



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de fin de grado

SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS:
APLICACIÓN AL MODELO DE KOPEL

Autor: Eduardo Valderrama Rivas

Tutora: Dra. Marina Gonchenko

Realizado en: Facultad de Matemáticas e Informática

Barcelona, 21 de julio de 2025

Abstract

This study examines the behavior of nonlinear discrete dynamical systems and the emergence of deterministic chaos. It presents the fundamental concepts of stability, bifurcations, and attractors, along with the definitions of chaos proposed by Devaney and Li–Yorke. The logistic map is analyzed as a classical one-dimensional case: its fixed points, periodic cycles, and the period-doubling cascade leading to chaos are studied and verified through the Lyapunov exponent. The methodology is then applied to the Kopel model, a two-dimensional system describing price interactions in a duopoly. By analyzing the Jacobian matrix and computing the Lyapunov exponents numerically, both periodic and chaotic regimes are identified depending on parameter values. The results show that chaos can arise in simple economic models, highlighting the universality of the transition mechanisms to chaos and the usefulness of dynamical systems theory for understanding complex phenomena.

Resumen

Este trabajo estudia el comportamiento de sistemas dinámicos discretos no lineales y la aparición del caos determinista. Se presentan los conceptos fundamentales de estabilidad, bifurcaciones y atractores, junto con las definiciones de caos según Devaney y Li–Yorke. El mapa logístico se analiza como caso unidimensional clásico: se determinan sus puntos fijos, ciclos y la cascada de duplicaciones de periodo que conduce al caos, verificando los resultados mediante el exponente de Lyapunov. Posteriormente, se aplica la metodología al modelo de Kopel, un sistema bidimensional que describe la interacción de precios en un duopolio. A través del Jacobiano y del cálculo numérico de los exponentes de Lyapunov, se identifican regiones periódicas y caóticas en función de los parámetros. Los resultados muestran que el caos puede surgir en modelos económicos simples, destacando la universalidad de los mecanismos de transición al caos y la utilidad del análisis dinámico para describir fenómenos complejos.

Agradecimientos

A mis padres, porque no hubiera podido recorrer este camino, aunque lejos y largo, sin ellos (a la distancia).

A mi, por no tirar la toalla y confiar en el proceso.

Índice

1. Introducción	1
2. Sistemas dinámicos	3
2.1. Introducción de los sistemas dinámicos	3
2.2. Bifurcaciones y comportamiento cualitativo	6
2.3. Dinámica unidimensional	8
2.4. Sistemas bidimensionales	10
3. Sistemas dinámicos caóticos	11
3.1. Definiciones topológicas de caos	11
3.2. Exponentes de Lyapunov	12
3.3. El método de Benettin en dimensión dos	14
3.4. Caracterización del caos	15
4. Dinámica del mapa logístico 1D	17
4.1. Definición del mapa logístico y propiedades básicas	17
4.2. Estabilidad de puntos fijos y ciclos	19
4.3. Diagrama del exponente de Lyapunov en función de r	25
4.4. Comentarios finales sobre la dinámica del mapa logístico	28
5. Dinámica del modelo de Kopel con dos parámetros	32
5.1. Formulación del modelo de Kopel	32
5.2. Puntos fijos y estabilidad	34
5.3. Cálculo del exponente de Lyapunov máximo	40
6. Conclusiones	44

1. Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos constituye una de las áreas más influyentes y transversales de la matemática moderna. Desde las primeras formulaciones de Henri Poincaré en el siglo XIX, la comprensión del comportamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales y de las iteraciones no lineales ha revelado la existencia de estructuras complejas, impredecibles y, sin embargo, completamente deterministas. Este hallazgo dio origen a la teoría del caos, un campo que ha transformado la forma en que entendemos la evolución temporal de sistemas naturales, biológicos, físicos y económicos.

Durante gran parte del siglo XX, el análisis de sistemas dinámicos se centró en la búsqueda de soluciones estables y en la caracterización de equilibrios. Sin embargo, a partir de los trabajos de Lorenz, May y Feigenbaum, se hizo evidente que incluso modelos extremadamente simples pueden generar comportamientos irregulares y aparentemente aleatorios. El caos determinista no implica ausencia de ley, sino una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales: pequeñas diferencias en el estado inicial pueden producir trayectorias radicalmente distintas, imposibilitando la predicción a largo plazo.

Dentro de este marco, los sistemas dinámicos discretos —aquellos en los que el tiempo evoluciona en pasos finitos y las trayectorias se obtienen mediante la iteración de una función— ofrecen un terreno especialmente fértil. A pesar de su simplicidad formal, permiten observar transiciones entre orden y caos, bifurcaciones y estructuras fractales, fenómenos que reflejan la complejidad inherente de la no linealidad. Además, su tratamiento matemático y computacional es más accesible que el de los sistemas continuos, lo que facilita su análisis numérico y su aplicación a contextos diversos.

El presente trabajo tiene como objetivo analizar la aparición del caos en sistemas dinámicos discretos no lineales y aplicar las herramientas teóricas desarrolladas al modelo económico de Kopel. Este modelo describe la evolución de los precios en un duopolio con agentes que ajustan sus estrategias de forma adaptativa, y constituye un ejemplo representativo de cómo la interacción entre agentes racionales puede dar lugar a comportamientos caóticos.

En la primera parte del trabajo (Capítulos 2 y 3) se presentan los fundamentos teóricos. Se introducen las nociones de espacio de fases, órbitas, puntos fijos, estabilidad de Lyapunov y bifurcaciones. Se revisan las principales definiciones de caos —Devaney y Li–Yorke— y se desarrolla el concepto de exponente de Lyapunov, herramienta fundamental para detectar y cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Asimismo, se describe el método numérico de Benettin, ampliamente utilizado para el cálculo de exponentes de Lyapunov en sistemas discretos de dimensión finita.

La segunda parte (Capítulo 4) se dedica al estudio del mapa logístico:

$$f_r(x) = rx(1 - x),$$

definido en el intervalo $[0, 1]$ para $r \in [0, 4]$. A partir de su formulación elemental, se analizan

los puntos fijos, los ciclos periódicos y la sucesión de bifurcaciones de duplicación de periodo que conducen al caos. Se examina además la relación entre el diagrama de bifurcación y el diagrama del exponente de Lyapunov, estableciendo la correspondencia entre regiones de estabilidad (<0) y regiones caóticas (>0).

Finalmente, en la tercera parte (Capítulo 5) se aplica la metodología anterior al modelo de Kopel, un sistema bidimensional no lineal:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \alpha)x_t + \alpha [1 - \theta_1 y_t], \\ y_{t+1} = (1 - \beta)y_t + \beta [1 - \theta_2 x_t], \end{cases}$$

Se estudia la estabilidad de sus puntos fijos mediante el Jacobiano, se calculan numéricamente los exponentes de Lyapunov y se identifican las regiones del espacio de parámetros donde surgen comportamientos periódicos o caóticos. Este análisis permite establecer paralelismos entre el mapa logístico y el modelo económico, mostrando que los mecanismos de transición al caos son universales y no dependen de la naturaleza específica del sistema.

El trabajo combina herramientas analíticas y simulación numérica para ofrecer una visión completa de la dinámica caótica en sistemas discretos. Además de su relevancia teórica, los resultados ilustran cómo fenómenos complejos, como el caos, pueden emerger de reglas simples en modelos económicos deterministas, poniendo de relieve la necesidad de incorporar la teoría del caos al análisis moderno de sistemas sociales y económicos.

2. Sistemas dinámicos

2.1. Introducción de los sistemas dinámicos

Definición 2.1. El *espacio de fases* de un sistema dinámico es el conjunto X de todos los posibles estados que puede asumir el sistema. Cada punto $x \in X$ representa un estado completo del sistema.

El conjunto X suele estar dotado de una *distancia* o *métrica*

$$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

lo que convierte a X en un *espacio métrico*.

Según la dimensión del espacio de fases, se distingue entre sistemas dinámicos de dimensión finita o infinita. En este trabajo nos centraremos en la primera, es decir, cuando X es un subconjunto de \mathbb{R}^n .

La evolución de un sistema dinámico corresponde al cambio de su estado a lo largo del tiempo. Introducimos un conjunto T que representa el conjunto de tiempos posibles. Existen dos casos principales: tiempo continuo, cuando $T = \mathbb{R}$, y tiempo discreto, cuando $T = \mathbb{Z}$. Nos ocuparemos solo del tiempo discreto, y hablaremos de *sistemas dinámicos de tiempo discreto*.

Definición 2.2. Para cada $t \in T$ está definida una aplicación

$$\varphi_t : X \rightarrow X,$$

llamada *operador de evolución*, que transforma un estado inicial $x_0 \in X$ en el estado $x_t \in X$ alcanzado en el instante t :

$$x_t = \varphi_t(x_0).$$

Proposición 2.3. Los operadores de evolución satisfacen dos propiedades fundamentales, que reflejan el carácter determinista del sistema:

- i. $\varphi_0 = \text{id}$.
- ii. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

En los sistemas de tiempo discreto basta con especificar una única aplicación

$$f = \varphi_1 : X \rightarrow X,$$

conocida como *aplicación de tiempo uno*. A partir de ella, se define:

$$\varphi_k = f^k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z},$$

donde f^k denota la iteración k -ésima de f , y $f^0 = \text{id}$.

Definición 2.4. Un *sistema dinámico* es un triplete (T, X, φ_t) , donde:

- T es el conjunto de tiempos,
- X es el espacio de estados,
- $\{\varphi_t\}_{t \in T}$ es una familia de operadores de evolución $\varphi_t : X \rightarrow X$,

Definición 2.5. Dado un punto inicial $x_0 \in X$, la *órbita* o *trayectoria* que parte de x_0 es el subconjunto

$$\text{Or}(x_0) = \{x \in X : x = \varphi_t(x_0), \text{ para algún } t \in T \text{ tal que } \varphi_t(x_0) \text{ está definido}\}.$$

Proposición 2.6. Si existe $t_0 \in T$ tal que $y_0 = \varphi_{t_0}(x_0)$, entonces $\text{Or}(x_0) = \text{Or}(y_0)$.

Definición 2.7. Un punto $x_0 \in X$ es un *punto fijo* si

$$\varphi_t(x_0) = x_0 \quad \text{para todo } t \in T.$$

Un punto fijo permanece invariante bajo la evolución del sistema.

Definición 2.8. Una *órbita periódica* o *ciclo* es una órbita no trivial L_0 tal que existe $T_0 > 0$ con

$$\varphi_{t+T_0}(x_0) = \varphi_t(x_0) \quad \text{para todo } t \in T,$$

y todo $x_0 \in L_0$. El menor valor posible de T_0 con esta propiedad se denomina *período* del ciclo.

Definición 2.9. El *retrato de fases* de un sistema dinámico es la partición del espacio de estados X en órbitas.

El retrato de fases proporciona una representación geométrica global del comportamiento del sistema. Permite identificar los estados asintóticos hacia los cuales tienden las trayectorias cuando $t \rightarrow +\infty$.

Los conjuntos invariantes permiten clasificar las órbitas y describir los estados asintóticos posibles del sistema.

Definición 2.10. Sea (T, X, φ_t) un sistema dinámico. Un subconjunto $S \subseteq X$ se dice *invariante* si

$$x_0 \in S \Rightarrow \varphi_t(x_0) \in S \quad \text{para todo } t \in T.$$

Es decir, S es invariante si $\varphi_t(S) \subseteq S$ para todo $t \in T$. Un conjunto invariante está compuesto por órbitas completas del sistema. Si S es invariante, se puede restringir el sistema dinámico original a S considerando el sistema inducido (T, S, φ_t) .

Cuando el espacio de estados X posee una métrica ρ , resulta natural considerar conjuntos invariantes que sean cerrados respecto de dicha métrica.

Definición 2.11. Sea (T, X, φ_t) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico completo con métrica ρ . Sea $S_0 \subset X$ un conjunto invariante cerrado. El conjunto invariante S_0 se dice *estable* si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- (i) Para toda vecindad suficientemente pequeña $U \supset S_0$, existe otra vecindad $V \supset S_0$ tal que

$$x \in V \Rightarrow \varphi_t(x) \in U \quad \text{para todo } t > 0.$$

Esta propiedad se denomina *estabilidad de Lyapunov*.

