Treball final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de matemàtiques
Universitat de Barcelona

PROCESSOS ESTOCÀSTICS APLICATS A L'EPIDEMIOLOGIA

Autor: Felipe García Villa

Director: Carles Rovira Escofet.
Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística.
Barcelona, juny de 2016.

Abstract

The interest in human health has always been a priority for humans. Infectious diseases can produce epidemics wich are a very important cause of death in the world. The science that studies the evolution of an epidemic that affects a specific part of the population is called epidemiology. In this work, a stochastic epidemiological model SIR proposed by Henry C. Tuckwell and Ruth J. Williams in 2006 is exposed. This model uses Markov chains and a diffusion process. To be able to understand it properly, concepts of stochastic processes will be introduced and, especially, it will be explained what the stochastic integrals and stochastic differential equations are. This will be necessary to make simulations of the epidemiological model.

Resum

L'interès per la salut humana ha estat sempre una prioritat de l'ésser humà. Les malalties infeccioses poden generar epidèmies que són una causa molt important de morts en el món. La ciència que estudia l'evolució d'una epidèmia en una determinada població es diu epidemiologia. En aquest treball s'exposa un model epidemiològic estocàstic SIR proposat per Henry C. Tuckwell i Ruth J. Williams l'any 2006 en què es fan servir cadenes de Markov i un procés de difusió. Per poder entendre-ho bé, s'introduiran conceptes de processos estocàstics i, en especial, s'explicarà què són les integrals estocàstiques i les equacions diferencials estocàstiques, cosa que permitirà fer simulacions del model epidemiològic.

Índex

Resumen **1**

1 Introducció **5**
- 1.1 Què és l'epidemiologia? 5
- 1.2 Els models epidemiològics 5
- 1.3 Una mica d'història. 6
- 1.4 Models epidemiològics deterministes 6
  - 1.4.1 Model SI 7
  - 1.4.2 Model SIS 7
  - 1.4.3 Model SIR 7
- 1.5 Models epidemiològics estocàstics 8
  - 1.5.1 Model Reed-Frost i Greenwood 8

2 Processos estocàstics **10**
- 2.1 Probabilitats 10
- 2.2 Cadenes de Markov 11
- 2.3 Procés de Wiener 14
- 2.4 Integrals estocàstiques respecte a un procés de Wiener 18
- 2.5 Equacions diferencials estocàstiques 24
- 2.6 Mètodes numèrics per a equacions diferencials estocàstiques . 27

3 Un model epidèmiològic SIR amb cadenes de Markov **29**
- 3.1 Descripició del model 29
- 3.2 Probabilitats de transició 32
- 3.3 El temps de recuperació és infinit, és a dir, r = ∞ 33
- 3.4 Un procés de difusió si r = ∞ 35
- 3.5 Simulacions 36

Conclusions **40**

Referències **41**

1 Introducció

1.1 Què és l'epidemiologia?

Una epidèmia és una malaltia que es propaga durant un cert període de temps a una regió determinada i que afecta a les persones o éssers vius que hi viuen. Per tant, l'epidemiologia és la branca de les ciències que estudia la dinàmica de la població humana a causa d'una malaltia, normalment infecciosa. L'epidemiologia pot estudiar també la dinàmica d'una població animal i de superfícies agrícoles ja que aquestes poden afectar a la vida o la salut humana.

Moltes malaties infeccioses han estat i són una causa de moltes morts en el món. N'hi ha hagut algunes molt contagioses com va ser la verola o la pesta negra. Totes dues estan actualment erradicades però han estat les principals epidèmies que han causat més morts. N'hi ha altres que segueixen preocupant, com és el cas del VIH. Encara que darrerament en alguns països aquesta malaltia no és una causa principal de mort sí que ho és en molts països en vies de desenvolupament. Altres malalties com la varicel·la són molt infeccioses però no són un perill per a la població ja que normalment no causen la mort.

L'epidemiologia no és només una ciència mèdica. Les matemàtiques hi ajuden amb models matemàtics i aquests són bàsics per poder entendre com evolucionen les epidèmies. D'aquesta manera sorgeix una branca de l'epidemiologia que es diu epidemiologia matemàtica.

