

UNIVERSITAT DE BARCELONA

SOBRE UNA CLASE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS
COMPLETAMENTE INTEGRABLES

by

Rafael Ramírez

AMS Subject Classification: 70D99, 70F25, 70K40.



Mathematics Preprint Series No. 82

July 1990

SOBRE UNA CLASE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS COMPLETAMENTE INTEGRABLES

Rafael Ramírez,

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis, Universidad de Barcelona.

Se estudia el campo vectorial hamiltoniano X_H donde H es una función holomorfa en el recinto $D \subset \mathbb{C}^{2N}$ y se establece su relación con algunos campos hamiltonianos completamente integrables.

1. Introducción.

Designemos por medio de $Z_1, \dots, Z_{2N}$ a los complejos tales que

$$\begin{cases} Z_k = p_k + \imath q_k, & k = \overline{1, N}, \\ Z_{N+k} = x_k + \imath y_k, & \imath = \sqrt{-1} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $p_1, \dots, p_N; q_1, \dots, q_N$ son ciertas funciones.

Designemos por medio de H_1 y H_2 las funciones tales que

$$H = H_1 + \imath H_2 \in \text{Hol.}(D), \quad D \subset \mathbb{C}^{2N} \quad (1.2),$$

es decir [1]

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{Z}_k} = 0 \quad k = \overline{1, 2N} \quad (1.3),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} = \frac{\partial H_2}{\partial p_k}, \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_k} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial y_k} = \frac{\partial H_2}{\partial x_k} \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_k} = -\frac{\partial H_2}{\partial y_k} \end{cases} \quad (1.4).$$



Sean L_1, L_2, Q_1, Q_2 matrices tales que

$$\begin{cases} L = L_1 + \imath L_2, \\ Q = Q_1 + \imath Q_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

satisfacen las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} L^\alpha = [L^\alpha, Q] + R_\alpha \quad (1.6),$$

donde $L^\alpha = \overbrace{L \cdot L \cdot \dots \cdot L}^{\alpha \text{ veces}}$, $L = L(Z_1, \dots, Z_{2N})$, $Q = Q(Z_1, \dots, Z_{2N})$, R_α son ciertas matrices.

Vamos a exigir de que los elementos de L y Q sean funciones holomorfas en D .

Las funciones H_α , que definimos como sigue

$$H_\alpha = sp L^\alpha, \quad \alpha = \overline{1, N} \quad (1.7),$$

evidentemente que son también funciones holomorfas y tales que

$$\frac{d}{dt} H_\alpha = sp R_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, N} \quad (1.8).$$

De aqui se obtiene la siguiente.

Consecuencia 1.1.

Si la matriz R_α es tal que

1) $sp R_\alpha = 0$, entonces

$$H_\alpha = \text{const.} \quad (1.9)$$

2) $sp R_\alpha = \imath \nu H_\alpha$, $\nu = \bar{\nu}$, entonces

$$|H_\alpha|^2 = \text{const.} \quad (1.10)$$

De (1.9), (1.10) se desprende que

$$1) \quad \begin{cases} H_{1\alpha} = c_{1\alpha}, \\ H_{2\alpha} = c_{2\alpha}, \end{cases}$$

y

$$2) \quad |H^2|^2 = H_{1\alpha}^2 + H_{2\alpha}^2 = c_{1\alpha}^2 + c_{2\alpha}^2.$$

Ilustraremos esta afirmación en los siguientes casos concretos.

2. Existencia de la integral $|H_2|^2 = \text{const}$ en un caso particular.

Previamente analizaremos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \imath g Z_1 + \imath \eta F'(Z_2), & F' = \frac{dF}{dZ_2} \\ \dot{Z}_2 = \imath h Z_2 - \imath \eta Z_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde g, h, η son ciertas funciones, F es una función holomorfa en $D \subset \mathbb{C}^1$.