- (ii) Existe una vecindad $U_0 \supset S_0$ tal que

$$x \in U_0 \Rightarrow \rho(\varphi_t(x), S_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Esta propiedad se denomina *estabilidad asintótica*.

Observación 2.12. Un conjunto puede ser *Lyapunov estable* pero no asintóticamente estable.

Observación 2.13. Un conjunto puede ser asintóticamente estable, pero sin ser Lyapunov estable.

Cuando el sistema dinámico es discreto y de dimensión finita, pueden establecerse condiciones suficientes para la estabilidad de un punto fijo utilizando el Jacobiano de la aplicación de evolución.

Teorema 2.14. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación suave que define un sistema dinámico en tiempo discreto. Supongamos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo, es decir, $f(x_0) = x_0$, y sea $A = Df(x_0)$ la matriz jacobiana evaluada en x_0 . Si todos los autovalores μ_1, \dots, μ_n de A satisfacen

$$|\mu_i| < 1 \quad \text{para todo } i,$$

entonces x_0 es asintóticamente estable.

Definición 2.15. Los autovalores del punto fijo se denominan *multiplicadores*.

En sistemas más generales, una condición suficiente y más fuerte para la existencia y unicidad de un punto fijo estable viene dada por el siguiente principio:

Teorema 2.16. (Principio del mapeo contractivo): Sea (X, ρ) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua que satisfice

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X,$$

con una constante $\lambda \in (0, 1)$. Entonces:

- Existe un único punto fijo $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

- Para cualquier $x \in X$, se tiene $f^k(x) \rightarrow x_0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Este resultado garantiza estabilidad global asintótica del punto fijo x_0 , independientemente de la dimensión del espacio X , y es aplicable incluso en espacios funcionales infinitodimensionales.

Observación 2.17. En sistemas dinámicos unidimensionales, como los que se estudiarán en los capítulos posteriores, la estabilidad de los puntos fijos puede determinarse de forma sencilla a partir de la derivada. En efecto, si x^* es un punto fijo de una aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces:

- Si $|f'(x^*)| < 1$, el punto es asintóticamente estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, el punto es inestable.
- Si $|f'(x^*)| = 1$, el análisis lineal no es concluyente.

Este criterio será de utilidad en el estudio del mapa logístico en el capítulo 4.

2.2. Bifurcaciones y comportamiento cualitativo

Sea $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una familia uniparamétrica de funciones diferenciables. El punto x_0 es un punto fijo si $f_\lambda(x_0) = x_0$.

La estabilidad del punto fijo x_0 se determina por la derivada $f'_\lambda(x_0)$. Si $|f'_\lambda(x_0)| < 1$, el punto fijo es localmente atractor; si $|f'_\lambda(x_0)| > 1$, es repelente; si $|f'_\lambda(x_0)| = 1$, se pierde la hiperbólicidad y puede ocurrir una bifurcación.

Definición 2.18. Se dice que ocurre una bifurcación en $x = x_0$, $\lambda = \lambda_0$, si (x_0, λ_0) satisface:

$$f_\lambda(x) = x, \quad |f'_\lambda(x)| = 1.$$

Alrededor de esos valores críticos, el comportamiento dinámico de la iteración de f_λ puede cambiar drásticamente, dando lugar a nuevos puntos fijos, ciclos periódicos, o fenómenos más complejos.

Observación 2.19. Cuando se alcanza la condición crítica $|f'_\lambda(x^*)| = 1$, el análisis lineal ya no permite decidir la estabilidad del punto fijo y pueden producirse distintos tipos de bifurcaciones, en función de la estructura local del sistema y de los términos no lineales de la aplicación. En particular, el caso $f'_\lambda(x^*) = 1$ suele estar asociado a bifurcaciones de tipo *saddle-node*, *transcrítica* o *pitchfork*.

En una bifurcación *saddle-node* (o de pliegue) aparecen o desaparecen simultáneamente dos puntos fijos, uno estable y otro inestable, al variar el parámetro. En la bifurcación *transcrítica*, dos puntos fijos se intersectan e intercambian su estabilidad. Por último, en la bifurcación *pitchfork* un punto fijo pierde estabilidad y da lugar a dos nuevos puntos fijos simétricos, fenómeno característico de sistemas con simetría.

Observación 2.20. En aplicaciones unidimensionales con parámetro, como $f_r(x)$, es común observar bifurcaciones al variar dicho parámetro. Un ejemplo destacado es la bifurcación de tipo *period-doubling* o de duplicación de periodo, donde una órbita periódica estable se vuelve inestable y da lugar a otra de periodo doble. Este fenómeno es característico del mapa logístico, cuyo análisis detallado se abordará en el capítulo 4.

Definición 2.21. Sea $f_\mu : I \rightarrow I$ una familia de aplicaciones diferenciables dependientes de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$. Se dice que x^* sufre una **bifurcación de duplicación de periodo** en $\mu = \mu_0$ si:

- Para $\mu < \mu_0$, x^* es un punto fijo estable de f_μ .
- En $\mu = \mu_0$, x^* pierde estabilidad, con $f'_{\mu_0}(x^*) = -1$.
- Para $\mu > \mu_0$, existe una órbita periódica atractora de periodo 2.

Esta bifurcación ocurre cuando la derivada de f_μ en el punto fijo cruza transversalmente el valor -1 , es decir:

$$f'_\mu(x^*) < -1 \quad \text{cuando } \mu > \mu_0, \quad \text{y} \quad f'_{\mu_0}(x^*) = -1.$$

Proposición 2.22. En una bifurcación de duplicación de periodo, la órbita de periodo 2 que emerge para $\mu > \mu_0$ es asintóticamente estable si el producto de derivadas

$$(f_\mu^2)'(x) = f'_\mu(f_\mu(x)) \cdot f'_\mu(x)$$

satisface $|(f_\mu^2)'(x)| < 1$ en los puntos de la nueva órbita.

Este tipo de bifurcación puede repetirse sucesivamente: la órbita de periodo 2 puede bifurcarse en una de periodo 4, luego en una de periodo 8, y así sucesivamente. Esta sucesión de bifurcaciones de duplicación de periodo se denomina *cascade de Feigenbaum* y es típica de muchos sistemas no lineales.

Observación 2.23. Una propiedad notable de esta cascada es que los valores de μ en los que ocurren las bifurcaciones se acercan geométricamente a un valor límite μ_∞ , a partir del cual la dinámica se vuelve caótica. La razón de convergencia de estos valores es universal para un amplio conjunto de mapas unimodales y se conoce como *constante de Feigenbaum*.

Observación 2.24. En el mapa logístico, esta sucesión de bifurcaciones de periodo está perfectamente ilustrada al incrementar el parámetro r . Para r cercano a 3, el sistema presenta un punto fijo estable; al aumentar r se produce la primera bifurcación de periodo, y al continuar creciendo, la dinámica exhibe una compleja cascada que culmina en un régimen caótico. Este comportamiento será analizado en detalle en el capítulo 4.

2.3. Dinámica unidimensional

Consideramos aplicaciones del intervalo real en sí mismo, es decir, funciones $f : I \rightarrow I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Este caso, conocido como dinámica unidimensional, presenta una rica variedad de comportamientos que pueden analizarse con herramientas relativamente sencillas. Este tipo de sistemas incluye como caso paradigmático al mapa logístico, que será objeto de estudio en el capítulo 4.

El análisis se centra en el comportamiento de las órbitas $\{x_n\}$ generadas por la iteración

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 \in I.$$

Definición 2.25. Un punto $x^* \in I$ es un **punto fijo** de f si $f(x^*) = x^*$. Más generalmente, se dice que $x^* \in I$ es un **punto periódico de periodo** $p \in \mathbb{N}$ si

$$f^p(x^*) = x^*, \quad \text{y } f^k(x^*) \neq x^* \text{ para } 1 \leq k < p.$$

El conjunto $\{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ se denomina **órbita periódica de periodo** p .

La estabilidad de un punto periódico puede estudiarse mediante la derivada de la función iterada f^p en dicho punto.

Proposición 2.26. Sea x^* un punto periódico de periodo p de una aplicación diferenciable $f : I \rightarrow I$. Entonces:

- Si $|(f^p)'(x^*)| < 1$, la órbita periódica es asintóticamente estable (atractora).
- Si $|(f^p)'(x^*)| > 1$, la órbita es inestable (repulsora).
- Si $|(f^p)'(x^*)| = 1$, el criterio es inconcluso.

El análisis de la dinámica unidimensional se apoya también en el estudio del comportamiento global de las iteraciones. En particular, pueden observarse fenómenos como atracción hacia puntos fijos, aparición de ciclos periódicos, bifurcaciones, caos, etc.

Definición 2.27. Un conjunto compacto $A \subset I$ se dice que es un **atractor** si:

- Existe un entorno U de A tal que para todo $x \in U$, la órbita $\{f^n(x)\}$ permanece en U y converge a A en la topología de Hausdorff.
- A es minimal con esta propiedad.

En muchos casos, como en el mapa logístico, el atractor puede ser un conjunto finito (una órbita periódica) o un conjunto infinito, fractal, denominado *atractor extraño* cuando está asociado a una dinámica caótica.

Observación 2.28. Una característica destacada de la dinámica unidimensional es que los cambios cualitativos en la dinámica suelen depender del valor de un parámetro r , dando

lugar a bifurcaciones. Estas se manifestarán de forma explícita en el estudio del mapa logístico, donde la variación del parámetro de control genera una sucesión de duplicaciones de periodo que desembocan en el caos.

En el estudio de sistemas dinámicos discretos, las órbitas periódicas desempeñan un papel central en la comprensión del comportamiento global del sistema. Son, en cierto sentido, las estructuras esqueléticas de la dinámica, y en muchos casos su aparición, estabilidad o bifurcación marcan transiciones cualitativas importantes en el sistema.

Definición 2.29. Se dice que una órbita periódica es **hiperbólica** si $|(f^p)'(x)| \neq 1$ para alguno (y entonces para todos) de sus puntos. Si en cambio $|(f^p)'(x)| = 1$, se dice que la órbita es **no hiperbólica**.

Los sistemas dinámicos dependientes de un parámetro suelen mostrar cambios cualitativos en su comportamiento al variar dicho parámetro. Estas transiciones pueden visualizarse mediante una herramienta fundamental: el *diagrama de bifurcación*. Se trata de una representación gráfica que muestra, para cada valor del parámetro, los posibles valores límite de las órbitas del sistema.

Definición 2.30. Dado un sistema dinámico $f_r : I \rightarrow I$ dependiente de un parámetro real r , el **diagrama de bifurcación** es el conjunto de puntos (r, x) tales que x pertenece a la órbita límite de f_r , usualmente después de descartar un número inicial de iteraciones transitorias.

En la práctica, el diagrama se construye numéricamente fijando un número grande de iteraciones N y graficando los últimos valores de una órbita $\{x_n\}_{n=0}^N$ para cada valor de r en un intervalo dado. Esto permite observar:

- Intervalos donde la órbita converge a un punto fijo o a una órbita periódica.
- Puntos de bifurcación, donde aparecen nuevas órbitas de mayor periodo.
- Zonas caóticas, donde los valores se dispersan en un conjunto continuo.

Observación 2.31. En el caso del mapa logístico, el diagrama de bifurcación revela una cascada de duplicaciones de periodo que culmina en un régimen caótico. Esta estructura presenta autosemejanza, y su geometría es de tipo fractal. A medida que se amplían regiones del diagrama, se observan réplicas de la estructura global a menor escala, lo cual es característico de la dinámica no lineal caótica.

Definición 2.32. Se dice que un conjunto es **fractal** si posee estructura autosimilar a múltiples escalas y su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica.

Observación 2.33. El diagrama de bifurcación del mapa logístico ilustra de manera gráfica la coexistencia de orden y caos, periodicidad y aperiodicidad, estabilidad e inestabilidad. Su análisis visual, complementado con herramientas numéricas como el exponente de Lyapunov, permitirá caracterizar detalladamente la dinámica del sistema en el capítulo 4.