1.2 Els models epidemiològics

Un model matemàtic és un model amb fórmules matemàtiques que intenta aportar eines per entendre millor com funciona la realitat, i així facilitar la presa de decisions. En aquest cas, per exemple, gestionar l'epidèmia. Per fer-ne un, es prenen unes variables a estudiar, es determinen uns factors que intervenen en el model, i després es busquen relacions que hi hagi entre elles. Una vegada fet el model, es fan simulacions amb ordinadors i programes informàtics que permeten veure com evoluciona i com es comporta l'epidèmia. D'aquí s'extreuen conclusions per poder deduir si el nostre model serveix per explicar la realitat.

De models matemàtics, n'hi ha de dos tipus. Els models deterministes i els models estocàstics. En els primers les variables queden totalment determinades i, per tant, pels mateixos valors d'entrada, obtindrem els mateixos valors de sortida. En un model estocàstic o probabilístic, les variables són aleatòries, i depenen de l'atzar. Això vol dir que els mateixos valors d'entrada, poden donar diferents valors de sortida. Aquí, a diferència del model determinista, tindrem que la variable pot obtenir qualsevol valor possible i l'hi associarem una probabilitat. Per exemple, en un model epidèmic determinista amb població n el model ens dirà quanta gent està infectada en el moment t, i això serà un valor concret que mai canviarà. En canvi, el model probabilístic ens dirà que en el temps t pot haver un nombre d'infectats que estigui entre zero i n, i cadascun d'aquests valors tindrà una probabilitat associada.

1.3 Una mica d'història.

La primera persona que va començar a fer un model epidemiològic matemàtic va ser Daniel Bernoulli l'any 1760. Ell va estudiar la propagació i l'evolució de la verola.
L'estudi de l'epidemiologia matemàtica es va aturar més de dos segles, fins que l'any 1906 Hamel va estudiar l'evolució del xarampió. Va concloure que el creixement de nombre de persones infectades era proporcional al producte entre el nombre de persones susceptibles i infectades. Això s'anomena "principi d'acció de masses".
L'epidemiologia matemàtica moderna sorgeix a principi del segle XX gràcies a Kermack i McKendrick. Van presentar un model amb equacions diferencials ordinàries conegut pel nom SIR. Aquest model considera que la població es divideix en tres grups diferents: susceptibles, infectats i recuperats.

1.4 Models epidemiològics deterministes

Suposarem que en tots els models la grandària de la població n es manté constant. No hi haurà naixements ni morts en els diferents models. A continuació s'exposa la notació dels diferents grups de la poblabió que es faran servir.

- $S(t)$: nombre de susceptibles de contagiar-se en el temps t. Aquestes persones no han arribat a tenir la malaltia i estan sans en el moment t, i totes son susceptibles d'infectar-se.
- $I(t)$: nombre d'infectats en el temps t. Aquests són els que propaguen la malaltia a gent que no estigui infectada, és a dir, als susceptibles.

- $R(t)$: nombre de recuperats en el temps t. Aquests són els que han passat de ser infecciosos, a recuperar-se. Aquests ja no poden tornar a estar infectats una altra vegada, ni tampoc infectaran a cap altra persona.

1.4.1 Model SI

En aquest model només hi ha dos estats possibles. Les persones poden ser només susceptibles o infectats. Un cop que algú estigui infectat romandrà en aquest estat per sempre. Aquest model es pot aplicar a malaties infeccioses que encara no es poden curar.
L'evolució dels susceptibles S decreixerà proporcionalment amb una constant α segons el producte de gent susceptible i infectada. D'aquesta manera el nombre d'infectats creixerà de la mateixa manera. Aquesta seria l'equació diferencial del model.

