial\rho_j - \hbar^2 C_{ij} \nabla^2/2m$ y $\Phi' = \partial\Phi/\partial\rho_p$. La invariancia translacional del sistema (4.30) permite desarrollar la perturbación en ondas planas como

$$\delta\rho_i(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \delta\rho_{i,\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \quad (4.31)$$

$$\delta\vec{v}_i(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \delta\vec{v}_{i,\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}. \quad (4.32)$$

Introduciendo (4.31) y (4.32) en (4.30) y resolviendo el sistema 4x4 resultante, puede obtenerse la relación de dispersión $\omega(\vec{k})$ fijada una densidad ρ y una velocidad relativa entre los dos superfluidos $\Delta\vec{v}$. Suponiendo k real, para cada densidad y velocidad relativa, obtendremos cuatro frecuencias ω y cuatro velocidades de fase $v_f = \omega/k$ para las perturbaciones (modos). La obtención de frecuencias o velocidades de fase complejas, esto es $\omega = Re(\omega) + iIm(\omega)$ con $Im(\omega) \neq 0$, señala la presencia de fenómenos dinámicos en los cuales la oscilación del sistema no es estacionaria. En estos casos, la oscilación inducida por una perturbación inicial no conserva una amplitud constante, sino que experimenta un crecimiento o decrecimiento exponencial (amortiguamiento), dependiendo del signo de la parte imaginaria de la frecuencia. Si $Im(\omega) > 0$, el modo de oscilación crece con el tiempo, incrementando la amplitud de la perturbación y generando una inestabilidad dinámica en el sistema. Este crecimiento puede llevar a la ruptura del flujo laminar y, eventualmente, a la aparición de vorticidad y turbulencia en los dos superfluidos [ACP04]. Por el contrario, cuando $Im(\omega) < 0$, el modo se encuentra amortiguado por el medio, lo que hace que la amplitud de la excitación disminuya gradualmente hasta restablecer el estado estacionario inicial. A continuación, se presenta el primer artículo derivado de esta tesis, en el cual se analizan en detalle las inestabilidades dinámicas que emergen en el outer core de las estrellas de neutrones, a partir del estudio de los modos de oscilación y del espectro de excitaciones del sistema *npe*. Se investiga la aparición de inestabilidades hidrodinámicas para diferentes valores de la densidad del outer core, variando la velocidad relativa entre los dos superfluidos y el número de onda de la perturbación. El trabajo demuestra que, para cada densidad, existe una velocidad relativa crítica entre los dos superfluidos, a partir de la cual el sistema se vuelve dinámicamente inestable. A diferencia de trabajos previos que también abordan las inestabilidades dinámicas en sistemas de dos corrientes superfluidas (ver por ejemplo [ACP04]), el espectro de excitaciones lineales en el modelo propuesto revela estructuras rotónicas (por debajo del umbral de energía de ruptura de pares) que, para velocidades relativas altas, pueden dar lugar a inestabilidades dinámicas que podrían inducir la aparición de vorticidad y de modulaciones de la densidad superfluida. Es importante señalar que esta tesis se enfoca exclusivamente en la identificación de las condiciones físicas que dan origen a dichas inestabilidades, sin abordar la evolución temporal de los modos una vez excitados. El estudio del comportamiento no lineal y del destino final de estas inestabilidades queda fuera del alcance del presente trabajo.

Roton instabilities in the superfluid outer core of neutron starsJ. A. Gil Granados ¹, A. Muñoz Mateo ², and X. Viñas ^{1,3}¹*Departament de Física Quàntica i Astrofísica, Facultat de Física, Universitat de Barcelona, E-08028 Barcelona, Spain*²*Departamento de Física, Universidad de La Laguna, E-38200, La Laguna, Spain*³*Institut de Ciències del Cosmos, Universitat de Barcelona, ICCUB, 08028-Barcelona, Spain*

(Received 25 November 2020; revised 18 February 2021; accepted 24 May 2021; published 14 June 2021)

We study the superfluid dynamics of the outer core of neutron stars by means of a generalized hydrodynamic model made of a neutronic superfluid and a protonic superconductor, coupled by both the dynamic entrainment and the Skyrme SLy4 nucleon-nucleon interactions. The resulting nonlinear equations of motion are probed in the search for dynamical instabilities triggered by the relative motion of the superfluids that could be of potential relevance to observational features of neutron stars. Through linear analysis, the origin and expected growth of the instabilities is explored for varying nuclear-matter density. Differently from previous findings, the dispersion of linear excitations in our model shows rotonic structures below the pair-breaking energy threshold, which lies at the origin of the dynamical instabilities and could eventually lead to emergent vorticity along with modulations of the superfluid density.

DOI: [10.1103/PhysRevC.103.065803](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.103.065803)**I. INTRODUCTION**

The study of neutron stars is becoming an interdisciplinary subject due to more available data obtained from precise astronomical observations as well as from more realistic computational simulations. The neutron-star interior is theoretically described as a layered structure determined by increasing density and temperature with depth. Its matter constituents, a mixture of neutron, proton, leptons, and eventually other exotic particles, arrange in different manners in concentric shells that are electrically neutral and in β equilibrium. Inside the outermost region, called outer crust, matter is organized as a solid lattice of atomic nuclei embedded in a free-electron gas. This region spans densities from $\rho \approx 10^4$ g/cm³, where the atomic nuclei are fully ionized, up to $\rho \approx 4 \times 10^{11}$ g/cm³, where nuclei, which are more and more neutron rich, cannot retain the neutrons anymore. At this point, the neutrons start to drip out of the nuclei. In this latter region, called the inner crust, matter is still arranged as a Coulomb lattice of nuclear clusters but is now permeated by free-neutron and free-electron gases. In the bottom layers of the inner crust the nuclear clusters may change their shape to minimize the Coulomb repulsion from spheres to cylinders, slabs, tubes and spherical or cylindrical bubbles. These exotic geometries at the crust-core transition are known as “nuclear pasta.” When the density reaches $\rho \approx 1.4 \times 10^{14}$ g/cm³, about half the nuclear matter density, the solid lattice becomes energetically unfavorable and disappears; as a consequence, at the core, matter transforms into a liquid phase of neutron, protons, and leptons. Deeper in the core, hence at higher densities, strange baryons and even deconfined quarks may appear.

At different layers of the neutron-star interior, the quantum degeneracy of nuclear matter supports the Bose condensation

of fermion pairs, which leads to the emergence of superfluidity. In this way, neutron pairs are assumed to condense at the inner crust, whereas both neutron and proton pairs can form condensates at the outer core. However, the precise equations of state relating the pressure and density of nuclear matter under such extreme conditions, including pairing correlations, are not completely well determined, and different proposals compete to provide a plausible picture compatible with the observational constraints.

The observed dynamics of a neutron star is consistent with the assumed superfluid interior. The superfluid dynamics can account for the observed low moment of inertia [1–5] or the cooling down of the neutron star [6,7]. It can also play a role in star oscillations and collective modes of nuclear matter [8–10]. Additionally, it allows us to understand the extraordinarily regular rotation of pulsars, based on the existence of a superfluid reservoir. The sudden speed-ups (or glitches) in this rotation, first detected in the Vela and Crab pulsars in 1969 (see Refs. [11,12] and references therein), are one of the most solid arguments in favor of the superfluid interior. The theory by Anderson and Itoh [13] explains the glitches as the result of unpinning quantized vortices in the crust. The neutron-superfluid vortices, pinned to the underlying lattice of nuclei within the inner crust, can “creep” out of the superfluid, transferring angular momentum to the nonsuperfluid part of the star [14]. In spite of a general good agreement of this theory with observed glitches of different magnitudes, there still exist open questions about how different superfluid layers are involved in this phenomenon [4,5]. Recent observations (see, e.g., Refs. [12,15]) seem to favor that the neutron superfluid in the inner crust is not enough to provide the observed increase in the angular momentum and suggest that the core superfluids have also to be considered. Since many-body analysis of these macroscopic, large-scale properties are unreachable,

most of the studies try to model the coupling between different layers of the star interior from a hydrodynamical perspective [16–19]. This approach provides the scope for advancing in the understanding of the basic mechanisms responsible for dynamical instabilities of the superfluid interior. In turn, such instabilities may shed light on the thermal evolution of neutron stars [20] or the rotation anomalies of pulsars detected in astronomical observations [21–24].

In this context, the present work considers two superfluids coupled by nucleon-nucleon interactions that model the structure of the outer core. With typical densities around the symmetric nuclear matter saturation density $\rho \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ ($2.8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$), and temperatures of the order of 10^8 K , below plausible estimates for the superfluid transition [25], we assume that the outer core temperature is effectively zero, and therefore that the superfluid density matches the total density of the outer core (see, e.g., Ref. [26] for the relation between superfluid density and total fermionic density in a Fermi gas). This assumption implies that all the nucleons belong to the condensates and therefore are collisionless. In such a regime, the mean-field interaction between particles is the origin of the collective excitations, and damping effects are absent. Additionally, the effects of charge perturbations derived from the underlying electron gas are equally treated in a collisionless regime relevant on subcentimeter length scales [20].

We have chosen an equation of state (EOS) provided by Douchin and Haensel [27] and which is based on the Skyrme SLy4 interaction [28]. This EOS is particularly well adapted to the neutron-star scenario and is compatible with a maximum neutron-star mass of about $2M_\odot$, in agreement with well-established observational data [29,30]. The Galilean invariance of the whole system imposes an additional dynamical coupling between the two overlapped condensates of fermionic pairs due to the entrainment of neutrons and protons, whose characteristic quantities are calculated following Ref. [31] (see also Ref. [32]). The resulting model aims at the generalization of previous studies on hydrodynamical instabilities in the coupled superfluids with relative motion [18,33]. To this end, the nonlinear Hamilton's equations of the system are linearized, and the dispersion relations and the spectrum of excitation modes are analytically derived as a function of the nuclear matter density. Differently from previous works that have focused on the longest wavelength excitations, essentially phonons, we show the plausible relevance of rotonic modes developed at shorter wavelengths in the dispersion relations. They emerge by virtue of the relative superfluid motion and are associated with instabilities that can give rise to the decay of the dynamical equilibrium. Such decay involves density modulations and could eventually lead to emergent quantized vortices.

To neatly show the origin of these unstable excitations, we are considering neither the mutual friction between superfluids, due to the superfluid vorticity inherent in the rotating neutron stars [14,34], nor the presence of viscosity caused by the underlying normal fluid [35], nor the star magnetic field, which could have a significant effect on the damping and suppression of linear instabilities [23]. Our study applies at mesoscopic scales, dominated by a collisionless particle dynamics, and hence it is not directly comparable to collisional,

classical hydrodynamics (see, for instance, Ref. [36] for discussions on the differences between collision and collisionless dynamics).

II. MODEL OF THE SUPERFLUID OUTER CORE

Neutron (denoted hereafter by the subindex n) and proton (denoted by the subindex p) superfluids will be described by two real fields, the superfluid densities ρ_j and phases θ_j , with $j = n, p$, where the latter fields provide the irrotational superfluid velocities through the relationship $\mathbf{v}_j = \hbar \nabla \theta_j / m$, with m being the nucleon mass. Both fields could also be thought of as real components of effective, bosonic complex order parameters $\Psi_j = \sqrt{\rho_j/2} \exp(i2\theta_j)$. As commonly done in the literature [20,34], we have assumed a zero-temperature model where the total density is superfluid, so that ρ_j and μ_j will stand for the fermionic densities and chemical potentials of neutrons ($j = n$) and protons ($j = p$), respectively.

The energy density $\mathcal{H}(\rho_n, \rho_p, \nabla \rho_n, \nabla \rho_p, \nabla \theta_n, \nabla \theta_p)$, which includes nuclear and Coulomb interactions along with characteristic terms of the superfluid motion, can be recast as

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\rho(\rho_n, \rho_p) + \mathcal{H}^{\rho'}(\nabla \rho_n, \nabla \rho_p) + \mathcal{H}^{\theta'}(\nabla \theta_n, \nabla \theta_p) + \mathcal{H}^e. \quad (1)$$

Here, \mathcal{H}^ρ is a homogeneous-density energy term (depending only on the densities) provided by the underlying effective nuclear interaction. The macroscopic energy density $\mathcal{H}^{\rho'}$ is a dynamical, Galilean-invariant term that depends on the phase gradients and densities. The term $\mathcal{H}^{\theta'}$ accounts for density inhomogeneities and is a functional of both densities and density gradients. It contains, on the one hand, the contributions due to the inhomogeneities of the effective order parameter, and, on the other hand, the contributions of the gradient terms in the nuclear energy-density functional that simulates the finite-range of the nucleon-nucleon interaction. Finally, the term $\mathcal{H}^e = e\rho_p\Phi/2$ accounts for the local charge imbalance through the Coulomb potential Φ , which follows the Poisson equation $\nabla^2\Phi = 4\pi e(\rho_e - \rho_p)$. The electron density ρ_e is assumed to adjust instantaneously into a local density, homogeneous configuration of the ultrarelativistic Fermi gas as $\rho_e = (\mu_e/\hbar c)^3/3\pi^2$. Additionally, local β equilibrium is assumed, so that the chemical potentials fulfill the condition $\mu_n = \mu_p + \mu_e$. Since at the high nuclear density of the outer core the typical Fermi levels are at least one order of magnitude greater than the expected superfluid gaps (of the order of one MeV, see below), the pairing contribution to the total energy of the system will be neglected.

The particular functional forms of \mathcal{H}^ρ , $\mathcal{H}^{\rho'}$, and $\mathcal{H}^{\theta'}$ are based on the choice of the phenomenological model for the internucleon interactions (see details below). In a generic form, $\mathcal{H}^{\rho'}$ and $\mathcal{H}^{\theta'}$ are given by

$$\mathcal{H}^{\theta'} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{ij} \varrho_{ij} \nabla \theta_i \nabla \theta_j, \quad (2)$$

$$\mathcal{H}^{\rho'} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{ij} \vartheta_{ij} \nabla \rho_i \nabla \rho_j. \quad (3)$$

In Eq. (2), which corresponds to the dynamical energy density, the response functions Q_{ij} fulfill $Q_{nn} + Q_{np} = \rho_n$, and $Q_{pp} + Q_{pn} = \rho_p$, as independent functions of the velocities, so that the entrainment parameter Q_{np} is constrained by the relation $Q_{np}^2 < Q_{nn}Q_{pp}$ [31,37].

The inclusion of density gradients, Eq. (3), in the energy density deserves further attention, since it is not the case in collisional hydrodynamic models that rely on a strictly density-dependent equation of state (see, e.g., Ref. [33]). Our generalized hydrodynamical model studies the collisionless regime of the two-coupled condensates in the presence of an underlying, equally collisionless, electron gas. The particular choice of Skyrme force provides inherent density gradient terms [see Eqs. (2.1) and (2.2) in Ref. [28]] that simulate the short-range of the nuclear forces. Of course, these terms do not have any effect on the homogeneous stationary states that we later consider, but they do on the dynamics of linear excitations on the top of such states. Additionally, our energy density (3) also includes a so-called von Weizsäcker term [38]. It is a corrective term to the kinetic-energy density in Fermi gases, proceeding directly from the curvature of the fermion wave functions. It translates into the so-called quantum pressure term that appears in a generalized superfluid hydrodynamic approach [see e.g., Eq. (52) in Ref. [26]]. Again, the influence of this term cannot be seen in the homogeneous stationary states, but it plays a role in the linear perturbation analysis.

The nonhomogeneous contributions to the energy density, namely, the density gradients of the nuclear forces and the Weizsäcker terms, are gathered in Eq. (3), where $\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}^0 + \delta_{ij}/18\rho_j$, and the constant terms ϑ_{ij}^0 (reported below) are the coefficients of the gradients in the Skyrme force [28]. Notice that these density gradients and the Weizsäcker terms have been previously included in the energy density to estimate the core-crust transition density in neutron stars with the so-called dynamical method (see, e.g., Ref. [39], and references therein). If only the homogeneous terms are considered (thermodynamical method), the transition density is found at higher density. Therefore, the nonhomogeneous terms are crucial to shift the transition density to smaller values, which are in better agreement with the estimates made from the crust side.

A. Equations of motion

In the absence of a normal fluid (hence without dissipation), the hydrodynamic equations of motion can be written following a Hamiltonian approach, based on the energy density (1), with canonically conjugate variables $\{\rho_j, \theta_j\}$. The variation of the Hamiltonian $H = \int d\mathbf{r} \mathcal{H}$ with respect to the densities gives

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_n = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = 0, \quad (4b)$$

which corresponds to the conservation of particles in each superfluid component. Following the seminal paper by Andreev

and Bashkin [37], the current densities are approximated as linear functions of the two superfluid velocities \mathbf{v}_n and \mathbf{v}_p as

$$\mathbf{j}_n = Q_{nn}\mathbf{v}_n + Q_{np}\mathbf{v}_p, \quad (5a)$$

$$\mathbf{j}_p = Q_{pp}\mathbf{v}_p + Q_{np}\mathbf{v}_n. \quad (5b)$$

It is worth noticing that $\mathbf{j}_i/\rho_i = \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)Q_{np}/\rho_i$ only matches the corresponding velocity \mathbf{v}_i if there is no relative motion between the two superfluids.

Additional equations for the potential flow of each superfluid follow from the variation of the energy density \mathcal{H} with respect to the superfluid phases (see, for instance, Refs. [34,40] for the general procedure of obtaining the equations of motion):

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mu_n}{m} + Q_n + \frac{|\mathbf{v}_n|^2}{2} - \frac{\partial Q_{np}}{\partial \rho_n} \frac{|\mathbf{v}_{pn}|^2}{2} \right) = \mathbf{0}, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mu_p}{m} + \frac{e}{m}\Phi + Q_p + \frac{|\mathbf{v}_p|^2}{2} - \frac{\partial Q_{np}}{\partial \rho_p} \frac{|\mathbf{v}_{pn}|^2}{2} \right) = \mathbf{0}, \quad (6b)$$

where Q_n is given by

$$Q_n = \frac{-\hbar^2}{m^2} \left[\frac{\nabla^2 \sqrt{\rho_n}}{9\sqrt{\rho_n}} + \vartheta_{nn}^0 \nabla^2 \rho_n + \vartheta_{np}^0 \nabla^2 \rho_p \right],$$

and equivalently Q_p by exchanging the subindexes n and p , which originate from the specific variation of Eq. (3). The Coulomb term $e\Phi/m$ in the proton Eq. (6) will allow us to account for electric charge perturbations at a mesoscopic scale, while ignoring the equation of motion for the electrons. To this end, as we specify later, we will make use of the linear response of the underlying electron plasma in the absence of collisions, which is accurately provided by the random-phase approximation for ultrarelativistic electrons [41].

The bulk chemical potentials μ_i are defined as usual from

$$\mu_n(\rho_n, \rho_p) = \frac{\partial \mathcal{H}^\rho}{\partial \rho_n}, \quad \mu_p(\rho_n, \rho_p) = \frac{\partial \mathcal{H}^\rho}{\partial \rho_p}. \quad (7)$$

Equations (4) and (6) are the coupled equations of motion for the superfluid velocities $\{\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_p\}$ and densities $\{\rho_n, \rho_p\}$. It is worth pointing out that superfluid momenta, instead of velocities, can be chosen alternatively as the dynamical variables of the two fluids [42]. The system of equations is determined once the nuclear interaction energy density is known.

B. Skyrme interaction

In this work we have chosen the phenomenological Skyrme interaction as the underlying nuclear interaction that describes the nonsuperfluid EOS [43,44]. For this type of effective forces the energy density reads

$$\mathcal{H}^{\text{Skyrme}} = \mathcal{H}^\rho + \mathcal{H}^\nabla, \quad (8)$$

$$\mathcal{H}^\rho = \mathcal{T} + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_{\text{eff}}, \quad (9)$$

where \mathcal{T} gathers the kinetic-energy densities $\tau_i = 3(3\pi^2)^{2/3}\rho_i^{5/3}/5$ of both nucleonic Fermi gases, \mathcal{H}_0 is a zero-range two-body term, \mathcal{H}_3 is a three-body term, which

is recast as a density-dependent, zero-range two-body contribution, and \mathcal{H}_{eff} is an effective-mass term. As a whole, Eq. (9) defines the bulk energy density $\mathcal{H}^\rho(\rho_n, \rho_p)$ of Eq. (1). Additionally, the term \mathcal{H}^∇ , which depends on the gradients of the neutron and proton densities, simulates finite-range effects of the interaction, and vanishes for uniform density distributions. Apart from the factor $2m/\hbar^2$, it provides the constant ϑ_{ij}^0 coefficients that enter the non-homogeneous energy density $\mathcal{H}^{\rho'}$ ($\nabla\rho_n, \nabla\rho_p$) in Eq. (1).

The interaction terms are explicitly given by

$$\mathcal{T} = \frac{\hbar^2}{2m}(\tau_n + \tau_p), \quad (10)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{t_0}{4}[(2+x_0)\rho^2 - (2x_0+1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)], \quad (11)$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{t_3\rho^{1/6}}{24}[(2+x_3)\rho^2 - (2x_3+1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)], \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = [t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)]\frac{\rho(\tau_n + \tau_p)}{8} + [t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)]\frac{\tau_p\rho_p + \tau_n\rho_n}{8}, \quad (13)$$

$$\mathcal{H}^\nabla = \frac{3}{32}[t_1(1-x_1) - t_2(1+x_2)][(\nabla\rho_n)^2 + (\nabla\rho_p)^2] + \frac{1}{16}[3t_1(2+x_1) - t_2(2+x_2)]\nabla\rho_n \cdot \nabla\rho_p, \quad (14)$$

with parameters [27,28] $t_0 = -2488.91 \text{ MeV fm}^3$, $t_1 = 486.82 \text{ MeV fm}^5$, $t_2 = -546.39 \text{ MeV fm}^5$, $t_3 = 13777.0 \text{ MeV fm}^4$, $x_0 = 0.834$, $x_1 = -0.344$, $x_2 = -1.0$, and $x_3 = 1.354$.

By means of Eq. (8), the β equilibrium in the bulk can be locally determined in terms of the asymmetric density $\delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ by the condition $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ as

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{C_1}{8}\rho\right)\left(3\pi^2\frac{\rho}{2}\right)^{2/3}[(1+\delta)^{2/3} - (1-\delta)^{2/3}] - \frac{t_0}{2}\rho\delta(1+2x_0) - \frac{t_3}{12}(2x_3+1)\delta\rho^{7/6} + \frac{3\pi^2}{5}C_2\left(\frac{\rho}{2}\right)^{5/3}[(1+\delta)^{5/3} - (1-\delta)^{5/3}] - \hbar c(3\pi^2\rho_e)^{1/3} = 0, \quad (15)$$

where the coefficients $C_1 = t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)$ and $C_2 = t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)$, which enter the Skyrme energy density through \mathcal{H}_{eff} , are related to the neutron and proton effective masses by

$$\left(\frac{m}{m^*}\right)_n = 1 + \frac{2m}{\hbar^2}[C_1\rho + C_2\rho_n], \quad (16)$$

$$\left(\frac{m}{m^*}\right)_p = 1 + \frac{2m}{\hbar^2}[C_1\rho + C_2\rho_p].$$

The numerical solution to Eq. (15) is represented in the top panel of Fig. 1 for static conditions and assuming local electric charge balance $\rho_e = \rho_p$. As can be seen, in the case of the SLy4 interaction the asymmetry decreases for increasing nuclear density. The corresponding chemical potentials are

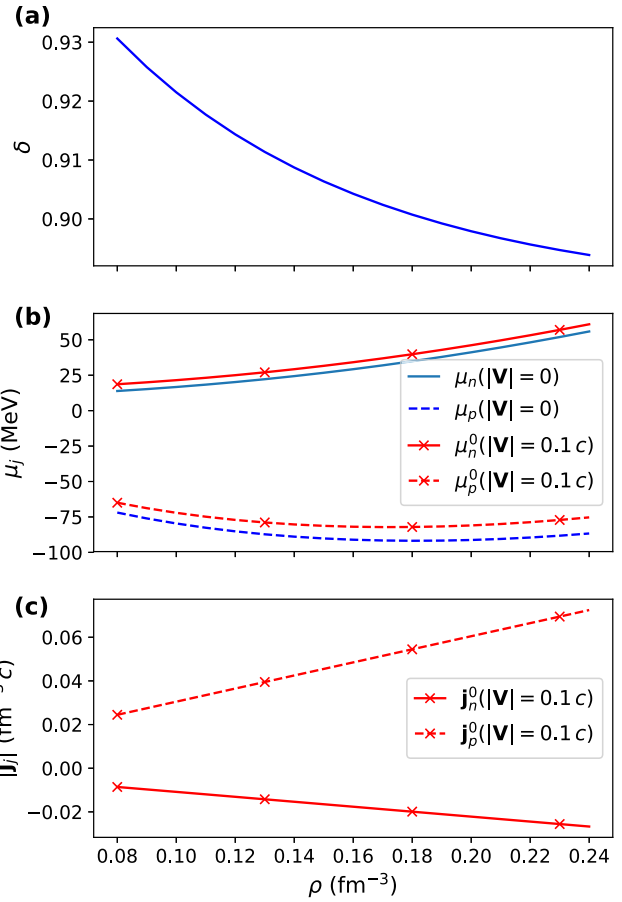


FIG. 1. (a) Asymmetric density, (b) bulk chemical potential, and (c) particle current density as a function of the total density of nuclear matter in β and electric-charge equilibrium, as given by the effective nuclear interaction SLy4. The chemical potentials are represented for static and dynamical equilibrium with relative velocity $2|\mathbf{V}| = 0.2c$ between proton and neutron superfluids.

depicted in the middle panel of Fig. 1. For large asymmetries, well above its neutron drip value, the neutron chemical potential is positive, owing to the repulsive character of the neutron-neutron interactions, whereas the proton chemical potential is strongly negative due to the attractive neutron-proton interaction (see Ref. [45] for more details).

The response function Q_{np} , which determines the entrainment, is also obtained consistently with the help of the same SLy4 effective force used to describe the nucleon-nucleon interaction. Following Ref. [31] one gets

$$Q_{np} = \alpha\rho_n\rho_p, \quad (17)$$

where the constant α depends on the parameters of the Skyrme force as

$$\alpha = -\frac{m}{2}\left[t_1\left(1 + \frac{x_1}{2}\right) + t_2\left(1 + \frac{x_2}{2}\right)\right], \quad (18)$$

which in the case of the SLy4 interaction takes the value $\alpha \approx -1.566 \text{ fm}^3$.

III. STATIONARY STATES

The superfluid equations (4) and (6) admit constant density $\{\rho_n^0, \rho_p^0\}$ stationary solutions with constant relative velocity $\mathbf{v}_{pn}^0 = \mathbf{v}_p^0 - \mathbf{v}_n^0$. For the sake of simplification, we choose superfluid velocities with equal modulus and opposite direction $\mathbf{v}_p^0 = -\mathbf{v}_n^0 = |\mathbf{V}|$, which implies $\mathbf{v}_{pn}^0 = 2|\mathbf{V}|$. For these states, the total chemical potentials at equilibrium $\{\mu_n^0, \mu_p^0\}$ are

$$\begin{aligned}\mu_n^0 &= \mu_n(\rho_n^0, \rho_p^0) + \frac{m|\mathbf{V}|^2}{2}(1 - 4\alpha\rho_p^0), \\ \mu_p^0 &= \mu_p(\rho_n^0, \rho_p^0) + \frac{m|\mathbf{V}|^2}{2}(1 - 4\alpha\rho_n^0),\end{aligned}\quad (19)$$

and the corresponding particle current densities

$$\mathbf{j}_n^0 = -(\rho_n^0 - 2\alpha\rho_p^0)|\mathbf{V}|, \quad \mathbf{j}_p^0 = (\rho_p^0 - 2\alpha\rho_n^0)|\mathbf{V}|, \quad (20)$$

so that the total current density is $\mathbf{j}^0 = -(1 + 2\alpha)\delta^0\rho^0|\mathbf{V}|$. To give a more concrete idea of the influence of the relative superfluid velocity, we have represented the equilibrium quantities for $|\mathbf{V}| = 0.1c$ (where c is the speed of light) in the middle and lower panels of Fig. 1. The increase in the chemical potential with respect to the static case ($|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$) is around 10% for protons and 17% for neutrons at saturation density. The chemical potential of electrons follows from the local charge and β equilibrium.

A comment about the relative velocity $|\mathbf{V}| = 0.1c$ and its potential relevance with respect to observational phenomena is in order. Such a value, typical of the stationary states considered, is of the order of the speed-of-sound modes in the condensates (see below), and therefore it is relevant at the mesoscopic level of our model, and then potentially relevant for the thermal evolution of the neutron stars [20]. However, it is considerably higher than the estimates for the relative superfluid velocity derived from plausible rotational lags associated with glitches [46], so a direct causal connection between the generation of glitches and the sustainability of such superfluid flows cannot be established. In this respect, the scalability of our results up to the macroscopic length scales of the neutron star is an open question that will be addressed elsewhere.

A. Linear excitations

The dynamical stability of the stationary states can be studied by analyzing the spectrum of linear excitations. To do so, we introduce a generic perturbation on the equilibrium state, as $\{\rho_j, \mathbf{v}_j\} \rightarrow \{\rho_j^0 + \delta\rho_j, \mathbf{v}_j^0 + \delta\mathbf{v}_j\}$, substitute the perturbed quantities into the equations of motion (4) and (6), and keep terms up to linear order in the perturbations. In matrix form, the resulting linearized equations read

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla(\mathcal{B}U) \quad (21)$$

where U is the vector of perturbations $[\delta\rho_n, \delta\rho_p, \delta\mathbf{v}_n, \delta\mathbf{v}_p]^T$, and the linear operator \mathcal{B} is given in terms of the equilibrium

quantities by

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{j}_n}{\rho_n} & \frac{Q_{np}}{\rho_p}\mathbf{v}_{pn} & Q_{nm} & Q_{np} \\ -\frac{Q_{np}}{\rho_n}\mathbf{v}_{pn} & \frac{\mathbf{j}_p}{\rho_p} & Q_{np} & Q_{pp} \\ \frac{g_{nn}}{m} & \frac{g_{np}}{m} - \frac{\alpha}{2}\mathbf{v}_{pn}^2 & \frac{\mathbf{j}_n}{\rho_n} & -\frac{Q_{np}}{\rho_n}\mathbf{v}_{pn} \\ \frac{g_{pn}}{m} - \frac{\alpha}{2}\mathbf{v}_{pn}^2 & \frac{g_{pp} + e\Phi}{m} & \frac{Q_{np}}{\rho_p}\mathbf{v}_{pn} & \frac{\mathbf{j}_p}{\rho_p} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

where the stationary (0) superscripts have been omitted in the matrix elements for the sake of uncluttered expressions. We have introduced the operators

$$g_{ij} = \frac{\partial\mu_i}{\partial\rho_j} - \frac{\hbar^2}{2m}\vartheta_{ij}\nabla^2, \quad (23)$$

which gather interaction and dispersion contributions. The former contribution plays the role of an interaction strength, either intracomponent g_{nn} and g_{pp} , or intercomponent $g_{np} = g_{pn}$, reflecting the density coupling between neutrons and protons.

Although the stationary state (19) presents both β equilibrium and electric charge equilibrium, one can consider linear perturbations in Eq. (21) that break locally these equilibria. However, for the sake of simplicity, our approach does not consider the breaking of the β equilibrium as a source of perturbations (see, for instance, Ref. [47] on the nonequilibrium β processes).

To account for electric charge perturbations, we make use of the linear response of collisionless electrons to estimate the corresponding perturbed electric potential. This response is accurately provided by the random-phase approximation for ultrarelativistic electrons as $4\pi e\delta\rho_e = k^2(\epsilon_e - 1)\delta\Phi$, with dielectric constant $\epsilon_e(k) \sim 1 + 4\pi e^2(3\rho_e/\pi)^{2/3}/(\hbar ck^2)$ at zero frequency [20,41]. This estimate applies for small wave numbers and energies against the corresponding electronic Fermi values; for instance, at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and a proton fraction of $\rho_p/\rho = 0.05$, this means $k < 0.61 \text{ fm}^{-1}$ and $\hbar\omega < 120 \text{ MeV}$. The zero-frequency assumption is justified whenever $\omega \ll kc$, which lies within the error margins of the present model for the typical modes that we find in our calculations (up to $\omega \sim 0.3kc$). According to this prescription, in Eq. (22) we have made the approximation $e\Phi \approx 4\pi e^2/(\epsilon_e k^2)$. For later use in the long-wavelength limit $k \rightarrow 0$, we also define the quantity $g_{ee} = \partial\mu_e/\partial\rho_e = (3\rho_e/\pi)^{2/3}/(\hbar c)$, which is related to the compressibility κ of the ultrarelativistic Fermi gas by the relation $\kappa^{-1} = g_{ee}\rho_e$. Overall, we neglect the electronic damping associated with the imaginary part of the dielectric constant ($\text{Im}[\epsilon_e] \propto \omega k^{-3}$) [41] since it is expected to have significant effects at much smaller wave numbers (e.g., $k < 0.1 \text{ fm}^{-1}$ at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$) than the relevant wave numbers for instabilities considered here.

The translational invariance of the matrix (22) allows for the expansion of the perturbation in plane waves $U(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, and so the dispersion relations $\omega(\mathbf{k})$ can be readily obtained as the algebraic solution of the linear system (21). Notice that this system consists of two scalar equations for the density perturbations and two vector equations for the velocity perturbations; therefore, for general vector perturbations, the excitation frequencies ω are

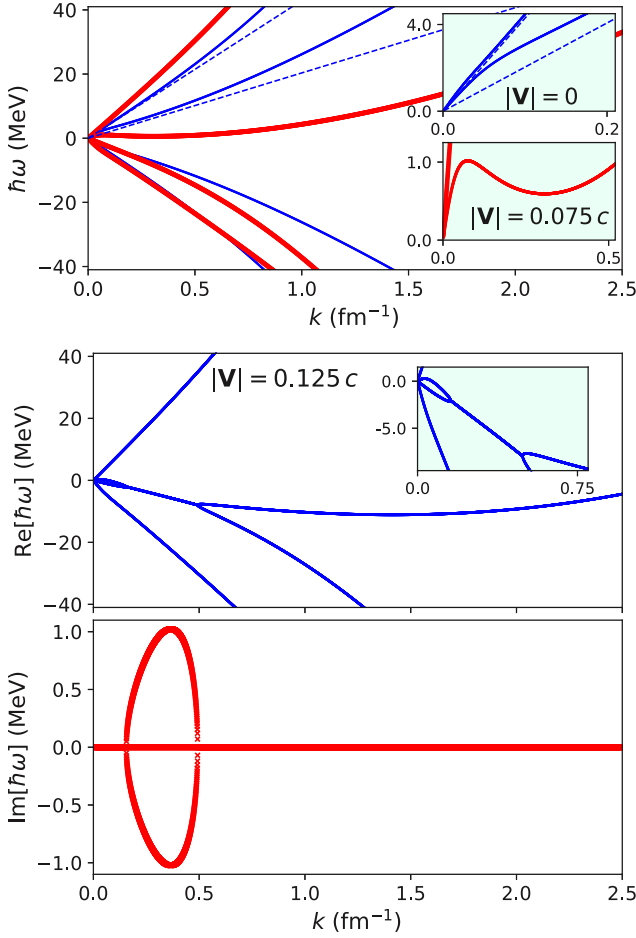


FIG. 2. Linear excitation energies in a uniform state with total density $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and several relative superfluid velocities $\mathbf{v}_{pn} = 2|\mathbf{V}|$. The dispersion contains only stable, real frequencies for $|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$ and $0.075c$ (top panel), whereas it includes complex frequencies (unstable excitations) for $|\mathbf{V}| = 0.125c$ (middle and bottom panels). The dashed lines in the top panel trace the speed of sound of superfluid neutrons (higher slope) and superfluid protons (lower slope) when considered alone (see text). The insets show enlargements of the rotonic regions, below (top-panel inset) and beyond (middle-panel inset) the relative velocity threshold for the onset of instabilities.

the solutions of an eigenvalue problem with a characteristic eighth-order polynomial. Since we are interested in the dynamical effects of the relative velocity, from now on we focus on density and velocity perturbations along the direction of the relative velocity; that is, with wave number $k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$, and neglect the perturbations in the perpendicular direction. In this case, the dispersion relations derived from Eq. (21) are obtained as the roots of a fourth-order characteristic polynomial in the variable ω/k (see the Appendix for details). The dispersion shows two qualitatively different regions, a phonon part at low k where $\omega \propto k$, and a particle part at high k where $\omega \propto k^2$ (see top panel of Fig. 2).