Designemos por medio de H_2 la expresión

$$Z_1^2 + 2F(Z_2) = (p^2 - q^2 + 2U) + \imath(2pq + 2v) = H_{12} + \imath H_{22}.$$

Como se puede probar

$$\frac{d}{dt} H_2 = \imath \left(2g Z_1^2 + 2h Z_2 F'(Z_2) \right) \quad (2.2).$$

Consecuencia 2.1.

Si se cumple que

$$\bar{h} = h, \quad g = h\mu, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.3),$$

y la función F es tal que

$$Z_2 F'(Z_2) = 2\mu F(Z_2) \quad (2.4),$$

entonces $|H_2|^2$ es integral primera de (2.1).

En efecto de (2.2)-(2.4) se tiene que

$$\frac{d}{dt} H_2 = \imath 2h\mu H_2 = sp R_2 \quad (2.5),$$

es decir

$$\frac{d}{dt} (H_2 \cdot \bar{H}_2) = 0.$$

Integrando (2.4) se deduce la fórmula

$$F(Z_2) = Z_2^{2\mu} a, \quad a = a_0 + \imath b_0,$$

por tanto

$$\begin{cases} U = \text{Re} \left[(x^2 - y^2 + 2xy\imath)^\mu (a_0 + \imath b_0) \right]; & x \equiv x_2, y \equiv y_2 \\ V = \text{Im} \left[(x^2 - y^2 + 2xy\imath)^\mu (a_0 + \imath b_0) \right]. \end{cases}$$

En el caso particular cuando $\mu = 1/2$, entonces

$$|H_2|^2 = \left(p^2 - q^2 + 2(a_0x - b_0y) \right)^2 + \left(2pq + 2(a_0y + b_0x) \right)^2.$$

Este último ejemplo se ilustra en el movimiento de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto fijo en el caso de Kovalevskaja. En realidad, como es sabido la rotación en un campo de fuerzas ejesimétrico (el eje de simetría pasa por el punto inmóvil) se describe por el sistema lagrangiano con L :

$$L = 1/2 \left(I_1 (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + I_2 (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right) - V(\theta, \varphi, \psi),$$

donde θ, ψ, φ son los ángulos de Euler, I_1, I_2, I_3 son los momentos de inercia.

Si designamos por medio de Z_1, Z_2, μ las siguientes expresiones

$$\begin{cases} Z_1 = \dot{\zeta} Z_2, & \zeta = \psi + i \ell_n(|tg\theta/2|) \\ Z_2 = \sin \theta \exp i(\pi/2 - \varphi), \\ \mu = 1 - \frac{I_3}{I_1} \\ F'(Z_2) = \partial_x U + i \partial_y U = a_0, & a_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

de lo expuesto resulta la integral de Kovalevskaja:

$$|H_2|^2 = (p^2 - q^2 + 2a_0x)^2 + (2pq + 2a_0y)^2 = \text{const},$$

donde

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & x = \sin \theta \cos(\pi/2 - \varphi), \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, & y = \sin \theta \sin(\pi/2 - \varphi). \end{cases}$$

Las ecuaciones (2.1) son de interés y en el caso cuando g, h, η son constantes.

Bajo estas restricciones se obtienen las igualdades (donde suponemos que $\eta = i$),

$$\begin{cases} \ddot{Z}_2 = i(h + g)\dot{Z}_2 + \phi'(Z_2) \\ \phi'(Z_2) = ghZ_2 - F'(Z_2), & \phi = U + iV \end{cases} \quad (2.6).$$

Considerando que [1]

$$\phi'(Z_2) = \partial_x U - i \partial_y U, \quad (2.7)$$



entonces de (2.6) resulta que

$$\begin{cases} \ddot{x} + (h + g)\dot{y} = \partial_x U \\ \ddot{y} - (h + g)\dot{x} = -\partial_y U \end{cases} \quad (2.8)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} \ddot{x} + (h + g)\dot{y} = \partial_y V \\ \ddot{y} - (h + g)\dot{x} = \partial_x V \end{cases} \quad (2.9)$$

ya que ϕ es holomorfa y por tanto se cumplen las condiciones de Cauchy–Riemann.