2.4. Sistemas bidimensionales

Muchos modelos económicos y biológicos se formulan como sistemas dinámicos en tiempo discreto definidos sobre \mathbb{R}^2 , es decir, funciones $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. El estudio local del comportamiento dinámico alrededor de puntos fijos de este tipo de mapas requiere herramientas lineales que generalizan las ideas vistas en dimensión uno.

Sea F un difeomorfismo de clase C^1 en un entorno de un punto fijo $x^* \in \mathbb{R}^2$, es decir, $F(x^*) = x^*$. Entonces la dinámica local en torno a x^* está gobernada, en primera aproximación, por la matriz jacobiana:

$$DF(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x^*) \end{pmatrix}.$$

La estabilidad de x^* puede analizarse a partir de los valores propios (autovalores) λ_1, λ_2 de esta matriz.

Definición 2.34. Un punto fijo x^* de un mapa $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice:

- **Asintóticamente estable** si todos los autovalores de $DF(x^*)$ satisfacen $|\lambda_i| < 1$.
- **Inestable** si al menos uno de los autovalores satisface $|\lambda_i| > 1$.
- **No hiperbólico** si existe algún autovalor con $|\lambda_i| = 1$.

La clasificación local del tipo de punto fijo puede hacerse en función del **trazo** y **determinante** del jacobiano. Sea

$$J = DF(x^*), \quad \text{con} \quad \text{tr}(J) = a + d, \quad \det(J) = ad - bc.$$

Los autovalores del jacobiano son las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0.$$

La dinámica local se clasifica entonces del siguiente modo:

- Si $\det(J) < 0$: punto fijo tipo **silla** (inestable).
- Si $0 < \det(J) < 1$ y $|\text{tr}(J)| < 1 + \det(J)$: **nodo atractor**.
- Si $\det(J) > 1$: **repulsor**.
- Si los autovalores son complejos con módulo menor que 1: **foco espiral atractivo**.
- Si $|\lambda_i| = 1$: **bifurcación posible**, el análisis lineal no es concluyente.

Observación 2.35. A diferencia de la dimensión uno, en dimensión dos la dinámica local puede presentar espirales, rotaciones y fenómenos bifurcativos más variados, como las bifurcaciones de Hopf discretas. Estos fenómenos aparecen en modelos económicos como el de Köppl, que será analizado en el capítulo 5.

3. Sistemas dinámicos caóticos

3.1. Definiciones topológicas de caos

Definición 3.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. El par (X, f) se denomina *sistema dinámico topológico*. A través de la iteración de f , se generan las órbitas de los puntos de X , que describen la evolución del sistema en el tiempo discreto.

Definición 3.2 (Caos en el sentido de Devaney). Un sistema dinámico topológico (X, f) se dice *caótico en el sentido de Devaney* si cumple las siguientes tres condiciones:

1. f es **topológicamente transitible**, esto es, si para todo par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. El conjunto de **puntos periódicos**

$$\text{Per}(f) = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) = x\}.$$

de f es denso en X , es decir, si para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in \text{Per}(f)$ tal que $d(x, p) < \varepsilon$.

3. f presenta **dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales**, i.e. si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Proposición 3.3. Un sistema (X, f) es transitivo si y solo si existe $x \in X$ tal que su órbita $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es densa en X .

Teorema 3.4. Sea X un espacio métrico completo sin puntos aislados y $f : X \rightarrow X$ continua. Si f es topológicamente transitible y los puntos periódicos de f son densos en X , entonces f presenta dependencia sensible a condiciones iniciales.

Este resultado, demostrado en [2, pág. 72], indica que la sensibilidad no es una propiedad independiente: en ciertos contextos, surge de la combinación de las dos anteriores. Por tanto, la verificación del caos en sentido de Devaney puede reducirse a comprobar transitividad y densidad de periódicos.

Ejemplo 3.5. Uno de los ejemplos paradigmáticos es el mapa logístico:

$$f_r(x) = rx(1 - x),$$

definido en el intervalo $[0, 1]$ para $r \in [0, 4]$. Para ciertos valores de r , especialmente próximos a 4, se verifica que el sistema es transitivo, tiene puntos periódicos densos y presenta dependencia sensible. Por tanto, es caótico en el sentido de Devaney.

Observación 3.6. El mapa logístico, para ciertos valores del parámetro, constituye un ejemplo clásico de sistema caótico en el sentido de Devaney, al presentar sensibilidad a

condiciones iniciales, transitividad topológica y densidad de órbitas periódicas. El estudio de estas propiedades en el contexto del mapa logístico se realizará con detalle en el capítulo 4.

Definición 3.7 (Caos según Li y Yorke). Un par $(x, y) \in X \times X$ se llama *par caótico* si:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0, \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Un subconjunto $S \subset X$ es un *scrambled set* si todo par distinto en S es un par caótico. El sistema es *caótico en el sentido de Li–Yorke* si existe un conjunto no numerable S que es un scrambled set.

Observación 3.8. La definición de Devaney proporciona una caracterización más fuerte del caos, pues combina la mezcla dinámica global (transitividad), la existencia de regularidad (órbitas periódicas) y la impredecibilidad a largo plazo (sensibilidad).

3.2. Exponentes de Lyapunov

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación diferenciable que define un sistema dinámico en tiempo discreto. Una de las herramientas fundamentales para estudiar la sensibilidad a condiciones iniciales y la presencia de caos en estos sistemas es el exponente de Lyapunov.

Definición 3.9. Dado un sistema dinámico en tiempo discreto definido por una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y un punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el **exponente de Lyapunov** asociado a una dirección $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$ se define como

$$\lambda(x_0, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x_0)v\|,$$

si el límite existe.

Este exponente cuantifica la tasa de separación exponencial de dos órbitas inicialmente cercanas en la dirección de v . Si existe al menos una dirección en la que $\lambda(x_0, v) > 0$, el sistema presenta sensibilidad a condiciones iniciales y, por tanto, un comportamiento caótico en el sentido de Lyapunov.

Definición 3.10. El **máximo exponente de Lyapunov** en el punto x_0 se define como

$$\lambda_{\max}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x_0)\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial subordinada.

Cuando f es un difeomorfismo de clase C^1 sobre una variedad compacta M , el teorema de Oseledets garantiza, bajo hipótesis ergódicas, la existencia de n exponentes de Lyapunov

$\lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \dots \geq \lambda_n(x_0)$ para casi todo punto $x_0 \in M$, que corresponden a los autovalores del límite

$$\Lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Df^n(x_0))^T Df^n(x_0) \right]^{1/2n},$$

cuando este existe.

Observación 3.11. El exponente de Lyapunov no solo permite detectar caos, sino también estudiar transiciones entre distintos regímenes dinámicos. Por ejemplo, en sistemas con parámetro, el cambio de signo del exponente de Lyapunov al variar dicho parámetro puede interpretarse como una bifurcación que marca la transición hacia el caos. Este comportamiento se observará explícitamente en los capítulos 4 y 5.

Observación 3.12. En dimensión uno, el exponente de Lyapunov se reduce a

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(x_k)|, \quad \text{donde } x_{k+1} = f(x_k).$$

El signo del exponente de Lyapunov determina la estabilidad de la órbita:

- Si $\lambda(x_0) < 0$, las órbitas cercanas convergen exponencialmente hacia la de x_0 .
- Si $\lambda(x_0) > 0$, hay divergencia exponencial y, por tanto, comportamiento caótico.
- Si $\lambda(x_0) = 0$, el comportamiento es marginalmente estable y puede indicar la presencia de bifurcaciones.

El cálculo exacto de los exponentes de Lyapunov suele ser imposible de forma analítica, por lo que se emplean métodos numéricos. En particular, el método desarrollado por Benettin et al. [2] se ha consolidado como uno de los procedimientos estándar para calcular todos los exponentes en sistemas de dimensión finita.

Definición 3.13. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto inicial y $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto ortonormal de vectores iniciales. Se definen las iteraciones

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad V_{k+1} = Df(x_k)V_k,$$

donde V_k es una matriz cuyas columnas son vectores ortonormales que evolucionan linealmente por la derivada de f . En cada paso se aplica una reortogonalización mediante el procedimiento de Gram-Schmidt y se almacenan las normas intermedias. Los exponentes de Lyapunov se estiman entonces como

$$\lambda_i \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \|w_i^{(k)}\|,$$

donde $w_i^{(k)}$ es la i -ésima componente del sistema reortogonalizado en el paso k .

Este procedimiento permite obtener una estimación efectiva de los n exponentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, y ha demostrado ser robusto incluso ante errores numéricos acumulados, siempre que se mantenga una adecuada precisión en los pasos de integración y normalización.

El exponente de Lyapunov máximo, λ_{\max} , se utiliza habitualmente como criterio práctico de detección de caos: si $\lambda_{\max} > 0$, el sistema es caótico. Además, el valor de este exponente cuantifica el grado de impredecibilidad a largo plazo, proporcionando una escala temporal de divergencia entre órbitas.

3.3. El método de Benettin en dimensión dos

El método propuesto por Benettin et al. [2] constituye una técnica numérica general para el cálculo efectivo de todos los exponentes de Lyapunov en sistemas dinámicos de dimensión finita, tanto en tiempo continuo como discreto. En este trabajo nos centraremos en el caso discreto, que es el relevante para los sistemas estudiados posteriormente.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 , y consideremos la evolución de un punto inicial x_0 bajo la iteración $x_{k+1} = f(x_k)$. Para estudiar la separación exponencial de órbitas vecinas, se analiza la evolución de un conjunto inicial de vectores tangentes $\{v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}\}$ que forman una base ortonormal del espacio tangente $T_{x_0}\mathbb{R}^n$.

En cada iteración k , los vectores se actualizan mediante la derivada de f :

$$\tilde{v}_i^{(k+1)} = Df(x_k)v_i^{(k)} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Sin embargo, debido a que los vectores tienden a alinearse con la dirección de máxima expansión, es necesario realizar una reortogonalización tras cada paso. Para ello se emplea el procedimiento de Gram–Schmidt, lo que produce una nueva base ortonormal $\{v_1^{(k+1)}, \dots, v_n^{(k+1)}\}$ y una matriz triangular superior $R^{(k+1)}$ tal que

$$Df(x_k)Q^{(k)} = Q^{(k+1)}R^{(k+1)},$$

donde $Q^{(k)}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_i^{(k)}$. En consecuencia, el producto acumulado de las matrices $R^{(j)}$ proporciona información sobre el crecimiento de los volúmenes dirigidos por los vectores base.

Definición 3.14. Sea $r_{ii}^{(k)}$ el coeficiente en la diagonal de la matriz $R^{(k)}$ correspondiente al vector v_i . El **exponente de Lyapunov** λ_i se estima numéricamente como

$$\lambda_i \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log r_{ii}^{(k)}.$$

Este método permite obtener simultáneamente todos los exponentes de Lyapunov asociados al sistema. Es especialmente eficiente cuando se implementa con reortogonalización periódica, lo que evita la degeneración numérica por colinealidad de los vectores evolutivos.

Observación 3.15. En el caso unidimensional, el método se reduce al cálculo del expo-

nente como promedio logarítmico de las derivadas:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(x_k)|,$$

por lo que no requiere reortogonalización.

Observación 3.16. La confiabilidad del método está sujeta a ciertas condiciones numéricas. En particular, es necesario que la precisión aritmética y la frecuencia de reortogonalización sean suficientes para mantener la independencia lineal de los vectores y controlar los errores acumulados. Estudios experimentales han mostrado que, en presencia de comportamiento estocástico suficientemente desarrollado, los valores estimados por el método coinciden con los valores teóricos esperados con gran fidelidad.

Por tanto, el método de Benettin no solo constituye una herramienta práctica fundamental para el análisis numérico del caos, sino que también sirve como criterio de clasificación cualitativa de la dinámica: la presencia de exponentes de Lyapunov positivos es una señal clara de inestabilidad y comportamiento caótico, mientras que exponentes negativos o nulos indican estabilidad o comportamiento periódico.

Observación 3.17. En los capítulos siguientes se aplicará este método numérico para estimar los exponentes de Lyapunov tanto del mapa logístico como del modelo de Kopel. Su implementación práctica permitirá caracterizar cuantitativamente el comportamiento caótico de ambos sistemas en función de sus parámetros.