Although these features are typical of the spectrum of linear excitations in a gas of condensed bosons [36], the

underlying Fermi gases pose additional constraints on the excitation of collective modes. It is well known that, in the presence of fermionic pairing, there exist bosonic excitations at low wave number (phonons), the so-called Bogoliubov-Anderson modes [48], which lay (in a system of electrically neutral particles) within the superfluid gap. But the Fermi gases also present fermionic (quasiparticle) excitations that lead to fermion-pair breaking, found typically at twice the gap energy. Therefore, the pair-breaking excitations represent an energy threshold beyond which the collective modes are damped [49] (see also Ref. [50] for a discussion in ultracold gases). It is then crucial to account for the typical values of the superfluid energy gaps in order to determine the undamped collective modes below the mentioned threshold.

We estimate the available energy range for collective excitations from the calculated nucleonic 1S_0 and 3P_F_2 pairing gaps of Ref. [51], for protons and neutrons, respectively, which are calculated at the BCS level with single-particle energies obtained with the Brückner-Hartree-Fock approach including two-body (Argonne v_{18}) and three-body (Urbana UIX) forces. In the range of nuclear densities of the outer core, the neutron 3P_F_2 pairing increases approximately with a linear slope 0.23 MeV fm^3 up to $\approx 0.8 \text{ MeV}$ at $\rho = 0.24 \text{ fm}^{-3}$. The proton 1S_0 pairing shows a nonmonotonic behavior (approximately as an inverted parabola) that reaches a maximum of $\approx 0.8 \text{ MeV}$ close to nuclear saturation density (see also Refs. [52,53]). According to these values, the relevant collective modes of Fig. 2, for $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and neutron energy gap $\approx 0.4 \text{ MeV}$ [see Fig. 2(c) in Ref. [51]], are those below the pair-breaking energy limit $|\hbar\omega| \lesssim 0.8 \text{ MeV}$. Notice that these thresholds apply to static systems ($|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$), whereas in moving systems they have to be measured [as the chemical potentials in Eq. (19)] with respect to the kinetic-energy-shifted Fermi levels; for instance, for $|\mathbf{V}| = 0.125c$, the kinetic-energy shift amounts to 4.9 MeV in neutrons and 9.2 MeV in protons. Although the particle-like region of the spectrum of collective excitations is effectively suppressed above this threshold by the pair-breaking excitations, the lowest energy modes remain undamped. Within this energy window, along with phonons, as we show below, rotonlike modes can be found at intermediate wavelengths.

1. Simplified linear models

Before discussing the general dispersion, it is instructive to look first at simple cases of phonon modes. For the static equilibrium ($\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$) in the absence of entrainment ($Q_{np} = 0$), the continuity equations (4) are decoupled, whereas the momentum equations (6) are coupled by density terms [$g_{np}(k = 0) < 0$ for $\rho < 0.21 \text{ fm}^{-3}$]; then, within the long-wavelength limit $k \rightarrow 0$, the dispersion can be approximated by

$$\omega_{(Q_{np}=0)} = \pm k \left[\frac{c_n^2 + c_p^{*2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_n^2 - c_p^{*2}}{2} \right)^2 + c_{np}^4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

where $c_n = \sqrt{g_{nn}\rho_n/m}$ and $c_p = \sqrt{g_{pp}\rho_p/m}$ are, respectively, the speed of sound in the neutron and proton superfluids (when considered alone), and $c_{np} = \sqrt{|g_{np}|\sqrt{\rho_n\rho_p}/m}$ is an analogous speed term associated with

the density coupling. The effective speed of sound for protons $c_p^* = (c_p^2 + g_{ee}\rho_p/m)^{1/2}$, assuming charge equilibrium, includes an electronic contribution accounted for by means of g_{ee} . For example, at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, one gets $c_n = 0.22c$, $c_p = 0.1c$, and $c_p^* = 0.23c$; the resulting speed of sound of the excitations is $c_{(Q_{np}=0)} = \omega_{(Q_{np}=0)}/k = \pm 0.24c$ for the top and bottom branches of the dispersion, and $\pm 0.21c$ for the intermediate branches. These values reflect a high influence of the electron gas at very low wave number, typically at $k < 0.1 \text{ fm}^{-1}$; beyond this region, the dispersion branches show a tendency that is better captured by slopes given by c_n , and c_p (represented by dashed lines in the top panel of Fig. 2).

In the excitation spectrum associated with the asymptotic dispersion (24), the velocity components follow the density component of the modes as $\delta\mathbf{v}_p/\delta\mathbf{v}_n = (\rho_n/\rho_p)\delta\rho_p/\delta\rho_n$, which can show a (proton to neutron) in-phase character $\delta\rho_p/\delta\rho_n > 0$, corresponding to the lower (in absolute value) energy branches, or an out-of-phase character $\delta\rho_p/\delta\rho_n < 0$, corresponding to the higher-energy branches in the top panel of Fig. 2. Notice that all the stable modes (having pure real frequencies in the dispersion) can be chosen to have only real components, so $U_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$ (see Fig. 4 for the complete spectrum without approximation and varying wave number). Conversely, the unstable modes can be complex $U_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, although the real constraint on the perturbed quantities implies $U_{\mathbf{k}} = \pm U_{-\mathbf{k}}^*$.

On the other hand, when the density coupling in the energy-density functional is neglected ($g_{np} = 0$), so that the momentum equations (6) become decoupled whereas the entrainment keeps the continuity equations (4) coupled, the static equilibrium leads to the following dispersion of linear excitations in the phononic limit $k \rightarrow 0$:

$$\omega_{(g_{np}=0)} = \pm k \left[\frac{c_{nn}^2 + c_{pp}^{*2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{nn}^2 - c_{pp}^{*2}}{2}\right)^2 + c_\alpha^4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

where now $c_{nn} = \sqrt{g_{nn}Q_{nn}/m}$, and $c_{pp}^* = \sqrt{c_{pp}^2 + g_{ee}Q_{pp}/m}$, with $c_{pp} = \sqrt{g_{pp}Q_{pp}/m}$, are the speeds of sound modified by the entrainment, and

$$c_\alpha = \sqrt{\sqrt{g_{nn}(g_{pp} + g_{ee})Q_{np}/m}}$$

is a specific speed term associated with the entrainment coupling. From examination of Eqs. (24) and (25), one can see that both types of coupling, either density or entrainment coupling, produce a qualitatively similar type of phonon excitations. Again, the velocity components follow the density components of the modes as per $\delta\mathbf{v}_p/\delta\mathbf{v}_n = (c_{pp}/c_{nn})^2(\rho_n/\rho_p)\delta\rho_p/\delta\rho_n$, with the in-phase (out-of-phase) modes corresponding to the lower (higher) energy branches. For concreteness, at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, the speeds of sound are $c_{(g_{np}=0)} = \omega_{(g_{np}=0)}/k = \pm 0.26c$ and $\pm 0.22c$ for the four branches. At low wave number $k < 1$, but beyond the zone of influence of the electron gas, the dispersion in the absence of density coupling is well approximated by linear branches

of slope $c_{nn} = 0.22c$ and $c_{pp} = 0.11c$. Note that the presence of entrainment changes neither quantitatively the phonon velocities, since $c_{nn} \approx c_n$ and $c_{pp} \approx c_p$, nor qualitatively the dispersion branches, which are monotonically growing in energy for increasing wave number.

Finally, if both entrainment and density coupling are neglected, but relative superfluid velocity $2|\mathbf{V}|$ is considered, the dispersion at $k \rightarrow 0$ shows shifted sound speeds $\omega_{(Q_{np}=0, g_{np}=0)} = k(\pm c_n - |\mathbf{V}|)$ and $\omega_{(Q_{np}=0, g_{np}=0)} = k(\pm c_p^* + |\mathbf{V}|)$, as corresponds to decoupled superfluids. For comparison with the previous cases, at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and $|\mathbf{V}| = 0.1c$ one gets $c_{(Q_{np}=0, g_{np}=0)} = -0.32c$ and $0.12c$ for neutrons, and $0.33c$ and $-0.13c$ for protons. The effect of the relative velocity on the whole dispersion tends to separate the higher (in absolute value) energy branches, and to get closer the lower energy branches (see top panel of Fig. 2); the latter ones can eventually collide and, as a result, produce instabilities.

2. Full linear model

In the general case, by combining density and entrainment coupling with a relative superfluid velocity, the plane-wave solutions to the linear system (21) gives rise to a generic fourth-order polynomial for the excitation frequencies. Its cumbersome analytical solution is, however, easily obtained numerically. Figure 2 shows the linear-excitation frequencies for total nuclear matter density $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and several relative velocities. The top panel compares the excitations of the static equilibrium $|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$ and the dynamical equilibrium at $|\mathbf{V}| = 0.075c$. The symmetric branches (with respect to the zero frequency) at $|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$ contrast with the asymmetric dispersion in the presence of relative velocity. The dispersion of the static equilibrium is characterized by a phonon region at low wave number $k \rightarrow 0$, which can be reasonably approximated by Eq. (24). In the dynamical equilibrium, as can be better seen in the inset, the lower-energy (in absolute value) branches bend towards each other and develop a rotonic structure with a minimum phase velocity ω/k at nonzero momentum, as can be seen for $|\mathbf{V}| = 0.075c$. Further increase in the relative velocity of the system, as shown in the lower panels of Fig. 2 for $|\mathbf{V}| = 0.125c$, leads to a dynamical instability associated with complex excitation energies. The unstable region covers a limited range of intermediate wave numbers $k \in [0.16, 0.49] \text{ fm}^{-1}$ (see the bottom panel of Fig. 2) between mode bifurcations. The growth rate of these instabilities is expected to be exponential at small times (roughly until the moment when the perturbation amplitudes reach values of the same order as the equilibrium quantities), and the typical time τ for their development is inversely proportional to the maximum value of the imaginary frequencies $\tau \propto \text{Im}[\omega]^{-1}$. For the unstable case depicted in the middle and bottom panels of Fig. 2, this linear time estimate is $2\pi\omega_{\text{max}}^{-1} = 4.1 \times 10^{-21} \text{ s}$. Notice that this value (calculated in the linear regime) is not the time it takes for the superfluids to decay from their equilibrium state, which is a subsequent nonlinear process. For comparison, it is worth pointing out that the linear estimate is 2.4 times longer than the period of the proton plasmon, $\tau_p = 1.7 \times 10^{-21} \text{ s}$ (as calculated for decoupled protons).

B. Rotonic structures and instabilities

Roton excitations were introduced by Landau in order to explain the varying dynamics of superfluid helium with temperature [54]. While long-wavelength modes (phonons) were the main contribution to the superfluid excitations near zero temperature, short-wavelength modes around a minimum in the dispersion curve (rotons) were the dominant type of excitations at slightly higher temperatures (see, e.g., Ref. [55] for a microscopic characterization of roton excitations in liquid helium). Differently from phonons and due to the minimum in the dispersion diagram, the group velocity of rotons vanishes, and the roton modes are localized in a region of the order of the inverse wave number k_r^{-1} corresponding to the local energy minimum. On the other hand, rotons present the lowest phase velocity of the collective superfluid excitations, and so, following the Landau's criterion, they are expected to mark a threshold for the critical velocity of an external probe capable to excite the superfluid. Still, this collective excitation threshold competes with the fermionic critical velocity associated with the pair-breaking excitations [50].

As can be seen in Fig. 3(a), which zooms in the bottom inset of Fig. 2 to represent the lowest positive-energy branch (solid line) of the dispersion at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, the two-superfluid system of the inner core develops rotonic structures in the presence of relative superfluid velocity. For $|\mathbf{V}| = 0.075c$, the minimum phase velocity $\omega/k \approx 0.0085c$ is reached at $k \approx 0.4 \text{ fm}^{-1}$, nearby the roton minimum at k_r , and it is given by the tangent to the dispersion curve passing through the origin (dashed line). The tangent decreases for increasing relative superfluid velocity. Notice that, although the negative branches of the dispersion [not shown in Fig. 3(a)] are not the mirror reflection of the positive branches with respect to the zero-energy axis (due to the effect of combined population imbalance and relative motion), they follow a symmetric trend by decreasing their negative phase velocities. For high enough relative superfluid velocity, the two mentioned dispersion branches intersect at their respective rotonic regions, marking the threshold for dynamical instabilities. Beyond this threshold, the growth of the unstable (rotonic) modes from small perturbations during the time evolution of the system can eventually produce the decay of the stationary state.

The whole instability region predicted by the present model is depicted in the density-velocity map of Fig. 3(b). The system shows a relative velocity threshold for the onset of instabilities that increases (approximately) linearly with the total density. Most of the unstable region is dominated by rotonic instabilities, and only the region encircled by the continuous line contains unstable modes at zero quasimomentum, which is the only unstable region found if only homogeneous terms are considered in the energy density. Therefore, the results reported in this paper generalize previous work on dynamical instabilities in the two-superfluid outer core [20,33], where only phonon instabilities were identified.

C. Spectrum of linear excitations

A common feature of the spectrum that appears at both zero and nonzero relative velocity is the crossing of in-

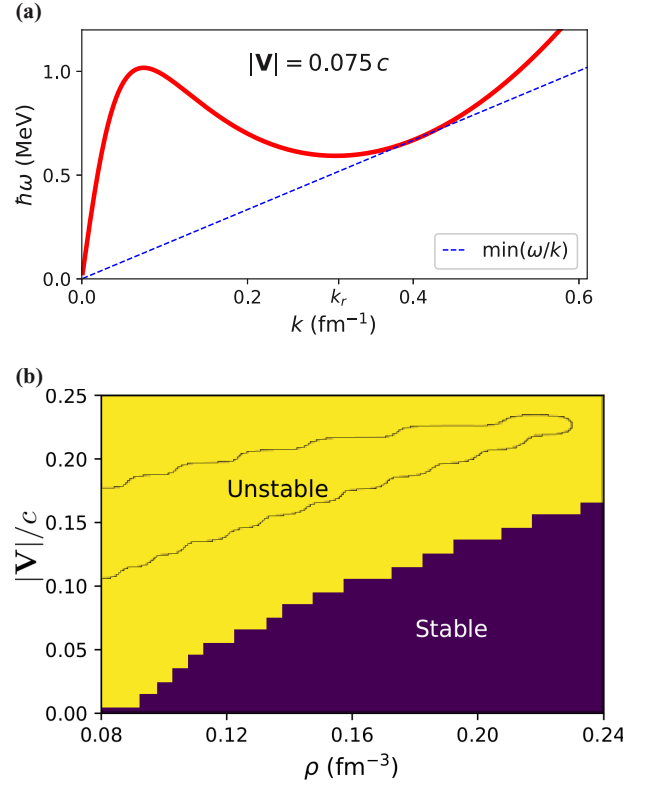


FIG. 3. (a) Roton structure in the dispersion of linear excitations of a uniform state with relative superfluid velocity $\mathbf{v}_{pm} = 2|\mathbf{V}| = 0.15c$. The roton minimum belongs to the lowest positive-energy branch and takes place at $k_r = 0.31 \text{ fm}^{-1}$. Simultaneously there exists a rotonic structure in the highest negative-energy branch that presents a maximum. (b) Range of unstable uniform states (yellow) in the presence of relative superfluid velocity $\mathbf{v}_{pm} = 2|\mathbf{V}|$. The region encircled by the continuous line indicates the presence of unstable modes with wave number $k = 0$. The staircase boundary lines are due to numerical resolution.

and out-of-phase modes; see e.g., Fig. 4, where the crossing takes place in the range of $k \in [1, 1.2] \text{ fm}^{-1}$ at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$. As predicted by the simplified phononic models represented by Eqs. (24) and (25), in the limit $k \rightarrow 0$, the spectrum is made of proton to neutron in-phase modes at low energy, and out-of-phase modes at high energy. This fact reflects the phase locking character of both density and entrainment couplings, which take negative values in the mentioned limit, $g_{np}(k=0) = (\partial\mu_n/\partial\rho_p) < 0$ [although $g_{np}(k=0) > 0$ for $\rho > 0.21 \text{ fm}^{-3}$] and $q_{np} < 0$. However, the coupling terms in Eq. (22) are modified for varying wave number and nonzero relative velocity. In particular, the density coupling becomes [see Eq. (23)] $g_{np} - \alpha m|\mathbf{V}|^2/2 = (\partial\mu_n/\partial\rho_p) + \vartheta_{np}(\hbar k)^2/2m - \alpha m|\mathbf{V}|^2/2$, and even at zero velocity $|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$ the positive k -dependent term competes with the negative chemical-potential derivative to give a definite sign to the coupling. For high enough wave number $k^2 > 2m|\partial\mu_n/\partial\rho_p|/(\hbar^2\vartheta_{np})$, the density coupling changes sign and the spectrum modes reverse their phase character (either in phase or out of phase). Due to the entrainment coupling, this

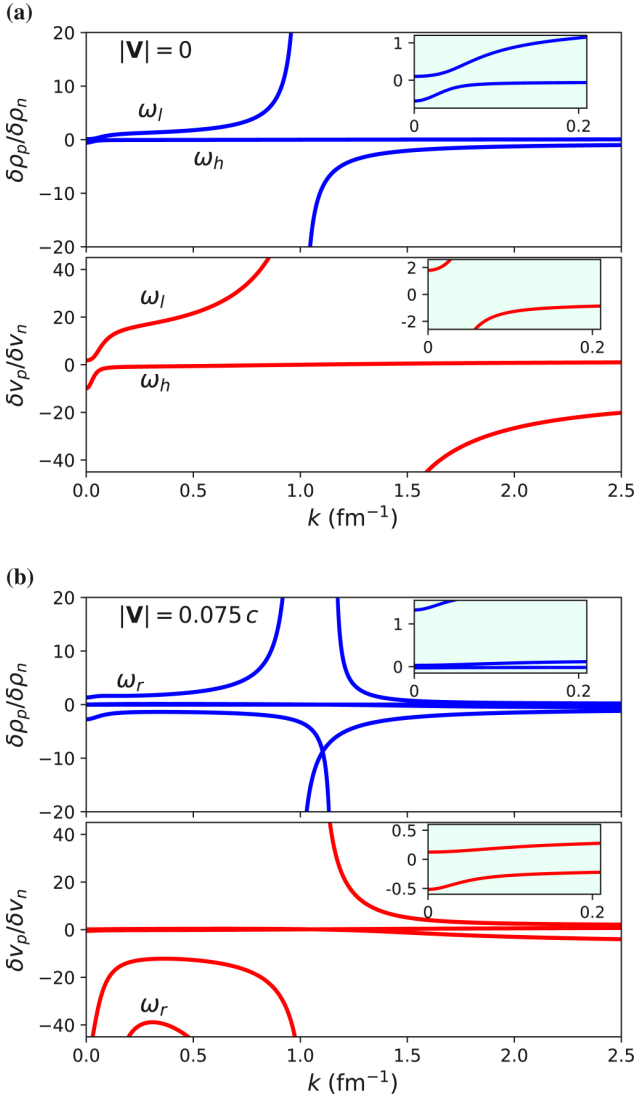


FIG. 4. Excitation modes of constant density states with nuclear density $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, and relative velocity (a) $|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$, top panels, and (b) $|\mathbf{V}| = 0.075c$, bottom panels, corresponding to the dispersion relations depicted in the top panel of Fig. 2. The label ω_l (ω_h) indicates the correspondence of the mode branch with the lowest-energy (highest-energy) branches of the dispersion; analogously, the label ω_r refers to the rotonic branch of the dispersion. The continuation of this latter branch in the velocity component panels at high $k > 1.2$, at high positive values $\delta \mathbf{v}_p / \delta \mathbf{v}_n > 0$, is not captured by the graph scale. Since the systems are dynamically stable, all modes are chosen to have only real components. The insets zoom in to the low wave number range in order to see the in- and out-of-phase character between neutron and proton modes.

mode crossing is not simultaneous for velocity and density components, and there exists a transition region for a small range of wave numbers where the velocity perturbations do not follow the phase character of the density perturbations; that is, one can observe modes having in-phase velocity components and out-of-phase density components. However, in general, in the range of wave numbers where the crossing

takes place, the collective excitation energies are much higher than the pair-breaking limit and the corresponding modes are expected to be damped.

More relevantly, the presence of relative velocity breaks the degeneracy between excitation branches of the spectrum, reflecting the underlying asymmetric dispersion. When $|\mathbf{V}| = \mathbf{0}$ (see top panels of Fig. 4), the spectrum shows only two curves, each of them corresponding to two overlapped branches of linear excitations with opposite phase velocities. The modes labeled by ω_l (ω_h) correspond to the lowest-energy (highest-energy) branches of the dispersion. This correspondence is reversed after the previously mentioned mode crossing. When $|\mathbf{V}| \neq \mathbf{0}$, as can be seen in the bottom panels of Fig. 4, the mode branches split and two new (with respect to the static case) curves can be seen to emerge. Two of the mode branches are close to pure neutronic excitations, since $\delta \mathbf{v}_p / \delta \mathbf{v}_n \sim \delta \rho_p / \delta \rho_n \approx 0$ (see insets). The key difference introduced by the relative velocity is the fact that one of the branches contains modes (labeled ω_r) belonging to the rotonic region of the dispersion (cf. Fig. 3), which combine in-phase density perturbations and out-of-phase velocity perturbations, in spite of the underlying density plus entrainment coupling in this wave-number range, which tends to lock in phase all mode components. This feature is relevant for triggering the dynamical instabilities since the associated rotonic modes occupy the lowest-energy region of the spectrum, and therefore they are not expected to be damped by pair-breaking mechanisms.

The onset of instability at high relative velocity can be understood as a resonant process that occurs at the matching of two excitation frequencies. As can be seen in the bottom panels of Fig. 2, for $|\mathbf{V}| = 0.125c$, the instability region is delimited by the collisions of the two lowest-energy (in absolute value) branches of the dispersion. The associated unstable modes, whose Fourier components $U_{\mathbf{k}}$ are characterized in Fig. 5, show clearly the merging process and the appearance of complex components. Notice that, with increasing relative velocity, the rotonic mode branch in the velocity panel of Fig. 4 (at $|\mathbf{V}| = 0.075c$) has shifted its position closer to the horizontal axis to meet the other low-energy branch. These modes involve perturbations that satisfy $\delta \mathbf{v}_p / \delta \mathbf{v}_n \times \delta \rho_p / \delta \rho_n < 0$. Such an opposite relation between the density and the velocity components of the excitation modes, on the top of the dynamical equilibrium of coupled superfluids, is unstable (once the relative velocity is beyond a density-dependent threshold), and it is the expected cause of decay of the stationary configuration.

For each of these modes with wave number \mathbf{k} , there exist another degenerate unstable mode with opposite wave number $-\mathbf{k}$, such that their linear combinations give rise to standing waves of typical wavelength $\approx 2\pi k_r^{-1}$, since the instability appears in the rotonic region of wave numbers. The standing-wave pattern involves in-phase density modulations in the proton and neutron superfluids that are opposite (over-density versus under-density) at both sides of each of the standing-wave nodes. But, simultaneously, the velocity excitations are out of phase for protons and neutrons, so that one superfluid “accelerates” while the other “decelerates” in between the standing-wave nodes, which become separated by regions of either increasing or decreasing relative velocities; the growth

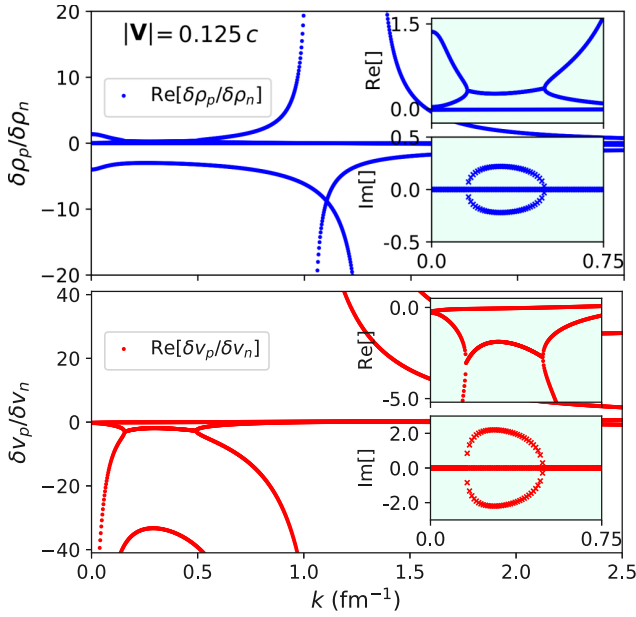


FIG. 5. Same as Fig. 4 for an unstable stationary state at total density $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and relative superfluid motion with $|\mathbf{V}| = 0.125c$. The represented modes correspond to the dispersion relations shown in the middle and bottom panels of Fig. 2. Inside the region of unstable wave numbers $k \in [0.16, 0.49] \text{ fm}^{-1}$, the modes are described by complex components. The main panels depict the real part of the mode components versus wave number, whereas the two insets within each main panel represent their real (top inset) and imaginary (bottom inset) parts.

of these excitations can eventually evolve into quantized superfluid vortices. However, the linear analysis cannot predict the outcome of the nonlinear time evolution of the system. Therefore, whether these density modulations can grow and the associated vortices can emerge, eventually giving rise to a new, stable stationary configuration is beyond the present analysis and will be studied elsewhere.

IV. CONCLUSIONS

In the search for physical phenomena that could be responsible for observational features of neutron stars, such as thermal evolution or timing anomalies, previous works have explored instabilities originated by unstable phonon excitations in the superfluid interior of neutron stars [18,20,33]. The present work contributes to this exploration in the outer core of neutron stars and generalizes the previous findings by showing that rotonic excitations may also lie at the origin of dynamical instabilities and could eventually lead to emergent vorticity along with modulations of the superfluid density. Since these collective modes are among the lowest-energy excitations, they can remain undamped by pair-breaking effects.

By means of an effective nuclear interaction Skyrme SLy4, and in the presence of dynamical entrainment (computed with the same Skyrme force), we have shown from the linear analysis of the two-superfluid hydrodynamics that the rotonic structures originate at intermediate wave numbers

($\approx 0.4 \text{ fm}^{-1}$) in the presence of relative motion between neutron and proton superfluids. Either rotational lag between the two superfluids or star precession could be at the origin of such relative motion, and hence of the associated instabilities [21,33,46,56]. We have found rotonic instabilities above relative superfluid velocities of $\approx 0.1c$ at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, a velocity threshold that increases monotonically with the nuclear density. The associated unstable modes present in-phase superfluid densities and out-of-phase superfluid velocities and have a fast exponential growth in the linear regime (typical times of above twice the proton plasmon period have been found at saturation density). The final fate of these modes in the nonlinear regime is beyond the scope of this work.

The effect of alternative nuclear-interaction forces or the specific role of entrainment on roton instabilities present interesting prospects for further study. As far as the entrainment can be expressed in terms of the isovector effective mass [32], it would be instructive to test the impact of energy functionals with different effective masses on the appearance of rotors.

Our simplified nonrelativistic model (see Ref. [57] for a relativistic approach) does not include the Landau damping associated with the electron gas [20,41], the mutual friction between superfluids from underlying vorticity [14,34], the viscosity from a normal fluid [35], nor magnetic-field effects [23,58]. These features will be considered in future works.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Nicolas Chamel and Dmitry Kobyakov for their feedback on an early version of the paper. X.V. was partially supported by Grant FIS2017-87534-P from MINECO and FEDER. X.V. and J.A.G.G. also thank the support from the State Agency for Research of the Spanish Ministry of Science and Innovation through the Unit of Excellence Maria de Maeztu 2020-2023 award to the ICCUB (CEX2019-000918-M).

APPENDIX: DISPERSION OF LINEAR EXCITATIONS

It is useful to rewrite the linear matrix (22) as a block matrix:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{V} & \mathcal{P} \\ \mathcal{G} & \mathcal{V}^T \end{pmatrix}, \quad (\text{A1})$$

where the 2×2 blocks are

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} u & w \\ -w & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{j}_n}{\rho_n} & \frac{\rho_{np}}{\rho_p} \mathbf{v}_{pn} \\ -\frac{\rho_{np}}{\rho_n} \mathbf{v}_{pn} & \frac{\mathbf{j}_p}{\rho_p} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2})$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varrho_{nn} & \varrho_{np} \\ \varrho_{np} & \varrho_{pp} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{nn} & \mathcal{G}_{np} \\ \mathcal{G}_{np} & \mathcal{G}_{pp} \end{pmatrix}.$$

After the Fourier expansion of the perturbations in Eq. (21), only the symmetric block \mathcal{G} depends on the wave number k , with elements given by $m\mathcal{G}_{nn} = \partial_n \mu_n + \vartheta_{nn} \hbar^2 k^2 / 2m$, $m\mathcal{G}_{np} = \partial_p \mu_n - \alpha |\mathbf{v}_{pn}|^2 / 2 + \vartheta_{np} \hbar^2 k^2 / 2m$, and $m\mathcal{G}_{pp} = \partial_p \mu_p + \vartheta_{pp} \hbar^2 k^2 / 2m + [\mu_e^2 / (\pi^2 \hbar^3 c^3) + k^2 / (4\pi e^2)]^{-1}$, where ∂_j denotes the partial derivative with respect to the density ρ_j .

The dispersion follows from the characteristic polynomial $|\mathcal{B} - \lambda I| = 0$, with $\lambda \equiv \omega_k/k$; explicitly,

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - 2\lambda^3(u+v) + \lambda^2[(u+v)^2 + 2|\mathcal{V}| - \text{Tr}(\mathcal{G}\mathcal{P})] \\ & - 2\lambda[(u+v)(|\mathcal{V}| - \varrho_{np}\mathcal{G}_{np}) + w\varrho_{np}(\mathcal{G}_{nn} - \mathcal{G}_{pp}) \\ & - w\mathcal{G}_{np}(\varrho_{nn} - \varrho_{pp}) - u\varrho_{pp}\mathcal{G}_{pp} - v\varrho_{nn}\mathcal{G}_{nn}] \\ & + |\mathcal{G}\mathcal{P}| + u^2v^2 - u^2\varrho_{pp}\mathcal{G}_{pp} - v^2\varrho_{nn}\mathcal{G}_{nn} \\ & - 2uv\varrho_{np}\mathcal{G}_{np} + w^2(2uv - w^2 \\ & + 2\varrho_{np}\mathcal{G}_{np} - \varrho_{pp}\mathcal{G}_{nn} - \varrho_{nn}\mathcal{G}_{pp}) \\ & + 2w[u(\varrho_{pp}\mathcal{G}_{np} - \varrho_{np}\mathcal{G}_{pp}) + v(\varrho_{np}\mathcal{G}_{nn} - \varrho_{nn}\mathcal{G}_{np})]. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Although there exist analytical solutions for a quartic equation (see, for instance, Ref. [59]), they involve cumbersome expressions and we do not write them here, since they do not help with any physical insight. Instead, the numerical solutions are easily found with standard computer algebra software, and the simpler analytical cases, as those com-

mented in the main text [see Eqs. (24) and (25)], provide a good insight into the trends followed by the solutions as a function of the relevant quantities.

The simplest example corresponds to the static system, $\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_p = \mathbf{v}_{pn} = \mathbf{0}$, where the characteristic polynomial (A3) reduces to

$$\lambda^4 - \lambda^2\text{Tr}(\mathcal{G}\mathcal{P}) + |\mathcal{G}\mathcal{P}|, \quad (\text{A4})$$

and the solutions are

$$\lambda_{0\pm}^2 = \frac{\text{Tr}(\mathcal{G}\mathcal{P})}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Tr}(\mathcal{G}\mathcal{P})^2}{4} - |\mathcal{G}\mathcal{P}|}. \quad (\text{A5})$$

This case, without the explicit k dependency of the matrix \mathcal{G} , can be found in the literature (see, e.g., Refs. [18,20]) and can be compared with our results in the limit $k \rightarrow 0$; similar sound speeds to those found here (our ω/k for $k \rightarrow 0$) have been reported. Notice that the particular values depends on the equation of state selected.

-
- [1] A. Migdal, *Sov. Phys. JETP* **10**, 176 (1960).
[2] G. Baym, C. Pethick, D. Pines, and M. Ruderman, *Nature (London)* **224**, 872 (1969).
[3] D. Ravenhall and C. J. Pethick, *Astrophys. J.* **424**, 846 (1994).
[4] N. Chamel, *Phys. Rev. C* **85**, 035801 (2012).
[5] G. Watanabe and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 062701 (2017).
[6] D. G. Yakovlev and C. Pethick, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **42**, 169 (2004).
[7] D. Page, J. M. Lattimer, M. Prakash, and A. W. Steiner, *Astrophys. J., Suppl. Ser.* **155**, 623 (2004).
[8] G. L. Israel, T. Belloni, L. Stella, Y. Rephaeli, D. E. Gruber, P. Casella, S. Dall’Osso, N. Rea, M. Persic, and R. E. Rothschild, *Astrophys. J.* **628**, L53 (2005).
[9] T. E. Strohmayer and A. L. Watts, *Astrophys. J.* **632**, L111 (2005).
[10] N. Chamel, D. Page, and S. Reddy, *Phys. Rev. C* **87**, 035803 (2013).
[11] B. Haskell and A. Melatos, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, 1530008 (2015).
[12] J. Fuentes, C. Espinoza, A. Reisenegger, B. Stappers, B. Shaw, and A. Lyne, *Astron. & Astrophys.* **608**, A131 (2017).
[13] P. Anderson and N. Itoh, *Nature (London)* **256**, 25 (1975).
[14] M. Alpar, P. Anderson, D. Pines, and J. Shaham, *Astrophys. J.* **276**, 325 (1984).
[15] W. C. Ho, C. M. Espinoza, D. Antonopoulou, and N. Andersson, in *Proceedings of the 14th International Symposium on Nuclei in the Cosmos (NIC2016)* (Niigata, Japan, 2017), p. 010805.
[16] N. Chamel, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **388**, 737 (2008).
[17] D. Kobyakov and C. J. Pethick, *Phys. Rev. C* **87**, 055803 (2013).
[18] D. N. Kobyakov and C. J. Pethick, *Astrophys. J. Lett.* **836**, 203 (2017).
[19] G. Howitt, B. Haskell, and A. Melatos, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **460**, 1201 (2016).
[20] D. N. Kobyakov, C. J. Pethick, S. Reddy, and A. Schwenk, *Phys. Rev. C* **96**, 025805 (2017).
[21] K. Glampedakis, N. Andersson, and D. I. Jones, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 081101 (2008).
[22] V. Graber, N. Andersson, and M. Hogg, *Int. J. Mod. Phys. D* **26**, 1730015 (2017).
[23] C. A. van Eysden and B. Link, *Astrophys. J. Lett.* **865**, 60 (2018).
[24] V. Khomeenko, M. Antonelli, and B. Haskell, *Phys. Rev. D* **100**, 123002 (2019).
[25] J. Sauls, in *Timing Neutron Stars* (Springer, Dordrecht, Netherlands, 1989), pp. 457–490.
[26] W. Ketterle and M. W. Zwierlein, *Nuovo Cimento Rivista Serie* **31**, 247 (2008).
[27] F. Douchin and P. Haensel, *Astron. Astrophys.* **380**, 151 (2001).
[28] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer, *Nucl. Phys. A* **635**, 231 (1998).
[29] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. Ransom, M. Roberts, and J. Hessels, *Nature (London)* **467**, 1081 (2010).
[30] J. Antoniadis, P. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, R. S. Lynch, M. H. van Kerkwijk, M. Kramer, C. Bassa, V. S. Dhillon, T. Driebe *et al.*, *Science* **340**, 1233232 (2013).
[31] N. Chamel and P. Haensel, *Phys. Rev. C* **73**, 045802 (2006).
[32] N. Chamel and V. Allard, *Phys. Rev. C* **100**, 065801 (2019).
[33] N. Andersson, G. L. Comer, and R. Prix, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **354**, 101 (2004).
[34] G. Mendell, *Astrophys. J.* **380**, 515 (1991).
[35] N. Andersson and A. Schmitt, *Particles* **2**, 457 (2019).
[36] P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, 2003).
[37] A. Andreev and E. Bashkin, *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* **42**, 164 (1976).
[38] C. F. v. Weizsäcker, *Eur. Phys. J. A* **96**, 431 (1935).
[39] C. Gonzalez-Boquera, M. Centelles, X. Viñas, and T. R. Routray, *Phys. Rev. C* **100**, 015806 (2019).
[40] G. Mendell and L. Lindblom, *Ann. Phys. (NY)* **205**, 110 (1991).
[41] B. Jancovici, *Nuovo Cimento* **25**, 428 (1962).
[42] R. Prix, *Phys. Rev. D* **69**, 043001 (2004).

