Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

El polinomio de Taylor en Bachillerato

Autor: Álvaro Martínez García

Director: Dr. Sergi Muria Maldonado
Realizado en: Departamento de Didáctica

Barcelona, 18 de enero de 2020

Abstract

This project is about the Taylor polynomial. The introduction talks about the historical context amd then is divided in two parts: the mathematical (is theorical) and the didactic part. At the first part (the mathematical) the Taylor polynomial is introduced by the definitions of the necessary concepts, it is presented in all of its varieties and their applications are reviewed. Finally, there is a brief subsection about some ambits diferents to the math to see how works the Taylor polynomial. At the second part (the dictactial), it is proposed an activity to perform in a secundary school with the students of second of bachillerato and after that, there is an explanation of how to use the Geogebra in this aspect.

Resumen

Este trabajo trata sobre el polinomio Taylor. Comienza con un contexto histórico para luego dividirse en dos grandes partes, una teórica matemática y la otra didáctica. En la primera parte, introducimos el polinomio de Taylor mediante las definiciones de los conceptos necesarios, lo presentamos en todas sus variedades y repasamos sus aplicaciones. Por último, hacemos un breve inciso en algunos ámbitos, diferentes a las matemáticas, para ver como se trabaja con el polinomio de Taylor. En la parte didáctica, proponemos una actividad para llevarla a cabo en un instituto con alumnos de segundo de Bachillerato y realizamos una corta explicación de como utilizar el GeoGebra para este tema en concreto.

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi tutor Sergi Múria por haberme asesorado en este trabajo. También quisiera agradecer a Juan Carlos Rincón, profesor del instituto Josep Lluís Sert, haberme abierto las puertas de su clase durante 2 horas.

En segundo lugar, me gustaría agradecer las aportaciones a este trabajo de mis compañeros y amigos Enric y Natxo. También a Marc por haberme ayudado en mis inicios con LateX. Por último, agradecer a mis padres, a mi hermana y a mis abuelos su apoyo en todo momento.

Índice

1. Introducción

El presente trabajo se basa en el polinomio de Taylor, que es una herramienta tan útil como usada en matemáticas, y en todas sus aplicaciones. Estas aplicaciones van desde, aproximar valores y calcular límites hasta desigualdades y clasificación de extremos relativos de una función, pasando por la exponenciación de una matriz y el método de Newton. También las podemos encontrar en ámbitos muy distintos dentro de las ciencias como hemos podido comprobar en este trabajo.

Este polinomio tiene muchas aplicaciones en matemáticas pero también en física, economia, ingenierias varias, programación e incluso en medicina. Un buen ejemplo es un bono financiero, que es una forma de financiarse que tienen las empresas, el precio del cuál se calcula mediante una fórmula pero si nos encontramos con grandes variaciones en los tipos de interés, la alternativa es aproximar el precio mediante el polinomio de Taylor de orden dos.

Presentamos el polinomio de Taylor en todas sus variedades, es decir, la versión en los números reales como la de los números complejos y también las versiones de una y varias variables con su teorema de la fórmula de Taylor correspondiente. Utilizamos el polinomio para demostrar fórmulas e identidades muy utilizadas en trigonometría, como la del coseno del ángulo doble, y en los complejos como la fórmula de Euler.

El esquema de este trabajo se divide en dos vertientes: la matemática y la didáctica. Dentro de la matemática, encontramos primero un contexto histórico para situar el polinomio de Taylor y ver de donde surgió, a continuació se presenta el polinomio de taylor en todas sus formas y sus aplicaciones. Para acabar esta parte, también vemos aplicaciones fuera de las matemáticas. En el otro brazo del esquema, hallamos una propuesta didáctica dirigida a los alumnos de Bachillerato.

Por último, la actividad didáctica, que se ha propuesto en este trabajo, la realizé en el instituto Josep Lluís Sert de Castelldefels que es donde cursé tanto la ESO como bachillerato. Fué toda una experiencia que no hizo más que confirmar lo que ya sabía desde bien pequeño: mi vocación por la enseñanza, y en especial, de las matemáticas.

2. Objetivos

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

- Construir el polinomio de Taylor y ver todas sus aplicaciones dentro de las matemáticas.
- Dar a conocer los diferentes ámbitos en los que se trabaja con el polinomio de Taylor.
- Introducir el GeoGebra, como recurso matemático, a los estudiantes para darles una visión geométrica del polinomio de Taylor.
- Ampliar los conocimientos de los alumnos de bachillerato mediante teoría y actividades relacionadas con el polinomio de Taylor.
- Motivar a los alumnos en el campo de las matemáticas mediante la conexión con otras ciencias, como por ejemplo la física, mediante el polinomio de Taylor.

3. Contexto Histórico

3.1. Biografía

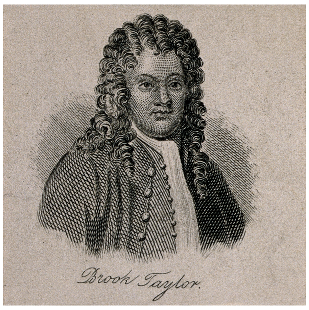

Figura 1: Brook Taylor
Fuente:Wikimedia Commons

Brook Taylor nació el 18 de Agosto de 1685 en Edmonton (Inglaterra). Taylor pertenecía a una familia bastante adinerada ya que su abuelo paterno Natheniel Taylor era miembro de la Asamblea de Oliver Cromwell, quien fuera Primer Lord Protector de la Commonwealth de Inglaterra, Escocia e Irlanda entre 1653 y 1658, donde representaba a Bedfordshire y su madre era hija de Sir John Tempest, Sheriff de Yorkshire y Lincolnshire.

Su padre le traspasó su interés por la música y la pintura, áreas en las cuáles él acabaría aplicando sus conocimientos matemáticos. Taylor empezó a estudiar en St John's College Cambridge el 3 de Abril de 1703 pero antes había gozado de tutores privados en casa debido a la privilegiada posición económica de su familia. Cuándo entró en esta escuela ya tenía una muy buena base de matemáticas y de clásicos. Durante su estancia en Cambridge, Taylor indagó mucho en las matemáticas. Se graduó en derecho en 1709 pero un año antes ya había encontrado una solución al problema del centro de oscilación, publicada en 1714 y que hasta 1724 fue la disputa prioritaria con Johann Bernoulli. Gracias a las cartas que se intercambiaba con John Machin y John Keill podemos saber algunas de sus reflexiones sobre algún que otro problema matemático.

En 1712 fue admitido en la Royal Society, no fue por sus resultados publicados sino por su experiencia que Machin y Keill entre otros ya le reconocían. También fue miembro del comité que debía decidir quién había sido el inventor del cálculo: Newton o Leibnitz. En 1714 fue elegido secretario de la Royal Society, cargo que mantuvo hasta su renuncia en 1718 por motivos de salud y por falta de interés en ocupar una posición tan exigente. Este período fue muy productivo matemáticamente hablando ya que en 1715 se publicaron dos libros: *Methodus incrementorum directa et inversa* y *Linear Perspective* que son muy importantes en la historia de las matemáticas, en el primero está la serie de Taylor que es el concepto fundamental de este trabajo.

Viajó mucho a Francia debido a su salud y para visitar a amigos suyos. Allí conoció a Pierre Rémond de Montmort y a De Moivre, con los que acabaría comunicándose mediante cartas para discutir temas sobre probabilidad. Escribió trece artículos de temas diversos como experimentos en acción capilar, magnetismo y termómetros. En 1715, mediante un experimento, descubrió la ley de atracción magnética y, en 1717 también descubriría un método mejor, pero no probado, para aproximar las raíces de una ecuación ya que encontró una nueva forma de calcular logaritmos.

En su vida sentimental sólo hubo dos mujeres. La primera, Brydges de Wallington, con la que se casó en Surrey en 1721. Esta boda provocó que padre e hijo se dejaran de hablar ya que esta mujer provenía de buena familia pero poco adinerada. Brydges murió en 1723 durante el parto donde también falleció el hijo que esperaba junto a Brook. En ese momento, Taylor retomó la relación con su padre y volvió a vivir con él. En 1725, Taylor contrajo matrimonio con su segunda esposa, Sabetta Sawbridge de Olantigh, en Kent. En este caso, si fue bien visto por parte de su padre que murió cuatro años más tarde. Por desgracia las tragedias en la vida de Taylor aún no habían terminado, un año después moriría su esposa, otra vez durante el parto pero esta vez la hija, Elizabeth, si que sobrevivió.

Taylor añadió, en 1715, una nueva rama a las matemáticas: El cálculo de las diferencias finitas. También inventó la integración por partes y descubrió lo que hoy en día se conoce como la serie de Taylor. Tres cosas que podemos encontrar en uno de los libros anteriormente mencionados, *Methodus incrementorum directa et inversa*. La primera versión del Teorema de Taylor la podemos encontrar en una carta enviada a Machin en 1712. En el libro que acabamos de mencionar hay dos versiones del teorema, la primera que es una generalización del método de Halley para aproximar las raíces de la ecuación de Kepler y la segunda, es un método para expandir soluciones de ecuaciones de flujo en series infinitas. Matemáticos como Newton, Leibniz, Johann Bernouilli y de Moivre, que trabajaron de manera independiente, dieron con variantes del teorema. En 1772, Lagrange reconoce la importancia del teorema al declararlo principio básico del cálculo diferencial. La primera persona que usó el nombre de "serie de Taylor"fue Lhulier en 1786. Lagrange y Cauchy obtuvieron expresiones explícitas del error que se comete en las aproximaciones y proporcionaron la versión actual del Teorema de Taylor.

En *Linear Prespective*, encontramos principios básicos de la perspectiva. Tiene una segunda edición que se titula: *Los nuevos principios de la perspectiva lineal*, donde trata los puntos de fuga. Según Taylor, el punto de fuga de una línea, que no es paralelo al plano de la imagen, es el lugar donde se intersecan una línea a través del ojo paralela a la dada y el plano que contiene la imagen. También definió la línea de fuga a un plano dado (no paralelo al plano de la imagen), como la intersección de el plano dado y de uno paralelo a éste a través del ojo. El teorema más importante de la perspectiva lineal de Taylor dice que la proyección de una recta que no sea paralela al plano de la imagen pasa por su intersección y su punto de fuga. Brook trabajó también en el problema inverso que es considerado como las bases de la geometría proyectiva y descriptiva.

Taylor nunca gozó de buena salud, pero ésta se deterioró aún más después de la muerte de su segunda esposa. Brook Taylor fallece el 29 de diciembre de 1731 en Somerset House (Londres) a los 46 años, dejando un gran legado en la música, la pintura, las leyes y sobretodo en las matemáticas.