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = & -\alpha S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) = & \alpha S(t)I(t) \end{cases} \tag{1}$$

1.4.2 Model SIS

En el model SIS tenim també només dos estats possibles: susceptibles i infectats. A diferència del model SI la persona infectada es recupera de la malaltia en algun moment però no hi agafa immunitat, per tant, els infectats tornen a ser susceptibles. Malalties d'aquests tipus són moltes infeccions de transmisió sexual (menys el VIH) com per exemple la sífilis.
Les equacions diferencials d'aquest model són semblants a les del model SI més una constant β que indica el temps mig que pot estar una persona amb la infecció.

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = & -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t) \\ \dot{I}(t) = & \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \end{cases} \tag{2}$$

1.4.3 Model SIR

El model SIR és el model que van proposar Kermack i Mckendrick. En aquest model una persona pot estar en un dels tres estats següents: susceptibles, infectats o recuperats. Una persona susceptible passaria a l'estat d'infectat, i després passaria a recuperar-se. Un exemple típic d'aquest model seria la varicel·la o la grip.
Tenint en compte tot l'anterior Kermack y McKendrick van obtenir les següents

equacions diferencials del model SIR.

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = & -\alpha S(t)I(t) & \\ \dot{I}(t) = & \alpha S(t)I(t) & -\beta I(t) \\ \dot{R}(t) = & & \beta I(t) \end{cases} \tag{3}$$

1.5 Models epidemiològics estocàstics

Hi ha dos models epidemiològics estocàstics molt coneguts que són el model Reed-Frost i el Greenwood. Aquests models se'ls anomena models de cadena binomial perquè fan servir cadenes de Markov amb una distribució binomial.

1.5.1 Model Reed-Frost i Greenwood

El model epidemiològic de Reed-Frost va ser proposat pel Lowell Reed i Wade Hamptom Frost al voltant de l'any 1930 i és un model del tipus SIR. La població es manté constant igual a n i el temps és discret $t = 0, 1, 2, \ldots$
La peculiaritat d'aquest procés és que els infectats en temps t són els que poden infectar a persones susceptibles només en el mateix temps t, i després, aquests infectats ja no participaran més en el procés. Si anomenem $X(t)$, $Y(t)$ els susceptibles i els infectats en temps t respectivament, tenim les condicions

$$\begin{aligned} X(0) + Y(0) &= n \\ X(t+1) + Y(t+1) &= X(t) \quad t = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Per a cada $t = 0, 1, \ldots$

$$X(t) + \sum_{k=0}^{t} Y(k) = n$$

Assumim que el nombre d'infectats en temps $t + 1$ segueix una binomial de paràmetres $X(t)$ i $p(y)$(això indica la probabilitat que un susceptible es torni infectat sabent que hi ha y infectats), és a dir,

$$Y(t+1) \sim B\Big(X(t), p(y)\Big)$$

Si p indica la probabilitat que un susceptible es torni infectat a causa d'un infectat, $(1 - p)^y$ indicaria la probabilitat que un susceptible no s'infecti sabent que hi ha y infectats, per tant

$$1 - p(y) = (1 - p)^y$$

Queda clar que el procés $\{X(t),\, Y(t) : t = 0, 1, \dots\}$ és una cadena de Markov finita amb el conjunt d'estats

$$I = \{(x, y) : x,\, y \in \mathbb{Z}_+,\, x + y \leq n\}$$

Les probabilitats de transició serien per a $k = 0, 1, \dots, X(t)$

$$P(Y(t+1) = k | X(t) = x,\, Y(t) = y) = \binom{x}{k} \big(1 - (1-p)^y\big)^k (1-p)^{y(x-k)}$$

En el model Greenwood la diferència que hi ha és que considera $p(y)$ constant igual a p (el contagi no té res a veure amb el nombre d'infectats) i per tant

$$Y(t+1) \sim B(X(t), p)$$

2 Processos estocàstics

2.1 Probabilitats

En aquesta primera part apareixen deficions bàsiques de teoria de probabilitats.

