



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Les Cadenes de Màrkov homogènies a temps discret i l'aplicació als sistemes Bonus-Malus

Autor: Marc Pons Morell

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

This work aims to describe the Chains of Markov homogeneous at discrete time and show their application at the pricing systems Bonus Malus.

Given a Markov chain, the work defines the transition probabilities between the different states, always fulfilling the Markov property and homogeneity. These probabilities can be written using the transition matrix. It classifies the states into classes using the relation of being “communicated”, $\leftrightarrow$, although there may also be “uncommunicated” states which are left unclassified. In relation to the transition probabilities after n steps, it defines concepts such as the transience/recurrence of states and their periodicity. To finish the theory, it studies the behavior of the chain after n steps, when $n \rightarrow \infty$, defines the stationary distribution and the steady-state distribution, and gives conditions for them to exist.

Finally, it provides a brief description of the Bonus-Malus systems, and specifically defines two: the classic UK system and the Brazilian one. It gives a numerical example for both systems. Applying the theory it finds the transition matrix, sees that the steady state distribution exists, and finds it. It also defines some terms specific of the insurances such as the average pure premium and the condition for the system to be balanced in pure premium.

Resum

Aquest treball té com a objectiu descriure les Cadenes de Màrkov homogènies a temps discret i mostrar l'aplicació d'aquestes als sistemes de tarificació Bonus Malus.

Donada una cadena de Màrkov, el treball defineix les probabilitats de transició entre els diferents estats, sempre complint la propietat de Màrkov i l'homogeneïtat. Aquestes probabilitats poden ser escrites mitjançant la matriu de transició. Classifica els estats en classes mitjançant la relació d'ésser “comunicats”, $\leftrightarrow$, encara que també poden haver-hi estats “incomunicats” que deixa sense classificar. En relació a les probabilitats de transició després de n passos, defineix conceptes com la transitorietat/recurrència dels estats i la seva periodicitat. Per acabar la teoria estudia el comportament de la cadena després de n passos, quan $n \rightarrow \infty$, defineix la distribució estacionària i la distribució d'estat estable, i dona condicions per què existeixin.

Finalment realitza una breu descripció dels sistemes Bonus-Malus, i en concret en defineix dos: el sistema clàssic del Regne Unit i el brasiler. Dona un exemple numèric per als dos sistemes. Aplicant-hi la teoria troba la matriu de transició, veu que existeix la distribució d'estat estable i la troba. També defineix algun terme propi de les assegurances com la prima pura mitjana i la condició perquè el sistema estigui equilibrat en prima pura.

Agraïments

Vull agrair a en Josep Vives, el meu tutor en aquest treball, per la comprensió mostrada durant tot el procés.

Vull extendre les gràcies, no només pel treball, sinó per tota la carrera als amics que m'han animat a no rendir-me, i en especial a la meva família, que sempre m'ha transmès el seu suport i la seva confiança.

Índex

Introducció	1
1 Cadenes de Màrkov	3
1.1 Conceptes previs	3
1.2 Cadena de Màrkov i matriu de transició	4
1.3 Classificació d'estats	8
1.3.1 Classe d'estats tancada	16
1.3.2 Periodicitat	17
1.4 Probabilitats en els límits	19
1.5 Distribucions estacionàries i d'estat estable	25
2 Sistemes Bonus-Malus	31
2.1 Conceptes econòmics	31
2.2 Definició dels sistemes Bonus-Malus	32
2.2.1 SBM clàssic del Regne Unit	33
2.2.2 SBM brasiler	34
2.3 Exemple	35
Conclusions	39

Introducció

Sempre en la vida m'ha costat decidir, i més quan més opcions hi ha: “vols postres?”, primera pregunta. Si la resposta és afirmativa s'obre un ventall de possibilitats, que és més ample els dies festius, “Hi ha gelat, fruita, iogurts...” I dins cada una d'aquestes opcions almenys dues opcions més. És molt complicat elegir. Quan veus la pel·lícula de *Mr Nobody* comprens que elegir equival a descartar. Concretament descartes totes les opcions que no has elegit. Quan eligeixo unes postres, com tinc una gana finita, suposem que per menjar només 1 postres, estic descartant tots els que no em menjaré. I si en menjo dues per no descartar-ne cap dels dos que em menjo, segurament estic descartant berenar perquè llavors no tindrè gana. O com a mínim, berenaré menys o més tard del que per mi és habitual. En la vida tot són eleccions, encara que moltes les fem de manera inconscient, tanta sort. Com he dit no m'agrada elegir, suposo que és perquè no m'agrada descartar.

Suposem el cas concret en que després de cada dinar he de triar si vull postres o no, i com no m'agrada descartar, si en vull sempre serà diferent al del dia anterior, o serà un qualsevol si el dia anterior no he volgut postres. Si ara pensem la decisió en termes de probabilitat, aleshores tornant a la primera pregunta, puc pensar que voldré postres en un, per exemple, 80% dels casos. I si vull postres aleshores trio gelat, fruita o iogurts en la mateixa proporció ($1/2$ si només tinc dues opcions perquè el dia anterior vaig menjar postres, o $1/3$ si el dia anterior no vaig menjar res de postres). Podem calcular per exemple les probabilitats que divendres mengi gelat coneixent que avui dimecres he menjat fruita. Observem que només hi ha dos camins possibles: que dijous mengi iogurt o no mengi res. La suma de probabilitats dels dos camins, respectivament, ens donen com a resultat la probabilitat de $0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot 1/3 = 0.16 + 0.0533 = 0.2133$. Podem fer-nos més preguntes, canviar opcions de les postres, canviar condicions. La qüestió és que aquest exemple defineix una cadena de Màrkov. Aquesta ha estat la principal motivació del treball, aprendre la teoria de les cadenes de Màrkov homogènies a temps discret per ampliar coneixements i ser capaç de contestar algunes preguntes en relació al cas concret anterior: A llarg plaç hi ha algunes postres que siguin més recurrents? Si avui trio gelat, què estic descartant realment? Té rellevància el que eligeixo avui a llarg plaç? Aquesta pregunta realment em desperta curiositat. La resposta és que depèn, però això ja es veurà a mesura que s'avanci en la lectura del treball.

Per no quedar-nos només en el marc teòric he volgut veure una aplicació pràctica de les cadenes de Màrkov i he elegit l'aplicació en els sistemes Bonus-Malus (sí... descartant-ne moltes altres).

L'estructura del treball és la següent: dos capítols.

- En el primer s'inclou tota la teoria de les cadenes de Màrkov homogènies a temps discret. Una primera secció amb conceptes que s'han de conèixer per definir les cadenes de Màrkov, i després ja com a conceptes propis hi tenim les matrius de transició, la classificació dels estats, i les probabilitats en els límits que tenen una forta relació amb les distribucions estacionària i d'estat estable. També s'hi afegeix algun exemple.
- En el segon s'explica l'aplicació de les cadenes als sistemes Bonus-Malus. Es fa una introducció donant un context i definint alguns termes d'assegurances necessaris per més tard explicar dos sistemes concrets i acabar veient-ho donant valors reals a les probabilitats de transició.

Per escriure el treball he anat seguint sobretot els llibres: [1], [2] i [3] per a la teoria de les cadenes de Màrkov; i els apunts [4], [5] i [8] per a l'aplicació als sistemes Bonus-Malus.

Capítol 1

Cadenes de Màrkov

1.1 Conceptes previs

Començarem la teoria sobre les Cadenes de Màrkov fent algunes definicions prèvies que ajudaran a situar-nos:

Definició 1.1.1. Un *espai mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ és una parella formada per:

- L'espai mostral Ω : És un conjunt i els seus elements, ω , representen tots els resultats possibles d'un fenomen aleatori.
- Una família de subconjunts de Ω , $\mathcal{F}$, que té estructura de σ -àlgebra. Els seus elements s'anomenen esdeveniments i són els subconjunts de Ω que tindran assignada una probabilitat.

Definició 1.1.2. Un *espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és una terna formada per:

- Un espai mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.
- La mesura de probabilitat P : És una aplicació $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que retorna la probabilitat d'un esdeveniment. Compleix la σ -additivitat i $P(\Omega) = 1$.

Definició 1.1.3. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i un espai mesurable (S, Σ) , una aplicació $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S, \Sigma)$ és una **variable aleatòria** (v.a.) si és una aplicació $(\mathcal{F}, \Sigma)$ -mesurable. És a dir, si per tot $\sigma \in \Sigma$, $X^{-1}(\sigma) \in \mathcal{F}$.

Definició 1.1.4. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i un espai mesurable (S, Σ) , un **procés estocàstic** és una família de variables aleatòries indexades en un conjunt T que prenen valors en S i podem escriure com: $\{X_t, t \in T\}$.

Observacions 1.1.5.

1. El conjunt T pot ser discret (finit o numerable, per exemple $T = \mathbb{N}$), o bé, no numerable (per exemple $T = \mathbb{R}$). El conjunt T habitualment representa el temps, així doncs, si T és discret diem que es tracta d'un **procés estocàstic a temps discret**, i si T és no numerable diem que es tracta d'un **procés estocàstic a temps continu**.

2. El conjunt S l'anomenem **espai d'estats**. Els possibles valors que prenen les variables aleatòries formen el conjunt S . Si T és discret, aleshores S també. (Si T és no numerable, S pot ser o no discret). En tot cas, $\text{card}(S) \leq \text{card}(T)$.

1.2 Cadena de Màrkov i matriu de transició

Després d'haver vist les definicions anteriors podem definir el concepte protagonista del treball: la cadena de Màrkov homogènia a temps discret. En aquesta secció he seguit sobretot el llibre ja citat en la introducció [3], i els apunts de l'assignatura de processos estocàstics [7].

Definició 1.2.1. Una **cadena de Màrkov a temps discret** és un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ a temps discret que compleix:

1. La **propietat de Màrkov** : $P(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$, per qualsevol $n, n+1 \in T$ i per qualssevol $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$.
2. El procés només pot prendre un nombre finit o numerable de valors, és a dir, S és discret.

Observacions 1.2.2.

1. Anàlogament es defineix la cadena de Màrkov a temps continu com un procés estocàstic a temps continu. No l'estudiarem.
2. La segona condició de la definició anterior es compleix automàticament en el cas de la cadena de Màrkov a temps discret com a conseqüència de ser un procés estocàstic a temps discret.
3. Sovint prendrem $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ o , si més no, un subconjunt de $\mathbb{N} \cup \{0\}$, i es farà abús de notació.
4. Es diu que la cadena de Màrkov no té memòria ja que no importen els estats previs, només el present té rellevància en el futur.

I dintre de les cadenes de Màrkov a temps discret ens centrarem en unes en particular: les cadenes de Màrkov homogènies.

Definició 1.2.3. Una cadena de Màrkov (a temps discret) direm que és **homogènia** si

$$P(X_{n+1} = i | X_n = j) = P(X_n = i | X_{n-1} = j) = p_{ij}, \quad \forall n > 0$$

La probabilitat p_{ij} és independent de la n , és independent del temps en què ens trobem.

Definició 1.2.4. Anomenem a aquesta probabilitat p_{ij} , **probabilitat de transició**, i indica la probabilitat d'avançar a l'estat j des de l'estat i en un pas.

Veiem a continuació un exemple de Cadena de Màrkov homogènia.

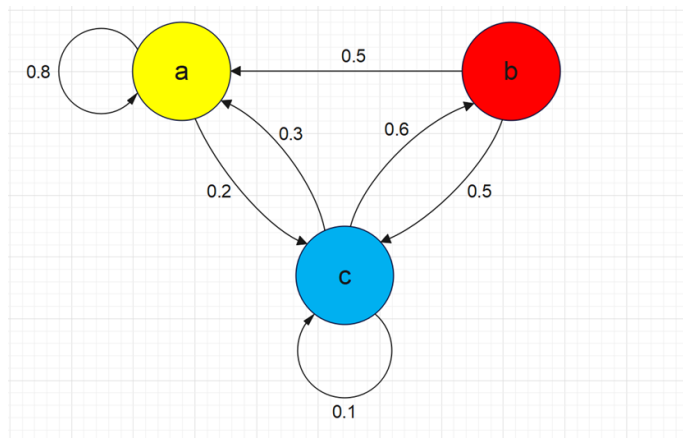


Figura 1.1: Diagrama d'una Cadena de Màrkov

Exemple 1.2.5. L'espai d'estats és $S = \{a, b, c\}$, i si no ho especifiquem, per defecte prenem $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Els nombres que es troben vora les fletxes representen les probabilitats de transició entre dos estats. Així doncs el 0.5 situat sobre la fletxa que uneix l'estat b amb l'estat a és la p_{ba} . I anàlogament per la resta de nombres.

Aquestes probabilitats les podem escriure en forma matricial:

$$P = (p_{ij})_{(i,j) \in S \times S} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

A aquesta matriu P l'anomenarem **matriu de transició**.