$$\begin{cases} \partial_x U = \partial_y V \\ \partial_y U = -\partial_x V \end{cases}$$

Sin mayores dificultades se prueba la siguiente afirmación

Lema 2.1. Sea

$$H_2 = \dot{Z}^2 - 2\phi(Z) = H_1 + \imath H_2 .$$

Si en (2.6) se cumple la igualdad

$$g + h = 0 , \quad (2.10)$$

entonces

$$\begin{cases} H_{12} = \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - 2U = c_{12} , \\ H_{22} = 2\dot{y}\dot{x} - 2V = c_{22} . \end{cases} \quad (2.11)$$

Definamos el campo vectorial hamiltoniano

$$X_{H_{12}} = \frac{\partial H_{12}}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H_{12}}{\partial p_y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial H_{12}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{\partial H_{12}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p_y} = \{H_{12}, \} ,$$

donde $p_x = \dot{x}$, $p_y = \dot{y}$. Se puede probar que

$$X_{H_{12}}(H_{22}) = p_x \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) + p_y \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0$$

por tanto

$$X_{H_{12}}(H) = 0 .$$

Nota. Si en las ecuaciones [3]:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\gamma}} = [\vec{\gamma} \times \vec{\omega}], \\ \dot{\vec{\mu}} = [\vec{\gamma} \times \vec{\psi}] + [\vec{\mu} \times \vec{\omega}], \end{cases}$$

donde $\vec{\omega} = \text{col}\left(\frac{\partial H}{\partial \mu_1}, \frac{\partial H}{\partial \mu_2}, \frac{\partial H}{\partial \mu_3}\right)$, $[\mathbf{x}]$ es el producto vectorial,

$$\vec{\psi} = \text{col}\left(\frac{\partial H}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial H}{\partial \gamma_2}, \frac{\partial H}{\partial \gamma_3}\right),$$

que describen el comportamiento de un cuerpo en un líquido ideal, definir la función H como sigue

$$H = 1/2a_1(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{a_3}{2}\mu_3^2 + a_1b_3\gamma_3\mu_3 + c_1(\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$

donde a_1, a_3, b_3, c_1 son ciertas constantes, entonces se puede demostrar que existe la integral

$$|H_2|^2 = (a_1(\mu_1^2 - \mu_2^2) - c_1(\gamma_1^2 - \gamma_2^2))^2 + (2a_1\mu_1\mu_2 - 2c_1\gamma_1\gamma_2)^2 = \text{const.}$$

3. Existencia de las integrales $H_\alpha = c_\alpha$ en algunos casos particulares

En este apartado analizaremos algunos casos particulares interesantes de las ecuaciones

$$\ddot{Z}_k = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{Z}_k}, \quad k = \overline{1, N} \quad (3.1),$$

donde $\phi \in \text{Hol}(D)$, por consiguiente, las funciones U y V :

$$\phi = U + \imath V \quad (3.2)$$

deben satisfacer las ecuaciones [1] (funciones pluriarmónicas)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Z}_\nu \partial Z_\mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{Z}_\nu \partial Z_\mu} := 0 \quad (3.3)$$

De (3.1) se deducen las ecuaciones equivalentes

$$\begin{cases} \ddot{x}_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \\ \ddot{y}_\nu = -\frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \end{cases} \quad (3.4)$$

y

$$\begin{cases} \ddot{x}_\nu = \frac{\partial V}{\partial y_\nu}, \\ \ddot{y}_\nu = \frac{\partial V}{\partial x_\nu}. \end{cases} \quad (3.5)$$

De estas ecuaciones se tiene que

$$\begin{cases} H_{12} = \sum_\nu (\dot{x}_\nu^2 - \dot{y}_\nu^2) - 2U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_N) = c_{12}, \\ H_{22} = 2 \sum \dot{x}_\nu \dot{y}_\nu - 2V(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) = c_{22}. \end{cases}$$

Se puede probar que para el campo vectorial

$$\begin{aligned} X_{H_{12}} &= \sum \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{12}}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial y_k} - \frac{\partial H_{12}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial H_{12}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) = \\ &= \{H_{12}, \cdot\}, \quad p_k = \dot{x}_k, \quad q_k = \dot{y}_k, \end{aligned}$$

se cumple

$$X_{H_{12}}(H_{22}) = \{H_{12}, H_{22}\} = 0.$$

Ejemplos.