3.4. Caracterización del caos

El concepto de caos en sistemas dinámicos ha sido formalizado desde diferentes perspectivas. La definición clásica de caos según Devaney requiere la concurrencia de tres propiedades: sensibilidad a las condiciones iniciales, transitividad topológica y densidad de órbitas periódicas. Sin embargo, existen otras caracterizaciones útiles que capturan distintas facetas del comportamiento caótico.

Dependencia sensible a las condiciones iniciales

Un rasgo distintivo del caos es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Dos órbitas que parten de puntos arbitrariamente cercanos pueden separarse exponencialmente con el tiempo.

Esta propiedad implica que pequeñas incertidumbres en el estado inicial del sistema pueden generar evoluciones muy distintas, lo que limita la predictibilidad a largo plazo.

Aperiodicidad determinista

En un sistema caótico, el comportamiento puede ser determinista —es decir, completamente especificado por una ley de evolución— sin ser periódicamente recurrente. Esta

paradoja aparente da lugar a lo que se conoce como *comportamiento aperiodico determinista*.

Definición 3.18. Se dice que una órbita $\{f^n(x)\}$ presenta **comportamiento aperiodico determinista** si el sistema es determinista pero la órbita no es periódica ni converge a un punto fijo o a una órbita periódica.

Este tipo de comportamiento es típico en sistemas caóticos y puede manifestarse, por ejemplo, en la forma de secuencias irregulares no repetitivas dentro de conjuntos acotados.

Atractores extraños

El concepto de atractor extraño surge para describir conjuntos invariante con estructura fractal sobre los cuales la dinámica es caótica. Este tipo de atractores representa un equilibrio entre orden y desorden: la órbita está contenida en un conjunto compacto, pero presenta sensibilidad y aperiodicidad.

Definición 3.19. Un **atractor extraño** es un atractor compacto e invariante que presenta sensibilidad a condiciones iniciales y sobre el cual la dinámica es caótica.

En estos casos, las órbitas tienden a un conjunto que posee dimensión fractal, estructura no diferenciable y comportamiento aparentemente aleatorio, pero completamente determinado por las ecuaciones del sistema. Ejemplos clásicos incluyen el atractor de Lorenz, el atractor de Hénon, y las estructuras caóticas del mapa logístico.

Observación 3.20. En los capítulos siguientes se estudiarán fenómenos caóticos en dos sistemas concretos: el mapa logístico en dimensión uno y el modelo de Kopel en dimensión dos. En ambos, se identificará numéricamente la presencia de caos mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov, y se observarán estructuras caóticas asociadas a atractores extraños.

4. Dinámica del mapa logístico 1D

4.1. Definición del mapa logístico y propiedades básicas

El mapa logístico es un sistema dinámico discreto que ha desempeñado un papel fundamental en la teoría moderna del caos determinista. A pesar de su simplicidad formal, presenta una gran variedad de comportamientos dinámicos que dependen de manera sensible del parámetro de control r .

La ecuación logística continua fue introducida por Verhulst en el siglo XIX para describir la evolución de una población $P(t)$ con crecimiento inicial exponencial y saturación debida a recursos limitados:

$$\frac{dP}{dt} = \rho P \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

donde:

- $\rho > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca,
- $K > 0$ es la *capacidad de carga* del medio,
- $P(t)$ es la población en el instante t .

La solución explícita de esta ecuación es:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) e^{-\rho t}},$$

lo que muestra que $P(t) \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Si se considera que la población evoluciona en generaciones discretas, podemos sustituir la derivada temporal por un cociente de incrementos:

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{\Delta t} \approx \rho P_n \left(1 - \frac{P_n}{K} \right).$$

Tomando $\Delta t = 1$ y reordenando:

$$P_{n+1} = P_n + \rho P_n \left(1 - \frac{P_n}{K} \right).$$

Si ahora normalizamos $x_n = P_n/K$ y escribimos $r = 1 + \rho$, obtenemos:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n).$$

Esta es la formulación discreta conocida como *mapa logístico*.

Definición 4.1 (Mapa logístico). Para un parámetro $r > 0$, el *mapa logístico* es la aplicación $f_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_r(x) = r x (1 - x).$$

- El factor rx modela el crecimiento proporcional a la población existente.
- El factor $(1 - x)$ introduce la saturación por limitación de recursos.
- La multiplicación refleja el equilibrio entre crecimiento y limitación.

Proposición 4.2. Si $0 < r \leq 4$ y $x \in [0, 1]$, entonces $f_r(x) \in [0, 1]$. En consecuencia, $[0, 1]$ es invariante bajo f_r .

Demostración. La función f_r es un polinomio cuadrático, cóncavo hacia abajo. Su máximo está en $x = 1/2$ y vale:

$$f_r\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{4}.$$

Si $r \leq 4$, este máximo es ≤ 1 . Dado que $f_r(0) = f_r(1) = 0$ y la concavidad es global, toda la imagen de $[0, 1]$ está contenida en $[0, 1]$.

La derivada primera es:

$$f_r'(x) = r(1 - 2x).$$

Así:

- $f_r'(x) > 0$ para $x < 1/2$: la función es creciente en $[0, 1/2)$.
- $f_r'(x) < 0$ para $x > 1/2$: la función es decreciente en $(1/2, 1]$.

La derivada segunda es:

$$f_r''(x) = -2r < 0,$$

lo que confirma que f_r es estrictamente cóncava en todo $[0, 1]$.

Proposición 4.3 (Unimodalidad). Para todo $0 < r \leq 4$, el mapa logístico es *unimodal*: existe un único punto crítico $x = 1/2$, que corresponde a un máximo global.

Demostración. La unicidad del punto crítico se deduce de $f_r'(x) = 0 \iff x = 1/2$, y la concavidad global garantiza que este es un máximo absoluto.

Proposición 4.4. El mapa logístico es simétrico respecto a la vertical $x = 1/2$.

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}$ tal que $x = \frac{1}{2} - u$ y $y = 1 - x$. Entonces:

$$f_r\left(\frac{1}{2} - u\right) = r\left(\frac{1}{2} - u\right)\left(\frac{1}{2} + u\right) = \frac{r}{4} - ru^2,$$

y de igual modo:

$$f_r\left(\frac{1}{2} + u\right) = \frac{r}{4} - ru^2.$$

Por lo tanto, $f_r(1/2 - u) = f_r(1/2 + u)$.

El valor de r determina no solo la altura del máximo $r/4$, sino también el comportamiento global:

- $0 < r < 1$: $f_r(x) < x$ para todo $x \in (0, 1]$, la órbita converge a 0.
- $r = 1$: 0 es fijo pero con derivada $f'_1(0) = 1$, transición entre atracción y repulsión.
- $1 < r \leq 4$: el comportamiento se estudia en secciones posteriores.

Mediante el cambio $y = 1 - 2x$ y $a = r/2$, se obtiene:

$$y_{n+1} = 1 - ay_n^2,$$

lo que muestra que el mapa logístico es conjugado topológicamente a un mapa cuadrático centrado en el origen. Esta conexión es fundamental en la teoría de mapas unimodales.

La estructura unimodal, la concavidad global y la simetría son las claves de la riqueza dinámica del mapa logístico. Estos rasgos, junto con la dependencia del parámetro r , darán lugar a bifurcaciones y, finalmente, a caos.

4.2. Estabilidad de puntos fijos y ciclos

El análisis de la estabilidad de los puntos fijos y de los ciclos periódicos en el mapa logístico es una de las herramientas fundamentales para comprender la transición desde comportamientos simples hasta el caos. En esta sección se desarrolla de forma exhaustiva el estudio de la estabilidad, comenzando con los puntos fijos y continuando con los ciclos de periodo dos, siguiendo rigurosamente la teoría de mapas unidimensionales.

Recuperemos algunas definiciones que nos serán útiles.

Definición 4.5 (Punto fijo). Sea $f : I \rightarrow I$ un mapa definido en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Un punto $x^* \in I$ se llama *punto fijo* si

$$f(x^*) = x^*.$$

Definición 4.6 (Órbita). Dado $x_0 \in I$, la *órbita* de x_0 bajo f es la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = x_0$, la órbita es periódica de periodo m .

Definición 4.7 (Estabilidad local). Un punto fijo x^* es *localmente asintóticamente estable* si existe $\delta > 0$ tal que, para todo x_0 con $|x_0 - x^*| < \delta$, se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Proposición 4.8 (Criterio diferencial de estabilidad). Sea f un mapa C^1 y x^* un punto fijo. Entonces:

1. Si $|f'(x^*)| < 1$, el punto fijo es localmente asintóticamente estable.
2. Si $|f'(x^*)| > 1$, el punto fijo es inestable.
3. Si $|f'(x^*)| = 1$, el punto fijo es no hiperbólico y la estabilidad no puede decidirse solo con la derivada de primer orden.

Demostración. Este resultado es consecuencia directa del Teorema de la contracción de Banach cuando $|f'(x^*)| < 1$, de la expansión local cuando $|f'(x^*)| > 1$ y de la degeneración en el caso crítico $|f'(x^*)| = 1$. Véase [2, Cap. 2] y [3, Sec. 1.4] para la demostración completa.

Cálculo de puntos fijos del mapa logístico

Consideremos el mapa logístico

$$f_r(x) = rx(1 - x), \quad r > 0.$$

Buscamos los x^* que satisfacen $f_r(x^*) = x^*$:

$$rx^*(1 - x^*) = x^*.$$

Desarrollando el producto:

$$rx^* - r(x^*)^2 = x^*.$$

Llevando todos los términos a un lado:

$$rx^* - r(x^*)^2 - x^* = 0.$$

Agrupando términos semejantes:

$$(r - 1)x^* - r(x^*)^2 = 0.$$

Factorizando x^* :

$$x^*[(r - 1) - rx^*] = 0.$$

Por tanto, las soluciones son:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{r - 1}{r}.$$

Observación 4.9. El segundo punto fijo x_2^* pertenece a $[0, 1]$ si y solo si $r > 1$. En particular:

- Si $0 < r \leq 1$, el único punto fijo en $[0, 1]$ es $x_1^* = 0$.
- Si $r > 1$, existen dos puntos fijos distintos: $x_1^* = 0$ y $x_2^* = \frac{r-1}{r}$.

Estabilidad de $x_1^* = 0$

La derivada de f_r es:

$$f_r'(x) = r(1 - 2x).$$

Evaluando en $x = 0$:

$$f_r'(0) = r(1 - 0) = r.$$

Aplicando el criterio diferencial:

$$|f'_r(0)| = |r| < 1 \iff 0 < r < 1.$$

Proposición 4.10. El punto fijo $x_1^* = 0$ es localmente asintóticamente estable si y sólo si $0 < r < 1$, y es inestable si $r > 1$.

Estabilidad de $x_2^* = \frac{r-1}{r}$

Evaluamos la derivada en x_2^* :

$$f'_r\left(\frac{r-1}{r}\right) = r\left(1 - 2 \cdot \frac{r-1}{r}\right).$$

Calculamos el producto interno:

$$2 \cdot \frac{r-1}{r} = \frac{2r-2}{r}.$$

Sustituyendo:

$$f'_r\left(\frac{r-1}{r}\right) = r\left(1 - \frac{2r-2}{r}\right) = r\left(\frac{r-(2r-2)}{r}\right).$$

Simplificamos el numerador:

$$r - (2r - 2) = r - 2r + 2 = -r + 2.$$

Por tanto:

$$f'_r\left(\frac{r-1}{r}\right) = -r + 2.$$

La condición de estabilidad es:

$$|-r + 2| < 1.$$

Esto implica dos desigualdades:

$$-r + 2 < 1 \implies -r < -1 \implies r > 1,$$

$$-r + 2 > -1 \implies -r > -3 \implies r < 3.$$

En conclusión:

Proposición 4.11. El punto fijo x_2^* es estable si y solo si $1 < r < 3$, e inestable para $r > 3$.