Definició 1.2.6. Una matriu $P = (p_{ij})_{(i,j) \in S \times S}$ és de **transició** (o també, matriu estocàstica) si, i només si:

1. $p_{ij} \in [0, 1]$, $\forall i, j \in S$
2. $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, $\forall i \in S$

Comentari 1.2.7. En les cadenes de Màrkov no homogènies, les probabilitats de transició no són fixes, varien segons el temps t en que ens trobem. Per tant, en cada pas $t = 1, 2, \dots$ tenim una nova matriu de transició $(p_{ij})_t$.

Tenim doncs les probabilitats de transició entre els estats $i \in S$ en cada pas. Ara definim la **distribució inicial** com el conjunt $\{p_i, i \in S\}$ tal que $\sum_{i \in S} p_i = 1$, on $p_i = P(X_0 = i)$. Aquest p_i és la probabilitat inicial de ser a l'estat i a temps zero.

Observació 1.2.8. En un espai de probabilitat (Ω, F, P) , sigui $\{X_n, n \geq 0\}$ una successió de variables aleatòries discretes, i S l'espai d'estats, podem escriure la probabilitat conjunta de n esdeveniments com un producte de probabilitats condicionades:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \prod_{t=1}^n P(X_t = i_t | X_s = i_s, 0 \leq s < t)$$

$\forall n \geq 0$ i $\forall i_n \in S$. I això és cert per a tot procés estocàstic. Ara bé, en el cas d'una cadena de Màrkov les probabilitats condicionades de l'expressió anterior es redueixen a la forma:

$$P(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}) = p_{i_{t-1}i_t}$$

per la propietat de Màrkov . Si també escrivim

$$P(X_0 = i) = p_i,$$

aleshores ens queda

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0} \prod_{t=1}^n p_{i_{t-1}i_t} = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \quad (1.2.1)$$

Ara provarem que donada una descripció d'un procés estocàstic a partir de l'espai d'estats, la matriu de transició i la distribució inicial podem construir de forma natural una successió de variables aleatòries que satisfan la propietat de Màrkov , és a dir, una Cadena de Màrkov homogènia.

Proposició 1.2.9. *Sigui un procés estocàstic a temps discret $\{X_n, n \geq 0\}$, i donats l'espai d'estats S , la distribució inicial $\{p_i\}$ i la matriu de transició $P = (p_{ij})$, amb $i, j \in S$. Aleshores el procés $\{X_n, n \geq 0\}$ és una Cadena de Màrkov homogènia.*

Demostració 1.2.10. *Hem de veure que les variables aleatòries del procés compleixen la propietat de Màrkov :*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) &= \frac{P(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1})}{P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} \\ &= \frac{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_n i_{n+1}}}{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}} = p_{i_n i_{n+1}} \end{aligned}$$

Estem assumint que els denominadors són diferents de 0 i en la segona igualtat hem aplicat (1.2.1). I per altra banda, també tenim que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) &= \frac{P(X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{P(X_n = i_n)} \\ &= \frac{\sum_{j_0, \dots, j_{n-1} \in S} P(X_0 = j_0, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{\sum_{j_0, \dots, j_{n-1} \in S} P(X_0 = j_0, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = i_n)} \\ &= \frac{\sum_{j_0, \dots, j_{n-1} \in S} p_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} i_n} p_{i_n i_{n+1}}}{\sum_{j_0, \dots, j_{n-1} \in S} p_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} i_n}} \\ &= p_{i_n i_{n+1}} \end{aligned}$$

L'homogeneïtat també s'assoleix.

□

Introduïm ara les **probabilitats de transició de n passes**, $p_{ij}^{(n)}$. Comencem denotant

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Després, posem $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, i definim successivament per $n \geq 1$:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)} \quad (1.2.2)$$

La relació també és vàlida per $n = 0$. A continuació provarem que per qualsevol $m \geq 0$, tenim:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i), \quad (1.2.3)$$

així es justifica el nom de "probabilitats de transició de n passes". Per $n = 1$ es redueix a la probabilitat de transició d'un pas ja coneguda. Suposem que (1.2.3) es compleix per un cert valor de n i que $i, j \in S$, aleshores per la propietat de Màrkov :

$$\begin{aligned} & P(X_{m+n+1} = j | X_m = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = k, X_{m+n+1} = j | X_m = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = k | X_m = i) P(X_{m+n+1} = j | X_m = i, X_{m+n} = k) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = k | X_m = i) P(X_{m+n+1} = j | X_{m+n} = k) \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)} = p_{ij}^{(n+1)} \end{aligned}$$

Llavors (1.2.3) ha quedat demostrat per inducció.

La **distribució de probabilitat absoluta** de X_n es donada per l'expressió:

$$p_i^{(n)} = P(X_n = i) = \sum_{j \in S} p_j p_{ji}^{(n)}, \quad \forall n \geq 0, i \in S.$$

Podem generalitzar l'equació (1.2.2) tal i com segueix:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \quad \forall n \geq 0, m \geq 0. \quad (1.2.4)$$

Veiem-ho com abans, per inducció. Per $m = 0$ és trivial. Suposem que (1.2.4) es compleix per un cert m i per a tot n, i, j , llavors tenim

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m+1)} &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n+m)} p_{kj}^{(1)} = \sum_{k \in S} \left(\sum_{l \in S} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \right) p_{kj}^{(1)} \\ &= \sum_{l \in S} p_{il}^{(n)} \left(\sum_{k \in S} p_{lk}^{(m)} p_{kj}^{(1)} \right) = \sum_{l \in S} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m+1)} \end{aligned}$$

Notem que podem escriure les $p_{ij}^{(n)}$ en forma matricial:

$$P_n = p_{ij}^{(n)}$$

Observació 1.2.11. *Seguint la definició que hem fet sobre les matrius de transició o estocàstiques, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de transició aleshores la matriu producte $C = AB$ es defineix com*

$$c_{ij} = \sum_{k \in S} a_{ik} b_{kj},$$

on c_{ij} són els seus elements i C és també una matriu de transició.

Ajuntant l'observació anterior amb la informació que hem donat sobre les probabilitats de transició de n passes, deduem vàries propietats sobre les matrius de transició. L'equació (1.2.2) afirma que la matriu de transició de n passes $(p_{ij}^{(n)})$ és la matriu de transició d'una passa elevada a la n -èssima potència:

$$(p_{ij}^{(n)}) = (p_{ij})^n$$

L'equació (1.2.4) és l'anomenada equació de Chapman-Kolmogórov i denota la llei d'exponenciació de matrius, $P^{n+m} = P^n P^m$. Notem també que $(p_{ij}^{(0)})$ és la matriu unitat.

1.3 Classificació d'estats

En aquesta secció classificarem els estats segons les propietats de les seves probabilitats de transició. Segueixo els llibres [2] i [1].

Comencem definint la següent relació entre estats. Diem que i *conduïx a* j i escrivim $i \rightsquigarrow j$ si i només si existeix un m positiu tal que $p_{ij}^{(m)} > 0$. Cada estat conduïx a algun estat. Diem que i i j es comuniquen si i només si $i \rightsquigarrow j$ i $j \rightsquigarrow i$, aleshores escrivim $i \longleftrightarrow j$. La relació $\rightsquigarrow$ generalment no és ni reflexiva ni simètrica, però sí és transitiva degut a

$$p_{ik}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)}$$

per a qualssevol $i, j, k \in S$ on S és l'espai d'estats, i per a tot $n, m \geq 0$. La desigualtat és una conseqüència de (1.2.4). La relació $\longleftrightarrow$ és simètrica i transitiva, però no reflexiva. Podem utilitzar aquesta relació per dividir els estats en classes disjunes.

Definició 1.3.1. *Una **classe d'estats** és un subconjunt de l'espai d'estats tal que qualssevol dos estats (diferents o no) de la classe es comuniquen entre ells.*

Aquesta definició de classe ens recorda a les classes d'equivalència, però com hem indicat la relació $\longleftrightarrow$ no és necessàriament reflexiva ja que pot haver-hi un estat que no conduïxi a ell mateix i per tant no es comuniqui amb cap altre estat, llavors no és una relació d'equivalència. Aquests estats "incomunicats" són simplement estats no classificats. Per altra banda tenim que una classe pot consistir en únic estat, és el cas on $p_{ii} = 1$. A aquest estat l'anomenem **estat absorbent**. Dues classes diferents han de ser obligatòriament disjunes, perquè si tenen un element comú s'uneixen directament via aquest element.

Exemples 1.3.2.

1. Recuperant l'exemple anterior, podem observar a partir de la figura (1.1) que els 3 estats a, b i c estan comunicats entre ells, malgrat que $p_{bb}^{(1)} = 0$. Llavors esdevé un exemple poc interessant en quant a la classificació dels seus estats.
2. Fixem-nos ara en el següent diagrama: L'existència de fletxes entre dos estats

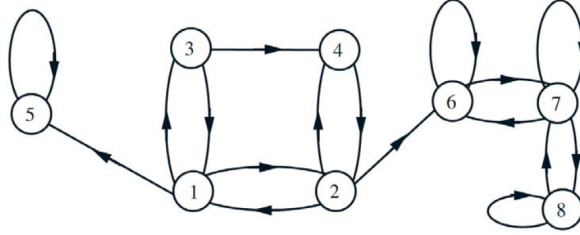


Figura 1.2: Classificació d'estats amb un diagrama

indica que la probabilitat per anar de l'estat origen a l'estat destí en un pas és major que zero, $p_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in S = \{1, 2, \dots, 8\}$. Comencem l'anàlisi observant que l'estat 5 és absorbent, i per tant ell sol forma una classe. Anomenem A al conjunt format pels estats $\{1, 2, 3, 4\}$, i $B = \{6, 7, 8\}$. Els estats de A estan comunicats entre ells $i \rightsquigarrow j, \quad \forall i, j \in A$. Siguin i, j dos elements qualssevol tals que $i \in A, j \in B \cup \{5\}$, aleshores $i \rightsquigarrow j$ però $j \not\rightsquigarrow i$. Per tant el conjunt A forma una altra classe. En el cas de B també passa que tots els seus elements estan comunicats entre ells, però cap d'ells està comunicat amb un estat que no pertanyi a B , llavors B també forma una altra classe d'estats.

El diagrama de l'exemple 2 és extret de [6], veure la bibliografia.

En les cadenes de Màrkov el primer temps d'ocurrència d'una seqüència d'esdeveniments és un concepte important. Sigui $\{X_n\}$ una cadena de Màrkov, j un estat qualsevol i T el primer temps en que succeeix l'estat j (a partir de X_1), formalment:

$$T_j = \min\{n \geq 1 | X_n = j\},$$

El costat dret de la igualtat el llegim com el mínim valor de n tal que $X_n = j$. Pot ocórrer que no existeixi cap n que compleixi l'expressió anterior, aleshores posem $T_j = \infty$. Amb aquest conveni T_j és una variable aleatòria que pren valors en $\mathbb{N} \cup \infty = \{1, 2, \dots, \infty\}$. A continuació escrivim la funció de distribució de T_j . Per simplificar la notació escrivem $P_i(\cdot)$ per probabilitats que comencen a l'estat i . Aleshores escrivim, per $n \in \mathbb{N} \cup \infty$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i(T_j = n)$$

i també

$$f_{ij}^* = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(T_j < \infty)$$

Segueix que

$$P_i(T_j = \infty) = f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}^*$$

Així que $\{f_{ij}^{(n)}, n \in N_\infty\}$ és la funció de distribució de T_j per la cadena que comença des de i .

Podem donar unes altres expressions més explícites per a $f_{ij}^{(n)}, f_{ij}^{(\infty)}, f_{ij}^*$:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)} &= p_{ij} = P_i(X_1 = j), \\ f_{ij}^{(n)} &= P_i(X_v \neq j \text{ per } 1 \leq v < n; X_n = j), n \geq 2; \\ f_{ij}^{(\infty)} &= P_i(X_v \neq j \text{ per a tot } v \geq 1); \\ f_{ij}^* &= P_i(X_v = j \text{ per a algun } v \geq 1). \end{aligned}$$

Podem llegir $f_{ij}^{(n)}$ com la probabilitat que el primer cop que ens trobem a l'estat j succeeixi a temps n , quan l'estat inicial és i . Notem que es pot donar $i = j$, i aleshores $f_{ii}^{(n)}$ es llegeix com la probabilitat que el primer retorn a i succeeixi a temps n , quan l'estat inicial és i . En les anteriors expressions estem suposant que l'estat inicial és i però per l'homogeneïtat de les cadenes de Màrkov tenim

$$f_{ij}^{(n)} = P_i(X_{m+v} \neq j \text{ per } 1 \leq v < n; X_{m+n} = j | X_m = i),$$

per qualsevol m tal que la probabilitat condicionada estigui ben definida. El següent teorema connecta $f_{ij}^{(n)}$ i $p_{ij}^{(n)}$. Abans però donem una definició més generalitzada de la propietat de Màrkov.