1) Cadena de Toda compleja [2].

Sea

$$\phi = \sum_k \exp(Z_{k+1} - Z_k),$$

por tanto

$$\begin{cases} U = \exp(x_{k+1} - x_k) \cdot \cos(y_{k+1} - y_k), \\ V = \exp(x_{k+1} - x_k) \cdot \sin(y_{k+1} - y_k). \end{cases}$$

Las ecuaciones (3.4) toman la forma

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_k = p_k \\ \dot{p}_k = \exp(x_{k+1} - x_k) \cos(y_{k+1} - y_k) - \exp(x_k - x_{k-1}) \cos(y_k - y_{k-1}) \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{y}_k = q_k \\ \dot{q}_k = \exp(x_{k+1} - x_k) \sin(y_{k+1} - y_k) - \exp(x_k - x_{k-1}) \sin(y_k - y_{k-1}). \end{cases} \end{cases}$$

Como se demostró en [2], estas ecuaciones se pueden representar como un par de Lax (1.6) (con $R_\alpha = 0$) si determinar las matrices L y Q como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} L_{kk} = Z_k \\ L_{k,k+1} = L_{k+1,k} = \exp \frac{1}{2}(Z_{k+1} - Z_k) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_{kk} = 0 \\ Q_{k,k+1} = -Q_{k+1,k} = \exp \frac{1}{2}(Z_{k+1} - Z_k). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Evidentemente que estas funciones son holomorfas en $\mathbb{C}^N$.

Consecuencia 3.1.

Los campos vectoriales $X_{H_{12}}$, $X_{H_{22}}$ y el campo de Toda

$$X_T = \lim_{y \rightarrow 0} X_{H_{12}}$$

son completamente integrables [2].

Afirmaciones análogas se pueden realizar para los casos siguientes:

a) Sistema de Calodgero complejo:

$$H_2 = \sum \left(\frac{\dot{Z}_k^2}{2} - \frac{1}{(Z_{k+1} - Z_k)^2} \right),$$

por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{12} = \sum \left(\frac{(p_k^2 - q_k^2)}{2} + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2 - (y_{k+1} - y_k)^2}{|Z_{k+1} - Z_k|^4} \right) \\ H_{22} = \sum \left(p_k q_k + \frac{2(x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k)}{|Z_{k+1} - Z_k|^4} \right) \end{array} \right.$$

b) Sistema de Moser-Calodgero complejo [2]

c) Sistema con hamiltoniano:

$$H_2 = \sum \left(\frac{\dot{Z}_k^2}{2} + \zeta(Z_{k+1} - Z_k) \right)$$

donde ζ es la función Zeta de Weirstrass:

$$\zeta(Z) = \frac{1}{Z} + \sum_{n,m} \left[\frac{1}{(Z - \Omega_{nm})} + \frac{1}{\Omega_{nm}} + \frac{Z}{\Omega_{m,n}^2} \right].$$

Hacemos notar que las representaciones de Lax para los sistemas descritos son extensiones naturales al campo complejo de las representaciones clásicas conocidas [3].

Bibliografía

1. B. Shabat. "Introducción al Análisis complejo", Ed., Nauka, 1969, Moscú.
2. R. Ramírez, N. Sadovskaia, "Sobre una clase de sistemas hamiltonianos integrables en el sentido de Jacobi", Mathematics Preprint Series No. 81, June 1990, Universidad de Barcelona (España).
3. B. Dubrovin, J. Krichever, S. Novikov, "Sistemas integrables I", Serie "Problemas modernos de las matemáticas" (Sistemas dinámicos 4), 1985, Moscú.