Resumen de estabilidad de puntos fijos

Rango de r	Puntos fijos estables	Puntos fijos inestables
$0 < r < 1$	x_1^*	—
$1 < r < 3$	x_2^*	x_1^*
$r > 3$	—	x_1^*, x_2^*

Aparición del ciclo de periodo dos

Definimos el segundo iterado:

$$f_r^{(2)}(x) = f_r(f_r(x)).$$

Sustituimos $f_r(x) = rx(1-x)$:

$$f_r^{(2)}(x) = r \cdot [rx(1-x)] \cdot (1 - rx(1-x)).$$

Multiplicamos el primer factor:

$$r \cdot [rx(1-x)] = r^2x(1-x).$$

Así:

$$f_r^{(2)}(x) = r^2x(1-x)(1 - rx + rx^2).$$

Para encontrar los puntos de periodo dos resolvemos:

$$f_r^{(2)}(x) = x, \quad f_r(x) \neq x.$$

Esto lleva a:

$$r^2x(1-x)(1 - rx + rx^2) - x = 0.$$

Factorizamos x :

$$x [r^2(1-x)(1 - rx + rx^2) - 1] = 0.$$

La ecuación entre corchetes produce:

$$r^2(1-x)(1 - rx + rx^2) - 1 = 0.$$

Expandiendo:

$$(1-x)(1 - rx + rx^2) = 1 - rx + rx^2 - x + rx^2 - rx^3.$$

Agrupando términos:

$$1 - (r+1)x + 2rx^2 - rx^3.$$

Multiplicando por r^2 :

$$r^2 - r^2(r+1)x + 2r^3x^2 - r^3x^3 - 1 = 0.$$

Esta ecuación es una cúbica cuyas soluciones son el punto fijo x_2^* y dos puntos nuevos que forman el ciclo de periodo dos.

Proposición 4.12 (Bifurcación de duplicación de periodo). En $r = 3$, el punto fijo x_2^* pierde estabilidad y emerge un ciclo de periodo dos estable para $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949$.

Observación 4.13. Este fenómeno es el primer paso en la cascada de duplicaciones de periodo que caracteriza la transición al caos.

Resolución explícita del ciclo de periodo dos

Partimos de la ecuación

$$f_r^{(2)}(x) = x,$$

con

$$f_r^{(2)}(x) = r^2x(1-x)(1-rx+rx^2).$$

Sabemos que las soluciones incluyen los puntos fijos $x_1^* = 0$ y $x_2^* = \frac{r-1}{r}$. Para obtener las demás soluciones, procedemos a factorizar el polinomio. Dividimos el polinomio por $(x - \frac{r-1}{r})$ usando división de Ruffini o polinómica.

Sea $P(x) = r^3x^3 - 2r^3x^2 + r^2(r+1)x - (r^2 - 1)$. Hacemos la división:

$$P(x) = (x - \frac{r-1}{r}) \cdot Q(x),$$

donde $Q(x)$ es de grado 2. Al realizar la división (cálculos omitidos por su extensión algebraica pero directos), obtenemos:

$$Q(x) = r^3x^2 - r^2(r+1)x + (r+1).$$

Las otras dos soluciones del ciclo de periodo dos provienen de:

$$r^3x^2 - r^2(r+1)x + (r+1) = 0.$$

Dividimos toda la ecuación por r^3 :

$$x^2 - \frac{r+1}{r}x + \frac{r+1}{r^3} = 0.$$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{\frac{r+1}{r} \pm \sqrt{\left(\frac{r+1}{r}\right)^2 - 4 \cdot \frac{r+1}{r^3}}}{2}.$$

Simplificamos el radical:

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^2 - \frac{4(r+1)}{r^3} = \frac{(r+1)^2}{r^2} - \frac{4(r+1)}{r^3}.$$

Sacamos factor común $\frac{r+1}{r^3}$:

$$= \frac{r+1}{r^3} [r(r+1) - 4].$$

Por tanto:

$$x_{a,b} = \frac{\frac{r+1}{r} \pm \sqrt{\frac{r+1}{r^3} [r(r+1) - 4]}}{2}.$$

Estos son los dos puntos del ciclo de periodo dos para $r > 3$.

Estabilidad del ciclo de periodo dos

Un ciclo $\{x_a, x_b\}$ es estable si:

$$\left| \frac{d}{dx} f_r^{(2)}(x) \Big|_{x=x_a} \right| < 1,$$

lo cual equivale a:

$$|f_r'(x_a) \cdot f_r'(x_b)| < 1.$$

Como $f_r'(x) = r(1 - 2x)$, se tiene:

$$f_r'(x_a) \cdot f_r'(x_b) = r^2(1 - 2x_a)(1 - 2x_b).$$

Usando $x_a + x_b = \frac{r+1}{r}$ y $x_a x_b = \frac{r+1}{r^3}$ (coeficientes de la ecuación cuadrática), desarrollamos:

$$(1 - 2x_a)(1 - 2x_b) = 1 - 2(x_a + x_b) + 4x_a x_b.$$

Sustituimos:

$$= 1 - 2 \cdot \frac{r+1}{r} + 4 \cdot \frac{r+1}{r^3}.$$

Por tanto:

$$f_r'(x_a) \cdot f_r'(x_b) = r^2 \left[1 - \frac{2(r+1)}{r} + \frac{4(r+1)}{r^3} \right].$$

La condición de estabilidad $|\cdot| < 1$ da el rango conocido $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

Hacia el ciclo de periodo cuatro

El siguiente paso en la cascada de duplicaciones de periodo es resolver:

$$f_r^{(4)}(x) = x, \quad f_r^{(2)}(x) \neq x.$$

Este cálculo es algebraicamente más complejo, pues $f_r^{(4)}$ es un polinomio de grado 16. Sin embargo, en [2, Cap. 10] y [3, Sec. 2.5] se describe cómo este proceso genera 2^n puntos en el ciclo de periodo 2^n , con intervalos cada vez más pequeños en r .

Interpretación dinámica

En términos dinámicos:

- Para $0 < r < 1$, todas las órbitas convergen a $x = 0$.

- Para $1 < r < 3$, el atractor es x_2^* , un punto fijo positivo.
- Para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$, el atractor es un ciclo de periodo dos.
- Aumentando r se producen duplicaciones sucesivas: periodo 4, 8, etc., hasta que el sistema se vuelve caótico.

Esta secuencia es conocida como la *cascada de Feigenbaum*, y constituye uno de los mecanismos universales para la aparición del caos en sistemas unidimensionales.

4.3. Diagrama del exponente de Lyapunov en función de r

El exponente de Lyapunov es una herramienta cuantitativa esencial para detectar y caracterizar el comportamiento caótico en sistemas dinámicos. En el caso de sistemas unidimensionales como el mapa logístico, permite establecer de manera precisa si una órbita presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. En esta sección se desarrolla la teoría necesaria, se calcula analíticamente el exponente para ciertos rangos de r y se describe el método numérico para su obtención general, culminando con la interpretación detallada del diagrama $\lambda(r)$.

Definición general

Definición 4.14 (Exponente de Lyapunov unidimensional). Sea $f : I \rightarrow I$ un mapa diferenciable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in I$ un punto inicial con órbita $\{x_n\}$. El *exponente de Lyapunov* asociado a x_0 se define como

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|,$$

si el límite existe.

Observación 4.15. En dimensión uno, el signo de $\lambda(x_0)$ determina el comportamiento local de la órbita:

- Si $\lambda(x_0) < 0$, las órbitas cercanas a x_0 tienden a aproximarse, indicando estabilidad.
- Si $\lambda(x_0) > 0$, pequeñas perturbaciones en la condición inicial crecen exponencialmente, lo que es indicativo de caos.
- Si $\lambda(x_0) = 0$, el crecimiento es subexponencial y se requieren herramientas adicionales para clasificar el comportamiento.

Exponente de Lyapunov en el mapa logístico

Consideremos

$$f_r(x) = rx(1-x), \quad 0 < r \leq 4.$$

Su derivada es:

$$f'_r(x) = r(1 - 2x).$$

Si una órbita $\{x_n\}$ es periódica de periodo p , entonces:

$$\lambda = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |f'_r(x_k)|.$$

En particular, para un punto fijo x^* :

$$\lambda = \ln |f'_r(x^*)|.$$

Caso $x_1^* = 0$

Tenemos $f'_r(0) = r$. Por tanto:

$$\lambda = \ln |r|.$$

Así:

- Para $0 < r < 1$, $\lambda < 0$ y x_1^* es estable.
- Para $r > 1$, $\lambda > 0$ y x_1^* es inestable.

Caso $x_2^* = \frac{r-1}{r}$

Se calculó previamente que $f'_r(x_2^*) = -r + 2$. Así:

$$\lambda = \ln |-r + 2| = \ln |2 - r|.$$

Por tanto:

- Para $1 < r < 3$, $|2 - r| < 1$ y $\lambda < 0$.
- En $r = 3$, $\lambda = 0$ (duplicación de periodo).
- Para $r > 3$, $\lambda > 0$ y el punto fijo es inestable.

Caso del ciclo de periodo dos

Sea $\{x_a, x_b\}$ el ciclo de periodo dos calculado en la subsección anterior. Entonces:

$$\lambda = \frac{1}{2} [\ln |f'_r(x_a)| + \ln |f'_r(x_b)|].$$

Usando $f'_r(x) = r(1 - 2x)$, se obtiene:

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln |f'_r(x_a)f'_r(x_b)|.$$

En 3.2 se dedujo que:

$$f'_r(x_a)f'_r(x_b) = r^2 \left[1 - \frac{2(r+1)}{r} + \frac{4(r+1)}{r^3} \right].$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln \left| r^2 \left[1 - \frac{2(r+1)}{r} + \frac{4(r+1)}{r^3} \right] \right|.$$

Esta expresión es negativa para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$, se anula en $r = 1 + \sqrt{6}$ y es positiva para valores mayores.

Método numérico para $\lambda(r)$

Para valores de r donde el atractor es caótico o de periodo elevado, se calcula $\lambda(r)$ de manera numérica:

1. Fijar un valor de r y una condición inicial $x_0 \in (0, 1)$.
2. Iterar $x_{n+1} = f_r(x_n)$ un número N_{trans} de pasos para eliminar el régimen transitorio.
3. Calcular:

$$\lambda(r) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |f'_r(x_k)|,$$

donde N es suficientemente grande (por ejemplo, $N \geq 10^4$).

4. Repetir para una malla de valores de r en $[0, 4]$ para obtener el diagrama completo.

Observación 4.16. En la práctica, el resultado es robusto frente a la elección de x_0 salvo en un conjunto de medida nula correspondiente a órbitas no genéricas.

Interpretación del diagrama $\lambda(r)$

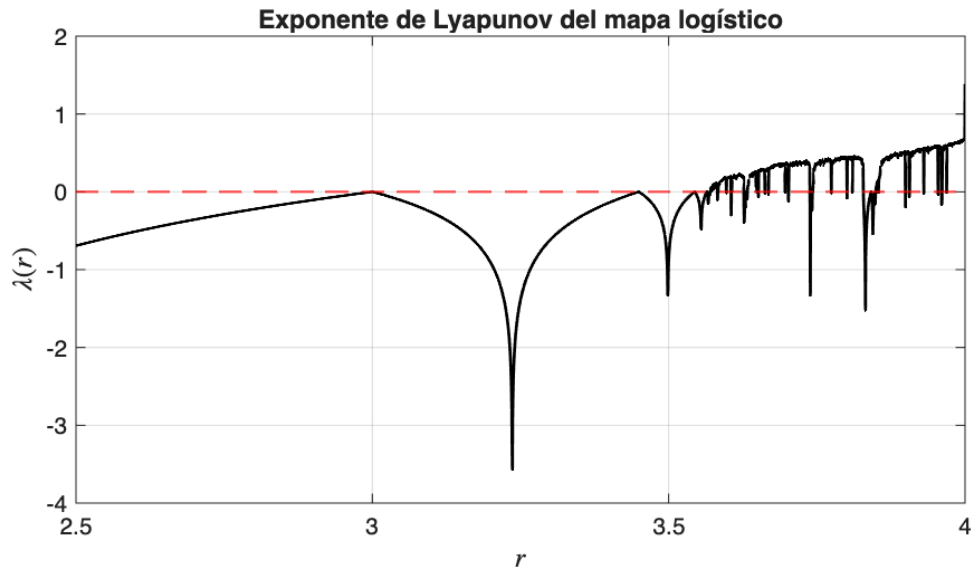


Figura 1: Diagrama del exponente de Lyapunov $\lambda(r)$ del mapa logístico en función del parámetro r .