Definició 1.3.3. Propietat de Màrkov :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i; A) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad \forall n, n+1 \in T, \forall i, j \in S \quad (1.3.1)$$

on S i T són l'espai d'estats i el temps, respectivament. A representa un esdeveniment arbitrari determinat només per $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$. Així doncs pot ser un "passat" específic de la forma $X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$ (així ho denotàvem en l'anterior definició de la propietat de Màrkov), o A pot ser un esdeveniment anterior més genèric tal que $X_0 \in S_0, X_1 \in S_1, \dots, X_{n-1} \in S_{n-1}$ on S_i són subconjunts de S .

Teorema 1.3.4. (Teorema de la Primera Entrada). Per qualsevol i i j , i qualsevol $1 \leq n < \infty$, es compleix

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} \quad (1.3.2)$$

Demostració 1.3.5. Intuïtivament, per ser a l'estat j després de n passos hem d'aconseguir ser a j per primera vegada al pas v , $1 \leq v \leq n$. Aconseguit això ens trobem a l'estat j i hi hem de tornar a ser després dels $n - v$ passos restants. Veiem

la demostració formal:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &\stackrel{(1)}{=} P_i(X_n = j) \stackrel{(2)}{=} P_i(T_j \leq n; X_n = j) \stackrel{(3)}{=} \sum_{v=1}^n P_i(T_j = v; X_n = j) \\
&\stackrel{(4)}{=} \sum_{v=1}^n P_i(T_j = v) P_i(X_n = j | T_j = v) \\
&\stackrel{(5)}{=} \sum_{v=1}^n P_i(T_j = v) P_i(X_n = j | X_1 \neq j, \dots, X_{v-1} \neq j, X_v = j) \\
&\stackrel{(6)}{=} \sum_{v=1}^n P_i(T_j = v) P(X_n = j | X_v = j) \\
&\stackrel{(7)}{=} \sum_{v=1}^n P_i(T_j = v) P_j(X_{n-v} = j) \\
&\stackrel{(8)}{=} \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}
\end{aligned}$$

Explicuem cada una de les igualtats: (1) és la definició de $p_{ij}^{(n)}$; (2) perquè $(X_n = j)$ implica que $(T_j \leq n)$; (3) degut a que els esdeveniments $(T_j = v)$ per $1 \leq v \leq n$ són disjunts; (4) apliquem la definició de probabilitat condicionada; (5) és per la definició de $(T_j = v)$; (6) per la propietat de Màrkov de la definició (1.3.3), ja que $\{X_1 \neq j, \dots, X_{v-1} \neq j\}$ juntament $\{X_0 = i\}$ implícit en la notació P_i , formen un esdeveniment anterior al temps v ; (7) per l'homogeneïtat de la transició de j a j en $n - v$ passos; (8) és notació.

□

Lema 1.3.6. $i \rightsquigarrow j$ és equivalent a $f_{ij}^* > 0$.

Demostració 1.3.7. Si $f_{ij}^* = 0$, aleshores $f_{ij}^{(n)} = 0$ per a tot n i del Teorema de la Primera Entrada tenim que $p_{ij}^{(n)} = 0$ per a tot n . Per tant, és fals que $i \rightsquigarrow j$. En canvi, si $f_{ij}^* > 0$, llavors $f_{ij}^{(n)} > 0$ per algun n ; i com $p_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n)}$ per la pròpia definició d'ambdues probabilitats, tenim $p_{ij}^{(n)} > 0$, i per tant $i \rightsquigarrow j$.

Ara definim dos conceptes importants en la classificació dels estats.

Definició 1.3.8. Un estat i diem que és **recurrent**, si i només si $f_{ii}^* = 1$; i **transitori** si i només si $f_{ii}^* < 1$.

Notem que un estat ha de ser recurrent o transitori, ha de ser un (i només un) dels dos. És útil tenir un criteri per la recurrència en termes de les probabilitats $p_{ii}^{(n)}$, ja que normalment són números més bons de fer anar que els de f_{ii}^n .

Teorema 1.3.9. L'estat i és recurrent, si i només si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Demostració 1.3.10. *Per el Teorema de la Primera Entrada,*

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ii}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)},$$

per això

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^n f_{ii}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)} = \sum_{v=1}^{\infty} f_{ii}^{(v)} \sum_{n=v}^{\infty} p_{ii}^{(n-v)} = f_{ii}^* \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

Així doncs

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii}^* (1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}) \quad (1.3.3)$$

Per tant, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

llavors $f_{ii}^* < 1$, és a dir i és transitori. Ara

$$\sum_{n=1}^N p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^N \sum_{v=1}^n f_{ii}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)} = \sum_{v=1}^N f_{ii}^{(v)} \sum_{n=v}^N p_{ii}^{(n-v)} \leq \sum_{v=1}^N f_{ii}^{(v)} \sum_{r=0}^N p_{ii}^{(r)}$$

I d'aquí, tenim que

$$f_{ii}^* = \sum_{v=1}^{\infty} f_{ii}^{(v)} \geq \sum_{v=1}^N f_{ii}^{(v)} \geq \frac{\sum_{n=1}^N p_{ii}^{(n)}}{\sum_{r=0}^N p_{ii}^{(r)}} \rightarrow 1 \quad \text{quan } N \rightarrow \infty \quad \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

Llavors $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ implica que $f_{ii}^* = 1$, i per tant que l'estat i és recurrent.

□

Corol·lari 1.3.11. Si l'estat i és transitori, llavors

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}^*} \quad .$$

Demostració 1.3.12. *Pel teorema anterior tenim que si l'estat és transitori llavors $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$. Recuperem la igualtat (1.3.3) de la demostració anterior i hi sumem 1 a cada costat:*

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= 1 + f_{ii}^* (1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 + f_{ii}^* \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} - f_{ii}^* \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} (1 - f_{ii}^*) = 1 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= \frac{1}{1 - f_{ii}^*} \quad . \end{aligned}$$

Corol·lari 1.3.13. Si j és un estat transitori i i un estat qualsevol, llavors

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$$

I per tant

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0 \quad \text{quan} \quad n \rightarrow \infty$$

Demostració 1.3.14. Si $i = j$, llavors és directe del teorema anterior. Provem-ho per $i \neq j$. Per teorema de la Primera Entrada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} = \sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} \sum_{n=v}^{\infty} p_{jj}^{(n-v)} = f_{ij}^* \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

Però per ser f_{ij}^* una probabilitat, tenim que és ≤ 1 i $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$ pel teorema (1.3.9). Ajuntant això obtenim el resultat que volem.

Ara volem conèixer la probabilitat de tornar a un estat inicial donat i almenys r cops:

Teorema 1.3.15. Si l'estat inicial és i , la probabilitat de tornar a i almenys r vegades és $(f_{ii}^*)^r$.

Demostració 1.3.16. Si $r = 1$ el resultat és immediat. Suposem que el teorema es compleix quan $r = m - 1$, i sigui T_i el primer temps de tornada a i . Aleshores $P_i(\text{tornar a } i \text{ almenys } m \text{ vegades}) = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(T_i = k, \text{ almenys } m-1 \text{ retorns després de } T_i)$. Però

$$\begin{aligned} & P_i(T_i = k, \text{ almenys } m-1 \text{ retorns després de } T_i) \\ &= P_i(T_i = k) P(X_{T_i+1}, X_{T_i+2}, \dots \text{ tornin a } i \text{ almenys } m-1 \text{ cops} | T_i = k) \\ &= P_i(T_i = k) P(X_{T_i+1}, X_{T_i+2}, \dots \text{ tornin a } i \text{ almenys } m-1 \text{ cops} | X_{T_i} = i, T_i = k) \end{aligned}$$

I per l'homogeneïtat de les cadenes de Màrkov, això es pot escriure com

$$\begin{aligned} & P_i(T_i = k) P(X_{T_i+1}, X_{T_i+2}, \dots \text{ tornin a } i \text{ almenys } m-1 \text{ cops} | X_{T_i} = i) \\ &= P_i(T_i = k) P(X_1, X_2, \dots \text{ tornin a } i \text{ almenys } m-1 \text{ cops} | X_0 = i) \\ &= f_{ii}^{(k)} (f_{ii}^*)^{m-1} \end{aligned}$$

En la darrera igualtat apliquem la hipòtesi d'inducció. Així doncs la probabilitat de tornar a i almenys m vegades és

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} (f_{ii}^*)^{m-1} = f_{ii}^* (f_{ii}^*)^{m-1}$$

obtenint el resultat desitjat.

□

Amb el següent corol·lari del teorema anterior introduïm el concepte de tornar a un estat inicial donat, infinitament sovint (almenys infinites vegades):

Corol·lari 1.3.17. Sigui i l'estat inicial.

1. i és recurrent, si i només si la probabilitat de tornar a i infinitament sovint és 1.
2. i és transitori, si i només si la probabilitat de tornar a i infinitament sovint és 0.

Demostració 1.3.18. Els esdeveniments $\{\text{tornar a } i \text{ almenys } r \text{ vegades}\}$, $r = 1, 2, \dots$ formen una successió contractiva tal que la seva intersecció és $\{\text{tornar a } i \text{ infinitament sovint}\}$. Per tant la probabilitat de tornar a i infinitament sovint és $\lim_{r \rightarrow \infty} (f_{ii}^*)^r$, que és igual a 1 si i només si $f_{ii}^* = 1$, és a dir si i només si i és un estat recurrent; i és igual a 0 si i només si $f_{ii}^* < 1$, és a dir si i només si i és transitori.

A continuació veurem un teorema que ens mostra que la recurrència o transitorietat és una relació de classe d'estats, és a dir que si un estat en una classe és recurrent/transitori, llavors la resta d'estats d'aquella classe també ho són.

Teorema 1.3.19. Si i és recurrent i $i \rightsquigarrow j$, aleshores j és recurrent. A més a més, $f_{ij}^* = f_{ji}^* = 1$. De fet, si f'_{ij} representa la probabilitat que j sigui visitat infinitament sovint quan l'estat inicial és i , llavors $f'_{ij} = f'_{ji} = 1$.

Demostració 1.3.20. Comencem a l'estat i , i sigui T_j el temps de la primera visita a l'estat j . Llavors

$$\begin{aligned} 1 &= f_{ij}^* + f_{ij}^{(\infty)} = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(T_j = k) + f_{ij}^{(\infty)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_i(T_j = k, \text{ infinitament moltes visites a } i \text{ després de } T_j) + f_{ij}^{(\infty)} \end{aligned}$$

(ja que i és recurrent)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_i(T_j = k) P(X_{T_j+1}, X_{T_j+2}, \dots \text{ visitin } i \text{ infinitament sovint} | T_j = k, X_{T_j} = j) \\ &+ 1 - f_{ij}^* \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} P(X_1, X_2, \dots \text{ visitin } i \text{ infinitament sovint} | X_0 = j) + 1 - f_{ij}^*. \end{aligned}$$

I així

$$1 = f_{ij}^* f'_{ji} + 1 - f_{ij}^* \quad \Rightarrow \quad f_{ij}^* = f_{ij}^* f'_{ji}.$$

Com $f_{ij}^* > 0$ per hipòtesi, llavors $f'_{ji} = 1$.

Veiem que j és recurrent. Supposem ara $p_{ij}^{(r)} > 0$ (ho podem suposar per la hipòtesi $i \rightsquigarrow j$), $p_{ji}^{(s)} > 0$ (ho podem suposar perquè acabem de veure que $f'_{ji} = 1$), aleshores

$$p_{jj}^{(n+r+s)} \geq p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)}$$

ja que una manera d'anar de j a j en $n+r+s$ passos és anar de j a i en s passos, de i a i en n passos, i finalment de i a j en r passos. Com i és recurrent, pel teorema (1.3.9) tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, i aleshores per la desigualtat anterior també tenim que $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} = \infty$ i per la qual cosa, j és recurrent.

Finalment, com tenim que j és recurrent i hem provat ja que $f'_{ji} = 1$, i per ser $f_{ji}^* \geq f'_{ji}$, llavors $f_{ji}^* = 1$, és a dir $f_{ji}^* > 0$. Podem repetir i repetim l'argument pel qual hem demostrat que $f'_{ji} = 1$, però ara intercanviant els papers de i i j , obtenim $f'_{ij} = 1$. Hem vist ja que $f_{ji}^* = 1$, com de la mateixa manera tenim $f_{ij}^* \geq f'_{ij} = 1$, llavors $f_{ij}^* = 1$. I el teorema queda demostrat.

Del teorema ens fixem que pel fet que $f_{ji}^* = 1$ i per tant > 0 , llavors $j \rightsquigarrow i$. Així doncs la recurrència és una relació de classe d'estats. Fent el contrarrecíproc veiem que si j és transitori, llavors tenim dues alternatives, o que i sigui recurrent, i per tant $i \rightsquigarrow j$, o bé que $i \rightsquigarrow j$, i per tant i sigui transitori.