Definició 2.1. *Sigui Ω un conjunt no buit i $\mathscr{F} \subset P(\Omega)$. $\mathscr{F}$ és una σ-àlgebra sobre Ω si es verifiquen les següents propietats:*

1. *$\emptyset$ i $\Omega \in \mathscr{F}$*
2. *Si $F \in \mathscr{F}$, aleshores $F^c \in \mathscr{F}$*
3. *Sigui $(F_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{F}$, aleshores $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathscr{F}$*

La parella $(\Omega, \mathscr{F})$ es diu espai mesurable.

Exemple 2.1. *Donat un Ω quasevol els conjunts $\{\emptyset, \Omega\}$ i $P(\Omega)$ són σ-àlgebres sobre Ω. En $\mathbb{R}$ una σ-àlgebra molt coneguda es $B(\mathbb{R})$ (σ-àlgebra de Borel) que és la σ-àlgebra generada pels tots els conjunts oberts de $\mathbb{R}$*

Definició 2.2. *Donat $(\Omega, \mathscr{F})$ un espai mesurable, es diu que una aplicació $P : \mathscr{F} \to [0, 1]$ és una probabilitat si compleix:*

1. *$P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$*
2. *Si $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ és una succesió de conjunts disjunts dos a dos, és a dir, $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$, aleshores $P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)$*

La terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es diu espai de probabilitats.

Definició 2.3. *Sigui $(\Omega, \mathscr{F})$ un espai mesurable i l'espai mesurable $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Es diu que la funció $X : \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, o $\mathscr{F}$-mesurable, o una variable aleatòria si*

$$\forall B \in B(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$$

Definició 2.4. *A tota variable aleatòria X se li pot associar una probabilitat P_X, a la qual anomenarem llei o distribució de probabilitats d'X, tal que*

$$P_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \mid P_X = P \circ X^{-1}$$

La funció de distribució F_X de la variable aleatòria X es defineix com

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \mid F_X(x) = P_X(X \leq x) = P_X\big(X \in (-\infty, x]\big)$$

Definició 2.5. *Si una variable aleatòria X és integrable respecte a la probabilitat P, és a dir,*

$$\int_\Omega |X| \,\mathrm{d}P < \infty$$

es defineix l'esperança d'X de la següent manera

$$E[X] = \int_\Omega X \,\mathrm{d}P$$

El conjunt format per totes les variables aleatòries integrables l'anomenarem com L^1

Definició 2.6. *Si una variable aleatòria X és quadrat integrable respecte a la probabilitat P, és a dir,*

$$\int_\Omega |X|^2 \, dP < \infty$$

es defineix la variància d'X com

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

El conjunt format per totes les variables aleatòries quadrat integrables l'anomenarem com L^2

Definició 2.7. *Dues variables aleatòries X, Y són independents si per a tot A, $B \in B(\mathbb{R})$ els esdeveniments $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ són independents, és a dir*

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\})$$

2.2 Cadenes de Markov

Amb els conceptes anteriors de probabilitats ja definits s'introduirà la definició de procés estocàstic i s'explicarà breument que són les cadenes de Markov en el cas discret.

Definició 2.8. *Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries $\{X_t : t \in T\}$ parametritzades per un conjunt $T \subset \mathbb{R}$. Si T és un conjunt finit o numerable direm que el procés estocàstic és discret i en canvi, si T és un interval de $\mathbb{R}$, li direm continu. En altres paraules, un procés estocàstic és un procés aleatori que depèn del temps.*

Nota 2.1. *Un procés estocàstic és per tant una funció de dues variables*

$$\begin{aligned} X : \Omega \times T &\to \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\to X(\omega, t) \end{aligned}$$

tal que per a tot $t \in T$, $X_t(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ *és una variable aleatòria i per a tot* $\omega \in \Omega$, $X_\omega(t) : T \to \mathbb{R}$ *és la trajectòria al llarg del temps.*

Definició 2.9. *Sigui* I *un conjunt finit (els elements d'*I *s'anomenen estats) i* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *un espai probabilístic. Es diu que el procés estocàstic* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *és una cadena de Markov discreta que pren valors en* I *si per a tot* $n \in \mathbb{N}$ *i qualsevol* $\{i_0, ..., i_{n+1}\} \subset I$ *es verfica*