- [43] D. Vautherin and D. M. Brink, *Phys. Rev. C* **5**, 626 (1972).
- [44] M. Bender, P.-H. Heenen, and P.-G. Reinhard, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 121 (2003).
- [45] M. Centelles, M. Del Estal, and X. Viñas, *Nucl. Phys. A* **635**, 193 (1998).
- [46] N. Andersson, K. Glampedakis, and M. Hogg, *Phys. Rev. D* **87**, 063007 (2013).
- [47] L. Villain and P. Haensel, *Astron. Astrophys.* **444**, 539 (2005).
- [48] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **112**, 1900 (1958).
- [49] N. Martin and M. Urban, *Phys. Rev. C* **90**, 065805 (2014).
- [50] R. Combescot, M. Y. Kagan, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **74**, 042717 (2006).
- [51] X.-R. Zhou, H.-J. Schulze, E.-G. Zhao, F. Pan, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **70**, 048802 (2004).
- [52] M. Baldo and H.-J. Schulze, *Phys. Rev. C* **75**, 025802 (2007).
- [53] W. Guo, J. Dong, X. Shang, H. Zhang, W. Zuo, M. Colonna, and U. Lombardo, *Nucl. Phys. A* **986**, 18 (2019).
- [54] L. Landau, *JETP* **11**, 592 (1941).
- [55] R. Feynman, *Statistical Mechanics: A Set of Lectures* (CRC Press, Boca Raton, FL, 2018).
- [56] K. Glampedakis and N. Andersson, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 141101 (2009).
- [57] A. Haber, A. Schmitt, and S. Stetina, *Phys. Rev. D* **93**, 025011 (2016).
- [58] D. N. Kobayakov, *Phys. Rev. C* **98**, 045803 (2018).
- [59] E. W. Weisstein, <https://mathworld.wolfram.com/> (2004).

En la década de 1950, Onsager y Feynman propusieron que en un superfluido podrían formarse vórtices cuantizados. Onsager sugirió que, debido a la naturaleza cuántica de la superfluidez, la circulación de la velocidad alrededor de un vórtice no podría tomar cualquier valor, como sí ocurre en los fluidos ordinarios (clásicos), sino que debería estar cuantizada [Ons49]. Seis años después, Feynman desarrolló la idea de Onsager postulando que estos vórtices tendrían un núcleo donde la densidad superfluida se reduce a zero y, alrededor de ese núcleo, la circulación de la velocidad (o el flujo de vorticidad) estaría cuantizada en unidades de h/m , donde h es la constante de Planck y m la masa de las partículas que constituyen el superfluido [Fey55].

Hoy en día se han observado, en multitud de experimentos, vórtices cuantizados en condensados de Bose Einstein, tanto vórtices aislados [Mat+99], como redes de vórtices [Mad+00] como pares o anillos de vórtices [And+01]. También se han observado repetidamente vórtices en helio superfluido [Fis91] y en superconductores de tipo II [TT90].

5.1. Cuantización de la circulación

La función de onda (o parámetro de orden) de un superfluido puede escribirse como $\psi = \sqrt{n(\vec{r}, t)}e^{i\theta(\vec{r}, t)}$, donde $n(\vec{r}, t)$ es la densidad local del superfluido y donde $\theta(\vec{r}, t)$ es la fase que proporciona el campo de velocidades a través de la relación $\vec{v} = \hbar\nabla\theta/m$. Si tomamos un camino cerrado arbitrario C alrededor del core de un vórtice, el cambio en

la fase es

$$\Delta\theta = \oint_C \nabla\theta \cdot d\vec{l}, \quad (5.1)$$

donde $d\vec{l}$ es el elemento de línea en la dirección de integración. Las funciones de onda del superfluido en el punto inicial y final de C son ψ_0 y ψ_f respectivamente. Como los puntos inicial y final coinciden, la función de onda debe tomar el mismo valor, esto es $\psi_0 = \psi_f$, implicando

$$\Delta\theta = 2\pi q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2)$$

y, por lo tanto, la circulación de la velocidad a lo largo de C será

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{m} \oint_C \nabla\theta \cdot d\vec{l} = q \frac{h}{m}, \quad (5.3)$$

donde vemos que solo puede tomar valores discretos múltiplos de h/m . La ecuación (5.3) se conoce como cuantización de la circulación y manifiesta el carácter cuántico del superfluido, distinguiéndolo de los fluidos clásicos donde Γ puede tomar cualquier valor.

Si escogemos el camino C como una circunferencia de radio r con centro en el núcleo del vórtice, tenemos que

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = v_{\odot} \cdot 2\pi r, \quad (5.4)$$

donde \odot indica la dirección tangente (azimutal) a la trayectoria circular en cada punto. Combinando (5.3) y (5.4), la velocidad del flujo entorno al vórtice será

$$v_{\odot} = \frac{q\hbar}{mr} \hat{e}_{\odot}. \quad (5.5)$$

Vemos en (5.5) que la velocidad del flujo superfluido disminuye rápidamente a medida que nos alejamos del núcleo del vórtice ($v_{\odot} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$) y diverge cuando nos acercamos al núcleo del vórtice ($v_{\odot} \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$). Si se incrementa q , la velocidad del flujo entorno al núcleo del vórtice también lo hará (de forma discontinua ya que q solo toma valores discretos). El signo de q indicará el sentido de circulación del flujo (sentido horario para $q < 0$ y sentido antihorario para $q > 0$). La energía cinética del vórtice varía como $E_v \sim q^2$ y, aunque en principio q puede tomar cualquier valor entero, los experimentos muestran que vórtices con $|q| > 1$ son inestables energéticamente (ver por ejemplo [PS03]). La vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ del flujo superfluido es nula lejos del vórtice,

ya que $\vec{v} \sim \nabla\theta$ y el rotacional de un gradiente es cero (flujo irrotacional). No obstante, en la singularidad del vórtice ($r = 0$), la vorticidad toma el valor

$$\vec{\omega} = \frac{h}{m} \delta(x)\delta(y)\hat{e}_z, \quad (5.6)$$

donde \hat{e}_z es un vector unitario paralelo al eje de rotación del vórtice y perpendicular al plano que lo contiene (ver por ejemplo [Men91]).

5.2. Vórtices y rotación

Uno de los mecanismos de creación de vórtices en el superfluido es la rotación [FS01]. Los vórtices aparecerán en el sistema si, mediante su creación, se reduce la energía rotacional total de dicho sistema. Considérese un superfluido de densidad uniforme ρ contenido en un cilindro de radio R_0 y altura H_0 girando con una velocidad angular Ω alrededor del eje z . Puede demostrarse que la aparición espontánea de vórtices en el sistema será favorable energéticamente para velocidades angulares por encima de la velocidad crítica [PS03]

$$\Omega_c = \frac{h}{mR_0^2} \ln\left(\frac{R_0}{\xi}\right), \quad (5.7)$$

donde ξ es la longitud de coherencia del superfluido ($\xi \ll R_0$). En ausencia de rotación, la presencia de vórtices incrementa la energía del sistema y, éstos, serán inestables [Rok97]. En experimentos realizados con condensados de Bose-Einstein, los vórtices aparecen cuando la trampa que los contiene gira con velocidades muy superiores a la crítica dada por (5.7) (ver por ejemplo [Mad+00]), mostrando que el criterio energético es necesario pero no suficiente para la creación de vórtices. Asimismo, se ha observado que al aumentar la velocidad de rotación, el número de vórtices en el sistema también se incrementa (véase la figura 5.1) Para $\Omega \gg \Omega_c$ se espera la aparición de una red de vórtices en el superfluido que, a escala hidrodinámica y en promedio, rotará como un sólido rígido, con velocidad $\vec{\Omega} \times \vec{r}$, donde \vec{r} es la distancia al eje de rotación. La densidad local de vórtices puede obtenerse dividiendo la vorticidad local promedio del superfluido, $\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\Omega}$, entre la vorticidad (por unidad de área) proporcionada por cada vórtice (ecuación (5.6)) obteniendo

$$n_\Omega = \frac{2m\Omega}{h}. \quad (5.8)$$

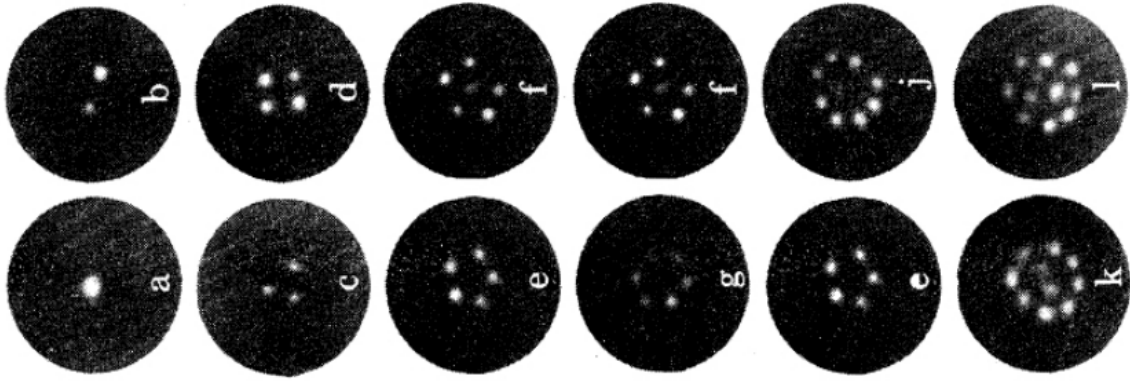


Figura 5.1: Imágenes experimentales de redes de vórtices en helio superfluido obtenidas de [YGP79]. La imagen muestra la aparición de vórtices en el superfluido a medida que se incrementa la velocidad de rotación.

La ecuación (5.8) se conoce como Regla de Feynman y nos da la densidad de vórtices por unidad de área para cada velocidad de rotación. Si se asume que los vórtices se distribuyen espacialmente formando una red triangular, la densidad superficial de vórtices n_Ω se relaciona con la distancia de separación entre vórtices d_Ω como $n_\Omega = 2/(\sqrt{3}d_\Omega^2)$. Sustituyendo esta relación en (5.8) se obtiene

$$d_\Omega = \sqrt{\frac{h}{\sqrt{3}m\Omega}}. \quad (5.9)$$

Las ecuaciones (5.8) y (5.9) muestran que, cuanto más rápido rota el sistema, más vórtices aparecen en el superfluido y más cerca están unos de otros. Si la velocidad de rotación es extremadamente elevada, los vórtices pueden llegar a solaparse y destruirse la superfluidez. Esto sucederá cuando $d_\Omega \sim \xi$, lo que permite definir una segunda velocidad crítica $\Omega_{c2} \approx h/m\xi^2$ (tomando $d_\Omega = \xi$ en (5.9)) a partir de la cual la superfluidez desaparecerá.

5.3. Rotación y partículas cargadas. Campo de London

Bajo la influencia de un campo electromagnético, las partículas cargadas modifican su momento como

$$\vec{p} = m\vec{v} = \hbar\nabla\theta - e\vec{A}, \quad (5.10)$$

donde se ha considerado el acoplamiento mínimo con el campo a través del potencial vector \vec{A} . Si además consideramos rotación, el momento de las partículas superconductoras en

el sistema rotante será

$$\vec{p} = m\vec{v} = \hbar\nabla\theta - m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) - e\vec{A}. \quad (5.11)$$

La ecuación (5.3), que nos da la cuantización de la circulación alrededor de un vórtice en ausencia de campo y de rotación, se reescribe en presencia de ambos como

$$\oint_C \left(\vec{v} + \frac{e}{m}\vec{A} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \cdot d\vec{l} = q\frac{h}{m}. \quad (5.12)$$

En este caso, la circulación de la velocidad deja de estar cuantizada y la cantidad que se cuantiza es la circulación del vector

$$\vec{\Xi} = \vec{v} + \frac{e}{m}\vec{A} + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (5.13)$$

recorriendo un camino cerrado arbitrario en cualquier región del superconductor. En presencia de rotación y de campo magnético y para una densidad dada, la minimización de la energía total de las partículas superconductoras con respecto a su campo de velocidades requiere co-rotación con el sistema rotante [Alp+84]. Esto implica que $\vec{v} = 0$ y, teniendo en cuenta (5.11), se tiene que

$$\frac{\hbar}{m}\nabla\theta - \frac{e}{m}\vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (5.14)$$

La invariancia gauge de la función de onda de las partículas superconductoras evita la aparición de vórtices en ausencia de campo magnético externo ($\vec{A} = 0$). El superconductor compensa la rotación generando corrientes superficiales en sentido contrario a la misma, manteniendo las partículas cargadas en reposo en el sistema rotante. Estas corrientes superficiales crean un campo magnético \vec{B}_L , conocido como campo de London, que compensa (internamente) la rotación. Puede verse esto tomando el rotacional de (5.14) en ambos miembros de la ecuación:

$$\nabla \times \left\{ \frac{\hbar}{m}\nabla\theta - \frac{e}{m}\vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \right\} \rightarrow 0 - \frac{e}{m}\nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (5.15)$$

que puede reescribirse como

$$\vec{B}_L = -\frac{2m}{e}\vec{\Omega}, \quad (5.16)$$

donde $\vec{B}_L = \nabla \times \vec{A}_L$ es el campo proveniente de un potencial vector emergente, \vec{A}_L , debido a las corrientes superconductoras y donde $\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\Omega}$, ya que el fluido de protones rota en promedio como un sólido rígido. Como se ha visto, la rotación no crea vórtices en el superconductor por sí sola debido a la aparición del campo de London. No obstante, la aplicación de un campo magnético externo sobre el superconductor sí podría crearlos. Esta discusión se realiza en las secciones siguientes.

5.4. Efecto Meissner. Longitud de penetración

Cuando se aplica un campo magnético externo sobre un superconductor, éste reacciona intentando evitar que dicho campo penetre en su interior. Para ello, genera corrientes superconductoras en superficie que crean un campo magnético opuesto al campo magnético externo. Este campo inducido, anulará el campo magnético externo en el interior del superconductor. La corriente superconductoras inducida es

$$\vec{j} = -\frac{\rho e}{m} \vec{A}, \quad (5.17)$$

que también puede escribirse como

$$\nabla \times \vec{j} = -\frac{\rho e}{m} \vec{B}. \quad (5.18)$$

La corriente de carga inducida y el campo magnético han de cumplir las leyes de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.19)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 e \vec{j}, \quad (5.20)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética. Tomando el rotacional de (5.20) y teniendo en cuenta (5.18) y (5.19) se obtiene

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\Lambda^2} \vec{B} = 0, \quad (5.21)$$

donde $\Lambda = \sqrt{m/\mu_0 e^2 \rho}$ es la longitud de penetración de London. La ecuación (5.21) se conoce como ecuación de Helmholtz y, en una dimensión, admite una solución del tipo $B \sim e^{-x/\Lambda}$, donde Λ proporciona una longitud característica de penetración del campo magnético, generado por las corrientes superficiales, en el superconductor.

5.5. Superconductores de tipo I y II

La teoría estándar de la superconductividad distingue dos tipos de superconductores, los de tipo I y los de tipo II, según como responda el superconductor a la aplicación de un campo magnético externo. Los superconductores de tipo I cumplen que $\sqrt{2}\Lambda < \xi$ [Tin96] y se caracterizan por obedecer el efecto Meissner, que consiste en la expulsión completa

del campo magnético del superconductor por debajo de un campo crítico B_c dado por [Gen89]

$$B_c = \left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \right)^{3/2} \sqrt{E_F} |\Delta|. \quad (5.22)$$

Para campos $B > B_c$, el campo penetra en el superconductor y la superconductividad se destruye completamente (ver figura 5.2)

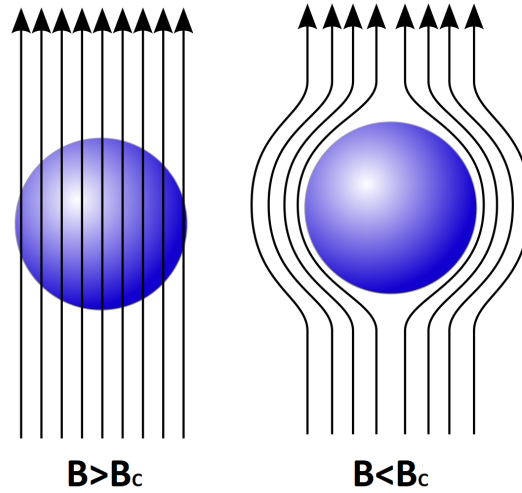


Figura 5.2: Efecto Meissner en superconductores de tipo I.

Por otra parte, los superconductores de tipo II cumplen que $\sqrt{2}\Lambda > \xi$ y presentan dos campos críticos B_{c1} y B_{c2} : obedecen el efecto Meissner para campos $B < B_{c1}$ pero permiten la penetración (parcial) del campo en el superconductor a través y mediante la formación de vórtices (fluxoides) para campos $B_{c1} < B < B_{c2}$ (ver figura 5.3). Para campos $B > B_{c2}$ la superconductividad se destruye. El campo B_{c1} mínimo necesario para que el superconductor forme vórtices es [Gen89]

$$B_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{\xi} \right), \quad (5.23)$$

que depende fuertemente de la densidad de pares de Cooper a través de $\Lambda \sim \rho^{-1/2}$. Para densidades elevadas, el campo penetrará poco en el superconductor y el campo crítico necesario para vencer al efecto Meissner será grande, ya que $B_{c1} \sim \Lambda^{-2}$ cuando $\Lambda \rightarrow 0$.

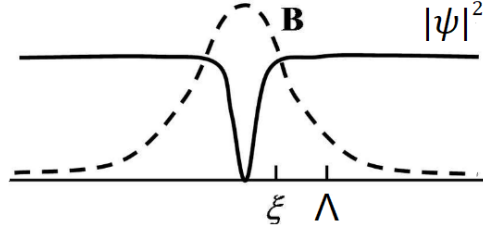


Figura 5.3: Esquema de un vórtice en un superconductor de tipo II.

5.6. Cuantización del flujo magnético

Considérese un camino cerrado C en una región de un superconductor de tipo II donde se ha formado una red de vórtices por la aplicación de un campo magnético externo B , tal que $B_{c1} < B < B_{c2}$. Supóngase también que, en esta región, no hay corrientes superconductoras, esto es $\vec{j} = \rho\vec{v} = 0$. En ausencia de rotación, la ecuación (5.12) da la cuantización del flujo magnético tomando $\vec{v} = 0$, esto es

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = q\Phi_0, \quad (5.24)$$

donde $\Phi_0 = h/e$ es el cuanto de flujo y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. El flujo magnético que atraviesa el superconductor a través de los vórtices está cuantizado y sólo puede tomar valores discretos proporcionales a Φ_0 . La densidad superficial de vórtices puede obtenerse como $n_\Phi = B/\Phi_0$ y, asumiendo una red triangular de vórtices, la distancia entre vórtices será

$$d_\Phi = \sqrt{\frac{2h}{\sqrt{3}eB}}. \quad (5.25)$$

La distancia promedio entre vórtices disminuye a medida que aumenta el campo magnético. El campo crítico B_{c2} , a partir del cual se destruye la superconductividad, se alcanza cuando los vórtices se solapan ($d_\Phi \sim \xi$). A partir de (5.25) se estima que $B_{c2} \sim \Phi_0/\xi^2$.

5.7. Vórtices en el outer core de estrellas de neutrones

Las velocidades de rotación y los campos magnéticos típicos que podemos encontrar en estrellas de neutrones son $\Omega \sim 1 - 10^3$ rad/s y $B \sim 10^{12} - 10^{15}$ G respectivamente. La velocidad crítica (5.7) a partir de la cual se espera que aparezcan vórtices en el superfluido de neutrones es del orden $\Omega_c \sim 10^{-14}$ rad/s. El valor tan pequeño de Ω_c hace pensar que, en principio, todas las estrellas de neutrones en rotación presentarán vórtices en el superfluido

de neutrones. Por ejemplo, en el púlsar Vela se ha medido un periodo de rotación de 89.33 ms (70.34 rad/s). Se estima que el púlsar contendrá una red de vórtices de neutrones con una separación entre vórtices de $d_\Omega \sim 10^{-3}$ cm (ver ecuación (5.9)).

Como se ha visto en la sección 5.3, los protones no formarán una red de vórtices a causa de la rotación, ya que reaccionaran a ésta creando un campo magnético a lo largo de todo el fluido superconductor (campo de London) que la compensará. Este campo puede estimarse a partir de (5.16) y, para el púlsar Vela, es del orden de $B_L \sim 1$ G, muy pequeño en comparación con los campos magnéticos típicos en estrellas de neutrones. Tomando una densidad representativa para el outer core, por ejemplo ρ_0 , la longitud de penetración de London es del orden de $\Lambda \sim 70$ fm y la longitud de coherencia $\xi_p \sim 10$ fm. Como $\Lambda \gg \xi_p$ se espera que los protones formen un superconductor de tipo II en esta región. Para estos valores, el campo crítico B_{c1} (ecuación (5.23)), a partir del cual se crearán vórtices en el superconductor de protones, es del orden de 10^{15} G. Si uno se limita al análisis de órdenes de magnitud realizado, se concluiría que el superconductor de protones en todas las estrellas de neutrones (excepto, quizás, en las magnetoestrellas con campos de 10^{15} G) experimentaría el efecto Meissner y no formaría vórtices en los protones. Sin embargo, se ha argumentado [BPP69] que los tiempos característicos de expulsión del flujo magnético (por difusión) del interior de la estrella de neutrones, formada después de una explosión supernova, son extremadamente largos, del orden de $\tau_{dif} = 4\pi\sigma R^2/c^2 \sim 10^{10}$ años, debido a la alta conductividad eléctrica (σ) del medio estelar. El campo magnético estelar podría haberse confinado en tubos de flujo en una etapa temprana de la estrella y, éstos, permanecerían actualmente congelados en el interior estelar hasta su completa expulsión [GAS10]. Si se supone la presencia de una red de vórtices en los protones, pese a los argumentos expuestos, se puede estimar, a partir de (5.25), que para un campo típico de 10^{12} G la separación entre vórtices de protones es del orden $d_\Phi \sim 10^{-10}$ cm. Para todo el rango de valores (Ω, B) que pueden darse en estrellas de neutrones se cumple que $d_\Phi \ll d_\Omega$. La distancia entre dos vórtices de neutrones contiene entre $10^6 - 10^8$ tubos de flujo de protones. Las distancias d_Ω y d_Φ constituyen dos escalas muy diferentes para el tratamiento hidrodinámico del sistema. En estas condiciones, por ejemplo, puede analizarse el perfil de densidad de un vórtice de protones aislado envuelto en un fluido (continuo) de neutrones. El análisis hidrodinámico sigue siendo aplicable a escalas del orden de la distancia entre vórtices de protones ya que, por pequeña que sea, $d_\Phi \gg \xi_p, \xi_n$.

Las ecuaciones hidrodinámicas presentadas en el capítulo 4, que describen la dinámica superfluida de protones y neutrones acoplados mediante arrastre no disipativo en el outer core, deben modificarse en presencia de rotación y de campo magnético. Las nuevas ecuaciones magnetohidrodinámicas deberán reescribirse en el sistema de referencia en rotación e incorporar términos adicionales debidos a la rotación, al campo y al acoplamiento entre ambos.

6.1. Ecuaciones hidrodinámicas con rotación y campo magnético

En presencia de campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y de rotación $\vec{\Omega}$, las velocidades de neutrones y protones medidas en el sistema rotante son

$$\vec{v}_n = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta_n - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6.1)$$

$$\vec{v}_p = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta_p - \vec{\Omega} \times \vec{r} - \frac{e}{m} \vec{A} \quad (6.2)$$

y las corrientes (4.8) y (4.9), que incorporan los efectos de arrastre, pueden escribirse como

$$\vec{J}_n = \rho_n \vec{v}_n + \rho_{np} \Delta \vec{v} = \rho_n \left(\frac{\hbar}{m} \nabla \theta_n - \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) + \rho_{np} \left(\frac{\hbar}{m} \nabla (\theta_p - \theta_n) - \frac{e}{m} \vec{A} \right), \quad (6.3)$$

$$\vec{J}_p = \rho_p \vec{v}_p - \rho_{np} \Delta \vec{v} = \rho_p \left(\frac{\hbar}{m} \nabla \theta_p - \vec{\Omega} \times \vec{r} - \frac{e}{m} \vec{A} \right) - \rho_{np} \left(\frac{\hbar}{m} \nabla (\theta_p - \theta_n) - \frac{e}{m} \vec{A} \right). \quad (6.4)$$

En lo que sigue, se asume que tanto las velocidades \vec{v}_n y \vec{v}_p como las corrientes \vec{J}_n y \vec{J}_p están medidas en el sistema de referencia que rota solidariamente con la estrella.

Las ecuaciones hidrodinámicas (4.16)-(4.19) en el sistema rotante y en presencia de campo magnético se reescriben como:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_n = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_p = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v}_n + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) + \nabla \left[\frac{\mu_n}{m} - \frac{\hbar^2}{2m} (C_{nn} \nabla^2 \rho_n + C_{np} \nabla^2 \rho_p) + \frac{1}{2} \left(\vec{v}_n^2 - (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - \nu \rho_p \Delta \vec{v}^2 - \nu \rho_p \vec{v}_p \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right) \right] = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v}_p + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \frac{e\vec{A}}{m} \right) + \nabla \left[\frac{\mu_p + e\Phi}{m} - \frac{\hbar^2}{2m} (C_{pp} \nabla^2 \rho_p + C_{np} \nabla^2 \rho_n) + \frac{1}{2} \left(\vec{v}_p^2 - (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - \nu \rho_n \Delta \vec{v}^2 - \frac{e\vec{A}}{m} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \nu \rho_n \vec{v}_n \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} + \frac{e\vec{A}}{m} \right) \right) \right] = 0. \quad (6.8)$$

Es fácil ver que se recuperan las ecuaciones (4.16)-(4.19) cuando $\vec{\Omega} = 0$ y $\vec{A} = 0$. El campo magnético debe satisfacer, además, las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 e (\vec{J}_p - \vec{J}_e), \quad (6.10)$$

donde $\vec{J}_e = \rho_e \vec{v}_e$ es la densidad de corriente de electrones. La ecuación de Ampere (6.10) puede escribirse en términos del potencial vector, en el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, como




$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 e (\vec{J}_p - \vec{J}_e). \quad (6.11)$$

El sistema (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) y (6.11) puede resolverse de manera autoconsistente para obtener $\{\vec{v}_n, \vec{v}_p, \rho_n, \rho_p, \vec{A}\}$.

6.2. Vórtice aislado de protones

En esta sección se examina la estructura y el impacto de los vórtices de protones (tubos de flujo) en el superfluido de dos componentes del outer core de las estrellas de neutrones, empleando la descripción magnetohidrodinámica presentada en la Sección 6.1. El análisis se centra en el caso en que las escalas características del superconductor de protones, tanto fermiónica como bosónica, son comparables ($\xi_p \sim \lambda_{Fp}$), lo que permite modelar los vórtices mediante una única escala de longitud. Esta simplificación facilita el estudio de las perturbaciones hidrodinámicas inducidas en el superfluido de neutrones subyacente. Dado que las velocidades de rotación típicas de las estrellas de neutrones generan una baja densidad de vórtices en el superfluido de neutrones del outer core (ver ecuación (5.8)), la mayoría de los vórtices inducidos por el campo magnético estelar en el superconductor de protones aparecen como estructuras aisladas a la escala de ξ_p , sin un vórtice de neutrones compañero. Este trabajo examina la estructura de estos vórtices de protones, los cuales están atravesados por líneas de flujo magnético en una configuración característica de un superconductor de tipo II, donde la longitud de penetración de London es considerablemente mayor que la longitud de coherencia del superconductor ($\Lambda \gg \xi_p$). Debido al efecto de arrastre, la densidad de corriente \vec{J}_p en (6.11) incluye una contribución de la velocidad del superfluido de neutrones, lo que modifica tanto la densidad total de corriente de carga como el campo magnético estelar global. Además de determinar el perfil del campo magnético y el flujo que atraviesa estos vórtices, se estudia cómo la estructura del vórtice se ve influenciada por valores realistas de la rotación angular de la estrella y la intensidad del campo magnético. Nuestros resultados numéricos, obtenidos al resolver las ecuaciones (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) y (6.11) para una densidad característica de $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, indican que el vórtice de protones induce una perturbación leve en la densidad de neutrones, del orden del 1%. Además, se generan corrientes del orden de $10^{-4} c \text{ fm}^{-3}$ tanto en los protones como en los neutrones, siendo estas últimas atribuibles principalmente al arrastre no disipativo. El campo magnético exhibe un pico pronunciado en el núcleo del vórtice y decrece exponencialmente con una longitud característica de aproximadamente 70 fm, significativamente mayor que el radio del vórtice (unos 10 fm), lo cual permite sostener un cuanto de flujo magnético $h/2e$ a través de la superficie que lo rodea. A pesar de los valores aparentemente extremos del campo magnético y de la rotación, sus efectos no alteran de forma apreciable la estructura del vórtice.

Half-vortex states in the rotating outer core of neutron stars

J. A. Gil Granados ^{1,2}, A. Muñoz Mateo ^{3,4} and X. Viñas ¹

¹*Departament de Física Quàntica i Astrofísica, Facultat de Física, Universitat de Barcelona, E-08028 Barcelona, Spain*

²*Institut de Ciències del Cosmos, Universitat de Barcelona, ICCUB, 08028-Barcelona, Spain*

³*Departamento de Física, Universidad de La Laguna, E-38200 La Laguna, Spain*

⁴*Instituto Universitario de Estudios Avanzados, IUDEA, Universidad de La Laguna, E-38205 La Laguna, Spain*



(Received 10 March 2025; accepted 8 May 2025; published 2 June 2025)

We probe the superfluid-superconductor dynamics of the rotating outer core of neutron stars through half-vortex states. By means of a generalized hydrodynamic model, where proton and neutron fluids are coupled by both dynamic entrainment and Skyrme SLy4 nucleon-nucleon interactions, we analyze single flux tubes in the proton-superconductor component of the system that thread proton vortices located faraway from neutron vortices. It is shown how they give rise to hydrodynamic perturbations in the coexisting neutron superfluid, and its structure remains unaltered for varying rotation rates and magnetic fields within ranges of observational values.

DOI: [10.1103/PhysRevC.111.065802](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.111.065802)

I. INTRODUCTION

Quantized vortices are the signature of superfluidity in quantum degenerated matter systems. They were first observed in type II superconductors in the presence of a magnetic field [1], and in superfluid helium when subjected to rotation [2]. Much later, in ultracold atomic gases under highly controlled experimental conditions, isolated quantum vortices, either singly [3,4] or multiply charged [5], and vortex arrays [6–8] were observed in Bose-Einstein condensates (BECs), and also in strongly interacting quantum degenerate Fermi gases [9,10], even in the presence of spin-population imbalance [11]. In these systems, isolated vortices can be generated by phase imprinting techniques, while vortex arrays were usually produced by rotating the atomic cloud. More recently, the realization of synthetic gauge potentials, which simulate electromagnetic fields acting on neutral atoms, opened a new path to observe quantum vortex arrays [12].

Both agents of vortex excitation, rotation and magnetic field, as high as 10^2 – 10^3 Hz and 10^{12} – 10^{15} G, respectively [13], are naturally present in neutron stars [14], whose inner layers, crust and core, are hypothesized to show superfluid dynamics. This assumption was made plausible after the observation of the rotational frequency of pulsars, as measured from radio wave signals [15]. It showed sudden spin-ups followed by relatively large relaxation times, of the order of days or months. In order to explain these events, called pulsar *glitches*, Anderson and Itoh suggested almost 50 years ago [16] that they could be due to vortex creeping in the inner crust of neutron stars. This layer consists of positively charged nuclear clusters, with different geometries, embedded in free electron and neutron fluids at temperatures of the order of 10^8 K; neutrons achieve sub-nuclear saturation densities, and they are expected to be in a superfluid state [14].

Deeper below the crust, the star's outer core involves at least three intermingled fluids: superfluid neutrons, superconductor protons, and a normal, but relativistic, electron fluid. The neutron and proton components are mutually coupled, apart from nucleon-nucleon interactions, by entrainment effects, as it happens in superfluid mixtures of ^4He and ^3He [17]. Also as in superfluid helium or in ultracold gases, the natural rotation of the neutron superfluid triggers the formation of an array of quantized vortices beyond a rotation threshold. In addition, as in type II superconductors, strong magnetic fields are believed to have induced an array of metastable quantized flux tubes (or Abrikosov vortices) in the superconducting protons since early stages of the neutron star formation. As we know from the BCS theory [18], superconductivity in Fermi fluids (or superfluidity for neutral particles) is driven by an emerging bosonic pairing field, the order parameter, associated with the creation of Cooper pairs of fermions, and mediated by interparticle interactions, which causes an energy gap in the spectrum of excitations. For electrically charged systems, the electromagnetic gauge field combines with the $U(1)$ symmetry of the order parameter to preclude collective excitations in the energy gap [19]. In neutron stars, the strong nuclear interaction provides several channels in which such a pairing is possible. At lower densities, in the inner crust, the Cooper pairs of neutrons should be mainly in the 1S_0 state [20]. In the outer core, where neutrons and protons settle in β equilibrium, superfluid protons remain also at “small” densities and so again they should pair in the 1S_0 channel. However, since outer-core-neutron densities are about or larger than nuclear saturation density, the neutron superfluid would mainly occur in the 3P_2 – 3F_2 channel. Maximum pairing gaps reached by S -proton pairs, as computed with microscopic interactions, are about $\Delta_p \approx 1$ MeV at baryon densities $\rho_b \approx 0.12 \text{ fm}^{-3}$, which corresponds to a Fermi wave number $k_{Fp} \approx 0.7$ – 0.8 fm^{-1} , while for the

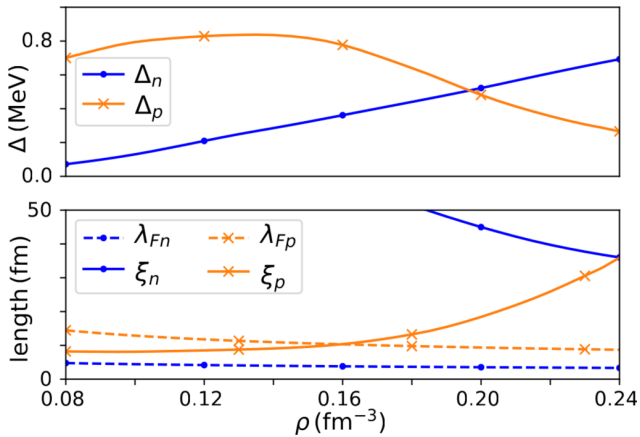


FIG. 1. Fermionic pairing and characteristic length scales in the outer core. The Fermi wavelengths $\lambda_{F\sigma}$ and the coherence lengths ξ_σ with $\sigma = p, n$, are estimated from the superfluid densities ρ_σ and the fermionic pairings Δ_σ (top panel, as reported in Ref. [21]).