Veiem més propietats sobre les cadenes de Màrkov, en aquest cas quan l'espai d'estats és finit.

Teorema 1.3.21. *Si sigui $\{X_n\}$ una cadena de Màrkov finita, és a dir tal que l'espai d'estats S és un conjunt finit; llavors no és possible que tots els estats siguin transitoris.*

En particular, si a cada estat d'una cadena finita es pot arribar des de qualsevol dels altres estats, llavors hi ha una única classe d'estat, el propi conjunt S , on tots els estats són recurrents.

Demostració 1.3.22. *Si sigui $S = \{1, 2, \dots, r\}$, llavors, $\sum_{j=1}^r p_{ij}^{(n)} = 1$ per a cada n . Deixem que $n \rightarrow \infty$. Pel corol·lari (1.3.13) i pel fet que el límit d'una suma finita és la suma dels límits, tenim: $0 = \sum_{j=i}^r \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i}^r p_{ij}^{(n)} = 1$, que és una contradicció!*

Exemples 1.3.23.

1. En la figura (1.1) havíem vist que tots els estats $\{a, b, c\}$ es comuniquen entre ells, i per tant pel teorema anterior, tots formen una única classe d'estat, i tots els estats són recurrents.
2. La figura (1.2) dóna més joc. Havíem vist anteriorment que podíem dividir S en les classes d'estats $S = \{5\} \cup A \cup B$, i cada un d'aquests subconjunts és una classe d'equivalència, amb la relació $\rightsquigarrow$. Podem observar com $\{5\}$ i B són classes tals que tots els seus elements són recurrents, mentre que A és format per estats transitoris. Podem veure com es compleixen els teoremes (1.3.19), ja que un estat recurrent precedeix un altre estat recurrent, i que un

estat recurrent és precedit per un estat recurrent o un altre estat transitori. Observem, arrel d'això últim, que un cop la cadena de Màrkov abandona la classe dels estats transitoris, A , llavors no hi podrà tornar mai, i en particular sempre es mantindrà en $\{5\}$ o en B .

1.3.1 Classe d'estats tancada

Definició 1.3.24. Un subconjunt no buit C de l'espai d'estats S diem que és **tancat**, si i només si, no és possible sortir de C ; això és $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$ per a tot $i \in C$.

Notem que si C és tancat, aleshores la submatriu $[p_{ij}]$ amb $i, j \in C$, és estocàstica.

Teorema 1.3.25. C és tancat, si i només si, per a tot $i \in C$ tenim que $i \rightsquigarrow j$ implica que $j \in C$.

Demostració 1.3.26. Sigui C tancat. Si $i \in C$ i $i \rightsquigarrow j$, llavors $p_{ij}^{(n)} > 0$ per a algun n . Si $j \notin C$, aleshores $\sum_{k \in C} p_{ik}^{(n)} < 1$, una contradicció. En canvi, si la condició se satisfà però C no és tancat, llavors tenim que $\sum_{j \in C} p_{ij} < 1$ per algun $i \in C$; i per tant, $p_{ij} > 0$ per a alguna parella i, j tals que $i \in C$, $j \notin C$, també és una contradicció.

Teorema 1.3.27.

- a) Sigui C una classe recurrent, aleshores C és tancat.
- b) Si C és qualsevol classe d'equivalència, cap subconjunt propi de C és tancat.
- c) En una cadena finita (S finit), cada classe d'equivalència tancada C és recurrent.

Així que en una cadena finita, les classes recurrents són simplement aquelles classes tals que són tancades.

Demostració 1.3.28.

- a) Suposem que C és una classe recurrent. Si C no és tancat, aleshores pel teorema (1.3.25) tenim que existeix algun $i \in C$ que condueix a un estat $j \notin C$. Però pel teorema (1.3.19), i i j es comuniquen, és a dir que i i j són equivalents. Això contradiu que $i \in C$ i $j \notin C$.
- b) Sigui D un subconjunt propi no buit d'una classe d'equivalència arbitrària C . Escollim un estat de D , i ; i un estat de C , j , tal que $j \notin D$. Aleshores i condueix a j , per pertànyer els dos a la mateixa classe d'equivalència. I per tant, D no pot ser tancat.
- c) Considerem C com una pròpia cadena de Màrkov; això ho podem fer ja que $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1, i \in C$. (Estem restringint simplement la matriu de transició original a C). Pel teorema anterior i pel fet que la recurrència és una propietat de classe, tenim que C és recurrent.

□

1.3.2 Periodicitat

Ara descrivim una altra propietat de classe, la periodicitat.

Definició 1.3.29. Si $p_{ii}^{(n)} > 0$ per a algun $n \geq 1$; és a dir, que si en un moment donat ens trobem a i és possible tornar a i ; definim el **període** de i , i el denotem com d_i , com el màxim comú divisor del conjunt d'enters positius n tals que $p_{ii}^{(n)} > 0$. Si el període d de l'estat i és igual a 1, llavors diem que i és **aperiòdic**.

Equivalentment podem definir el període d_i com el màxim comú divisor del conjunt d'enters positius n tals que $f_{ii}^{(n)} > 0$.

Teorema 1.3.30. Si dos estats diferents i, j es troben en la mateixa classe d'equivalència, llavors tenen el mateix període.

Demostració 1.3.31. Suposem que i, j estan en la mateixa classe d'equivalència, per definició estan comunicats entre ells, i per tant cada un està comunicat amb ell mateix. Aleshores, per cada estat i, j existeix un període. Si $p_{ij}^{(r)} > 0, p_{ji}^{(s)} > 0$, aleshores, com en l'argument del teorema (1.3.19), $p_{jj}^{(n+r+s)} \geq p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)}$. Agafem $n = 0$ per obtenir $p_{jj}^{(r+s)} > 0$, de tal forma que $r + s$ és un múltiple de d_j . Així, si n no és un múltiple de d_j (i per tant tampoc ho és $n + r + s$) tenim $p_{jj}^{(n+r+s)} = 0$; i així $p_{ii}^{(n)} = 0$. Però això ens diu que si $p_{ii}^{(n)} > 0$ llavors n és múltiple de d_j ; i per tant $d_j \leq d_i$. Per un argument simètric obtenim que $d_i \leq d_j$. És a dir que els i, j tenen el mateix període.

□

Les transicions d'estat a estat en una mateixa classe d'equivalència tancada C de període $d > 1$, encara que sigui aleatòriament, segueixen un cert patró cíclic que a continuació descrivim. Sigui $i, j \in C$; si $p_{ij}^{(r)} > 0$ i $p_{ij}^{(s)} > 0$, i per altra banda deixem que existeixi t tal que $p_{ji}^{(t)} > 0$. Aleshores $p_{ii}^{(r+t)} \geq p_{ij}^{(r)} p_{ji}^{(t)} > 0$; per tant $d|r + t$. Anàlogament, $d|s + t$, i per això $d|s - r$. Conseqüentment, si $r = ad + b$, amb a i b enters, $0 \leq b \leq d - 1$, llavors $s = cd + b$ per algun enter c . Així doncs, si $i \rightsquigarrow j$ en n passos, llavors n és de la forma $ed + b$, això és,

$$n \equiv b \pmod{d},$$

on l'enter b depèn del estats i, j però és independent de n . Ara fixem $i \in C$ i definim

$$\begin{aligned} C_0 &= \{j \in C : p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ implica } n \equiv 0 \pmod{d}\} \\ C_1 &= \{j \in C : p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ implica } n \equiv 1 \pmod{d}\} \\ &\vdots \\ C_{d-1} &= \{j \in C : p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ implica } n \equiv d - 1 \pmod{d}\} \end{aligned}$$

Aleshores,

$$C = \cup_{j=0}^{d-1} C_j \quad .$$

Teorema 1.3.32. Si $k \in C_t$ i $p_{kj} > 0$, llavors $j \in C_{t+1}$ (amb els índexos reduïts mòdul d ; i.e., $C_d = C_0$, $C_{d+1} = C_1$, ...). Així doncs, començant des de i la cadena es mou de C_0 a C_1 , de C_1 a C_2 , ..., de C_{d-1} a C_0 , i així successivament. Diem que els C_j són les **subclases cícliques** de C .

Demostració 1.3.33. Escollim un n tal que $p_{ik}^{(n)} > 0$. Llavors n és de la forma $ad + t$. Ara $p_{ij}^{(n+1)} \geq p_{ik}^{(n)} p_{kj} > 0$; d'aquí veiem que i condueix a j , i per tant $j \in C$, per ser C tancat. Però $n \equiv t \pmod{d}$; i així $n + 1 \equiv t + 1 \pmod{d}$, per tant $j \in C_{t+1}$.

Exemples 1.3.34.

1. Recordem que havíem dit que els 3 estats formen una única classe d'equivalència i que, per tant, aquesta és recurrent. Llavors tenim que, seguint amb la notació de la teoria, C és tancat ($C = S$). Aleshores pel teorema (1.3.30), a, b, c tenen el mateix període. Comprovem-ho. Fàcilment veiem que com a i c són estats tals que $p_{aa} > 0, p_{cc} > 0$, llavors el mcd entre 1 qualssevol altres nombres sempre és 1. Llavors tenim que $d_a = d_c = 1$. Ara per b veiem que $p_{bb} = 0$, però que $p_{bb}^{(2)} > 0$, i també $p_{bb}^{(3)} > 0$, i com 2 i 3 són coprimers, llavors el període de b , efectivament, també és 1.
2. En aquest exemple tenim 3 classes d'estats, on $\{5\}$ i B són recurrents i A és transitori. Llavors $\{5\}$ i B són classes tancades. Determinem el període de cada classe. Per $\{5\}$ i B sembla obvi ja que en l'exemple anterior hem vist que si un estat i compleix que $p_{ii} > 0$ llavors el seu període és 1, i tots els estats $i \in \{5\} \cup B$ ho compleixen. És a dir, que $d_{\{5\}} = d_B = 1$. Fàcilment podem veure que $d_A = 2$. En aquest cas podem observar com el contrarrecíproc del teorema (1.3.30) no és cert ja que $\{5\}$ i B tenen el mateix període però no són la mateixa classe.
3. Afegim un tercer exemple (tal que existeixi una classe d'equivalència tancada C de període $d > 1$), considerem la cadena de la següent figura: Com cada un

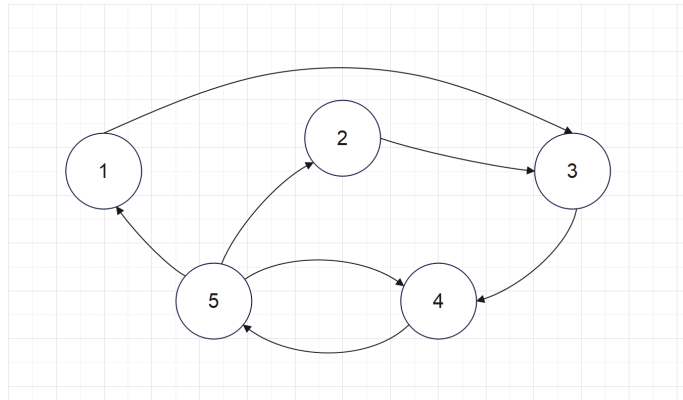


Figura 1.3: Una cadena periòdica

dels estats condueix a tots els altres estats, l'espai d'estats forma una classe d'equivalència tancada C , necessàriament recurrent. Per trobar el període

sembla més complicat que en l'exemple anterior, per tant procedim a descriure una manera efectiva que hom pot usar per trobar el període de qualsevol classe finita i tancada. Comencem amb un estat qualsevol, nosaltres triarem l'1, i deixem que sigui C_0 la subclasse que conté l'estat 1. Llavors tots els estats als que podem arribar en un pas des de $C_0 = \{1\}$ pertanyen a C_1 , en el nostre cas, $3 \in C_1$. Tots els estats als que podem arribar en un pas des de $C_1 = \{3\}$ pertanyen a C_2 , per nosaltres, $4 \in C_2$. Continuem d'aquesta manera per obtenir la següent taula, construïda d'acord amb la norma que tots els estats als que podem arribar en un pas des de almenys un estat de C_i pertanyen a C_{i+1} .

$$\begin{aligned}C_0 &= \{1\} \\C_1 &= \{3\} \\C_2 &= \{4\} \\C_3 &= \{5\} \\C_4 &= \{1, 2, 4\}\end{aligned}$$

Parem de construir la taula quan una subclasse C_k conté un estat que pertany a $C_j, j < k$. Aquí tenim que $1 \in C_0 \cap C_4$, llavors $C_0 = C_4$. També passa això per 4: $4 \in C_2 \cap C_4$, llavors $C_2 = C_4$. D'aquí tenim doncs que $C_0 = \{1, 2, 4\}$. I ara comencem de nou el procediment amb el C_0 actualitzat. Aleshores, tots els estats als que podem arribar en un pas des de qualsevol dels estats de C_0 , pertanyen a C_1 . I obtenim:

$$\begin{aligned}C_0 &= \{1, 2, 4\} \\C_1 &= \{3, 5\}\end{aligned}$$

Com $C = C_0 \cup C_1$, hem acabat. Concloem doncs que el període és 2 i que $C_0 = \{1, 2, 4\}$, $C_1 = \{3, 5\}$. Si C té un nombre finit d'estats, aleshores el procés descrit acaba en un nombre finit de d'iteracions.