El diagrama típico muestra:

- $\lambda(r) < 0$ en regiones de estabilidad periódica.
- $\lambda(r) = 0$ en valores críticos de bifurcación.
- $\lambda(r) > 0$ en regiones caóticas.

La comparación con el diagrama de bifurcación revela que:

1. Para $0 < r < 1$: $\lambda < 0$, convergencia a $x = 0$.
2. Para $1 < r < 3$: $\lambda < 0$, convergencia a x_2^* .
3. Para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$: $\lambda < 0$, ciclo de periodo dos estable.
4. Al aumentar r : aparecen intervalos con $\lambda < 0$ intercalados en el régimen caótico (ventanas periódicas).

Observación 4.17. El exponente de Lyapunov no solo detecta el caos, sino que permite cuantificar su intensidad: valores más grandes indican mayor rapidez en la divergencia de órbitas cercanas.

4.4. Comentarios finales sobre la dinámica del mapa logístico

El mapa logístico,

$$f_r(x) = rx(1 - x), \quad 0 < r \leq 4,$$

es uno de los ejemplos más importantes de sistema dinámico unidimensional capaz de exhibir, dependiendo del parámetro r , desde convergencia a puntos fijos estables hasta un régimen caótico plenamente desarrollado. En las secciones anteriores se ha desarrollado un análisis detallado de su comportamiento para distintos intervalos de r , empleando tanto el estudio analítico de puntos fijos y ciclos como el cálculo del exponente de Lyapunov. En esta sección se discuten diversos aspectos teóricos y propiedades globales de la dinámica que completan el estudio.

Constante de Feigenbaum

El proceso de duplicación de periodo observado en el mapa logístico no es exclusivo de este sistema: se trata de un fenómeno universal en la clase de mapas unimodales suaves. Esto implica que existen constantes numéricas, independientes del mapa específico, que describen la geometría de la cascada de bifurcaciones.

Definición 4.18 (Constante de Feigenbaum). Sea $\{r_n\}$ la sucesión de valores de r en los que el sistema presenta una bifurcación de periodo 2^n . La constante de Feigenbaum δ se define como

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n},$$

si el límite existe.

En el caso del mapa logístico, y de hecho para cualquier mapa unimodal suficientemente regular, $\delta \approx 4,6692\dots$ Este resultado fue descubierto numéricamente por Mitchell Feigenbaum y constituye una de las demostraciones más claras de universalidad en sistemas dinámicos.

Observación 4.19. Además de δ , existe otra constante universal $\alpha \approx 2,5029\dots$ que describe la razón de escalamiento de las amplitudes de oscilación en el espacio de fases a medida que se avanza en la cascada de duplicación de periodo.

Ventanas periódicas y caos intermitente

El diagrama de bifurcación del mapa logístico muestra que, incluso en el régimen caótico ($\lambda > 0$), existen *ventanas periódicas* en las que el sistema presenta un ciclo estable de periodo $p > 1$. La más conocida es la ventana de periodo tres alrededor de $r \approx 3,828\dots$

Proposición 4.20 (Sharkovski, periodo tres implica caos). Si el mapa logístico posee un ciclo de periodo tres, entonces posee ciclos de todos los periodos y un conjunto no numerable de puntos que se comportan caóticamente.

Demostración. La demostración completa se encuentra en [2, Cap. 10]. La idea esencial es que un ciclo de periodo tres permite construir, mediante iteraciones y composiciones, ciclos de cualquier periodo, y además un conjunto invariante sobre el que el mapa es semiconjugado a la *full shift* en dos símbolos.

Medida de los conjuntos caóticos y periódicos

Una característica notable es que, aunque el conjunto de parámetros r que generan comportamiento caótico tiene medida de Lebesgue positiva, también es denso el conjunto de parámetros que generan ciclos estables. Esto refleja la naturaleza fractal del conjunto de bifurcaciones y la complejidad del espacio de parámetros.

Observación 4.21. En el sentido topológico, el conjunto de parámetros caóticos es residual (contiene un conjunto de tipo G_δ denso), pero desde el punto de vista de la medida, la proporción exacta de valores de r que producen caos es no trivial de calcular y ha sido objeto de estudio intensivo.

Interpretación física del modelo

El mapa logístico fue originalmente introducido como un modelo simplificado de dinámica de poblaciones. En este contexto:

- x_n representa la población normalizada en la estación n .
- r es una tasa de crecimiento intrínseca.
- El término $(1 - x)$ introduce una limitación debida a recursos finitos.

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, esta interpretación ilustra cómo un sistema determinista y sencillo puede, para ciertos valores de parámetros, dar lugar a comportamientos aparentemente impredecibles.

Relación con otros mapas unimodales

El mapa logístico pertenece a la clase de mapas *unimodales*, caracterizados por tener un único máximo y derivada continua. Ejemplos notables incluyen:

- El mapa cuadrático general: $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$.
- El mapa seno: $f_\beta(x) = \beta \sin(\pi x)$.

En todos estos casos se observa el mismo tipo de cascada de duplicación de periodo y las mismas constantes universales, confirmando la teoría de Feigenbaum.

Síntesis del comportamiento global

Recapitulando, el mapa logístico presenta:

1. Región estable de punto fijo: $0 < r < 3$.
2. Cascada de duplicaciones de periodo: $3 < r < r_\infty \approx 3,56995\dots$
3. Caos con ventanas periódicas: $r_\infty < r \leq 4$.

La frontera entre orden y caos está marcada por la condición $\lambda = 0$, que en el caso del mapa logístico se alcanza en los puntos de bifurcación.

Observación 4.22. La transición de orden a caos en el mapa logístico es un ejemplo de *transición suave* en sistemas dinámicos: no existe un único punto crítico, sino una acumulación infinita de bifurcaciones que convergen a r_∞ .

Conclusión del capítulo

El mapa logístico, a pesar de su simplicidad, encapsula fenómenos fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos: estabilidad, bifurcaciones, caos determinista, universalidad y complejidad fractal. Su estudio sirve como base para abordar modelos más complejos, como el modelo de Kopel que se desarrollará en el capítulo siguiente.

5. Dinámica del modelo de Kopel con dos parámetros

5.1. Formulación del modelo de Kopel

El modelo de Kopel es una extensión dinámica del modelo clásico de Cournot para duopolios, introducida en [4] y analizada en mayor profundidad en [3]. Su interés radica en que, a pesar de su simplicidad formal, exhibe comportamientos complejos como bifurcaciones y caos, dependiendo de los valores de sus parámetros de ajuste.

Planteamiento económico

Consideremos dos empresas (denotadas 1 y 2) que compiten en el mercado produciendo cantidades q_1 y q_2 respectivamente. Se asume que:

1. El mercado se caracteriza por una función de demanda lineal inversa:

$$P(Q) = a - bQ, \quad Q = q_1 + q_2,$$

donde $a > 0$ es el precio de reserva y $b > 0$ mide la sensibilidad del precio frente a la cantidad total producida.

2. Cada empresa i tiene un coste marginal constante $c_i \geq 0$.
3. El beneficio de la empresa i es:

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i [a - b(q_1 + q_2) - c_i].$$

En el modelo estático de Cournot, ambas empresas eligen simultáneamente sus cantidades de producción para maximizar π_i , dado que conocen la producción de la otra. El modelo de Kopel introduce un mecanismo de *ajuste dinámico* en el que las cantidades producidas se actualizan en el tiempo de acuerdo con reglas de aprendizaje parcial.

Regla de ajuste

Cada empresa actualiza su cantidad de producción no de manera instantánea hacia la mejor respuesta (*best response*), sino de forma gradual, ponderando su producción actual y la mejor respuesta al nivel de producción del competidor. Denotando por $q_i(t)$ la cantidad producida por la empresa i en el instante discreto t , la regla de ajuste es:

$$q_1(t+1) = (1 - \alpha)q_1(t) + \alpha BR_1(q_2(t)),$$

$$q_2(t+1) = (1 - \beta)q_2(t) + \beta BR_2(q_1(t)),$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 1]$ son las *tasas de ajuste* de cada empresa y BR_i denota la mejor respuesta de la empresa i .

Definición 5.1 (Mejor respuesta en el duopolio de Cournot). Dada la producción del competidor q_j , la mejor respuesta de la empresa i es el valor q_i^* que maximiza $\pi_i(q_i, q_j)$. En el caso lineal, se obtiene:

$$BR_1(q_2) = \frac{a - c_1 - bq_2}{2b}, \quad BR_2(q_1) = \frac{a - c_2 - bq_1}{2b}.$$

Forma explícita del mapa de Kopel

Sustituyendo las expresiones de BR_i en la regla de ajuste, se obtiene el sistema bidimensional:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = (1 - \alpha)q_1(t) + \alpha \frac{a - c_1 - bq_2(t)}{2b}, \\ q_2(t+1) = (1 - \beta)q_2(t) + \beta \frac{a - c_2 - bq_1(t)}{2b}. \end{cases}$$

Este sistema es un *mapa afín por tramos* definido en \mathbb{R}^2 , cuyo dominio de interés económico es el primer cuadrante $\{(q_1, q_2) \mid q_1 \geq 0, q_2 \geq 0\}$.

Versión adimensional

Siguiendo [3], se introduce la normalización:

$$x_t = \frac{2b}{a - c_1} q_1(t), \quad y_t = \frac{2b}{a - c_2} q_2(t),$$

lo que conduce a un mapa bidimensional en variables adimensionales (x_t, y_t) :

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \alpha)x_t + \alpha [1 - \theta_1 y_t], \\ y_{t+1} = (1 - \beta)y_t + \beta [1 - \theta_2 x_t], \end{cases}$$

donde $\theta_1, \theta_2 > 0$ recogen la asimetría de costes y precios entre empresas:

$$\theta_1 = \frac{a - c_2}{a - c_1}, \quad \theta_2 = \frac{a - c_1}{a - c_2}.$$

Observación 5.2. En el caso simétrico $c_1 = c_2 = c$, se tiene $\theta_1 = \theta_2 = 1$, y el sistema se simplifica sustancialmente, preservando la simetría $x_t = y_t$ a lo largo de las iteraciones si las condiciones iniciales cumplen $x_0 = y_0$.

Interpretación de los parámetros

- α : rapidez con la que la empresa 1 ajusta su producción hacia la mejor respuesta.
- β : rapidez con la que la empresa 2 ajusta su producción hacia la mejor respuesta.
- θ_1, θ_2 : parámetros de interacción que cuantifican el efecto de la producción del competidor sobre la demanda residual de cada empresa.

Propiedades básicas del mapa

Proposición 5.3. El mapa de Kopel en su versión adimensional es una aplicación afín y continua en \mathbb{R}^2 , con un único punto fijo en el dominio económicamente relevante ($x > 0, y > 0$).

Demostración. La continuidad es inmediata por la naturaleza afín de cada componente. El punto fijo se obtiene resolviendo:

$$x = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \theta_1 y), \quad y = (1 - \beta)y + \beta(1 - \theta_2 x).$$

Simplificando:

$$\alpha x = \alpha(1 - \theta_1 y), \quad \beta y = \beta(1 - \theta_2 x),$$

lo que lleva a:

$$x + \theta_1 y = 1, \quad y + \theta_2 x = 1.$$

Resolviendo el sistema lineal se obtiene el punto fijo único:

$$x^* = \frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_1 \theta_2}, \quad y^* = \frac{1 - \theta_2}{1 - \theta_1 \theta_2}.$$

Este punto pertenece al primer cuadrante siempre que $\theta_1, \theta_2 < 1$ o $\theta_1, \theta_2 > 1$, garantizando la viabilidad económica.

Espacio de parámetros

El estudio de la dinámica se realiza para $(\alpha, \beta) \in (0, 1]^2$ y $\theta_1, \theta_2 > 0$. En el caso simétrico $\theta_1 = \theta_2 = 1$, el sistema presenta una reducción a un mapa unidimensional:

$$x_{t+1} = (1 - \alpha)x_t + \alpha(1 - x_t),$$

que es lineal y no presenta complejidad dinámica. Por ello, el interés se centra en el caso asimétrico, donde la interacción entre parámetros puede generar bifurcaciones y caos.