PF -neutron pairs the numerical results produce clearly smaller values $\Delta_n \approx 0.6$ MeV at $\rho_b \approx 0.24$ fm^{-3} with $k_{Fn} \approx 2$ fm^{-1} [18,22] (see Fig. 1).

Pairing fields Δ_σ and particle densities ρ_σ (where $\sigma = n, p$, correspond to neutrons and protons, respectively) are associated with characteristic length scales: coherence (or healing) length $\xi_\sigma = \hbar^2 k_F / (\pi m \Delta_\sigma)$ and Fermi wavelength $\lambda_{F\sigma} = 2\pi k_{F\sigma}^{-1}$, respectively, that shape the vortex lines of the superfluids. The typical vortex core size (see, e.g., Ref. [23]) is of the order of the coherence length ξ_σ , whereas density inhomogeneities are characterized by the bulk value of the Fermi wavelength λ_F (see Fig. 1 for the typical values in the outer core). Numerical calculations in the BCS-BEC crossover of ultracold atoms show, by solving self-consistently the Bogoliubov–de Gennes equations [24,25], how the interplay of these lengths is particularly manifest in the structure of the vortex core within the BCS limit. In this latter regime, although the pairing vanishes at the vortex core, the fermionic density does not, due to the localization of fermionic Andreev (also named Caroli–de Gennes–Matricon) bound states [23,26]. This is also the situation found in neutron stars, as shown, for instance, in Ref. [27], where the spatial structure of a vortex is obtained by a self-consistent approach at low neutron-matter density in the inner crust. It was found that the profile of the pairing field, related to the order parameter, vanishes at the vortex axis, while the matter density only shows a partial depletion [28]. Notice that this fermion-vortex features contrast with those of vortices in bosonic diluted gases, where both, pairing field and matter density profiles, vanish at the vortex axis owing to the fact that the order parameter is directly related to the bosonic density. The aforementioned fermion-vortex features have been also reported in other microscopic calculations of isolated vortices in the inner crust [29,30], including finite temperature effects [28] and vortex dynamics [31]. However, as far as we know, the study of vortex structures in the outer core, where the superfluid dynamics involves a two-component system, are at least scarce, and mainly focus on the collective effect of vortices

and vortex lattices [13,32–39], though some features related to the energy and the magnetic field of single flux tubes in rotating superconductors have been revealed [35,40,41].

Since the rotation rate and the magnetism of a neutron star are assumed to produce vortex lattices in its superfluid layers, additional relevant length scales arise from the separation between neutron and proton vortices in these lattices, which are estimated to be [35]

$$\begin{aligned} d_n &\approx 4 \times 10^{-4} \left(\frac{P}{1 \text{ ms}} \right)^{1/2} \text{ cm}, \\ d_p &\approx 5 \times 10^{-10} \left(\frac{\bar{B}}{10^{12} \text{ G}} \right)^{-1/2} \text{ cm}, \end{aligned} \quad (1)$$

respectively, where P is the rotational period, and \bar{B} is the average magnetic field. For example, for the Vela pulsar, whose measured rotational period is 89.33 ms, the spacing between neutron vortices is estimated to be 10^{-3} cm, while, assuming a typical average magnetic field of 10^{12} G, the distance between proton vortices should be around 10^{-10} cm. This estimate indicates that proton-vortex (or fluxtube) arrays would densely fill up the space between neutron vortices. Then, it seems plausible to consider proton vortices lying between faraway neutron vortices. Similarly as in other multicomponent superfluids [42], we will refer to this topological defect, a proton-superconductor vortex without overlapping neutron-superfluid vortex, as a half-quantized vortex in the two-component superfluid of the outer core. In this case, the Fermi wavelength and the healing distance in the superconducting fluid are typically of the order of 10 fm, much smaller than the intervortex proton spacing, which, in turn, is assumed to be several orders of magnitude smaller than the neutron vortex separation. As a consequence of the entrainment as well as of the nuclear interactions, the proton vortex is expected to produce a long wavelength perturbation in the much denser neutron superfluid.

In the present paper, we contribute to the characterization of the structure and the effect of half-quantized vortices in the two-component superfluid of the outer core of neutron stars within a generalized hydrodynamic description. The model includes the dynamical entrainment and the effective nucleon-nucleon interaction (of Skyrme type SLy4) between superfluid neutrons and superconductor protons; the dynamical variables are the density and velocity, gathered in a complex order parameter of the neutron and proton Cooper pairs. Essentially the same model was recently used in the exploration of the long wave length excitations of the outer-core superfluid [43]. Since this approach cannot provide independent microscopic information on the differences between the density of fermions and the corresponding order parameter, we restrict our focus on study cases where the typical fermionic and bosonic length scales of the proton fluid approximately match. This fact allows us to consider proton-superconductor vortices characterized by a single length scale, which produce hydrodynamic perturbations on the underlying neutron superfluid. The influence of realistic angular rotation and electromagnetic fields on the vortex structure is considered.

The paper is structured as follows. In Sec. II, first we derive the equations of motion in terms of the system's order

parameters in the absence of rotation and magnetic field; these quantities are introduced later in the model to better show their effects. In Sec. III we discuss the predictions of our model, present our numerical calculations of a proton vortex in the outer core, and compare with the literature. Finally, Sec. IV presents the summary and prospects of future work. The Appendixes A–D are devoted to featuring our choice for the effective nuclear interaction, the effect of entrainment in the energy density through a toy model, the corresponding hydrodynamic equations of our system, and details of the performed numerical simulations, respectively.

II. MODEL OF THE SUPERFLUID OUTER CORE

Neutron and proton superfluids will be described by two complex order parameters ψ_n and ψ_p , respectively. From them, superfluid densities and velocity fields are obtained as $\rho_\sigma = |\psi_\sigma|^2$, and $\vec{v}_\sigma = \hbar \nabla \theta_\sigma / m$, respectively, where $\theta_\sigma = \arg \psi_\sigma$, and m is the nucleon mass. The system energy follows from the energy functional, $E[\psi_n, \psi_p] = \int \mathcal{H} d^3r$, whose energy density, in the absence of rotation and electromagnetic field, reads

$$\mathcal{H}_{pn} = \frac{1}{2\tilde{m}_n} |\hat{p} \psi_n|^2 + \frac{1}{2\tilde{m}_p} |\hat{p} \psi_p|^2 + v m \vec{j}_n \cdot \vec{j}_p + \epsilon_{\text{nuc}}, \quad (2)$$

where \tilde{m}_σ is a short notation for the effective masses $\tilde{m}_n = m/(1 - v\rho_p)$ and $\tilde{m}_p = m/(1 - v\rho_n)$ (see Appendix B), $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ is the canonical momentum operator, $\vec{j}_\sigma = \text{Re}\{\psi_\sigma^* \hat{p} \psi_\sigma\}/m = \rho_\sigma \vec{v}_\sigma$ are the current densities of each component when considered as separated fluids, and v (with units of volume) is the entrainment parameter that depends on the nuclear interaction, which is in turn encapsulated in the energy term $\epsilon_{\text{nuc}} = \epsilon_{\text{nuc}}(\rho_\sigma, \nabla \rho_\sigma)$ (see Appendix A for details). Equation (2) gathers interaction terms up to second order in the gradients of the order parameters [44], and explicitly features the contribution of entrainment to the kinetic energy, through the effective masses in the first two terms, and to the coupling between current densities, in the third term.

Entrainment contributions are imposed by the Galilean invariance of the coupled system, which demands current densities \vec{J}_σ for each component that involve both superfluid velocities \vec{v}_n and \vec{v}_p [17], as

$$\begin{aligned} \vec{J}_n &= \vec{j}_n + \vec{j}_{np}, \\ \vec{J}_p &= \vec{j}_p - \vec{j}_{np}, \end{aligned} \quad (3)$$

where $\vec{j}_{np} = v\rho_n\rho_p(\vec{v}_p - \vec{v}_n)$ is the entrainment current density, and satisfy the continuity equations (see Appendix C)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_n &= 0, \\ \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_p &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

These expressions state, in this nonrelativistic approach, the independent conservation of the number of neutrons and protons. Notice that while the total particle current $\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = \vec{j}_n + \vec{j}_p = \rho_n \vec{v}_n + \rho_p \vec{v}_p$ does not depend on entrainment, the relative current density does: $\vec{J}_n - \vec{J}_p = \vec{j}_n - \vec{j}_p + 2\vec{j}_{np}$.

The equations of motion follow from the variation of the total energy density Eq. (2), $\delta \mathcal{H} / \delta \psi_\sigma^* = i\hbar \partial_t \psi_\sigma$, which produces generalized, coupled Ginzburg-Landau (or Gross-Pitaevskii) equations

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} &= \mu_n \psi_n - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_n \\ &\quad - \frac{\hbar^2 v}{2m} [|\nabla \psi_p|^2 \psi_n - \nabla(\rho_p \nabla \psi_n)] \\ &\quad - \frac{i\hbar v}{2} [\vec{j}_p \nabla \psi_n + \nabla(\vec{j}_p \psi_n)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_p}{\partial t} &= \mu_p \psi_p - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_p \\ &\quad - \frac{\hbar^2 v}{2m} [|\nabla \psi_n|^2 \psi_p - \nabla(\rho_n \nabla \psi_p)] \\ &\quad - \frac{i\hbar v}{2} [\vec{j}_n \nabla \psi_p + \nabla(\vec{j}_n \psi_p)], \end{aligned} \quad (6)$$

where we have introduced the (generalized) chemical potentials

$$\mu_\sigma = \frac{\partial \epsilon_{\text{nuc}}}{\partial \rho_\sigma} - \nabla \cdot \frac{\partial \epsilon_{\text{nuc}}}{\partial \nabla \rho_\sigma}, \quad (7)$$

that include contributions from the density, $\partial \epsilon_{\text{nuc}} / \partial \rho_\sigma$, and the density-gradient, $\vec{Q}_\sigma = -\nabla(\partial \epsilon_{\text{nuc}} / \partial \nabla \rho_\sigma)$, dependence of the nuclear interaction energy SLy4; explicitly, the latter contributions are $\vec{Q}_p = -\hbar^2(\vartheta_{pp}^0 \nabla^2 \rho_p + \vartheta_{np}^0 \nabla^2 \rho_n)/(2m)$ and $\vec{Q}_n = -\hbar^2(\vartheta_{nn}^0 \nabla^2 \rho_n + \vartheta_{np}^0 \nabla^2 \rho_p)/(2m)$, where the coefficients ϑ_{ij}^0 are obtained from the parametrization of the interaction (see Appendix A). As a whole, the right hand sides of Eqs. (5)–(6) reflect an involved coupling between the two superfluids due to entrainment effects.

A. Rotating superfluids subjected to a magnetic field

The star's rotation and magnetic field are introduced in the model, in a minimal coupling approach, through the kinetic (or mechanical) momentum operators

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \hat{p} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r}), \\ \hat{\Pi}_A &= \hat{p} - m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) - e\vec{A}, \end{aligned} \quad (8)$$

where $\vec{\Omega}$ is the angular velocity of the star, \vec{A} is the electromagnetic vector potential, and e is the unit electric charge. By means of Eq. (8), the energy density (2) is just rewritten in the rotating frame of reference with the replacements $\hat{p} \psi_n \rightarrow \hat{\Pi} \psi_n$ and $\hat{p} \psi_p \rightarrow \hat{\Pi}_A \psi_p$, and the generalized currents of the independent superfluids, $\vec{J}_n = \text{Re}(\psi_n^* \hat{\Pi} \psi_n / m) = \rho_n(\hbar \nabla \theta_n / m - \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \rho_n \vec{v}_n$ and $\vec{J}_p = \text{Re}(\psi_p^* \hat{\Pi}_A \psi_p / m) = \rho_p(\hbar \nabla \theta_p / m - \vec{\Omega} \times \vec{r} - e\vec{A} / m) = \rho_p \vec{v}_p$. In addition (see Appendix B), the energy density gets an energy shift given by

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_{pn} &= -\psi_n^* \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \psi_n - \psi_p^* \\ &\quad \times \left[\frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + e\vec{A}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right] \psi_p. \end{aligned} \quad (9)$$

On the other hand, to obtain the corresponding Maxwell equations, the energy of the electromagnetic field and the electron contributions have to be considered. Hence, the total energy density becomes

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pn} + \Delta\mathcal{H}_{pn} + e(|\psi_p|^2 - n_e)\Phi + e\vec{J}_e \cdot \vec{A} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}, \quad (10)$$

where Φ is the scalar electromagnetic potential, μ_0 is the magnetic permeability, and (n_e, \vec{J}_e) are the electron density and electron current density, respectively. The resulting generalized Ginzburg-Landau Eqs. (5)–(6), expressed in the rotating frame of reference, become

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \mu_n \psi_n + \frac{\hat{\Pi}^2 \psi_n}{2m} - \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \psi_n + v \left[\frac{|\hat{\Pi}_A \psi_p|^2}{2m} \psi_n + \frac{1}{2} \vec{J}_p \hat{\Pi} \psi_n + \frac{1}{2} \hat{\Pi} (\vec{J}_p \psi_n) + \frac{i\hbar}{2m} \nabla (\rho_p \hat{\Pi} \psi_n) \right], \quad (11)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = (\mu_p + e\Phi) \psi_p + \frac{\hat{\Pi}_A^2 \psi_p}{2m} - \left[\frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + e\vec{A} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right] \psi_p + v \left[\frac{|\hat{\Pi} \psi_n|^2}{2m} \psi_p + \frac{1}{2} \vec{J}_n \hat{\Pi}_A \psi_p + \frac{1}{2} \hat{\Pi}_A (\vec{J}_n \psi_p) + \frac{i\hbar}{2m} \nabla (\rho_n \hat{\Pi}_A \psi_p) \right]. \quad (12)$$

while the resulting Ampere's law $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 e (\vec{J}_p - \vec{J}_e)$ can be written in terms of the vector potential, in the Coulomb gauge $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, as

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 e (\vec{J}_p - \vec{J}_e), \quad (13)$$

where \vec{J}_e is the current density of electrons. The coupled equations (11)–(13) have to be self-consistently solved for the set $\{\psi_n, \psi_p, \vec{A}\}$.

B. Vortices

Vortices are featured by the quantized winding of the phase θ_σ around singular points that trace the vortex cores, where the phase is not uniquely defined. Since the order parameters are single-valued functions, the phase jumps in integer multiples of 2π , that is $\oint \vec{d}\ell \cdot \nabla \theta_\sigma = 2\pi q$, where $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ is the winding number. Usually, we will refer to singly quantized vortices, with $q = 1$, because vortices with winding numbers larger than one are not energetically stable (see for instance Ref. [45]). In the absence of rotation and magnetic field, the quantized winding of the phase around the vortex core translates also into a quantized velocity circulation $\Gamma_\sigma \equiv \oint \vec{d}\ell \cdot \vec{v}_\sigma = (\hbar/m) \oint \vec{d}\ell \cdot \nabla \theta_\sigma = (2\pi \hbar/m) q$. However, this is not the general case when the kinetic momentum, as defined in Eq. (8), have additional contributions apart from the canonical momentum.

In the presence of rotation and magnetic field, energy minimization with respect to the velocity fields, assuming constant densities, leads to vanishing superfluid velocities $\vec{v}_n = \vec{v}_p = 0$ [44], hence to

$$\frac{\hbar}{m} \nabla \theta_n = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (14)$$

$$\frac{\hbar}{m} \nabla \theta_p - \frac{e}{m} \vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (15)$$

Equation (14) is complied with by means of quantum vortices in the neutron superfluid, so it generates vorticity through singular phase lines in the neutron phase θ_n that balance the otherwise unbalanced vorticity $2\vec{\Omega}$ introduced by the angular

velocity. The ratio between the total flux of this vorticity (or equivalently, the circulation of the velocity) and the circulation per vortex Γ_n determines the inter-vortex distance d_n of Eq. (1). On the other hand, the gauge invariance of the proton wave function prevents the appearance of proton vortices due to rotation in the absence of an overall magnetic field (that would have $\vec{A} = 0$). Instead, the generation of surface currents gives rise to the so-called London's magnetic field \vec{B}_L , which [from taking the curl of Eq. (15) for an emergent vector potential \vec{A}_L] and by fulfilling

$$\frac{e\vec{B}_L}{m} = -2\vec{\Omega}, \quad (16)$$

is capable of balancing rotation, so that the protons do not move in the rotating frame. Due to the typical rotation rates $|\Omega| \approx 100$ Hz, this magnetic field takes small values, $|B_L| \approx 0.1$ – 1 G, in comparison with the typical magnetic fields of neutron stars inferred from observations. The latter fields are believed to be trapped in the superconducting star interior since early, non-superconducting stages of the star [14], and have to satisfy Ampere's law Eq. (13). Because of entrainment, the current density \vec{J}_p includes a contribution from the superfluid neutron velocity, which contributes also to the total charge current density and so to the overall stellar magnetic field. The associated magnetic flux threads the star outer core through flux tubes along the core of quantum vortices in the proton superconductor (assumed to behave as a type II superconductor [14]). The ratio between the total magnetic flux (as computed by the average magnetic field \vec{B} inferred from observations) and the flux quantum per vortex $\phi_0 = 2\pi \hbar/e$ determines the proton inter-vortex distance d_p in Eq. (1). The angular frequency of the cyclotron orbits, ω_B , provides the characteristic time $\omega_B^{-1} = (e|\vec{B}|/m)^{-1}$ and length $\ell_B = \sqrt{\hbar/(m\omega_B)} = \sqrt{\hbar/(e|\vec{B}|)}$ scales of the magnetic field.

Proton supercurrents around vortex lines preserve superconductivity in the presence of strong magnetic fields, which enter the bulk only up to small length scales Λ . This can be seen, by assuming constant densities and point-like vortices in Eq. (13), and using Eqs. (3) and (8), in the resulting London

equation for the magnetic field (see, e.g., Ref. [46])

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\Lambda^2} = -\frac{\phi_0}{\Lambda^2} \delta(\vec{r}) - \mu_0 e \nu \rho_n \rho_p 2\vec{\Omega} \quad (17)$$

with a source term that consists of a proton vortex and a neutron vorticity (assumed to take the average value $2\vec{\Omega}$). The London penetration depth is calculated as $\Lambda = \sqrt{m} [\mu_0 e^2 \rho_p (1 - \nu \rho_n)]^{-1/2}$, and takes values of the order $\Lambda \approx 74$ fm at $\rho = 0.16$ fm $^{-3}$ (or ≈ 50 fm at higher density $\rho = 0.24$ fm $^{-3}$ [44]). As a result, magnetic-field maxima of the order of $B_v \approx \phi_0 / (2\pi \Lambda^2) \approx 10^{15}$ G $\gg \vec{B}$ are estimated to peak at proton-vortex cores, as expected from a penetration length ($\Lambda \propto \sqrt{B/B_v} d_p \approx 10^{-2} d_p$) significantly smaller than the distance between proton vortices d_p .

III. PROTON VORTICES IN THE OUTER CORE

Although neutron and proton vortices can overlap producing a quantum vortex that winds the total phase of the system twice (2π per component) around the vortex core, single vortex excitations that winds only one of the two component phases (so just 2π in one component's phase and no winding in the other) are also possible. This latter configuration is the object of our study, and is referred to as half-quantized vortex or just half-vortex. From a symmetry-based perspective, the difference in phase winding is associated with the existence of two $U(1)$ symmetries, so an overall $U(1) \otimes U(1)$ symmetry, which are broken by the Bose condensed fluids of neutrons and protons (see for instance Ref. [42]).

We focus on a study case where the typical fermionic, λ_{Fp} , and bosonic, ξ_p , length scales of the proton superconductor are the same (as obtained within the Skyrme SLy4 interaction). As can be seen in Fig. 1, such a matching occurs deep in the outer core for a nucleon density of $\rho \approx 0.16$ fm $^{-3}$, where $\lambda_{Fp} \approx \xi_p = 10.3$ fm. Due to the strong asymmetry, $\delta = 0.9$, the presence of a proton vortex is expected to produce just a hydrodynamic perturbation in the underlying neutron superfluid, whose typical length scale is much smaller $\lambda_{Fn} = 3.8$ fm. Under these conditions, the structure of a proton vortex can be plausibly characterized within our model, and so we will analyze straight vortex lines that are assumed to be invariant along the z coordinate (which we ignore from now on). A proton vortex centered at position $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ in an XY plane, can be described by an order parameter $\psi_p(\vec{r}) = \sqrt{\rho_p(\vec{r})} \exp(i\varphi)$, whose phase is given by the angle around the center $\theta_p = \varphi = \arctan[(y - y_0)/(x - x_0)]$, whereas its density vanishes at the vortex core $\rho_p(\vec{r}_0) = 0$, and, far from it, for $|\vec{r} - \vec{r}_0|/\xi_p \gg 1$, recovers the bulk proton density $\rho_p^0 = 7.66 \times 10^{-3}$ fm $^{-3}$. With these constraints, Fig. 2 shows our numerical results after solving Eqs. (11)–(13) for a proton vortex subjected to angular rotation rate $\Omega = 100$ Hz and average magnetic field $|\vec{B}| = 10^{12}$ G (see Appendix D for details about the numerical method). The neutron superfluid, as expected, shows only a very small density depletion ($\approx 1\%$ with respect to the bulk value $\rho_n^0 = 0.152$ fm $^{-3}$) at the position of the proton vortex. The observed depletion is mainly due to the the entrainment coupling between components. Since close to the half-vortex axis the entrainment contributes with a nonzero current density to the stationary neutron continuity equation (4), this extra

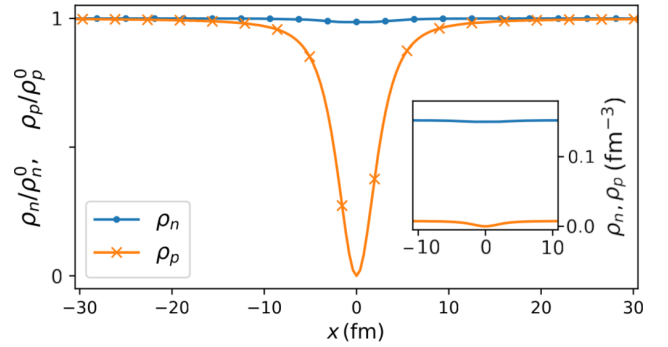


FIG. 2. Cross section of a half-vortex state in the superfluid-superconductor mixture of neutrons and protons at typical nuclear-matter density in the outer core of neutron stars. The vortex is excited in the proton superconductor and produces a hydrodynamic perturbation in the much denser neutron superfluid. The graph shows scaled densities with respect to the respective bulk-density values of neutron and protons, ρ_n^0 and ρ_p^0 , whereas the inset shows the density profiles in absolute units.

current is accompanied by a corresponding neutron density reduction in order for the equation to be satisfied. With regard to the stellar rotation and magnetism, despite their apparent high values, their influence on the vortex structure is negligible. We have checked that the vortex structure shown in Fig. 2 remains unaltered for varying rotation rates and magnetic fields within ranges of realistic values 10^2 – 10^3 Hz and 10^{12} – 10^{15} G, respectively. This results (or absence of effects) can be understood by computing the respective typical length scales, $\ell_\Omega = \sqrt{\hbar/(m|\Omega|)} = 2.5 \times 10^{10}$ fm and $\ell_B = 2.6 \times 10^3$ fm, which reflect negligible energy contributions (proportional to ℓ^{-2}) against the typical vortex energies (proportional to ξ_p^{-2}).

Characteristic values of the fluid velocity and current density around the vortex core can be estimated from $v_p \approx \hbar/(m\xi_p) = 0.02$ c, $j_p = \rho_p v_p \approx 10^{-4}$ fm $^{-3}$ c, and $j_{np} \approx \nu \rho_n \rho_p v_p \approx -0.24 j_p$, so that the overall proton current density estimate is $J_p \approx 10^{-4}$ fm $^{-3}$ c; the magnetic field has nearly no contribution to the velocity, since $v_B = \ell_B \omega_B \approx 8 \times 10^{-5}$ c. Our numerical results produce current peak values that are consistent with these estimates and are accompanied by long tails, as can be seen in Fig. 3, which shows the current density and magnetic field profiles around the proton vortex depicted in Fig. 2. The bottom panel represents the total neutron and proton current densities, whose contributions [according to Eq. (3)] are separately plotted in the top panel. The long tails show the peak currents reduced to half their values at distances $\xi_p \approx 10$ fm away from them, and are consistent with slower decays of the magnetic field according to the larger penetration length $\Lambda \approx 70$ fm estimated after Eq. (17). The magnetic flux produced by this varying magnetic field gives rise to one quantum of flux ϕ_0 per vortex, the same flux associated with the observed average field. As can be seen, due to the entrainment, non-negligible neutron currents settle around the proton vortex, which by means of the continuity equation are translated into the small neutron-density variations observed in Fig. 2.

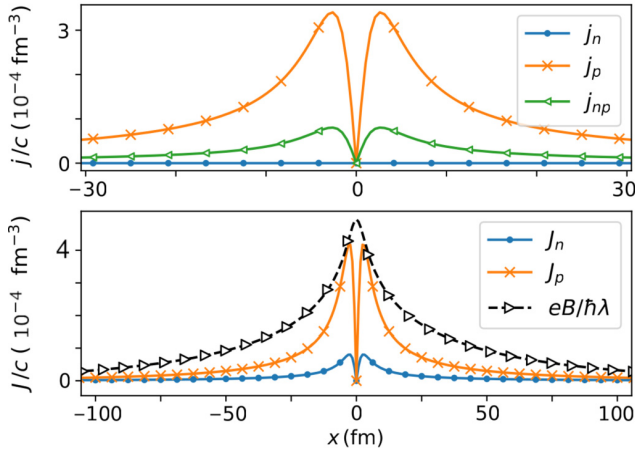


FIG. 3. Particle current densities corresponding to the proton vortex shown in Fig. 2. The top panel depicts the currents of the independent neutron \vec{j}_n and proton \vec{j}_p fluids, along with the entrainment current \vec{j}_{np} . The bottom panel shows the current densities of neutron \vec{J}_n and protons \vec{J}_p in the coupled system, as defined in Eqs. (3)–(4), along with the magnetic \vec{B} field threading the vortex [where $\lambda = 2\pi\hbar/(mc)$ is the Compton wavelength].

Although our results have been obtained for the typical core density of $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, some general features can be extrapolated to other densities in the core whenever the proton vortex size (proton coherence length) is clearly larger than the neutron Fermi wave length. In these situations, the neutron density is expected to experience similar small depletions due to the entrainment effects produced by the proton vortex. On the contrary, when proton and neutron vortices overlap, both fermionic densities are expected to become significantly depleted due to the overall high current density affecting the whole system. It is also worth commenting on the differences between a proton vortex and a neutron vortex (as estimated in Ref. [44]), since in the latter the threading magnetic flux is reduced by a factor of $v\rho_n/(1-v\rho_n)$, thus by 0.19 at $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, with respect to the former [44]. Therefore, while we obtain magnetic-field peaks of magnitude $B_v \approx 4 \times 10^{15} \text{ G}$ at the proton-vortex core, lower values would be expected at the corresponding neutron-vortex core. Figure 4 depicts the carpet plot of the magnetic field showing the constrained flux around the vortex core located at the origin $\vec{r}_0 = (0, 0)$.

IV. CONCLUSIONS

Since typical rotation rates of neutron stars give rise to a low density of vortices in the outer-core neutron superfluid, most of the flux tubes produced by the star magnetic field in the accompanying proton superconductor thread single proton vortices that do not have a neutron vortex partner. We have analyzed the structure of these half-vortices in a typical configuration of a type-II superconductor, where the London penetration length Λ is much larger than the superconductor healing length ξ_p . By means of a generalized hydrodynamic model that includes the effects of neutron-proton entrainment and Skyrme SLy4 interactions, and through numerical sim-

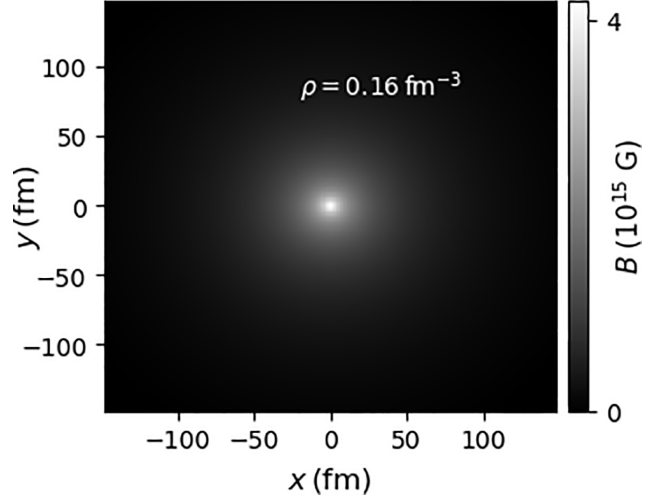


FIG. 4. Single magnetic field flux tube threading the proton vortex described in Figs. 2 and 3.

ulations that search for stationary quantum vortex states, we have characterized the microscopic structure of the half-vortex in a region of the star's outer core with nuclear density $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, where the typical length scales of proton pairing and Fermi wave number match, $k_{Fp} = \xi_p \approx 10 \text{ fm}$. It is shown how an isolated proton vortex produces a perturbative depletion in the underlying neutron superfluid, and generates particle currents that are increased by the nondissipative dragging of neutrons. Although the exponential decay of the magnetic field away from the vortex core extends up to typical lengths of several London penetration lengths, $\Lambda \approx 70 \text{ fm}$, over which one quantum of magnetic flux ϕ_0 and typical average values of $\vec{B} = 10^{12} \text{ G}$ are achieved, the length of the magnetic field's tail is still orders of magnitude smaller than the expected distance between neutron vortices $d_n \approx 10^{-4} \text{ cm}$. Despite the apparent very high values (although consistent with observations) of both the rotation and the magnetic field considered, and due to the (even higher) nuclear densities of the outer core, the revealed structure of the vortex remains practically unaltered with respect to varying (or even the absence of) both rotation and magnetic field intensity.

Our generalized hydrodynamic model provides a mesoscopic picture of the interplay between superfluid neutrons and superconductor protons in the outer core. As such, this picture does not include damping effects that can be directly associated with macroscopic nonequilibrium phenomena observed in the dynamics of neutron stars, like glitches. Nevertheless, there is an increasing interest to discern the cause of this latter phenomenon, assuming that it is connected with neutron vortices pinned to the inner crust, and there is no clear role of the star's outer core [47–49]. In this direction, the present work contributes to understand features of the outer core that can be relevant for its overall dynamics. In addition, our model can contribute to characterize aspects of the thermal history of neutron stars similarly as in Ref. [50]. Prospects of future work involve this problem along with further microscopic characterization of single half vortices

by means of Hartree-Fock-Bogoliubov models, where both the fermionic and the bosonic sectors of the coupled Fermi systems are included, so that fermion densities and pairing fields can be separately revealed.

DATA AVAILABILITY

No data were created or analyzed in this study.

APPENDIX A: SLY4 INTERACTION

These Skyrme forces describe effectively the nuclear interaction and provide the equation of state of a neutron star [51,52]. Its energy density,

$$\epsilon_{\text{nuc}} = \mathcal{H}^\rho + \mathcal{H}^\nabla, \quad (\text{A1})$$

contains terms that depend on the nuclear densities $\mathcal{H}^\rho(\rho_\sigma)$ and also terms that depend on the gradients of the neutron and proton densities $\mathcal{H}^\nabla(\nabla\rho_\sigma)$, and so the latter vanish for uniform density distributions but simulate otherwise finite-range effects of the interaction. In turn,

$$\mathcal{H}^\rho = \mathcal{T} + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_{\text{eff}}, \quad (\text{A2})$$

where \mathcal{T} is a kinetic term, \mathcal{H}_0 is a zero-range two-body term, \mathcal{H}_3 is a three-body term, and \mathcal{H}_{eff} is an effective-mass term. The pairing contribution to the total energy of the system is not included assuming that it is negligible against the typical Fermi levels. More explicitly,

$$\mathcal{T} = \frac{\hbar^2}{2m}(\tau_n + \tau_p) \quad (\text{A3})$$

accounts for the kinetic energy densities $\tau_i = 3(3\pi^2)^{2/3}\rho_i^{5/3}/5$ of the Fermi gas, whereas the other terms in Eq. (A1) provide the bulk part of the potential energy

$$\mathcal{H}_0 = \frac{t_0}{4}[(2+x_0)\rho^2 - (2x_0+1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)], \quad (\text{A4})$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{t_3\rho^{1/6}}{24}[(2+x_3)\rho^2 - (2x_3+1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)], \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & [t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)] \frac{\rho(\tau_n + \tau_p)}{8} \\ & + [t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)] \frac{\tau_p\rho_p + \tau_n\rho_n}{8}, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

and, as anticipated, the last term in Eq. (A1) is due to the short range of the nucleon-nucleon interaction,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\nabla = & \frac{3}{32}[t_1(1-x_1) - t_2(1+x_2)] [(\nabla\rho_n)^2 + (\nabla\rho_p)^2] \\ & + \frac{1}{16}[3t_1(2+x_1) - t_2(2+x_2)] \nabla\rho_n \cdot \nabla\rho_p. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

From this latter term, to compute the contributions to the generalized chemical potential (7), we define $\vartheta_{nn}^0 = \vartheta_{pp}^0 = 3m[t_1(1-x_1) - t_2(1+x_2)]/(8\hbar^2)$ and $\vartheta_{np}^0 = \vartheta_{pn}^0 = m[3t_1(2+x_1) - t_2(2+x_2)]/(8\hbar^2)$.

The parameters in these expressions are [53,54]: $t_0 = -2488.91 \text{ MeV fm}^3$, $t_1 = 486.82 \text{ MeV fm}^5$, $t_2 = -546.39 \text{ MeV fm}^5$, $t_3 = 13777.0 \text{ MeV fm}^4$, $x_0 = 0.834$, $x_1 = -0.344$, $x_2 = -1.0$, and $x_3 = 1.354$. From them, following Ref. [55],

the entrainment parameter ν can also be calculated and takes the value $\nu \approx -1.566 \text{ fm}^3$.

The β equilibrium in the bulk [56] can be locally determined in terms of the asymmetry $\delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ by means of Eq. (A1) and the condition $\mu_n = \mu_p + \mu_e$, with $\mu_e = \hbar c (3\pi^2\rho_e)^{1/3}$ for ultrarelativistic electrons and assuming constant densities and local electric-charge equilibrium $\rho_e = \rho_p$, as

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{C_1}{8}\rho \right) \left(3\pi^2 \frac{\rho}{2} \right)^{2/3} [(1+\delta)^{2/3} - (1-\delta)^{2/3}] \\ & - \frac{t_0}{2}\rho\delta(1+2x_0) - \frac{t_3}{12}(2x_3+1)\delta\rho^{7/6} \\ & + \frac{3\pi^2}{5}C_2\left(\frac{\rho}{2}\right)^{5/3} [(1+\delta)^{5/3} - (1-\delta)^{5/3}] \\ & - \hbar c \left[3\pi^2 \frac{\rho}{2} (1-\delta) \right]^{1/3} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

where $C_1 = t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)$ and $C_2 = t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)$. By solving this equation the density asymmetry δ , that is the amount of neutrons and protons in the bulk, is obtained for a given total nuclear density ρ .