1.4 Probabilitats en els límits

En les següents dues seccions segueixo majorment el llibre [1].

Sembla obvi preguntar-nos què succeeix quan n tendeix a infinit en les probabilitats de transició de n passos, $p_{ij}^{(n)}$, i de fet en el capítol anterior ja hem vist alguna propietat relacionada amb aquestes probabilitats i la recurrència/transitorietat dels estats, (verure el teorema 1.3.9 i el corol·lari 1.3.13). En aquestes dues properes seccions aprofundirem en la qüestió anterior. Comencem pel següent resultat.

Teorema 1.4.1. *Sigui $a_1, a_2, \dots, a_n$ una successió de nombres no negatius amb $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tal que el màxim comú divisor de $\{j : a_j > 0\}$ és 1. Escrivim $u_0 = 1, u_n = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k}, n = 1, 2, \dots$. Definim $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$. Aleshores $u_n \rightarrow 1/\mu$ quan $n \rightarrow \infty$.*

Podem aplicar el teorema a una cadena de Màrkov amb $a_n = f_{ii}^{(n)}$, donat un estat i recurrent amb període 1; llavors $u_n = p_{ii}^{(n)}$ pel teorema de la primera entrada. També, $\mu = \mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$, això és: si T és el temps necessari per tornar a i quan l'estat inicial és i , llavors $\mu_i = E(T)$. Si i és un estat recurrent arbitrari d'una cadena de Màrkov, diem que μ_i és el **temps mitjà de recurrència** de i . El teorema determina que $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 1/\mu_i$, és a dir, l'invers del temps mitjà de recurrència. Abans de fer la demostració enunciem tres resultats d'anàlisi que necessitem per la prova:

Suposem que els nombres a_{kj}, c_j, a_j, b_j són reals.

1. *Lema de Fatou*: Si $|a_{kj}| \leq c_j, k, j = 1, 2, \dots$, i $\sum_j c_j < \infty$, llavors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_j a_{kj} \leq \sum_j \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{kj}$$

i també,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_j a_{kj} \geq \sum_j \liminf_{k \rightarrow \infty} a_{kj}$$

Aquesta última afirmació del límit inferior no necessita la hipòtesi prèvia.

2. *El Teorema de la Convergència Dominada*: Si $|a_{kj}| \leq c_j, k, j = 1, 2, \dots$, $\sum_j c_j < \infty$, i $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{kj} = a_j, j = 1, 2, \dots$, llavors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j a_{kj} = \sum_j \lim_{k \rightarrow \infty} a_{kj} (= \sum_j a_j)$$

El teorema és conseqüència del lema de Fatou.

3. $\liminf_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k + \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k$. Aquesta desigualtat és resultat de les definicions de límit inferior i límit superior.

Demostració 1.4.2. *Primer notem que $0 \leq u_n \leq 1$ per a tot n (per inducció). Definim*

$$r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j, \quad n = 0, 1, \dots$$

Llavors

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_n u_0 = (r_0 - r_1) u_{n-1} + \dots + (r_{n-1} - r_n) u_0, \quad n \geq 1$$

Com $r_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$, tenim $u_n = r_0 u_n$, i per això podem reordenar els termes en l'expressió anterior per obtenir

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \dots + r_n u_0 = r_0 u_{n-1} + \dots + r_{n-1} u_0, \quad n \geq 1$$

Per la qual cosa, $\sum_{k=0}^n r_k u_{n-k}$ és independent de n ; així que:

$$\sum_{k=0}^n r_k u_{n-k} = r_0 u_0 = 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.4.1)$$

Ara deixem que $b = \limsup_n u_n$. Escollim una subsuccessió $\{u_{n_k}\}$ que convergeixi a b . Llavors

$$\begin{aligned} b &= \lim_k u_{n_k} = \liminf_k u_{n_k} \\ &= \liminf_k [a_i u_{n_k-i} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n_k} a_j u_{n_k-j}] \\ &\leq \liminf_k (a_i u_{n_k-i}) + (\sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} a_j) b \end{aligned}$$

(Aquí utilitzem que $\liminf_k (a_k + b_k) \leq \liminf_k a_k + \limsup_k b_k$.) A més, si prenem $u_n = 0$ per $n < 0$, llavors

$$\limsup_k (\sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} a_j u_{n_k-j}) \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} a_j \limsup_k (u_{n_k-j}) \leq b \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} a_j$$

Fixem-nos que com $|a_j u_{n_k-j}| \leq a_j$, i $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$, s'aplica el lema de Fatou. Aleshores

$$b \leq a_i \liminf_k u_{n_k-i} + (1 - a_i) b,$$

o bé,

$$a_i \liminf_k u_{n_k-i} \geq a_i b$$

Així doncs $a_i > 0$ implica $u_{n_k-i} \rightarrow b$ quan $k \rightarrow \infty$. Es dedueix que $u_{n_k-i} \rightarrow b$ per un i suficientment gran. Llavors si $t = \sum_{r=1}^m c_r i_r$, on c_r són enters positius i si $a_{i_r} > 0$, aleshores $u_{n_k-i} \rightarrow b$. El conjunt H de totes aquestes t 's és tancat per la suma i el seu mcd és 1, ja que H és format per tot els enters positius i tals que $a_i > 0$. Llavors apliquem que si H és un conjunt no buit d'enters positius amb màxim comú divisor d , i H és tancat sota la suma, aleshores tots els nombres enters positius suficientment grans múltiples de d pertanyen a H ; per tant com el nostre mcd és 1 tenim que H conté tots els enters positius suficientment grans. Diem que $u_{n_k-i} \rightarrow b$ per $i \geq I$. Per (1.4.1),

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j u_{n_k-I-j} = 1 \quad (\text{amb } u_n = 0 \text{ per } n < 0)$$

Si $\sum_{j=0}^{\infty} r_j < \infty$, el teorema de Convergència Dominada ens diu que podem deixar que $k \rightarrow \infty$ i prendre límits terme a terme en (1.4.2) per obtenir $b \sum_{j=0}^{\infty} r_j = 1$. I si $\sum_{j=0}^{\infty} r_j = \infty$, pel lema de Fatou, $1 \geq b \sum_{j=0}^{\infty} r_j$, i per tant $b = 0$. En qualsevol cas, doncs,

$$b = [\sum_{j=0}^{\infty} r_j]^{-1}$$

Però

$$r_0 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$r_1 = a_2 + a_3 + \dots$$

$$r_2 = a_3 + \dots$$

.

.

.

I per tant

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \mu$$

En conseqüència, $b = \limsup_n u_n = 1/\mu$. I amb un argument simètric, $b = \liminf_n u_n = 1/\mu$ i per tant $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/\mu$.

□

Ara apliquem el teorema que acabem de veure per tenir informació del comportament en el límit de la probabilitat $p_{ij}^{(n)}$.

Definició 1.4.3. Un estat recurrent j diem que és **positiu** si i només si el seu temps mitjà de recurrència μ_j és $< \infty$, contràriament diem que és **nul** si i només si $\mu_j = \infty$.

Teorema 1.4.4. a) Si l'estat j és recurrent i aperiòdic, i i és de la mateixa classe d'equivalència, llavors $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 1/\mu_j$. A més, μ_j és finit si i només si μ_i és finit. Si i pertany a una classe diferent, aleshores $p_{ij}^{(n)} \rightarrow f_{ij}^*/\mu_j$

b) Sigui j un estat recurrent amb període $d > 1$. Suposem que i és de la mateixa classe d'estats que j , amb $i \in C_r, j \in C_{r+a}$, on C_r, C_{r+a} són subclasses cícliques de C . Aleshores, $p_{ij}^{(nd+a)} \rightarrow d/\mu_j$. També es compleix que μ_j és finit, si i només si, μ_i és finit; per tant la propietat de ser recurrent positiu o ser recurrent nul és una propietat de classe.

c) Si j és recurrent amb període $d > 1$, sent i un estat arbitrari, llavors

$$p_{ij}^{(nd+a)} \rightarrow \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(kd+a)} \right] d/\mu_j, \quad a = 0, 1, \dots, d-1$$

L'expressió entre claudàtors és la probabilitat d'arribar a j per primer cop des de i en un nombre de passos que és $\equiv a \pmod{d}$. Llavors, si j és recurrent nul, $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$ per a tot i .

d) Una cadena finita no té estats recurrents nuls

Demostració 1.4.5. a) Pel teorema de la primera entrada

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)},$$

prenem $p_{jj}^{(r)} = 0$, $r < 0$. I pel teorema de la convergència dominada, podem prendre límits terme a terme per $n \rightarrow \infty$; com $p_{jj}^{(n-v)} \rightarrow 1/\mu_j$ pel teorema 1.4.1, tenim

$$p_{ij}^{(n)} = \left(\sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} \right) \frac{1}{\mu_j} = \frac{f_{ij}^*}{\mu_j}$$

Si i, j pertanyen a la mateixa classe recurrent, $f_{ij}^* = 1$. Ara assumim que μ_j és finit. Si $p_{ij}^{(r)}, p_{ji}^{(s)} > 0$, llavors $p_{ii}^{(n+r+s)} \geq p_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(s)}$; això és > 0 per a n gran, ja que $p_{jj}^{(n)} \rightarrow 1/\mu_j > 0$. Però si $\mu_i = \infty$, aleshores $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, i tenim una contradicció. a) queda provat.

b) Primer suposem $a = 0$. Llavors j és recurrent i aperiòdic relatiu a la cadena de Màrkov amb matriu de transició P^d . (Si A té d com màxim comú divisor, llavors el mcd de $\{a/d : a \in A\}$ és 1). Per (a),

$$p_{ij}^{(nd)} \rightarrow \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(kd)}} = \frac{d}{\sum_{k=1}^{\infty} k d f_{jj}^{(kd)}} = \frac{d}{\mu_j}$$

Ara suposem el resultat cert per $a = r$. Pel cas $a = r + 1$ tenim

$$p_{ij}^{(nd+r+1)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(nd+r)} \rightarrow \sum_k p_{ik} \frac{d}{\mu_j} = \frac{d}{\mu_j}$$

com diu el teorema. L'argument per demostrar que μ_j és finit si i només si μ_i és finit és el mateix que el que hem servit per demostrar a), però canviant d per nd .

c)

$$p_{ij}^{(nd+a)} = \sum_{v=1}^{nd+a} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(nd+a-v)}, \quad a = 0, 1, \dots, d-1$$

Com j té període d , $p_{jj}^{(nd+a-k)} = 0$, a no ser que $k - a$ sigui de la forma rd (necessàriament $r \leq n$); aleshores

$$p_{ij}^{(nd+a)} = \sum_{r=0}^n f_{ij}^{(rd+a)} p_{jj}^{((n-r)d)}$$

Per finalitzar la demostració fem el límit quan $n \rightarrow \infty$ i usem l'apartat anterior.

d) Sigui C una classe finita recurrent nul·la. Suposem $C = \{1, 2, \dots, r\}$, llavors

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}^{(n)} = 1, \quad i \in C$$

Fent el límit per $n \rightarrow \infty$, per c) obtenim $0 = 1$, és a dir, contradicció.

□

Una implicació que no està de més recordar, ja que guarda relació amb aquestes 4 afirmacions que hem vist, és la del corol·lari 1.3.13.

A continuació tractem d'extreure més informació del primer exemple d'aquest treball a partir dels nous conceptes vistos en aquesta secció.

Exemple 1.4.6. *Tenim que els 3 estats formen una única classe, que és recurrent i aperiòdica (els tres estats que la conformen són aperiòdics). I també sabem que*

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

és la seva matriu de transició. Pel teorema 1.4.1 sabem que $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 1/\mu_i$, per $n \rightarrow \infty$, on μ_i és el temps mitjà de recurrència de i . Per l'apartat a) del teorema 1.4.4, $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 1/\mu_j$ per a tot $i, j \in S = \{a, b, c\}$, d'aquí deduïm un fet important, la probabilitat de ser a j quan $n \rightarrow \infty$ és la mateixa per qualsevol que sigui l'estat inicial. De l'apartat d) del mateix teorema veiem que cap dels estats és nul, per tant han de ser recurrents positius. Sabent que el temps mitjà de recurrència de cada estat és finit, ens demanem si els podem calcular. Per definició $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$. Comencem per l'estat a ,

$$\mu_a = 1 \cdot f_{aa}^{(1)} + 2 \cdot f_{aa}^{(2)} + 3 \cdot f_{aa}^{(3)} + \dots = 1 \cdot 0.8 + 2 \cdot (0.2 \cdot 0.3) + 3 \cdot (0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.5) + \dots$$

realment, és una tasca que sembla impossible de realitzar. Doncs bé, en el pròxim capítol hi posarem remei.