3.2. Contemporáneos

Uno de los grandes rivales de Taylor fue Johann Bernoulli. Cuando Taylor publicó *Methodus incrementorum directa et inversa*, Leibniz escribió a Bernoulli para hablarle del libro y avisarle de un posible plagio, pero éste ya había oído hablar del libro y sin leerlo le contestó criticando tanto a Taylor como al libro. Leibniz, sin embargo, respondió diciendo que consideraba que Brook no debería ser secretario de la Royal Society. Bernoulli leyó el libro y volvió a escribir a Leibniz para decirle que al leerlo se dió cuenta que Taylor propone un método, para determinar el centro de oscilación de un péndulo compuesto, que según él ya estaba en su teoría publicada en el Acta de 1714. En 1716, Bernoulli publica el artículo *Epistola pro eminente matemático Dn Johanne Bernoulli, contra quendam ex Anglia antagonistam scropta*, que es un ataque anónimo contra Taylor, donde dice literalmente "Dios santo, qué pretende el escritor con esa fingida oscuridad suya, en la que oculta asuntos extremadamente claros por su propia naturaleza? Sin duda para ocultar su celo por el robo: por lo que yo entiendo, por lo que sé, percibo en él a través de la más densa nube de oscuridad nada más que lo que nos han robado. Lo que él dice sobre los isoperímetros se lo debo a mi hermano; lo que trata sobre las catenarias, velas, paños llenos de agua, lo tiene de mí". En 1718, Taylor escribe, de manera anónima, el artículo *Bibliothéque Angloise ou Histoire Littéraire de la Grande Bretagne* donde ataca a Bernoulli diciendo cosas como "no es razonable esperar de un autor que mencione expresamente todas las luminarias de las que podría haber tomado prestado, y aquellos que han escrito antes que él, principalmente cuando sus obras son tan conocidas. El Sr. Bernoulli en particular no tiene el menor motivo para quejarse del autor a este respecto, ya que ha demostrado suficientemente la inclinación que ha tenido para hacerle justicia, por la manera en que lo menciona en un extracto que ha dado de su libro en "Transacciones filosóficas"."

Taylor fue discípulo directo de Newton ya que éste fue su maestro en Cambridge. Como ya dijimos anteriormente, Taylor entró en la Royal Society y fue parte del comité que debía decidir el inventor del cálculo y Taylor apoyó al que fuera su maestro. Newton trabajó en el teorema de Taylor y hasta tuvo su propia versión.

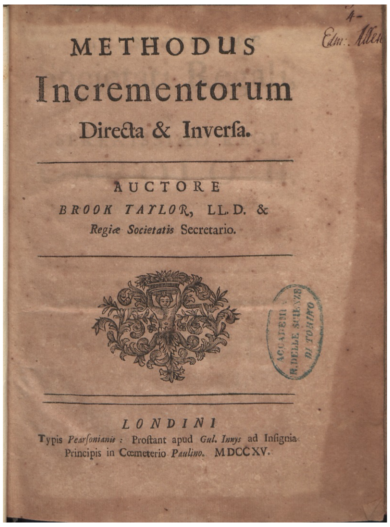

Figura 2: *Methodus Incrementorum Directa et inversa*

Fuente: Wikipedia

4. Motivación de la propuesta

La elección de este trabajo está basada, principalmente en dos razones:

La primera, durante toda la carrera siempre me gustaron más y se me dieron mejor las asignaturas de análisis que el resto. Desde Introducción al cálculo diferencial, pasando por Análisis Matemático y hasta Análisis funcional y real. Cuando llegó el momento de escoger optativas no tuve dudas como tampoco las tuve en que mi TFG sería de análisis.

La otra razón es más vocacional, desde bien pequeño siempre quise ser profesor de matemáticas debido a que me satisface transmitir mis conocimientos y comprobar que hay personas que aprenden cosas gracias a mí. He podido conocer y apreciar esta profesión tanto por dentro como por fuera ya que mis padres son profesores. Por tanto tengo la visión general, es decir, aquella en la que se ve que un profesor se dedica a explicar una materia, hacer y corregir exámenes. Pero la docencia, va mucho más allá, tiene una cara oculta que pocos pueden ver, no sólo es la labor en el instituto sino que ésta requiere un trabajo previo y, muchas veces también, a posteriori en casa. En conclusión, la docencia es un trabajo más complejo de lo que puede paracer pero aún a sabiendas de todo eso, me gustaría dedicarme a ello.

Por todo ello, cuando tuve que escoger el tema de este trabajo, no dudé a que departamento dirigirme: Didáctica.
Una vez decidido el departamento y después de que me explicaran la estructura de trabajo que proponían, sólo quedaba escoger el tema. Debido a que, como ya dije anteriormente, la parte de las Matemáticas que más me gusta es el análisis y a que los conocimientos que se imparten en Bachillerato son suficientes para introducir el Polinomio de Taylor, me decanté por ese tema.

5. Fundamentos Matemáticos del Teorema de Taylor

A veces analizar una función puede ser muy difícil. Un método, muy útil y utilizado, que nos puede facilitar el trabajo es aproximar la función en cuestión por polinomios ya que éstos son las funciones reales más fáciles de evaluar. Cuando utilizamos este método, evidentemente perdemos exactitud pero ganamos en operatividad.

Podemos diferenciar entre dos tipos de aproximaciones de funciones por polinomios: locales y globales. Las primeras son aquellas en la que el polinomio que construimos coincide con la función en un único punto y sólo nos servirá para valores próximos porque a medida que nos alejemos es probable que el polinomio y la función disten cada vez más. Las globales, sin embargo, son las que el polinomio y la función coinciden a lo largo de un intervalo. Nosotros construiremos el polinomio de Taylor que es una aproximación local de una función que coincide en todas sus derivadas con él.

5.1. Definiciones básicas

Definición 5.1. *Diremos que un polinomio p(x) tiene orden de contacto superior a m con la función f(x) en el punto* x_0 *si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{|x - x_0|^m} = 0 \tag{5.1}$$

Definición 5.2. *a)Una función f es de* ***clase 1*** *en a si es derivable en ese punto y su derivada es continua también en ese punto.*

b)Una función f es de ***clase n****,* $f \in \mathcal{C}^1$*, si admite derivada hasta de orden n y son todas continuas.*

c)Una función f es de ***clase*** ∞*,* $f \in \mathcal{C}^\infty$*, si admite derivada de cualquier orden siendo todas continuas.*

5.2. Polinomio de Taylor

Definición 5.3. *Dada una función f derivable* $n-1$ *veces en un intervalo I y un punto* $x_0 \in I$ *donde* $f^{(n-1)}$ *es derivable, el polinomio*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{5.2}$$

se llama ***polinomio de Taylor de grado n de f en el punto*** x_0*.*

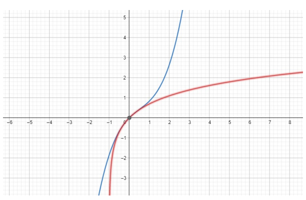

Figura 3: f(x)= ln(x+1) y su polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x = 0$

Teorema 5.4. *El polinomio de Taylor de grado n de una función f derivable $n-1$ veces en el punto x_0 tiene orden de contacto superior a n con f en el punto x_0.*

Demostración. Sea $p(x)$ el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto x_0. Tenemos que ver que

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{5.3}$$

(el caso del otro límite lateral es análogo), para ello aplicaremos de manera reiterada la regla de *l'Hôpital*. Cuando hayamos derivado $n-1$ veces, nos quedará:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)]}{(x-x_0)} \tag{5.4}$$

Y ese límite es 0 por el hecho de ser $f^{(n-1)}$ derivable en el punto x_0, que es lo que queríamos ver. □

Observación 5.5. El polinomio de Taylor $p(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual a n que tiene orden de contacto superior a n con f en el punto x_0.

Demostración. Suponemos que $q(x)$ es otro polinomio con la misma propiedad, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-q(x)}{|x-x_0|^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-f(x)}{|x-x_0|^n} + \lim_{x\to x_0} \frac{q(x)-f(x)}{|x-x_0|^n} = 0$$

Consideramos el polinomio $P(x) = p(x) - q(x)$ que tiene grado como mucho n, por tanto lo podemos expresar como

$$P(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n, \qquad A_0, A_1, \cdots, A_n \in \mathbb{R}$$

Así,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n}{|x-x_0|^n} = 0$$

La única manera de que ese límite sea 0 es que los coeficientes sean $A_0 = A_1 = \cdots = A_n = 0$ y entonces $P(x) = 0$ y $p(x) = q(x)$. □

Proposición 5.6. ***(Existencia y unicidad del polinomio de Taylor)*** *Sea f una función n veces derivable en el punto x_0, entonces existe un único polinomio P(x) de grado menor o igual a n cumpliendo: $P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Ese polinomio es el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto x_0.*

Demostración. Como $\left\{1, (x-x_0), (x-x_0)^2, \ldots, (x-x_0)^n\right\}$ es base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n, podemos escribir cualquier polinomio de grado menor o igual a n de manera única como:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

Para demostrar que solo existe un polinomio que cumple las condiciones de la proposición veremos que los coeficientes de $P(x)$ se pueden determinar de manera unívoca aplicando las condiciones anteriormente mencionadas. Tenemos que $P(x_0) = a_0$ y queremos que $P(x_0) = f(x_0)$, entonces $a_0 = f(x_0)$. Ahora si calculamos la derivada de $P(x)$, obtenemos:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{(n-1)}$$

y aplicando la condición $P'(x_0) = f'(x_0)$, tenemos que $a_1 = f'(x_0)$. Hacemos lo mismo para la segunda derivada y obtenemos que $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$. Succesivamente tendremos que $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ para $k = 0, \dots, n$. Por tanto, solo existe un único polinomio que cumple las condiciones que pedimos y es:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5.5}$$

que es el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto x_0. □

Propiedades:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios de Taylor de grado n en x_0 de las funciones f y g respectivamente.

1. El polinomio de Taylor de $f + g$ de grado n en x_0 es $P(x) + Q(x)$.

2. El polinomio de Taylor de fg de grado n en x_0 es la parte hasta grado n del polinomio producto de $P(x)$ y $Q(x)$.

3. El polinomio de Taylor de f/g de grado n en x_0 es $P(x)/Q(x)$ donde $P(x) y Q(x)$ están ordenados de la potencia menor a la mayor hasta llegar al grado n en el cociente.

Definición 5.7. *Sea f una función n veces derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. El resto de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0 es:*

$$R(x) = f(x) - P(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \tag{5.6}$$

Observación 5.8. El término del resto también se puede ver como el error de aproximación de f por $P(x)$.