APPENDIX B: CLASSICAL ANALOG OF ENTRAINMENT IN THE PRESENCE OF ROTATION AND MAGNETIC FIELD

To illustrate the transformation of the energy density Eq. (2) in the presence of rotation and magnetic field, we consider a toy, classical model of two point particles with coupled velocities whose dynamics is described by the Lagrangian

$$\mathcal{L}[r_1, r_2, \dot{r}_1, \dot{r}_2] = \frac{m_{11}\dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_{22}\dot{r}_2^2}{2} + m_{12}\dot{r}_1\dot{r}_2 + eA\dot{r}_2, \quad (\text{B1})$$

where A is the vector potential of a magnetic field that couples only to one of the particles, and $m_1 = m_{11} + m_{12}$,

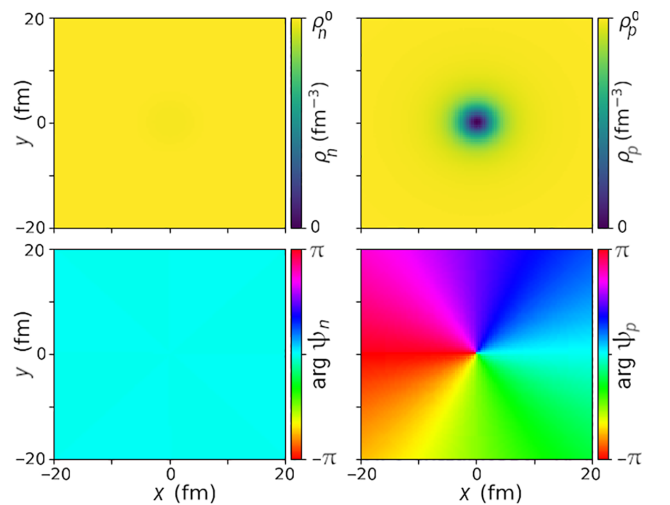


FIG. 5. Number density (top panels) and phase (bottom panels) profiles of the neutron (left) and proton (right) order parameters around the proton-vortex core.

$m_2 = m_{22} + m_{12}$; the condition $\Delta_m = m_1 m_2 - m_{12}^2 > 0$ is assumed. If the whole system, its center of mass, is brought into a steady motion with velocity V_0 , the Lagrangian can be rewritten in the reference frame moving with V_0 as $\mathcal{L}'[r'_1, r'_2, \dot{r}'_1, \dot{r}'_2]$ with new velocities $\dot{r}'_1 = \dot{r}_1 - V_0$ and $\dot{r}'_2 = \dot{r}_2 - V_0$. The corresponding momenta are

$$p'_1 = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}'_1} = m_{11} \dot{r}'_1 + m_{12} \dot{r}'_2 + m_1 V_0, \quad (\text{B2})$$

$$p'_2 = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}'_2} = m_{22} \dot{r}'_2 + m_{12} \dot{r}'_1 + m_2 V_0 + eA, \quad (\text{B3})$$

and then the Hamiltonian is obtained from $H'[r'_1, r'_2, p'_1, p'_2] = \sum p_\sigma \dot{r}_\sigma - \mathcal{L}'$ to be

$$H' = \frac{p'^2_1}{2\tilde{m}_{11}} + \frac{(p'_2 - eA)^2}{2\tilde{m}_{22}} + \frac{p'_1(p'_2 - eA)}{\tilde{m}_{12}} - \alpha V_0(p'_1 + p'_2) + (\alpha - 1) \left(eAV_0 + \frac{m_1 + m_2}{2} V_0^2 \right), \quad (\text{B4})$$

where new effective masses arise $\tilde{m}_{ij} = \Delta_m / m_{ij}$, with $i, j = 1, 2$, and the parameter $\alpha = [m_1 m_2 - m_{12}(m_1 + m_2)] / \Delta_m$ determines how the Hamiltonian transforms. If $m_{12} = 0$ then $\alpha = 1$, and one recovers the usual transformation for the Hamiltonian in the moving frame $H \rightarrow H - V_0 P$ with total momentum $P = p_1 + p_2$. A nonvanishing coupling mass m_{12} produces the more involved transformation shown in Eq. (B4),

which can be rewritten as

$$H' = \frac{\Pi'^2_1}{2\tilde{m}_{11}} + \frac{\Pi'^2_2}{2\tilde{m}_{22}} + \frac{\Pi'_1 \Pi'_2}{\tilde{m}_{12}} - eA V_0 - \frac{m_1 + m_2}{2} V_0^2, \quad (\text{B5})$$

in terms of the kinetic momenta

$$\Pi'_1 = p'_1 - m_1 V_0, \quad (\text{B6})$$

$$\Pi'_2 = p'_2 - m_2 V_0 - eA. \quad (\text{B7})$$

APPENDIX C: HYDRODYNAMIC EQUATIONS

The hydrodynamic equations can be derived directly from the generalized time-dependent Ginzburg-Landau Eqs. (11)–(12) by writing the order parameters in the so-called Madelung transformation as $\psi_\sigma = \sqrt{\rho_\sigma(\vec{r}, t)} \exp i\theta_\sigma(\vec{r}, t)$ and defining the superfluid velocities of the decoupled superfluids as $\vec{v}_\sigma = \hbar \nabla \theta_\sigma / m$. From the separation of the real and imaginary parts of the resulting expressions, one obtains equations of motion for superfluid densities and phases in the rotating frame. On the one hand, from the imaginary terms, one recovers the continuity Eqs. (4) that can be rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla[\rho_n \vec{v}_n + \nu \rho_n \rho_p (\vec{v}_p - \vec{v}_n)] &= 0, \\ \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla[\rho_p \vec{v}_p - \nu \rho_n \rho_p (\vec{v}_p - \vec{v}_n)] &= 0; \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

on the other hand, after taking the gradient of the resulting real terms, one gets the momentum equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_n + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \nabla \left\{ \frac{\mu_n}{m} - \frac{\hbar^2}{m^2} \left[\frac{(1 - \nu \rho_p) \nabla^2 \sqrt{\rho_n}}{2\sqrt{\rho_n}} + \frac{\nu}{2} (\nabla \sqrt{\rho_p})^2 - \frac{\nu \nabla \rho_p \nabla \rho_n}{4\rho_n} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\vec{v}_n^2 - (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - \nu \rho_p (\vec{v}_p - \vec{v}_n)^2 - \nu \rho_p \vec{v}_p (\vec{\Omega} \times \vec{r})] \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v}_p + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \frac{e\vec{A}}{m} \right) + \nabla \left\{ \frac{\mu_p + e\Phi}{m} - \frac{\hbar^2}{m^2} \left[\frac{(1 - \nu \rho_n) \nabla^2 \sqrt{\rho_p}}{2\sqrt{\rho_p}} + \frac{\nu}{2} (\nabla \sqrt{\rho_n})^2 - \frac{\nu \nabla \rho_p \nabla \rho_n}{4\rho_p} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\vec{v}_p^2 - (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - \frac{e\vec{A}}{m} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \nu \rho_n (\vec{v}_p - \vec{v}_n)^2 - \nu \rho_n \vec{v}_n (\vec{\Omega} \times \vec{r} + \frac{e\vec{A}}{m}) \right] \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

While the continuity Eqs. (C1) are related to the conservation of the number of particles in each superfluid component, the phase Eqs. (C2)–(C3) are related to the corresponding conservation of momentum.

APPENDIX D: NUMERICAL SIMULATIONS

The stationary vortex states have been calculated within a cylindrical computational domain, with the vortex core aligned with the cylinder axis, and the cylinder walls determined by imposed potentials $W(\vec{r}) = 10\mu_n \{1 + \tanh[5k_{Fn}(|\vec{r}| - R)]\}$ in Eqs. (11) and (12). The cylinder radius R has been fixed by the condition of reaching both the bulk density values, ρ_n^0 and ρ_p^0 , of neutron and proton

superfluids in β equilibrium, and nonvarying magnetic fields faraway from the vortex core. Our results have been tested by achieving convergence in the densities, currents, and magnetic field values against variations of the cylinder radius and the number of computational grid points $N_x \times N_y$; typical values of these parameters were $R \in [100, 500]$ fm and $N_x \times N_y \in [512 \times 512, 1024 \times 1024]$ points. In the search for stationary states, the initial state was fixed by the bulk nuclear density values and by imprinting a vortex phase in the proton order parameter, that is, $\psi_n(x, y) = \max[1 - W(x, y)/\mu_n, 0] \times \sqrt{\rho_n^0}$ and $\psi_p(x, y) = \max[1 - W(x, y)/\mu_p, 0] \times \sqrt{\rho_p^0} \exp[i \arctan(y/x)]$; a vanishing density was also set at the vortex core $\psi_p(0, 0) = 0$. Starting with this state, an imaginary time

evolution of Eqs. (11) and (12), self-consistently with Eq. (13), was performed until convergence by means of standard finite-difference spatial discretization and time

integrators based in Runge-Kutta methods coded in Julia programming language. An example of the density and phases of the converged states is shown in Fig. 5.

-
- [1] U. Essmann and H. Träuble, *Phys. Lett. A* **24**, 526 (1967).
 [2] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon, and R. E. Packard, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 214 (1979).
 [3] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
 [4] P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200403 (2002).
 [5] A. E. Leanhardt, A. Görlitz, A. P. Chikkatur, D. Kielpinski, Y. Shin, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190403 (2002).
 [6] K. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *J. Mod. Opt.* **47**, 2715 (2000).
 [7] F. Chevy, K. W. Madison, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2223 (2000).
 [8] J. Abo-Shaeer, C. Raman, J. Vogels, and W. Ketterle, *Science* **292**, 476 (2001).
 [9] M. Zwierlein, J. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. Schunck, and W. Ketterle, *Nature (London)* **435**, 1047 (2005).
 [10] C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 050404 (2007).
 [11] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Science* **311**, 492 (2006).
 [12] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **462**, 628 (2009).
 [13] G. Mendell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **296**, 903 (1998).
 [14] G. Baym, C. Pethick, and D. Pines, *Nature (London)* **224**, 673 (1969).
 [15] A. Lyne, S. Shemar, and F. G. Smith, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **315**, 534 (2000).
 [16] P. Anderson and N. Itoh, *Nature (London)* **256**, 25 (1975).
 [17] A. Andreev and E. Bashkin, *Sov. Phys. JETP* **42**, 164 (1975).
 [18] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
 [19] P. W. Anderson, *Nat. Phys.* **11**, 93 (2015).
 [20] J. Sauls, in *Timing Neutron Stars*, NATO ASI Series (ASIC, vol. 262), edited by H. Ögelman and E. P. J. van den Heuvel (Springer, Dordrecht, 1989), pp. 457–490.
 [21] X.-R. Zhou, H.-J. Schulze, E.-G. Zhao, F. Pan, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **70**, 048802 (2004).
 [22] M. Baldo, Ø. Elgarøy, L. Engvik, M. Hjorth-Jensen, and H.-J. Schulze, *Phys. Rev. C* **58**, 1921 (1998).
 [23] P.-G. De Gennes and P. A. Pincus, *Superconductivity of Metals and Alloys* (CRC Press, Boca Raton, FL, 2018).
 [24] R. Sensarma, M. Randeria, and T.-L. Ho, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 090403 (2006).
 [25] S. Simonucci, P. Pieri, and G. C. Strinati, *Phys. Rev. B* **87**, 214507 (2013).
 [26] A. Andreev, *Sov. Phys. JETP* **49**, 655 (1965).
 [27] Y. Yu and A. Bulgac, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 161101 (2003).
 [28] D. Peçak, N. Chamel, P. Magierski, and G. Wlazłowski, *Phys. Rev. C* **104**, 055801 (2021).
 [29] F. De Blasio and Ø. Elgarøy, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1815 (1999).
 [30] P. Avogadro, F. Barranco, R. A. Broglia, and E. Vigezzi, *Phys. Rev. C* **75**, 012805(R) (2007).
 [31] G. Wlazłowski, K. Sekizawa, P. Magierski, A. Bulgac, and M. M. Forbes, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 232701 (2016).
 [32] G. Mendell, *Astrophys. J.* **380**, 515 (1991).
 [33] G. Mendell and L. Lindblom, *Ann. Phys.* **205**, 110 (1991).
 [34] N. Andersson, G. L. Comer, and K. Glampedakis, *Nucl. Phys. A* **763**, 212 (2005).
 [35] K. Glampedakis, N. Andersson, and L. Samuelsson, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **410**, 805 (2011).
 [36] B. Link, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **421**, 2682 (2012).
 [37] A. Sourie and N. Chamel, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **493**, 382 (2020).
 [38] A. Sourie and N. Chamel, *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* **493**, L98 (2020).
 [39] T. S. Wood and V. Graber, *Universe* **8**, 228 (2022).
 [40] B. Carter, R. Prix, and D. Langlois, *Phys. Rev. B* **62**, 9740 (2000).
 [41] R. Prix, *Phys. Rev. D* **62**, 103005 (2000).
 [42] M. Eto, K. Kasamatsu, M. Nitta, H. Takeuchi, and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **83**, 063603 (2011).
 [43] J. A. G. Granados, A. M. Mateo, and X. Viñas, *Phys. Rev. C* **103**, 065803 (2021).
 [44] M. Alpar, S. A. Langer, and J. Sauls, *Astrophys. J.* **282**, 533 (1984).
 [45] P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
 [46] M. Thinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. (Dover Publications, Mineola, New York, 2004).
 [47] N. Chamel, *Phys. Rev. C* **85**, 035801 (2012).
 [48] N. Andersson, K. Glampedakis, W. C. G. Ho, and C. M. Espinoza, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 241103 (2012).
 [49] G. Watanabe and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 062701 (2017).
 [50] D. N. Kobyakov, C. J. Pethick, S. Reddy, and A. Schwenk, *Phys. Rev. C* **96**, 025805 (2017).
 [51] D. Vautherin and D. M. Brink, *Phys. Rev. C* **5**, 626 (1972).
 [52] M. Bender, P.-H. Heenen, and P.-G. Reinhard, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 121 (2003).
 [53] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer, *Nucl. Phys. A* **635**, 231 (1998).
 [54] F. Douchin and P. Haensel, *Astron. Astrophys.* **380**, 151 (2001).
 [55] N. Chamel and P. Haensel, *Phys. Rev. C* **73**, 045802 (2006).
 [56] G. Baym, H. A. Bethe, and C. J. Pethick, *Nucl. Phys. A* **175**, 225 (1971).

CAPÍTULO 7

EFEECTO JOSEPHSON EN SISTEMAS DE DOS COMPONENTES

El efecto túnel cuántico es uno de los fenómenos físicos más relevantes predichos por la mecánica cuántica. La dualidad ondulatoria-corpúscular de las partículas permite a éstas "atravesar" barreras de potencial que no están permitidas mediante una descripción energética clásica. Los primeros pasos para entender este fenómeno provienen del ámbito de la física nuclear. En 1928 G. Gamow y, en paralelo, R. Gurney y E. Condon, aplicaron por primera vez este fenómeno teórico para explicar la desintegración alfa en núcleos radiactivos. En la actualidad, el efecto túnel juega un papel fundamental tanto en la investigación teórica básica, como en el campo de la fusión nuclear controlada como en multitud de aplicaciones tecnológicas (destacando su uso en microscopios o diodos de efecto túnel y en una amplia gama de dispositivos electrónicos avanzados). Cuando el efecto túnel cuántico se manifiesta a escala macroscópica, se conoce como efecto Josephson. Este fenómeno tiene aplicaciones destacadas en electrónica, especialmente en dispositivos como los SQUID (dispositivos superconductores de interferencia cuántica), que ofrecen velocidades de conmutación extremadamente altas y niveles de precisión difíciles de alcanzar por otros medios. Desde una perspectiva teórica, el efecto Josephson confiere propiedades singulares al espacio que conecta regiones superconductoras (o superfluidas).

7.1. Efecto Josephson interno y externo

Este fenómeno cuántico, coherente y macroscópico fue desarrollado por B.D. Josephson en 1962 en el contexto de la superconductividad de electrones en un metal [Jos62]. No obstante, el formalismo puede extenderse a condensados de Bose-Einstein (BECs) de diferente naturaleza y composición. En general, pueden distinguirse dos tipos de efecto Josephson en BECs: el externo y el interno. Por un lado, el efecto Josephson externo (EJE) consiste en el efecto túnel de partículas de un BEC a otro a través de una barrera de potencial (externa) que los separa. Un ejemplo de EJE es la unión Josephson, consistente en la unión de dos superconductores acoplados mediante una lámina delgada no superconductora (ver figura 7.1).

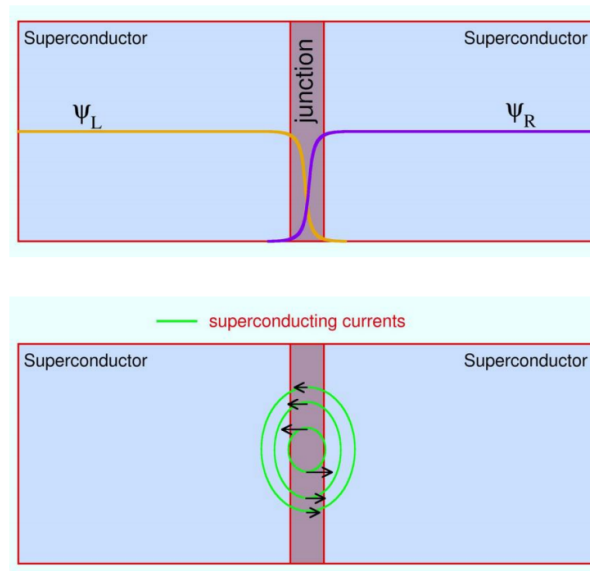


Figura 7.1: EJE entre dos superconductores con parámetros de orden $\Psi_L = \sqrt{n_L} \exp(i\theta_L)$ y $\Psi_R = \sqrt{n_R} \exp(i\theta_R)$ respectivamente.

En estos sistemas, puede medirse una corriente Josephson \mathcal{I}_J de partículas superconductoras que cruzan el aislante en ausencia de campo electromagnético externo (panel inferior de la figura 7.1). Dicha corriente Josephson es proporcional al seno de la diferencia de fase entre los dos superconductores separados por la barrera de potencial, es decir $\mathcal{I}_J \sim \sin(\theta_L - \theta_R)$ (ver por ejemplo [BP84]).

Por otro lado, el efecto Josephson interno (IJE) es el efecto túnel de partículas entre dos estados internos de las partículas constituyentes del BEC. Los estados internos determinan un condensado de dos componentes que ocupan la misma región del espacio. Un ejemplo

típico de IJE de relevancia experimental es el tránsito de partículas entre dos estados hiperfinos $|F, M\rangle$ de un gas ultrafrío de ^{87}Rb [Wil+99].

7.2. Crust

La corteza de las estrellas de neutrones tiene una estructura altamente compleja. En general, pueden distinguirse dos regiones principales: la corteza externa (outer crust) y la corteza interna (inner crust). En el outer crust, la materia nuclear forma una red cristalina de núcleos ricos en neutrones inmersos en un gas de electrones degenerados. A medida que la densidad aumenta, los núcleos aumentan progresivamente el número de neutrones mediante procesos de captura electrónica y desintegraciones beta inversas, disminuyendo su ligadura debido al aumento de la energía de simetría. En función de la densidad, la composición de los núcleos en el outer crust está completamente determinada por las masas nucleares [BPS71] cuyos valores experimentales se conocen hasta densidades de la estrella de $\rho \sim 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$. Para densidades mayores hay que utilizar las masas predichas por algún modelo nuclear (para más detalles ver [Sha+15]). Cuando la densidad alcanza un valor de $\rho \sim 3 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$, los núcleos ya no son capaces de soportar energéticamente el incremento de neutrones y comienzan a cederlos al continuo (neutron drip) dando paso al inner crust de la estrella. En esta región, la materia está formada por una red de agregados nucleares (clusters) inmersos en gases de neutrones y electrones libres. La estructura de estos agregados nucleares viene determinada por el balance entre la energía de superficie, que tiende a retener los nucleones en el agregado, y la energía de Coulomb, que tiende a dispersar los protones. Como resultado de este equilibrio, en las capas más profundas y densas del inner crust, la estructura de los agregados nucleares evoluciona desde una configuración de núcleos esféricos hacia formas exóticas y asimétricas, con el objetivo de minimizar su energía. Estas estructuras, conocidas como fase de "pasta nuclear" [CH17], pueden adoptar formas como láminas, tubos, burbujas o estructuras no esféricas todavía más complejas [New+22]. Estas estructuras están inmersas en gases de electrones y de neutrones, éstos últimos en equilibrio químico con los neutrones que forman parte de los agregados nucleares. El cálculo de la estructura y propiedades del inner crust a nivel Hartree-Fock es complejo debido a la presencia del gas de neutrones, que requiere considerar el continuo y realizar los cálculos en geometrías no esféricas. Aunque

existen modelos avanzados para abordar este problema, en general, estos cálculos están restringidos a una determinada simetría o a un rango específico de densidades [Sha+15]. Es posible realizar cálculos a gran escala del inner crust mediante técnicas semiclásicas, que en una primera aproximación omiten los efectos de capas y/o de apareamiento, los cuales pueden incorporarse posteriormente de manera perturbativa. El método más sencillo es el método de la gota líquida compresible (CLDM) propuesto inicialmente en [BPS71] y usado posteriormente en diversos estudios de la corteza (ver por ejemplo [LS91; DH01; KV24]). Una aproximación más refinada es el método de Thomas-Fermi, que debido al acoplo entre los términos de volumen y de superficie, permite obtener la energía y los perfiles de densidad en las distintas geometrías a nivel de campo medio utilizando tanto modelos nucleares relativistas como no relativistas [Sha+15]. El modelo de Thomas-Fermi permite además añadir efectos de capas y de apareamiento de modo perturbativo tanto en el caso de núcleos esféricos [Mon+20] como en el de configuraciones no esféricas de tipo lámina o tubo [PC22]. El inner crust de las estrellas de neutrones se extiende hasta un valor de la densidad de la estrella del orden de la mitad de la densidad de saturación de la materia nuclear $\rho \sim 0.08 \text{ fm}^{-3}$. A esta densidad, resulta energéticamente más favorable una fase de fluido uniforme compuesto por protones, neutrones y electrones en equilibrio beta, en lugar de una fase con agregados nucleares.

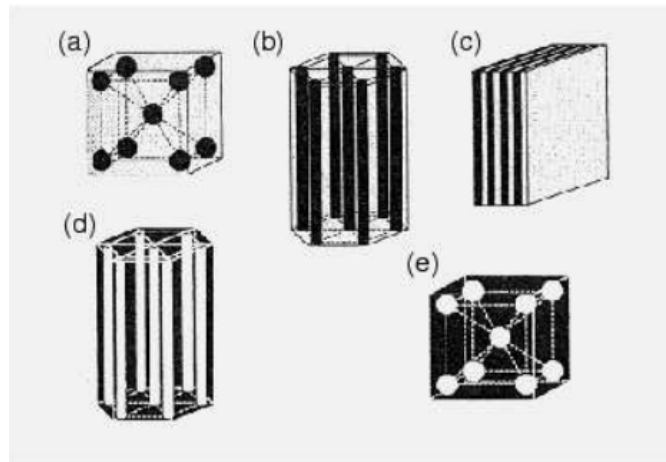


Figura 7.2: Diferentes configuraciones de la "pasta" nuclear en el inner crust. Las regiones en negro muestran la fase líquida (agregados nucleares de protones y neutrones) y las regiones en blanco la fase gas (neutrones y electrones). Imagen extraída de [Oya93].

7.3. Efecto Josephson en el inner crust

En la fase de "pasta" nuclear, donde las densidades son del orden de la densidad de saturación nuclear, el apareamiento protón-protón en el canal 1S_0 es favorable [BPP69]. Por lo tanto, se espera que los protones se encuentren en fase superconductora en el interior de estas estructuras [ZP21]. La configuración (c) de la figura 7.2 se conoce popularmente como "lasagna phase". Esta configuración está formada por láminas de espesor $2R_N$ conteniendo neutrones y protones superconductores (el agregado nuclear) separadas por láminas de grosor d_N formadas por neutrones y electrones libres. Esta estructura se asemeja a una serie unidimensional de uniones Josephson externas, formadas por superconductores apilados. El efecto túnel de pares de Cooper de protones entre dos láminas superconductoras depende de la relación entre la longitud de coherencia ξ_p de los pares de protones y la distancia d_N que separa las láminas. Cuando $\xi_p \sim d_N$, las funciones de onda macroscópicas de los dos superconductores se solapan, lo que favorece la aparición de corrientes Josephson entre ellos. En contraste, si $\xi_p \ll d_N$, los superconductores no interactúan significativamente, y no se producirá intercambio de partículas. Es en esta configuración de "pasta" donde los efectos de apareamiento de protones son más relevantes [Kob18]. Como se analiza y discute en [Gra+19], en un modelo unidimensional simple que comparte propiedades con los sistemas de gases ultrafríos, esta disposición de BECs acoplados mediante uniones Josephson exhibe una rica fenomenología que también podría manifestarse, bajo ciertas condiciones, en el inner crust de estrellas de neutrones, aunque a una escala diferente de densidad y energía. En particular, resulta relevante destacar la aparición de vórtices de Josephson (también conocidos como fluxones) en las uniones tipo Josephson, las cuales se consideran regiones de superconductividad débil. Estos vórtices forman redes análogas a las redes de Abrikosov que se observan en superconductores tipo II. En ausencia de campo magnético externo, los vórtices de Josephson corresponden generalmente a estados excitados; sin embargo, bajo la influencia de un campo magnético, pueden integrarse al estado fundamental del sistema. Los núcleos de estos vórtices se localizan en las zonas de unión entre los superconductores —que, en el contexto del crust estelar, corresponden a regiones ocupadas por neutrones— y generan corrientes superfluidas en su entorno. Al igual que los vórtices de protones discutidos en capítulos anteriores, los vórtices de Josephson capturan cuantos de flujo magnético y podrían desempeñar un papel importante en las fases de pasta nuclear [KV24].

New Journal of Physics

The open access journal at the forefront of physics

Deutsche Physikalische Gesellschaft  DPG
IOP Institute of Physics

Published in partnership
with: Deutsche Physikalische
Gesellschaft and the Institute
of Physics



PAPER

OPEN ACCESS

RECEIVED

20 November 2018

REVISED

22 January 2019

ACCEPTED FOR PUBLICATION

22 February 2019

PUBLISHED

17 April 2019

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.



Transverse Josephson vortices and localized states in stacked Bose–Einstein condensates

J A Gil Granados¹, A Muñoz Mateo^{1,2,3}, M Guilleumas^{1,4,5} and X Viñas^{1,4}

¹ Departament de Física Quàntica i Astrofísica, Facultat de Física, Universitat de Barcelona, E-08028, Barcelona, Spain

² Centre for Theoretical Chemistry and Physics, New Zealand Institute for Advanced Study, Massey University, Private Bag 102904 NSMC, Auckland 0745, New Zealand

³ Dodd-Walls Centre for Photonic and Quantum Technologies, New Zealand

⁴ Institut de Ciències del Cosmos, Universitat de Barcelona, ICCUB, E-08028, Barcelona, Spain

⁵ Author to whom any correspondence should be addressed.

E-mail: muntsa@fqa.ub.edu

Keywords: Bose–Einstein condensates, Josephson junctions, Josephson-junction arrays, Josephson vortices

Abstract

The stacks of Bose–Einstein condensates coupled by long Josephson junctions present a rich phenomenology feasible to experimental realization and specially suitable for technological applications as the nonlinear-optics and superconducting analogs have already proved. Among this, we show that transverse Bloch waves excited in arrays of one-dimensional coupled condensates can carry tunneling superflows whose dynamical stability depends on the quasimomentum. Across the stacks with periodic boundary conditions, forming closed ring-shaped systems, such Bloch states yield transverse Josephson vortices with a generic non-integer circulation in units of h/m . Additionally, the superpositions of degenerate linear Bloch waves can suppress the supercurrents and give rise to families of nonlinear standing-wave states with strong (transverse) spatial localization. Stable states of this type can also be found in finite size systems.

1. Introduction

Quantum tunneling is one of the most striking phenomena predicted by quantum mechanics. At a macroscopic scale it is named Josephson effect, and it is a paradigm of the phase coherence manifestation of a macroscopic quantum system. The theory of the Josephson effect was developed by Brian D Josephson for superconducting electron pairs in 1962 [1]. Since then, it has found multiple technological applications [2, 3]. More recently, with the advent of Bose–Einstein condensates (BECs) of ultracold atoms, the Josephson effect has been demonstrated between two weakly linked condensates of neutral bosonic atoms [4–6].

A bosonic, macroscopic quantum system can be described by a complex order parameter whose squared modulus and phase gradient provide the particle density and the particle current, respectively. When two such systems are connected by a weak link, that is a Josephson junction, the macroscopic tunneling of particles through the junction varies as the sine of the relative phase between the coupled order parameters. This supercurrent can flow through point-like (or short) Josephson junctions, as it is the case of the barrier in a double well potential [5, 6], but also through long Josephson junctions with a non-negligible spatial extension. In the latter case, the relative phase can change along the junction and the coherent transfer of particles occurs locally through each point. Feasible realizations of long Josephson junctions in ultracold atomic gases can be readily done by Raman-laser coupling of different hyperfine components of atomic BECs producing a so-called internal Josephson effect [4, 7, 8], or by spatially separated BECs coupled along their longitudinal direction, as we consider in the present paper.

In general, the long Josephson junctions in BECs have received less attention than the short ones. Most of the previous works with systems containing long junctions have focused on coupled binary BECs (see e.g. [9] and references therein), and significant attention have been paid to states containing localized Josephson vortices or fluxons [10–14]. These topological structures are characteristic of the long junctions and have been extensively

studied in superconductors because of their capability of trapping magnetic flux [2]. They involve localized supercurrents around a vortex core situated in the Josephson junction [15], and can be theoretically studied as analytical solutions to the sine-Gordon equation for the relative phase of the coupled systems [2]. In this regard, one-dimensional (1D) tunnel-coupled superfluids, as quantum simulator of the sine-Gordon equation, have been recently realized in ultracold gases [16]. Within the mean field framework, the dynamical properties of Josephson vortices have been also studied in two coupled 1D BECs [10–14, 17, 18]. Generalizations of Josephson vortex states to tunnel-coupled spinor gases [19] and to multidimensional spin-orbit coupled condensates [20] have been proposed.

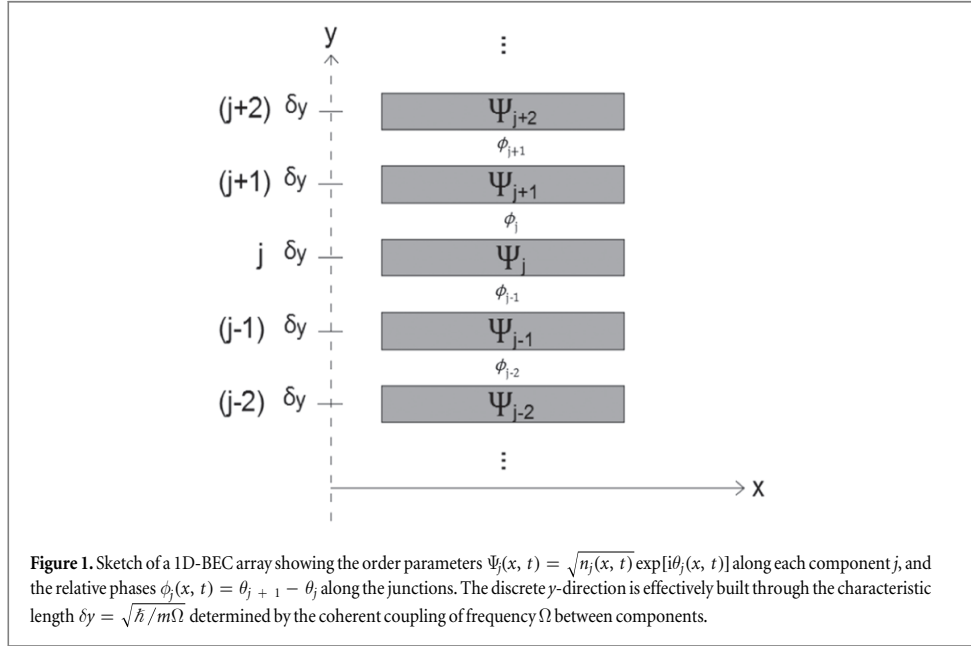
Due to their potential for technical applications, the arrays of linear and nonlinear coupled waveguides are the subject of intense experimental and theoretical research in optics (see e.g. [21, 22] and references therein), where the discrete nonlinear Schrödinger equation serves as a usual theoretical model of the array. Likewise, the stacks of long Josephson junctions have been extensively studied in superconductors, where the stacks can be modeled by coupled sine-Gordon equations (see, for instance [23, 24]). However, in BECs, as far as we know, up to date only 1D arrays of point-like Josephson junctions have been experimentally realized [25]. There is not yet a wide theoretical exploration of bosonic-array systems with long spatial couplings either. Nevertheless, different aspects of the theory have been addressed: the superfluid-insulator transition has been studied in two-dimensional (2D) arrays of coupled 1D tubes against the absence or presence of axial periodic potentials [26]; also, the propagation of bright solitons in arrays of BECs with negative nonlinearity has been considered [27]; very recently, coupled atomic wires have been proposed in ultracold-gas systems for the generation of exotic phases in the presence of synthetic gauge fields [28]; in addition, the arrays of parallel 1D long Josephson junctions in BECs with positive nonlinearity have been demonstrated to provide an excellent playground for the realization and stabilization of solitary waves [29].

In this work we study, analytically and numerically, a stack of linearly coupled 1D BECs with repulsive interparticle interactions that gives rise to an underlying array of coupled-parallel long Josephson junctions. In particular, we consider stacks with periodic boundary conditions forming closed, ring-shaped arrays. By solving the Gross–Pitaevskii (GP) equation, the dynamics of stationary states composing a transverse, discrete Bloch band is addressed. We show that the periodic boundary conditions yield transverse vortex states that carry Josephson supercurrents. Interestingly, the Bogoliubov analysis reveals that, with a quasimomentum dependence, these Josephson vortices can be dynamically stable, hence susceptible of experimental detection. From a hydrodynamical perspective, we also perform a long-wavelength linear analysis that allow for a somehow simpler interpretation of the system dynamics in terms of coupled wave equations for the relative phases and densities. We demonstrate that, only for particular states in the small coupling limit, also known as the anti-continuum limit in the literature of discrete systems, the resulting hydrodynamic model resembles, although it cannot be fully identified with, the superconducting models of coupled sine-Gordon equations. Finally, we explore how the linear combinations of Bloch waves lead to families of nonlinear states that cancel the Josephson supercurrents and produce strongly localized density profiles across the stack. In the limit of small coupling, these states can also be dynamically stable against perturbations in finite size systems.

The paper is organized as follows: in section 2 we present the theoretical model that describes the stack of linearly coupled BECs with periodic boundary conditions in the mean-field framework. We investigate the stationary states of the system in section 3, in particular Bloch waves and spatially localized states. Section 4 is devoted to the analytical study of the linear stability of the stationary states in the stack within the Bogoliubov approximation, and also within the hydrodynamic approach for the small coupling regime of Bloch waves, which is developed to a greater generality in the [appendix](#). The comparison between analytical and numerical results is presented in section 5, specially for transverse Josephson vortices. The nonlinear dynamics of localized states is discussed in section 6. A final discussion together with the conclusions are presented in section 7.

2. Model of linearly coupled BECs

We consider a system of M 1D BECs having a coherent linear coupling of frequency Ω along the junctions. Each BEC is described by a corresponding order parameter $\Psi_j(x, t) = \sqrt{n_j(x, t)} \exp[i\theta_j(x, t)]$, where n_j and θ_j are the local density and phase, respectively, and $j = 1, 2, \dots, M$ labels the BECs in the stack. We choose a particular arrangement with periodic boundary conditions, so that the stack has a ring-shaped configuration with also M coupling junctions. The j th junction lies between the j th and the $(j + 1)$ th components, and the M th junction connects the M th and the 1st BECs. The total density of the system, $n_T(x) = \sum_j |\Psi_j|^2$, is normalized to the total number of particles, $N = \int n_T dx = \sum_j N_j$, which is a conserved quantity, and N_j is the number of particles in the j th BEC. A schematic representation of the system is shown in figure 1. Detailed proposals for the experimental realization of such systems in ultracold gases [29], including a gauge dependent coupling [28], have been recently presented.



At zero temperature, within the mean-field framework, the system can be described by a set of coupled GP equations, namely for the j th component:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + g |\Psi_j|^2 \right) \Psi_j - \frac{\hbar \Omega}{2} \sum_{l=j-1}^{j+1} \Psi_l, \quad (1)$$

where the sum on the right hand side extends to the first neighbors ($j-1$) and ($j+1$), and m is the bosonic mass. The 1D particle interaction strength is $g = 2\hbar\omega_\perp a$, the s -wave scattering length is assumed to be repulsive $a > 0$, and ω_\perp is the frequency of a tight transverse trap.

For a later discussion, it is convenient to rewrite the GP equation (1) in hydrodynamic form, in terms of the densities and phases:

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_j v_j) + \Omega (\sqrt{n_j n_{j+1}} \sin \phi_j - \sqrt{n_j n_{j-1}} \sin \phi_{j-1}) = 0, \quad (2)$$

$$-\hbar \frac{\partial \theta_j}{\partial t} = Q_j + \frac{m v_j^2}{2} + g n_j - \frac{\hbar \Omega}{2} \left(\sqrt{\frac{n_{j+1}}{n_j}} \cos \phi_j + \sqrt{\frac{n_{j-1}}{n_j}} \cos \phi_{j-1} \right), \quad (3)$$

where $\phi_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ is the relative phase between neighbor BECs, $v_j = \hbar \partial_x \theta_j / m$ is the superfluid velocity, and $Q_j = -(\hbar^2/2m \sqrt{n_j}) \partial_x^2 \sqrt{n_j}$ is the quantum-pressure energy term.

Equation (2) is the continuity equation, and expresses the particle conservation in the array. The local density $n_j(x)$ varies due to either changes in the axial current, $J_j(x) = n_j(x) v_j(x)$, within the j th BEC, or due to the Josephson current, \mathcal{J}_j , across the adjacent junctions. We define the latter current, by analogy with the axial current, as $\mathcal{J}_j(x) = \mathcal{N}_j(x) \mathcal{V}_j(x)$, by means of a geometric-mean density $\mathcal{N}_j = \sqrt{n_j n_{j+1}}$, and a Josephson velocity $\mathcal{V}_j = (\hbar/m \delta y) \sin \phi_j$, where $\delta y = \sqrt{\hbar/m\Omega}$ is the effective distance between BECs. With these definitions, the last term of equation (2) corresponds to a discrete derivative $\delta \mathcal{J}_j / \delta y = (\mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j-1}) / \delta y$ of the Josephson current. Along with the periodic boundary conditions in the y -direction, it allows for the computation of a velocity circulation around the stack

$$\Gamma = \oint v_y dy = \delta y \sum_{j=1}^M \mathcal{V}_j = \frac{\hbar}{m} \sum_{j=1}^M \sin \phi_j. \quad (4)$$

On the other hand, equation (3) is the equation of motion for the phase, which varies locally according to the local energy content. In a stationary state, where the time variation of the phase is given by the frequency μ/\hbar (see equation (5) below), μ being the chemical potential, the local energy in the right hand side of equation (3) is the same (and equals μ) at every point in the system.

3. Stationary states

The BEC stack forms a discrete lattice of M sites along the y -direction, transverse to the common axial x -axis (see figure 1). Since the effective (coupling-dependent) distance of separation between neighbor BECs is δy , the discrete coordinate along the y -axis takes values $y_j = j\delta y$ for each j th BEC. The characteristic length δy has to be compared with the healing length $\xi = \hbar/\sqrt{m g n}$, determined by the axial density n of the BECs, so that the ratio $\xi/\delta y = \sqrt{\hbar\Omega/gn}$ measures the tunneling-coupling strength.

3.1. Bloch states

The lattice configuration along y allows us to look for stationary states that take the form of transverse Bloch waves

$$\Psi_{j,k}(x, t) = \psi(x) \exp[i(\mathcal{K}_k y_j - \mu_{\mathbf{k}} t/\hbar)], \quad (5)$$

where $\psi(x)$ is the axial wavefunction (with the periodicity of the discrete lattice), and \mathcal{K}_k is the transverse quasimomentum. Due to the discreteness of the system, the quasimomentum can take only M different integer values within the first Brillouin zone:

$$\mathcal{K}_k = \frac{2\pi}{M\delta y} \times k, \quad \text{and } k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, [M/2]\}, \quad (6)$$

where $[M/2]$ is the greatest integer less than or equal to $M/2$. As a result, the product space of coordinate-separated solutions (5) presents an M -fold symmetry for each wave function $\psi(x)$. All the k states but $k = 0$ and $k = M/2$ (when the latter exists), at the middle and at the end, respectively, of the Brillouin zone, are states supporting Josephson currents in the y -direction, due to the existence of non-zero and non- π relative phases between consecutive condensates.

In what follows we focus on states whose axial part is a momentum eigenstate $\psi(x) = \sqrt{n} \exp(i\mathcal{K}_x x)$. The corresponding Bloch waves read

$$\Psi_{j,k}(x, t) = \sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x + \mathcal{K}_k y_j - \mu_{\mathbf{k}} t/\hbar)], \quad (7)$$

with stationary phases $\theta_j = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathcal{K}_x x + \mathcal{K}_k y_j$, where \mathbf{k} and \mathbf{r} are the momentum and spatial vectors, respectively. The relative phases of the Bloch waves (7) are $\phi = \mathcal{K}_k \delta y = \pm 2\pi k/M$, the same for all the j junctions, and take values in the interval $[-\pi, \pi]$. Thus, the Josephson currents are $\mathcal{J} = \pm \hbar n \sin(2\pi k/M)/m\delta y$, which in the limit of large M and small k tend to $\mathcal{J} = n \hbar \mathcal{K}_k/m$. Analogously, the transverse circulation equation (4) gives $\Gamma_k = \pm M \hbar \sin(2\pi k/M)/m$, and tends to $\Gamma_k = 2\pi k \hbar/m$ in the same limit. The latter expression is equivalent to the quantized circulation of a regular vortex of charge k . We will refer to these discrete vortex currents, associated with Bloch waves having a non-zero circulation in the stack, as Josephson vortices. Note that they are delocalized along the x -direction, and, unlike the regular vortices, do not show in general an integer-valued circulation in units of \hbar/m .

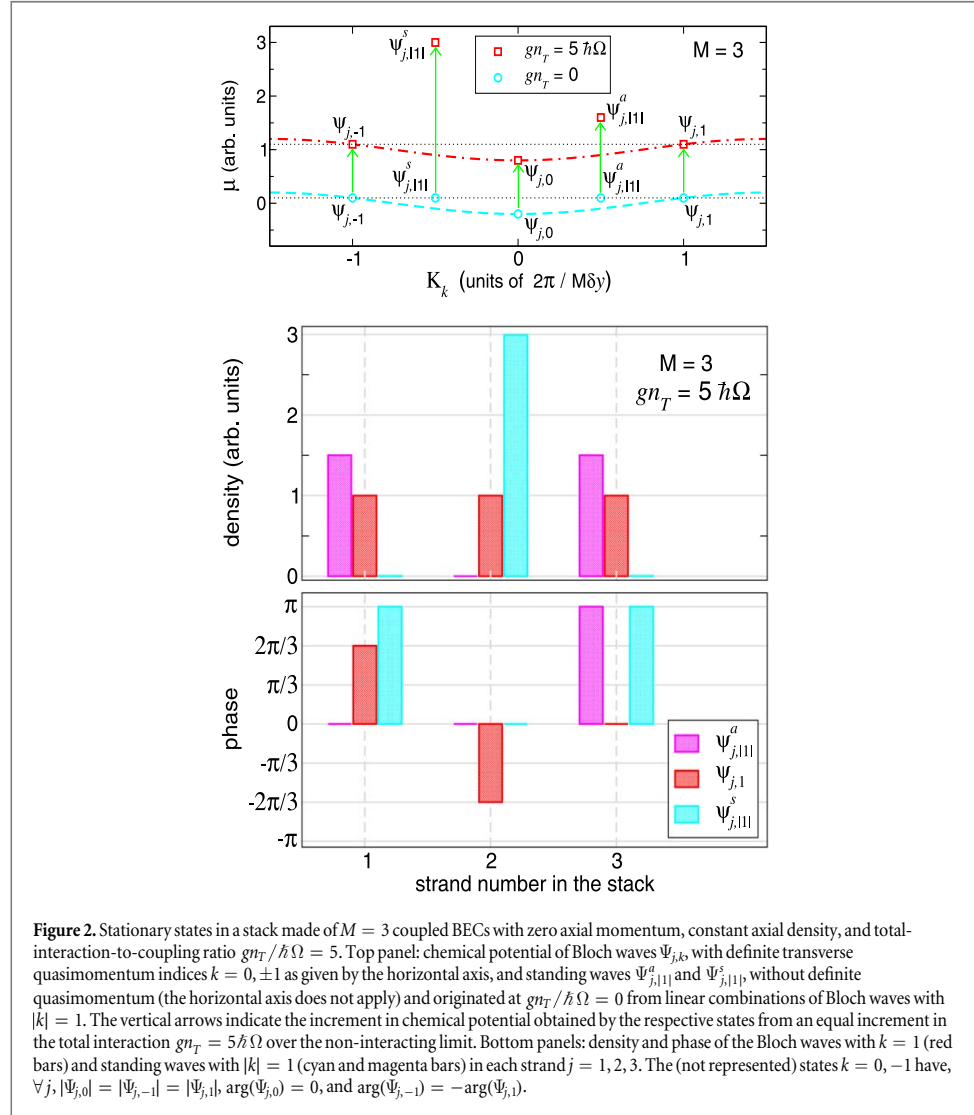
By substituting the constant density states of the type (7) in equation (1), or alternatively in equation (3), we get the chemical potential of such Bloch waves

$$\mu_{\mathbf{k}} = gn + \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x^2}{2m} - \hbar\Omega \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \quad (8)$$

which takes values in the range $\mu_{\mathbf{k}} \in gn + \hbar^2 \mathcal{K}_x^2/2m + [-\hbar\Omega, \hbar\Omega]$, within a discrete band of energy width $2\hbar\Omega$. For given total density and axial momentum, the ground state of the system is the Bloch wave with zero quasimomentum $\Psi_{j,0}$, lying at the bottom of the band with $\mu_{\mathbf{k}=0} = gn + \hbar^2 \mathcal{K}_x^2/2m - \hbar\Omega$. In the limit $2\pi k/M \ll 1$, expanding equation (8) up to quadratic terms one finds $\mu_{\mathbf{k}} = gn - \hbar\Omega + \hbar^2(\mathcal{K}_x^2 + \mathcal{K}_k^2)/2m$, which is a quadratic dispersion (as in a fully 2D continuous system) around the ground state. The top panel of figure 2 depicts the structure of the discrete band of Bloch waves in the simplest case with $\mathcal{K}_x = 0$ for both the non-interacting ($gn_T = 0$) and the interacting ($gn_T \neq 0$) regime of a stack with $M = 3$. In the latter, the total interaction term ($gn_T = 5\hbar\Omega$) is the same for all the represented states, which is equivalent to fix the whole number of particles N in the system for given interaction strength g and (finite) axial length. The open symbols, on the top of dashed lines representing equation (8) for a continuous index k , indicate the chemical potential of the Bloch waves $\Psi_{j,k}$ with $k = 0, \pm 1$. The horizontal dotted lines serve as references for better seeing the energy degeneracies. The two lower panels of figure 2 plot also the density and phase of the nonlinear Bloch wave with $k = 1$ (red bars) for each strand $j = 1, 2, 3$ (which varies along the horizontal axis).

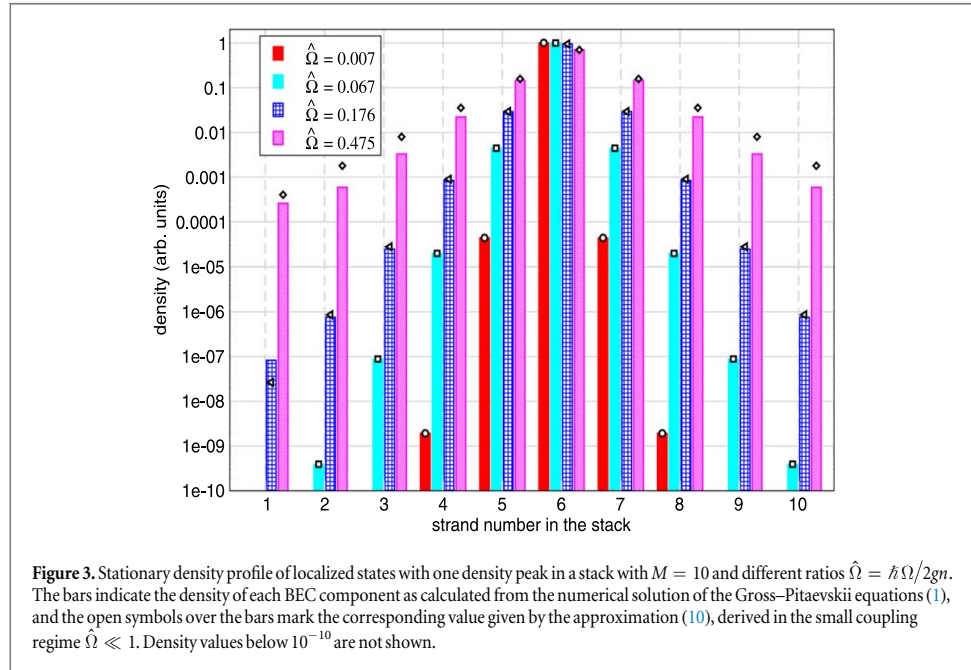
3.2. Standing waves: localized states

Along with the Bloch waves, which realize transverse current states with definite quasimomentum, the BEC stack admits standing-wave solutions without definite quasimomentum. Their existence can be tracked up to the non-interacting regime ($g = 0$), where the standing waves can be built from linear combination of energy-



degenerate Bloch waves (7) with same quasimomentum modulus $|k|$ [30]. Due to the finite size of the stack, such combinations break the lattice symmetry and show differences in the particle density between neighbor BECs, which lies at the origin of the localized-density states in periodic systems known as gap solitons [30]. It is also worth noticing that, when integrated over the axial direction, the array of coupled 1D BECs can be described by a discrete nonlinear Schrödinger model along the transverse y -coordinate, where the existence and stability of localized states have been extensively studied [31].

Within the non-interacting regime, for each pair of energy-degenerate Bloch states with equal $|k|$ one can build also a pair of independent linear combinations with equal weight, which we will denote by $\Psi_{j,|k|}^s$ and $\Psi_{j,|k|}^a$, that have continuation into the nonlinear regime. In this way, families of nonlinear states are built sharing the same topology (node patterns) as the linear state from which they are generated. The simplest example is the ($M = 3$)-stack for the families of states originated at $g = 0$ from the (real) symmetric $\Psi_{j,1}^s = \Psi_{j,1} + \Psi_{j,-1} \propto \cos(2\pi j/3)$ and antisymmetric $\Psi_{j,1}^a = \Psi_{j,1} - \Psi_{j,-1} \propto \sin(2\pi j/3)$ superpositions of Bloch waves with $|k| = 1$. Since the stack has discrete translational symmetry along the y -direction, the states $\Psi_{j',1}^s$ and $\Psi_{j',1}^a$ with shifted indices $j' = j + i$ for given $i = 0, 1, \dots, M - 1$ (and $j' = (j + i) \pmod{M}$) if $(j + i) > M$ are degenerate stationary states with density peaks and associated phase patterns at different lattice sites. Figure 2 shows the chemical potential (top panel), and the density and the phase (at $gn_T = 5\hbar\Omega$, bottom panels) of states belonging to these families in a system with zero axial momentum. Contrary to the original Bloch waves $\Psi_{j,\pm 1}$ (either linear or nonlinear), which have equal density across the stack, the antisymmetric states contain a nodal strand $\Psi_{2,1}^a = 0$ and two density peaks $\Psi_{1,1}^a = -\Psi_{3,1}^a$, whereas the symmetric states present a single density peak $n_{2,1}^s > (n_{3,1}^s = n_{1,1}^s)$. As can be seen in the bottom panel of figure 2 for the



symmetric state, the density localization increases as the states go deeper into the nonlinear regime. For the same total density n_T in the stack, that is for the same total number of particles at given axial length (as represented in the top panel of figure 2), in the interacting case the symmetric states present higher chemical potential than the antisymmetric ones, which in turn have higher chemical potential than the Bloch waves $\Psi_{j,\pm 1}$.

Although other density-localized states can be built (for example, states presenting two adjacent density peaks in either in-phase or out-of-phase, staggered configuration, see e.g. [32]), we will focus on states having either one density peak or two separated out-of-phase density peaks, for varying M , since they provide a representative sample for the study of the generic properties of localized states. As we will see in such states, for $M > 3$ and in the small coupling limit $\hbar\Omega/2gn \ll 1$, where n is now the maximum density in the stack, the mentioned density peaks accumulate practically the whole system density. In a symmetric state with $\mathcal{K}_x = 0$, for instance, the nearest-neighbor BECs $j \pm 1$ of the peak-density strand j follow stationary GP equations

$$gn_{j\pm 1} \psi_{j\pm 1} - \frac{\hbar\Omega}{2}(\psi_j + \psi_{j\pm 2}) = \mu \psi_{j\pm 1}, \quad (9)$$

which, assuming decreasing amplitudes $\psi_j \gg \psi_{j\pm 1} \gg \psi_{j\pm 2}$, can be approximated up to first order in the neighbor amplitudes by $(\hbar\Omega/2)\psi_j \approx -\mu \psi_{j\pm 1}$, and $\mu \approx gn$. As a result, the l -site BECs have amplitudes decreasing in a factor

$$\frac{\psi_l}{\psi_j} = \left(-\frac{\hbar\Omega}{2gn}\right)^{|l-j|}, \quad (10)$$

for distances $|l - j|$ away from the density peak at j . The prototypical density profile is illustrated in figure 3, for different values of the coupling and same chemical potential, in a stack with $M = 10$. The bars indicate the density at each j th BEC as calculated from the numerical solution of the GP equations, while the open symbols mark the values given by the analytical approximation equation (10). The same scenario takes place for the antisymmetric states with $M > 4$, with decreasing amplitudes of opposite signs at both sides of the nodal strand.

4. Linear excitations

The almost lack of dissipation in ultracold-gas systems makes the dynamical stability of the stationary states the crucial issue for their experimental realization. For this reason, in this section we analytically address the linear stability of both Bloch waves and localized states in the stack, to be compared in next sections with their nonlinear dynamics. We make a general analysis based on the Bogoliubov equations for the linear excitations [33] in order to find the stable regimes. For Bloch waves, we have also considered a long-wavelength excitation approach (whose derivation is deferred to the appendix) to derive a resulting system of coupled sine-Gordon-like equations similar to usual models in superconducting Josephson junctions [24].

4.1. Linear stability of Bloch waves

Let us consider the linear excitations $[u_{j,k}(x), v_{j,k}(x)]$ with energy $\hbar\omega$ around the stationary states (7). After substituting $\Psi_{j,k}(x, t) = \exp(-i\mu_k t/\hbar)[\sqrt{n} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + u_j(x) \exp(-i\omega t) + v_j^*(x) \exp(i\omega t)]$ in the GP equation (1), the excitation modes satisfy the Bogoliubov equations

$$H_{\mathbf{k}} u_j + g n e^{i2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} v_j - \frac{\hbar\Omega}{2}(u_{j-1} + u_{j+1}) = \hbar\omega u_j \quad (11)$$

$$-H_{\mathbf{k}} v_j - g n e^{-i2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_j + \frac{\hbar\Omega}{2}(v_{j-1} + v_{j+1}) = \hbar\omega v_j, \quad (12)$$

where $H_{\mathbf{k}} = -(\hbar^2/2m)\partial_x^2 + 2gn - \mu_k$. By making use of the Fourier expansions $u_j(x) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} \exp\{i[(\mathcal{K}_x + q_x)x + (\mathcal{K}_k + q_p)y_j]\}$ and $v_j(x) = \sum_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}} \exp\{-i[(\mathcal{K}_x - q_x)x + (\mathcal{K}_k - q_p)y_j]\}$, where $q_p = 2\pi p/M\delta y$ is the transverse momentum of the excitation for integer $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots [M/2]$, the Bogoliubov equations get decoupled for each 2D wave number $\mathbf{q} = (q_x, q_p)$:

$$\left[E_{\mathbf{k},+} - \hbar\Omega \cos\left(\frac{2\pi(k+p)}{M}\right) \right] c_{\mathbf{q}} + g n d_{\mathbf{q}} = \hbar\omega c_{\mathbf{q}}, \quad (13)$$

$$-\left[E_{\mathbf{k},-} - \hbar\Omega \cos\left(\frac{2\pi(k-p)}{M}\right) \right] d_{\mathbf{q}} - g n c_{\mathbf{q}} = \hbar\omega d_{\mathbf{q}}, \quad (14)$$

where $E_{\mathbf{k},\pm} = \hbar^2(q_x^2 \pm 2\mathcal{K}_x q_x)/2m + gn + \hbar\Omega \cos(2\pi k/M)$. Further, we introduce the linear combinations of modes $f_{\pm}^{(\mathbf{q})} = c_{\mathbf{q}} \pm d_{\mathbf{q}}$, so that

$$(\zeta_{q_x} + 2gn + \hbar\Omega \alpha_{k,p}) f_{+}^{(\mathbf{q})} = \hbar \left(\omega - \mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} - \Omega \beta_{k,p} \right) f_{-}^{(\mathbf{q})} \quad (15)$$

$$(\zeta_{q_x} + \hbar\Omega \alpha_{k,p}) f_{-}^{(\mathbf{q})} = \hbar \left(\omega - \mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} - \Omega \beta_{k,p} \right) f_{+}^{(\mathbf{q})}, \quad (16)$$

where $\zeta_{q_x} = \hbar^2 q_x^2/2m$ is the kinetic energy of the modes along each 1D BEC, and the transverse excitations are defined through the parameters

$$\alpha_{k,p} = \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{M}\right) \right], \quad (17)$$

and

$$\beta_{k,p} = \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \sin\left(\frac{2\pi p}{M}\right). \quad (18)$$

Therefore, for each stationary state Ψ_k , by solving equations (15) and (16) for the frequency ω , we get the dispersion relation of linear excitations

$$\hbar\omega = \hbar \left(\mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} + \Omega \beta_{k,p} \right) \pm \sqrt{(\zeta_{q_x} + \hbar\Omega \alpha_{k,p})(\zeta_{q_x} + \hbar\Omega \alpha_{k,p} + 2gn)}, \quad (19)$$

composed of M double branches corresponding to the different values of p , which indexes the quasimomentum excitation. Equation (19) provides the general result, as a function of the parameters of the system $\{M, \Omega, gn\}$, for the linear stability of Bloch states with momentum $\mathbf{k} = (K_x, K_k)$ in a stack of coupled BECs. It gives rise to complex frequencies, associated to dynamical instabilities, for negative values of the expression inside the square root. These are modulational instabilities that break down the homogeneous density profile across the stack. They can only appear if $\alpha_{k,p}$ takes negative values, which occurs for $k > M/4$. Hence, all the Bloch states with constant density are dynamically stable if $k \leq M/4$, irrespective of the coupling Ω . For increasing M , the first stable Josephson current ($k \neq 0$) state corresponds to $M = 4$ and $k = \pm 1$, which are discrete transverse vortices with circulation $\Gamma_{\pm 1} = \pm 4\hbar/m$ (see section 5 below). This quasimomentum-dependence stability of the Bloch waves resembles similar features of the discrete nonlinear Schrödinger equation [32, 34]. As we show in sections 5 and 6 by analyzing some particular examples, the stability features of Bloch states predicted by equation (19) are confirmed by the nonlinear dynamics as obtained from the numerical simulations of the time-dependent GP equation (1).

Among the dispersion branches of equation (19), the $p = 0$ branch is always gapless (because $\alpha_{k,0} = \beta_{k,0} = 0$), whereas the rest present energy gaps given (at $q_x = 0$) by

$$\hbar\omega_g = \hbar\Omega \beta_{k,p} \pm \sqrt{\hbar\Omega \alpha_{k,p}(\hbar\Omega \alpha_{k,p} + 2g n)}, \quad (20)$$

which show up even in the non-interacting ($g = 0$) case. The speed of sound along each BEC (i.e. along the x coordinate) can be calculated from the gapless branch of the dispersion in the long-wavelength limit. In the frame of reference moving with axial velocity $\hbar K_x/m$, it is:

$$c = \left(\frac{\partial \omega}{\partial q_x} \right)_{q_x \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{gn}{m}}. \quad (21)$$

These quantities, $\hbar\omega_g$ and c , are relevant for the energetic stability of the system, since they define thresholds, in energy and speed, respectively, for the superfluid excitation by external perturbations.

In order to solve for the excitation spectrum, we choose the usual Bogoliubov normalization, $\int dx (|u_j|^2 - |v_j|^2) = 1$, for the modes (u_j, v_j) that have real energy values. By selecting also real values for the Fourier amplitudes c_q and d_q , it follows that $|c_q|^2 - |d_q|^2 = f_+^{(q)} f_-^{(q)} = 1/L_x$, where L_x is the axial length of the BECs. With this prescription we solve equations (15) and (16) for the stable excitation modes

$$f_{\pm}^{(q)} = \pm \frac{1}{\sqrt{L_x}} \left(\frac{\zeta_{q_x} + \hbar \Omega \alpha_{k,p}}{\zeta_{q_x} + \hbar \Omega \alpha_{k,p} + 2gn} \right)^{1/4}. \quad (22)$$

The unstable excitation modes are associated with the complex energies of equation (19). The corresponding normalization reads $\int dx (|u_j|^2 - |v_j|^2) = 0$ [33], and we set $\int dx |u_j|^2 = 1$. Then $d_q = c_q \exp(i2\varphi_q)$, and the unstable excitation modes are

$$f_{\pm}^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{L_x}} [1 \pm \exp(i2\varphi_q)], \quad (23)$$

where, from equations (15) and (16), the phase φ_q is given by

$$\varphi_q = \text{atan} \left(\pm \sqrt{-\frac{\zeta_{q_x} + \hbar \Omega \alpha_{k,p} + 2gn}{\zeta_{q_x} + \hbar \Omega \alpha_{k,p}}} \right). \quad (24)$$

4.1.1. Limit of long-wavelength excitations and small coupling

As follows from the hydrodynamic approach for the linear excitations of Bloch waves developed in the appendix, in the long-wavelength regime and small Josephson coupling, ($\hat{\Omega} = \hbar \Omega / 2gn \ll 1$), the equations of motion for excitations in the relative phase ϕ_j and relative density ρ_j become:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial x^2} - \alpha_k \frac{\delta^2 \rho_j}{\delta y^2} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} - \alpha_k \frac{\delta^2 \sin \phi_j}{\delta y^2} = \beta_k \frac{\rho_{j+1} - \rho_{j-1}}{\delta y^2}, \quad (26)$$

where $\alpha_k = \cos(2\pi k/M)$ and $\beta_k = \sin(2\pi k/M)$. This system of M pairs of equations describes the linear dynamics of the underlying array of junctions determined by the GP equations (1). The k -dependent factor α_k multiplying the transversal (discrete) derivative indicates a varying penetration length $\xi_{j,k} = \delta y / \sqrt{|\alpha_k|}$. The sine functions in equation (26) should be formally substituted by their arguments $\sin \phi_j \approx \phi_j$, since we have assumed a linear regime. By keeping them, we highlight the correspondence with a sine-Gordon-like equation, where kink solutions can be found [2]. As a limiting case, the kink-type solutions have demonstrated to be useful in the search of solitonic states in the nonlinear dynamics of two-component condensates [13, 14, 17, 18, 35].

Equations (25) and (26) admit plane wave solutions with the same phase shifts across the stack previously found in equation (6):

$$\begin{aligned} \rho_{j,k,p}(x, t) &= c_q \exp [i(q_x x + q_p y_j - \omega_{k,p} t)], \\ \phi_{j,k,p}(x, t) &= d_q \exp [i(q_x x + q_p y_j - \omega_{k,p} t)], \end{aligned} \quad (27)$$

with transverse momentum $q_p = 2\pi p / M\delta y$. After substitution, one gets the amplitude relation $c_q = i \nu d_q$, where ν is a real number, and the double-branched dispersion

$$\begin{aligned} \omega_{k,p}^{(1)} &= c \sqrt{q_x^2 + \frac{2}{\delta y^2} \alpha_{k,p}}, \\ \omega_{k,p}^{(2)} &= c \sqrt{q_x^2 + \frac{2}{\delta y^2} (\alpha_{k,p} + \nu \beta_{k,p})}. \end{aligned} \quad (28)$$

For $\beta_k = 0$ (that is, when $k = 0$ or $k = M/2$, and $\alpha_k = \pm 1$) both branches coincide, in agreement with the Bogoliubov dispersion equation (19) in the small coupling limit, $\hat{\Omega} \ll 1$, considered here. The gaps are given by $\omega_{k,p}^{(1)} = c \sqrt{2\alpha_{k,p}} / \delta y$. Additionally, for $q_p \ll 1$ the dispersion can be written as $\omega_{k,p} = c \sqrt{q_x^2 \pm q_p^2}$, which is the

usual dispersion $\omega = c |\mathbf{q}|$ of a continuous (relativistic) 2D system when $k = 0$, and contains instabilities when $k = M/2$ for $|q_p| > |q_x|$.

The second dispersion branch $\omega_{k,p}^{(2)}$, is not fully consistent with the Bogoliubov spectrum for $\beta_{k,p} \neq 0$, unless $\nu = 1$ and the limit $\hbar\Omega \rightarrow 0$ were considered. Such inconsistencies have been previously found in two coupled condensates (see e.g. [9]), and arise from neglecting the quantum pressure term. As a consequence, and as usual within this approximation, the validity of this hydrodynamic model gets restricted to the lowest energy excitations (long-wavelength excitation modes of the lowest energy branch), which is equivalent to consider decoupled wave equations (25) and (26), neglecting the right hand side of the latter, for the relative densities and phases.

4.2. Linear stability of localized states

We study the stability of the previously introduced standing-wave states having one or two density peaks in the stack of constant density BECs. The analysis of the simplest systems with $M = 3, 4$ components serves as an insightful starting point, with straightforward analytical solutions for the antisymmetric states. For a generic M value, we focus on the small coupling limit ($\hat{\Omega} = \hbar\Omega/2gn \ll 1$, where now n is the peak (or maximum) density in the stack).

The wavefunctions of the antisymmetric states with $M = 3$ are: $\Psi_{2,|1|}^a = 0$ and $\Psi_{3,|1|}^a = -\Psi_{1,|1|}^a = \sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_{|1|}^a t/\hbar)]$, where the chemical potential is $\mu_{|1|}^a = \hbar^2 \mathcal{K}_x^2/2m + gn + \hbar\Omega/2$. Note that the stationary phase pattern of these nonlinear states (for $\mathcal{K}_x = 0$ and $t = 0$) is determined by the corresponding linear state of this family (at $g = 0$), in this case we set $\Psi_{j,|1|}^a \propto \sin(2\pi(j+1)/3)$. Two pairs of Bogoliubov equations are obtained, namely for the first BEC with $j = 1$:

$$H_{|1|}^a u_1 + g n e^{i2\mathcal{K}_x x} v_1 - \frac{\hbar\Omega}{2}(u_2 + u_3) = \hbar\omega u_1, \quad (29)$$

$$-H_{|1|}^a v_1 - g n e^{-i2\mathcal{K}_x x} u_1 + \frac{\hbar\Omega}{2}(v_2 + v_3) = \hbar\omega v_1, \quad (30)$$

where $H_{|1|}^a = -(\hbar^2/2m)\partial_x^2 + 2gn - \mu_{|1|}^a$, and identical equations follow for the $j = 3$ BEC component by swapping indexes 1 and 3; and for the nodal $j = 2$ component

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_{|1|}^a\right)u_2 - \frac{\hbar\Omega}{2}(u_1 + u_3) = \hbar\omega u_2, \quad (31)$$

$$-\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_{|1|}^a\right)v_2 + \frac{\hbar\Omega}{2}(v_1 + v_3) = \hbar\omega v_2. \quad (32)$$

As previously, making use of the Fourier expansions $u_j(x) = \sum_q c_q \exp[i(\mathcal{K}_x + q_x)x]$ and $v_j(x) = \sum_q d_q \exp\{-i[(\mathcal{K}_x - q_x)x]\}$, after some algebraic manipulations, we get the following six branches of the spectrum:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{|1|}^a &= \hbar\mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} \pm \sqrt{(\zeta_{q_x} - \hbar\Omega)(\zeta_{q_x} - \hbar\Omega + 2gn)}, \\ \hbar\omega_{|1|}^a &= \hbar\mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} \pm \sqrt{\left(\zeta_{q_x} - \frac{3\hbar\Omega}{2}\right)\left(\zeta_{q_x} - \frac{3\hbar\Omega}{2} \pm 2gn\gamma^{(3)}\right) - \lambda^{(3)}\frac{\hbar\Omega}{2}gn}, \end{aligned} \quad (33)$$

where $\gamma^{(3)} = \sqrt{(1 - \hat{\Omega}/2)^2 + 2\hat{\Omega}^2}$, and $\lambda^{(3)} = 1 - 9\hat{\Omega}/4$. As is apparent from the negative values of the radicand, the system is unstable.

The analysis is simpler for the antisymmetric states with $M = 4$, where the wave functions are $\Psi_{3,|1|}^a = -\Psi_{1,|1|}^a = \sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_{|1|}^a t/\hbar)]$, and $\Psi_{2,|1|}^a = \Psi_{4,|1|}^a = 0$, and the chemical potential does not depend on the coupling $\mu_{|1|}^a = \hbar^2 \mathcal{K}_x^2/2m + gn$. Similar manipulations of the corresponding Bogoliubov equations as before, which coincide with equations (29)–(32), lead to the eight branches of the spectrum

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{|1|}^a &= \hbar\mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} \pm (\zeta_{q_x} - gn), \\ \hbar\omega_{|1|}^a &= \hbar\mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} \pm \sqrt{\zeta_{q_x}(\zeta_{q_x} + 2gn)}, \\ \hbar\omega_{|1|}^a &= \hbar\mathcal{K}_x \frac{\hbar q_x}{m} \pm (\gamma^{(4)} \pm \sqrt{(\gamma^{(4)})^2 - (\lambda^{(4)})^2})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (34)$$

where $\gamma^{(4)} = \zeta_{q_x}^2 + (\hbar\Omega)^2 + (gn/2)^2$ and $\lambda^{(4)} = [\zeta_{q_x}^2 - (\hbar\Omega)^2 - (gn)^2]^2 - (gn)^2(\zeta_{q_x} - gn)^2$. Different to the $M = 3$ case, and although the last expression in (34) can in general produce imaginary frequencies, it is still

possible to find dynamically stable states (with only real frequencies) in the small coupling regime whenever $\lambda^{(4)} < \gamma^{(4)}$.