Una altra inquietud que podem tenir és esbrinar què passa amb la matriu de transició per n passos quan $n = 10$, $n = 100$, $n \rightarrow \infty$. Doncs bé

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.652 & 0.130 & 0.217 \\ 0.652 & 0.131 & 0.217 \\ 0.652 & 0.130 & 0.218 \end{pmatrix}, \quad P^{100} = \begin{pmatrix} 0.652 & 0.130 & 0.217 \\ 0.652 & 0.130 & 0.217 \\ 0.652 & 0.130 & 0.217 \end{pmatrix}.$$

Observem que les files de la matriu P^{10} són molt semblants entre elles, $p_{1j}^{(10)} \approx p_{2j}^{(10)} \approx p_{3j}^{(10)}$, per a tot $j \in \{1, 2, 3\}$, i per $n = 100$ ja es compleix la igualtat (amb 3 decimals). Això implica que la probabilitat de ser a j a temps n és independent de quin sigui l'estat inicial (ja ho hem dit abans). Així doncs, iterant la matriu P ens anem aproximant a una distribució "d'estat estable" que escriurem com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = v_j, \quad i, j \in S$$

En el proper capítol també donarem les condicions per les quals existeix un estat estable, ja que no té perquè fer-ho.

1.5 Distribucions estacionàries i d'estat estable

Anem per parts i comencem amb una definició.

Definició 1.5.1. Una **distribució estacionària** per una cadena de Màrkov amb espai d'estats S és un conjunt de nombres $v_i, i \in S$, tals que $v_i \geq 0$, $\sum_{i \in S} v_i = 1$, i

$$\sum_{i \in S} v_i p_{ij} = v_j, j \in S$$

Així, si escrivim $v = (v_i, i \in S)$, llavors $vP = v$, on P és la matriu de transició d'un pas de la cadena de Màrkov. Per inducció, $vP^n = vP(P^{n-1}) = vP^{n-1} = \dots = vP = v$, per tant $vP^n = v$. Llavors, si v és la distribució inicial, la distribució de l'estat a tot temps futur segueix sent v . Les distribucions estacionàries estan fortament relacionades amb les probabilitats en els límits. El resultat principal és el següent.

Teorema 1.5.2. Considerem una cadena de Màrkov amb matriu de transició $P = (p_{ij})$. Suposem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = q_j$$

per tots els estats i, j (on q_j no depèn de i). Aleshores

- (a) $\sum_{j \in S} q_j \leq 1$ i $\sum_{i \in S} q_i p_{ij} = q_j, j \in S$.
- (b) O tots els $q_j = 0$, o bé $\sum_{j \in S} q_j = 1$.
- (c) Si tots els $q_j = 0$, llavors no hi ha distribució estacionària. Si $\sum_{j \in S} q_j = 1$, llavors $\{q_j\}$ és la única distribució estacionària.

Demostració 1.5.3. Provem (a):

$$\sum_j q_j = \sum_j \lim_n p_{ij}^{(n)} \leq \liminf_n \sum_j p_{ij}^{(n)}$$

pel Lema de Fatou, per tant

$$\sum_j q_j \leq 1$$

Ara

$$\sum_i q_i p_{ij} = \sum_i (\lim_n p_{ki}^{(n)}) p_{ij} \leq \liminf_n \sum_i p_{ki}^{(n)} p_{ij} = \liminf_n p_{kj}^{(n+1)} = q_j$$

Perquè si $\sum_i q_i p_{ij_0} < q_{j_0}$ per algun j_0 , llavors

$$\sum_j q_j = \sum_j \sum_i q_i p_{ij} = \sum_i q_i \sum_j p_{ij} = \sum_i q_i,$$

que és una contradicció.

Per demostrar l'apartat (b) suposem $q = (q_i, i \in S)$, llavors per (a), tenim $qP = q$. Per tant, per inducció $qP^n = q$, això és, $\sum_i q_i p_{ij}^{(n)} = q_j$. Aleshores

$$q_j = \lim_n \sum_i q_i p_{ij}^{(n)} = \sum_i q_i \lim_n p_{ij}^{(n)}$$

pel teorema de convergència dominada. Llavors $q_j = (\sum_i q_i) q_j$, obtenint que o tots els q_j són 0, o bé $\sum_{j \in S} q_j = 1$.

(c) Finalment, si $\{v_i\}$ és una distribució estacionària, llavors $\sum_i v_i p_{ij}^{(n)} = v_j$. Fent el límit en $n \rightarrow \infty$, obtenim $\sum_i v_i q_j = v_j$, i per això $q_j = v_j$. Com a conseqüència, si existeix una distribució estacionària, aquesta és única i coincideix amb $\{q_j\}$. Així doncs, no pot haver-hi cap distribució estacionària si per tot j tenim $q_j = 0$; i si $\sum_j q_j = 1$, per (a), $\{q_j\}$ és estacionària.

□

Definició 1.5.4. Una **distribució d'estat estable** és una distribució (conjunt de nombres $v_j, j \in S$ tals que $\sum_{j \in S} v_j = 1$) que compleix: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = v_j$, per a tot $i, j \in S$.

Notem que perquè es doni la distribució d'estat estable cal que les probabilitats de transició en el límit existeixin (independentment de l'estat inicial) i formin una distribució de probabilitat.

Observació 1.5.5. En el cas d'una cadena finita, un conjunt de probabilitats en el límit que són independents de l'estat inicial ha de formar una distribució d'estat estable, és a dir, el cas on tots els q_j són 0 del teorema anterior, no pot ocórrer. Per a tot $i \in S$ tenim $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$, i fent el límit quan n tendeix a infinit, com S és finit, $\sum_{j \in S} q_j = 1$. Si la cadena és infinita, aquest resultat no és vàlid. Per exemple, si tots els estats són transitoris, llavors $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$, per a tot i, j .

Si $\{q_j\}$ és una distribució d'estat estable, llavors $\{q_j\}$ és la única distribució estacionària, pel teorema 1.5.2. Però en canvi, una cadena pot tenir una única distribució estacionària sense tenir una distribució d'estat estable, de fet sense existir els límits de les probabilitats. Veiem-ho amb el següent exemple.

Exemple 1.5.6. Sigui la cadena de Màrkov amb matriu de transició:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores la única distribució estacionària és $(1/3, 1/3, 1/3)$, però

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \equiv 1 \pmod{3}. \quad P^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \equiv 0 \pmod{3}.$$

És a dir que P^n no convergeix a cap matriu límit, i per tant no existeix cap distribució d'estat estable.

Després d'haver parlat de l'existència i unicitat de les distribucions estacionàries, tot seguit procedim a donar condicions sota les quals existeix una distribució d'estat estable.

Sigui N el nombre de classes recurrents positives.

CAS 1 $N = 0$. Aleshores tots els estats són transitoris o recurrents nuls. Per tant $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ per a tot i, j pel teorema 1.4.4, així que per l'apartat (c) vist en l'anterior teorema d'aquesta secció, no hi ha distribució estacionària.

CAS 2 $N = 1$. Sigui C la única classe recurrent positiva. Si C és aperiòdica, llavors, pel teorema 1.4.4 $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 1/\mu_j, i, j \in C$. Si $j \notin C$, j ha de ser transitori o recurrent nul, i sigui com sigui $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ per a tot i . Pel teorema 1.5.2, si assignem $v_j = 1/\mu_j$, per $j \in C$, i $v_j = 0$, per $j \notin C$, llavors v_j és l'única distribució estacionària, i $p_{ij}^{(n)} \rightarrow v_j, \forall i, j$.

Ara suposem que C és una classe periòdica, amb període $d > 1$. Sigui D una subclasse cíclica de C . Els estats de D són recurrents i aperiòdics en relació a la matriu de transició P^d . Pel teorema 1.4.4 de la secció anterior, $p_{ij}^{(nd)} \rightarrow d/\mu_j, i, j \in D$; és a dir que $\{d/\mu_j, j \in D\}$ és l'única distribució estacionària de D relativa a P^d (particularment, $\sum_{j \in D} 1/\mu_j = 1/d$). Segueix que $v_j = 1/\mu_j$, per $j \in C$, i $v_j = 0$, per $j \notin C$ és l'única distribució estacionària per la cadena original.

CAS 3 $N \geq 2$ Hi ha una única distribució estacionària per cada classe recurrent positiva, per tant infinites distribucions estacionàries, ja que si v, w són dues distribucions estacionàries ($vP = v, wP = w$), i a_1, a_2 dos nombres no negatius tals que $a_1 + a_2 = 1$, aleshores

$$(a_1v + a_2w)P = a_1v + a_2w$$

En resum hi ha una única distribució estacionària, si i només si, hi ha una única classe recurrent positiva.

Finalment donem el següent teorema sobre les distribucions d'estat estable:

Teorema 1.5.7. *Existeix una distribució d'estat estable, si i només si; hi ha una única classe C recurrent positiva, que és aperiòdica, i també, $f_{ij}^* = 1$ per a tot $j \in C, i \in S$.*

Demostració 1.5.8. *Provem primer la implicació d'esquerra a dreta. Sigui $\{v_j\}$ una distribució d'estat estable. Pel teorema 1.5.2, $\{v_j\}$ és l'única distribució estacionària, així que hi ha d'haver exactament una classe C recurrent positiva. Suposem que C té període $d > 1$, i sigui $i \in C_0, j \in C_1$, on C_0, C_1 són subclasses*

cíclicues. Llavors, pel teorema 1.4.4, $p_{ij}^{(nd+1)} \rightarrow d/\mu_j$, $p_{ij}^{(nd)} = 0$ per a tot n . Com $d/\mu_j > 0$, $p_{ij}^{(n)}$ no té límit quan $n \rightarrow \infty$, contradient la hipòtesi. Si $j \in C$, $i \in S$, llavors per l'apartat (a) del teorema 1.4.4 de la secció anterior, $p_{ij}^{(n)} \rightarrow f_{ij}^*/\mu_j$, i per tant $v_j = f_{ij}^*/\mu_j$. Com v_j no depèn de i , tenim que $f_{ij}^* = f_{jj}^* = 1$.

Ara demostrem l'altra implicació. Altre cop, per l'(a) del teorema 1.4.4,

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \frac{f_{ij}^*}{\mu_j} \quad \forall i, \text{ if } j \in C,$$

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0 \quad \forall i, \text{ if } j \notin C,$$

ja que j és transitori o recurrent nul·l. Llavors, si $f_{ij}^* = 1$, $\forall i \in S, j \in C$, el límit v_j és independent de i . Com C és positiva, $v_j > 0$ per $j \in C$; i aleshores, pel teorema anterior, $\sum_j v_j = 1$ obtenint que $\{v_j\}$ és una distribució d'estat estable.

Comentari 1.5.9. Notem que si existeix una distribució d'estat estable, llavors no hi ha classes recurrents nul·les. Perquè si D és una classe d'aquest tipus amb $i \in D$, llavors per ser D tancat, $f_{ij}^* = 0$, per a tot $j \in C$, una contradicció. Per tant en l'últim teorema, podem substituir de l'enunciat, "hi ha una única classe recurrent positiva, que és aperiòdica", per "hi ha una única classe recurrent, que és positiva i aperiòdica".

Corol·lari 1.5.10. Sigui una cadena de Màrkov finita.

- (a) Existeix una distribució d'estat estable, si i només si, hi ha exactament una classe d'equivalència tancada, que és aperiòdica.
- (b) Hi ha una única distribució estacionària si i només si hi ha exactament una classe d'equivalència tancada.

Demostració 1.5.11. El resultat és conseqüència del teorema anterior, juntament amb el (c) del 1.3.27, el (d) del 1.4.4, i el fet que si B és un conjunt finit d'estats transitoris, la probabilitat de romandre sempre en B és 0.

Notem que en l'exemple 1.5.6 que hem donat sobre una cadena que té una única distribució estacionària però ninguna distribució d'estat estable, efectivament la cadena conté només una classe d'estats tancada i de període 3.

Tot seguit tractem de respondre les qüestions del final de la secció anterior sobre l'exemple 1.2.5 amb les que hem intriduit les distribucions estacionàries i d'estat estable, i analitzarem també els casos de les cadenes representades pels diagrames 1.2 i 1.3.