Teorema 5.9. ***(La fórmula de Taylor)*** *Sea f una función derivable n + 1 veces en el intervalo I y sean x y $x_0 \in I$. Entonces existe c entre x y x_0 tal que*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R(x) \tag{5.7}$$

donde

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{5.8}$$

Demostración. Definimos la función $h : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ como

$$h(s) = f(s) + \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(s)}{i!}(x - s)^i$$

Como f es de clase $n+1$ entonces h es contínua y derivable. También, $h(x_0) = P(x)$ donde $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0 y $h(x) = f(x)$. Si derivamos h obtenemos:

$$h'(s) = f'(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i+1)}(s)}{i!}(x - s)^i - \sum_{i=1}^{n} i\frac{f^{(i)}(s)}{i!}(x - s)^{i-1} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x - s)^n$$

Aplicamos el Teorema del valor medio de Cauchy a las funciones h y $g(s)=(x-s)^{n+1}$ y por tanto, existe un punto c $\in [x_0,x]$ tal que

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{h'(c)}{g'(c)}$$

Pero $\frac{h'(c)}{g'(c)}=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ y $g(x)-g(x_0)=(x-x)^{n+1}-(x-x_0)^{n+1}=-(x-x_0)^{n+1}$.

Así pues:

$$f(x)-P(x)=h(x)-h(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

□

Observación 5.10. (Desarrollo de Taylor de una integral)

Si $f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ entonces:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}$$

5.3. Polinomio de Taylor en diversas variables

Hasta ahora hemos hablado del Polinomio de Taylor para una variable pero veremos que también existe para varias variables. Veamos primero el caso de 2 variables y luego lo generalizamos para n variables:

Sea f una función de dos variables y (a,b)$\in \mathbb{R}^2$, entonces el polinomio de Taylor de grado m de f alrededor del punto (a,b) lo escribiremos como:

$$P(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b))+\cdots+\frac{1}{m!}(\dots)$$

Ya que hemos supuesto que f tiene unas propiedades tales que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Ahora el caso de n variables es simplemente una generalización de lo anterior:

Supongamos que f es una función de n variables y $(a_1,\dots,a_n)\in \mathbb{R}^n$. El polinomio de Taylor de grado m de f alrededor de a=$(a_1,\dots,a_n)$ es:

$$P(x)=f(a)+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)(x_1-a_1)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)(x_1-a_1)(x_2-a_2)+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)(x_n-a_n)^2+\cdots+\frac{1}{m!}(\dots)$$

donde $x=(x_1,\dots,x_n)$.

Ejemplo 5.11. Sea $f(x,y) = e^y sin(x+y)$. Vamos a calcular el polinomio de taylor de f de grado 2 alrededor de (0,0).

Calculamos las derivadas:

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y cos(x+y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y(sin(x+y) + cos(x+y))$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^y sin(x+y)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^y cos(x+y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y(cos(x+y) - sin(x+y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Entonces el polinomio de Taylor de grado 2 de f alrededor de (0,0) es:

$$P(x,y) = x + y + \tfrac{1}{2}(2y^2 + 2xy) = x + y + y^2 + xy$$

Antes hemos visto la versión de una variable del teorema de Taylor pero también existe la versión de varias variables:

Teorema 5.12. *Sea B una bola de $\mathbb{R}^n$ centrada en x_0 y f una función definida sobre la clausura de B tal que sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son contínuas $\forall s \in B$. Entonces:*

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^k}(x - x_0)^k + \sum_{|k|=n+1} R_k(x)(x - x_0)^k$$

donde:

$$|R_k(x)| \leq sup_{y \in \bar{B}} \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(y)}{\partial x^k} \right|$$

Demostración. Consideramos una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, que podemos suponer de clase $\mathcal{C}^\infty$. Sea $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial tal que $r(t) = a + ut$. Ponemos $r(t) = y$ y $g(t) = f[r(t)]$, entonces $g'(t) = \nabla f(y) r'(t)$. Si volvemos a derivar:

$$g''(t) = u_1 \left[D_{11} f(y) u_1 + \cdots + D_{1n} f(y) u_n\right] + \cdots + u_n \left[D_{n1} f(y) u_1 + \cdots + D_{nn} f(y) u_n\right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_j \partial x_i} u_j u_i$$

Por tanto, si derivamos sucesivamente observamos que podemos poner $g^{(n)}(t) = (\nabla f(y) u)^n$ donde el superíndice del gradiente indica las veces que lo hacemos. Como g es una función de una variable podemos hacer su desarrollo de Taylor, tal y como ya hemos visto, alrededor del 0 para obtener su serie de McLaurin:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2} t^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

Si $t = 1$ y substituimos las derivadas que hemos calculado, obtenemos:

$$f(a+u) = f(a) + \nabla f(a) u + \frac{(\nabla f(a) u)^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\nabla f(a) u)^i}{i!}$$

que es una expresión equivalente a la buscada. □

5.4. Interpolación de Taylor

Las hipótesis del problema de interpolación de Taylor son:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\quad n$ veces derivable en $[a, b]$
- $x_0 \in [a, b]$
- $a_i = f^{(i)}(x_0)$ $\quad$ donde $\quad i = 0, \ldots, n.$

Queremos encontrar un polinomio de grado más pequeño o igual a n tal que $P(x_0) = a_0,\ \ P'(x_0) = a_1,\ \ \ldots,\ \ P^{(n)}(x_0) = a_n$. Gracias al teorema fundamental del cálculo podemos ver la existencia, la unicidad y el error de este polinomio.

En el caso del polinomio de grado 0, aplicando la fórmula

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(y)dy \tag{5.9}$$

obtenemos que la única solución posible al problema de interpolación de Taylor es $P(x) = f(x_0)$.
En el caso de grado n, después de integrar por partes succesivamente en la fórmula anterior, obtenemos que el polinomio buscado es:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{5.10}$$

que es lo que conocemos como polinomio de Taylor de grado n de f alrededor de x_0.

5.5. Polinomio de Taylor y números complejos

El polinomio de Taylor no sólo se puede definir en los reales sino que también en los complejos. Definiremos el polinomio en los complejos de tal manera que al restringirlo a los reales nos dará lo mismo que hasta ahora.

Teorema 5.13. ***Teorema de Taylor para números complejos***

Sea f una función analítica en el disco $|z - z_0| < R$ (centrado en z_0 y de radio R). Entonces el desarrollo de Taylor de $f(z)$ será

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{f^{(i)}(z_0)}{i!}(z - z_0)^i$$

Observaciones 5.14. :

1. Lo único que ha variado respecto la versión real es que ahora tenemos una función que es diferenciable en un disco y no en un intervalo.

2. Las series de Taylor con $z_0 = 0$ son conocidas como **Series de Maclaurin**.

Ejemplo 5.15. Vamos a encontrar la serie de Maclaurin de $f(z) = cos(z)$.

Sabemos que $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Por tanto debemos calcular el desarrollo de Taylor de $f(z) = e^z$ y substituir z por iz y $-iz$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Entonce obtenemos que:

$$cos(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{i^n z^n}{n!}$$

Pero $[1+(-1)^n]$ es diferente de cero sólo si n es par y entonces $i^n = i^{2n} = (-1)^n$. Así que $cos(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}$

El polinomio de taylor también nos sirve para demostrar algunas igualdades de números complejos muy útiles como las que veremos a continuación:

Fórmula de Euler

$$e^{ix} = cosx + i\ sinx \tag{5.11}$$

Ahora para ver esta igualdad haremos el desarrollo de Taylor de las tres funciones involucradas:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots \tag{5.12}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{5.13}$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{5.14}$$

Utilizando que $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \ldots$ resulta:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{-x^2}{2!} + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{-x^6}{6!} + \ldots \tag{5.15}$$

Por tanto:

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots) + i\ (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) = cosx + i\ sinx \tag{5.16}$$

Esta fórmula se usa para poder representar los números complejos en coordenadas polares y también para poder definir el logaritmo de números negativos y complejos. El valor principal del logaritmo de un número complejo es:

$$Logz = ln\ r + i\theta = ln|z| + i\ Argz \tag{5.17}$$

A partir de la fórmula que hemos demostrado también podemos obtener la **identidad de Euler** ($e^{i\pi} = -1$), únicamente hemos de substituir la x por π y entonces como $cos\pi = -1$ y $sin\pi = 0$ tenemos la igualdad buscada.

5.6. Polinomio de Taylor y trigonometría

Nos ayudaremos del polinomio de Taylor para demostrar algunas identidades trigonométricas.

Identidad trigonométrica fundamental: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

Para ver la igualdad ponemos $f(x) = sin^2(x)$ y $g(x) = cos^2(x)$ y calculamos los correspondientes polinomios de Taylor alrededor del 0.

Para $f(x)$ obtenemos que su polinomio de Taylor es $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{(2i-1)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}(-1)^{i+1}$. En cambio, para $g(x)$ el polinomio de Taylor es $1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(2i-1)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}(-1)^{i}$. Esto es debido a que $f'(x) = 2sin(x)cos(x)$ pero $g'(x) = -2sin(x)cos(x)$ y entonces en ambos casos las derivadas de orden impar se anularán en el 0 y las de orden par coincidirán cambiadas de signo. Ahora si sumamos las dos expresiones obtenidas nos quedará el 1 de la segunda expresión y por tanto obtenemos la identidad buscada.

Identidad coseno del ángulo doble: $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
Como sabemos que el polinomio de Taylor de $f(x) = cos(x)$ es $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$ entonces el de $f(x) = cos(2x)$ es $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\, 2^{(2i)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$. Aprovechamos lo obtenido anteriormente y entonces $cos^2(x) - sen^2(x) = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(2i-1)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}(-1)^i\right) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(2i-1)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}(-1)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i 2^{(2i)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$. Así pues llegamos a la igualdad deseada.

Identidades del coseno y el seno de la suma de dos ángulos: $sen(x + y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$ **y** $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$

Si intentamos llegar a la igualdad utilizando un procedimiento similar a los anteriores nos encontramos que tenemos que hacer el productor de dos polinomios infinitos, cosa que tiene bastante complejidad. Es por eso que vamos a proponer otro método para demostrarlo, utilizaremos la fórmula de Euler que ya demostramos en otro apartado de este trabajo:

$e^{i(x+y)} = cos(x + y) + i\ sen(x + y)$ pero también $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$. Es decir, debemos hacer el producto $e^{ix} \cdot e^{iy}$ e igualarlo a $cos(x + y) + i\ sen(x + y)$.

$e^{ix} \cdot e^{iy} = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) + i\ (cos(x)sen(y) + sen(x)cos(y))$ y entonces $cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) + i\ (cos(x)sen(y) + sen(x)cos(y)) = cos(x+y) + i\ sen(x+y)$.