The symmetric states involve a more cumbersome algebra. For the simplest stack with $M = 3$, the chemical potential is $\mu_{|1|}^s = \hbar^2 \mathcal{K}_x^2 / 2m + (2gn_{1,|1|}^s + g\delta n_{1,|1|}^s - \hbar\Omega/2 + \sqrt{(g\delta n_{1,|1|}^s + \hbar\Omega/2)^2 + 2(\hbar\Omega)^2})/2$, where $\delta n_{1,|1|}^s = n_{2,|1|}^s - n_{1,|1|}^s$ is the density contrast between components, which increases with the chemical potential for a given coupling. An asymptotic analysis can be readily done in the small coupling limit $\hat{\Omega} \ll 1$, where the densities fulfill $(n_{2,|1|}^s \approx n_T) \gg (n_{1,|1|}^s = n_{3,|1|}^s)$. Then $\Psi_{2,|1|}^s = \sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_{|1|}^s t / \hbar)]$ and $(\Psi_{1,|1|}^s = \Psi_{3,|1|}^s) \approx -\hat{\Omega} \Psi_{2,|1|}^s$, and the chemical potential is $\mu_{|1|}^s \approx \hbar^2 \mathcal{K}_x^2 / 2m + gn$. In this approximation, the Fourier expansion of the excitation modes leads to the same functional form of the spectrum (34) with the substitution of $\hbar\Omega$ by $\hbar\Omega/\sqrt{2}$. As a consequence, dynamical stability of the (one-peak) symmetric states is also expected in the small $\hat{\Omega}$ regime. In this case, the strong localization of the density in a single strand, with neighbor densities decreasing as powers of $\hat{\Omega}^2$, allows the stability prediction to be extended to arbitrary M , and even to systems with open boundary conditions. Furthermore, the same analysis also applies to the (two-peak) antisymmetric states with $M > 4$. As we later demonstrate in section 6, the numerical solutions of both the Bogoliubov equations for the linear excitations and the GP equation for the nonlinear time evolution confirm these predictions.

5. Transverse josephson vortices

In this section we compare the stability predictions of the linear analysis for Bloch wave states with the numerical solutions of the GP equation (1) for representative sets of parameters. Just for the purpose of showing two different examples, we consider one case with zero axial momentum $\mathcal{K}_x = 0$ and another with $\mathcal{K}_x \neq 0$. As we will see, the linear predictions coincide with the numerical results of the nonlinear dynamics, and in particular, stable transverse Josephson vortices (associated with Bloch waves having non-zero circulation) are found.

5.1. Case $M = 3$ and $\mathcal{K}_x = 0$

The Bloch waves have quasimomentum \mathcal{K}_k for values of $k = 0, \pm 1$. Let us analyze the solutions for each particular case:

- $k = 0$: this is the ground state for given interaction strength and total density. All the components share the same wave function $\psi_0 = \sqrt{n} \exp(-i\mu_0 t / \hbar)$, with chemical potential $\mu_0 = gn - \hbar\Omega$. By using the parameters $\alpha_{0,p} = \{0, 3/2, 3/2\}$ and $\beta_{0,p} = \{0, 0, 0\}$, with $p = 0, \pm 1$, the dispersion curves, $\omega_{0,p}$, are

$$\hbar\omega_{0,0} = \pm \sqrt{\zeta_{q_x} (\zeta_{q_x} + 2gn)}, \quad (35)$$

$$\hbar\omega_{0,\pm 1} = \sqrt{\left(\zeta_{q_x} + \frac{3\hbar\Omega}{2}\right) \left(\zeta_{q_x} + \frac{3\hbar\Omega}{2} + 2gn\right)}. \quad (36)$$

These expressions are plotted in the bottom panel of figure 4 for a system with $\hbar\Omega = 0.2 gn$. As expected, all the excitation energies are real, and the state is stable.

- $k = 1$: the wave functions for the BEC components are:

$$\psi_{1,1} = \sqrt{n} \exp[i(2\pi/3 - \mu_1 t / \hbar)], \quad (37)$$

$$\psi_{2,1} = \sqrt{n} \exp[i(4\pi/3 - \mu_1 t / \hbar)], \quad (38)$$

$$\psi_{3,1} = \sqrt{n} \exp[i(2\pi - \mu_1 t / \hbar)], \quad (39)$$

which configure a discrete anti-vortex of circulation $\Gamma_1 = -3\sqrt{3} \hbar / 2m$ around the discrete y -direction. Analogously, the Bloch wave with $k = -1$ corresponds to an (energetically degenerate) vortex with opposite circulation $\Gamma_{-1} = -\Gamma_1$. The chemical potential is $\mu_1 = gn + \hbar\Omega/2$ and the parameters $\alpha_{1,p} = \{0, -3/4, -3/4\}$ and $\beta_{1,p} = \{0, 3/4, -3/4\}$. The resulting dispersion curves, $\omega_{1,p}$, are:

$$\hbar\omega_{1,0} = \pm \sqrt{\zeta_{q_x} (\zeta_{q_x} + 2gn)}, \quad (40)$$

$$\hbar\omega_{1,1} = \frac{3\hbar\Omega}{4} \pm \sqrt{\left(\zeta_{q_x} - \frac{3\hbar\Omega}{4}\right) \left(\zeta_{q_x} - \frac{3\hbar\Omega}{4} + 2gn\right)}, \quad (41)$$

$$\hbar\omega_{1,-1} = -\frac{3\hbar\Omega}{4} \pm \sqrt{\left(\zeta_{q_x} - \frac{3\hbar\Omega}{4}\right) \left(\zeta_{q_x} - \frac{3\hbar\Omega}{4} + 2gn\right)}. \quad (42)$$

The upper panel of figure 4 depicts these expressions for a system with $\hbar\Omega = 0.2 gn$. For $\omega_{1,\pm 1}$, the negative signs under the square root indicate the presence of instabilities on the vortex state. An example of the decay

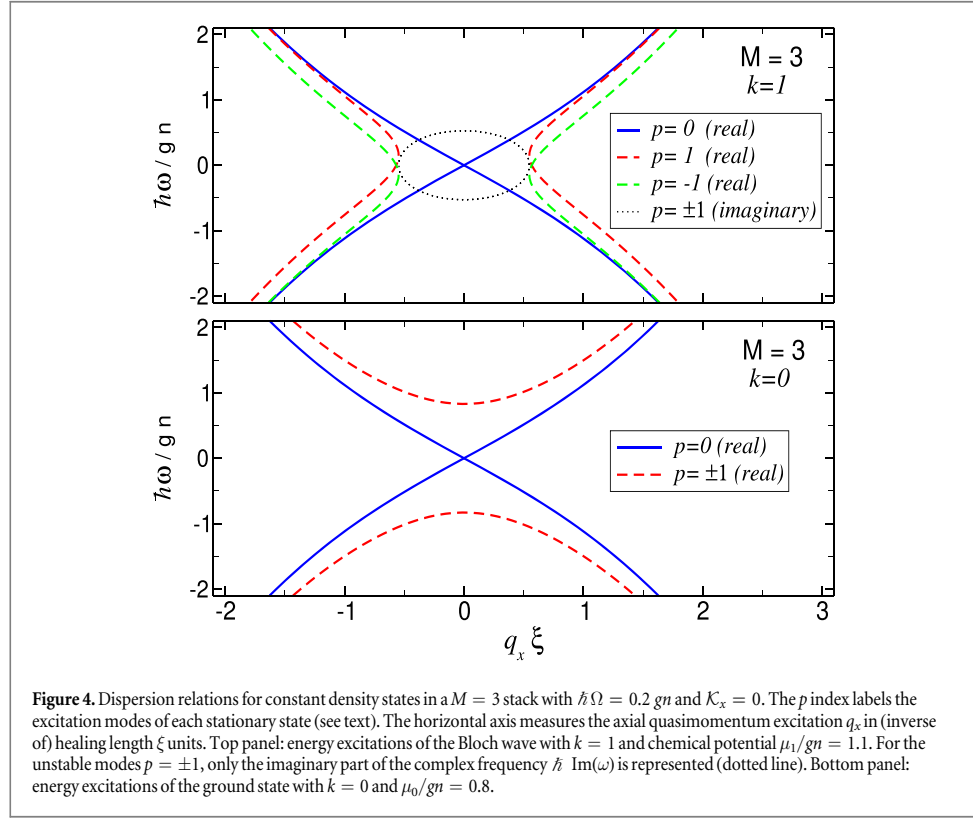


Figure 4. Dispersion relations for constant density states in a $M = 3$ stack with $\hbar\Omega = 0.2gn$ and $\mathcal{K}_x = 0$. The p index labels the excitation modes of each stationary state (see text). The horizontal axis measures the axial quasimomentum excitation q_x in (inverse of) healing length ξ units. Top panel: energy excitations of the Bloch wave with $k = 1$ and chemical potential $\mu_1/gn = 1.1$. For the unstable modes $p = \pm 1$, only the imaginary part of the complex frequency $\hbar \text{Im}(\omega)$ is represented (dotted line). Bottom panel: energy excitations of the ground state with $k = 0$ and $\mu_0/gn = 0.8$.

dynamics of this unstable vortex state is shown in figure 5. The graph depicts the real time evolution of the system after imprinting a small random perturbation on the stationary state. The data, axial phases (top panels) and axial densities (bottom panels) for each component, have been obtained from the numerical solution of the GP equations (1) with periodic boundary conditions in the axial coordinate, given in units of the healing length ξ . As can be seen, the stationary configuration survives for a time lapse of around $t \approx 10 \xi/c$, beyond which soliton-like structures (tracing thick, dark paths on the axial density plots), producing strong density and phase modulations. Different noise seeds on the initial state produce different density and phase patterns during the decay dynamics, with the only common feature of the emergence of several, interacting solitons.

5.2. Case $M = 4$ and $\mathcal{K}_x \neq 0$: stable josephson vortices with $k = \pm 1$

Here we consider arbitrary axial momentum (\mathcal{K}_x) states. The Bloch waves have $k = 0, \pm 1, 2$, and the excitation modes have also $p = 0, \pm 1, 2$.

- $k = 0$: this corresponds to the ground state for a given \mathcal{K}_x , $\psi_0 = \sqrt{n} \exp(i\mathcal{K}_x x - i\mu_0 t/\hbar)$, with chemical potential $\mu_0 = gn + \hbar^2 \mathcal{K}_x^2/2m - \hbar\Omega$, and system parameters $\alpha_{0,p} = \{0, 1, 1, 2\}$ and $\beta_{0,p} = \{0, 0, 0, 0\}$. The dispersion curves read:

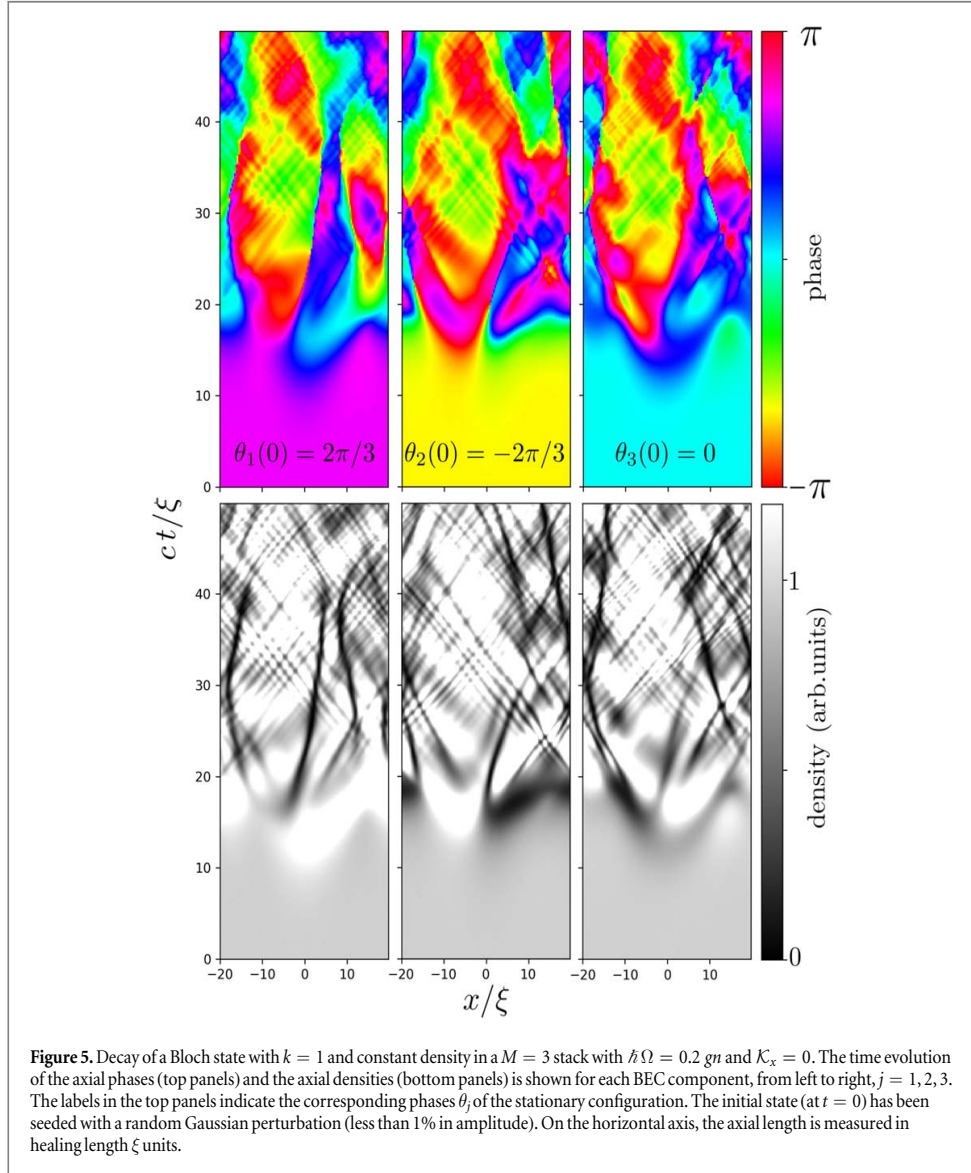
$$\hbar\omega_{0,0} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{\zeta_{q_x} (\zeta_{q_x} + 2gn)}, \quad (43)$$

$$\hbar\omega_{0,\pm 1} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{(\zeta_{q_x} + \hbar\Omega)(\zeta_{q_x} + \hbar\Omega + 2gn)}, \quad (44)$$

$$\hbar\omega_{0,2} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{(\zeta_{q_x} + 2\hbar\Omega)(\zeta_{q_x} + 2\hbar\Omega + 2gn)}. \quad (45)$$

These expressions are plotted in the bottom panel of figure 6 for a system with $\hbar\Omega = 0.2gn$ and $\mathcal{K}_x \xi = 0.1$.

- $k = 1$: the chemical potential is $\mu_1 = gn + \hbar^2 \mathcal{K}_x^2/2m$, and $\alpha_{1,p} = \{0, 0, 0, 0\}$, $\beta_{1,p} = \{0, 1, -1, 0\}$. The wave functions are:



$$\begin{aligned}\psi_{1,1} &= -\psi_{3,1} = i\sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_1 t/\hbar)], \\ \psi_{2,1} &= -\psi_{2,1} = \sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_1 t/\hbar)],\end{aligned}\quad (46)$$

which yield a discrete, transverse vortex of circulation $\Gamma_1 = 4\hbar/m$. The interesting property of this state is its stability, irrespective of the axial momentum, which allows for its experimental realization. The dispersion curves $\omega_{1,p}$ contain only real frequencies (see figure 6):

$$\hbar\omega_{1,0} = \hbar\omega_{1,2} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{\zeta_{q_x}(\zeta_{q_x} + 2gn)}, \quad (47)$$

$$\hbar\omega_{1,1} = \hbar \left(\frac{\hbar \mathcal{K}_x q_x}{m} + \Omega \right) \pm \sqrt{\zeta_{q_x}(\zeta_{q_x} + 2gn)}, \quad (48)$$

$$\hbar\omega_{1,-1} = \hbar \left(\frac{\hbar \mathcal{K}_x q_x}{m} - \Omega \right) \pm \sqrt{\zeta_{q_x}(\zeta_{q_x} + 2gn)}. \quad (49)$$

We have also performed numerical simulations of the real time evolution of these states for $\hbar\Omega = 0.2gn$ and $\mathcal{K}_x \xi = 0.1$ (same parameters as in figure 6). Our numerical results obtained from the solution of the GP equations (1), after seeding a random perturbation in the stationary state, confirm the dynamical stability of this state, since the initial configuration (46) keeps robust against the perturbations.

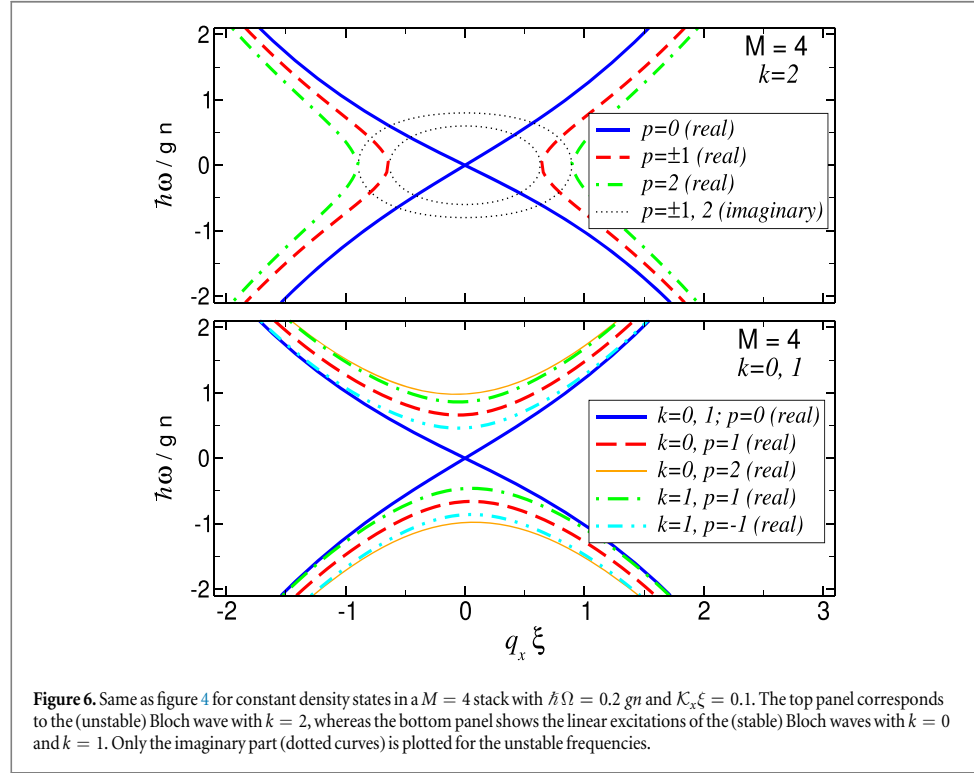


Figure 6. Same as figure 4 for constant density states in a $M = 4$ stack with $\hbar\Omega = 0.2 gn$ and $\mathcal{K}_x \xi = 0.1$. The top panel corresponds to the (unstable) Bloch wave with $k = 2$, whereas the bottom panel shows the linear excitations of the (stable) Bloch waves with $k = 0$ and $k = 1$. Only the imaginary part (dotted curves) is plotted for the unstable frequencies.

- $k = 2$: this state lies at the edge of the Brillouin zone, having maximum chemical potential $\mu_2 = gn + \hbar^2 \mathcal{K}_x^2 / 2m + \hbar\Omega$, and parameters $\alpha_{2,p} = \{0, -1, -1, -2\}$ and $\beta_{2,p} = \{0, 0, 0, 0\}$. The wave function in each BEC component is:

$$\psi_{1,2} = \psi_{3,2} = \sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_2 t / \hbar)], \quad (50)$$

$$\psi_{2,2} = \psi_{4,2} = -\sqrt{n} \exp[i(\mathcal{K}_x x - \mu_2 t / \hbar)]. \quad (51)$$

In this state the Josephson circulation vanishes, $\Gamma_2 = 0$, and the system presents a sequence of π —Josephson junctions which are unstable. This feature is captured by the linear dispersion, which shows several unstable branches

$$\hbar\omega_{2,0} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{\zeta_{q_x} (\zeta_{q_x} + 2gn)}, \quad (52)$$

$$\hbar\omega_{2,\pm 1} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{(\zeta_{q_x} - \hbar\Omega)(\zeta_{q_x} - \hbar\Omega + 2gn)}, \quad (53)$$

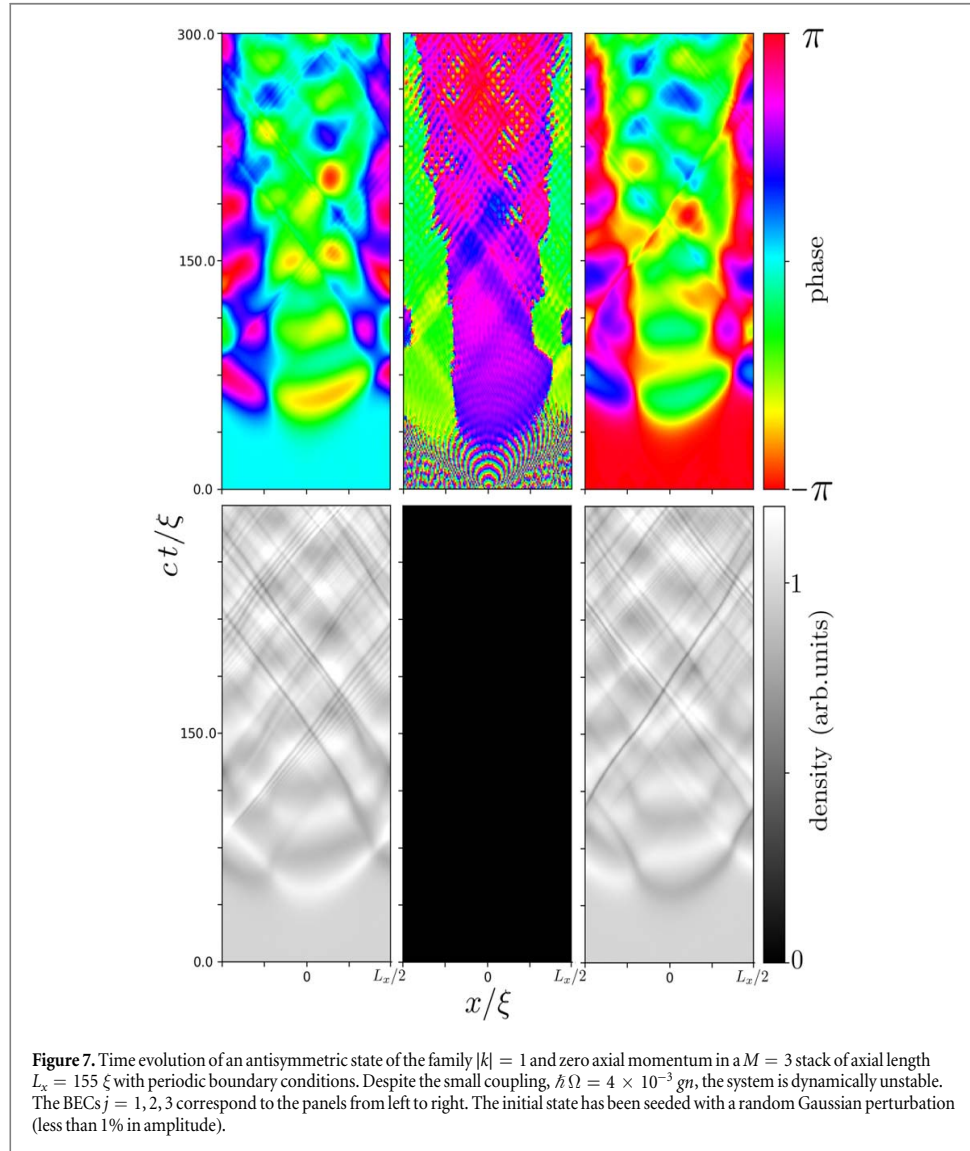
$$\hbar\omega_{2,2} = \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_x q_x}{m} \pm \sqrt{(\zeta_{q_x} - 2\hbar\Omega)(\zeta_{q_x} - 2\hbar\Omega + 2gn)}. \quad (54)$$

Again our numerical simulations with the time-dependent GP equations (1), for such a state with $\hbar\Omega = 0.2 gn$ and $\mathcal{K}_x \xi = 0.1$, confirm the linear prediction and show the decay of the initial, constant density state.

6. Nonlinear dynamics of localized states

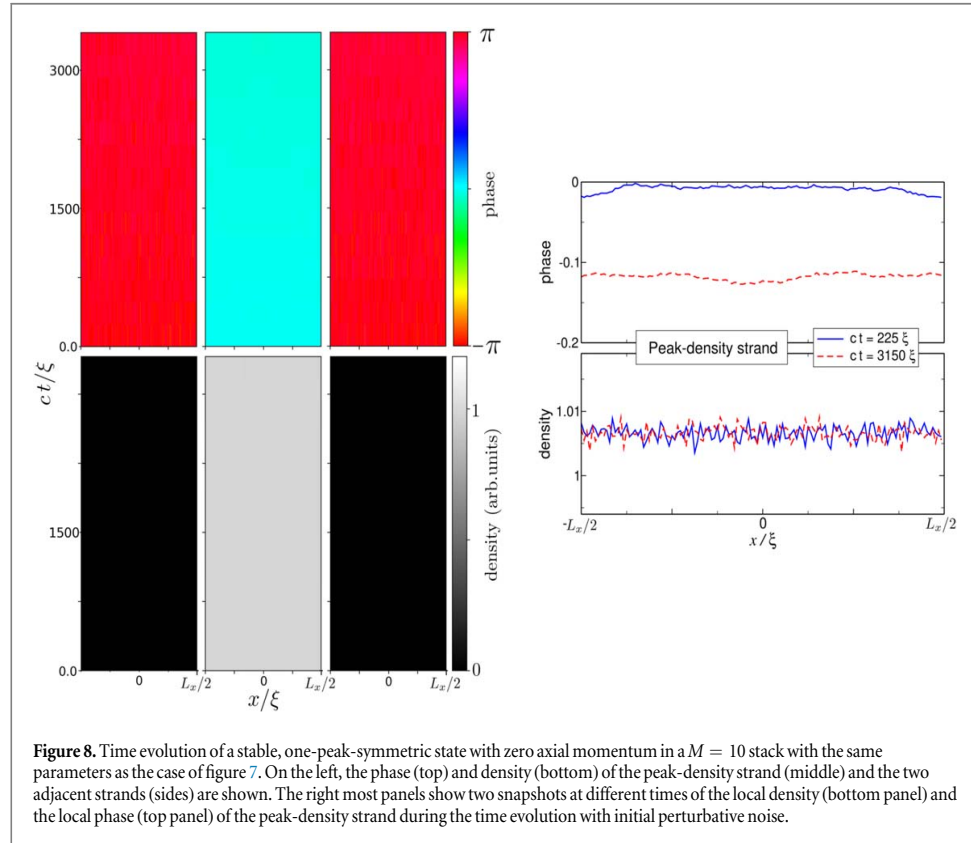
We study the nonlinear dynamics of the localized states with one or two density peaks in the stack of constant density BECs. First, we numerically solve the Bogoliubov equations in order to check the linear stability of the corresponding stationary state. Next, we perform the real time evolution with the GP equation (1) of this state after adding perturbative noise.

As predicted by the linear analysis of section 4.2, in the simplest stack with $M = 3$, the nonlinear dynamics of the antisymmetric states is unstable. To illustrate a typical decay process, figure 7 shows the real time evolution of an antisymmetric state with small coupling, $\hbar\Omega = 4 \times 10^{-3} gn$, and zero axial momentum, $\mathcal{K}_x = 0$. The data have been obtained from the numerical solution of GP equation (1) with periodic boundary conditions in the



axial coordinate. The axial length is $L_x = 155 \xi$. As can be seen, the initial nodal strand (middle panels in figure 7) remains unpopulated during the whole evolution, and its phase is essentially undefined. The decay process is qualitatively different to the Bloch wave case presented in figure 5. The asymmetric state shows robust features of structural stability, roughly keeping the initial density pattern across the stack.

On the contrary, we have checked that the nonlinear evolution of the symmetric state with $M = 3$, for the same parameters used above, is stable against perturbations. For larger stacks (we have performed simulations up to $M = 11$), our numerical results show that both the antisymmetric states (with two density peaks) in stacks with $M \geq 4$, and the symmetric states (with one density peak) in stacks with $M \geq 3$ are also stable for the mentioned small coupling. However, the stability is lost at higher coupling values (at $\hbar\Omega \gtrsim 1 \times 10^{-2} gn$ for the parameters mentioned before). As a case example of stability, the time evolution of a symmetric state in a stack with $M = 10$ components is shown in figure 8. In the left panels, only the peak-density strand and its nearest neighbors are shown, since the other components have a practically null density. The initial, $t = 0$, state has been seeded with perturbative noise, the detailed evolution of which at intermediate times is depicted on the right panels for the peak-density strand. As can be seen, the initial localized configuration is robust against the perturbations. Due to the strong density localization, the dynamics is insensitive to the change in the boundary conditions. Our results show that a one-peak state with open-boundary conditions follows a dynamics which is indistinguishable from that shown in figure 8.



7. Discussion and conclusions

The rich phenomenology presented by the stacks of parallel Josephson junctions can be readily realized in ultracold atomic gases by means of 1D or 2D optical lattices [28, 29]. These systems support nonlinear states whose dynamics reflects the interplay of continuous (along the axial x -direction of the BECs) and discrete (across the stack) features, and are promising candidates for pursuing technical applications with close similarities to superconducting and photonic devices. In this work, we have contributed to this goal and have demonstrated the existence and stability of simultaneous superfluid currents flowing through both directions of a 2D stack. While the translation invariance along the x -axis allows for the excitation of axial-momentum eigenstates, the periodic arrangement of Josephson junctions induced by the linear coupling permits transverse Bloch waves carrying tunneling supercurrents. If the stack shapes a closed loop, these Josephson currents around it yield non-regular vortices whose circulation is a generic non-integer multiple of h/m .

The dispersion relations of the transverse Josephson vortices have been obtained from the analytical solution of the linear Bogoliubov equations for the condensate excitations, and compared against the nonlinear time evolution of these states as given by the numerical solution of the GP equation. In all the cases, the subsequent nonlinear dynamics is consistent with the stability predictions of the linear analysis.

For the sake of comparison with the usual coupled-sine-Gordon-equation model for coupled superconductors, a further linear analysis of the transverse Josephson vortices has been performed in the hydrodynamic limit. As a result, we have derived linear wave-like equations for the relative phases and densities of the BEC components that resemble the mentioned model in the limit of small coupling.

We have also shown that the Josephson supercurrents are suppressed in steady states that break the symmetry of the discrete lattice and can present a strong localization across the stack. These nonlinear states belong to continuous families of solutions to the GP equation that can be tracked up to the non-interacting regime, where they are linear superposition of degenerate Bloch waves with opposite quasimomentum. Among these families, the gap-soliton-like states showing one or two dominant density peaks find dynamical stability in finite systems within a small coupling regime.

The exploration of different topologies in the stack, or the effect of exposing the system to synthetic gauge fields [28], stand out as interesting ways of extending the present work that will be reported elsewhere.

Acknowledgments

MG and XV acknowledge financial support from Ministerio de Economía y Competitividad (Spain), Agencia Estatal de Investigación (AEI) and Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER, EU) under Grants FIS2017-87801-P and FIS2017-87534-P, from Generalitat de Catalunya Grant No. 2017SGR533, and Project MDM-2014-0369 of ICCUB (Unidad de Excelencia María de Maeztu).

Appendix: Long-wavelength excitations. Hydrodynamic approach

We start by introducing low energy perturbations $[\delta n_j(x, t), \delta \theta_j(x, t)]$ around the density and the phase of an equilibrium state $\Psi_j = \sqrt{n_j} \exp(i\theta_j) \rightarrow \sqrt{n_j + \delta n_j} \exp(i\theta_j + i\delta \theta_j)$. Then, we substitute the perturbed states in equations (2) and (3), and keep terms up to first order in the perturbations. We focus on the analysis of Bloch states with $n_j = n$. The mentioned procedure leads to

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \delta n_j}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \frac{\partial^2 \delta \theta_j}{\partial x^2} - \Omega \left(\alpha_k (\sin \delta \theta_{j+1,j} - \sin \delta \theta_{j,j-1}) + \beta_k \frac{\delta \bar{n}_{j+1,j} - \delta \bar{n}_{j,j-1}}{2n} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \delta \theta_j}{\partial t} = -\frac{g \delta n_j}{\hbar} - \frac{\Omega}{2} \left(\beta_k (\sin \delta \theta_{j+1,j} + \sin \delta \theta_{j,j-1}) - \alpha_k \frac{\delta n_{j+1,j} - \delta n_{j,j-1}}{2n} \right), \quad (\text{A.2})$$

where $\delta \theta_{ij} = \delta \theta_i - \delta \theta_j$, $\delta n_{ij} = \delta n_i - \delta n_j$, $\delta \bar{n}_{ij} = \delta n_i + \delta n_j$ are the perturbations in relative phase, relative density and total density, respectively, and $\alpha_k = \cos(2\pi k/M)$, $\beta_k = \sin(2\pi k/M)$. As usual in a long-wavelength approximation, we have dropped the quantum-pressure term in equation (A.2). For reasons that will become apparent later, we have kept the sine functions ($\sin \delta \theta_{ij}$) even in the linear approximation in order to track the Josephson currents, but they will be replaced by their argument (for consistency within the assumed first order approximation) at intermediate steps of the analytical derivations.

In what follows, we use the short notation $\rho_j = \delta n_{j+1,j}/n$, $\bar{\rho}_j = \delta \bar{n}_{j+1,j}/n$, $\phi_j = \delta \theta_{j+1,j}$, and also $\bar{\phi}_j = \delta \theta_{j+1} + \delta \theta_j$ for the total phase. Since these quantities appear explicitly in previous expressions, we look for their equations of motion by adding and subtracting equations (A.1) and (A.2) for consecutive components. For the relative quantities we get

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \alpha_k \frac{\delta^2 \sin \phi_j}{\delta y^2} + \beta_k \frac{\rho_{j+1} - \rho_{j-1}}{2 \delta y^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial t} = -\frac{m c^2}{\hbar} \rho_j + \frac{\hbar}{m} \left[\frac{\alpha_k \delta^2 \rho_j}{4 \delta y^2} - \beta_k \frac{\sin \phi_{j+1} - \sin \phi_{j-1}}{2 \delta y^2} \right], \quad (\text{A.4})$$

where the discrete operator δ^2 acts as $\delta^2 f_j = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$. Exactly the same equations are obtained for the total quantities substituting ρ by $\bar{\rho}$ and ϕ by $\bar{\phi}$.

As can be seen, relative and total quantities are decoupled in pairs of equations (A.3) and (A.4). Within each pair, by taking the time derivative of one of the equations and making use of the others, wave-like equations are obtained:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial t^2} - \left((1 + \hat{\Omega} \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha_k + \hat{\Omega}) \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) \rho_j \\ + \frac{\hat{\Omega}}{2} \left(\alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha_k^2 - \beta_k^2) \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) (\rho_{j+1} + \rho_{j-1}) \\ - 2\hat{\Omega} \beta_k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_k \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) (\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_j}{\partial t^2} - \left((1 + \hat{\Omega} \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha_k + \hat{\Omega}) \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) \bar{\phi}_j \\ + \frac{\hat{\Omega}}{2} \left(\alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha_k^2 - \beta_k^2) \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) (\phi_{j+1} + \phi_{j-1}) \\ - \beta_k \left(1 - \frac{\hat{\Omega}}{2} \alpha_k \delta^2 \right) \frac{\rho_{j+1} - \rho_{j-1}}{\delta y^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

where $\hat{\Omega} = \hbar \Omega / 2gn$. This system of M pairs of equations describes the linear dynamics of the BEC stack in the limit of long-wavelength excitations.

References

- [1] Josephson B D 1962 Possible new effects in superconductive tunnelling *Phys. Lett.* **1** 251–3
- [2] Barone A and Paterno G 1982 *Physics and Applications of the Josephson Effect* (New York: Wiley)
- [3] Askerzade I, Bozbey A and Cantürk M 2017 *Modern Aspects of Josephson Dynamics and Superconductivity Electronics* (Berlin: Springer)
- [4] Smerzi A, Trombettoni A, Lopez-Arias T, Fort C, Maddaloni P, Minardi F and Inguscio M 2003 Macroscopic oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates *Eur. Phys. J. B* **31** 457–61
- [5] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M and Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [6] Levy S, Lahoud E, Shomroni I and Steinhauer J 2007 *Nature* **449** 579
- [7] Sols F 1999 Josephson effect between Bose condensates *Bose–Einstein Condensation in Atomic Gases, Proceedings of the International School of Physics ‘Enrico Fermi’* ed M Inguscio, S Stringari and C E Wieman (Amsterdam: IOS Press)
- [8] Williams J E, Walser R, Cooper J, Cornell E A and Holland M J 1999 *Phys. Rev. A* **59** R31(R)
- [9] Abad M and Recati A 2013 *Eur. Phys. J. D* **67** 148
- [10] Kaurov V M and Kuklov A B 2005 *Phys. Rev. A* **71** 011601(R)
- [11] Kaurov V M and Kuklov A B 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013627
- [12] Brand J, Haigh T J and Züllicke U 2009 Rotational fluxons of Bose–Einstein condensates in coplanar double-ring traps *Phys. Rev. A* **80** 011602
- [13] Qadir M I, Susanto H and Matthews P C 2012 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** 035004
- [14] Brand J and Shamailov S 2018 Quasiparticles of widely tuneable inertial mass: the dispersion relation of atomic Josephson vortices and related solitary waves *SciPost Phys.* **4** 018
- [15] Roditchev D, Brun C, Serrier-García L, Cuevas J C, Bessa V H L, Milosevic M V, Debontridder F, Stolyarov V and Cren T 2015 *Nat. Phys.* **11** 332
- [16] Schweigler T, Kasper V, Erne S, Mazets I, Rauer B, Cataldini F, Langen T, Gasenzer T, Berges J and Schmiedmayer J 2017 Experimental characterization of a quantum many-body system via higher-order correlations *Nature* **545** 323
- [17] Son D T and Stephanov M A 2002 *Phys. Rev. A* **65** 063621
- [18] Qu C, Tylutki M, Stringari S and Pitaevskii L P 2017 Magnetic solitons in rabi-coupled Bose–Einstein condensates *Phys. Rev. A* **95** 033614
- [19] Montgomery T W A, Li W and Fromhold T M 2013 Spin Josephson vortices in two tunnel-coupled spinor Bose gases *Phys. Rev. Lett.* **111** 105302
- [20] Galleí A, Guilleumas M, Mayol R and Muñoz Mateo A 2016 Multidimensional Josephson vortices in spin–orbit-coupled Bose–Einstein condensates: snake instability and decay through vortex dipoles *Phys. Rev. A* **93** 033618
- [21] Christodoulides D N, Lederer F and Silberberg Y 2003 Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices *Nature* **424** 817
- [22] Lederer F, Stegeman G I, Christodoulides D N, Assanto G, Segev M and Silberberg Y 2008 Discrete solitons in optics *Phys. Rep.* **463** 1–126
- [23] Kivshar Y S and Malomed B A 1988 Dynamics of fluxons in a system of coupled Josephson junctions *Phys. Rev. B* **37** 9325–30
- [24] Mazo J J and Ustinov A V 2014 The sine-gordon equation in Josephson-junction arrays *In the Sine-Gordon Model and its Applications* (Berlin: Springer) pp 155–75
- [25] Cataliotti F S, Burger S, Fort C, Maddaloni P, Minardi F, Trombettoni A, Smerzi A and Inguscio M 2001 Josephson junction arrays with Bose–Einstein condensates *Science* **293** 843–6
- [26] Cazalilla M A, Ho A F and Giamarchi T 2006 Interacting Bose gases in quasi-one-dimensional optical lattices *New J. Phys.* **8** 158
- [27] Blit R and Malomed B A 2012 Propagation and collisions of semidiscrete solitons in arrayed and stacked waveguides *Phys. Rev. A* **86** 043841
- [28] Budich J C, Elben A, Lacki M, Sterdyniak A, Baranov M A and Zoller P 2017 Coupled atomic wires in a synthetic magnetic field *Phys. Rev. A* **95** 043632
- [29] Baals C, Ott H, Brand J and Muñoz Mateo A 2018 Nonlinear standing waves in an array of coherently coupled Bose-Einstein condensates *Phys. Rev. A* **98** 053603
- [30] Muñoz Mateo A, Delgado V, Guilleumas M, Mayol R and Brand J 2019 Nonlinear waves of Bose-Einstein condensates in rotating ring-lattice potentials *Phys. Rev. A* **99** 023630
- [31] Flach S and Gorbach A V 2008 Discrete breathers: advances in theory and applications *Phys. Rep.* **467** 1–116
- [32] Kivshar Y S and Campbell D K 1993 Peierls-nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes *Phys. Rev. E* **48** 3077
- [33] Pitaevskii L P and Stringari S 2003 *Bose–Einstein Condensation* (Oxford: Oxford University Press)
- [34] Kivshar Y S and Peyrard M 1992 Modulational instabilities in discrete lattices *Phys. Rev. A* **46** 3198
- [35] Su S-W, Gou S-C, Liu I-K, Bradley A, Fialko O and Brand J 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023631

Las estrellas de neutrones constituyen un sistema físico de extraordinario interés científico. Su naturaleza extrema las convierte en laboratorios naturales únicos, donde es posible comprobar, a través de observaciones astronómicas, modelos y teorías provenientes de diversos campos de la física fundamental. Son especialmente relevantes en el ámbito de la física nuclear, ya que permiten estudiar, a escala macroscópica, propiedades de la materia a densidades comparables — e incluso superiores — a las del núcleo atómico. Asimismo, ofrecen un contexto privilegiado para restringir y ajustar la ecuación de estado (EoS) de la materia nuclear, un problema todavía no resuelto totalmente. Diversas evidencias observacionales apuntan a que el interior de las estrellas de neutrones podría ser superfluido. El ritmo de enfriamiento observado en Casiopea A, las oscilaciones y variaciones en la emisión de radiación de alta frecuencia de distintas estrellas de neutrones, así como los glitches registrados en más de 160 púlsares, podrían interpretarse como manifestaciones de una fase superfluida de la materia nuclear en el interior estelar. Sin embargo, todavía no existe un consenso claro sobre los mecanismos físicos responsables de estos fenómenos, ni sobre las regiones específicas de la estrella que estarían involucradas en ellos.

El objetivo de esta tesis ha sido profundizar en la comprensión de la dinámica superfluida y superconductora presente en el interior de las estrellas de neutrones, con especial énfasis en su región más extensa: el outer core. Para ello, se emplea un modelo hidrodinámico generalizado que describe la interacción entre un superfluido de neutrones y un superconductor de protones, ambos en equilibrio nuclear beta y en equilibrio de carga eléctrica con un gas degenerado de electrones. El acoplamiento entre neutrones y protones se considera

a través de dos mecanismos: el arrastre dinámico (entrainment) y la interacción nucleón-nucleón, esta última modelada mediante la interacción efectiva de Skyrme SLy4. Dado que las densidades típicas del outer core son del orden de la densidad de saturación de la materia nuclear (ρ_0) y las temperaturas se sitúan alrededor de 10^8 K — por debajo de los valores críticos estimados para la transición a la fase superfluida —, es habitual considerar, a efectos prácticos, que la temperatura en esta región de la estrella es $T \approx 0$ K. Esta aproximación se justifica porque la energía térmica resulta despreciable frente a las escalas de energía asociadas a la interacción nuclear. En consecuencia, puede suponerse que la densidad superfluida coincide con la densidad total, lo que implica que todos los nucleones forman parte de un condensado de Bose-Einstein de pares de Cooper — uno de protones y otro de neutrones —, y por tanto, se comportan como un fluido libre de colisiones. En este régimen, las excitaciones colectivas del sistema se originan exclusivamente a partir de interacciones de campo medio, sin intervención de mecanismos disipativos. Asimismo, las perturbaciones de carga inducidas por el gas de electrones degenerado pueden tratarse también dentro de un régimen sin colisiones, válido para escalas espaciales subcentimétricas [Kob+17]. En esta aproximación, se analiza el espectro de excitaciones elementales y los modos de oscilación del sistema en ausencia de rotación y de campo electromagnético estelar. Estudios previos que han investigado la aparición de inestabilidades hidrodinámicas en la parte más externa del núcleo de la estrella de neutrones, han identificado modos inestables que surgen cuando la velocidad relativa entre los dos flujos superfluidos supera un valor crítico. Dichas inestabilidades están asociadas a la excitación de fonones en el régimen $k = 0$ (véase, por ejemplo, [ACP04]).

Esta tesis profundiza y amplía el conocimiento sobre las excitaciones elementales y las inestabilidades que pueden surgir en el superfluido de dos componentes del outer core. Una de las principales diferencias del modelo presentado, con respecto a trabajos previos, es la incorporación de términos adicionales en el funcional de la densidad de energía, que modifican de manera significativa la dinámica de propagación de las perturbaciones y alteran el espectro de excitaciones. Nuestro funcional incluye un término de rango finito, \mathcal{H}_{fin} , en la densidad de energía nuclear, que tiene en cuenta el carácter no nulo del alcance de la interacción nucleón-nucleón mediante contribuciones que dependen de gradientes de las densidades de protones y neutrones. Este término suele omitirse en cálculos hidrodinámicos que dependen únicamente de la densidad (véase, por ejemplo [CA19]). Cabe

destacar que el término \mathcal{H}_{fin} no afecta a los estados homogéneos y estacionarios, ya que $\nabla\rho = \nabla\rho_n = \nabla\rho_p = 0$, pero sí influye en la dinámica de las excitaciones lineales sobre dichos estados. También se introduce el conocido como término de Weizsäcker [SF07], que representa una corrección a la densidad de energía cinética en gases de Fermi debido a inhomogeneidades espaciales en la densidad. Este término corresponde a la presión cuántica que comúnmente se incorpora en formulaciones hidrodinámicas generalizadas de sistemas superfluidos (ver por ejemplo [PS03]). La combinación de este término y el de rango finito permite describir excitaciones elementales que no pueden capturarse si tales términos se omiten en el funcional. En particular, su inclusión permite extender la relación de dispersión para $k \neq 0$, revelando la aparición de excitaciones de tipo rotón, que aparecen como un mínimo local en el espectro de excitaciones para números de onda finitos (k_r), en presencia de velocidad relativa entre las dos componentes superfluidas. A diferencia de los fonones, los rotones proporcionan un mínimo local en la dispersión de excitaciones y en consecuencia su velocidad de grupo se anula, $v_g = [d\omega/dk]_{k_r} = 0$. Los rotones presentan la velocidad de fase más baja entre las excitaciones colectivas del superfluido y, por tanto, según el criterio de Landau, se espera que definan un umbral para la velocidad crítica de excitación del sistema. El modelo propuesto demuestra que las excitaciones de rotones desempeñan un papel fundamental en la aparición de un nuevo tipo de inestabilidad dinámica, de carácter rotónico, que se desencadena cuando la velocidad relativa entre las dos componentes superfluidas supera un umbral crítico. Más allá de este umbral, que crece aproximadamente de forma lineal con la densidad total del sistema, el crecimiento de los modos inestables (rotónicos) a partir de pequeñas perturbaciones durante la evolución temporal del sistema puede, eventualmente, conducir a la desestabilización del estado estacionario. Estos modos inestables presentan una configuración en la que las densidades superfluidas de protones y neutrones oscilan en fase, mientras que sus velocidades respectivas lo hacen en oposición de fase, verificando la condición $\delta v_p/\delta v_n \times \delta\rho_p/\delta\rho_n < 0$. Esta relación opuesta entre las componentes de velocidad y densidad de los modos de oscilación, sobre el equilibrio dinámico de los superfluidos acoplados, resulta inestable una vez que la velocidad relativa supera un umbral (dependiente de la densidad), y se considera la causa esperada de la desestabilización de la configuración estacionaria y del crecimiento exponencial de la inestabilidad en el régimen lineal. El análisis lineal de los modos de oscilación efectuado no permite predecir ni el comportamiento ni la evolución temporal

de dichos modos en el régimen no lineal, cuando sus amplitudes crecen más allá del régimen perturbativo. Sin embargo, la experiencia obtenida en estudios con gases cuánticos ultrafríos sugiere que este tipo de inestabilidad podría inducir modulaciones en la densidad superfluida de neutrones y protones, e incluso favorecer la nucleación de vórtices cuánticos, lo que podría dar lugar, eventualmente, a una nueva configuración estacionaria y estable del sistema. Para que esto ocurra, nuestro análisis muestra que estas excitaciones colectivas tienen lugar, de forma plausible, por debajo del umbral de excitaciones fermiónicas de ruptura de pares.

Esta tesis también aborda el problema de la rotación y del campo magnético estelar mediante una generalización del modelo hidrodinámico propuesto en [GMV21]. La rotación de la estrella induce la formación de una red de vórtices cuantizados en la componente neutrónica superfluida. Colectivamente, estos vórtices reproducen el comportamiento rotacional del sistema transportando cada vórtice una fracción discreta, h , del momento angular total, mientras que la red, en su conjunto, sostiene dicho momento angular rotando solidariamente con la estrella. Por otra parte, la componente protónica co-rota con la estrella debido al campo de London, que compensa la rotación estelar. Los protones constituyen un superconductor de tipo II y distribuyen el campo magnético estelar en una red de tubos de flujo magnético, cada uno de los cuales confina una porción, $h/2e$, del flujo global del campo magnético. Las dos redes presentan una densidad de vórtices muy dispar, siendo la red de vórtices de protones mucho más densa que la de neutrones. Esta disparidad en las densidades de las dos redes permite analizar un vórtice de protones aislado inmerso en la comparativamente baja densidad de vórtices neutrónicos. En [GMV25] analizamos el perfil del parámetro de orden, de la densidad de partículas y del campo magnético que presenta un vórtice de protones en el outer core. Dado que el modelo no puede proporcionar información microscópica independiente sobre las diferencias entre la densidad de fermiones y el cuadrado del módulo del parámetro de orden correspondiente, nos limitamos a estudiar el caso en que las escalas de longitud típicas de fermiones y bosones del fluido protónico coinciden aproximadamente. Esto sucede alrededor de la densidad de saturación nuclear ($\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$), densidad para la cual la longitud de coherencia del par de Cooper de protones coincide con la longitud de Fermi de protones ($\xi_p \approx \lambda_F^p \approx 10 \text{ fm}$). El estudio realizado muestra que, a consecuencia del arrastre (entrainment) y, en menor medida, de la interacción nucleón-nucleón, el vórtice de protones

produce una perturbación de onda larga en el superfluido de neutrones. La perturbación supone una disminución ($\approx 1\%$) en la densidad neutrónica del equilibrio beta en la posición del vórtice de protones. Aunque los resultados presentados se han obtenido para una densidad representativa del outer core (ρ_0), algunas de sus características generales pueden extrapolarse a otras densidades del outer core, siempre que el tamaño del vórtice protónico (ξ_p) sea claramente mayor que la longitud de onda de Fermi de los neutrones. En estas condiciones, se espera que la densidad de neutrones sufra también pequeñas disminuciones, inducidas por los efectos de arrastre asociados al vórtice de protones.

En lo que respecta a la rotación y al magnetismo estelares, a pesar de sus valores aparentemente elevados, su influencia sobre la estructura del vórtice resulta despreciable. Se ha comprobado que dicha estructura permanece inalterada al variar tanto la velocidad de rotación como la intensidad del campo magnético estelar, en todo el rango de valores observados en púlsares ($\Omega \sim 10^2\text{--}10^3$ rad/s y $B \sim 10^{12}\text{--}10^{15}$ G). Esta ausencia de efectos apreciables sobre el vórtice puede entenderse analizando las escalas de longitud características asociadas a la rotación y al campo magnético, que son del orden de $l_\Omega \sim 10^{10}$ fm y $l_B \sim 10^3$ fm, respectivamente. Estas escalas implican contribuciones energéticas del orden de $\varepsilon_{\Omega,B} \sim l_{\Omega,B}^{-2}$, que son significativamente menores que las energías características de los vórtices, que escalan como $\varepsilon_v \sim \xi_p^{-2}$. Por lo tanto, puede concluirse que los vórtices de protones no son sensibles a variaciones globales del campo magnético o de la rotación estelar.

Aunque nuestro trabajo ha estado principalmente orientado a la descripción superfluida del outer core de las estrellas de neutrones, también ha abordado aspectos genéricos de la dinámica superfluida de sistemas con varios componentes acoplados, que pueden ser relevantes en otras capas de la estrella. En particular, en [Gra+19] nuestro interés se centró en la existencia de fluxones (o vórtices de Josephson) en las uniones de tipo Josephson que separan regiones superfluidas o superconductoras. Estas redes de vórtices emergentes en zonas con, la denominada, superconductividad débil son análogas a las redes de vórtices de Abrikosov en superconductores de tipo II, ya que ambas están asociadas a corrientes superfluidas alrededor de los centros de los vórtices que las forman por los que fluye de manera cuantizada el campo magnético. Tales redes de vórtices Josephson podrían aparecer en las fases de *pasta* ubicadas en la región de transición entre el inner crust y el outer core, en particular en configuraciones de láminas paralelas, como se ha considerado

recientemente en la referencia [KV24], suponiendo una configuración de capas superconductoras de protones (*slabs*) separadas por un fluido de neutrones.

Como característica genérica, el modelo adoptado en esta tesis se basa en una descripción hidrodinámica del outer core a escalas mesoscópicas — del orden de femtómetros —. En este régimen, gracias a la alta densidad de la materia nuclear, es posible seguir describiendo el sistema mediante variables de campo continuas, como la densidad o la velocidad superfluida. Esto se debe a que, pese a la proximidad con la escala microscópica, el número de nucleones por unidad de volumen en el outer core sigue siendo lo suficientemente grande como para justificar un tratamiento promedio. A diferencia de lo que ocurre en escalas macroscópicas, donde los procesos disipativos juegan un papel relevante, la dinámica superfluida en la escala mesoscópica pertenece a un régimen libre de colisiones entre partículas, donde los efectos disipativos pueden despreciarse. Por este motivo, los modos de oscilación analizados en [GMV21] no son directamente comparables con los de los modelos hidrodinámicos clásicos, en los que los efectos disipativos resultan determinantes. De igual modo, las inestabilidades rotónicas identificadas a escalas femtométricas no pueden asociarse directamente con inestabilidades hidrodinámicas macroscópicas, ni tampoco directamente con fenómenos astrofísicos como los glitches.

Futuros trabajos deberán profundizar en la conexión entre la escala mesoscópica, analizada en esta tesis, y la escala macroscópica, regida por la hidrodinámica convencional y en la que se originan fenómenos observacionales como los glitches. Resulta especialmente interesante explorar el impacto que pueden tener distintas parametrizaciones de las fuerzas nucleares sobre el fenómeno de arrastre y la aparición de inestabilidades de tipo rotón. Asimismo, es fundamental llevar a cabo una caracterización microscópica detallada de los vórtices individuales mediante modelos de Hartree-Fock-Bogoliubov que integren tanto el carácter fermiónico como el bosónico del sistema acoplado. Este enfoque permite resolver de forma separada las densidades de partículas y los campos de emparejamiento, proporcionando así una descripción más precisa de la estructura interna del sistema. Otras líneas de investigación relevantes incluyen el estudio de la fricción mutua entre componentes superfluidas, inducida por la vorticidad cuántica subyacente, así como la evaluación del papel que puede desempeñar la viscosidad de una componente normal en la dinámica colectiva del sistema. Estas cuestiones son clave para avanzar en la comprensión del comportamiento multifásico y cuántico del outer core de las estrellas de neutrones.

BIBLIOGRAFÍA

- [Alp+84] MA Alpar, PW Anderson, D Pines y J Shaham. “Vortex creep and the internal temperature of neutron stars. I: General theory”. En: *The Astrophysical Journal* 276.1 (1984), págs. 325-334.
- [And+01] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark y E. A. Cornell. “Watching Dark Solitons Decay into Vortex Rings in a Bose-Einstein Condensate”. En: *Phys. Rev. Lett.* 86 (14 2001), págs. 2926-2929.
- [AI75] PW Anderson y N Itoh. “Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon”. En: *Nature* 256.5512 (1975), págs. 25-27.
- [And+12] N. Andersson, K. Glampedakis, W. C. G. Ho y C. M. Espinoza. “Pulsar Glitches: The Crust is not Enough”. En: *Phys. Rev. Lett.* 109 (24 dic. de 2012), pág. 241103.
- [ACP04] Nils Andersson, Gregory L Comer y Reinhard Prix. “The superfluid two-stream instability”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 354.1 (2004), págs. 101-110.
- [AB76] AF Andreev y EP Bashkin. “Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions”. En: *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* 42 (1976), pág. 164.
- [BZ34] Walter Baade y Fritz Zwicky. “Cosmic rays from super-novae”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 20.5 (1934), págs. 259-263.

- [Bal+98] M. Baldo, Ø. Elgarøy, L. Engvik, M. Hjorth-Jensen y H. -J. Schulze. “ ${}^3\text{P}_2$ - ${}^3\text{F}_2$ pairing in neutron matter with modern nucleon-nucleon potentials”. En: 58.4 (1998), págs. 1921-1928.
- [BCS57] J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer. “Theory of Superconductivity”. En: *Phys. Rev.* 108 (5 dic. de 1957), págs. 1175-1204.
- [BP84] A. Barone y G. Paterno. “Physics and applications of the Josephson effect”. En: *Il Nuovo Cimento D* 4 (1984), págs. 411-412.
- [BPP69] G Baym, C Pethick y D Pines. “Superfluidity in neutron stars”. En: *Nature* 224.5220 (1969), págs. 673-674.
- [BPS71] Gordon Baym, Christopher Pethick y Peter Sutherland. “The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models”. En: 170 (dic. de 1971), pág. 299.
- [BMP58] A. Bohr, B. R. Mottelson y D. Pines. “Possible Analogy between the Excitation Spectra of Nuclei and Those of the Superconducting Metallic State”. En: *Phys. Rev.* 110 (1958), págs. 936-938.
- [Bos24] S.N. Bose. “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”. En: *Zeitschrift für Physik* 26.1 (1924), págs. 178-181.
- [Bri06] David Brink. *Nuclear Superfluidity: Pairing in Finite Systems*. Cambridge University Press, 2006.
- [CH17] M. E. Caplan y C. J. Horowitz. “Colloquium: Astromaterial science and nuclear pasta”. En: *Rev. Mod. Phys.* 89 (4 oct. de 2017), pág. 041002.
- [Cha+98] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer y R. Schaeffer. “A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities”. En: *Nuclear Physics A* 635.1 (1998), págs. 231-256.
- [Cha12] N Chamel. “Neutron conduction in the inner crust of a neutron star in the framework of the band theory of solids”. En: *Physical Review C* 85.3 (2012), pág. 035801.
- [CH06] N Chamel y P Haensel. “Entrainment parameters in a cold superfluid neutron star core”. En: *Physical Review C* 73.4 (2006), pág. 045802.

- [CA19] N. Chamel y V. Allard. “Entrainment effects in neutron-proton mixtures within the nuclear energy-density functional theory: Low-temperature limit”. En: *Phys. Rev. C* 100 (6 2019), pág. 065801.
- [DH01] Douchin, F. y Haensel, P. “A unified equation of state of dense matter and neutron star structure”. En: *AA* 380.1 (2001), págs. 151-167.
- [Dun98] Robert C. Duncan. “Global Seismic Oscillations in Soft Gamma Repeaters”. En: *The Astrophysical Journal* 498.1 (1998), pág. L45.
- [Dut+12] M. Dutra, O. Lourenço, J. S. Sá Martins, A. Delfino, J. R. Stone y P. D. Stevenson. “Skyrme interaction and nuclear matter constraints”. En: *Phys. Rev. C* 85 (3 2012), pág. 035201.
- [Ein25] Albert Einstein. “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”. En: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1.3 (1925).
- [FS01] Alexander L. Fetter y Anatoly A. Svidzinsky. “Vortices in a trapped dilute Bose-Einstein condensate”. En: *Journal of Physics: Condensed Matter* 13.12 (2001).
- [Fey55] R. P. Feynman. *Progress in Low Temperature Physics*. Vol. 1. 1955.
- [Fis91] W. Fiszdon. “Quantized Vortices in Helium II. By R. J. DONNELLY. Cambridge University Press, 1991. 346 pp.” En: *Journal of Fluid Mechanics* 233 (1991), págs. 691-692.
- [Gab+13] Michael Gabler, Pablo Cerdá-Durán, Nikolaos Stergioulas, José A. Font y Ewald Muller. “Imprints of Superfluidity on Magnetoelastic Quasiperiodic Oscillations of Soft Gamma-Ray Repeaters”. En: *Phys. Rev. Lett.* 111 (21 nov. de 2013), pág. 211102.
- [Gen89] P. G. de Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Addison-Wesley, 1989.
- [GK64] VL Ginzburg y DA Kirzhnits. “On the superfluidity of neutron stars”. En: *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* 47 (1964).
- [GAS10] Kostas Glampedakis, Nils Andersson y Lars Samuelsson. “Magnetohydrodynamics of superfluid and superconducting neutron star cores”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 410.2 (2010), págs. 805-829.

- [GP04] J. P. Hans Goedbloed y Stefaan Poedts. *Principles of Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press, 2004.
- [Gon+19] C. Gonzalez-Boquera, M. Centelles, X. Viñas y T. R. Routray. “Core-crust transition in neutron stars with finite-range interactions: The dynamical method”. En: *Phys. Rev. C* 100 (1 jul. de 2019), pág. 015806.
- [Gra+19] J. A. Gil Granados, A. Muñoz Mateo, M. Guilleumas y X. Viñas. “Transverse Josephson vortices and localized states in stacked Bose–Einstein condensates”. En: *New Journal of Physics* 21.4 (abr. de 2019), pág. 043036.
- [GMV21] J. A. Gil Granados, A. Muñoz Mateo y X. Viñas. “Roton instabilities in the superfluid outer core of neutron stars”. En: *Phys. Rev. C* 103 (6 jun. de 2021), pág. 065803.
- [GMV25] J. A. Gil Granados, A. Muñoz Mateo y X. Viñas. “Half-vortex states in the rotating outer core of neutron stars”. En: *Phys. Rev. C* 111 (6 jun. de 2025), pág. 065802.
- [HM15] B Haskell y A Melatos. “Models of pulsar glitches”. En: *International Journal of Modern Physics D* 24.03 (2015), pág. 1530008.
- [HH10] Craig O. Heinke y Wynn C. G. Ho. “Direct observation of the cooling of the Cassiopeia A neutron star”. En: *The Astrophysical Journal Letters* 719.2 (2010), pág. L167.
- [Hew+68] Antony Hewish, S Jocelyn Bell, JDH Pilkington, Paul Frederick Scott y Robin Ashley Collins. “Observation of a rapidly pulsating radio source”. En: *Nature* 217.5130 (1968), págs. 709-713.
- [Ho+15] Wynn C. G. Ho, Cristóbal M. Espinoza, Danaí Antonopoulou y Nils Andersson. “Pinning down the superfluid and measuring masses using pulsar glitches”. En: *Science Advances* 1.9 (2015), e1500578.
- [Jos62] B.D. Josephson. “Possible new effects in superconductive tunnelling”. En: *Physics Letters* 1.7 (1962), págs. 251-253. ISSN: 0031-9163.

- [KKM05] VM Kaurov, AB Kuklov y AE Meyerovich. “Drag effect and topological complexes in strongly interacting two-component lattice superfluids”. En: *Physical Review Letters* 95.9 (2005), pág. 090403.
- [KP13] D Kobayakov y CJ Pethick. “Dynamics of the inner crust of neutron stars: Hydrodynamics, elasticity, and collective modes”. En: *Physical Review C* 87.5 (2013), pág. 055803.
- [KV24] Dmitry Kobayakov y Xavier Viñas. *Inner crust of neutron stars: Unified description of structure and superconductivity*. 2024. arXiv: 2411.17303 [nucl-th].
- [Kob18] DN Kobayakov. “Application of superconducting-superfluid magnetohydrodynamics to nuclear “pasta” in neutron stars”. En: *Physical Review C* 98.4 (2018), pág. 045803.
- [Kob+17] DN Kobayakov, Christopher J Pethick, S Reddy y A Schwenk. “Dispersion and decay of collective modes in neutron star cores”. En: *Physical Review C* 96.2 (2017), pág. 025805.
- [LS91] James M. Lattimer y Douglas F. Swesty. “A generalized equation of state for hot, dense matter”. En: 535.2 (dic. de 1991), págs. 331-376.
- [LP80] E. M. Lifshitz y L. Pitaevskii. *Statistical Physics, Part 2: Theory of the Condensed State*. (Butterworth-Heinemann, 1980).
- [Lon38] F. London. “The λ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy”. En: *Nature* 141.643 (1938).
- [LL35] F. London y H. London. *The electromagnetic equations of the superconductor*. En: *Proc. R. Soc. Lond. A* vol. 149.71 (1935).
- [Mad+00] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben y J. Dalibard. “Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate”. En: *Phys. Rev. Lett.* 84 (5 2000), págs. 806-809.
- [Mat+99] M Matthews, B Anderson, P Haljan, C Wieman y Eric Cornell. “Vortices in a Bose-Einstein Condensate”. En: 83 (1999).
- [Men91] Gregory Mendell. “Superfluid hydrodynamics in rotating neutron stars. I-Nondissipative equations. II-Dissipative effects”. En: *The Astrophysical Journal* 380 (1991), págs. 515-540.

- [Mig60] AB Migdal. “Superfluidity and the moments of inertia of nuclei”. En: *Sov. Phys. JETP* 10 (1960), pág. 176.
- [Mon+20] Debasish Mondal, Deepak Pandit, S. Mukhopadhyay, Surajit Pal, Pratap Roy, Vitisha Suman, Balaram Dey, Srijit Bhattacharya, A. De, C. Bhattacharya y S. R. Banerjee. “Probing the Jacobi shape transition in hot and rotating ^{43}Sc ”. En: *Phys. Rev. C* 102 (5 nov. de 2020), pág. 051302.
- [New+22] William G. Newton, Sarah Cantu, Shuxi Wang, Amber Stinson, Mark Alexander Kaltenborn y Jirina Rikovska Stone. “Glassy quantum nuclear pasta in neutron star crusts”. En: *Phys. Rev. C* 105 (2 feb. de 2022), pág. 025806.
- [Ons49] L. Onsager. “Statistical hydrodynamics”. En: *Nuovo Cimento* 6.249 (1949).
- [Oya93] K. Oyamatsu. “Nuclear shapes in the inner crust of a neutron star”. En: *Nuclear Physics A* 561.3 (1993), págs. 431-452. ISSN: 0375-9474.
- [Pag+11] Dany Page, Madappa Prakash, James M. Lattimer y Andrew W. Steiner. “Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A Triggered by Neutron Superfluidity in Dense Matter”. En: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011), pág. 081101.
- [PC22] J. M. Pearson y N. Chamel. “Unified equations of state for cold nonaccreting neutron stars with Brussels-Montreal functionals. III. Inclusion of microscopic corrections to pasta phases”. En: *Phys. Rev. C* 105 (1 ene. de 2022), pág. 015803.
- [PS03] P. Pitaevskii y S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, 2003.
- [RW15] S. Zane R. Turolla. y A. L. Watts. *Magnetars: the physics behind observations*. En: *Reports on Progress in Physics*, vol. 78.116901 (2015).
- [RD69] Peter E Reichley y Gary S Downs. “Observed Decrease in the Periods of Pulsar PSR 0833–45”. En: *Nature* 222.229 (1969), pág. 230.
- [RS80] P. Ring y P. Schuck. *The nuclear many-body problem*. Springer-Verlag, 1980.
- [Rok97] D. S. Rokhsar. “Vortex Stability and Persistent Currents in Trapped Bose Gases”. En: *Phys. Rev. Lett.* 79 (12 1997), págs. 2164-2167.
- [Sau89] JA Sauls. “Superfluidity in the interiors of neutron stars”. En: *Timing neutron stars*. Springer, 1989, págs. 457-490.

- [Sha+15] Sharma, B. K., Centelles, M., Viñas, X., Baldo, M. y Burgio, G. F. “Unified equation of state for neutron stars on a microscopic basis”. En: *AA* 584 (2015), A103.
- [SF07] S. I. Shevchenko y D. V. Fil. “The Andreev-Bashkin effect in a two-component Bose gas”. En: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 105.1 (2007), págs. 135-137.
- [SY08] P. S. Shternin y D. G. Yakovlev. “Shear viscosity in neutron star cores”. En: *Phys. Rev. D* 78 (6 sep. de 2008), pág. 063006.
- [TT90] D.R. Tilley y J. Tilley. *Superfluidity and Superconductivity*. Bristol, 1990.
- [Tin96] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, 1996.
- [US96] V. A. Urpin y D. A. Shalybkov. “Hydrodynamic motions and neutrino emissivity of neutron stars”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 281.1 (1996), págs. 145-152.
- [VB72] D Vautherin y DM t Brink. “Hartree-Fock calculations with Skyrme’s interaction. I. Spherical nuclei”. En: *Physical Review C* 5.3 (1972), pág. 626.
- [VH05] L Villain y P Haensel. “Non-equilibrium beta processes in superfluid neutron star cores”. En: *Astronomy & Astrophysics* 444.2 (2005), págs. 539-548.
- [WP17] Gentaro Watanabe y Christopher J Pethick. “Superfluid Density of Neutrons in the Inner Crust of Neutron Stars: New Life for Pulsar Glitch Models”. En: *Physical Review Letters* 119.6 (2017), pág. 062701.
- [Wil+99] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. Cornell y M. Holland. “Nonlinear Josephson-type oscillations of a driven, two-component Bose-Einstein condensate”. En: *Phys. Rev. A* 59 (1 ene. de 1999), R31-R34.
- [WFF88] R. B. Wiringa, V. Fiks y A. Fabrocini. “Equation of state for dense nucleon matter”. En: *Phys. Rev. C* 38 (2 ago. de 1988), págs. 1010-1037.
- [YGP79] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon y R. E. Packard. “Observation of Stationary Vortex Arrays in Rotating Superfluid Helium”. En: *Phys. Rev. Lett.* 43 (3 1979), págs. 214-217.
- [ZP21] Zhao-Wen Zhang y C. J. Pethick. “Proton superconductivity in pasta phases in neutron star crusts”. En: *Phys. Rev. C* 103 (5 mayo de 2021), pág. 055807.

- [Zho+04] X. R. Zhou, G. F. Burgio, U. Lombardo, H.-J. Schulze y W. Zuo. “Three-body forces and neutron star structure”. En: *Phys. Rev. C* 69 (1 ene. de 2004), pág. 018801.