Exemples 1.5.12. 1) Pel corol·lari anterior sabem que com hi ha una única classe d'estats, tancada i aperiòdica, llavors existeix una distribució d'estat estable (que coincideix amb la distribució estacionària). Un mètode efectiu per trobar-la serà simplement resoldre el sistema $vP = v$, on P és la matriu de transició coneguda i v és la distribució d'estat estable que busquem, sota

les condicions que $v_i \geq 0, \sum_{i \in S} v_i = 1$. (També es pot aproximar la solució per mètodes numèrics iterant la matriu de transició). En el nostre cas:

$$0.8v_1 + 0.5v_2 + 0.3v_3 = v_1$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0.6v_3 = v_2$$

$$0.2v_1 + 0.5v_2 + 0.1v_3 = v_3$$

que ens dona un vector: $(3v_3, 0.6v_3, v_3)$ i ara imposant la condició de que els tres elements sumen 1, ens queda que $v_3 = 1/4.6$ i per tant

$$v = (15/23, 3/23, 5/23) \approx (0.652, 0.130, 0.217).$$

Una altra qüestió que ens fèiem era com podem calcular el temps mitjà de recurrència? Doncs bé, havíem vist que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 1/\mu_j$ i intentàvem calcular μ_j per la seva definició, cosa que era impossible. Però podem utilitzar la definició de distribució d'estat estable que diu que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = v_j$, i llavors ajuntant els dos resultats tenim que (per aquest cas) $v_j = 1/\mu_j$, per a tot $j \in \{1, 2, 3\}$. Així doncs el temps mitjà de recurrència de cada estat és

$$\mu_1 = 1/v_1 = 23/15, \quad \mu_2 = 1/v_2 = 23/3, \quad \mu_3 = 1/v_3 = 23/5.$$

- 2) $\{5\}$ i B són classes recurrents positives. Per tant ens trobem en el cas 3 amb $N = 2$. On cada una d'aquestes dues classes té la seva distribució estacionària, (com a més són aperiòdiques les dues, llavors també tenen la seva distribució d'estat estable per les submatrius $P_{\{5\}}$, i P_B). Els vectors de distribució estacionària per cada classe seràn de la forma

$$v_{\{5\}} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad v_B = (0, 0, 0, 0, 0, v_{B_6}, v_{B_7}, v_{B_8}).$$

Podem trobar el vector v_B de la mateixa forma que en l'exemple anterior, resolent el sistema d'equacions $v_B P = v_B$. Com hem explicat anteriorment, per a cada parella de nombres $a_1, a_2 \geq 0$ tals que $a_1 + a_2 = 1$, tenim una distribució estacionària de la forma $(a_1 v_{\{5\}} + a_2 v_B) = (0, 0, 0, 0, a_1, a_2 v_{B_6}, a_2 v_{B_7}, a_2 v_{B_8})$, així doncs, en tenim infinites.

- 3) Tenim una única classe C recurrent positiva periòdica, de període $d = 2$. Ens trobem en el cas 2, $N = 1$. Pel corol·lari sabem que hi ha una única distribució estacionària però ninguna d'estat estable. Siguin $C_0 = \{1, 2, 4\}$, $C_1 = \{3, 5\}$ les subclasses cícliques. La matriu de transició és de la forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 1-a-b & 0 \end{pmatrix}$$

Tenim que quan $n \rightarrow \infty$

$$P^{dn} = P^{2n} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 & v_4 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 & v_4 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & w_5 \\ v_1 & v_2 & 0 & v_4 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & w_5 \end{pmatrix}$$

Pel que hem dit en el cas 2, on C és periòdica, tenim que

$$u = \frac{1}{d}(v_1, v_2, w_3, v_4, w_5) = \frac{1}{2}(v_1, v_2, w_3, v_4, w_5)$$

és la única distribució estacionària de la cadena original. El temps de recurrència, μ_i , de cada estat i , serà $\mu_i = 1/u_i$, és a dir,

$$\mu = (2/v_1, 2/v_2, 2/w_3, 2/v_4, 2/w_5).$$

Donem per acabada la teoria sobre les cadenes de Màrkov i d'ara en endavant parlarem sobre l'aplicació de les cadenes de Màrkov en els sistemes Bonus-Malus.

Capítol 2

Sistemes Bonus-Malus

Les cadenes de Màrkov tenen una llarga llista d'aplicacions com ara bé la meteorologia, l'epidemiologia, la teoria de cues, la física... Nosaltres explicarem l'aplicació de les cadenes de Màrkov discretes (i en concret, homogènies) al món de les assegurances a través dels sistemes de tarificació Bonus-Malus.

Per a l'escriptura d'aquest capítol he seguit sobretot els apunts [4], [5] i [8].

Comencem donant el context econòmic:

2.1 Conceptes econòmics

Un contracte d'assegurança és un contracte pel qual l'assegurador (companyia d'assegurances) garanteix la cobertura d'un risc, amb el cobrament d'una prima per part de qui la contracta (prenedor). I en cas que es produeixi el fet del que és objecte de cobertura, l'assegurador es compromet a indemnitzar, dins uns límits prèviament acordats, el dany produït a l'assegurat.

Les companyies d'assegurances han de calcular quin és el preu d'aquesta prima per tal de poder cobrir totes les despeses derivades dels sinistres assegurats, a aquest procés li diem tarificació. Els mètodes pels quals fem la tarificació poden ser de dos tipus:

- *A priori*. Estableixen primes diferents per classes. Se li assigna una prima a una pòlissa que s'incorpora en la nostra cartera sense tenir experiència sobre la sinistralitat d'aquell risc en concret. L'assignació es fa amb base al que ha observat la companyia en un passat recent sobre assegurats d'un perfil idèntic.
- *A posteriori*. Contràriament a la tarificació a priori, es presuposa una prima inicial igual per a tots, que es va modificant en base a l'experiència de sinistralitat d'aquell individu (pòlissa).

(La pòlissa és el document on s'especifiquen les condicions del contracte d'assegurança. I quan parlem de la cartera ens referim al conjunt de pòlisses que estan cobertes per la companyia).

Els sistemes de Bonus-Malus tractats amb cadenes de Màrkov constitueixen un dels mètodes més usuals de tarificació a posteriori.

2.2 Definició dels sistemes Bonus-Malus

Hem dit que els sistemes Bonus-Malus (SBM) són uns dels mètodes més usuals d'introduir les modificacions en les tarifes tenint en compte l'experiència de sinistralitat del propi assegurat. Aquests sistemes consisteixen en unes rebaixes i increments que depenen del nombre de sinistres que té l'assegurat en els diferents períodes. Cada estat, en el qual pot estar l'assegurat, té associat un percentatge de descompte o penalització. Així tots els estats que impliquen un descompte diem que formen la zona de **Bonus**, mentre que tots els que impliquen una penalització formen la zona de **Malus**. Nosaltres veurem dos casos on, per aquesta definició tots els estats són Bonus, però el percentatge de descompte sí que varia en funció del nombre de sinistres.

Els SBM tractats amb cadenes de Màrkov necessiten que el sistema que defineixen compleixi la propietat de Màrkov. Adaptada a les assegurances: l'estat d'un assegurat per al proper període depèn només de l'estat en el període actual, i per tant del nombre de sinistres que ha provocat en aquest en aquest període. Suposarem que per classificar l'assegurat en un o altre estat només tendrem en compte els sinistres en els que ha estat responsable.

El procediment comença classificant els clients segons els seus perfils en diferents grups de tarifa (tarificació a priori) i a cada grup li correspon una prima de referència o prima base. Dintre d'aquest grup, els assegurats poden moure's per un nombre finit d'estats tals que cada un es correspon a un nivell de prima anual, que s'expressa com un percentatge de la prima inicial de referència del grup.

Aleshores tenim que $S = \{1, 2, \dots, s\}$ és l'espai d'estats finit. El temps serà $T = \{0, 1, \dots\}$ i la unitat de mesura serà en anys, així quan ens trobem en el període 0, voldrà dir que ens trobem en l'any 0, l'any inicial. Llavors $\{X_n\}$ és la successió d'estats que recorre un assegurat al llarg dels anys.

Definirem el vector de nivells de prima: $b = (b_1, \dots, b_s)$, tal que b_i és la prima en l'estat $i \in S$ (en forma de percentatge respecte la prima de referència).

Ens falta veure quines són les regles de transició entre cada estat i quines probabilitats té cada possible transició. No obstant això, no parlarem de com obtenir aquestes probabilitats, ja que s'usen mètodes estadístics que queden fora d'aquest treball.

Comentari 2.2.1. En la definició dels SBM se sol utilitzar el terme classe per dir estat, així doncs diríem que cada un dels $i \in S$ representa una classe. Nosaltres tractarem d'evitar-ho per tal de no confondre's amb les classes d'estats.

Abans de seguir veiem com un SBM pot resumir-se amb la següent taula, on els estats s'ordenen per nivell de prima decreixent, de s a 1: $b_s > \dots > b_1$.

Estat i	Nivells de prima b_i	Estat després de ... sinistres			
		0	1	2	3+
s	b_s				
$\vdots$	$\vdots$				
i_0	b_{i_0}				
$\vdots$	$\vdots$				
1	b_1				

Segons com siguin les regles de transició es classifiquen els diferents tipus de SBM. Nosaltres en veurem dos que s'han utilitzat en les assegurances d'automòbils: el SBM clàssic del Regne Unit i el SBM brasiler.

2.2.1 SBM clàssic del Regne Unit

Aquest sistema té com a estat inicial, $i_0 = 6$, i podem definir la resta de característiques en la taula següent:

Estat i	Nivells de prima b_i	Estat després de ... sinistres			
		0	1	2	3+
7	100	6	7	7	7
6	75	5	7	7	7
5	65	4	6	7	7
4	55	3	5	7	7
3	45	2	5	7	7
2	40	1	4	6	7
1	35	1	4	6	7

Aleshores la seva distribució inicial és $v_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$. i la matriu de transició és de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} PN_0 & 0 & 0 & PN_1 & 0 & PN_2 & 1 - PN_0 - PN_1 - PN_2 \\ PN_0 & 0 & 0 & PN_1 & 0 & PN_2 & 1 - PN_0 - PN_1 - PN_2 \\ 0 & PN_0 & 0 & 0 & PN_1 & 0 & 1 - PN_0 - PN_1 \\ 0 & 0 & PN_0 & 0 & PN_1 & 0 & 1 - PN_0 - PN_1 \\ 0 & 0 & 0 & PN_0 & 0 & PN_1 & 1 - PN_0 - PN_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & PN_0 & 0 & 1 - PN_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PN_0 & 1 - PN_0 \end{pmatrix}$$

Notem que escrivim PN_k per denotar $P(N = k)$ on N és el nombre de sinistres, amb $k = 0, 1, 2, \dots$. Aquests PN_k 's que apareixen no deixen de ser probabilitats, i per tant són majors o iguals que 0, i menors o iguals que 1, i han de complir que $\sum_j p_{ij} = 1$, per a cada fila i . Observem també que llavors molts elements de la matriu, probabilitats, es repeteixen i només tenim 6 valors diferents.

Fixem-nos que tots els estats estàn comunicats formant una única classe d'estats, i per tant la classe és recurrent i positiva (teorema 1.3.21 i pel (d) del teorema 1.4.4). I com existeix almenys un estat i tal que $p_{ii} > 0$, en concret 1 i 7 són els únics que

ho compleixen, llavors tenen període $d = 1$. Per teoria sabem que tots els estats d'una mateixa classe tenen el mateix període (teorema 1.3.30), per tant la classe és aperiòdica. És a dir que la cadena consta d'una única classe recurrent positiva i aperiòdica. Per tant hi tenim una distribució d'estat estable (teorema 1.5.7), que coincideix amb la distribució estacionària.

Per tant la matriu P^n quan $n \rightarrow \infty$ és tal que totes les seves files són iguals. Per trobar aquesta distribució d'estat estable w , com s'indica en la teoria, es tracta de resoldre el sistema $wP = w$ (cal tenir en compte que en aquest treball si no s'especifica, els vectors són fila). I llavors el temps de mitjà de recurrència de cada estat serà $\mu_i = 1/w_i$, per $i = 1, \dots, 7$.

2.2.2 SBM brasiler

En aquest cas tornem a tenir el mateix espai d'estats, $S = \{1, 2, \dots, 7\}$, que en el cas anterior. Però ara se li assigna el nou assegurat un estat inicial $i_0 = 7$. La taula que defineix el sistema és la següent:

Estat i	Nivells de prima b_i	Estat després de ... sinistres						
		0	1	2	3	4	5	6+
7	100	6	7	7	7	7	7	7
6	90	5	7	7	7	7	7	7
5	85	4	6	7	7	7	7	7
4	80	3	5	6	7	7	7	7
3	75	2	4	5	6	7	7	7
2	70	1	3	4	5	6	7	7
1	65	1	2	3	4	5	6	7

Podem observar com aquest sistema és un exemple d'escala $-1/+1$ això significa que per cada període (any) sense cap sinistre es produeix una baixada de 1 estat en l'escala, mentre que cada sinistre es penalitza amb una pujada d'un estat. Per tant no penalitza tant com l'anterior. Vegem la seva matriu de transició:

$$P = \begin{pmatrix} PN_0 & PN_1 & PN_2 & PN_3 & PN_4 & PN_5 & 1 - \sum_{i=0}^5 PN_i \\ PN_0 & 0 & PN_1 & PN_2 & PN_3 & PN_4 & 1 - \sum_{i=0}^4 PN_i \\ 0 & PN_0 & 0 & PN_1 & PN_2 & PN_3 & 1 - \sum_{i=0}^3 PN_i \\ 0 & 0 & PN_0 & 0 & PN_1 & PN_2 & 1 - \sum_{i=0}^2 PN_i \\ 0 & 0 & 0 & PN_0 & 0 & PN_1 & 1 - PN_0 - PN_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & PN_0 & 0 & 1 - PN_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PN_0 & 1 - PN_0 \end{pmatrix}$$

Aquí també tenim, anàlogament al SBM clàssic del Regne Unit, que la cadena de Màrkov consisteix en una única classe recurrent positiva i aperiòdica, i per tant existeix una distribució d'estat estable.