Por último igualando las partes reales y las partes imaginárias de cada uno obtenemos las identidades buscadas. las identidades de la resta de dos ángulos se demuestran de manera análoga. La identidad del coseno del ángulo doble, que hemos demostrado, también se puede ver poniendo $cos(2x) = cos(x + x)$ y aplicando la identidad del coseno de la suma de dos ángulos y lo mismo para el seno del ángulo doble.

5.7. Aplicaciones

5.7.1. Aproximación de valores

Una de las aplicaciones del polinomio de Taylor es aproximar valores f(x) que no sabemos calcular por valores P(x) de manera que cometemos un error que también sabemos calcular. A continuación, veremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 Vamos a aproximar $\sqrt{2}$ por el polinomio de Taylor grado 3 de $f(x) = \sqrt{x+1}$ alrededor de $x_0 = 0$. El polinomio de Taylor buscado es:

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

como $f(1) = \sqrt{2}$ una aproximación de $\sqrt{2}$ es $P(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. El error cometido en esta aproximación es $|\sqrt{2} - P(1)| \approx 0{,}023$.

Ejemplo 2 Ahora aproximaremos $\cos(1)$ por el polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x) = \cos(x)$ alrededor de $x_0 = 0$. Ese polinomio de Taylor es:

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

como $f(1) = \cos(1)$ entonces una aproximación de $\cos(1)$ es $P(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$ y el error cometido es $|\cos(1) - P(1)| \approx 0{,}0014$.

También podemos buscar cuál es el polinomio de taylor que aproxima un valor $f(x)$ tal que el error cometido sea menor que una tolerancia dada. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3 Vamos a aproximar el numero e con un error menor que 10^{-4}. Sea $f(x) = e^x$, sabemos que el polinomio de Taylor de grado n de f alrededor de $x_0 = 0$ es:

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

pero $f(1) = e$, entonces $P(1)$ es una aproximación de e. El error está controlado por R(1): para algún c entre 0 y 1 tenemos que $|e - P(1)| = \frac{e^c}{(n+1)!}$ y como e es más pequeño que 3 entonces $\frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$.

Por tanto, queremos una n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$. Necesitamos pues que $(n+1)! > 30000$ que lo conseguiremos si $n \geq 7$.

5.7.2. Cálculo de límites

Algunas indeterminaciones se pueden solucionar mediante el desarrollo de taylor de las funciones involucradas en dicha indeterminación. El grado del polinomio de Taylor lo marcará el polinomio que acompañe a dicha función en el mismo lugar que esté la función (numerador o denominador) ya que siempre serÃ¡ de un grado mÃ¡s que éste. Ahora lo visualizaremos en unos ejemplos:

Ejemplo 1 Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Vamos a buscar los polinomios de Taylor de e^x y de $\sin(x)$ alrededor de 0.

$P(x) = 1 + x$ (polinomio de taylor de e^x), no nos hace falta augmentar más el grado porque en el numerador a parte de e^x tenemos un 1.

$Q(x) = x$ (polinomio de taylor de $\sin(x)$)

Por tanto, nos quedará: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$.

Ejemplo 2 Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin(x) - x(1+x)}{x^2}$$

Otra vez estamos delante de una indeterminación $\frac{0}{0}$. Buscamos el polinomio de taylor de $e^x \sin(x)$ alrededor de 0.

$P(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$, como en el numerador tenemos un polinomio de grado 2 acompañando a $e^x \sin(x)$ hemos buscado un polinomio de grado 3.

Ahora nos queda: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}-x-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{3x^2} = 0$.

5.7.3. Desigualdades

Podemos obtener desigualdades con el polinomio de Taylor siempre y cuando podamos determinar el signo del resto, es decir, si $R(x) \leq 0$ entonces $f(x) \leq P(x)$ y si $R(x) \geq 0$ entonces $f(x) \geq P(x)$

Ejemplo Demostrar que para todo $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple $1 - \frac{x^2}{2} \leq cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Haciendo el desarrollo de Taylor de $f(x) = cos(x)$ alrededor de $x = 0$ obtenemos $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{sin\ c}{6}x^3$ donde c está entre 0 y x. Si $\frac{sin\ c}{6}x^3 \geq 0$ entonces $cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Por tanto, tenemos que ver que $\frac{sin\ c}{6}x^3 \geq 0$.

$\frac{sin\ c}{6}x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 sin\ c \geq 0$ ya que el denominador es siempre positivo.

Si $x > 0$ entonces $x^3 > 0$ y hace falta que $sin\ c \geq 0$, cierto para $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Si $x < 0$ entonces $x^3 < 0$ y hace falta que $sin\ c \leq 0$, cierto para $c \in \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$.

Ahora tenemos que ver $cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Sabemos también por el desarrollo de Taylor que $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{sin\ c}{5!}x^5$.

Si $\frac{sinc}{5!}x^5 \geq 0$ entonces $cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Por tanto tenemos que ver que $x^5 sin\ c \geq 0$ para $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $x^5 > 0$ y $sin\ c > 0$

Si $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ entonces $x^5 < 0$ y $sin\ c < 0$

Por tanto, tenemos la desigualdad buscada.

5.7.4. Extremos relativos de funciones

Otra aplicación del polinomio de Tayor es la de encontrar los extremos relativos de funciones.
Sea f una función $n-1$ veces derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in$ I. Supongamos también que f es n veces derivable en x_0 con $f^{(k)}(x_0) = 0$ para $0 \leq k < n$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces el polinomio de taylor de f alrededor de x_0 es:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad y \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{5.18}$$

Podemos observar que, debido a que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, cuando x está muy cerca de x_0 el signo de $f(x) - f(x_0)$ depende de la paridad de n y del signo de $f^{(n)}(x_0)$. Formalmente diríamos que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ está incluido en I y

$$|x - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} f^{(n)}(x_0) \geqslant 0 \tag{5.19}$$

Por tanto tenemos tres posibles casos:

a)Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ entonces $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] f(x) \geqslant f(x_0)$ y f tiene un mínimo relativo en x_0.
b)Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] f(x) \leqslant f(x_0)$ y f tiene un máximo relativo en x_0.
c)Si n es impar entonces f no tiene ningún extremo relativo en x_0. Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f es estrictamente creciente en x_0. Pero si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f es estrictamente decreciente en x_0.

Veamos que pasa cuando tenemos funciones de varias variables. Sea f una función de dos variables, utilizando notación muy compacta podemos expresar el polinomio de taylor de f de grado 2 como:

$$P(z) = f(a) + \nabla f(a)(z - a) + (z - a)\mathcal{H}f(a)(z - a) \tag{5.20}$$

donde $a = (a_1, a_2)$, $z = (x, y)$, $\mathcal{H}f$ es la matriz hessiana (el vector $(z - a)$ en este caso es horizontal para que se pueda multiplicar por la matriz) y ∇f es el vector gradiente.

Para que f tenga un extremo relativo en a se tiene que cumplir que $\nabla f(a) = 0$ donde $0 = (0, 0)$. Decidimos que tipo de extremo es según la matriz hessiana en a, si ésta es definida positiva será un mínimo y si es definida negativa será un máximo.

Ejemplo Calcular y clasificar los extremos relativos de $f(x) = x^3 e^x$
Calculamos la derivada e igualamos a 0:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x \quad \text{y} \quad (x^3 + 3x^2)e^x = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = -3$$

Ahora vamos a clasificarlos:

$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x$, $f''(0) = 0$, y $f''(-3) = 12e^{-3}$

Como $f''(-3) \neq 0$ y $n = 2$ entonces el polinomio de Taylor de f alrededor de $x = -3$ de grado 2 es $P(x) = -27e^{-3} + 6e^{-3}(x+3)^2$ y $12e^{-3} > 0$, por tanto $x = -3$ es un mínimo.

$f'''(x) = (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x$ y $f'''(0) = 6$

Como $f'''(0) \neq 0$ y $n = 3$ entonces el polinomio de Taylor de f alrededor de $x = 0$ de grado 3 es $P(x) = x^3$ y $6 > 0$, por tanto f no tiene un extremo relativo en $x = 0$ pero es estrictamente creciente en ese punto.

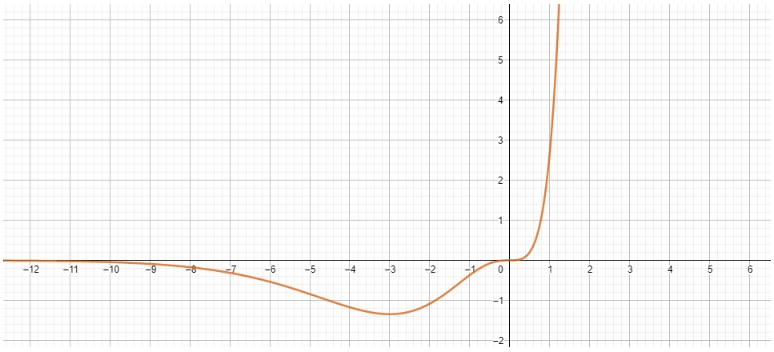

Figura 4: Gráfica de $f(x) = x^3e^x$

5.7.5. Exponencial de una matriz

Otro sitio donde podemos ver el polinomio de Taylor es en el cálculo de la exponencial de una matriz.

Definición 5.16. *Sea A una matriz $n \times n$ real o compleja. Se dice que la exponencial de A es:*

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i \tag{5.21}$$

Y cumple las siguientes propiedades:

1. $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$

Demostración. Podemos considerar la matriz A como una constante y entonces obtenemos la derivada buscada mediante las reglas habituales de derivación. □

2. $exp(A) \cdot exp(B) = exp(A + B) = exp(B) \cdot exp(A)$ si $AB = BA$

Demostración. Consideramos el problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B)x(t) \\ x(t_0) = Id \end{cases} \tag{5.22}$$

La solución es $M(t) = e^{(A+B)t}$ y es única. Veamos que $N(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$ también es solución. $N'(t) = Ae^{At} \cdot e^{Bt} + Be^{At} \cdot e^{Bt} = (A+B)e^{At} \cdot e^{Bt} = (A+B)N(t)$ y $N(0) = Id$.
Por tanto, $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$. □

3. $e^0 = Id$ donde 0 es la matriz nula.