5.2. Puntos fijos y estabilidad

Una vez formulado el modelo de Kopel en su versión adimensional, el siguiente paso consiste en identificar sus puntos fijos y analizar su estabilidad local. Este análisis proporciona información fundamental sobre los posibles estados estacionarios del sistema y sobre la forma en que la dinámica responde a perturbaciones pequeñas.

Recordemos que el sistema dinámico en estudio es:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \alpha)x_t + \alpha[1 - \theta_1 y_t], \\ y_{t+1} = (1 - \beta)y_t + \beta[1 - \theta_2 x_t], \end{cases}$$

donde $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ y $\theta_1, \theta_2 > 0$.

Definición de punto fijo

Definición 5.4 (Punto fijo). Un punto $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es un *punto fijo* del sistema si

$$x^* = (1 - \alpha)x^* + \alpha[1 - \theta_1 y^*], \quad y^* = (1 - \beta)y^* + \beta[1 - \theta_2 x^*].$$

En términos económicos, un punto fijo representa un estado estacionario en el que ninguna de las empresas modifica su producción de una iteración a otra.

Cálculo de los puntos fijos

A partir de las ecuaciones de punto fijo, restando $(1 - \alpha)x^*$ a ambos lados en la primera y $(1 - \beta)y^*$ en la segunda, se obtiene:

$$\alpha x^* = \alpha(1 - \theta_1 y^*), \quad \beta y^* = \beta(1 - \theta_2 x^*).$$

Dado que $\alpha, \beta > 0$, podemos simplificar dividiendo por estos parámetros:

$$x^* = 1 - \theta_1 y^*, \quad y^* = 1 - \theta_2 x^*.$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$x^* = 1 - \theta_1 [1 - \theta_2 x^*] = 1 - \theta_1 + \theta_1 \theta_2 x^*.$$

Llevando los términos en x^* al mismo lado:

$$x^* - \theta_1 \theta_2 x^* = 1 - \theta_1,$$

$$x^*(1 - \theta_1 \theta_2) = 1 - \theta_1.$$

Por tanto:

$$x^* = \frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_1 \theta_2}.$$

De forma simétrica, sustituyendo x^* en $y^* = 1 - \theta_2 x^*$:

$$y^* = 1 - \theta_2 \cdot \frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_1 \theta_2} = \frac{1 - \theta_2}{1 - \theta_1 \theta_2}.$$

Proposición 5.5 (Existencia y unicidad). El sistema de Kopel presenta un único punto fijo

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_1 \theta_2}, \frac{1 - \theta_2}{1 - \theta_1 \theta_2} \right),$$

definido siempre que $\theta_1 \theta_2 \neq 1$.

Demostración. El cálculo anterior muestra que las ecuaciones de punto fijo constituyen un

sistema lineal con matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & 1 \end{pmatrix},$$

cuya determinante es $1 - \theta_1\theta_2$. Cuando este determinante es distinto de cero, el sistema tiene solución única, dada por la fórmula obtenida.

Viabilidad económica

En el contexto del modelo, solo resultan relevantes los puntos fijos con $x^* > 0$ y $y^* > 0$. Esto ocurre si:

$$\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_1\theta_2} > 0, \quad \frac{1 - \theta_2}{1 - \theta_1\theta_2} > 0.$$

Estas desigualdades se cumplen si $\theta_1, \theta_2 < 1$ o bien $\theta_1, \theta_2 > 1$, como ya se había mencionado en [3].

Análisis de estabilidad

Para estudiar la estabilidad local del punto fijo se emplea la matriz jacobiana del sistema.

Definición 5.6 (Matriz jacobiana). Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el mapa definido por el sistema de Kopel. Su *matriz jacobiana* en (x, y) es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

En nuestro caso:

$$F_1(x, y) = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \theta_1 y), \quad F_2(x, y) = (1 - \beta)y + \beta(1 - \theta_2 x).$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= 1 - \alpha, & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -\alpha\theta_1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= -\beta\theta_2, & \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz jacobiana es constante (independiente de (x, y)):

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha\theta_1 \\ -\beta\theta_2 & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

Condiciones de estabilidad local

Un punto fijo es localmente asintóticamente estable si todos los autovalores de J tienen módulo menor que 1.

Proposición 5.7 (Autovalores de J). Los autovalores λ_{\pm} de la matriz jacobiana J son las raíces del polinomio característico:

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0,$$

donde

$$\text{tr}(J) = (1 - \alpha) + (1 - \beta) = 2 - (\alpha + \beta),$$

$$\det(J) = (1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta\theta_1\theta_2.$$

Demostración. Se sustituye la definición de J en el cálculo de traza y determinante. El polinomio característico es inmediato a partir de la fórmula general para matrices 2×2 .

Criterio de estabilidad de Jury

Para que ambos autovalores estén en el disco unidad, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones de Jury:

$$1 + \text{tr}(J) + \det(J) > 0,$$

$$1 - \text{tr}(J) + \det(J) > 0,$$

$$1 - \det(J) > 0.$$

Sustituyendo la traza y determinante calculados:

$$1 + [2 - (\alpha + \beta)] + [(1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta\theta_1\theta_2] > 0,$$

$$1 - [2 - (\alpha + \beta)] + [(1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta\theta_1\theta_2] > 0,$$

$$1 - [(1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta\theta_1\theta_2] > 0.$$

Casos especiales

Observación 5.8 (Caso simétrico). Si $\alpha = \beta$ y $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, entonces

$$\text{tr}(J) = 2 - 2\alpha, \quad \det(J) = (1 - \alpha)^2 - \alpha^2\theta^2.$$

En este caso, las condiciones de estabilidad se simplifican notablemente y pueden expresarse directamente en función de α y θ .

Observación 5.9 (Límites de ajuste). Si $\alpha \rightarrow 0$ o $\beta \rightarrow 0$, el sistema se desacopla parcialmente y la estabilidad queda determinada por la empresa con tasa de ajuste positiva.

Diagramas de bifurcación unidimensionales

Con el objetivo de analizar la transición desde regímenes dinámicos simples hacia comportamientos complejos en el modelo de Kopel, se construyen diagramas de bifurcación

variando un único parámetro y manteniendo fijos los restantes.

En particular, se fijan los valores $\beta = 0,5$ y $\theta_1 = \theta_2 = 0,8$, y se considera al parámetro $\alpha \in (0, 1]$ como parámetro de control. Aunque el sistema es bidimensional, el diagrama de bifurcación se obtiene representando los valores asintóticos de una sola de las variables dinámicas, concretamente x_t , tras eliminar un régimen transitorio inicial.

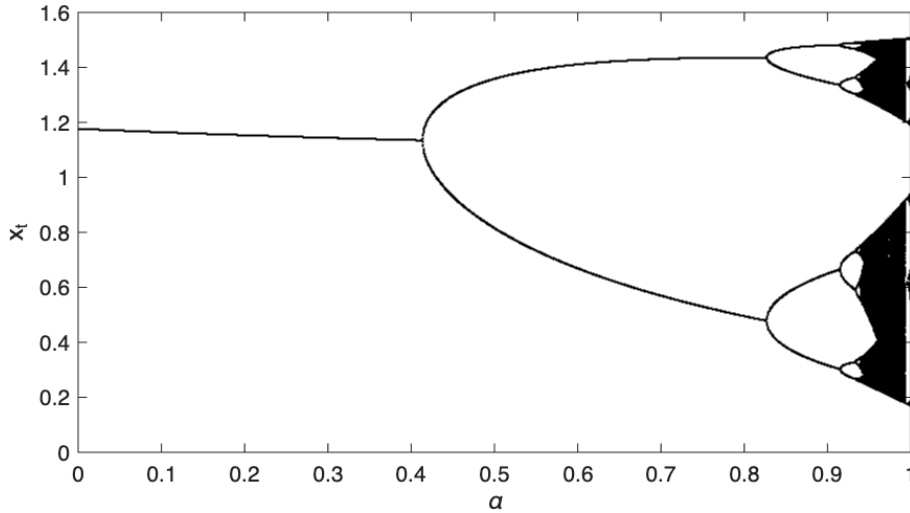


Figura 2: Diagrama de bifurcación del modelo de Kopel al variar el parámetro α , con $\beta = 0,5$ y $\theta_1 = \theta_2 = 0,8$. Se representan los valores asintóticos de la variable x_t tras descartar un régimen transitorio inicial.

En la Figura 2 se observa que, para valores pequeños de α , la dinámica converge a un punto fijo estable, reflejado por la presencia de una única rama en el diagrama. Al aumentar el valor del parámetro, dicho punto fijo pierde estabilidad y aparecen dos ramas diferenciadas, lo que indica la aparición de un ciclo periódico de periodo dos.

Para valores mayores de α , se observan nuevas separaciones de las ramas, compatibles con sucesivas duplicaciones de periodo. Finalmente, para valores suficientemente grandes de α , los valores asintóticos de x_t se distribuyen en un conjunto denso, interrumpido por ventanas donde reaparecen comportamientos periódicos, lo que sugiere la presencia de una dinámica altamente compleja, compatible con comportamiento caótico.

Curvas críticas y validación numérica

El análisis de estabilidad local del punto fijo del modelo de Kopel, basado en la matriz jacobiana, permite identificar de forma analítica las condiciones bajo las cuales dicho punto pierde estabilidad. En sistemas dinámicos discretos bidimensionales, estas condiciones pueden expresarse en términos del trazo y el determinante del Jacobiano y están asociadas a distintos tipos de bifurcaciones.

En particular, la pérdida de estabilidad del punto fijo puede producirse cuando se verifica alguna de las siguientes condiciones críticas: el cruce de un autovalor real por $\lambda = -1$, asociado a una bifurcación de duplicación de periodo, o el cruce de un par complejo

conjugado por el círculo unidad, correspondiente a una bifurcación de tipo Neimark–Sacker. Estas situaciones vienen dadas, respectivamente, por

$$\text{tr}(J) = -(1 + \det(J)), \quad \det(J) = 1.$$

Con el fin de validar numéricamente estos resultados analíticos, se representan en el plano de parámetros (θ_1, θ_2) las curvas críticas obtenidas a partir del Jacobiano y se comparan con la frontera numérica determinada por el cambio de signo del exponente de Lyapunov máximo, $\lambda_{\text{máx}} = 0$, manteniendo fijos los valores $\alpha = \beta = 0,5$.

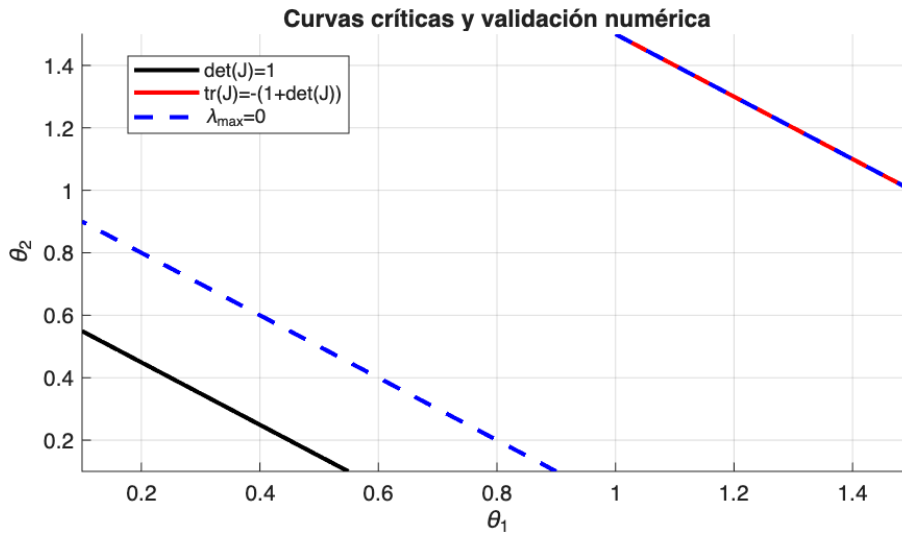


Figura 3: Curvas críticas del modelo de Kopel en el plano (θ_1, θ_2) para $\alpha = \beta = 0,5$. La curva negra corresponde a la condición $\det(J) = 1$, la curva roja a $\text{tr}(J) = -(1 + \det(J))$ y la línea discontinua azul indica la frontera numérica $\lambda_{\text{máx}} = 0$.