Donem un exemple concret de probabilitats de transició per poder aplicar i comparar els dos sistemes, però abans expliquem alguns conceptes econòmics més

relacionats amb la distribució d'estat estable.

Comencem definint la prima pura. La prima pura és el concepte més bàsic de prima, ja que representa el cost real del risc assumit per l'assegurador, sense tenir en compte les despeses de gestió.

Ara expliquem el concepte d'equilibri d'un sistema en prima pura. Utilitzem com unitat de les primes el cost mitjà d'un sinistre. Siguin:

- $E(N)$ l'esperança de la variable N : nombre de sinistres. Aquest valor serà la nostra prima a *a priori*.
- P_b la prima pura de referència (sobre la qual s'apliquen els percentatges)
- P_m la prima pura mitjana:

$$P_m := \left(\sum_{i=1}^s v_i \frac{b_i}{100} \right) P_b, \quad (2.2.1)$$

tal que v_i és la distribució estacionària i b_i el vector de nivells de prima. Aleshores, el sistema està **equilibrat en prima pura** si la prima mitjana coincideix amb la prima *a priori*:

$$P_m = E(N),$$

$$\left(\sum_{i=1}^s v_i \frac{b_i}{100} \right) P_b = E(N).$$

I d'aquí obtenim la prima base necessària per tal que el sistema estigui equilibrat:

$$P_b = \frac{100E(N)}{\sum_{i=1}^s v_i b_i} \quad (2.2.2)$$

Ara sí anem amb l'exemple:

2.3 Exemple

Suposem que el nombre de sinistres, N , en el grup de tarifa amb el que treballem segueix una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda = 0.4$.

- i) **SBM clàssic del Regne Unit:** Com abans hem dit, la **distribució inicial** per aquest SBM és $u = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$. Com $N \sim Poisson(\lambda)$, sabem que $PN_0 = e^{-\lambda}$, $PN_1 = \lambda e^{-\lambda}$ i $PN_2 = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$. Llavors la **matriu de transició** per a $\lambda = 0.4$ és:

$P =$

$$\begin{pmatrix} 0.670320 & 0 & 0 & 0.268128 & 0 & 0.053626 & 0.007926 \\ 0.670320 & 0 & 0 & 0.268128 & 0 & 0.053626 & 0.007926 \\ 0 & 0.670320 & 0 & 0 & 0.268128 & 0 & 0.061552 \\ 0 & 0 & 0.670320 & 0 & 0.268128 & 0 & 0.061552 \\ 0 & 0 & 0 & 0.670320 & 0 & 0.268128 & 0.061552 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.670320 & 0 & 0.329680 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.670320 & 0.329680 \end{pmatrix}$$

Busquem ara la distribució d'estat estable. Imposem la igualtat $vP = v$, on aquest v és la distribució d'estat estable, i ens queda el següent sistema:

$$\begin{aligned} 0.670320v_1 + 0.670320v_2 &= v_1 \\ 0.670320v_3 &= v_2 \\ 0.670320v_4 &= v_3 \\ 0.268128v_1 + 0.268128v_2 + 0.670320v_5 &= v_4 \\ 0.268128v_3 + 0.268128v_4 + 0.670320v_6 &= v_5 \\ 0.053626v_1 + 0.053626v_2 + 0.268128v_5 + 0.670320v_7 &= v_6 \\ 0.007926v_1 + 0.007926v_2 + 0.061552v_3 + \\ 0.061552v_4 + 0.061552v_5 + 0.329680v_6 + 0.329680v_7 &= v_7 \end{aligned}$$

Resolent-lo ens queda un vector de la forma:

$$v = (1.467875v_7, 0.721937v_7, 1.077004v_7, 1.606701v_7, 1.520992v_7, 1.195571v_7, v_7)$$

Que imposant que $\sum_{i=1}^7 v_i = 1$, ens queda que $v_7 = 0.116413$ i, per tant el vector solució, és a dir la **distribució d'estat estable** és:

$$v = (0.170880, 0.084043, 0.125378, 0.187041, 0.177064, 0.139180, 0.116413)$$

Això significa que el 17.09% pertanyerà finalment a la classe 1, el 8.4% a la classe 2, i així successivament. Recordem que també podem resoldre el sistema fent la potència de la matriu de transició, P^n , per a un n prou gran, i cada una de les files convergeix a la distribució d'estat estable.

A continuació calculem la **prima base necessària per tal que el sistema estigui equilibrat en prima pura**. A partir de l'expressió (2.2.2) ens queda:

$$P_b = \frac{100 \cdot 0.4}{59.437475} = 0.672976$$

En la primera igualtat hem utilitzat que $E(N) = \lambda$, ja que segueix una distribució de Poisson. Aquest 0.672976 multiplicat pel cost mitjà d'un sinistre és el valor de la prima pura de referència (recordem que les unitats de les primes són el cost mitjà d'un sinistre).

Un altre aspecte interessant per les asseguradores és l'**evolució de la prima mitjana** després de 1, 2, ..., n períodes, ho denotarem per $P_m^{(n)}$. La calcularem tornant a l'equació que defineix la prima pura mitjana (2.2.1), però ara substituïm el vector de la distribució d'estat estable, v , pel vector de la distribució després de n períodes, li direm $w^{(n)}$. Calculem per exemple l'evolució de la prima mitjana després d'un període, utilitzant la prima base que acabem de trobar:

Resolent $uP = w^{(1)}$ trobem el vector de la distribució després d'un període, on u és la distribució inicial i P , la matriu de transició. Obtenim

$$w^1 = (0, 0, 0, 0, 0.670320, 0, 0.329680)$$

I ara:

$$\begin{aligned} P_m^{(1)} &= \left(\sum_{i=1}^7 w_i^{(1)} \frac{b_i}{100} \right) P_b = (0.670320 \cdot 0.65 + 0.329680 \cdot 1) \cdot 0.672976 \\ &= 0.515088 \end{aligned}$$

Així doncs, la prima esperada a cobrar per assegurat després d'un període és 0.515088 pel preu mitjà del cost d'un sinistre.

- ii) **SBM brasiler:** En aquest cas tenim que la **distribució inicial** és (0,0,0,0,0,0,1). I la **matriu de transició** per $\lambda = 0.4$:

$P =$

$$\begin{pmatrix} 0.670320 & 0.268128 & 0.053626 & 0.007150 & 0.000715 & 0.000057 & 0.000004 \\ 0.670320 & 0 & 0.268128 & 0.053626 & 0.007150 & 0.000715 & 0.000061 \\ 0 & 0.670320 & 0 & 0.268128 & 0.053626 & 0.007150 & 0.000776 \\ 0 & 0 & 0.670320 & 0 & 0.268128 & 0.053626 & 0.007926 \\ 0 & 0 & 0 & 0.670320 & 0 & 0.268128 & 0.061552 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.670320 & 0 & 0.329680 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.670320 & 0.329680 \end{pmatrix}$$

Buscarem la distribució d'estat estable, però aquest cop ho fem calculant la potència de la matriu anterior:

$$P^{100} = P^{101} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \\ 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \\ 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \\ 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \\ 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \\ 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \\ 0.424796 & 0.208925 & 0.141762 & 0.093929 & 0.062176 & 0.041162 & 0.027250 \end{pmatrix}$$

Llavors la **distribució d'estat estable** és:

$$v = (0.424796, 0.208925, 0.141762, 0.093929, 0.062176, 0.041162, 0.027250)$$

Comentari 2.3.1. Que haguem escrit $P^{100} = P^{101}$ no implica que el 100 sigui el primer nombre pel qual cada fila de P convergeixi a v . De fet, la velocitat (mínim nombre de períodes) en que el sistema convergeix a la distribució d'estat estable és un fet a tenir a compte per part de les asseguradores.

Si comparem les distribucions estacionàries d'ambdós SBM, veiem com en el brasiler acumula més assegurats en els estats més baixos, mentre que en el de Regne Unit la distribució és més uniforme.

Anem amb la **prima base necessària per tal que el sistema estigui equilibrat en prima pura**, recordem que $b = (65, 70, 75, 80, 85, 90, 100)$:

$$P_b = \frac{100 \cdot 0.4}{72.0975} = 0.554804$$

El 72.0975 del denominador surt de fer el producte entre el vector fila v i el vector columna b^T .

De forma anàloga al SBM clàssic del Regne Unit, busquem la distribució després d'un període:

$$w^{(1)} = uP = (0, 0, 0, 0, 0, 0.670320, 0.329680)$$

I per tant la **prima mitjana després d'un període** és:

$$P_m^{(1)} = (0.670320 \cdot 0.9 + 0.329680 \cdot 1) \cdot 0.554804 = 0.517614,$$

És a dir, que és 0.517614 x (preu mitjà del cost d'un sinistre).

Comparant els dos sistemes observem que la prima mitjana després d'un període és molt similar en els dos, mentre que la prima base necessària perquè el sistema estigui equilibrat en prima pura és bastant més alta en el sistema del Regne Unit.

Conclusions

En el treball s'explica bona part de la teoria de les cadenes de Màrkov homogènies a temps discret. El lector sap dibuixar el diagrama de la cadena i classificar els estats donada una matriu de transició, i sap dir si existeix o no una distribució d'estat estacionària i si aquesta és o no d'estat estable. El lector també reconeix els sistemes de tarificació Bonus-Malus i en ells sap trobar la distribució d'estat estable (justificant la seva existència), calcular la prima base necessària perquè el sistema estigui equilibrat en prima pura i calcular la prima mitjana després de n períodes.

Encara que el treball mostra només l'aplicació als sistemes Bonus-Malus, també he pogut conèixer, almenys per sobre, algunes de les moltes aplicacions que presenten les cadenes de Màrkov. Per exemple: en l'estudi del creixement tumoral, els jocs d'atzar com el problema de la ruïna del jugador, en la genètica, etc.

Podem veure però, que tenir les probabilitats de transició homogènies és un supòsit bastant ideal, tornant a la introducció, sembla més lògic que la nostra probabilitat per escollir postres vagi variant al llarg del temps. Llavors les cadenes homogènies presenten certes limitacions quan modelitzem un esdeveniment canviant, en el cas del Bonus-Malus es va recalculant cada pocs anys la matriu de transició ja que s'han d'actualitzar les probabilitats de sinistralitat. En canvi, en modelitzar algun esdeveniment teòric com l'evolució d'un joc, del problema de la ruïna del jugador per exemple, les probabilitats de transició són fixes i per tant es dona l'homogeneïtat.

A partir d'aquest treball un tema en el que m'agradaria aprofundir és en els processos de decisió de Màrkov, segons la wikipedia: "un procés de decisió de Màrkov (amb acrònim anglès MDP) és un procés de control estocàstic en temps discret. Proporciona un marc matemàtic per modelar la presa de decisions en situacions en què els resultats són en part aleatoris i en part sota el control d'un decisor." Aquest treball també dona peu a estudiar anàlogament les cadenes de màrkov homogènies a temps continu.

Bibliografia

- [1] Robert B. Ash: *Basic Probability Theory*.
- [2] Kai Lai Chung: *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*.
- [3] Kai Lai Chung: *Màrkov Chains with Stationary Transition Probabilities*, 1960.
- [4] Apunts d'Eva Boj del Val, M. Mercè Claramunt Bielsa i Teresa Costa Cor d'una assignatura del Màster en Ciències Actuarials i Financeres de la Universitat de Barcelona
<https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/119675/6/MA-OMADO.pdf>.
- [5] Apunts de l'assignatura de Matemàtiques Actuarials del Màster en Ciències Actuarials i Financeres de la Universitat de Barcelona
Sistemes "Bonus-Malus", Febrer 2020.
- [6] Diagrama de l'exemple
https://www.youtube.com/watch?v=UcKhEc_LyQ&t=24s.
- [7] Apunts de l'assignatura optativa de Processos Estocàstics del Grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona
Carles Rovira: *Processos Estocàstics: un curs bàsic*.
- [8] <https://openacttexts.github.io/LDASpanish/C-BonusMalus.html>.