Demostración. La demostración es trivial ya que la matriz nula elevada a i con $i \neq 0$ es la matriz nula y cualquier matriz elevada a 0 es la identidad. □

4. $exp(xA) \cdot exp(yA) = e^{(x+y)A}$

Demostración. Como $(xA) \cdot (yA) = xyA^2 = (yA) \cdot (xA)$ podemos aplicar la propiedad 2 y entonces $exp(xA) \cdot exp(yA) = exp(xA + yA) = exp((x+y)A)$. □

5. $exp(A) \cdot exp(-A) = Id$

Demostración. Otra propiedad que surge de la segunda. Como $A \cdot (-A) = -A \cdot A$, entonces $exp(A) \cdot exp(-A) = exp(A - A) = exp(0)$ y por la propiedad 3 $exp(A) \cdot exp(-A) = Id$. □

6. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Demostración. La propiedad 5 nos da directamente la 6 porque si $exp(A) \cdot exp(-A) = Id$ entonces $exp(-A)$ tiene que ser la inversa de $exp(A)$. □

7. Si B es invertible, $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$

Demostración. $(BAB^{-1})^i = (BAB^{-1})(BAB^{-1}) \dots (BAB^{-1}) = BA^iB^{-1}$ entonces $e^{BAB^{-1}} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(BAB^{-1})^i}{i!} = B \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} B^{-1} = Be^A B^{-1}$ □

Podemos observar la exponencial de una matriz es simplemente el desarrollo de Taylor de e^x alrededor del 0 evaluado en la matriz. Tiene especial importancia en el mundo de las ecuaciones diferenciales ya que si tenemos un problema de Cauchy de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.23}$$

La solución viene dada por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds \tag{5.24}$$

donde $f(t) = B(t)x(t) + b(t)$ y $B(t) = A(t) - A$.

Para ver esto primero hay que observar la solución del problema de Cauchy $\dot{X} = AX$, $X(t_0) = Id$ es $X(t) = e^{(t-t_0)A}$. Luego poniendo $\dot{x} = A(t)x + b(t) = Ax + f(t)$ y aplicando variacion de constantes, se llega a que la solución es de la forma anteriormente descrita.

Una aplicación de la exponencial de la matriz es la resolución de ecuaciones variacionales: Sea f una función tal que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea el problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.25}$$

entonces si $\phi(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ es un proceso evolutivo, diremos que el sistema de ecuaciones de la primera variacional respecto ε es:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} D_{x_0}\phi(t, t_0, x_0, \varepsilon) = D_x f(t, \phi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}\phi(t, t_0, x_0, \varepsilon) + D_\varepsilon f(t, \phi(t, t_0, x_0), \varepsilon) \\ D_\varepsilon \phi(t_0, t_0, x_0, \varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

que es un sistema no homogéneo del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.27}$$

donde $A(t) = D_x f(t, \phi(t, t_0, x_0), \varepsilon)$, $X = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\phi(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ y $b(t) = D_\varepsilon f(t, \phi(t, t_0, x_0), \varepsilon)$. Por tanto, la solución, que la conocemos porque la hemos descrito antes, involucra exponenciales de matrices.

5.7.6. Método de Newton

En cálculo númerico, para encontrar zeros de funciones, utilizamos métodos iterativos que parten de una aproximación inicial de la raíz buscada. Para encontrar dicha aproximación utilizamos el desarrollo de Taylor. Un ejemplo es el método de Newton que describiremos a continuación.

Si F es un función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces el método de Newton-Raphson consiste en hacer en cada paso $k \geqslant 0$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})} \tag{5.28}$$

donde se asume que F es diferenciable y $x^{(0)}$ es una aproximación inicial del cero buscado.

En la imagen podemos observar como x_{n+1} es mejor aproximación de x, que es la raíz buscada, que x_n. Ahora vamos a generalizar este resultado para $\mathbb{R}^n$. El método de Newton es el siguiente:

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ de la cuál queremos encontrar los ceros. Consideramos $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y sea $x^{(0)}$ una aproximación inicial de ésta. Hacemos el desarrollo de Taylor de F de primer orden alrededor de $x^{(0)}$, por tanto, en particular:

$$0 = F(\alpha) \approx F(x^{(0)}) + DF(x^{(0)})(\alpha - x^{(0)})$$

donde $DF(x^{(0)})$ matriz cuadrada que tiene como componente ij a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.
El siguiente iterado es $x^{(1)} = x^{(0)} - DF(x^{(0)}) \cdot F(x^{(0)})$ y, en general,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (DF(x^{(k)}))^{-1} \cdot F(x^{(k)}) \forall k \geqslant 0$$

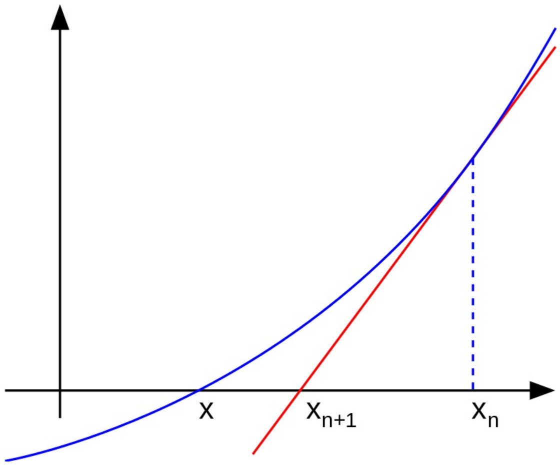

Figura 5: Una iteracción del Método de Newton

Fuente:Wikimedia Commons

5.8. Aplicaciones en otros ámbitos

A parte de las Matemáticas hay otro ámbitos donde se utiliza el polinomio de Taylor para facilitar cálculos o hacer aproximaciones. A continuación detallaremos estos casos:

5.8.1. Física

En la física podemos encontrar muchos ejemplos donde se aplica el polinomio de Taylor pero antes de mostrarlos necesitamos introducir alguna definición.

Definición 5.17. *Un cuerpo negro es un objeto ideal cuya superficie capta toda energía y luz incidente por el único agujero que tiene, no es materia oscura debido a que emite luz.*

Ley de Rayleigh-Jeans

Utilizando la mecánica clásica podemos expresar la densidad energética de la radiación de un cuerpo negro de una longitud de onda como:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^5}$$

donde:

k es la constante de Boltzmann (que vale $1,38064852x10^{-23}J/K$) y

T es la temperatura absoluta.

Ley de Planck

Planck sin embargo usó el modelo cuántico para expresar la densidad energética de la radiación de un cuerpo negro de una longitud de onda:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda Tk}-1}$$

siendo:

h la constante de Planck (que vale $6,62607x10{-}34J.s$)

c la velocidad de la luz (que es $2,9979x10^8 m/s$)

k la constante de Boltzmann (que vale $1,38064852x10^{-23} J/K$)

T la temperatura en grados Kelvin.

Y es aquí donde nos ayudaremos del polinomio de Taylor para hacer el cálculo. Sabemos que $e^{\frac{hc}{\lambda Tk}} = e^{\frac{h\nu}{kT}}$ y que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$. Por lo tanto, $e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{\frac{h\nu}{kT}^2}{2!} + \ldots$ Como $\frac{h\nu}{kT}$ es muy pequeño si la frecuencia es muy pequeña entonces $e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$. Ahora podemos substituir esto en la fórmula inicial y nos quedará:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{1+\frac{h\nu}{kT}-1} = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

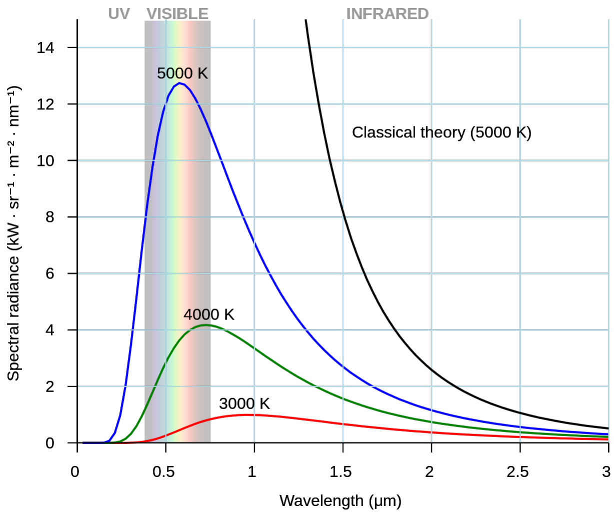

Figura 6: Comparación de la ley de Rayleigh-Jeans con la ley de Planck
Fuente: Wikipedia

5.8.2. Finanzas

En el mundo de las finanzas el polinomio de taylor se utiliza para obtener valores más precisos de valores como el precio de un bono o el número de futuros en la cartera o el número de opciones en cartera.

Definición 5.18. *Un bono financiero es una forma de financiarse las empresas mediante el cúal solicita una cantidad de dinero que irá devolviendo en un período determinado con unos intereses.*

Precio de un bono

El precio de un bono se calcula a partir de la siguiente fórmula:

$$P(R) = \sum_{t=1}^{n} C_t(1 + R\frac{S}{360})^{-t} + VN(1 + R\frac{S}{360})^{-n}$$

donde:

VN es el valor nominal o facial del bono

n es el número de cuotas a pagar

C_t es la cuota pagada en el período 1$\leq$ t $\leq$ n

R es la tasa de mercado al vencimiento.

Cuando hay variaciones muy grandes en los tipos de interés la alternativa es aproximar el precio del bono por el polinomio de taylor de orden 2 (una parábola):

Podemos calcular el precio como $P(R) = P'(R)(R - R_0) + \frac{1}{2}P''(R)(R - R_0)^2 + o(R^3)$. Sabiendo que:

$$P'(R) = -\tfrac{S}{360}\sum_{t=1}^{n} tC_t(1 + R\tfrac{S}{360})^{-t-1} - \tfrac{S}{360}nVN(1 + R\tfrac{S}{360})^{-n-1}$$

$$\text{y } P''(R) = \sum_{t=1}^{n} t(t+1)C_t(1 + R\tfrac{S}{360})^{-t-2}(\tfrac{S}{360})^2 + n(n+1)VN(1 + R\tfrac{S}{360})^{-n-2}(\tfrac{S}{360})^2.$$

5.8.3. Ingenierías

En las ingenierías, como por ejemplo en la civil, también se utiliza el polinomio de Taylor.

Definición 5.19. *Un cuerpo rígido es un cuerpo que si se le aplica alguna fuerza exterior no se deforma. Todo cuerpo al que se le aplica una acción de deformación tiene efectos cinemáticos que se llaman corrimientos.*

Se aplica el polinomio de Taylor para estudiar las deformaciones de cuerpos rígidos. Los corriminetos se experimentan por puntos, entonces si cojemos dos puntos muy cercanos el desplazamiento de uno de ellos se puede escribir como el polinomio de taylor alrededor del otro.