En la Figura 3 se observa una excelente concordancia entre las curvas críticas obtenidas analíticamente y la frontera numérica correspondiente a $\lambda_{\text{máx}} = 0$ en las regiones del plano donde se produce la pérdida de estabilidad del punto fijo. En particular, la coincidencia entre la condición analítica de duplicación de periodo y la frontera numérica pone de manifiesto que el análisis local predice correctamente la transición observada en la dinámica.

Las pequeñas discrepancias apreciables en otras zonas del plano pueden atribuirse a la naturaleza local del análisis basado en el Jacobiano, frente al carácter global del exponente de Lyapunov máximo, que captura propiedades asintóticas de la dinámica.

Conclusión de la sección

La combinación de análisis algebraico y exploración numérica revela un panorama bifurcacional complejo en el modelo de Kopel. La coexistencia de diferentes tipos de bifurcación y su interacción conducen a una rica variedad de comportamientos dinámicos, incluyendo caos determinista. Estas propiedades hacen del modelo un caso de estudio paradigmático para sistemas dinámicos aplicados a la economía.

5.3. Cálculo del exponente de Lyapunov máximo

El exponente de Lyapunov máximo (ELM) es una medida cuantitativa de la sensibilidad de un sistema dinámico a las condiciones iniciales. Un valor positivo de este exponente indica que dos trayectorias cercanas divergen exponencialmente en el tiempo, lo que se asocia con comportamiento caótico.

Definición general

Definición 5.10 (Exponente de Lyapunov máximo). Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto inicial. El *exponente de Lyapunov máximo* asociado a x_0 se define como:

$$\lambda_{\text{máx}}(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|},$$

donde $\delta x(0)$ es un vector infinitesimal que representa una perturbación inicial, y $\delta x(t)$ su evolución bajo la dinámica linealizada.

Observación 5.11. El límite anterior, cuando existe, es independiente de la norma elegida en \mathbb{R}^n .

Relación con la estabilidad

Proposición 5.12. Si $\lambda_{\text{máx}} < 0$, toda órbita suficientemente cercana converge exponencialmente a la órbita de referencia. Si $\lambda_{\text{máx}} = 0$, la separación es subexponencial y suele asociarse a movimientos cuasiperiódicos. Si $\lambda_{\text{máx}} > 0$, hay divergencia exponencial y, por tanto, sensibilidad a las condiciones iniciales.

Demostración. La afirmación es consecuencia directa de la definición y de la equivalencia entre estabilidad lineal y no lineal en sistemas C^1 en un entorno del punto fijo u órbita periódica.

Cálculo en mapas bidimensionales

En un mapa $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, el cálculo del ELM requiere iterar el sistema y, en cada paso, multiplicar la perturbación por la matriz jacobiana evaluada en el punto actual:

$$\delta x_{n+1} = DF(x_n) \cdot \delta x_n.$$

Si denotamos $\|\delta x_n\|$ la norma euclídea, el exponente se aproxima mediante:

$$\lambda_{\text{máx}} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \frac{\|\delta x_{n+1}\|}{\|\delta x_n\|},$$

tras un número N de iteraciones suficientemente grande.

Método de Benettin et al.

El método de Benettin et al. [2] es el procedimiento estándar para calcular todos los exponentes de Lyapunov en un sistema. Para el caso bidimensional, el cálculo del ELM se realiza así:

1. Elegir un punto inicial x_0 y una perturbación inicial δx_0 con $\|\delta x_0\| = 1$.

2. Iterar el sistema: $x_{n+1} = F(x_n)$.

3. Calcular la evolución linealizada: $\delta x_{n+1} = DF(x_n) \cdot \delta x_n$.

4. Normalizar δx_{n+1} :

$$r_{n+1} = \|\delta x_{n+1}\|, \quad \delta x_{n+1} \leftarrow \frac{\delta x_{n+1}}{r_{n+1}}.$$

5. Acumular $\log r_{n+1}$.

6. Repetir los pasos 2–5 hasta N iteraciones y calcular:

$$\lambda_{\text{máx}} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log r_n.$$

Observación 5.13. La normalización periódica evita problemas de desbordamiento numérico y no altera el valor del exponente, ya que este es invariante bajo cambios de escala en δx .

Aplicación al modelo de Kopel

El modelo de Kopel puede escribirse como:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + \alpha [R_1(x_t, y_t) - x_t], \\ y_{t+1} = y_t + \beta [R_2(x_t, y_t) - y_t], \end{cases}$$

donde R_1 y R_2 son las funciones de reacción lineales:

$$R_1(x, y) = \theta_1(1 - y), \quad R_2(x, y) = \theta_2(1 - x).$$

La matriz jacobiana es constante:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha\theta_1 \\ -\beta\theta_2 & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

En este caso, la iteración de la perturbación se simplifica a:

$$\delta z_{n+1} = J \cdot \delta z_n,$$

por lo que la norma crece (o decrece) a un ritmo constante. El ELM puede calcularse directamente a partir del valor absoluto del autovalor dominante de J :

$$\lambda_{\text{máx}} = \log \rho(J),$$

donde $\rho(J)$ es el radio espectral de J .

Proposición 5.14. En el modelo de Kopel con J constante, $\lambda_{\text{máx}} > 0$ si y solo si $\rho(J) > 1$.

Demostración. La iteración $\delta z_n = J^n \delta z_0$ da $\|\delta z_n\| \approx \rho(J)^n \|\delta z_0\|$ para n grande. Sustituyendo en la definición:

$$\lambda_{\text{máx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\rho(J)^n \|\delta z_0\|) = \log \rho(J).$$

Resultados numéricos

Dependencia con α Fijando $\beta = 0,5$, $\theta_1 = 0,8$, $\theta_2 = 0,8$, se observa que $\lambda_{\text{máx}}$ pasa de negativo a positivo en el valor de α que coincide con la bifurcación detectada en la sección 4.3.

Mapa de calor en el plano (θ_1, θ_2) Se construye un mapa de calor evaluando $\lambda_{\text{máx}}$ en cada punto de una malla de parámetros:

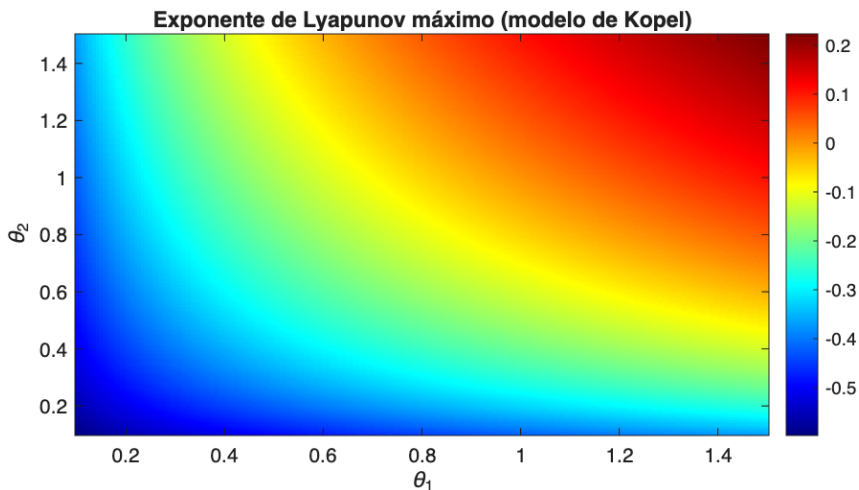


Figura 4: Mapa de calor del exponente de Lyapunov máximo en el plano (θ_1, θ_2) con $\alpha = \beta = 0,5$. Las regiones rojas indican $\lambda_{\text{máx}} > 0$ (caos).

Correspondencia con las regiones caóticas Comparando la Figura 4 con los diagramas de bifurcación obtenidos en 4.3, se observa que las regiones de $\lambda_{\text{máx}} > 0$ coinciden con las zonas donde se habían identificado atractores extraños.

Conclusión

El cálculo del exponente de Lyapunov máximo proporciona una herramienta robusta para detectar caos en el modelo de Kopel. En este caso, la simplicidad algebraica del jacobiano constante permite obtener resultados analíticos, mientras que la exploración numérica en el espacio de parámetros revela la estructura global de la dinámica caótica.

6. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo ha permitido profundizar en el estudio de los sistemas dinámicos discretos y comprender los mecanismos que originan el comportamiento caótico en modelos no lineales. A través de un recorrido que abarca desde la formulación teórica hasta la aplicación a un modelo económico concreto, se ha demostrado que el caos no es una anomalía matemática, sino una característica intrínseca de muchos sistemas deterministas.

En primer lugar, el marco teórico presentado en los capítulos iniciales proporciona una base sólida para entender la dinámica discreta. Las definiciones de estabilidad, conjunto invariante, bifurcación y atractor permiten clasificar de forma precisa los distintos tipos de comportamiento. La introducción del exponente de Lyapunov y del método de Benettin ha mostrado cómo cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales y cómo determinar de manera efectiva la presencia de caos en un sistema dado.

El estudio del mapa logístico ha servido como modelo de referencia para ilustrar los conceptos fundamentales. Se ha comprobado que, al aumentar el parámetro de control, el sistema experimenta una secuencia de bifurcaciones de duplicación de periodo que culmina en un régimen caótico. Este proceso —la llamada cascada de Feigenbaum— evidencia la universalidad del paso del orden al caos y permite observar de forma directa la pérdida de estabilidad de los puntos fijos. La correspondencia entre el diagrama de bifurcación y el diagrama del exponente de Lyapunov confirma que el signo del exponente de Lyapunov es un indicador preciso del tipo de comportamiento dinámico: negativo en regiones periódicas, nulo en los puntos críticos y positivo en zonas caóticas.

En el modelo de Kopel, el análisis bidimensional ha revelado una dinámica mucho más rica que en el caso unidimensional. Dependiendo de los valores de los parámetros, el sistema puede presentar puntos fijos estables, ciclos de diferentes periodos o comportamientos caóticos caracterizados por la existencia de atractores extraños. Los exponentes de Lyapunov calculados mediante el método de Benettin han permitido identificar con precisión los intervalos de parámetros donde el sistema exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales y comportamiento caótico persistente.

Desde una perspectiva económica, estos resultados sugieren que incluso en modelos deterministas simples, donde los agentes actúan racionalmente y con información local, pueden emerger oscilaciones irregulares e impredecibles. El caos económico, por tanto, no requiere de factores externos o aleatorios: basta con la presencia de no linealidades y retroalimentaciones en las decisiones de los agentes.

En términos generales, el trabajo demuestra la universalidad del caos en sistemas dinámicos no lineales y la potencia de las herramientas matemáticas para su análisis. La teoría del caos permite entender mejor la complejidad, la sensibilidad y la imprevisibilidad observadas en sistemas reales, desde poblaciones biológicas hasta mercados financieros.

Como líneas futuras de investigación, resultaría interesante profundizar en:

el control y sincronización del caos, con el objetivo de estabilizar comportamientos deseados; el estudio de la robustez de los atractores frente a perturbaciones externas; y

la extensión del análisis a sistemas de mayor dimensión o con retardos temporales, donde surgen fenómenos aún más complejos.

En definitiva, este trabajo evidencia que la frontera entre orden y caos no solo es una cuestión teórica, sino una realidad omnipresente en los sistemas dinámicos del mundo real, cuya comprensión requiere la integración de la matemática, la simulación y la interpretación cualitativa del comportamiento no lineal.

Referencias

- [1] Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag.
- [2] Benettin, G., Calgagni, L., Giorgilli, A., & Strelcyn, J.-M. (1980). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. *Meccanica*, 15(1), 9–20.
- [3] Cánovas, J. S., & Guillermo, M. M. (2018). On the dynamics of Kopel’s Cournot duopoly model. *Applied Mathematics and Computation*, 330, 292–306.
- [4] Kopel, M. (1996). Simple and complex adjustment dynamics in Cournot duopoly models. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(11), 2031–2048.
- [5] Kuznetsov, Y. A. (1995). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag.
- [6] Layek, G. C. (2015). *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer.