



Treball final de grau
GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Lògica Fuzzy

Autor: Jordi Ganzer Ripoll

Director: Dr. Joan Gispert Brasó

Realitzat a: Departament de Probabilitats
Lògica i Estadística

Barcelona, 30 de juny de 2015

Sumari

Introducció	1
1 Introducció a la Lògica Fuzzy	2
1.1 Origen de la lògica fuzzy	2
1.2 Bases de la lògica fuzzy	3
2 Modelització matemàtica de la lògica i introducció a la lògica multivalorada	12
2.1 Definició formal de lògica proposicional	12
2.2 Sintaxi	13
2.3 Semàntica	14
2.4 Lògica fuzzy com a lògica multivalorada	16
3 Lògica proposicional MTL	18
3.1 Lògica proposicional MTL en el $[0, 1]$	19
3.2 Sintaxi de la lògica proposicional MTL	22
3.3 Semàntica generalitzada de la lògica proposicional MTL	28
3.4 Completesa proposicional de MTL	31
3.5 Completesa en lògiques particulars	41
4 Lògica de predicats $MTL\forall$	42
4.1 Lògica de predicats $MTL\forall$ en $[0, 1]$	44
4.2 Sintaxi de la lògica de predicats $MTL\forall$	46
4.3 Semàntica generalitzada de la lògica de predicats $MTL\forall$	49
4.4 Completesa de predicats de $MTL\forall$	51
4.5 Completesa en lògiques particulars	57
5 Conclusió	58
A Conceptes d'Àlgebra Universal	59
B Demostracions a MTL	61

Abstract

Fuzzy logic is a logic that studies the vague reasoning. In this work we introduce fuzzy logic and we develop it as multivalued logic. We choose to build semantically and syntactically the MTL logic, the most basic of fuzzy logics, and prove the most important completeness theorems.

Agraïments

Primer de tot, vull agrair al meu tutor, Joan Gispert, que em recomanés fer el treball sobre lògica fuzzy perquè és ben bé el tipus de treball que volia fer. Vull agrair-li també les seves explicacions tant clares i útils sobre conceptes una mica confosos i la seva visió tan nítida sobre l'estructuració de les lògiques en general. Segon, vull agrair a la Patrícia Oliveres, excel·lent futura matemàtica, la seva ajuda i paciència, tot i que els temes que he treballat no són del seu domini.

També m'agradaria agrair l'ajuda de totes aquelles persones (família, amics,...) que en algun moment s'han interessat pel meu treball i m'han ajudat en tot el que han pogut, tot i no ser enteses en el tema.

Introducció

La lògica és l'estudi del raonament. La lògica matemàtica és l'estudi matemàtic del raonament. Quan es parla de lògica, normalment es pensa en la ciència que estudia els raonaments correctes partint dels conceptes *cert* i *fals*, és a dir la lògica clàssica. Estem acostumats a raonar conscientment en aquests termes, però inconscientment raonem frases i pensaments que involucren més qualitats que cert i fals: “ No tinc *gaire gana*, menjaré *una mica*”, “si tens *molt de fred* abriga't”, “porta'm un pastís que no sigui *molt gran*”,... Cada dia parlem, pensem i actuem segons noms, adjectius i adverbis que interpretem amb múltiples valors. La lògica clàssica no pot tractar aquests conceptes a la lleugera, ja que pot trobar-se amb paradoxes. Provem d'aplicar la lògica de cert i fals en el següent exemple, la *paradoxa dels Sorites*:

Suposem que la següent sentència és certa i la següent regla és vàlida

“Un home adult que pesa 40 kg és prim”

“Un home prim que s'engreixa un gram segueix sent prim”

Aleshores aplicant la regla 100.000 vegades tenim una altra sentència certa

“un home adult de 140 kg és prim”

Ja veiem que en aquest exemple, seguint el mètode de la lògica clàssica, hi ha raonaments que no es controlen. A partir de quin punt un home passa de ser prim a no ser-ho? Els límits d'aquest conjunt són confusos o borrosos, per aquest motiu va néixer la lògica fuzzy. Què és la lògica fuzzy? És la lògica que estudia el raonament basat en sentències imprecises o incertes, és a dir, que estudia el raonament a partir de frases i nocions que no podem classificar només com a certes o falses.

En aquest treball farem una introducció a la lògica fuzzy, o lògica borrosa, i l'estudiarem com a lògica multivalorada. En el primer capítol veurem el naixement d'aquesta lògica i diferents punts de vista des d'on es pot estudiar. En el segon, definirem què entenem com a lògica modelada matemàticament, què entenem per lògica multivalorada i quines tenim en particular. En el tercer i quart capítol, construirem i desenvoluparem eines de la lògica multivalorada MTL, proposicional i de predicats, fins arribar a veure els teoremes de completesa de cadascuna de les parts.

Motivació

Fent l'assignatura de Modelització Matemàtica de Formes de Raonament em va sorprendre veure que es podien crear i estudiar tantes lògiques diferents a la clàssica. En particular, la lògica fuzzy va destacar per ser tant general, en el sentit que moltes lògiques multivalorades també són lògiques fuzzy. A més la lògica fuzzy té una connexió molt forta amb la investigació en intel·ligència artificial, que és un altre àmbit que m'interessa. Així doncs, després de informar-me'n més, vaig trobar molt adequat dedicar el treball a la lògica fuzzy, i en particular a desenvolupar MTL, “Monoidal T-norm Logic”, la més bàsica de les lògiques multivalorades fuzzy.

1 Introducció a la Lògica Fuzzy

1.1 Origen de la lògica fuzzy

Des del naixement de la lògica com a ciència formal, alguns pensadors han treballat amb sentències i raonaments que s'escapen de l'abast de la lògica clàssica, per exemple, que no satisfan el principi de bivalència ($\varphi \vee \neg\varphi$). Els primers intents els trobem en Aristòtil que ens va deixar el següent exemple:

“ Demà hi haurà una guerra naval i
demà no hi haurà una guerra naval.”

En aquest exemple trobem una sentència que sabem que és falsa, però que consta de dues parts que no sabem classificar ni com a veritat ni com a fals, depenen del temps. La millor manera d'interpretar-les seria amb el terme de *possibilitat*: és *possible* que “demà hi hagi una guerra naval”, és *possible* que “demà no hi hagi una guerra naval”.

Aquest i molts altres problemes, on intervenen la modalitat o el temps, han estat estudiats des de l'antiga Grècia fins al segle XIX, però sense èxit a l'hora de trobar una fonamentació per estudiar aquests tipus de raonaments. No va ser fins a principis del segle XX que no va néixer la primera lògica multivalorada, a les mans de Jan Łukasiewicz (1878-1956) [1]. Va introduir la lògica trivalorada (que ara s'anomena lògica trivalorada de Łukasiewicz) durant la dècada del 1920. Łukasiewicz va inspirar-se en les taules de veritat de la lògica clàssica, desenvolupades unes dècades abans, per construir les seves pròpies taules però utilitzant tres valors de veritat, que es poden interpretar com *cert*, *fals* i *incert*. En els següents anys es van desenvolupar generalitzacions de la lògica trivalorada: les lògiques *n*-valorades o infinit-valorades de Łukasiewicz [2].

Amb el naixement i desenvolupament dels ordinadors a la segona meitat del segle XX, va començar una nova àrea d'investigació: la intel·ligència artificial. Per aconseguir que els ordinadors resolguessin problemes o actuessin com els humans es necessitaven eines per simular el pensament humà. En aquest àmbit van encaixar perfectament les lògiques no clàssiques i es va potenciar la seva investigació.

La lògica fuzzy comença la seva història el 1965 amb l'article titulat “Fuzzy sets” de Lofti Zadeh [3]. En aquest article es presenta la idea fonamental de la lògica fuzzy, que consisteix en modelitzar les propietats o conceptes com a conjunts borrosos, on cada element de l'univers té un grau de pertinença específic. Lofti Zadeh i altres van fonamentar i desenvolupar la lògica fuzzy durant la dècada del 1970 centrant-se en la seva utilitat per establir mètodes de raonament aproximat per ordinadors.

1.2 Bases de la lògica fuzzy

En aquesta secció, veurem breument diferents maneres de desenvolupar la lògica fuzzy seguint l'article [4]. Recordem que la nostra intenció és poder estudiar aquells conceptes o raonaments que tracten amb la vaguetat i la incertesa. En farem una modelització matemàtica.

Conjunts i connectives fuzzy

Les matemàtiques utilitzen els conjunts per tal de caracteritzar quins elements compleixen una propietat i quins no. Si designem per \mathcal{U} el nostre univers amb tots els elements possibles podem definir un conjunt clàssic o matemàtic A utilitzant una funció característica

$$\begin{aligned} c_A : \mathcal{U} &\rightarrow \{0, 1\} \\ u &\mapsto c_A(u) \end{aligned}$$

de tal manera que un element u pertany al conjunt A si $c(u) = 1$, i no pertany al conjunt A si $c(u) = 0$. Observem que en aquest tipus de conjunt es delimiten molt bé els elements que hi pertanyen i els que no. Canviem el tipus de conjunt, imaginem que volem caracteritzar els elements d'un conjunt imprecís o borrós, com per exemple el conjunt de la gent alta. No podem utilitzar una funció característica tan restrictiva, una persona no es pot classificar segons “és alta” o “no és alta”, sinó segons “és més alta que” o “menys alta que”.

Així doncs, definim un conjunt fuzzy generalitzant la idea de conjunt clàssic.

Definició 1.2.1. Sigui \mathcal{U} el nostre univers. Un *conjunt fuzzy* F és una aplicació, que associa a cada element x de \mathcal{U} un element de $[0, 1]$.

Anomenem *funció de pertinença* de F a μ_F , i donat un element u , $\mu_F(u)$ el seu *grau de pertinença* a F .

$$\begin{aligned} \mu_F : \mathcal{U} &\rightarrow [0, 1] \\ u &\mapsto \mu_F(u) \end{aligned}$$

Entendrem que un element u pertany absolutament a F si $\mu_F(u) = 1$ i que absolutament no hi pertany si $\mu_F(u) = 0$. En qualsevol altre cas, u pertany parcialment a F . Fixem-nos que si tots els elements tenen grau de pertinença 0 o 1, aleshores F actua com un conjunt clàssic.

Hem d'entendre que en el món no tenim una referència fixada i, per tant, que un mateix conjunt fuzzy es pot expressar utilitzant diferents funcions de pertinença segons el context on s'apliqui. Per exemple, una persona de 80 anys i una de 20 anys valoren diferent el concepte de “jove”, i encara es veu més la diferència si “jove” s'aplica a arbres o a persones. La idea més important dels conjunts fuzzy és que ens permeten saber quins elements compleixen *més* una propietat que altres. És més important saber que “ u és més alt que v ”, que no pas saber exactament el grau de pertinença de cadascun.

Una altra manera de veure els conjunts fuzzy és utilitzant una família de subconjunts (clàssics) de l'univers on cadascun té els elements amb grau de pertinença superior a un llindar.

Definició 1.2.2. Sigui $\alpha \in (0, 1]$, definim l' α -nivell de tall, F_α , d'un conjunt fuzzy F com el conjunt de tots els elements de \mathcal{U} que tenen grau de pertinença a F superior o igual a α , $F_\alpha = \{u \in \mathcal{U} \mid \mu_F(u) \geq \alpha\}$.

Anomenem *nucli* de F al conjunt F_1 , i *suport* de F a la unió de la família $\{F_\alpha \mid 0 < \alpha \leq 1\}$.

Proposició 1.2.3. Donat $\alpha, \beta \in (0, 1]$, es compleix que

- (i) Si $\alpha < \beta$ aleshors $F_\beta \subseteq F_\alpha$.
- (ii) Si $u \in \mathcal{U}$, $\mu_F(u) = \sup\{\alpha \mid u \in F_\alpha\}$.

També podem definir els conjunts fuzzy intersecció, unió i complementari utilitzant operacions sobre l'interval $[0, 1]$. Si A i B són conjunts fuzzy

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(u) &= \mu_A(u) * \mu_B(u) \\ \mu_{A \cup B}(u) &= \mu_A(u) \sqcup \mu_B(u) \\ \mu_{A^c}(u) &= n(\mu_A(u))\end{aligned}$$

Al principi Zadeh [3] va definir aquests conjunts utilitzant la funció mínim per la intersecció, el màxim per la unió, i la involució $n(u) = 1 - u$ per la negació. Després d'estudiar-ho es va arribar a unes definicions generals per aquestes operacions.

Definició 1.2.4. Una *norma triangular* $*$, abreujadament *t-norma*, és una operació binària $* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que per tot $x, y, z \in [0, 1]$ compleix les següents propietats:

- (i) És associativa: $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- (ii) És commutativa: $x * y = y * x$
- (iii) És creixent en cada component: si $x \leq y$ aleshores $x * z \leq y * z$.
- (iv) 1 és neutre i 0 és absorbent: $x * 1 = x$, i $x * 0 = 0$.

Una t-norma $*$ és la operació que s'utilitza per la intersecció. És força raonable que la commutativitat i l'associativitat siguin propietats de la intersecció. L'última propietat es pot entendre com $A \cap \mathcal{U} = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Definició 1.2.5. Una *conorma triangular* \sqcup , o *t-conorma*, és una operació binària $\sqcup : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que per tot $x, y, z \in [0, 1]$ compleix les següents propietats:

- (i) És associativa: $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$.
- (ii) És commutativa: $x \sqcup y = y \sqcup x$

(iii) És creixent en cada component: si $x \leq y$ aleshores $x \sqcup z \leq y \sqcup z$.

(iv) 1 és absorvent i 0 és neutre: $x \sqcup 1 = 1$, i $x \sqcup 0 = x$.

Una t-conorma \sqcup és l'operació que associarem a la unió. Fixem-nos que l'única propietat que canvia és la referent a l'1 i el 0, que interpretant-la diu $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ i $A \cup \emptyset = A$. Diem que una t-norma (o bé una t-conorma) és contínua si és una aplicació contínua del $[0, 1]^2$ sobre $[0, 1]$.

Per últim tenim la negació n que s'associarà amb el complementari.

Definició 1.2.6. Una *negació* n és una operació unària sobre l'interval $[0, 1]$ que satisfà

- $n(0) = 1$, $n(1) = 0$
- Si $x \leq y$, $n(y) \leq n(x)$
- $x \leq n(n(x))$.

S'anomena negació forta si $n(n(x)) = x$.

Fixem-nos que les operacions definides per Zadeh: \min , \max i $n(u) = 1 - u$ compleixen, respectivament, les propietats de t-norma, t-conorma i negació (en aquest cas negació forta). A continuació veiem un resultat que relaciona fortament les t-normes i les t-conormes.

Proposició 1.2.7. Si $*$ és una t-norma i n una negació forta aleshores l'operació \sqcup_* definida $x \sqcup_* y = n(n(x) * n(y))$ és una t-conorma, i viceversa, si \sqcup és una t-conorma i n una negació forta aleshores $*_{\sqcup}$ definida $x *_{\sqcup} y = n(n(x) \sqcup n(y))$ és una t-norma.

Tota t-norma prové d'una t-conorma i una negació forta, i viceversa, tota t-conorma prové d'una t-norma i una negació forta.

Exemple 1.2.8. Les següents tres t-normes, amb les corresponents t-conormes utilitzant la negació forta $n(x) = 1 - x$, seran els nostres exemples més importants a partir d'ara.

- T-norma de Łukasiewicz: $x *_L y = \max\{0, x + y - 1\}$,
T-conorma de Łukasiewicz: $x \sqcup_L y = \min\{1, x + y\}$
- T-norma de Gödel: $x *_G y = \min\{x, y\}$,
T-conorma de Gödel: $x \sqcup_G y = \max\{x, y\}$
- T-norma del Producte: $x *_\Pi y = x \cdot y$,
T-conorma del Producte: $x \sqcup_\Pi y = x + y - x \cdot y$

Una propietat interessant de les t-normes contínues és que totes es poden caracteritzar a partir d'aquestes tres t-normes anteriors [5].

Definició 1.2.9. Sigui una família de t-normes $\{*_i \mid i \in I\}$ on I és un conjunt numerable totalment ordenat amb primer element. Considerem la família d'interval tancats $\{A_i = [a_i, b_i] \subseteq [0, 1] \mid i \in I\}$ que compleix

- $\bigcup_{i \in I} A_i = [0, 1]$
- Si $i < j$ aleshores per tot $a \in A_i$ i tot $b \in A_j$, $a \leq b$.
- Si $i < j$ i $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ aleshores $a_j = b_i$.

Per cada A_i designem f_i l'isomorfisme natural de $[0, 1]$ a $[a_i, b_i]$:

$$\begin{aligned} f_i : [0, 1] &\rightarrow [a_i, b_i] \\ x &\mapsto f_i(x) = a_i + x(b_i - a_i) \end{aligned}$$

Definim la *suma ordinal* de $\{*_i\}_{i \in I}$ com la següent operació, si $x, y \in [0, 1]$,

$$x(\bigoplus_{i \in I} *_i)y = \begin{cases} f_i(f_i^{-1}(x) *_i f_i^{-1}(y)), & \text{si } x, y \in A_i \\ \min\{x, y\}, & \text{altrament} \end{cases}$$

Proposició 1.2.10. Per qualsevol família de t-normes contínues $\{*_i \mid i \in I\}$ la seva suma ordinal $\bigoplus_{i \in I} *_i$ és una t-norma contínua.

Teorema 1.2.11 (Mostert-Shields[5]). Sigui $*$ una t-norma contínua, aleshores $*$ = $\bigoplus_{i \in I} *_i$ on cada $*_i$ és t-norma de Gödel, del producte o de Łukasiewicz.

La lògica fuzzy es pot veure com una lògica on les sentències s'interpreten sobre conjunts fuzzy, de manera que els valors de veritat de la sentència són els graus de pertinença. Seguint aquesta idea, la conjunció i la disjunció es defineixen utilitzant les t-normes i les t-conormes, respectivament.

L'única operació que ens falta és l'associada a la implicació. Hi ha diverses operacions que ens serveixen per la implicació, aquí en veurem tres concretes: les implicacions residuades, fortes i recíproques. Cadascuna busca complir una propietat diferent de la lògica clàssica.

Veiem com deduir la implicació residuada. En la lògica clàssica, si la implicació $\varphi \rightarrow \psi$ és certa aleshores ψ serà veritat sempre que φ ho sigui, i φ serà fals sempre que ψ sigui fals. En altres paraules, la implicació $\varphi \rightarrow \psi$ serà veritat sempre que el valor de φ sigui menor o igual que el valor de ψ . Aprofitem la intuïció clàssica per trobar una operació, que designarem per \Rightarrow , per la implicació fuzzy. Com més gran és el grau de veritat φ respecte el grau de ψ , més petit ha de ser el grau de veritat de $\varphi \rightarrow \psi$. Aquest idea la podem traduir fent que la operació $x \Rightarrow y$ sigui decreixent sobre x i creixent sobre y .

Una altra característica que podem imitar és el Modus Ponens: si φ és veritat i $\varphi \rightarrow \psi$ és veritat, aleshores ψ és veritat. Es pot traduir de la següent manera: si x és un grau de veritat per φ i z és una cota inferior de $x \Rightarrow y$ ($z \leq x \Rightarrow y$) pel grau de $\varphi \rightarrow \psi$, el grau de veritat de ψ no pot ser menor que aquestes dues cotes, si y és el grau de ψ podem expressar-ho amb $x * z \leq y$. Per una altra banda, volem que el

valor de $x \Rightarrow y$ sigui tan gran com pugui, així doncs, sempre que $x * z \leq y$ també $z \leq x \Rightarrow y$.

Ajuntant totes les propietats desitjades, sembla que l'operació \Rightarrow ha de complir que

$$\begin{aligned} \text{si } z \leq x \Rightarrow y, \text{ llavors } x * z \leq y \\ \text{si } x * z \leq y, \text{ llavors } z \leq x \Rightarrow y \end{aligned}$$

Proposició 1.2.12. Una t-norma $*$ és contínua per l'esquerra si, i només si, existeix una única operació \Rightarrow que compleix *la propietat de residuació*: $x, y, z \in [0, 1]$ es compleix $(x * z) \leq y$ sii $z \leq (x \Rightarrow y)$. Aquesta operació és $x \Rightarrow y = \sup\{z \in [0, 1] \mid x * z \leq y\}$.

Definició 1.2.13. Sigui $*$ una t-norma contínua per l'esquerra, l'operació

$$x \Rightarrow_R y = \sup\{z \mid x * z \leq y\}$$

s'anomena *R-implicació* o *residu* de la t-norma $*$.

Exemple 1.2.14. Les tres t-normes que hem vist com a exemple són contínues, aquí presentem la t-norma contínua per l'esquerra, no contínua, més coneguda. La T-norma del Nilpotent Mínim (NM):

$$x *_{NM} y = \begin{cases} \min\{x, y\} & x + y > 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Exemple 1.2.15. Per cadascuna de les t-normes particulars definides anteriorment tenim els següents residus:

$$\begin{aligned} x \Rightarrow_L y &= \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 1 - x + y & x \geq y \end{cases}, & x \Rightarrow_G y &= \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x \geq y \end{cases} \\ x \Rightarrow_{\Pi} y &= \begin{cases} 1 & x \leq y \\ \frac{y}{x} & x \geq y \end{cases}, & x \Rightarrow_{NM} y &= \begin{cases} 1 & x \leq y \\ \max\{1 - x, y\} & x \geq y \end{cases}, \end{aligned}$$

Una altra propietat bàsica de la lògica clàssica que seria desitjable per una implicació és la igualtat $\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$, que es pot llegir: φ implica ψ és cert si, i només si, és cert ψ o no φ .

Definició 1.2.16. Sigui \sqcup una t-conorma i n una negació forta, definim una *implicació forta*, o *S-implicació*, com $x \Rightarrow_S y = n(x) \sqcup y$

Proposició 1.2.17. La R-implicació i la S-implicació compleixen les següents propietats en comú:

- Decreixent en la primera component: si $x \leq x'$, $x \Rightarrow y \geq x' \Rightarrow y$
- Creixent en la segona component: si $x \leq x'$, $x \Rightarrow y \leq x' \Rightarrow y$
- 1 és neutre en la primera component i absorbent en la segona: $1 \Rightarrow y = y$ i $x \Rightarrow 1 = 1$.

- $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

La diferència entre aquestes implicacions resideix en dues propietats: la propietat de contraposició, amb una negació forta n

$$x \Rightarrow y = n(y) \Rightarrow n(x),$$

que es compleix per les S-implicacions però no per les R-implicacions, i la propietat de definir un ordre

$$x \leq y, \text{ si } x \Rightarrow y = 1,$$

que compleixen les R-implicacions però no les S-implicacions. Aquesta diferència permet la definició d'una tercera implicació que compleix les dues propietats anteriors, però deixa de complir la propietat de neutralitat de l'element 1.

Definició 1.2.18. Sigui \Rightarrow_R una R-implicació i n una negació, definim una *R-implicació recíproca*, *C-implicació*, com $x \Rightarrow_C y = n(y) \Rightarrow_R n(x)$.

Tanquem aquest apartat dedicat a les connectives assenyalant que, com que es vol que la lògica disposi de l'equivalència $\varphi \& \psi \rightarrow \chi \equiv \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (s'associa el símbol $\&$ amb la conjunció de fórmules), les lògiques que es treballen més sovint es basen en una t-norma i la R-implicació residu de la t-norma.

Teoria de la possibilitat

Comencem una teoria nova, desenvolupada inicialment per Lofti Zadeh, com a eina per treballar el raonament aproximat. Ens situem en el món on el coneixement és incomplet o imprecís i hem d'utilitzar restriccions sobre els nostres objectes per tal d'expressar aquesta falta de coneixement. Utilitzarem la noció de *variable* per fer referència a paràmetres o atributs que descriuen una situació amb coneixement incomplet. Per exemple, la variable x pot ser temperatura, altura, pressió,...

Per cada variable considerem una aplicació que associarà un possible valor de la variable amb la possibilitat que realment tingui aquest valor. Si \mathcal{U} és el nostre univers en un context fixat i x és una variable, el que coneixem del valor de la variable ho representem amb una *distribució de possibilitat* π_x . Per cada valor u del nostre univers, $\pi_x(u)$ ho entendrem com el grau de possibilitat que la variable x sigui el valor u . Així doncs, $\pi_x(u) = 0$ significa que és impossible que u sigui el valor de x , i $\pi_x(u) = 1$ vol dir que no tenim cap informació que prohibeixi el valor u per x , però hem de tenir en compte que pot haver-hi altres elements amb grau de possibilitat 1.

Per expressar cada porció de coneixement que posseïm utilitzarem els conjunts fuzzy. Per exemple, si F representa un atribut i només disposem d'una sentència com a informació " x és F ", el conjunt fuzzy F s'interpreta com la distribució de possibilitat que expressa la fiabilitat de cada valor de l'univers de ser el valor de x . En aquest cas la distribució de possibilitat és $\pi_x(u) = \mu_F(u)$, per tot $u \in \mathcal{U}$. Així doncs, per sentències úniques que involucren un sol conjunt fuzzy es pot utilitzar la funció de pertinença com a distribució de possibilitat. Però això no vol dir que

siguin el mateix, la igualtat $\pi_x = \mu_F$ s'ha d'entendre com: ja que l'únic coneixement que tinc de x és “ x és de F ”, el grau de possibilitat de $x = u$ serà el mateix que el grau de pertinença. Si disposéssim de més coneixement la igualtat entre distribució de possibilitat i funció de pertinença no tindria perquè mantenir-se.

Si disposem de dues distribucions de possibilitat per una sola variable x , π_x i π'_x tals que $\pi_x < \pi'_x$, es diu que π_x és més específic que π'_x ja que si té graus més petits significa que té més restriccions i per tant més informació sobre x . En aquest cas, escollim quedar-nos amb π_x ja que π'_x no aporta més informació sobre x . En el cas de tenir més d'una font d'informació, utilitzem la distribució de possibilitat que especifiqui menys el grau de possibilitat, sempre satisfent les restriccions que aporta la informació. Això s'anomena el *principi de mínima especificitat*.

Quan involucrem dues variables x i y amb dos dominis diferents U i V , una relació fuzzy R entre elles es pot expressar a partir d'una distribució de possibilitat $\pi_{x,y} = \mu_R$ que expressa una restricció sobre el domini $U \times V$. Més generalment, es pot treballar amb relacions que involucrin més de dues variables.

Sigui S una sentència “ x és E ”, i π_x la seva corresponent distribució de possibilitat. La consistència entre S i una altra sentència “ x és un element de A ” on A és un subconjunt clàssic de \mathcal{U} , es calcula a partir de

$$\Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_x(u)$$

Entendrem aquest valor com la possibilitat que el valor de x estigui a A sabent que “ x és E ”. Per remarcar la diferència entre “possibilitat” i “probabilitat”, notem que pot existir un conjunt A tal que $\Pi(A) = 1 = \Pi(A^c)$, és a dir, que el valor de x estigui a A és tant possible com que no hi sigui. Hem definit la possibilitat d'un conjunt A , també podem definir la *necessitat* d'un conjunt A de la següent manera

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c) = \inf_{u \notin A} 1 - \pi_x(u)$$

Podem entendre-ho com x necessàriament és de A amb grau $N(A)$, o x no serà de A^c amb grau $N(A)$.

Un cop vist com podem treballar amb distribucions de possibilitats veiem per sobre com podem organitzar la inferència, o deducció, amb raonament aproximat. Donada una informació dividida en diferents sentències S_1, \dots, S_n repartim el procés d'inferència en quatre passos:

(i) **Representació**

Per cada sentència S_i traduïm la informació en una distribució de possibilitat π^i restringint els valors de les variables involucrades. En particular, si $S_i =$ “ x és F ” utilitzem $\pi^i = \mu_F$.

Sigui $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ el vector amb totes les variables involucrades en S_1, \dots, S_n . Sigui x_1, \dots, x_k les variables involucrades en una sentència S_i , aleshores definim $\pi_{\bar{x}}^i = (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m) = \pi^i(u_1, \dots, u_k)$. És a dir, fem que el

grau de possibilitat dels valors possibles per les variables x_1, \dots, x_k segons S_i no depengui de les altres variables x_{k+1}, \dots, x_m .

(ii) **Combinació**

Un cop tenim les distribucions $\pi_{\bar{x}}^1, \dots, \pi_{\bar{x}}^n$, utilitzem alguna operació que representi la conjunció per obtenir una distribució global, per exemple utilitzant l'operació mínim

$$\pi_{\bar{x}} = \min\{\pi_{\bar{x}}^1, \dots, \pi_{\bar{x}}^n\}$$

(iii) **Projecció**

Projectem la distribució obtinguda $\pi_{\bar{x}}$ sobre el domini corresponent a cada variable de la qual en volguem obtenir informació. Per exemple, si hem obtingut una distribució $\pi_{x,y}$ involucrant les dues variables x i y sobre els dominis U i V , la projecció sobre V és

$$\pi_y(v) = \sup_{u \in U} \pi_{x,y}(u, v)$$

. Utilitzant el suprem estem satisfent el principi de mínima especificitat, ja que es calcula tenint en compte totes les possibles parelles i s'escull el grau de possibilitat menys específic.

(iv) **Interpretació**

En aquest pas s'extreu una interpretació lingüística del resultat obtingut en el pas anterior. Seguim amb l'exemple anterior on teníem la distribució π_y . S'obté una propietat F com a millor aproximació lingüística tenint en compte que F ha de formar part d'algun conjunt fuzzy sobre el domini V de y , ha de mantenir que $\pi_y \leq \mu_F$ i ha de ser tant específic com es pugui, per tal de tenir un resultat útil.

Graus de veritat

Una altra manera d'encarar l'estudi del raonament aproximat és utilitzant conjunts fuzzy de *graus de veritat* [6]. Tractarem la certesa d'una afirmació com la compatibilitat entre l'afirmació i la informació disponible, suposant que és informació correcta de l'actualitat. Així doncs, es defineix un *valor de veritat fuzzy* d'una sentència S "x és A" tenint-ne en compte una altra, D "x és B", que suposem certa. La informació sobre el grau de veritat de S tenint D es descriurà utilitzant un conjunt fuzzy $\tau(S; D)$ sobre l'univers $[0,1]$ de graus de veritat. És a dir, $\tau(S; D)(\alpha)$ s'interpretarà com el grau de possibilitat, respecte la informació disponible D , que existeixi una interpretació que fagi S certa amb grau α . Tenint en compte els conjunts fuzzy A i B es pot descriure la funció de pertinença de $\tau(S; D)$ com

$$\mu_{\tau}(\alpha) = \begin{cases} \sup\{\mu_B(u) \mid \mu_A(u) = \alpha\}, & \text{si } \mu_A^{-1}(\alpha) \neq \emptyset \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Tenint en compte aquesta relació entre la sentència a avaluar, S , i el context on ens trobem, D , ens podem trobar amb sis situacions diferents [7].

- (a) Sentència clàssica avaluada sota informació completa.
- (b) Sentència fuzzy avaluada sota informació completa.
- (c) Sentència fuzzy avaluada sota informació no fuzzy incompleta.
- (d) Sentència clàssica avaluada sota informació no fuzzy incompleta.
- (e) Sentència clàssica avaluada sota informació fuzzy.
- (f) Sentència fuzzy avaluada sota informació fuzzy incompleta.

En aquest treball desenvoluparem el cas (b), dedicat a la lògica fuzzy multivalorada amb funcions sobre $[0, 1]$.

2 Modelització matemàtica de la lògica i introducció a la lògica multivalorada

En els tres primers apartats d'aquest capítol definim matemàticament què entenem per una lògica proposicional i veiem diferents maneres de desenvolupar-la. En l'últim apartat definim la lògica multivalorada i veiem com s'organitzen diferents lògiques fuzzy com a lògiques multivalorades.

2.1 Definició formal de lògica proposicional

Primer de tot, definim les fórmules d'un llenguatge, que representaran les frases sobre les quals treballa la lògica.

Definició 2.1.1. Un *llenguatge proposicional* \mathcal{L} està format per un conjunt d'*àtoms* $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ i un conjunt de *connectives* $C = \{c_1, c_2, \dots\}$, cadascuna amb un natural associat n_i , que anomenem *arietat* (les constants són connectives d'arietat 0). Definim el conjunt de *fórmules* \mathcal{F} d'un llenguatge \mathcal{L} :

- Els àtoms són fórmules, $A \subseteq \mathcal{F}$.
- Per cada connectiva $c_i \in C$ amb arietat n_i , si $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_i} \in \mathcal{F}$ aleshores $c_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_i}) \in \mathcal{F}$.

Entenem els àtoms com els objectes més bàsics que podem utilitzar per raonar, en el cas de les lògiques proposicionals són les variables proposicionals. Les connectives les entenem com les eines que permeten construir sentències més complexes a partir d'anteriors més simples, com per exemple les connectives proposicionals $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \dots$.

A nivell intuïtiu, les fórmules són totes les frases ben formades (amb subjecte i predicat), que poden ser veritat amb un cert grau. En la lògica clàssica només poden ser veritat o fals, però en altres lògiques poden prendre més valors.

Definició 2.1.2. Anomenem *raonament* a qualsevol element $(\Sigma, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Direm que Σ són les *premisses* i φ la *conclusió*.

A continuïció definim la *relació de conseqüència*, que ens permetrà definir què és un raonament correcte i per tant el concepte de lògica.

Definició 2.1.3. Sigui A el conjunt de fórmules d'un llenguatge \mathcal{L} . Sigui $\triangleright \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$, escriurem $\Sigma \triangleright \varphi$ en lloc de $(\Sigma, \varphi) \in \triangleright$. \triangleright és una *relació de conseqüència* si compleix les següents condicions:

- Reflexivitat: $\{\varphi\} \triangleright \varphi$, per qualsevol $\varphi \in A$.
- Monotonia: siguin $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(A)$ tals que $\Sigma \subseteq \Delta$. Per qualsevol $\varphi \in A$, si $\Sigma \triangleright \varphi$ aleshores $\Delta \triangleright \varphi$.

(iii) Tall: siguin $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(A)$ i $\varphi, \psi \in A$. Si $\Delta \triangleright \varphi$ i $\Sigma \cup \{\varphi\} \triangleright \psi$ aleshores $\Delta \cup \Sigma \triangleright \psi$.

Definició 2.1.4. Sigui \mathcal{F} el conjunt de fórmules d'un llenguatge \mathcal{L} . Una *substitució* és una aplicació $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que per qualsevol connectiva c amb arietat n , $\sigma(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = c(\sigma(\varphi_1), \dots, \sigma(\varphi_n))$.

Definició 2.1.5. Diem que l'estructura $\langle \mathcal{F}, \triangleright \rangle$ és una *lògica*, si \triangleright és una relació de conseqüència sobre \mathcal{F} i per qualsevol substitució σ es compleix que, si $\Sigma \triangleright \varphi$ aleshores $\sigma[\Sigma] \triangleright \sigma(\varphi)$ (propietat estructural), on $\sigma[\Sigma] = \{\sigma(\psi) \mid \psi \in \Sigma\}$.

Un raonament (Σ, φ) és *correcte* en la lògica $\langle \mathcal{F}, \triangleright \rangle$ si $\Sigma \triangleright \varphi$.

Traduint, la primera condició de conseqüència ens diu que una sentència és conseqüència d'ella mateixa; la segona, que si una fórmula és conclusió d'un conjunt de premisses, aleshores ho és de tot conjunt més gran; i la tercera, és una espècie de transitivitat de raonaments.

La definició de substitució és molt importat perquè ens permet veure fàcilment que, si un raonament és correcte aleshores tots els raonaments que conservin la mateixa forma (respecte les connectives) també seran correctes.

Exemple 2.1.6. Suposem que tenim una lògica $\langle \mathcal{F}, \Vdash \rangle$ on el següent raonament és correcte: $\{\varphi\} \Vdash \psi \rightarrow \varphi$, llavors també seran correctes els raonaments: $\{\psi\} \Vdash \psi \rightarrow \psi$, $\{\varphi \wedge \chi\} \Vdash (\chi \vee (\zeta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\varphi \wedge \chi)$, i molts altres. Per cada substitució σ que canviï φ i ψ per altres fórmules, el raonament serà correcte.

Generalment, hi ha dues maneres de definir una lògica: definint una relació de conseqüència utilitzant el concepte de demostració o el concepte de veritat. Així diferenciem la part sintàctica i part semàntica d'una lògica.

2.2 Sintaxi

La part sintàctica d'una lògica defineix la conseqüència de manera "algorítmica", és a dir, es veu si un raonament és correcte o no seguint uns passos establerts fins a arribar a un resultat. El conjunt de passos que es segueixen per determinar un raonament correcte l'anomenarem demostració, i cada pas serà una regla de deducció. Utilitzarem el símbol \vdash per les relacions de conseqüència definides sintàcticament.

Definició 2.2.1. Sigui \mathcal{F} el conjunt de fórmules d'un llenguatge \mathcal{L} .

- Una *regla de deducció* és una parella (Σ, φ) on Σ és un conjunt finit de fórmules i φ és una fórmula. Una regla s'anomena *axioma* si $\Sigma = \emptyset$.
- Un *sistema axiomàtic* o *càlcul sintàctic* C és un conjunt de regles de deducció.
- Una *demostració* en un càlcul C de φ respecte Σ és una n -epla de fórmules $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$, per un cert $n \in \mathbb{N}$, que compleix:
 - $\varphi_n = \varphi$.

- Per cada fórmula φ_i , o $\varphi_i \in \Sigma$ o bé φ_i s'obté d'anteriors a partir d'una regla de deducció (Δ, ψ) . Entenem aquesta última condició així:

existeixen $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}$, $i_j < i$, i una substitució σ tal que

$$\sigma[\Delta] = \{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}\} \text{ i } \sigma(\psi) = \varphi_i.$$

Definició 2.2.2. Direm que φ es dedueix de Σ en la lògica $\langle \mathcal{F}, \vdash_C \rangle$, $\Sigma \vdash_C \varphi$, si existeix una demostració en C de φ a partir de Σ .

Observació. Tot i que les regles de deducció són fórmules, i per tant són combinacions d'àtoms i connectives, per detallar les regles d'un càlcul sintàctic s'utilitzen unes "metavariabls" per indicar que utilitzant substitucions moltes fórmules compleixen les regles. Les regles amb metavariables s'anomenen *esquemes*. Per exemple, una regla $p \rightarrow p$ utilitzant la metavariable φ és l'esquema $\varphi \rightarrow \varphi$, que indica que $\sigma(p) \rightarrow \sigma(p)$ és una regla, per tota substitució σ . Podem veure un exemple d'un càlcul definit amb esquemes en el següent exemple.

Exemple 2.2.3. Un càlcul sintàctic per la lògica clàssica proposicional és el *càlcul de tipus Hilbert*, que està format per les següents regles de deducció:

- (A1) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2) $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (A3) $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- (A4) $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$
- MP $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$

Veiem que el raonament $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ és correcte, donem una demostració:

- 1. $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (A2)
- 2. $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ (A1)
- 3. $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ MP 1,2
- 4. $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (A1)
- 5. $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ MP 3,4

2.3 Semàntica

Una lògica és semàntica si es modelitzen els raonaments correctes utilitzant interpretacions sobre les fórmules per tal de dotar-les de significat de veritat.

Definició 2.3.1. Sigui A un conjunt. Una *interpretació* de fórmules sobre A és una aplicació $i : \mathcal{F} \rightarrow A$ que a cada fórmula φ li fa correspondre un element de A .

Nosaltres considerarem les interpretacions amb *funcionalitat de veritat*, és a dir, que per cada connectiva c amb arietat n , $i(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = c(i(\varphi_1), \dots, i(\varphi_n))$.

Així doncs, una interpretació assigna valors de veritat a cada fórmula. Utilitzem aquests valors de veritat per determinar els raonaments correctes.

Definició 2.3.2. Sigui A un conjunt i $D \subseteq A$. Una lògica semàntica sobre una estructura $\langle A, D \rangle$ (que anomenem matriu de veritat) és una lògica $\langle \mathcal{F}, \models_{\langle A, D \rangle} \rangle$, on $\Sigma \models_{\langle A, D \rangle} \varphi$ si per tota interpretació i sobre A tal que $i[\Sigma] \subseteq D$ aleshores $i(\varphi) \in D$ ($i[\Sigma] = \{i(\psi) \mid \psi \in \Sigma\}$).

A representa els valors de veritat i D representa els valors de A que prendrem com a certs. Per tant hem definit un raonament correcte seguint la idea que si les premisses són certes aleshores la conclusió ha de ser certa.

Exemple 2.3.3. En la lògica clàssica proposicional els conjunts de valors són $A = \{0, 1\}$ i $D = \{1\}$. Un raonament és correcte si, per tota interpretació si les premisses són 1 (veritat) la conclusió també. En aquest cas les taules de veritat ens serveixen per definir la interpretació d'una fórmula amb connectives a partir dels valors assignats a les variables proposicionals.

φ	$\neg\varphi$	φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Normalment, una lògica primer es construeix semànticament ja que és la manera més intuïtiva de concebre-la. Un cop es té la part semàntica es busca un càlcul sintàctic per aquesta lògica, per tal de tenir un altre mètode més fàcil i metòdic per demostrar nous raonaments, correctes per les dues lògiques.

Per comprovar que les dues lògiques tenen els mateixos raonaments correctes es demostren els teoremes de completesa. Sigui $\langle \mathcal{F}, \vdash \rangle$ i $\langle \mathcal{F}, \models \rangle$ dues lògiques. Tenim tres tipus de teoremes de completesa:

- **Completesa Forta.** Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\}$ un conjunt de fórmules qualsevol, $\Sigma \vdash \varphi$ si, i només si, $\Sigma \models \varphi$.
- **Completesa Forta Finita.** Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\}$ un conjunt *finit* de fórmules qualsevol, $\Sigma \vdash \varphi$ si, i només si, $\Sigma \models \varphi$.
- **Completesa Feble.** Sigui φ una fórmula qualsevol, $\vdash \varphi$ si, i només si, $\models \varphi$.

Com veiem, només es diferencien en les premisses. Es veu clarament que si dues lògiques tenen completesa forta aleshores tenen els altres dos tipus de completesa, i si tenen completesa forta finita aleshores tenen completesa feble. El camí invers no és cert.

En els següents capítols veurem exemples de diverses lògiques fuzzy i els seus teoremes de completesa.

2.4 Lògica fuzzy com a lògica multivalorada

El *principi de bivalència*: tota sentència és o veritat o és falsa ($\varphi \vee \neg\varphi$), constitueix la base de la lògica clàssica. Una lògica multivalorada és una lògica que no satisfà el principi de bivalència, i generalment, té una semàntica basada en matrius de veritat $\langle A, D \rangle$ on A té més de dos valors de veritat.

A partir d'ara estudiarem la lògica fuzzy com a lògica multivalorada on els graus de veritat s'entenen en l'interval $[0, 1]$. Així doncs, treballem la part semàntica. Com hem vist en el capítol anterior, tenim diverses operacions per associar a les connectives d'una lògica fuzzy. Com que podem trobar una t-conorma a partir d'una t-norma, i viceversa, escollint una t-norma en tenim prou per definir la resta de connectives. Desenvolupem la lògica fuzzy com a lògica multivalorada basada en t-normes.

Donada una t-norma $*$ tenim la seva R-implicació \Rightarrow_* , i definim la negació \neg utilitzant la implicació ($\neg x$) = $x \Rightarrow_* 0$. Com que estem en el $[0, 1]$ escollim dues connectives extraordinàries \wedge i \vee que corresponen al mínim i al màxim. Així doncs, tenim una estructura $[0, 1]_* = \langle [0, 1], *, \Rightarrow, \wedge, \vee, \neg \rangle$ on interpretar el nostre llenguatge.

Com que una t-norma $*$ ens proporciona una estructura $[0, 1]_*$ també tenim una lògica, sobre una matriu de veritat $\langle [0, 1]_*, \{1\} \rangle$, amb la relació de conseqüència $\models_{\langle [0, 1]_*, \{1\} \rangle}$, que escriurem abreviadament $\models_{[0, 1]_*}$.

Per exemple, amb les tres t-normes contínues anteriors, $*_{\mathbb{L}}$, $*_G$ i $*_{\Pi}$ obtenim les següents tres lògiques amb nom propi:

- Lògica de Łukasiewicz: $\langle \mathcal{F}, \models_{[0, 1]_{*\mathbb{L}}} \rangle$.
- Lògica de Gödel $\langle \mathcal{F}, \models_{[0, 1]_{*G}} \rangle$.
- Lògica del Producte $\langle \mathcal{F}, \models_{[0, 1]_{*\Pi}} \rangle$

(S'abreugen les notacions utilitzant $\models_{\mathbb{L}}$, \models_G i \models_{Π} , respectivament).

Buscant una lògica en comú a totes les lògiques basades en t-norma contínua trobem la lògica BL [8], “Basic fuzzy Logic”, sobre el $[0, 1]$. Es defineix la relació de conseqüència de BL:

$$\Sigma \models_{BL} \varphi \quad \text{sii,} \quad \Sigma \models_{[0, 1]_*} \varphi, \text{ per tota } * \text{ t-norma contínua}$$

Un raonament és correcte a la lògica BL si, i només si, és correcte a qualsevol lògica basada en una t-norma contínua. Per tant, totes les lògiques $[0, 1]_*$ són particularitzacions de BL.

Al principi, es creia que BL era la més bàsica de les lògiques fuzzy basades en t-normes amb residu. Considerem la t-norma del *Nilpotent Mínim*, NM:

$$x *_{NM} y = \begin{cases} \min\{x, y\} & x + y > 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

És una t-norma que no és contínua, només és contínua per l'esquerra. Per tant, la lògica NM basada en la t-norma NM no és una particularització de BL ja que $*_{NM}$ no és contínua, per tant BL no és la més bàsica. Per tenir una lògica $[0, 1]_*$ només necessitem que la t-norma $*$ sigui contínua per l'esquerra per tal de tenir una implicació residuada.

La lògica fuzzy més bàsica, i la que tenen en comú totes les lògiques basades en una t-norma amb residu, és la lògica MTL, "Monoidal T-norm Logic". La lògica MTL és sobre $[0, 1]$ i té la relació de conseqüència

$$\Sigma \models_{MTL} \varphi \quad \text{sii,} \quad \Sigma \models_{[0,1]_*} \varphi, \text{ per tota } * \text{ t-norma contínua per l'esquerra}$$

Aquesta és la lògica fuzzy més bàsica, si un raonament és correcte a MTL també ho és a qualsevol lògica $[0, 1]_*$ amb t-norma amb residu. En particular si un raonament és correcte a MTL també ho és a les lògiques vistes fins ara: BL, L, G, Π i NM.

A partir d'ara ens centrarem en desenvolupar la lògica MTL.

3 Lògica proposicional MTL

A partir d'ara desenvoluparem la lògica MTL semànticament i sinàcticament, fins arribar a veure que són equivalents amb els teoremes de completesa. En aquest capítol desenvoluparem la lògica MTL com a lògica proposicional, i en el següent com a lògica de predicats.

En el primer apartat començarem desenvolupant l'estructura semàntica sobre l'interval $[0,1]$, que com hem vist, apareix de manera natural per tractar la lògica fuzzy. En el segon, definim un càlcul estil Hilbert per tal de desenvolupar la sintaxi algorímicament. En el tercer, estudiarem la semàntica a través d'unes estructures més generals que l'interval $[0,1]$, les MTL-àlgebres. I seguidament veurem el teorema de completesa entre les MTL-àlgebres i el càlcul MTL. En l'última secció tornarem a la lògica MTL sobre l'interval $[0,1]$ i veurem quins teoremes de completesa compleixen algunes de les extensions de MTL.

Abans de començar, definim el llenguatge lògic que utilitzarem: el *llenguatge proposicional* i també la noció de *fórmula proposicional*.

Definició 3.0.1. El *llenguatge lògic proposicional* està format per un conjunt de *variables proposicionals* $X = \{p_1, p_2, \dots\}$, un conjunt de *connectives* $\&, \rightarrow, \wedge$, i una *constant* $\bar{0}$.

Les *fórmules* es defineixen de la següent manera: cadascuna de les variables proposicionals és una fórmula; cada constant és una fórmula; si φ, ψ són dues fórmules, aleshores $\varphi \& \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ i $\varphi \wedge \psi$ són fórmules. Denotarem per $Prop(X)$ el conjunt de totes les fórmules que es poden formar a partir de les variables proposicionals de X .

Altres connectives que es defineixen a partir de les anteriors:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi & \text{ és } ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi), \\ \neg \varphi & \text{ és } \varphi \rightarrow \bar{0}, \\ \varphi \equiv \psi & \text{ és } (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi). \end{aligned}$$

Observació. Per tal de no carregar la notació escrivint fórmules utilitzarem el següent sistema de precedències entre connectives. Les connectives segueixen el següent ordre: Primer $\{\neg\}$, segon $\{\&, \wedge, \vee \equiv\}$, i per últim $\{\rightarrow\}$. Per exemple la següent fórmula

$$((\neg \varphi) \& (\psi \equiv \chi)) \rightarrow (\varphi \vee ((\psi \wedge \chi) \rightarrow \varphi))$$

es pot reescriure així

$$\neg \varphi \& (\psi \equiv \chi) \rightarrow \varphi \vee (\psi \wedge \chi \rightarrow \varphi)$$

.

3.1 Lògica proposicional MTL en el $[0, 1]$

Recordem que la lògica MTL és la lògica en comú per totes les lògiques $[0, 1]_*$ amb t-norma contínua per l'esquerra. Recuperem les definicions de t-norma i implicació, i construïm la lògica MTL en $[0, 1]$, pas a pas, amb els conceptes vistos al capítol anterior.

Definició 3.1.1. Una *t-norma* $*$, és una operació binària $*$: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que per tot $x, y, z \in [0, 1]$ compleix les següents propietats:

- (i) És associativa: $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- (ii) És commutativa: $x * y = y * x$
- (iii) És creixent en cada component: si $a \leq b$ aleshores $x * z \leq y * z$.
- (iv) 1 és neutre i 0 és absorbent: $x * 1 = x$, i $x * 0 = 0$.

Proposició 3.1.2. Sigui $*$ una t-norma contínua per l'esquerra. Existeix una única operació $x \Rightarrow y$ tal que per qualsevols $x, y, z \in [0, 1]$ es compleix $(x * z) \leq y$ sii $z \leq (x \Rightarrow y)$. Aquesta operació és $x \Rightarrow y = \sup\{z \in [0, 1] \mid x * z \leq y\}$.

Demostració. Per cada $x, y \in [0, 1]$, considerem $(x \Rightarrow y) = \sup\{z \mid x * z \leq y\}$. Fixem un z , la funció $f(x) = x * z$ és contínua per l'esquerra i creixent, per tant

$$x * (x \Rightarrow y) = x * \sup\{z \mid x * z \leq y\} = \sup\{x * z \mid x * z \leq y\} \leq y$$

. Per tant, si $z \leq (x \Rightarrow y)$ per monotonia $x * z \leq x * (x \Rightarrow y) \leq y$. Recíprocament, si $x * z \leq y$, com que $x \Rightarrow y = \sup\{z \mid x * z \leq y\}$ clarament $z \leq (x \Rightarrow y)$. \square

Definició 3.1.3. Sigui $*$ una t-norma contínua per l'esquerra, l'operació $x \Rightarrow y = \sup\{z \mid x * z \leq y\}$ s'anomena el *residu* de la t-norma $*$.

Definició 3.1.4. Siguin $x, y \in [0, 1]$, definim l'operació $x \cap y = \min\{x, y\}$.

Definició 3.1.5. Sigui $*$ una t-norma contínua per l'esquerra, denotem per $[0, 1]_*$ l'àlgebra formada pel conjunt $[0, 1]$ amb les operacions $*, \Rightarrow, \cap$. A partir d'aquestes definim les operacions disjunció, negació i equivalència:

Disjunció: $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

Negació: $(-x) = (x \Rightarrow 0)$.

Equivalència: $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow x)$.

Proposició 3.1.6. Per qualsevol t-norma, a l'àlgebra $[0, 1]_*$ es compleix:

- i) $x \leq y$ sii $(x \Rightarrow y) = 1$.
- ii) $(1 \Rightarrow x) = x$.

iii) Si $y \leq x$, aleshores $x * (x \Rightarrow y) \leq y$. Si $x \leq y$ aleshores $x * (x \Rightarrow y) = x$.

iv) $x \cup y = \max\{x, y\}$

Demostració. i) Si $x \leq y$ aleshores $x * 1 = x \leq y$ per tant $x \Rightarrow y = 1$.

ii) $1 \Rightarrow x = \sup\{z \mid 1 * z \leq x\} = x$.

iii) Si $y \leq x$

$$x * (x \Rightarrow y) = x * \sup\{z \mid x * z \leq y\} \leq y$$

Si $x \leq y$

$$x * (x \Rightarrow y) = x * 1 = x$$

iv) Suposem que $x \leq y$, aleshores $x \Rightarrow y = 1$ i per tant $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) = y$. Com que $y * (y \Rightarrow x) \leq x$ aplicant la propietat de residuació $y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$. Ajuntant els resultats i per la definició de \cap , $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) = y$, que és el màxim. De la mateixa manera es fa suposant que $y \leq x$.

□

Definició 3.1.7. Una *assignació de variables proposicionals* és una aplicació a que assigna a cada variable proposicional p un valor de veritat $a(p) \in [0, 1]$. Es pot estendre el concepte fins a obtenir una *interpretació de fórmules*, que denotem i (amb funcionalitat de veritat), seguint aquestes regles:

$$i(\bar{0}) = 0$$

$$i(\varphi \& \psi) = i(\varphi) * i(\psi)$$

$$i(\varphi \rightarrow \psi) = i(\varphi) \Rightarrow i(\psi)$$

$$i(\varphi \wedge \psi) = i(\varphi) \cap i(\psi)$$

Observacions.

- Podríem fer explícit el pas de fórmula a valor de veritat per les altres connectives \neg, \vee, \equiv , però no cal, s'obtenen per definició a través de les anteriors.
- S'ha de diferenciar entre les connectives i les operacions. No és el mateix $\&$ que $*$, ni els altres casos. La connectiva $\&$ relaciona fórmules i $*$ és una operació entre elements de $[0, 1]$. Igualment, $\bar{0}$ és una fórmula, i 0 és l'element mínim de $[0, 1]$, no són el mateix. Per aquest motiu tenen una notació diferent, per poder diferenciar l'estructura on es treballa.

Definició 3.1.8. Una fórmula φ és una 1-tautologia de la lògica proposicional MTL si $i(\varphi) = 1$ per qualsevol interpretació i i per qualsevol àlgebra $[0, 1]_*$.

Ja tenim un mètode per saber quines fórmules són certes dins MTL. En el proper exemple ensenyem la manera de veure que una fórmula és una 1-tautologia, i també com veure que no ho és.

Exemple 3.1.9. Les següents fórmules són 1-tautologies:

- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

S'ha de veure que donada qualsevol interpretació i , $i(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) = 1$. Designem $i(\varphi) = x$ i $i(\psi) = y$ i ho veiem utilitzant reiteradament la propietat de residuació. Primer interpretem la fórmula:

$$1 \leq i(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad , \text{ sii}$$

$$1 \leq i(\varphi) \Rightarrow (i(\psi) \Rightarrow i(\varphi)) \quad , \text{ sii}$$

$$1 \leq x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \quad , \text{ sii}$$

I ara utilitzem residuació

$$1 \leq x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \quad , \text{ sii}$$

$$x = x * 1 \leq (y \Rightarrow x) \quad , \text{ sii}$$

$$x * y \leq x \quad , \text{ sii}$$

$$y \leq (x \Rightarrow x) = 1$$

I $y \leq 1$ per qualsevol $y \in [0, 1]$, per tant, $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ és una 1-tautologia.

- $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi$

En aquest cas, utilitzem dues vegades residuació:

$$1 \leq (x * y) \Rightarrow x \quad , \text{ sii}$$

$$x * y \leq x \quad , \text{ sii}$$

$$y \leq (x \Rightarrow x) = 1$$

i veiem que $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi$ és 1-tautologia.

Ara demostrem que una fórmula $\varphi \vee \neg\varphi$ no és una 1-tautologia. Per veure-ho hem de trobar una àlgebra $[0, 1]_*$ i una interpretació i sobre $[0, 1]_*$ tal que $i(\varphi \vee \neg\varphi) < 1$. Utilitzant que la disjunció \cup és el màxim i amb la definició de la negació tenim que per qualsevol interpretació i :

$$i(\varphi \vee \neg\varphi) = x \cup (-x) = \max\{x, x \Rightarrow 0\}$$

Veiem què passa si triem una interpretació i tal que $i(x) = 0.5$ dins de l'àlgebra $[0, 1]_{\mathbb{L}}$.

$$\max\{0.5, 0.5 \Rightarrow_{\mathbb{L}} 0\} = 0.5 \neq 1$$

Així doncs, dins l'àlgebra $[0, 1]_{\mathbb{L}}$, amb la t-norma de Łukasiewicz, hem trobat una interpretació i on $\varphi \vee \neg\varphi$ no és certa, per tant no és 1-tautologia de MTL. Observem que en aquest cas concret, hem demostrat que ni MTL ni la lògica \mathbb{L} compleixen el principi de bivalència.

Definició 3.1.10. A partir d'ara un conjunt de fórmules $\Sigma \subseteq Prop(X)$ l'anomenem *teoria*. Sigui $[0, 1]_*$ una àlgebra i Σ una teoria, diem que una interpretació i és un $[0, 1]_*$ -model de Σ si per tota fórmula $\psi \in \Sigma$, $i(\psi) = 1$.

Definició 3.1.11. Sigui Σ una teoria. Diem que una fórmula φ és conseqüència lògica de Σ dins de MTL, que escriurem $\Sigma \models_{\text{MTL}} \varphi$, si per tota àlgebra $[0, 1]_*$ i per tota interpretació i $[0, 1]_*$ -model de Σ , $i(\varphi) = 1$.

Així, hem acabat de construir la lògica semàntica $\text{MTL} = \langle Prop(X), \models_{\text{MTL}} \rangle$.

3.2 Sintaxi de la lògica proposicional MTL

En aquest apartat definirem un càlcul per la lògica MTL. No tractem de trobar una lògica diferent, sinó la mateixa, però per un altre camí.

Hi ha diversos tipus de càlculs que podríem desenvolupar, nosaltres utilitzarem el càlcul estil Hilbert, que es forma a partir d'un conjunt d'axiomes i una regla de deducció.

Definició 3.2.1. Les següents fórmules són el *sistema axiomàtic* o *axiomes* de la lògica MTL:

- (A1) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (A2) $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi$
- (A3) $\varphi \& \psi \rightarrow \psi \& \varphi$
- (A4) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
- (A5) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$
- (A6) $\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$
- (A7a) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \& \psi \rightarrow \chi)$
- (A7b) $(\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$
- (A8) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$
- (A9) $\bar{0} \rightarrow \varphi$

La *regla de deducció* de MTL és el *Modus Ponens*, MP: de φ i $\varphi \rightarrow \psi$ se'n dedueix ψ .

Observacions.

- Els axiomes anteriors no han estat triats a l'atzar, cadascun busca satisfer una propietat bàsica. L'axioma (A1) ens proporciona la transitivitat de la implicació. (A2) ens diu que la conjunció amb $\&$ implica el primer element, (A3) reflexa la commutativitat de $\&$, i (A4) i (A5) el mateix per la \wedge -conjunció. L'axioma (A6) relaciona la $\&$ -conjunció amb la \wedge -conjunció, (A7a) i (A7b) expressen la propietat de residuació entre $\&$ i \rightarrow , i (A8) ens proporciona una manera per fer demostració per casos. Finalment, (A9) ens diu que la contradicció, $\bar{0}$, implica qualsevol cosa.
- Els axiomes i totes les fórmules que es demostren a MTL les expressem segons altres fórmules. Per exemple l'axioma (A2) és una fórmula que involucra altres fórmules φ i ψ . En les demostracions utilitzarem "instàncies" de fórmules vistes anteriorment canviant cadascun dels termes per fórmules més complexes. Seguint amb l'exemple, una instància de (A2) podria ser $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Tornem a definir una demostració, però ara, específica del càlcul MTL.

Definició 3.2.2. Una *demostració* de φ a partir de Σ és una n -epla de fórmules $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n = \varphi$ i cada fórmula φ_i és un axioma de MTL, una fórmula de Σ , o es dedueix de dues fórmules anteriors $\varphi_j, \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ ($j < i$) a partir la regla del Modus Ponens.

Definició 3.2.3. Sigui Σ una teoria. φ es dedueix de Σ , i escriurem $\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi$, si existeix una demostració de φ a partir de Σ .

Per tant, també tenim la lògica $\text{MTL} = \langle \text{Prop}(X), \vdash_{\text{MTL}} \rangle$.

Observació. Si la teoria és un conjunt buit, en comptes d'escriure $\emptyset \vdash \varphi$ escriurem $\vdash \varphi$. Observem que es compleix la propietat de monotonia d'una relació de conseqüència. En particular, si una fórmula es dedueix només a partir dels axiomes, aleshores també es dedueix a partir de qualsevol teoria (la mateixa demostració ens serveix), per tant, si $\vdash \varphi$ aleshores $\Sigma \vdash \varphi$.

Definició 3.2.4. Una fórmula φ és un *teorema* de MTL si $\vdash \varphi$, és a dir, φ es dedueix a partir del conjunt buit.

Les relacions entre les anteriors lògiques fuzzy, particularitzacions de MTL (BL, L, NM,...), es poden veure molt clarament utilitzant el càlcul de MTL i axiomes específics que s'han d'afegir per tal s'aconsegueixi cadascun dels càlculs de les extensions. Posem nom a les següents fórmules:

Divisibilitat:	$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)$	(Div)
Involució:	$\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$	(Inv)
Contracció:	$\varphi \rightarrow \varphi \& \varphi$	(Con)
Cancel·lació:	$\neg \varphi \vee ((\varphi \rightarrow \varphi \& \psi) \rightarrow \psi)$	(Can)
NM feble:	$(\varphi \& \psi \rightarrow \bar{0}) \vee (\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \& \psi)$	(NMF)

Cadascun dels càlculs es forma afegint els axiomes anteriors d'aquesta manera:

NM	=	MTL + (Inv) + (NMF)
BL	=	MTL + (Div)
L	=	BL + (Inv)
G	=	BL + (Con)
II	=	BL + (Can)

En concret, la lògica clàssica és l'extensió més específica de les lògiques fuzzy. Fent el següent càlcul trobem la lògica clàssica (CP).

$$\text{CP} = \text{BL} + (\text{Inv}) + (\text{Con})$$

Per poder demostrar el teorema de completesa en la següent secció necessitarem haver demostrat els següents teoremes de MTL. Les demostracions d'alguns d'aquests lemes es troben a l'apèndix B.

Lema 3.2.5. Les següents fórmules relacionades amb la connectiva \rightarrow són teoremes de MTL:

- (1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (3) $\varphi \rightarrow \varphi$

Lema 3.2.6. Les següents fórmules relacionades amb la connectiva $\&$ són teoremes de MTL:

$$(4) (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \varphi$$

$$(5) \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \& \psi))$$

$$(6) (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \& \chi \rightarrow \psi \& \chi)$$

$$(7) ((\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \& (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)) \rightarrow ((\varphi_1 \& \varphi_2) \rightarrow (\psi_1 \& \psi_2))$$

$$(8) (\varphi \& \psi) \& \chi \rightarrow \varphi \& (\psi \& \chi), (\varphi \& (\psi \& \chi)) \rightarrow ((\varphi \& \psi) \& \chi)$$

Lema 3.2.7. Les següents fórmules relacionades amb la connectiva \wedge són teoremes de MTL:

$$(9) (\varphi \& \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$$

$$(10) (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$$

$$(11) ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi))$$

$$(11') ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi))$$

Lema 3.2.8. Les següents fórmules relacionades amb la connectiva \vee són teoremes de MTL:

$$(12) (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi), \varphi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$$

$$(13) (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi)$$

$$(14) (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(15) ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)$$

$$(15') ((\varphi \rightarrow \chi) \& (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)$$

Lema 3.2.9. Les següents fórmules relacionades amb la connectiva \neg són teoremes de MTL:

$$(16) \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi)$$

$$(17) (\varphi \rightarrow (\psi \& \neg \psi)) \rightarrow \neg \varphi$$

$$(18) (\varphi \rightarrow (\psi \& \neg \psi)) \rightarrow \neg \varphi$$

$$(18') (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$$

$$(18'') (\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg \varphi)$$

Definició 3.2.10. $\bar{1} = \bar{0} \rightarrow \bar{0}$.

Lema 3.2.11. Les següents fórmules amb la constant $\bar{1}$ són teoremes de MTL:

$$(19) \bar{1}$$

$$(20) \varphi \rightarrow (\bar{1} \& \varphi)$$

$$(20') (\bar{1} \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

Lema 3.2.12. Les següents fórmules que relacionen \wedge i \vee són teoremes de MTL:

$$(21) \text{Associativitat de } \wedge : (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi), \\ ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \rightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$$

$$(22) \text{Associativitat de } \vee$$

$$(23) \varphi \rightarrow \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \varphi$$

Lema 3.2.13. Les següents fórmules relacionades amb la connectiva \equiv són teoremes de MTL:

$$(24) \varphi \equiv \varphi, \quad (\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\psi \equiv \varphi), \quad ((\varphi \equiv \psi) \& (\psi \equiv \chi)) \rightarrow (\varphi \equiv \chi)$$

$$(25) (\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(26) (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\varphi \& \chi) \equiv (\psi \& \chi))$$

$$(27) (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \equiv (\psi \rightarrow \chi))$$

$$(28) (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \equiv (\psi \wedge \chi))$$

$$(29) (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \equiv (\chi \rightarrow \psi))$$

$$(30) (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

Lema 3.2.14. Les següents fórmules són teoremes de MTL:

$$(31) \varphi \& (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi) \\ \varphi \& (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \& \psi) \wedge (\varphi \& \chi)$$

$$(32) (\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)) \\ (\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$$

$$(33) (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \& \psi) \vee (\psi \& \varphi)) \\ (\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \& \psi) \wedge (\psi \& \varphi))$$

$$(34) (\varphi \rightarrow \psi)^n \vee (\psi \rightarrow \varphi)^n, \text{ per cada } n.$$

$$(35) (\neg \varphi \wedge \neg \psi) \equiv \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$(36) (\neg \varphi \vee \neg \psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$$

Un resultat important de la lògica clàssica és el *teorema de la deducció*: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ si, i només si, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$; però a MTL només podem demostrar una versió més dèbil d'aquest.

Teorema 3.2.15 (Deducció Local).

Sigui Σ una teoria i siguin φ, ψ dues fórmules. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\text{MTL}} \psi$ si, i només si, existeix un n natural tal que $\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi^n \rightarrow \psi$ (on φ^n és $\varphi \& \overbrace{\dots}^n \& \varphi$ i $\varphi^0 = \bar{1}$).

Demostració. Primer de tot, fixem-nos que φ^n està ben definit gràcies a la commutativitat i l'associativitat de $\&$.

- Si per algun n , $\Sigma \vdash \varphi^n \rightarrow \psi$ aleshores $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Demostrem-ho per inducció sobre n :

Cas $n = 0$, el resultat és directe ja que $\varphi^0 = \bar{1}$ i $\bar{1}$ és un teorema. Per modus ponens amb $\Sigma \vdash \bar{1} \rightarrow \psi$ demostrem $\Sigma \vdash \psi$, i per monotonia de \vdash , $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Cas $n > 0$, Suposem que $\Sigma \vdash \varphi^n \rightarrow \psi$ implica $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ per hipòtesi d'inducció i veiem el resultat per $n + 1$. Si $\Sigma \vdash \varphi^{n+1} \rightarrow \psi$ per definició és $\Sigma \vdash (\varphi \& \varphi^n) \rightarrow \psi$, i utilitzant l'axioma (A7b) obtenim $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi^n \rightarrow \psi)$. Ara, utilitzant modus ponens de $\Sigma \cup \{\varphi\}$ i $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi^n \rightarrow \psi)$ demostrem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi^n \rightarrow \psi$, que per hipòtesi d'inducció implica $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

- Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ aleshores per algun n , $\Sigma \vdash \varphi^n \rightarrow \psi$

Suposem que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ és una demostració de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Veurem utilitzant inducció completa que per cada $j = 1, \dots, k$ existeix un n_j tal que $\Sigma \vdash \varphi^{n_j} \rightarrow \alpha_j$.

Si $j = 1$, α_j és un axioma o una fórmula de $\Sigma \cup \{\varphi\}$ i es compleix $\Sigma \vdash \bar{1} \rightarrow \alpha_j$ ($\varphi^0 = \bar{1}$). Sigui $j > 1$, per hipòtesi de inducció per tota $r < j$ $\Sigma \vdash \varphi^{n_r} \rightarrow \alpha_r$.

Si α_j és un axioma o una fórmula de Σ estem com en el cas $j = 1$.

Altrament α_j resulta del modus ponens de fórmules anteriors $\alpha_i, \alpha_i \rightarrow \alpha_j$. Per hipòtesis d'inducció tenim $\Sigma \vdash \varphi^{n_i} \rightarrow \alpha_i$ i $\Sigma \vdash \varphi^{n_j} \rightarrow (\alpha_i \rightarrow \alpha_j)$. Utilitzant el resultat (7) $\Sigma \vdash (\varphi^{n_i} \& \varphi^{n_j}) \rightarrow (\alpha_i \& (\alpha_i \rightarrow \alpha_j))$, i per tant $\Sigma \vdash (\varphi^{n_i+n_j}) \rightarrow (\alpha_i \& (\alpha_i \rightarrow \alpha_j))$. Segons (4) tenim $\Sigma \vdash \alpha_i \& (\alpha_i \rightarrow \alpha_j) \rightarrow \alpha_j$ i utilitzant l'axioma (A1) obtenim el resultat $\Sigma \vdash \varphi^{n_i+n_j} \rightarrow \alpha_j$.

□

Definició 3.2.16. Una teoria Σ s'anomena *inconsistent* si $\Sigma \vdash \bar{0}$, altrament s'anomena *consistent*.

Proposició 3.2.17. Σ és inconsistent si, i només si, $\Sigma \vdash \varphi$ per tota fórmula φ .

Demostració. Si Σ és inconsistent aleshores $\Sigma \vdash \bar{0}$ i $\Sigma \vdash \bar{0} \rightarrow \varphi$ per l'axioma (A9). Per modus ponens obtenim $\Sigma \vdash \varphi$ per tota fórmula φ . Recíprocament, com que es demostra tota fórmula φ , en particular es demostra la fórmula $\bar{0}$. \square

Proposició 3.2.18. Si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ és inconsistent, aleshores per algun n , $\Sigma \vdash \neg(\varphi^n)$.

Demostració. Si és inconsistent tenim $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bar{0}$, aleshores, pel teorema de la deducció local, per algun n , $\Sigma \vdash \varphi^n \rightarrow \bar{0}$, que és la definició de $\neg(\varphi^n)$. \square

3.3 Semàntica generalitzada de la lògica proposicional MTL

Arribats a aquest punt ja tenim dues estructures lògiques de MTL, una amb una relació de conseqüència semàntica i l'altra amb una relació de conseqüència sintàctica. Però encara no podem veure que són equivalents, és a dir, $\Sigma \models_{\text{MTL}} \varphi$ si, i només si, $\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi$. Necessitem un camí intermig amb una semàntica més general, utilitzarem les MTL-àlgebres. Per les següents definicions recomanem conèixer els conceptes definits a l'apèndix A.

Definició 3.3.1. Una *MTL-àlgebra* és una àlgebra $\mathcal{A} = \langle A, *, \Rightarrow, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$, de tipus $(2,2,2,2,0,0)$, que compleix:

- i) $\langle A, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ és un reticle acotat.
- ii) $\langle A, *, 1 \rangle$ és un monoide commutatiu amb 1 com l'element unitat.
- iii) Les operacions $*$ i \Rightarrow formen un *parell residuat*, és a dir, compleixen la *propietat de residuació*:

$$x * z \leq y \text{ si i } z \leq x \Rightarrow y$$

- iv) Compleix l'*equació de prelinealitat*:

$$(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$$

Una MTL-àlgebra s'anomena MTL-cadena si es compleix:

$$(x \cap y = x) \quad \text{o} \quad (x \cap y = y), \quad (\text{ordenació total})$$

.

Observació. Com que una MTL-àlgebra és un reticle definim l'ordre a MTL com $x \leq y$ si $x \cap y = x$. Prenent aquest ordre es comprova fàcilment que per tot x , $0 \leq x \leq 1$.

Seguidament veiem algunes propietats bàsiques de les MTL-àlgebres.

Proposició 3.3.2. Una MTL-àlgebra compleix les següents propietats:

- (a) $x * y \leq x$.
- (b) $x * (x \Rightarrow y) \leq y$.
- (c) $x \leq (y \Rightarrow (x * y))$.
- (d) Si $x \leq y$ aleshores $x * z \leq y * z$, $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$ i $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$.
- (e) $x \leq y$ si, i només si, $(x \Rightarrow y) = 1$.
- (f) $(x \cup y) * z = (x * z) \cup (y * z)$;
- (g) $(x \cup y) = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$

Demostració.

- (a) Per la propietat de residuació $x * y \leq x$, sii, $y \leq x \Rightarrow x = 1$.
- (b) Comencem amb $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y$ i aplicant residuació $x * (x \Rightarrow y) \leq y$.
- (c) Utilitzant residuació a partir de $x * y \leq x * y$ tenim $x \leq y \Rightarrow (x * y)$.
- (d) Siguin $x \leq y$.
Per la propietat anterior $x \leq y \leq z \Rightarrow (y * z)$, per tant $x * z \leq y * z$ per qualsevol z .
Utilitzant (1) $z * (z \Rightarrow x) \leq x \leq y$, per tant $z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y$.
També $x * (y \Rightarrow z) \leq y * (y \Rightarrow z) \leq z$ i amb residuació $y \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z$.
- (e) $x \leq y$ si, i només si, $1 * x \leq y$ si, i només si, $1 \leq x \Rightarrow y$.
- (f) Per la ordenació a una MTL-àlgebra $x \leq x \cup y$, per tant $x * z \leq (x \cup y) * z$, i de la mateixa manera $y * z \leq (x \cup y) * z$. Per tant $(x * z) \cup (y * z) \leq (x \cup y) * z$.
Per l'altra banda $x * z \leq (x * z) \cup (y * z)$ i $y * z \leq (x * z) \cup (y * z)$, i per residuació $x, y \leq z \Rightarrow [(x * z) \cup (y * z)]$. Per tant $(x \cup y) \leq z \Rightarrow [(x * z) \cup (y * z)]$, i ja tenim $(x \cup y) * z \leq (x * z) \cup (y * z)$.
- (g) Utilitzem l'equació de prelinealitat per mantenir la igualtat

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) = [\dots] * ((x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x)),$$

apliquem la propietat distributiva de \cup

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) = ([\dots] * (x \Rightarrow y)) \cup ([\dots] * (y \Rightarrow x)),$$

i per monotonia de les t-normes

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) \leq [((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) * (x \Rightarrow y)] \cup [((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) * (y \Rightarrow x)].$$

Finalment, per la propietat demostrada anteriorment, $x * (x \Rightarrow y) \leq y$, obtenim la desigualtat

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) \leq x \cup y.$$

Per l'altra banda,

$$(x \Rightarrow y) * (x \cup y) = (x * (x \Rightarrow y)) \cup (y * (x \Rightarrow y)) \leq y \cup y = y.$$

Per tant, amb residuació tenim

$$x \cup y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y.$$

Anàlogament aconseguim

$$x \cup y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x,$$

i per tant la desigualtat que volíem

$$x \cup y \leq ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x).$$

□

Un cop tenim l'estructura bàsica, ja podem interpretar les fórmules dins d'aquest tipus d'àlgebres, seguint el model vist per l'interval $[0, 1]$.

Definició 3.3.3. Donada una MTL-àlgebra \mathcal{A} definim una \mathcal{A} -assignació de variables proposicionals com una aplicació

$$a : X \longrightarrow A$$

que a cada variable proposicional li assigna un valor de A . Sigui a una \mathcal{A} -assignació de variables proposicionals, es defineix una \mathcal{A} -interpretació de fórmules,

$$i : Prop(X) \longrightarrow A$$

recursivament de la següent manera:

$$\begin{aligned} i|_X &= a \\ i(\bar{0}) &= 0 \\ i(\varphi \&\psi) &= i(\varphi) * i(\psi) \\ i(\varphi \rightarrow \psi) &= i(\varphi) \Rightarrow i(\psi) \\ i(\varphi \wedge \psi) &= i(\varphi) \cap i(\psi) \\ i(\varphi \vee \psi) &= i(\varphi) \cup i(\psi) \end{aligned}$$

Un cop podem assignar significat de veritat a cada fórmula podem definir el concepte de *conseqüència lògica*. Anomenem \mathbf{MTL} la classe formada per totes les MTL-àlgebres i $\mathbf{MTL}\mathcal{C}$ la classe formada per totes les MTL-cadenes. Més endavant veurem que \mathbf{MTL} és una varietat.

Definició 3.3.4. Sigui \mathcal{A} una MTL-àlgebra. Donada una teoria Σ , es diu que φ és *conseqüència lògica* de Σ dins de \mathcal{A} , i escrivim $\Sigma \models_{\mathcal{A}} \varphi$, si $i(\varphi) = 1$ per tota \mathcal{A} -interpretació que compleix $i[\Sigma] = \{i(\psi) \mid \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$.

$\Sigma \models_{\mathbf{MTL}} \varphi$ si $\Sigma \models_{\mathcal{A}} \varphi$ per tota $\mathcal{A} \in \mathbf{MTL}$.

Definició 3.3.5. Sigui \mathcal{A} una MTL-àlgebra

- Una fórmula φ és una \mathcal{A} -tautologia si $i(\varphi) = 1$ per tota \mathcal{A} -interpretació i . El conjunt de totes les \mathcal{A} -tautologies serà $Taut_{\mathcal{A}}$.
- Una \mathcal{A} -interpretació i és un \mathcal{A} -model de Σ si $i[\Sigma] \subseteq \{1\}$.

Observem que donades aquestes definicions podem definir equivalentment conseqüència lògica de la següent manera: $\Sigma \models_{\mathbf{MTL}} \varphi$ si $i(\varphi) = 1$ per tota MTL-àlgebra i tota \mathcal{A} -interpretació i model de Σ .

3.4 Completesa proposicional de MTL

Ja tenim tres estructures lògiques ben definides: la semàntica sobre $[0,1]$, la sintaxi i la semàntica sobre MTL-àlgebres. En aquesta secció veurem que les tres lògiques són equivalents, és a dir, si un raonament és correcte en una d'elles també ho és a les altres.

Primer veurem la completesa entre la sintaxi i la semàntica sobre MTL-àlgebres i finalment el teorema de completesa entre les dues estructures semàntiques.

Teorema 3.4.1 (Coherència). Si φ es demostra a MTL, aleshores φ és una \mathcal{A} -tautologia per cada MTL-àlgebra \mathcal{A} . Més abreujadament, si $\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{\text{MTL}} \varphi$.

Demostració. El primer pas és veure que tots els axiomes de MTL són \mathcal{A} -tautologies. Sigui \mathcal{A} una MTL-àlgebra qualsevol, i i una \mathcal{A} -interpretació qualsevol. Designem $i(\varphi) = x, i(\psi) = y, i(\chi) = z$.

(A1) Hem de veure que $1 \leq i((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)))$, que per definició de interpretació és $1 \leq (i(\varphi) \Rightarrow i(\psi)) \Rightarrow ((i(\psi) \Rightarrow i(\chi)) \Rightarrow (i(\varphi) \Rightarrow i(\chi)))$. Canviant-ho pels elements $x, y, z \in A$ hem de comprovar que en \mathcal{A} es compleix:

$$1 \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$$

En els següents axiomes prescindirem d'escriure els passos entre la interpretació de la fórmula fins a l'expressió algebraica.

Utilitzem la propietat de residuació tres vegades:

$$\begin{aligned} 1 &\leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) && , \text{ sii} \\ 1 * (x \Rightarrow y) &\leq (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z) && , \text{ sii} \\ (x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) &\leq (x \Rightarrow z) && , \text{ sii} \\ (x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) * x &\leq z \end{aligned}$$

Per veure aquesta l'última desigualtat utilitzem la propietat (b) dues vegades. Amb $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ veiem

$$x * (x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq y * (y \Rightarrow z),$$

i amb $y * (y \Rightarrow z) \leq z$ acabem comprovant la desigualtat $(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) * x \leq z$. L'axioma (A1) és \mathcal{A} -tautologia.

(A2) S'ha de comprovar que $1 \leq (x * y) \Rightarrow x$ es compleix en \mathcal{A} . Utilitzant $y \leq 1$ i $x \Rightarrow x = 1$, propietats certes a \mathcal{A} , es compleix $y \leq x \Rightarrow x$. Aplicant residuació, aquesta desigualtat és equivalent a $x * y \leq x$, i tornant a aplicar residuació obtenim el resultat $1 \leq x * y \Rightarrow x$.

(A3) Per la commutativitat de la t-norma, $x * y = y * x$, i utilitzant propietat de residuació veiem que $1 \leq (x * y) \Rightarrow (y * x)$.

(A4) $x \cap y \leq x$ es compleix sempre, per tant $x \cap y \Rightarrow x = 1$.

(A5) És la commutativitat de \cap .

(A6) Pel resultat de 3.3.2 Si $y \leq x$ aleshores $x * (x \Rightarrow y) \leq y = x \cap y$ per tant $(x * (x \Rightarrow y)) \leq x \cap y$.

Si $x \leq y$ aleshores $x * (x \Rightarrow y) \leq x = x \cap y$ per tant $(x * (x \Rightarrow y)) \leq x \cap y$.

(A7) Per la propietat de residuació tenim les següents equivalències que demostren (A7a) i (A7b):

$$\begin{aligned} (x * y) \Rightarrow z &\leq x \Rightarrow (y \Rightarrow z) && , \text{ sii,} \\ ((x * y) \Rightarrow z) * x &\leq y \Rightarrow z && , \text{ sii,} \\ ((x * y) \Rightarrow z) * (x * y) &\leq z && , \text{ sii,} \\ x \Rightarrow (y \Rightarrow z) &\leq (x * y) \Rightarrow z \end{aligned}$$

(A8) En aquest cas podem imitar la demostració de la propietat (g) i obtenim $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * ((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \leq z \cup z = z$. Per tant utilitzant residuació veiem

$$1 \leq ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z)$$

(A9) Evident ja que 0 és l'ímfim de A .

Directament es veu que la regla de deducció de MTL, Modus Ponens, manté les tautologies. Si $x = 1$ i $x \Rightarrow y = 1$ necessàriament $y = 1$, ja que $1 \Rightarrow y = y$.

Demostrem la generalització, $\Sigma \vdash_{MTL} \varphi$ implica $\Sigma \models_{MTL} \varphi$, veient que cada fórmula d'una demostració és 1 per una interpretació i \mathcal{A} -model de Σ . Utilitzarem inducció completa.

Sigui i un \mathcal{A} -model de Σ , i sigui $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ una demostració de φ a partir de Σ . Si $j = 1$, $i(\alpha_j) = 1$ ja que és axioma o fórmula de Σ . Si $j > 1$, suposem per hipòtesi d'inducció que $i(\alpha_k) = 1$ per $k < j$. En el cas que α_j sigui axioma o fórmula de Σ ja ho tenim fet, en l'altre cas, es dedueix de dues fórmules anteriors $\alpha_k, \alpha_k \rightarrow \alpha_j$ per modus ponens. Per hipòtesi d'inducció $i(\alpha_k) = 1$ i $i(\alpha_k \rightarrow \alpha_j) = 1$, que com hem vist abans implica $i(\alpha_j) = 1$. Així doncs, cada fórmula de la demostració és una \mathcal{A} -tautologia, i per tant, $\Sigma \vdash_{MTL} \varphi$ implica $\Sigma \models_{MTL} \varphi$. \square

Proposició 3.4.2. La classe formada per totes les MTL-àlgebres forma una varietat, \mathbb{MTL} (definició de varietat a l'apèndix A).

Demostració. A l'apèndix es comprova que els reticles formen una varietat i els monoides commutatius amb unitat també, per tant les MTL-àlgebres sense la propietat de residuació també formen una varietat. Així doncs falta veure que la propietat de residuació es pot expressar a partir d'identitats. Proponem les següents:

$$(a') \quad x \cap (y \Rightarrow (x * y)) = x$$

$$(b') \quad ((x \Rightarrow y) * x) \cup y = y$$

$$(c') \quad (x \Rightarrow (x \cup y)) = 1$$

$$(d') \quad ((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow (x \cup y))) = 1$$

$$(e') \quad (x \cap y) * z = (x * z) \cap (y * z)$$

Primer de tot veiem que aquestes identitats es compleixen en una MTL-àlgebra. (a') és equivalent a la propietat (c) de la proposició 3.3.2, ja que hem definit l'ordre segons l'operació \cap , i de la mateixa manera la (b') és equivalent a la propietat (b).

La identitat (c') es veu a partir de la (e) utilitzant que $x \leq x \cup y$, i la (d') és la traducció de $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow (x \cup y))$.

Per últim, la identitat (e') es comprova utilitzant el teorema de coherència i la fórmula (31) del lema 3.2.13 certa a MTL.

Per altra banda, hem de veure que les identitats expressen la residuació; primer veiem alguns resultats previs a partir de les identitats:

(f') Si $x \leq y$ aleshores $x * z \leq y * z$.

Si $x \leq y$ aleshores $x = x \cap y$, per tant $x * z = z * (x \cap y) = (x * z) \cap (y * z)$ utilitzant (e'). Per tant $x * z \leq y * z$.

(g') $x \leq y$ sii, $x \Rightarrow y = 1$.

Utilitzant la identitat (c') i el fet que $x \leq y$ implica $y = x \cup y$ arribem a $x \Rightarrow y = 1$. Suposem $x \Rightarrow y = 1$, utilitzem la identitat (b') $y = ((x \Rightarrow y) * x) \cup y = (1 * x) \cup y = x \cup y$, per tant $x \leq y$.

(h') Si $x \leq y$ aleshores $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$.

Es veu directament a partir de (d') ja que $x \cup y = y$.

Veiem la propietat de residuació: $z \leq (x \Rightarrow y)$ sii, $x * z \leq y$.

Si $z \leq x \Rightarrow y$ aleshores utilitzant (f') $z * x \leq x * (x \Rightarrow y) \leq y$. Per l'altra banda, si $x * z \leq y$ aleshores utilitzant (a') i (h') tenim $z \leq x \Rightarrow (x * z) \leq x \Rightarrow y$. \square

Definició 3.4.3. Sigui Σ una teoria. Definim la següent relació \sim_Σ :

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{sii,} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{i} \quad \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

Proposició 3.4.4. \sim_Σ és congruència respecte les connectives $\&$, \rightarrow , \wedge .

Demostració. Primer de tot observem que

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{i} \quad \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi, \quad \text{sii,} \quad \Sigma \vdash \varphi \equiv \psi$$

gràcies a (5) del lema 3.2.6 i l'axioma (A2).

Per veure que és relació d'equivalència utilitzem les fórmules de (24). I els lemes (26), (27) (28) i (29) ens permeten demostrar:

$$\begin{aligned}\varphi \equiv \psi &\vdash (\varphi \&\chi) \equiv (\psi \&\chi) \\ \varphi \equiv \psi &\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \equiv (\psi \rightarrow \chi) \\ \varphi \equiv \psi &\vdash (\chi \rightarrow \varphi) \equiv (\chi \rightarrow \psi) \\ \varphi \equiv \psi &\vdash (\varphi \wedge \chi) \equiv (\psi \wedge \chi)\end{aligned}$$

□

Definició 3.4.5. Definim l'àlgebra $\mathcal{A}_\Sigma = \langle Prop(X) / \sim_\Sigma, \cdot, *, \Rightarrow, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$. Els elements de \mathcal{A}_Σ són les classes d'equivalència $[\varphi]_\Sigma = \{\psi \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$. Les operacions es defineixen de la següent manera:

$$\begin{aligned}0 &= [\bar{0}]_\Sigma, \\ 1 &= [\bar{1}]_\Sigma, \\ [\varphi]_\Sigma * [\psi]_\Sigma &= [\psi \&\varphi]_\Sigma, \\ [\varphi]_\Sigma \Rightarrow [\psi]_\Sigma &= [\varphi \rightarrow \psi]_\Sigma, \\ [\varphi]_\Sigma \cap [\psi]_\Sigma &= [\varphi \wedge \psi]_\Sigma, \\ [\varphi]_\Sigma \cup [\psi]_\Sigma &= [\varphi \vee \psi]_\Sigma,\end{aligned}$$

Proposició 3.4.6. \mathcal{A}_Σ és una MTL-àlgebra.

Demostració. Siguin $[\varphi]_\Sigma, [\psi]_\Sigma, [\chi]_\Sigma$ tres elements de \mathcal{A}_Σ . Veiem cadascuna de les propietats:

\mathcal{A}_Σ és un reticle

La idempotència de \cap i \cup es veu utilitzant l'axioma (A4) i (3),(10),(12),(13). La commutativitat de \cap la tenim per l'axioma (A5) i de \cup per (12). L'associativitat de cadascuna també l'hem vist a (21) i (22). Equacions d'absorció:

Per (A4) i (23) tenim les següents fórmules a MTL:

$$\left. \begin{aligned} &\vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi \\ &\vdash \varphi \rightarrow \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \equiv (\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi$$

i obtenim el resultat $[\varphi]_\Sigma \cap ([\varphi]_\Sigma \cup [\psi]_\Sigma) = [\varphi]_\Sigma$. Anàlogament es fa amb el dual $[\varphi]_\Sigma \cup ([\varphi]_\Sigma \cap [\psi]_\Sigma) = [\varphi]_\Sigma$.

Veiem les propietats de l'1 i el 0:

Per l'axioma (A4) tenim $\vdash \varphi \wedge \bar{1} \rightarrow \varphi$ i utilitzant $\vdash \varphi \rightarrow \bar{1}$ i $\vdash (\varphi \rightarrow \bar{1}) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \bar{1}))$ que surt de (10) aconseguim $\vdash \varphi \rightarrow \varphi \wedge \bar{1}$. Per tant $[\varphi]_\Sigma \cap [\bar{1}]_\Sigma = [\varphi]_\Sigma$

Pels axiomes (A4) i (A9) automàticament tenim $[\varphi]_\Sigma \cap [\bar{0}]_\Sigma = [\bar{0}]_\Sigma$

Per la propietat (12) tenim $\vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \bar{1}$. Amb (14) i $\vdash \varphi \rightarrow \bar{1}$ obtenim $\vdash \varphi \vee \bar{1} \rightarrow \bar{1}$, per tant tenim $[\varphi]_\Sigma \cup [\bar{1}]_\Sigma = [\bar{1}]_\Sigma$.

L'última propietat es demostra anàlogament utilitzant les propietats anteriors.

Monoide commutatiu amb unitat $\bar{1}$

La commutativitat és directa a partir de l'axioma (A3), l'associativitat a partir de (8) i la propietat de la unitat a partir de (20) i l'axioma (A2).

* i & formen un parell residuat

Veiem primer com és l'ordre de \mathcal{A}_Σ .

Lema.

$$[\varphi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma \text{ sii, } \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Demostració. Si $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ aleshores $\Sigma \vdash \varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)$ (veient-ho a partir de (A4) i (10)). Així doncs $[\varphi]_\Sigma = [\varphi]_\Sigma \cap [\psi]_\Sigma$ i $[\varphi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma$.

Si $[\varphi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma$ aleshores $\Sigma \vdash \varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)$ i utilitzant la transitivitat amb $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ tenim $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. \square

Veiem la propietat de residuació a partir de les següents equivalències:

$$\begin{aligned} [\chi]_\Sigma \leq [\varphi]_\Sigma &\Rightarrow [\psi]_\Sigma \quad , \text{ sii} \\ \Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) &\quad , \text{ sii} \\ \Sigma \vdash \chi \&\varphi \rightarrow \psi &\quad , \text{ sii} \\ [\chi]_\Sigma * [\varphi]_\Sigma &\leq [\psi]_\Sigma \end{aligned}$$

Equació de prelinealitat

Es veu directament a partir de la propietat (14). \square

Definició 3.4.7. Sigui $\mathcal{A} = \langle A, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ un reticle residuat. Un *filtre* de \mathcal{A} és un conjunt no buit $F \subseteq A$ que compleix per cada $x, y \in A$:

- Si $x \in F$ i $y \in F$ aleshores $x * y \in F$.
- Si $x \in F$ i $x \leq y$ aleshores $y \in F$.

F s'anomena *filtre primer* si a més satisfà:

$$x \Rightarrow y \in F \quad \text{o} \quad y \Rightarrow x \in F.$$

Observació. Fixem-nos que l'element 1 de \mathcal{A} sempre és element d'un filtre F , ja que si hi ha algun element $a \in F$, aleshores $a \leq 1$ i per tant $1 \in F$.

Proposició 3.4.8. Sigui \mathcal{A} una MTL-àlgebra i sigui F un filtre. Definim la següent relació

$$x \sim_F y \quad \text{sii} \quad x \Rightarrow y \in F \quad \text{i} \quad y \Rightarrow x \in F.$$

Aleshores,

- (a) \sim_F és congruència i el quocient \mathcal{A}/\sim_F és una MTL-àlgebra.
- (b) \mathcal{A}/\sim_F és lineal si, i només si, F és primer.

Demostració.

\sim_F és congruència

La reflexivitat i simetria són directes a partir de la definició. La transitivitat es veu de la següent manera:

Gràcies al teorema de coherència podem utilitzar que $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ és una \mathcal{A} -tautologia. Per tant utilitzant residuació obtenim $(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$. Ara, suposant que $x \sim_F y$, $y \sim_F z$ per una banda tenim $(x \Rightarrow y), (y \Rightarrow z) \in F$ i per ser F un filtre deduïm $(x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) \in F$ i $(x \Rightarrow z) \in F$. De la mateixa manera s'obté $(z \Rightarrow x) \in F$. Per tant, si $x \sim_F y$, $y \sim_F z$ aleshores $x \sim_F z$.

Com que és relació d'equivalència podem definir les classes d'equivalència $[x]_F = \{y \mid x \sim_F y\}$. Per veure que és congruència veiem que preserva les operacions. Suposem $x \sim_F y$. Pel teorema de coherència i el lema 3.2.13 sabem que les següents fórmules són \mathcal{A} -tautologies:

$$\begin{aligned} (\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow ((\varphi \& \chi) \rightarrow (\psi \& \chi)), \\ (\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \\ (\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)), \\ (\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \rightarrow (\psi \wedge \chi)) \end{aligned}$$

És a dir, es compleixen les següents desigualtats:

$$\begin{aligned} (x \Rightarrow y) &\leq ((x * z) \Rightarrow (y * z)), \\ (x \Rightarrow y) &\leq ((x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow z)), \\ (x \Rightarrow y) &\leq ((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)), \\ (x \Rightarrow y) &\leq ((x \cap z) \Rightarrow (y \cap z)), \end{aligned}$$

I utilitzant la definició de filtre de F es veu fàcilment que $(x * z) \sim_F (y * z)$, $(x \Rightarrow z) \sim_F (y \Rightarrow z)$ i $(x \cap z) \sim_F (y \cap z)$.

\mathcal{A}/\sim_F és una MTL-àlgebra

Considerem l'aplicació

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\sim_F$$

que per cada $x \in \mathcal{A}$ $f(x) = [x]_F$. Com que \sim_F és congruència, aquesta aplicació preserva les operacions entre elements, és a dir, és un homomorfisme. Pel teorema A.4 de l'apèndix deduïm directament que \mathcal{A}/\sim_F és una MTL-àlgebra, ja que les propietats de MTL-àlgebra es preserven a través d'homomorfismes.

F és primer si, i només si, \mathcal{A}/\sim_F és una MTL-cadena.

Suposem que F és un filtre primer, i siguin $x, y \in A$. Per ser primer, $x \Rightarrow y \in F$ o $y \Rightarrow x \in F$, per tant $[x]_F \leq [y]_F$ o $[y]_F \leq [x]_F$, és a dir, és lineal.

Si \mathcal{A}/\sim_F és una MTL-cadena aleshores o bé $[x]_F \leq [y]_F$ i $x \Rightarrow y \in F$, o bé al revés. Per tant, F és un filtre primer. □

Proposició 3.4.9. Sigui F un filtre, es compleix que $[1]_F = F$.

Demostració. Primer de tot recordem l'observació anterior: 1 sempre és element d'un filtre. Sigui $x \in F$, veiem que està relacionat amb 1. Com que \mathcal{A} és MTL-àlgebra $x \Rightarrow 1 = 1 \in F$, i per altra banda $1 \Rightarrow x = x \in F$. Així doncs, $x \in [1]_F$ per qualsevol $x \in F$. Per altra banda, sigui x un element de $[1]_F$, com que $x \sim_F 1$ es compleix que $1 \Rightarrow x = x \in F$. □

Corol·lari 3.4.10. Sigui F un filtre, $[x]_F \leq [y]_F$ si, i només si, $x \Rightarrow y \in F$

Demostració. Suposem $[x]_F \leq [y]_F$, com que \mathcal{A}/\sim_F és MTL-àlgebra, aleshores $[x]_F \Rightarrow [y]_F = [1]_F$, i per tant $[x \Rightarrow y]_F = [1]_F$. I com hem vist en la demostració anterior, $[1]_F = F$, per tant $x \Rightarrow y \in F$. Recíprocament, suposem que $x \Rightarrow y \in F$, aleshores $[x]_F \Rightarrow [y]_F = [x \Rightarrow y]_F \in [1]_F$, i en conseqüència $[x]_F \leq [y]_F$. □

Proposició 3.4.11. Sigui \mathcal{A} una MTL-àlgebra i sigui $a \in A$, $a \neq 1$, aleshores hi ha un filtre primer F a \mathcal{A} que no conté a .

Demostració. Primer de tot observem que sempre existeix el filtre $F = \{1\}$. Sigui F un filtre que no conté a i que per alguns $x, y \in A$, $x \Rightarrow y \notin F$ i $y \Rightarrow x \notin F$. Veiem que existex un $F' \supseteq F$ que no conté a i conté $x \Rightarrow y$ o $y \Rightarrow x$.

Sigui $z \in A$, definim el filtre $F' = \{u \mid (\exists v \in F)(\exists n \in \mathbb{N})(v * z^n \leq u)\}$ i comprovem que és el menor filtre que conté F i també z . Clarament és un filtre que conté F i z . Si $F'' \supseteq F$ és un altre filtre que conté z aleshores per tot $v \in F$ i qualsevol n també $v * z^n \in F''$, per tant $F' \subseteq F''$.

Teníem x, y tals que $x \Rightarrow y \notin F$ i $y \Rightarrow x \notin F$. Considerem F_1 el menor filtre que conté F i $x \Rightarrow y$ com a element, i F_2 el respectiu amb $y \Rightarrow x$. Veiem que $a \notin F_1$ o $a \notin F_2$.

Suposem el contrari, $a \in F_1$ i $a \in F_2$, aleshores existeixen $v_1, v_2 \in F$ i $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\begin{cases} v_1 * (x \Rightarrow y)^{n_1} \leq a \\ v_2 * (y \Rightarrow x)^{n_2} \leq a. \end{cases}$$

Considerem $v = v_1 * v_2$ i $n = \max\{n_1, n_2\}$. Per la propietat (a) de la proposició 3.3.2 tenim $v \leq v_1$, $v \leq v_2$ i també $(x \Rightarrow y)^n \leq (x \Rightarrow y)^{n_1}$, $(y \Rightarrow x)^n \leq (y \Rightarrow x)^{n_2}$. Per tant obtenim les desigualtats

$$\begin{cases} v * (x \Rightarrow y)^n \leq a \\ v * (y \Rightarrow x)^n \leq a \end{cases}$$

i utilitzant les propietats de MTL-àlgebra i la fórmula (31) del lema 3.2.14 amb el teorema de coherència

$$\begin{aligned} (v * (x \Rightarrow y)^n) \cup (v * (y \Rightarrow x)^n) &\leq a \\ v * ((x \Rightarrow y)^n \cup (y \Rightarrow x)^n) &\leq a \\ v &\leq a \end{aligned}$$

Veiem doncs, que imposant que a estigui contingut a F_1 i F_2 trobem com a contradicció que $a \in F$. Per tant, o bé F_1 o bé F_2 és el filtre que volíem.

Així doncs, per cada parella $x, y \in A$ on $x \Rightarrow y, y \Rightarrow x \notin F$ podem trobar un filtre $F_{x,y}$ que contingui o bé $x \Rightarrow y$ o bé $y \Rightarrow x$ i no contingui a .

A partir d'ara suposem que \mathcal{A} és numerable. Considerem $F_0 = \{1\}$ i $\{(x_i, y_i)\}_i$ el conjunt de punts tals que ni $x_i \Rightarrow y_i$ ni $y_i \Rightarrow x_i$ pertanyen a F_0 , i construïm a partir d'aquestes parelles els conjunts $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$ de tal manera que cada F_i sigui el menor filtre que no conté a i té com a element $x_i \Rightarrow y_i$ o $y_i \Rightarrow x_i$. La unió de tots els filtres

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

serà un filtre primer que no contindrà a .

Per \mathcal{A} no numerable, es fa similarment utilitzant el lema de Zorn. \square

Proposició 3.4.12. Cadascuna de les MTL-àlgebres és producte subdirecte d'un sistema de MTL-àlgebres completament ordenades.

Demostració. Sigui $\mathcal{A} = \langle A, *, \Rightarrow, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ una MTL-àlgebra, i sigui \mathcal{F} el conjunt dels filtres primers de \mathcal{A} . Considerem les següents MTL-cadenes $\mathcal{A}_F = \mathcal{A} / \sim_F$ per cadascun dels filtres $F \in \mathcal{F}$. Tenim el producte directe d'aquestes MTL-cadenes

$$\mathcal{A}^* = \prod_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{A}_F,$$

i considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}^* \\ x &\longmapsto ([x]_F)_{F \in \mathcal{F}} \end{aligned}$$

Com que l'aplicació preserva les operacions és un homomorfisme, i per tant només falta veure que l'aplicació és injectiva per veure que \mathcal{A} és una subàlgebra de \mathcal{A}^* .

Siguin $x, y \in A$, i suposem que $x \neq y$. Suposem el cas $x \not\leq y$ (l'altre cas és anàleg), llavors $(x \Rightarrow y) \neq 1$ a \mathcal{A} . Per la proposició anterior existeix un filtre primer F que no conté $x \Rightarrow y$, així, dins de \mathcal{A}/\sim_F també $[x]_F \not\leq [y]_F$. Per tant $[x]_F \neq [y]_F$ i $f(x) \neq f(y)$.

L'aplicació és injectiva, i per tant, \mathcal{A} és producte subdirecte de MTL-cadenes. \square

Teorema 3.4.13 (Completesa forta). Sigui Σ una teoria sobre MTL i sigui φ una fórmula. Aleshores són equivalents:

- (i) φ es demostra a partir de Σ , $\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi$.
- (ii) Per cada MTL-cadena \mathcal{A} , si i és un model de Σ aleshores $i(\varphi) = 1$, $\Sigma \models_{\text{MTL}\mathcal{C}} \varphi$.
- (iii) Per cada MTL-àlgebra \mathcal{A} , si i és un model de Σ aleshores $i(\varphi) = 1$, $\Sigma \models_{\text{MTL}} \varphi$.

Demostració. Amb el teorema de coherència hem vist (i) implica (iii), i per tant, (i) implica (ii).

Per veure (ii) implica (iii) veurem el contrarecíproc. Suposem que existeix una fórmula φ que no es demostra a MTL, és a dir, que per alguna MTL-àlgebra \mathcal{A} existeix una \mathcal{A} -interpretació i tal que $i[\Sigma] \subseteq \{1\}$ i $i(\varphi) \neq 1$. Com que \mathcal{A} és producte subdirecte de MTL-cadenes, existeix una MTL-cadena $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}/\sim_F$, per algun filtre primer, i una \mathcal{A}_F -interpretació \tilde{i} , amb $\tilde{i} = [i]_F$, tal que $\tilde{i}[\Sigma] \subseteq \{[1]_F\}$ i $\tilde{i}(\varphi) \neq [1]_F$. Per tant $\Sigma \not\vdash_{\text{MTL}\mathcal{C}} \varphi$, que és el que volíem veure.

Només falta veure (iii) implica (i). Suposem $\Sigma \not\vdash_{\text{MTL}} \varphi$, construirem una \mathcal{A}_{MTL} -interpretació i tal que $i[\Sigma] \subseteq \{1\}$ i $i(\varphi) \neq 1$. La classe $[\bar{1}]_\Sigma = \{\psi \mid \Sigma \vdash \bar{1} \equiv \psi\} = \{\psi \mid \Sigma \vdash \psi\}$ ja que $\bar{1} \rightarrow \psi$ es demostra per tota ψ , i de $\Sigma \vdash \bar{1} \rightarrow \psi$ se'n dedueix $\Sigma \vdash \psi$. Definim la \mathcal{A}_{MTL} -interpretació

$$\begin{aligned} i : \text{Prop}(X) &\longrightarrow \mathcal{A}_{\text{MTL}} \\ \psi &\longmapsto [\psi]_\Sigma \end{aligned}$$

Aleshores per cada fórmula $\psi \in \Sigma$, $i(\psi) = [\bar{1}]_\Sigma$ i $i(\varphi) \neq [\bar{1}]_\Sigma$. És a dir, si $\Sigma \not\vdash_{\text{MTL}} \varphi$ aleshores $\Sigma \not\vdash_{\text{MTL}} \varphi$. Per tant (iii) implica (i). \square

Un cop tenim la completesa entre \vdash_{MTL} i \models_{MTL} només falta veure la completesa amb la semàntica MTL sobre el $[0,1]$. Per aconseguir-ho utilitzem el següent teorema.

Teorema 3.4.14 (Immersió). Tota MTL-cadena numerable és submergible en una MTL-cadena estàndard a $[0,1]$.

Demostració. Només veurem les idees principals per demostrar aquest teorema. Sigui \mathcal{A} una MTL-cadena numerable $\langle A, *, \Rightarrow, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$.

El primer pas es diu *densificació*. Veure que existeix

$$f : \mathcal{A}' = \langle A, * \cap, \cup, 0, 1 \rangle \hookrightarrow B = \langle [0, 1] \cap \mathbb{Q}, *, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$$

un homomorfisme injectiu, imposant que per cada dos elements x, y , $f(x) \Rightarrow f(y) = \sup\{z \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \mid x * z \leq y\} \in B$. El segon pas es diu *completació*. Trobar un altre homomorfisme injectiu

$$g : B \hookrightarrow C = \langle [0, 1], *, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$$

on C sigui MTL-àlgebra i es preserven els supremes per les implicacions residuades d' \mathcal{A} . És a dir, que per $x, y \in A$, $g(f(x \Rightarrow y)) = \sup\{z \in C \mid f(x) * z \leq f(y)\}$. Així assegurem l'estructuralitat per la implicació.

L'aplicació $f \circ g : \mathcal{A} \hookrightarrow C$ és la immersió que buscavem. \square

Un cop tenim aquest teorema podem demostrar la completesa a MTL.

Teorema 3.4.15 (Completesa forta de MTL). Sigui Σ una teoria i φ una fórmula. φ es dedueix a partir de Σ si, i només si, φ és conseqüència lògica de Σ dins MTL.

$$\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi \text{ si i } \Sigma \models_{\text{MTL}} \varphi$$

Demostració. La primera implicació, de sintàctic a semàntic, és directe pel teorema de completesa anterior, ja que $[0, 1]_*$ és una MTL-àlgebra per qualsevol t-norma $*$ contínua per l'esquerra.

Si veiem que $\Sigma \models_{\text{MTL}} \varphi$ implica $\Sigma \models_{\text{MTL}C} \varphi$ ja haurem acabat, perquè pel teorema de completesa 3.4.13 implicarà $\Sigma \vdash_{\text{MTL}} \varphi$. Demostrem-ho pel contrarecíproc, suposem que $\Sigma \not\models_{\text{MTL}C} \varphi$, i per tant existeix una MTL-cadena \mathcal{A} tal que $\Sigma \not\models_{\mathcal{A}} \varphi$.

Sigui i una \mathcal{A} -model de Σ tal que $i(\varphi) \neq 1$. Considerem la MTL-àlgebra \mathcal{A}' generada per $\{i(\psi) \mid \psi \text{ subfórmula de } \Sigma \cup \{\varphi\}\}$. Com que Σ és un conjunt numerable de fórmules, aleshores $i[\Sigma \cup \{\varphi\}]$ també és numerable, i per tant, \mathcal{A}' també serà numerable. Per ser subàlgebra de \mathcal{A} , \mathcal{A}' és una MTL-cadena numerable, complim les hipòtesis del teorema de immersió en $[0, 1]$.

Aplicant el teorema, existeix una immersió f de \mathcal{A}' en una MTL-àlgebra estàndard en $[0, 1]$, diguem-li B . Definim en B la interpretació

$$\begin{aligned} \bar{i} : \text{Prop}(x) &\longrightarrow B \\ \alpha &\longmapsto f(i(\alpha)) \end{aligned}$$

Com que f és homomorfisme, $\bar{i}(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, i a més, $\bar{i}(\varphi) \neq 1$. Per tant, φ no és conseqüència lògica de Σ en B .

Així doncs, hem trobat una estructura $[0, 1]_*$ on $\Sigma \not\models_{[0, 1]_*} \varphi$, per tant $\Sigma \not\models_{\text{MTL}} \varphi$ i queda demostrat el teorema. \square

3.5 Completesa en lògiques particulars

Hem vist que la lògica MTL gaudeix del teorema de completesa més general, però no passa el mateix per totes les lògiques fuzzy basades en t-normes residuades. Tornem a les lògiques particulars introduïdes anteriorment i veiem quins teoremes de completesa compleixen.

Igual que MTL, les lògiques de Gödel i del Nilpotent Mínim, tenen completesa forta. La seves demostracions són similars a la de MTL. També s'utilitzen estructures semàntiques més generals com a camí que connecta la semàntica en $[0,1]$ i la sintàctica, per G tenim les G-àlgebres i per NM les NM-àlgebres.

Les lògiques BL, de Łukasiewicz i del Producte no tenen completesa forta, tenen completesa forta finita. Cadascuna de les lògiques també utilitza una àlgebra generalitzada del $[0,1]$: BL té les BL-àlgebres, L les MV-àlgebres i Π les Π -àlgebres.

Per demostrar la completesa forta finita en cadascuna d'elles, s'utilitza un altre teorema de immersió al $[0,1]$. L'enunciem per una lògica L i una L -àlgebra la seva estructura associada.

Teorema 3.5.1 (Immersió local). Tota L -cadena és localment submergible en una L -àlgebra estàndard a $[0,1]$.

Definició 3.5.2. Diem que una estructura $\mathcal{A} = \langle A, f_1, \dots, f_m \rangle$ és *localment submergible* en \mathcal{B} si per cada conjunt $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ existeix una aplicació injectiva $h : \{a_1, \dots, a_n\} \hookrightarrow \mathcal{B}$ tal que, per tot i si $f_i(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = a_{i_j}$ aleshores $f_i(h(a_{i_1}), \dots, h(a_{i_k})) = h(a_{i_j})$.

Per demostrar el teorema de completesa forta finita s'actua com en l'anterior demostració a MTL, però ara es fa el contrarecíproc de $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models_L \varphi$ implica $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models_{\mathbb{L}} \varphi$. Es suposa que $\varphi_1 \dots \varphi_n \not\models_{\mathbb{L}} \varphi$, i utilitzant el teorema de immersió local es troba una interpretació per tal de veure $\varphi_1, \dots, \varphi_n \not\models_{\mathbb{L}} \varphi$.

4 Lògica de predicats MTL \forall

Com en el capítol anterior, desenvoluparem la lògica MTL semànticament i sintàcticament, però en un *llenguatge de predicats*. El canvi més important d'aquest llenguatge és que ara treballarem amb *predicats*, que es poden veure com relacions o propietats entre elements d'un món. Cada predicat l'entendrem com un conjunt fuzzy, amb graus de veritat, per expressar una propietat vaga entre elements. Per tal de poder expressar correctament les frases entre elements d'un món i els predicats utilitzarem nous símbols lògics anomenats *quantificadors*: *universal* ($\forall x$) i *existencial* ($\exists x$). Aquesta diferència provocarà canvis importants en els teoremes de completesa.

Definició 4.0.3. Un llenguatge de predicats \mathcal{J} està format per: un conjunt no buit de *predicats* $\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$, cadascun amb la seva *arietat* n_P, n_Q, n_R, \dots (un natural positiu); i un conjunt de *constants* $\mathcal{C} = \{c, d, e, \dots\}$.

El llenguatge lògic són les *variables* $\mathcal{V} = \{x, y, z, \dots\}$, les *connectives* $\&, \rightarrow, \wedge, (\forall x), (\exists x)$, i les *constants de veritat* $\bar{0}$ i $\bar{1}$.

Els *termes* són les variables i constants. Les *fórmules atòmiques* tindran la forma $P(t_1, \dots, t_n)$ on P és un predicat d'arietat n i t_1, \dots, t_n són termes. A partir de les fórmules atòmiques, definim les fórmules recursivament de la següent manera: Si φ, ψ són fórmules i x és una variable aleshores $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \& \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$, $\bar{0}$ i $\bar{1}$ són fórmules.

Definim altres connectives a partir de les anteriors:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi & \text{ és } ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi), \\ \varphi \equiv \psi & \text{ és } (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi), \\ \neg \varphi & \text{ és } \varphi \rightarrow \bar{0} \end{aligned}$$

Observació. Generalment, en un llenguatge de predicats s'hi defineixen *funcionals* $\mathcal{F} = \{f_1, f_n, \dots\}$, amb arietats n_1, n_2, \dots , de manera que per cada i i per termes t_1, \dots, t_{n_i} $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ també és un terme. Aquí treballarem la lògica de predicats sense funcionals.

Necessitem definir uns conceptes tècnics entre les variables i les fórmules.

Definició 4.0.4. Definim el conjunt de *subfórmules* de φ , $Sub(\varphi)$, de la següent manera.

- $\varphi \in Sub(\varphi)$ per qualsevol fórmula φ .
- Si $\varphi \in Sub(\psi)$ o $\varphi \in Sub(\chi)$ aleshores és $\varphi \in Sub(\psi \rightarrow \chi), Sub(\psi \& \chi), Sub(\psi \wedge \chi)$.
- Si $\varphi \in Sub(\psi)$ aleshores $\varphi \in Sub((\forall x)\psi)$ i $\varphi \in Sub((\exists x)\psi)$.

Definició 4.0.5. Sigui \mathcal{J} un llenguatge i φ una fórmula. Definim el conjunt de variables que intervenen en φ , $V(\varphi)$, com:

- Si φ és una constant $V(\varphi) = \emptyset$.

- Si φ és atòmica, $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ on t_i pot ser constant o variable, aleshores $V(\varphi) = \{t_1, \dots, t_n\} \cap \mathcal{V}$
- Si φ és de la forma $\psi \rightarrow \chi$, $\psi \& \chi$ o $\psi \wedge \chi$ aleshores $V(\varphi) = V(\psi) \cup V(\chi)$.
- Si φ és de la forma $(\forall x)\psi$ o $(\exists x)\psi$ aleshores $V(\varphi) = V(\psi) \cup \{x\}$.

Definició 4.0.6.

(1) Sigui φ una fórmula, es defineix el conjunt de *variables lliures*, $L(\varphi)$, de la següent manera:

- Si φ és una constant aleshores $L(\varphi) = \emptyset$
- Si φ és una fórmula atòmica, $P(t_1, \dots, t_n)$, $L(\varphi) = V(\varphi)$
- Si φ és $\psi \rightarrow \chi$, $\psi \& \chi$ o $\psi \wedge \chi$ aleshores $L(\varphi) = L(\psi) \cup L(\chi)$
- Si φ és $(\forall x)\psi$ o $(\exists x)\psi$, aleshores $L(\varphi) = L(\psi) - \{x\}$.

(2) Definim el concepte de *substitució* d'un terme t per una variable x en una fórmula φ , $S_x^t \varphi$:

- Si φ és una fórmula atòmica aleshores $S_x^t \varphi$ és el resultat de canviar totes les ocurrències de x en φ per t .
- $S_x^t \bar{0} = \bar{0}$ i $S_x^t \bar{1} = \bar{1}$.
- $S_x^t(\varphi \rightarrow \psi)$ és $S_x^t \varphi \rightarrow S_x^t \psi$
- $S_x^t(\varphi \& \psi)$ és $S_x^t \varphi \& S_x^t \psi$
- $S_x^t(\varphi \wedge \psi)$ és $S_x^t \varphi \wedge S_x^t \psi$
- $S_x^t[(\forall x)\varphi]$ i $S_x^t[(\exists x)\varphi]$ es mantenen respectivament $(\forall x)\varphi$ i $(\exists x)\varphi$.
- $S_x^t[(\forall y)\varphi]$ i $S_x^t[(\exists y)\varphi]$ són respectivament $(\forall y)S_x^t \varphi$ i $(\exists y)S_x^t \varphi$, per qualsevol variable y diferent de x .

(3) Una variable x es pot substituir per y dins de φ , $S_x^y \varphi$, si no hi ha cap subfórmula de φ de la forma $(\forall y)\psi$ tal que $x \in L(\psi)$.

(4) Una fórmula φ es diu que és una *sentència* si $L(\varphi) = \emptyset$, és a dir, no conté variables lliures.

4.1 Lògica de predicats MTL \forall en $[0, 1]$

Definició 4.1.1. Sigui \mathcal{J} un llenguatge de predicats i sigui $[0, 1]_*$ una àlgebra sobre el $[0, 1]$ fixada una t-norma amb residu. Una *estructura* $\mathcal{M} = \langle M, (r_P)_{\mathcal{P}}, (m_c)_{\mathcal{C}} \rangle$ sobre \mathcal{J} està formada per un conjunt no buit M que anomenem *domini*, per cada predicat n -ari P una relació fuzzy n -ària $r_P : M^n \rightarrow [0, 1]$, i per cada constant c un element m_c de M .

Observació. Una estructura ens servirà per associar significat al llenguatge lògic. Cada relació fuzzy associarà una n -epla d'elements de M , (m_1, \dots, m_n) , a un grau de veritat, $r_P(m_1, \dots, m_n) \in [0, 1]$.

Utilitzant el llenguatge predicats es pot veure més fàcilment la connexió amb els conjunts fuzzy. Cada relació fuzzy entre elements d'un món \mathcal{M} té un grau de veritat en el $[0, 1]$, com un conjunt fuzzy.

Definició 4.1.2. Sigui \mathcal{J} un llenguatge de predicats i \mathcal{M} una estructura sobre \mathcal{J} .

- Una \mathcal{M} -valoració de variables és una aplicació

$$\begin{aligned} v : \mathcal{V} &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

que assigna a cada variable un element de M . Siguin dues valoracions v, v' , es denotarà $v \equiv_x v'$ el fet que $v(y) = v'(y)$ per tota variable y diferent de x .

- Donada una estructura \mathcal{M} i una valoració v definim el valor d'un terme com $\|x\|_{\mathcal{M},v} = v(x)$ i $\|c\|_{\mathcal{M},v} = m_c$. Definim el valor de veritat d'una fórmula, $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}$, com:

$$\|P(t_1, \dots, t_n)\|_{\mathcal{M},v} = r_P(\|t_1\|_{\mathcal{M},v}, \dots, \|t_n\|_{\mathcal{M},v})$$

$$\|\varphi \rightarrow \psi\|_{\mathcal{M},v} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v} \Rightarrow \|\psi\|_{\mathcal{M},v}$$

$$\|\varphi \&\psi\|_{\mathcal{M},v} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v} * \|\psi\|_{\mathcal{M},v}$$

$$\|\varphi \wedge \psi\|_{\mathcal{M},v} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v} \cap \|\psi\|_{\mathcal{M},v}$$

$$\|\bar{0}\|_{\mathcal{M},v} = 0$$

$$\|\bar{1}\|_{\mathcal{M},v} = 1$$

$$\|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M},v} = \inf\{\|\varphi\|_{\mathcal{M},v'} \mid v \equiv_x v'\}$$

$$\|(\exists x)\varphi\|_{\mathcal{M},v} = \sup\{\|\varphi\|_{\mathcal{M},v'} \mid v \equiv_x v'\}$$

- Direm que una valoració v és model de un conjunt de sentències Σ , si $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v} = 1$, per tota $\varphi \in \Sigma$.
- El valor de veritat de φ en \mathcal{M} és $\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \inf\{\|\varphi\|_{\mathcal{M},v} \mid v \text{ valoració}\}$.

En aquest capítol utilitzem una definició diferent de teoria.

Definició 4.1.3. Anomenarem *teoria* a un conjunt de sentències Σ .

Definició 4.1.4 (Conseqüència local i global). Sigui una àlgebra $[0, 1]_*$, Σ una teoria i φ una sentència.

- Direm que φ és *conseqüència local* de Σ , si per tota estructura \mathcal{M} i tota valoració v , si v és model de Σ aleshores $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v} = 1$.
- Direm que φ és *conseqüència global* de Σ , si per tota estructura \mathcal{M} , si $\|\psi\|_{\mathcal{M}} = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$ aleshores $\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = 1$.

Observació. Més endavant veurem que pels raonaments formats només per sentències no hi ha diferència entre conseqüència local i global, per tant només utilitzarem només un tipus de conseqüència lògica.

Definició 4.1.5. Direm que φ és *conseqüència lògica* de Σ en $\text{MTL}\forall$, $\Sigma \models_{\text{MTL}\forall} \varphi$, si φ és conseqüència local de Σ per tota àlgebra $[0, 1]_*$.

4.2 Sintàxi de la lògica de predicats $MTL\forall$

L'axiomàtica del càlcul Hilbert de la lògica clàssica de predicats té els axiomes de la part proposicional afegint-hi cinc axiomes més per tal de relacionar les noves connectives $(\forall x)$ i $(\exists x)$, i també afegeix una regla de deducció utilitzant el quantificador universal. Imitant aquest procés, per crear un càlcul per la lògica MTL de predicats, $MTL\forall$, utilitzarem els mateixos axiomes de MTL més els mateixos cinc utilitzats en la lògica clàssica, i també afegirem la mateixa regla de deducció.

Definició 4.2.1. El càlcul sintàctic $MTL\forall$ està format pels axiomes

- | | | |
|-------------|--|---|
| (A1) | $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | |
| (A2) | $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi$ | |
| (A3) | $\varphi \& \psi \rightarrow \psi \& \varphi$ | |
| (A4) | $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ | |
| (A5) | $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$ | |
| (A6) | $\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$ | |
| (A7a) | $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \& \psi \rightarrow \chi)$ | |
| (A7b) | $(\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$ | |
| (A8) | $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$ | |
| (A9) | $\bar{0} \rightarrow \varphi$ | |
| (\forall 1) | $(\forall x)\varphi \rightarrow S_x^t \varphi$ | $(t$ es pot substituir per x a $\varphi(x)$) |
| (\exists 1) | $S_x^t \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$ | $(t$ es pot substituir per x a $\varphi(x)$) |
| (\forall 2) | $(\forall x)(\nu \rightarrow \varphi) \rightarrow (\nu \rightarrow (\forall x)\varphi)$ | $(x$ no lliure a ν) |
| (\exists 2) | $(\forall x)(\varphi \rightarrow \nu) \rightarrow ((\exists x)\varphi \rightarrow \nu)$ | $(x$ no lliure a ν) |
| (\forall 3) | $(\forall x)(\varphi \vee \nu) \rightarrow ((\forall x)\varphi \vee \nu)$ | $(x$ no lliure a ν) |

i les següents regles de deducció

- modus ponens, $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
- generalització, $\varphi \vdash (\forall x)\varphi$

Observació. Encara que els primers deu axiomes tinguin la mateixa forma que en la lògica MTL, hem de recordar que ara fan referència a fórmules del llenguatge de predicats.

Igual que en la part proposicional definim la noció de deducció i demostració.

Definició 4.2.2. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\}$ un conjunt de fórmules.

- Una *demonstració* de φ a partir de Σ és una n -epla de fórmules $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n = \varphi$ i cada fórmula φ_i , amb $i \leq n$, és un axioma de $MTL\forall$, una fórmula de Σ , o es dedueix de dues fórmules anteriors utilitzant la regla del Modus Ponens o la regla de generalització.
- Es diu que φ es dedueix a partir de Σ en $MTL\forall$, $\Sigma \vdash_{MTL\forall} \varphi$, si existeix una demostració de φ a partir de Σ .

Observació. Veiem que una demostració de MTL també és una demostració de $MTL\forall$, per tant, tots els raonaments correctes de MTL també seran raonaments correctes de $MTL\forall$.

Definició 4.2.3. Anomenem *teorema* a qualsevol fórmula que es dedueixi a partir dels axiomes, $\vdash \varphi$.

Igual que en lògica proposicional, necessitem veure alguns teoremes de $MTL\forall$ per poder demostrar el teorema de completesa.

Lema 4.2.4. Siguin φ, ψ dues fórmules qualsevols i χ una fórmula que no conté la variable x lliure. Les següents fórmules són teoremes de $MTL\forall$:

- (1) $(\forall x)(\chi \rightarrow \varphi) \equiv (\chi \rightarrow (\forall x)\varphi)$
- (2) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \chi) \equiv ((\exists x)\varphi \rightarrow \chi)$
- (3) $(\exists x)(\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow (\exists x)\varphi)$
- (4) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \rightarrow \chi)$
- (5) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$
- (6) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\exists x)\varphi \rightarrow (\exists x)\psi)$
- (7) $((\forall x)\varphi \& (\exists x)\psi) \rightarrow (\exists x)(\varphi \& \psi)$
- (8) Si la variable x es pot substituir per y dins de φ es demostra: $(\forall x)\varphi \equiv (\forall y)S_x^y\varphi$
 $(\exists x)\varphi \equiv (\exists y)S_x^y\varphi$
- (9) $(\exists x)(\varphi \& \chi) \equiv ((\exists x)\varphi \& \chi)$
- (10) $(\exists x)(\varphi \& \varphi) \equiv ((\exists x)\varphi \& (\exists x)\varphi)$
- (11) $(\exists x)\varphi \rightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi$
- (12) $\neg(\exists x)\varphi \equiv (\forall x)\neg\varphi$
- (13) $(\exists x)(\chi \wedge \varphi) \equiv (\chi \wedge (\exists x)\varphi)$
- (14) $(\exists x)(\chi \vee \varphi) \equiv (\chi \vee (\exists x)\varphi)$
- (15) $(\forall x)(\chi \wedge \varphi) \equiv (\chi \wedge (\forall x)\varphi)$
- (16) $(\exists x)(\varphi \vee \psi) \equiv ((\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi)$
- (17) $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \equiv ((\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi)$

Teorema 4.2.5 (Deducció local). Sigui Σ una teoria sobre $\text{MTL}\forall$ i siguin φ, ψ dues sentències. Aleshores $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ si, i només si, existeix un natural n tal que $\Sigma \vdash \varphi^n \rightarrow \psi$.

Demostració. La demostració per la implicació: si $\Sigma \vdash \varphi^n \rightarrow \psi$ aleshores $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, és com en la part proposicional. En la implicació inversa cal veure el cas en què α_i és demostrat a partir de la regla de generalització.

Suposem que per un j , α_i és $(\forall x)\alpha_j$. Teníem que per hipòtesi d'inducció, per qualsevol $j < i$, es complia $\Sigma \vdash \varphi^{n_j} \rightarrow \alpha_j$. Generalitzant obtenim $\Sigma \vdash (\forall x)(\varphi^{n_j} \rightarrow \alpha_j)$. Com que φ és sentència podem aplicar l'axioma $(\forall 2)$ i per modus ponens arribem a $\Sigma \vdash \varphi^{n_j} \rightarrow (\forall x)\alpha_j$, que és el resultat desitjat $\Sigma \vdash \varphi^{n_j} \rightarrow \alpha_i$. \square

4.3 Semàntica generalitzada de la lògica de predicats MTL \forall

Igual que en la lògica proposicional, definim la lògica MTL \forall per les MTL-àlgebres. Tornem a definir els mateixos conceptes que en la part semàntica del $[0, 1]_*$, però ara sobre les MTL-àlgebres.

Definició 4.3.1. Sigui \mathcal{J} un llenguatge de predicats i digui \mathcal{A} una MTL-cadena. Una \mathcal{A} -estructura $\mathcal{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c \rangle$ sobre \mathcal{J} està formada per un conjunt no buit M que anomenem *domini*, per cada predicat n -ari P una relació \mathcal{A} -fuzzy n -ària $r_P : M^n \rightarrow \mathcal{A}$ sobre M , i per cada constant c un element m_c de M .

Definició 4.3.2. Sigui \mathcal{J} un llenguatge de predicats i \mathcal{M} una \mathcal{A} -estructura sobre \mathcal{J} .

- Una \mathcal{M} -valoració de variables és una aplicació

$$\begin{aligned} v : \mathcal{V} &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

que assigna a cada variable un element de M . Siguin dues valoracions v, v' , es denotarà $v \equiv_x v'$ el fet que $v(y) = v'(y)$ per tota variable y diferent de x .

- Donada una \mathcal{A} -estructura \mathcal{M} i una valoració v definim el valor d'un terme com $\|x\|_{\mathcal{M},v} = v(x)$ i $\|c\|_{\mathcal{M},v} = m_c$. Definim el valor de veritat $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$ d'una fórmula:

$$\|P(t_1, \dots, t_n)\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = r_P(\|t_1\|_{\mathcal{M},v}, \dots, \|t_n\|_{\mathcal{M},v})$$

$$\|\varphi \rightarrow \psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$$

$$\|\varphi \& \psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} * \|\psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$$

$$\|\varphi \wedge \psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} \cap \|\psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$$

$$\|\bar{0}\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = 0$$

$$\|\bar{1}\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = 1$$

$$\|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \inf\{\|\varphi\|_{\mathcal{M},v'}^{\mathcal{A}} \mid v \equiv_x v'\}$$

$$\|(\exists x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \sup\{\|\varphi\|_{\mathcal{M},v'}^{\mathcal{A}} \mid v \equiv_x v'\}$$

en el cas que l'ímfim i el suprem existeixin a \mathcal{A} , altrament els valors de veritat no es defineixen.

- Direm que una valoració v és \mathcal{A} -model d'un conjunt de sentències Σ , si $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = 1$, per tota $\varphi \in \Sigma$.
- El valor de veritat de φ en \mathcal{M} és $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = \inf\{\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} \mid v \text{ } \mathcal{A}\text{-valoració}\}$.

Definició 4.3.3. Una \mathcal{A} -estructura \mathcal{M} s'anomena *segura* si per tota fórmula φ existeixen els ímfims i suprems $\|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$ i $\|(\exists x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$.

Definició 4.3.4 (Conseqüència local i global). Sigui \mathcal{A} una MTL-àlgebra, Σ una teoria i φ una sentència.

- Direm que φ és *conseqüència local* de Σ , si per tota estructura \mathcal{M} i tota \mathcal{A} -valoració v , si v és model de Σ aleshores $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = 1$.
- Direm que φ és *conseqüència global* de Σ , si per tota estructura \mathcal{M} , si $\|\psi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$ aleshores $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = 1$.

Direm que φ és *conseqüència lògica* de Σ en $\text{MTL}\forall$, $\Sigma \models_{\text{MTL}\forall} \varphi$, si φ és conseqüència local de Σ per tot MTL-àlgebra segura \mathcal{A} .

4.4 Completesa de predicats de $\text{MTL}\forall$

Ens disposem a demostrar el teorema de coherència per la lògica de predicats. Els següents lemes són una part important de la demostració.

Lema 4.4.1. Sigui \mathcal{A} una MTL -cadena i \mathcal{M} una \mathcal{A} -estructura segura. Els axiomes de $\text{MTL}\forall$ són conseqüències lògiques.

Demostració. Primer de tot, observem que els axiomes (A1), ..., (A9) són conseqüències lògiques ja que la demostració del teorema 3.4.1, canviant el concepte d'interpretació pel de valoració, ens serveix per aquest cas.

Veiem que per qualsevol \mathcal{A} -valoració v els axiomes restants són certs.

Suposem que la variable y es pot substituir per la variable x en φ . Sigui v'' una \mathcal{A} -valoració tal que $v'' \equiv_x v$ i $v''(x) = v(y)$ tenim la igualtat $\|\text{S}_x^y \varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v''}^{\mathcal{A}}$.

Per veure $(\forall 1)$

$$\|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \inf_{v' \equiv_x v} \|\varphi\|_{\mathcal{M},v'}^{\mathcal{A}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M},v''}^{\mathcal{A}} = \|\text{S}_x^y \varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$$

i utilitzant residuació

$$1 \leq \|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\text{S}_x^y \varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$$

per tant $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$ és \mathcal{A} -tautologia. Per veure $(\exists 1)$ raonem de manera similar

$$\|\text{S}_x^y \varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v''}^{\mathcal{A}} \leq \sup_{v' \equiv_x v} \|\varphi\|_{\mathcal{M},v'}^{\mathcal{A}} = \|(\exists x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$$

i utilitzant residuació veiem que $(\exists 1)$ és \mathcal{A} -tautologia.

Sigui una \mathcal{A} -valoració w tal que $w \equiv_x v$, prenem $b_w = \|\varphi\|_{\mathcal{M},w}^{\mathcal{A}}$ i $a = \|\nu\|_{\mathcal{M},w}^{\mathcal{A}}$ (ja que x la considerem no lliure a ν). Per veure $(\forall 2)$ hem de comprovar la desigualtat

$$\inf_{w \equiv_x v} (a \Rightarrow b_w) \leq (a \Rightarrow \inf_{w \equiv_x v} b_w)$$

però veurem la igualtat.

Per una banda, per cada w $\inf_{w \equiv_x v} b_w \leq b_w$, per tant $a \Rightarrow \inf_{w \equiv_x v} b_w \leq a \Rightarrow b_w$, i així $a \Rightarrow \inf_{w \equiv_x v} b_w \leq \inf_{w \equiv_x v} (a \Rightarrow b_w)$.

Ara veiem que no només és menor, sinó que és exactament l'ínfim. Sigui c una cota inferior $c \leq (a \Rightarrow b_w)$ per tot w , aleshores $c * a \leq b_w$ i per tant $c * a \leq \inf_{w \equiv_x v} b_w$ per tot w . Així doncs $c \leq a \Rightarrow \inf_{w \equiv_x v} b_w$, i es compleix

$$\inf_{w \equiv_x v} (a \Rightarrow b_w) = (a \Rightarrow \inf_{w \equiv_x v} b_w)$$

De manera similar es comprova que $(\exists 2)$ és \mathcal{A} -tautologia veient que

$$\inf_{w \equiv_x v} (b_w \Rightarrow a) = (\sup_{w \equiv_x v} b_w \Rightarrow a)$$

Per una banda, per cada w tenim $b_w \leq \sup_w b_w$, i així doncs $\sup_w b_w \Rightarrow a \leq b_w \Rightarrow a$. Per tant $\sup_w b_w \Rightarrow a \leq \inf_w (b_w \Rightarrow a)$.

Per altra banda, suposem que tenim una cota inferior c de $b_w \Rightarrow a$, aleshores $c * a \leq b_w$ i $c * a \leq \sup_w b_w$. Per tant $c \leq \sup_w b_w \Rightarrow a$.

Finalment, per demostrar $(\forall 3)$ també veurem una igualtat

$$\inf_{w \equiv_x v} (a \cup b_w) \leq (a \cup \inf_{w \equiv_x v} b_w)$$

Per propietats de \cup es veu directament que $a \leq \inf_w (a \cup b_w)$ i $\inf_w b_w \leq \inf_w (a \cup b_w)$, per tant $(a \cup \inf_w b_w) \leq \inf_w (a \cup b_w)$. Ara, sigui c una cota inferior de $(a \cup b_w)$, veiem que $c \leq a \cup \inf_w b_w$:

- a) Si $a \leq \inf_w b_w$, aleshores $c \leq b_w$ per cada w i per tant $c \leq \inf_w b_w$. Finalment $c \leq a \cup \inf_w b_w$.
- b) Si $\inf_w b_w < a$, com que per algun w_0 $b_{w_0} \leq a$ tenim que $c \leq a$, i per tant $c \leq a \cup \inf_w b_w$.

□

Lema 4.4.2. Siguí φ una sentència, aleshores $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}}$.

Demostració. Siguí v una \mathcal{A} -valoració. Com que φ és una sentència, totes les variables de φ no són lliures. Recordem que una variable no és lliure si està afectada per un quantificador. Així doncs, per cada variable $x \in V(\varphi)$ i qualsevol fórmula $\psi \in Sub(\varphi)$ tal que $x \in V(\psi)$ existirà una $\chi_\psi \in Sub(\varphi)$ tal que $(\forall x)\chi \in Sub(\varphi)$ o $(\exists x)\chi \in Sub(\varphi)$. És a dir, per qualsevol subfórmula amb una variable x estarà afectada per $(\forall x)$ o $(\exists x)$.

Per tant, per qualsevol variable $x_i \in V(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|(\forall x_i)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$ o $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|(\exists x_i)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$. En conseqüència, si $\{x_1, \dots, x_m\}$ són les variables afectades per \forall i $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ són les que estan afectades per (\exists) , aleshores $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|(\forall x_1) \dots (\forall x_m) (\exists x_{m+1}) \dots (\exists x_n) \varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$, per qualsevol valoració v .

Per tant $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \inf_v \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}}$. □

Observació. Així doncs, donat un raonament (Σ, φ) , si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ una teoria, conseqüència global és equivalent a conseqüència local.

Ara que ja sabem que tots els axiomes afegits són \mathcal{A} -tautologies ens falta veure que les regles de deducció les conserven.

Lema 4.4.3. Siguí \mathcal{M} una \mathcal{A} -estructura segura i una \mathcal{A} -valoració v . Aleshores per qualsevols φ, ψ sentències tenim les següents propietats:

- (i) $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} * \|\varphi \rightarrow \psi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} \leq \|\psi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}}$,
- (ii) $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = \|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}}$.

Demostració. (i) Denotem $a_v = \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$, $b_v = \|\psi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$ i $a = \inf_v a_v$. Volem veure

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} * \|\varphi \rightarrow \psi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} \leq \|\psi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}},$$

que per residuació és equivalent a veure

$$\|\varphi \rightarrow \psi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}},$$

i per definició és

$$\inf_v (a_v \Rightarrow b_v) \leq \inf_v a_v \Rightarrow \inf_v b_v.$$

Podem veure clarament la següent cadena de desigualtats usant les propietats de \Rightarrow : $\inf_v (a_v \Rightarrow b_v) \leq a_v \Rightarrow b_v \leq a \Rightarrow b_v$, ja que $a_v \leq \inf_v a_v$, per tant $\inf_v (a_v \Rightarrow b_v) \leq \inf_v (a \Rightarrow b_v)$. En el lema anterior ja hem vist que $\inf_v (a \Rightarrow b_v) \leq a \Rightarrow \inf_v b_v$, per tant es comprova la desigualtat.

(ii) Per definició tenim $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = \inf_v \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$ i $\|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = \inf_v \|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} = \inf_v \inf_{v' \equiv_x v} \|\varphi\|_{\mathcal{M},v'}^{\mathcal{A}} = \inf_v \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}}$, tenim directament la igualtat de les dues expressions. □

Corol·lari 4.4.4. Sigui \mathcal{A} una MTL-cadena, \mathcal{M} una \mathcal{A} -estructura segura, i una \mathcal{A} -valoració sobre \mathcal{M} es compleixen:

- (i) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models_{\text{MTL}\forall} \psi$
- (ii) $\varphi \models_{\text{MTL}\forall} (\forall x)\varphi$

Demostració. Demostració immediata utilitzant els lemes 4.4.2 i 4.4.3. □

Teorema 4.4.5 (Coherència). Sigui Σ una teoria. Si $\Sigma \vdash_{\text{MTL}\forall} \varphi$ aleshores $\Sigma \vdash_{\text{MTL}\forall} \varphi$.

Demostració. La demostració és similar a la vista pel cas proposicional 3.4.1 utilitzant els resultats anteriors 4.4.1, 4.4.2 i el corol·lari 4.4.4 □

Definició 4.4.6. Sigui Σ una teoria sobre $\text{MTL}\forall$. Definim els següents termes:

- (1) Σ és *consistent* si existeix alguna fórmula φ que no es demostrï a partir de Σ .
- (2) Σ és *lineal* si per cada paralla de sentències φ, ψ , $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ o $\Sigma \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$.
- (3) Σ és *Henkin* si per cada sentència de la forma $(\forall x)\varphi$ que no es demostrï a Σ existeix una constant c en el llenguatge tal que $S_x^c \varphi$ no es pugui demostrar a Σ .

Proposició 4.4.7. Σ és lineal si, i només si, per cada parella de sentències φ, ψ si $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$ aleshores $\Sigma \vdash \varphi$ o $\Sigma \vdash \psi$.

Demostració. A $\text{MTL}\forall$ es demostra $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$, per tant directament tenim $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ o $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$.

Ara, suposem que Σ és lineal i $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$. Si $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ aleshores $\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi$, i per modus ponens $\Sigma \vdash \psi$. En l'altre cas, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, raonem igual i obtenim $\Sigma \vdash \varphi$. \square

Definició 4.4.8. Sigui Σ una teoria sobre $\text{MTL}\forall$. Definim \mathcal{A}_Σ l'àlgebra de classes d'equivalència de sentències donada amb la relació \sim_Σ , amb les operacions usuals ($[\varphi]_\Sigma * [\psi]_\Sigma = [\varphi \& \psi]_\Sigma, \dots$).

Proposició 4.4.9. \mathcal{A}_Σ és una MTL -àlgebra. \square

La demostració és gairebé la mateixa que per lògica proposicional.

Lema 4.4.10. (a) Si Σ és lineal aleshores \mathcal{A}_Σ és una MTL -cadena.

(b) Si Σ és Henkin aleshores per cada fórmula φ amb només una variable lliure x compleix

$$\begin{aligned} [(\forall x)\varphi]_\Sigma &= \inf_c [S_x^c \varphi]_\Sigma, \\ [(\exists x)\varphi]_\Sigma &= \sup_c [S_x^c \varphi]_\Sigma \end{aligned}$$

on c recorre les constants del llenguatge.

Demostració. (a) Com que a \mathcal{A}_Σ es compleix que $[\varphi]_\Sigma \leq [\psi]_\Sigma$ si, i només si $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, es veu clarament que la linealitat de Σ implica l'ordre total de \mathcal{A}_Σ .

(b) Per l'axioma $(\forall 1)$ tenim $1 = [(\forall x)\varphi]_\Sigma \Rightarrow [S_x^c \varphi]_\Sigma$ per cada c , i amb residuació $[(\forall x)\varphi]_\Sigma \leq [S_x^c \varphi]_\Sigma$, per tant $[(\forall x)\varphi]_\Sigma \leq \inf_c [S_x^c \varphi]_\Sigma$.

Per veure que és exactament l'ímfim suposem que hi ha χ amb x no lliure, tal que $[\chi]_\Sigma \leq [S_x^c \varphi]_\Sigma$ per tot c . Si $[\chi]_\Sigma \not\leq [(\forall x)\varphi]_\Sigma$ aleshores $\Sigma \not\vdash \chi \rightarrow (\forall x)\varphi$, i en conseqüència $\Sigma \not\vdash (\forall x)(\chi \rightarrow \varphi)$. Però com que Σ és Henkin existeix una constant c tal que $\Sigma \not\vdash \chi \rightarrow S_x^c \varphi$, per tant $[\chi]_\Sigma \not\leq [S_x^c \varphi]_\Sigma$.

És a dir, que per força si $[\chi]_\Sigma \leq [S_x^c \varphi]_\Sigma$ aleshores $[\chi]_\Sigma \leq [(\forall x)\varphi]_\Sigma$, per tant $[(\forall x)\varphi]_\Sigma = \inf_c [S_x^c \varphi]_\Sigma$.

Utilitzant $(\exists 1)$ similarment obtenim $\sup_c [S_x^c \varphi]_\Sigma \leq [(\exists x)\varphi]_\Sigma$.

Suposem que tenim χ amb x no lliure, tal que $[S_x^c \varphi]_\Sigma \leq [\chi]_\Sigma$ per tot c i que $[(\exists x)\varphi]_\Sigma \not\leq [\chi]_\Sigma$. Com abans $\Sigma \not\vdash (\exists x)\varphi \rightarrow \chi$ i utilitzant (2) $\Sigma \not\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \chi)$, per ser Henkin existeix c tal que $\Sigma \not\vdash S_x^c \varphi \rightarrow \chi$, per tant $[S_x^c \varphi]_\Sigma \not\leq [\chi]_\Sigma$. I ja tenim la igualtat $\sup_c [S_x^c \varphi]_\Sigma = [(\exists x)\varphi]_\Sigma$. \square

Lema 4.4.11. Per cada teoria Σ i cada sentència α , si $\Sigma \not\vdash \alpha$ aleshores existeix una teoria lineal Henkin $\hat{\Sigma}$ tal que $\Sigma \subseteq \hat{\Sigma}$ i $\hat{\Sigma} \not\vdash \alpha$.

Demostració. Observem que si Σ' és una extensió de Σ , si $\Sigma' \not\vdash \alpha$ i φ, ψ són dues sentències aleshores $\Sigma' \cup \{\varphi \rightarrow \psi\} \not\vdash \alpha$ o $\Sigma' \cup \{\psi \rightarrow \varphi\} \not\vdash \alpha$. Suposem el contrari, pel teorema de la deducció local existeix una n natural tal que $\Sigma' \vdash (\varphi \rightarrow \psi)^n \rightarrow \alpha$ i $\Sigma' \vdash (\psi \rightarrow \varphi)^n \rightarrow \alpha$. Així doncs $\Sigma' \vdash ((\varphi \rightarrow \psi)^n \vee (\psi \rightarrow \varphi)^n) \rightarrow \alpha$, i trobem la contradicció $\Sigma' \vdash \alpha$.

Construïm l'extensió $\hat{\Sigma}$. Primer extenem el llenguatge \mathcal{J} de Σ a \mathcal{J}' afegint noves constants c_0, c_1, \dots . Per cada fórmula $(\forall x)\chi$ trobarem una extensió de Σ de manera que compleixi la propietat Henkin, i per cada parella de fórmules (φ, ψ) trobarem una extensió amb una de les fórmules $\varphi \rightarrow \psi$ o $\psi \rightarrow \varphi$ que no demostrï α .

Construirem una cadena d'extensions on a cada pas tractarem o bé una fórmula $(\forall x)\chi$ o bé una parella (φ, ψ) . Sigui $\Sigma_0 = \Sigma$ i $\alpha_0 = \alpha$. A partir d'un Σ_n definirem un Σ_{n+1} complint que $\Sigma \vdash \alpha_n \rightarrow \alpha_{n+1}$ i $\Sigma_{n+1} \vdash \alpha_{n+1}$. Suposem que tenim Σ_n i α_n i ens toca construir la següent extensió Σ_{n+1} , tenim dos casos:

Cas 1 Decidim per (φ, ψ) . Com hem vist, o vé $\Sigma_n \cup \{\varphi \rightarrow \psi\} \not\vdash \alpha$ o $\Sigma_n \cup \{\psi \rightarrow \varphi\} \not\vdash \alpha$, triem $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}$ en el primer cas, i $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi \rightarrow \varphi\}$ pel segon cas; agafem $\alpha_{n+1} = \alpha_n$.

Cas 2 Tractem la fórmula $(\forall x)\chi$. Sigui c una nova constant que no estigui en cap fórmula de Σ_n . Tenim dos casos:

- (a) $\Sigma_n \not\vdash \alpha_n \vee S_x^c \chi$, aleshores $\Sigma_n \not\vdash (\forall x)\chi$. En aquest cas definim $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$ i $\alpha_{n+1} = \alpha_n \vee (\forall x)\chi$.
- (b) $\Sigma_n \vdash \alpha_n \vee S_x^c \chi$. Si canviem totes les ocurrencies de c de la demostració de $\alpha_n \vee S_x^c \chi$ per la variable x obtenim una demostració de $\alpha_n \vee \chi$. Generalitzant, $\Sigma_n \vdash (\forall x)(\alpha_n \vee \chi)$, i utilitzant l'axioma $(\forall 3)$, $\Sigma_n \vdash \alpha_n \vee (\forall x)\chi$. Amb la fórmula (13) del lema 4.2.4 veiem $\Sigma_n \cup \{(\forall x)\chi \rightarrow \alpha_n\} \vdash \alpha_n$, per tant pel lema anterior, $\Sigma_n \cup \{\alpha_n \rightarrow (\forall x)\chi\} \not\vdash \alpha_n$, però sí que demostra $(\forall x)\chi$. En aquest cas definim $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\alpha_n \rightarrow (\forall x)\chi\}$ i $\alpha_{n+1} = \alpha_n$.

Un cop tenim tota la cadena $\{\Sigma_i\}_i$ definim $\hat{\Sigma} = \bigcup_i \Sigma_i$. Hem construït $\hat{\Sigma}$ de tal manera que per cada parella (φ, ψ) , o bé $\varphi \rightarrow \psi \in \hat{\Sigma}$ o bé $\psi \rightarrow \varphi \in \hat{\Sigma}$. Per tant $\hat{\Sigma}$ és lineal. Veïem que és Henkin.

Suposem que $\hat{\Sigma} \not\vdash (\forall x)\chi$, i sigui i el pas on hem tractat $(\forall x)\chi$. Per tot j es té $\Sigma_j \not\vdash (\forall x)\chi$, i en particular per $i+1$, $\Sigma_{i+1} \not\vdash (\forall x)\chi$, és a dir, que hem construït Σ_{i+1} en el cas 2 (a). Per tant, $\hat{\Sigma} \not\vdash \alpha_{i+1}$, on $\alpha_{i+1} = \alpha_n \vee S_x^c \chi$. Per tant $\hat{\Sigma} \not\vdash S_x^c \chi$, és a dir, $\hat{\Sigma}$ és Henkin. \square

Lema 4.4.12. Per cada teoria lineal Henkin Σ i cada sentència φ que no es demostra a partir de Σ existeix una MTL-cadena \mathcal{A} i \mathcal{M} un \mathcal{A} -model de Σ tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{\mathcal{A}} < 1$.

Demostració. Sigui \mathcal{A}_Σ la MTL-àlgebra del conjunt de classes d'equivalència definit a 4.4.8. Com que Σ és lineal, aleshores \mathcal{A}_Σ serà una cadena, ja que per dos elements $[\varphi]_\Sigma, [\psi]_\Sigma$, o bé $[\varphi \rightarrow \psi]_\Sigma = [1]_\Sigma$, o bé $[\psi \rightarrow \varphi]_\Sigma = [1]_\Sigma$.

Considerem M el conjunt de totes les constants del llenguatge \mathcal{J} , $m_c = c$ per cada constant, i per cada predicat P del llenguatge, $r_P(c_1, \dots, c_n) = [P(c_1, \dots, c_n)]_\Sigma$, tenim una estructura \mathcal{M} . Primer hem de veure que $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = [\varphi]_\Sigma$, comprovem-ho per fórmules amb quantificadors, per els altres casos es veu fàcilment. Siguin $(\forall x)\varphi, (\exists x)\varphi$ dues fórmules tancades.

$$\begin{aligned} \|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} &= \inf_c \|S_x^c \varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = [(\forall x)\varphi]_\Sigma \\ \|(\exists x)\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} &= \sup_c \|S_x^c \varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = [(\exists x)\varphi]_\Sigma \end{aligned}$$

En el primer pas tenim en compte que M només conté constants. Com que la teoria Σ és Henkin, utilitzem el lema 4.4.10 pel segon pas. Ara, per cada fórmula $\varphi \in \Sigma$ tenim $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = [\varphi]_\Sigma = [1]_\Sigma = 1$, i com que $\Sigma \not\vdash \alpha$, $\|\alpha\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} = [\alpha]_\Sigma \neq 1$. Per tant, existeix una MTL-àlgebra, \mathcal{A}_Σ , i un model de Σ , \mathcal{M} , tal que $\|\alpha\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} < 1$. \square

Teorema 4.4.13 (Completesa forta). Sigui Σ una teoria sobre $\text{MTL}\forall$ i φ una sentència, són equivalents:

- (i) $\Sigma \vdash_{\text{MTL}\forall} \varphi$, de Σ es demostra φ .
- (ii) $\Sigma \models_{\text{MTL}\forall} \varphi$, és a dir, per qualsevol MTL-cadena \mathcal{A} i \mathcal{M} un \mathcal{A} -model segur de Σ .

Demostració. La implicació (i) \Rightarrow (ii) és el teorema de coherència 4.4.5, i la següent (ii) \Rightarrow (iii) és directe ja que les MTL-cadenes són MTL-àlgebres.

(ii) implica (i) es veu fàcilment a partir dels lemes anteriors. Suposem que $\Sigma \not\vdash \varphi$, pel lema 4.4.11 existeix una teoria Henkin $\hat{\Sigma} \supseteq \Sigma$ on $\hat{\Sigma} \not\vdash \varphi$, i pel lema anterior, a partir de $\hat{\Sigma}$ lineal Henkin es troba una MTL-cadena i un model \mathcal{M} de $\hat{\Sigma}$ on $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}} < 1$.

Falta (iii) implica (ii), es veu seguint el mateix camí que en el teorema de completesa proposicional 3.4.13. Utilitzem el contrarecíproc, que tota MTL-àlgebra és producte subdirecte de MTL-cadenes, \square

Tornant a la lògica en $[0, 1]$, $\text{MTL}\forall$ compleix el teorema de completesa forta respecte les MTL-àlgebres sobre el $[0, 1]$. Utilitzant les immersions sobre una àlgebra estàndard $[0, 1]_*$, vistes a la part proposicional, es pot trobar una manera de conservar els ínfims i suprems, i per tant, preservar les interpretacions dels quantificadors a través de la immersió. És a dir, per una immersió h de una MTL-cadena numerable \mathcal{A} en una del $[0, 1]$, $h(\|(\forall x)\varphi\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}}) = \inf_v \|\varphi\|_{\mathcal{M},v}^{[0,1]}$.

4.5 Completesa en lògiques particulars

Tal com es construeix la lògica de predicats de MTL també es construeixen simil·larment les lògiques de predicats de les extensions de MTL vistes anteriorment: $BL\forall$, $L\forall$, $G\forall$, $\Pi\forall$ i $NM\forall$. Recordem que cadascuna d'aquestes extensions té una varietat d'àlgebres generalitzades: \mathbb{BL} , la classe de BL -àlgebres; MV , la classe de MV -àlgebres (associades a L); \mathbb{G} , classe de G -àlgebres; \mathbb{P} , la classe de Π -àlgebres i NM , la classe de NM -àlgebres.

Sigui L una lògica i \mathbb{L} la seva classe de L -àlgebres sobre el $[0,1]$. Diem que la lògica L té *completesa estàndard* (feble, forta finita o forta), si es demostra el teorema de completesa (resp. feble, forta finita o forta) entre la sintaxi de L (\vdash_L) i la seva semàntica sobre el $[0,1]$ ($\models_{\mathbb{L}}$).

No totes les extensions de $MTL\forall$ tenen completesa estàndard entre la sintaxi i la semàntica del $[0,1]$. La taula 1 recull els diferents tipus de completesa estàndard per cada extensió de $MTL\forall$ que hem citat.

El motiu pel qual algunes extensions no tenen completesa estàndard és que algunes immersions en $[0,1]$ preserven els ínfims i supremes, mentre que d'altres no els preserven. Per tant, en algunes extensions no es pot assegurar que es preservin les interpretacions de les fórmules amb quantificadors universals i existencials a través de la immersió.

Una extensió de $MTL\forall$ coneguda que sí que gaudeix de completesa forta estàndard és la lògica clàssica per predicats $CPC\forall$ (“Classic Predicate Calculus”).

	CE	$CEFf$	CEF
$MTL\forall$	Si	Si	Si
$NM\forall$	Si	Si	Si
$BL\forall$	No	No	No
$L\forall, \Pi\forall$	No	No	No
$G\forall$	Si	Si	Si

Taula 1: Completesa estàndard d'algunes extensions de $MTL\forall$
(C =Completesa, E =Estàndard, F =Forta, f =Finita)

Es pot observar que si una lògica no té completesa forta proposicionalment, aleshores tampoc té completesa forta de predicats. La mateixa relació la trobem per completesa forta finita o completesa feble.

5 Conclusió

Al llarg de tot aquest treball hem pogut apreciar diferents maneres d'encarar l'estudi de la lògica fuzzy modelada matemàticament: representar les propietats vagues amb conjunts fuzzy, raonant amb graus de possibilitat, i basant els conceptes lògics en els graus de veritat. I d'aquests camins hem triat desenvolupar la lògica fuzzy com a lògica multivalorada interpretant-la sobre conjunts fuzzy.

Hem formalitzat matemàticament la lògica fuzzy basada en t-normes residuades i n'hem desenvolupat la lògica més bàsica fins a obtenir els teoremes de completesa. Hem descobert que la lògica MTL gaudeix de completesa forta, però, que augmentant la complexitat i desenvolupant-la en el llenguatge de predicats l'hem perdut. Com més complexitat té el llenguatge base, més difícil és veure l'equivalència entre semàntica i sintàxi.

Ens ha faltat veure mètodes de raonament aproximat, que és el motiu principal del desenvolupament de la lògica fuzzy. Però, és un tema massa extens per incloure en aquest treball. El raonament aproximat queda com a objectiu per a un futur treball més aplicat sobre la lògica fuzzy.

Conclusió personal

Abans de començar el treball, la meva intenció era simplement conèixer més lògiques no clàssiques i com es desenvolupen. M'ha meravellat veure la gran quantitat de lògiques existents i descobrir com es relacionen entre sí.

Concretament, fent aquest treball he gaudit molt de la meticulositat amb què es fonamenta i s'estudia matemàticament la lògica fuzzy, especialment perquè m'ha costat reflexar-la en el treball. M'he adonat que és molt fàcil fer una feina mal feta i molt difícil fer-la bé.

Tot i així, estic content de la feina feta i encara més dels coneixements que he adquirit fent-la, però, encara queda molt de camí per recórrer i molta curiositat per satisfer.

Apèndix

A Conceptes d'Àlgebra Universal

Definició A.1. Una *àlgebra* de tipus τ , τ una seqüència de numeros naturals, és una estructura de la forma $\langle A, f_1, f_2, \dots \rangle$ on A és un conjunt i cada f_i és una operació sobre A d'arietat $\tau_i \in \mathbb{N}$.

Definició A.2. Sigui \mathbb{A} una classe d'àlgebres del mateix tipus, \mathbb{A} és una varietat si existeix un conjunt d'identitats \mathcal{I} (equacions) tal que \mathbb{A} és la classe de totes les estructures A que compleixen les identitats de \mathcal{I} .

Definició A.3. Siguin \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 dues àlgebres amb el mateix tipus.

1. Un *homomorfisme* de \mathcal{A}_1 sobre \mathcal{A}_2 és una aplicació $h : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ que per cada operació f_i amb aritat k , $h(f_i(a_1, \dots, a_k)) = g_i(h(a_1), \dots, h(a_k))$.
2. \mathcal{A}_1 és *subàlgebra* de \mathcal{A}_2 si $A_1 \subseteq A_2$ i per cada $i = 1 \dots, n$ la funció f_i amb aritat k és la restricció de g_i a $A_1 \times \dots \times A_1$.
3. \mathcal{A}_1 és una *imatge homomorfa* de \mathcal{A}_2 si existeix un homomorfisme exhaustiu de \mathcal{A}_2 sobre \mathcal{A}_1 .
4. Sigui Λ un conjunt no buit i per cada $\lambda \in \Lambda$ siguin $\mathcal{A}_\lambda = \langle A_\lambda, f_{1,\lambda}, \dots, f_{n,\lambda} \rangle$ àlgebres. El *producte directe*

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

és l'àlgebra $\mathcal{A} = \langle A, f_1, \dots, f_n \rangle$ on A és el conjunt de funcions que per cada $\lambda \in \Lambda$, $a(\lambda) \in A_\lambda$ (són les coordenades). I les operacions f_i , amb aritat k , compleixen per cada $(a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{A}$, $f_i(a_1, \dots, a_k) = b$ si per cada $\lambda \in \Lambda$ i $i = 1, \dots, k$, $b(\lambda) = f_{i,\lambda}(a_1(\lambda), \dots, a_k(\lambda))$.

5. Una àlgebra \mathcal{A} és *producte subdirecte* d'un sistema $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ d'àlgebres si \mathcal{A} és subàlgebra del producte directe $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ i la projecció natural $\pi_i : \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathcal{A}_i$ és exhaustiva.

Teorema A.4 (Teorema de Birkoff). Una classe \mathbb{K} és varietat si, i només si, \mathbb{K} és tancada per subàlgebres, imatges homomorfes i productes directes.

Definició A.5. Una àlgebra $\langle A, \cap, \cup \rangle$ de tipus (2,2) és un *reticle* si per qualsevols elements $a, b, c \in A$ es compleix:

1. Idempotència: $a \cap a = a$, $a \cup a = a$.
2. Commutativitat: $a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$.
3. Associativitat: $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.

4. Absorció: $a \cap (a \cup b) = a$, $a \cup (a \cap b) = a$.

L'àlgebra $\langle A, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ de tipus $(2,2,0,0)$ és un reticle *acotat* si $\forall a \in A$:

1. $a \cap 1 = a$ i $a \cup 1 = 1$

2. $a \cup 0 = a$ i $a \cap 0 = 0$

Proposició A.6. Sigui $\langle A, \leq \rangle$ un conjunt amb la relació d'ordre \leq . Per qualsevol parella d'elements $a, b \in A$ existeix l'ímfim i el suprem si, i només si, l'àlgebra $\mathcal{A} = \langle A, \cap, \cup \rangle$, on $a \cap b = \inf\{a, b\}$ i $a \cup b = \sup\{a, b\}$, és un reticle.

Demostració. Sigui $\langle A, \leq \rangle$, i suposem que existeixen els ínfims i suprems. Definim $a \cap b = \inf\{a, b\}$ i $a \cup b = \sup\{a, b\}$. Veiem que $\langle A, \cap, \cup \rangle$ compleix les propietats de reticle. Siguin $a, b, c \in A$

- Idempotència: és directe per definició $a \cap a = \inf\{a, a\} = a$ i $a \cup a = \sup\{a, a\} = a$.
- Commutativitat: com que l'ímfim i el suprem són commutatius automàticament també ho són \cap i \cup .
- Associativitat: $a \cap (b \cap c) = \inf\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\} = (a \cap b) \cap c$.
- Absorció: $a \cap (a \cup b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\}$, si $a \leq b$ aleshores $\sup\{a, b\} = b$ i $\inf\{a, b\} = a$, per tant $a \cap (a \cup b) = a$. Si $b \leq a$ aleshores $\sup\{a, b\} = a$ i $\inf\{a, b\} = b$, per tant $a \cap (a \cup b) = a$. Anàlogament es veu $a \cup (a \cap b) = a$.

Per tant, A amb les operacions \cap, \cup és un reticle.

Recíprocament, sigui $\langle A, \cap, \cup \rangle$ un reticle. Definim l'ordre $a \leq b$ si $a \cap b = a$, veiem que $\langle A, \leq \rangle$ és un conjunt ordenat.

- Reflexivitat: $a \cap a = a$ per idempotència, per tant $a \leq a$.
- Antisimetria: si $a \leq b$ i $b \leq a$ aleshores $a \cap b = a$ i $a \cap b = b$. Com que \cap és commutativa tenim la igualtat $a = a \cap b = b \cap a = b$.
- Transitivitat: si $a \leq b$ i $b \leq c$ aleshores $a \cap b = a$ i $b \cap c = b$. Utilitzant l'associativitat i commutativitat $a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$, per tant $a \leq c$.

Per definició tenim directament els ínfims i suprems: $\inf\{a, b\} = a \cap b$ i $\sup\{a, b\} = a \cup b$. \square

Així doncs, donat un reticle $\langle A, \cap, \cup \rangle$ un conjunt ordenat $\langle A, \leq \rangle$ de la següent manera: $a \leq b$ si $a \cap b = a$ i $a \cup b = b$. En aquest cas 1 és l'element màxim de A i 0 l'element mínim.

Proposició A.7. La classe dels reticles forma una varietat. També formen una varietat la classe dels reticles acotats amb 0 i 1.

Demostració. Totes les propietats que ha de complir un reticle estan expressades segons identitats, per tant directament es compleix la definició de varietat. Igualment afegint les propietats sobre el 0 i 1. \square

Definició A.8. Una àlgebra $\langle A, * \rangle$ és un *monoide commutatiu* amb *unitat* 1 si compleix $\forall a, b, c \in A$:

- i) $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associativitat)
- ii) $a * b = b * a$ (commutativitat)
- iii) $a * 1 = a$ (element unitat)

Proposició A.9. La classe dels monoides commutatius amb unitat formen una varietat.

Demostració. Demostració directa ja que les propietats estan expressades amb igualtats. \square

B Demostracions a MTL

Veiem demostracions d'alguns teoremes de MTL dels lemes 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 i 3.2.8.

Lema B.1 (Regla de deducció). (a) Si $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ i $\vdash \psi \rightarrow \chi$ aleshores $\vdash \varphi \rightarrow \chi$

Demostració.

- (a)
- | | |
|---|----------|
| 1. $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ | premissa |
| 2. $\vdash \psi \rightarrow \chi$ | premissa |
| 3. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | A1 |
| 4. $\vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | MP 1,3 |
| 5. $\vdash \varphi \rightarrow \chi$ | MP 2,4 |

\square

Demostracions del lema 3.2.5.

- (1)
- | | |
|--|--------|
| 1. $\vdash \varphi \& \psi \rightarrow \varphi$ | A2 |
| 2. $\vdash (\varphi \& \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ | A7b |
| 3. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ | MP 1,2 |

- (2)
1. $\vdash (\psi \& \varphi \rightarrow \varphi \& \psi) \rightarrow ((\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \& \varphi \rightarrow \chi))$ A1
 2. $\vdash \psi \& \varphi \rightarrow \varphi \& \psi$ A3
 3. $\vdash (\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \& \varphi \rightarrow \chi)$ MP 1,2
 4. $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \& \psi \rightarrow \chi)$ A7a
 5. $\vdash (\psi \& \varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ A7b
 6. $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \& \varphi \rightarrow \chi)$ (a) 3, 4
 7. $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ (a) 5,6

- (3)
1. $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (2)
 2. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (1)
 3. $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ MP 1,2
 4. $\vdash \psi = A1$
 5. $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ MP 4,5

□

Demostracions del lema 3.2.6.

- (4)
1. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (3)
 2. $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi))$ (2)
 3. $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ MP 1,2
 4. $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ A7a
 5. $\vdash \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ MP 3,4

- (5)
1. $\vdash \varphi \& \psi \rightarrow \varphi \& \psi$ (3)
 2. $\vdash (\varphi \& \psi \rightarrow \varphi \& \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \& \psi))$ A7b
 3. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \& \psi)$ MP 1,2

- (6)
1. $\vdash \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ (4)
 2. $\vdash \psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)$ (5)
 3. $\vdash (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)) \rightarrow (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)))$ A1
 4. $\vdash (\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)) \rightarrow (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi))$ MP 1,3
 5. $\vdash \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)$ MP 2,4
 6. $\vdash (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi)))$ A7b
 7. $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi \& \chi))$ MP 5,6
 8. $\vdash \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& \chi))$ MP 7,(2)
 9. $\vdash (\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& \chi))) \rightarrow (\varphi \& \chi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& \chi))$ A7a
 10. $\vdash \varphi \& \chi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& \chi)$ MP 8,9
 11. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \& \chi \rightarrow \psi \& \chi)$ MP 10,(2)

(7)

1. $\vdash (\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \rightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2)$ (6)
2. $\vdash ((\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \& (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)) \rightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2) \& (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)$ MP 1,(6)
3. $\vdash (\varphi_2 \rightarrow \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2)$ (6)
4. $\vdash [(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2) \& (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)] \rightarrow$
 $[(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2) \& (\psi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2)]$ MP 3,(6)
5. $(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2) \rightarrow ((\psi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2) \rightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2))$ (A1)
6. $[(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2) \& (\psi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2)] \rightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2)$ MP 5,(A7)
7. $\vdash ((\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \& (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)) \rightarrow [(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \varphi_2) \& (\psi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2)]$ (a) 2, 4
8. $\vdash ((\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \& (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)) \rightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \& \psi_2)$ (a) 7, 6

□

Demostracions del lema 3.2.7.

(9) $(\varphi \& \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

1. $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (1)
2. $\vdash \varphi \& \psi \rightarrow \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)$ MP 1,(6)
3. $\vdash \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$ A6
4. $\vdash \varphi \& \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi$ (a) 2,3

(10) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

1. $\vdash \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ A6
2. $\vdash (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$ A7b
3. $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$ MP 1,2
4. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$ MP 3,(2)

□

Demostracions del lema 3.2.8.

(12) $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$

es veu clarament de la definició de \vee i la commutativitat de \wedge (A5).

$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

1. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$ (10)
2. $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi)$ MP 1,(2)
3. $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ (A4)
4. $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ transitivitat 2,3
5. $\vdash \varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ (1)
6. $\vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ utilitzant (12)

(13) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi)$

1. $\vdash \varphi \vee \psi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ definició de \vee i A4
2. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \psi)$ MP 1,(2)

(14) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

1. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

(12)

2. $\vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

(12)

3. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

MP (MP 1, A8), A8

□

Referències

- [1] Łukasiewicz, Jan. O logice trójwartościowej. *Ruch Filozoficzny*, vol. 5, 1920, p. 170-171. English translation: On three-valued logic, in L. Borkowski (ed.), *Selected works by Jan Łukasiewicz*. Amsterdam: North-Holland, 1970. ISBN 0-7204-2252-3.
- [2] Łukasiewicz, Jan. *Jan Łukasiewicz Selected works*. Borkowski, L. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland, 1970.
- [3] Zadeh, Lofti A. Fuzzy Sets. *Information and control* 8, vol. 3, 1965, p. 338-353.
- [4] Dubois, Didier; Esteva, Francesc; Godó, Lluís; Prade, Henri. Fuzzy-set based logics - an history-oriented presentation of their main developments. Gabbay, Dov M.; Woods, John . *The Many Valued and Nonmonotonic turn in Logic*, Handbook of the History of Logic, vol. 8. Amsterdam: North-Holland, 2007, p. 325-449.
- [5] Mostert, Paul S.; Shields, Allen L. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *Annals of Mathematics*, 1957, Second Series, vol. 65, num. 1, p. 117-143.
- [6] Bellman, Richard E.; Zadeh, Lofti A. Local and fuzzy logics. Dunn, M.; Epstein, G. *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Episteme, vol. 2. Dordrecht: D. Reidel, 1977, p. 103-165.
- [7] Dubois, Didier; Prade, Henri. An Introduction to possibilistic and fuzzy logics. Dubois, D.; Prade, H. et al. *Non Standard Logics for Automated Reasoning*. Academic Press, 1988, p. 287-315, 321-326.
- [8] Hájek, Petr. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordercht: Kluwer Academic Publishers, 1998. Trends in Logic, 4. ISBN 0-7923-5238-6.
- [9] Noguera, Carles. Un apropament matemàtic al problema de la vaguetat. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 23, núm. 2, 2008, p.233-273.
- [10] Cintula, Petr. et al. Distinguished algebraic semantics for t-norm based fuzzy logics: Methods and algebraic equivalences. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 160, 2009, p. 53-81.
- [11] Cintula, Petr. Hájek, Petr. Triangular norm based predicate fuzzy logics. *Fuzzy sets and Systems*, vol. 161, 2010, p. 331-346.