5.8.4. Más aplicaciones

Todavía podemos encontrar el polinomio de Taylor en otros ámbitos como por ejemplo el diseño de filtros, el problema de la tensión y la flecha de un cable real en cualquier situación meteorológicas e incluso en la programación para implementar funciones.

6. Propuesta de aplicación didáctica

6.1. Aplicación didáctica para alumnos de segundo de Bachillerato

En este apartado del trabajo veremos una aplicación didáctica del polinomio de Taylor. Está dirigido a alumnos de segundo de bachillerato debido a que se necesita conocer conceptos como el de derivada de primer y de cualquier orden, el de límite y el de número factorial para poder definir y aplicar el polinomio de Taylor.

La actividad consta de dos horas: una teórica, para introducir el polinomio de Taylor y ver sus aplicaciones matemáticas, y la otra para hacer problemas en parejas y con el profesor para resolver dudas.

Teóricamente, se explica que es y para que se utiliza el polinomio de Taylor, en matemáticas, poniendo los ejemplos oportunos. También se trata de que el alumnado comprenda que el polinomio de Taylor es una aproximación local y no global, explicándoles las diferencias entre ambas y ayudándonos del GeoGebra para ello. Por último, se les hace ver que no solo se utiliza en matemáticas sino que también en otros ámbitos.

En la práctica se les da una hoja con problemas para que apliquen lo que han visto en la hora de teoría y se convenzan de que el polinomio de Taylor es una herramienta muy útil. Tendrán que calcular polinomios de Taylor, resolver limites y aproximar valores.

En el annexo, se puede consultar tanto la ficha del profesor como la de los alumnos y los apuntes del profesor para la clase teórica.

6.1.1. Implementación en el aula

Para llevar a cabo la actividad, fui al instituto Josep Lluís Sert de Castelldefels los dias 5 y 6 de Noviembre. La actividad se hizo con uno de los dos grupos que tiene el instituto de segundo de Bachillerato científico. Eran 20 alumnos en clase y debido a que es un grupo con pocas dificultades en ciencias, no hubo problemas para entender las explicaciones, aunque tuve que coger 5-10 minutos del día siguiente para acabar ejemplos que quedaron pendientes.

Antes de que fuera yo al instituto, su profesor les hizo una breve introducción del tema para que supiesen de que les iba a hablar. La actividad es básicamente una ampliación del temario, la cuál este grupo en cuestión podía asumir perfectamente.

Comenzamos introduciendo los elementos necesarios para definir el polinomio y acto seguido definiéndolo. Pusimos varios ejemplos, entreteniéndonoss en el cálculo de derivadas y construyendo paso a paso el polinomio. Luego hicimos especial hincapié en que se trata de una aplicación local y no global (les definimos que es cada una y sus diferencias), introdujimods el GeoGebra, que es una calculadora gráfica, para que visualmente entendieran que el polinomio de Taylor solo aproxima localmente en el punto escojido.

Llegó el momento de presentarles las principales aplicaciones matemáticas de dicho polinomio. Mediante ejemplos, vieron que nos puede ayudar a calcular límites que, a priori, nos pueden parecer incluso incalculabes. También se les enseño a aproximar valores y calcular el error cometido al hacerlo.

El segundo día lo comenzamos con lo que nos quedó pendiente de teoría. Se les demostró la fórmula de Euler y la identidad fundamental o pitagórica trigonométrica, ya que ambas son muy utilizadas en la física cuando se trabaja con vectores de fuerzas. Una vez acabada la teoría, pusimos a los alumnos a trabajar en parejas para que pudieran debatir los resultados y ayudarse mútuamente. Se les repartió una hoja de problemas, que se puede ver en el anexo, en la que se les pedía el cálculo del polinomio de Taylor de dos funciones diferentes, aproximar dos valores distintos y calcular dos límites. Se les dijo que se recojerían al final de la hora pero la mayoría de ellos no pudo acabar y quedó como

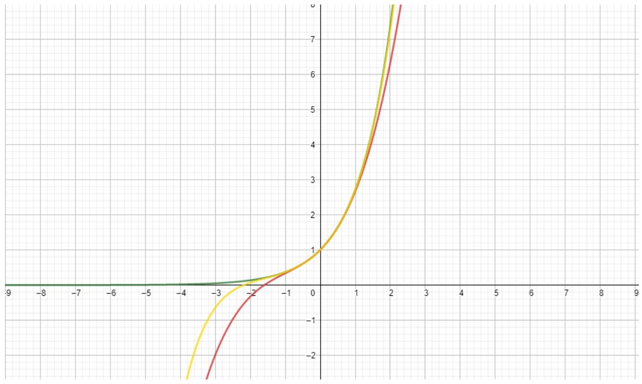

Figura 7: Gráfica de $f(x) = e^x$ y sus polinomios de taylor de orden 3 y 5 alrededor de $x = 0$.

deberes que debían entregar a su profesor el día siguiente.

6.2. Muestra de actividades y análisis

Una vez corregidos los problemas, que hicieron los alumnos, podemos hacer varias observaciones que detallaremos a continuación:

Observaciones 6.1. .

1. No tienen ningún tipo de problema en la derivación. Calculan a la perfección las succesivas derivadas de una función dada.
2. Algunos no han acabado de entender la estructura del polinomio de Taylor. Confunden x_0, que es valor donde aproximamos, con $f'(x_0)$. Es decir, en el lugar de x_0 vuelven a poner $f'(x_0)$ lo que provoca un calculo erróneo del polinomio, tal y como se puede comprobar en la siguiente imagen:

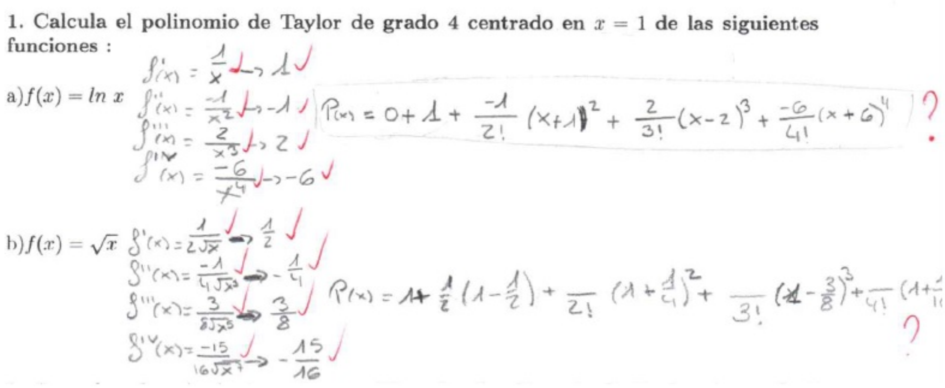

Figura 8: cálculo erróneo del polinomio de Taylor

3. No entienden el concepto de valor absoluto. A continuación vemos un ejemplo:

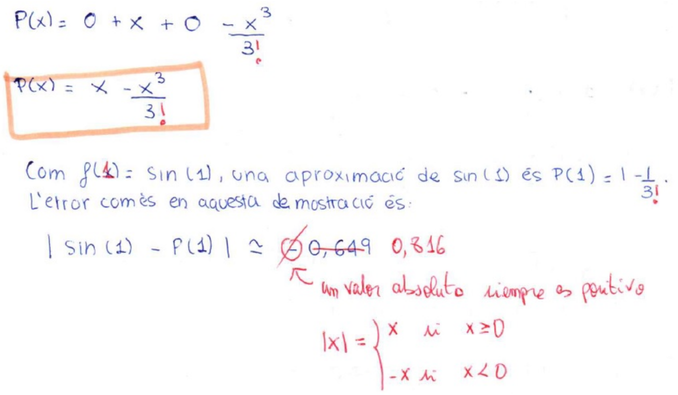

Figura 9: Ejercicio de un alumno al cuál un valor absoluto le da negativo

4. Aunque eran problemas del polinomio de Taylor, calcularon los límites mediante la regla de $l'Hôpital$. No ven el polinomio de Taylor como alternativa real a $l'Hôpital$ y por tanto no lo identifican como herramienta muy útil en Matemáticas.
5. Pocos han sabido utilizar el polinomio de Taylor para aproximar valores y calcular el error de aproximación.

6.2.1. Conclusiones y propuesta de mejora

Podemos concluir, a partir de las observaciones, que no se entendió la explicación de como calcular el error cometido y el cálculo de límites por Taylor. Por tanto, quizás 2 horas es demasiado poco tiempo para introducir el polinomio de Taylor en segundo de Bachillerato y que los alumnos lo puedan entender y utilizar como una herramienta más.

La propuesta de mejora sería pues, alargar el tiempo de explicación y así poder hacer más ejemplos para que quedase más claro y fuera más entendible. También se podría llevar al aula un Kahoot!, que es un juego de preguntas donde el que mejor y más rápido conteste gana, porque así a la vez que juegan aprenden conceptos nuevos. Por último, podríamos retocar la hoja de problemas que se les dió, por ejemplo, cambiando el ejercicio de límites para que algunos los tuvieran que calcular mediante $l'Hôpital$ y otros mediante Taylor para que vieran las diferencias.

6.3. Interpretación geométrica mediante GeoGebra

Como hemos dicho anteriormente, podemos utilizar la calculadora gráfica Geogebra para interpretar geométricamente el polinomio de Taylor y que así visualizen los alumnos de que se trata este polinomio.
GeoGebra tiene una herramienta llamada PolinomioTaylor, a la cuál hay que introducir una función, un punto y el valor del orden del polinomio y ésta dibuja la gráfica de ese polinomio de Taylor. Además podemos pedirle que dibuje la gráfica de la función y así compararlas.

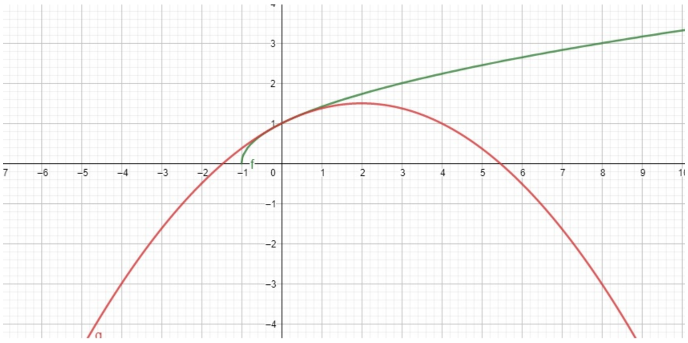

Figura 10: Comparación entre $f(x) = \sqrt{x+1}$ y su polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x = 0$

GeoGebra tiene otras herramientas como Punto que nos permite crear un punto en la gráfica de la función deseada y lo podremos mover a través de ésta, Perpendicular que nos creará una recta perpendicular a la recta elegida o Interseca que nos pedirá que escojamos dos objetos y nos dará su intersección.

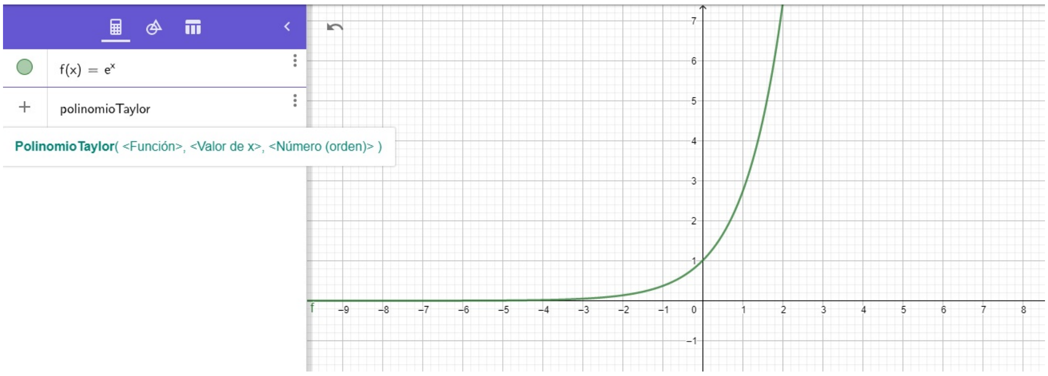

Figura 11: Herramienta de GeoGebra para calcular y dibujar el polinomio de Taylor de una función

Si dibujamos una función f y su polinomio de Taylor de cierto orden, utilizando las herramientas que acabamos de describir, podemos escojer un punto A y hacer una perpendicular al eje X que pase por A. Luego si hacemos la intersección entre la perpendicular y el polinomio, obtenemos un punto B. Por último, creando el segmento AB y moviendo el punto A podremos visualizar que a medida que nos alejamos del punto donde hemos calculado el polinomio, la función dista más del polinomio.

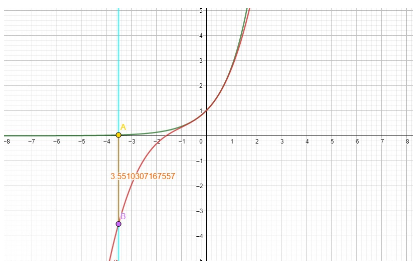

Figura 12: Gráfica de $f(x) = e^x$ y su polinomio de Taylor de orden 3 donde se ha creado un segmento para ver la distancia entre ambas.

También podemos aprovechar GeoGebra para dibujar una función y varios de sus polinomio de Taylor para observar que cuanto mayor sea el grado mejor aproxima el polinomio.

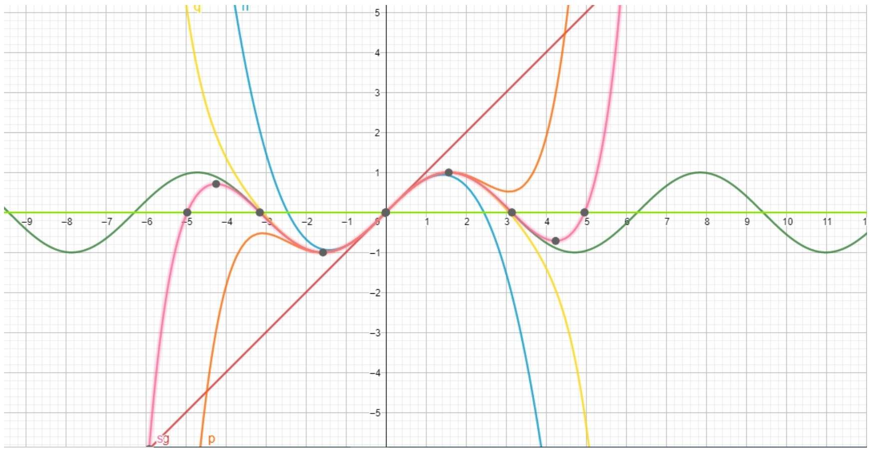

Figura 13: Gráfica de $f(x) = sen(x)$ y sus polinomios de Taylor de orden 0, 2, 4, 6, 8 y 10 alrededor de $x = 0$

En la siguiente imagen veremos también la gráfica de $f(x) = sen(x)$ y sus polinomios de Taylor de orden 0, 2, 4, 6, 8 y 10 pero alrededor de $x = 1$ para poder comparar.

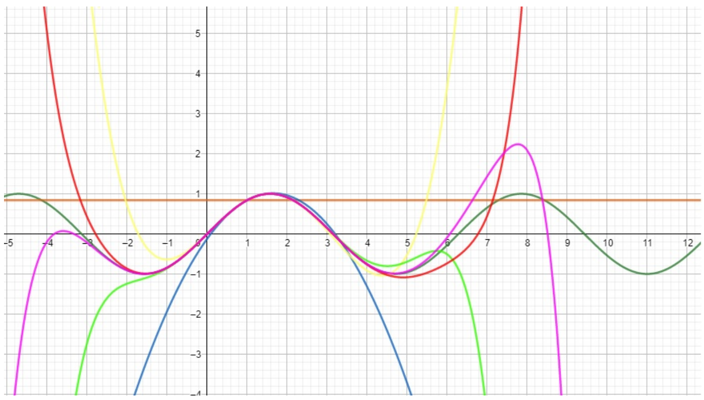

Figura 14: Gráfica de $f(x) = sen(x)$ y sus polinomios de Taylor de orden 0, 2, 4, 6, 8 y 10 alrededor de $x = 1$

7. Conclusiones

Como ya dije anteriormente, este trabajo se basa en dos motivaciones principales: mi vocación por la docencia y mi interés por el mundo del análisi matemático.

Al finalizar este trabajo podemos afirmar que hemos alcanzado los objetivos propuestos, entre ellos, dar a conocer el polinomio de Taylor a los alumnos de segundo de Bachillerato y asumir que el polinomio de Taylor no solo está presente en Matemáticas sino que, también en ámbitos muy diversos.

Hemos podido comprobar que el polinomio de Taylor es muy útil en matemáticas ya que se puede definir tanto en los números reales como en los complejos y también se puede extender al caso de varias variables. Sus aplicaciones van desde la trigonometría, pasando por aproximación de valores, desigualdades, cálculo de límites, y estudio de extremos relativos, hasta el método de Newton y la exponenciación de una matriz.

Alejándonos de las matemáticas hemos descubierto diferentes ámbitos donde se puede aplicar el polinomio de Taylor. En Física, en el estudio de cuerpos negros, se utiliza en ley de Planck (densidad energética). En economía, para calcular el precio de un bono financiero y en ingeniería civil, para estudiar deformaciones de cuerpos rígidos. También hemos podido comprobar que se puede aplicar en informática, medicina y en algunas ingenierías.

En la parte didáctica, hemos realizado una actividad de dos horas de duración, con una parte teórica y otra práctica en el instituto Josep Lluís Sert de Castelldefels. Al tratar con alumnos de segundo de bachillerato, se ha percibido un cierto interés por la materia y la hemos llevado a cabo con naturalidad. Dado que, como hemos explicado anteriormente, no se entendió la explicación de como calcular el error cometido y el cálculo de límites por Taylor, quizás 2 horas es demasiado poco tiempo para introducir el polinomio de Taylor en segundo de Bachillerato y que los alumnos lo puedan entender y utilizar como una herramienta más.

Si no fuera por la gran densidad de materia en la asignatura de matemáticas de segundo de bachillerato y la escasez de tiempo para impartirlo, se podría pensar en añadir al temario el polinomio de Taylor, ya que los alumnos tienen conocimientos suficientes para asumirlo.

Introdujimos el GeoGebra en el aula para crear a los alumnos una visión geométrica, que lo entendieran mejor y que vieran la funcionalidad del polinomio de Taylor. Gracias a este programa, pudimos conseguir que comprendieran que el polinomio de Taylor es una aproximación local de una función alrededor de un punto concreto y que, obviamente, si variamos este punto obtenemos otra aproximación diferente de la función. Podemos concluir entonces, que GeoGebra es un recurso matemático con una gran utilidad en el aula. Logramos motivar a los alumnos, conectando las matemáticas con la física a partir de la demostración de la identidad trigonométrica: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ y la fórmula de Euler.

Referencias

[1] J J O'Connor and E F Robertson. *Brook Taylor*,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Taylor.html.

[2] Tradacete, Pedro. Periódico EL PAÍS. Artículo: *Brook Taylor, músico, pintor, jurista y gran matemático*
https://elpais.com/elpais/2017/08/23/ciencia/1503477489_793596.html.

[3] Moreno, Víctor y E. Ramírez, María. *Brook Taylor*,
https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/2155/Brook%20Taylor.

[4] *Útiles básicos de cálculo numérico* A. Aubanell, A. Benseny y A. Delshams. Barcelona: Labor, S. A., 1993. ISBN 84-335-5156-6

[5] Apuntes de la asignatura *Introducció al càlcul diferencial* del curso 2014-2015 en la uiversidad de Barcelona
Apunts ICD 2014.pdf

[6] *Mathematycal Analysis 1* Claudio Canuto y Anita Tabacco. Springer International Publishing, 1995. ISBN 978-3-319-12772-9

[7] F. Chamizo. *Desarrollo de Taylor y extremos relativos en varias variables*,
http://http://matematicas.uam.es/ fernando.chamizo/asignaturas/quim1314/resumen01.pdf

[8] J. Cotohuanca. *Aplicación del teorema de Taylor a la física*,
https://prezi.com/zg4ua75pul5c/aplicacion-del-teorema-de-taylor-a-la-fisica/.

[9] M. Yauri. *Serie de Taylor*,
https://prezi.com/asuwce4kus1j/serie-de-taylor/

[10] Apuntes de la asignatura *Cálculo diferencial en* $\mathbb{R}$ del curso 2009-2010 en la universidad de Valladolid
http://www.ma.uva.es/ antonio/Industriales/Apuntes_09-10/MatI/13_Tema-11_09-10.pdf.

[11] C. Buxton, L. D'Alonso, F. Gutierrez, G. Jeronimo, G. Massaccesi, J.C. Pedraza y J. Sabia *Polinomio de Taylor, Teóricas de Análisis Matemático*,
http://www.mate.cbc.uba.ar/28/Taylor.pdf.

[12] Apuntes de la asignatura *Análisis en varias variables* en la universidad de Extremadura
http://matematicas.unex.es/ montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes/cap11.pdf.

[13] M. Banzo. *Desarrollo en serie de Taylor*,
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Desarrollo_serie_t

A. Aplicación didáctica en Bachillerato

A.1. Ficha Profesor

1. Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $x = 1$ de las siguientes funciones :

a)$f(x) = ln\ x$

$P(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$

b)$f(x) = \sqrt{x}$

$P(x) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$

2. Aproxima los siguientes valores utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ de la función adecuada en cada caso y calcula el error cometido :

a)$\sqrt{5}$
La función escogida debe ser $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Su polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x_0 = 0$ es: $P(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$. Como $f(2) = \sqrt{5}$, una aproximación de $\sqrt{5}$ es $P(2) = 3$ y $|f(2) - P(2)| \approx 0.76$

b)$sen(1)$
La función escogida debe ser $f(x) = sen(x)$. Su polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x = 0$ es: $P(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Como $f(1) = sen(1)$, una aproximación de $sen(1)$ es $P(1) = 0{,}83333$ y $|f(1) - P(1)| \approx 0.00813$

3. Calcula los límites siguientes :

a)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-senx}{ln(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-senx}{ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(x-\frac{x^3}{6})}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{6} = 0$

b)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)-x}{xsenx}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)-x}{xsenx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-x^3}{6}}{x^2-\frac{x^4}{6}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^3}{6x^2-x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{6-x^2} = 0$

4. De las siguientes funciones di de cuáles NO se puede calcular el polinomio

de Taylor alrededor de $x = 0$ y porque :

a)$f(x) = |x|$

No se puede porque no es derivable en x=0
b)$f(x) = x^5$

Sí se puede
c)$f(x) = 2^x$

Sí se puede
d)$f(x) = ln(x)$

No se puede porque no es derivable en x=0

A.2. Ficha Alumno

1. Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $x = 0$ de las siguientes funciones :

a)$f(x) = ln\ x$

b)$f(x) = sqrtx$

2. Aproxima los siguientes valores utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ de la función adecuada en cada caso y calcula el error cometido :

a)$\sqrt{5}$

b)$sen(1)$

3. Calcula los límites siguientes :

a)$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - senx}{ln(x+1)}$

b)$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x) - x}{xsenx}$

4. De las siguientes funciones di de cuáles NO se puede calcular el polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ y porque :

a)$f(x) = |x|$

b)$f(x) = x^5$

c)$f(x) = 2^x$

d)$f(x) = ln(x)$

A.3. Apuntes de la clase

APUNTES CLASE

Presentación e Introducción

Comenzar presentándome y explicando el motivo de mi presencia en el Aula y el tiempo que estaré con ellos. A continuación, introducir el polinomio de Taylor de la siguiente manera:
El polinomio de taylor es una aproximación de una función, y es una herramienta muy útil porque nos permite evaluar funciones que a priori sería muy difícil. Lo podemos utilizar en el cálculo de límites y también para clasificar los extremos relativos de funciones. Para definir el polinomio de taylor de grado n de una función $f(x)$, necesitamos un punto x_0, el grado del polinomio (n) y una función $f(x)$ que sea n derivable en el punto x_0 (es decir, tal que existan $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$), si tenemos estas tres cosas se dice que el polinomio de Taylor de grado n alrededor de x_0 de f es

$$P(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{A.1}$$

Veamos algunos ejemplos:

1. Polinomio de Taylor de grado 3 alrededor del 0 de e^x:

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \tag{A.2}$$

2. Polinomio de Taylor de grado 4 alrededor de π de $cos(x)$:

$$p(x) = -1 + x + \frac{(x - \pi)^2}{2!} - \frac{(x - \pi)^4}{4!} \tag{A.3}$$

También hay que decir que el polinomio de Taylor es una aproximación local ya que lo calculamos para un cierto punto y entonces a medida que nos alejamos de ese punta el polinomio cada vez dista más de la función. Si fuera una aproximación global valdría para todo punto pero no es el caso. Aprovechar para implementar el Geogebra para ver esto último ya que de manera visual se entiende mejor.

Cuando calculamos el polinomio de Taylor estamos cometiendo un error ya que es una aproximación y por tanto no obtendremos los valores exactos de la función si no que obtendremos valores muy cercanos a éstos y la diferencia con los exactos es a lo que llamamos el error cometido o resto de taylor. Lo calculamos de la siguiente manera:

$$R(x) = f(x) - P(x) \tag{A.4}$$

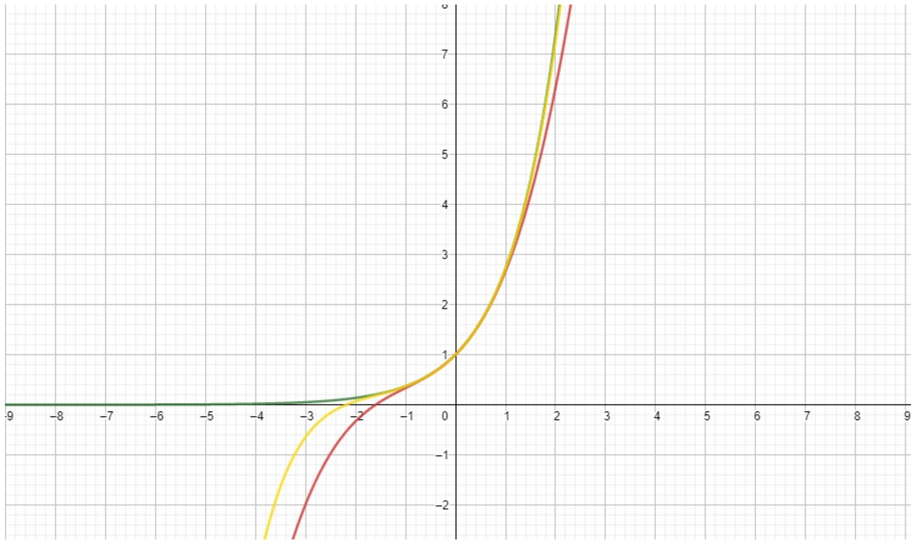

Figura 15: Gráfico hecho en el geogebra donde podemos ver la función e^x (verde), el polinomio de taylor en el 0 de grado 3 (rojo) y de grado 5 (amarillo).

Aplicaciones del polinomio de Taylor

A parte de Matemáticas podemos encontrar el polinomio de Taylor en ámbitos como la física, la economía, las ingenierías o la medicina.

Nosotros veremos las matemáticas, como ya se dijo al principio se utiliza en el cálculo de límites y para clasificar extremos relativos de funciones aunque también para aproximar valores. Ahora haremos unos ejemplos:

Ejemplo 1 Vamos a aproximar $\sqrt{2}$ por el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x)$=$\sqrt{x+1}$ alrededor de $x_0 = 0$.

El polinomio de Taylor buscado es:

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

como $f(1) = \sqrt{2}$, una aproximación de $\sqrt{2}$ es $P(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. El error cometido en esta aproximación es $|\sqrt{2} - P(1)| \approx 0{,}023$.

También se puede hacer al revés, es decir, buscar el grado del polinomio de taylor tal que el error sea más pequeño que un número dado, como vamos a ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2 Cuál debe ser el grado del polinomio de Taylor para que el error al aproximar $\sqrt{2}$ sea más pequeño que 0,05?

Antes hemos visto que el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \sqrt{x+1}$ alrededor de $x_0 = 0$ es

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

que sabemos que cumple la condición porque $|\sqrt{2} - P(1)| \approx 0{,}023$ y 0,023 ¡0,05

Tenemos que ver ahora cuál es el primero que cumple la condición si el de grado 1 o el de grado 2 (el de grado 0 es evidente que no cumple).

Si $P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ (grado 2), entonces $|\sqrt{2} - P(1)| \approx 0{,}039$ y por tanto cumple la condición.

Entonces, $n \geqslant 1$ para que el error sea más pequeño que 0,05.

Ahora pasamos al cálculo de límites:

Ejemplo 3 Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x) - x(1+x)}{x^2} \tag{A.5}$$

Estamos delante de una indeterminación $\frac{0}{0}$. Buscamos el polinomio de taylor de $e^x \sin(x)$ alrededor de 0.

$P(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$, como en el numerador tenemos un polinomio de grado 2 acompañando a $e^x \sin(x)$ hemos buscado un polinomio de grado 3.

Ahora nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} - x - x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^2} = 0. \tag{A.6}$$

Por último veamos un ejemplo de extremos relativos:

Sea f una función $n-1$ veces derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in$ I. Supongamos también que f es n veces derivable en x_0 con $f^{(k)}(x_0) = 0$ para $0 \leq k < n$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces:

a)Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
b)Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
c)Si n es impar entonces f no tiene ningún extremo relativo en x_0. Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f es estrictamente creciente en x_0. Pero si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f es estrictamente decreciente en x_0.

Pongámos un ejemplo:

Ejemplo 4 Calcular y clasificar los extremos relativos de $f(x) = x^3 e^x$

Calculamos la derivada e igualamos a 0:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x \qquad \text{y} \qquad (x^3 + 3x^2)e^x = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = -3$$

Ahora vamos a clasificarlos:

$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x$, $f''(0) = 0$, y $f''(-3) = 12e^{-3}$

Como $f''(-3) \neq 0$ y $n = 2$ entonces el polinomio de Taylor de f alrededor de $x = -3$ de grado 2 es $P(x) = -27e^{-3} + 6e^3(x+3)^2$ y $12e^3 > 0$, por tanto $x = -3$ es un mínimo.

$f'''(x) = (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x$ y $f'''(0) = 6$

Como $f'''(0) \neq 0$ y $n = 3$ entonces el polinomio de Taylor de f alrededor de $x = 0$ de grado 3 es $P(x) = x^3$ y $6 > 0$, por tanto f no tiene un extremo relativo en $x = 0$ pero es estrictamente creciente en ese punto.

Ahora veamos una posible conexión entre las Matemáticas y la física:

Demostración de la fórmula $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

Para ver la igualdad ponemos $f(x) = sin^2(x)$ y $g(x) = cos^2(x)$ y calculamos los correspondientes polinomios de Taylor alrededor del 0.

Para $f(x)$ obtenemos que su polinomio de Taylor es $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{(2i-1)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}(-1)^{i+1}$. En cambio, para $g(x)$ el polinomio de Taylor es $1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(2i-1)} \frac{x^{2i}}{(2i)!}(-1)^{i}$. Esto es debido a que $f'(x) = 2sin(x)cos(x)$ pero $g'(x) = -2sin(x)cos(x)$ y entonces en ambos casos las derivadas de orden impar se anularán en el 0 y las de orden par coincidirán cambiadas de signo. Ahora si sumamos las dos expresiones obtenidas nos quedará el 1 de la segunda expresión y por tanto obtenemos la identidad buscada.