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

Això vol dir que la probabilitat que una variable aleatòria estigui en un estat $i_k \in I$ *en un moment determinat sabent tots els estats en què ha estat abans, només depèn de l'estat en el qual hagi estat just en el moment anterior.*

Definició 2.10. *Sigui* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una cadena de Markov i* I *un conjunt finit d'estats. Es diu que és homogènia si per a tot* $n \in \mathbb{N}$ *i per a tot estat* $i, j \in I$ *es té*

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

és a dir, la probabilitat de passar de l'estat i *a l'estat* j *en un pas no depèn del moment en què ens trobem. Aquesta probabilitat* p_{ij} *es diu probabilitat de transició de* i *a* j.
La matriu $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ *es diu matriu de transició.*

Definició 2.11. *La matriu* $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ *es diu matriu estocàstica si es verifica:*

1. $a_{ij} \geq 0$ *per a tot* $i, j \in I$
2. $\sum\limits_{j \in I} a_{ij} = 1$ *per a tot* $i \in I$

Lema 2.1. *Sigui* $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ *una matriu estocàstica, aleshores la matriu* P^n *amb* $n \in \mathbb{N}$ *és també una matriu estocàstica.*

Demostració. Siguin $A = (a_{ik})_{1 \leq i,k \leq m}$ i $B = (b_{kj})_{1 \leq k,j \leq m}$ dues matrius estocàstiques.
Aleshores la matriu $BA = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ verifica:

1. $c_{i,j} \geq 0$ ja que cada element de la matriu BA es defineix com sumes de multiplicacions de nombres positius per ser A i B matrius estocàstiques.

2. $\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} = 1$

Per tant la matriu AB és una matriu estocàstica.
Llavors si P és una matriu estocàstica també ho és P^2 i per inducció per a tot $n \in \mathbb{N}$, P^n és una matriu estocàstica. □

Definició 2.12. *Sigui $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de markov i I un conjunt d'estats finit. Es defineix la matriu de transició en n-passos $P_n = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in I}$ com:*

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_0 = i)$$

Teorema 2.1 (Equació de Chapman-Kolmogorov). *Sigui $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov amb un conjunt d'estats finit I, i $p_{ij}^{(n)}$ i $p_{ij}^{(m)}$ les probabilitats de transició de l'estat i a l'estat j en n i en m-passos respectivament. Aleshores per a tot $n, m \in \mathbb{N}$ es compleix*

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Demostració.

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j|X_0 = i)\\
&= \sum_{k\in I} P(X_{n+m} = j, X_n = k|X_0 = i)\\
&= \sum_{k\in I} P(X_n = k|X_0 = i)P(X_{n+m} = j|X_n = k, X_0 = i)\\
&= \sum_{k\in I} P(X_n = k|X_0 = i)P(X_{n+m} = j|X_n = k)\\
&= \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}
\end{aligned}$$

□

Nota 2.2. *Aquesta equació permet deduir que $P_n = P^n$, és a dir, amb la matriu de transició P es poden trobar les probabilitats de transició en n-passos P_n calculant P^n*

Definició 2.13. *Sigui* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una cadena de Markov i* $I = \{i_1, ..., i_m\}$ *un conjunt finit d'estats. Anomenarem* π_0 *al vector següent*

$$\pi_0 = (\pi_0^1, ..., \pi_0^m) = (P(X_0 = i_1), ..., P(X_0 = i_m))$$

π_0 *és el vector de la distribució de probabilitats inicial. Per extensió anomenarem* π_n *al vector de distribució de probabilitats per a la variable aletòria* X_n

$$\pi_n = (\pi_n^1, ..., \pi_n^m) = (P(X_n = i_1), ..., P(X_n = i_m))$$

Lema 2.2.

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

$$\begin{pmatrix} \pi_n^1 & \cdots & \pi_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0^1 & \cdots & \pi_0^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1m}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}^{(n)} & \cdots & p_{mm}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \pi_n^j = P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j, X_0 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P(X_0 = k) P(X_n = j | X_0 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P(X_0 = k) p_{kj}^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \pi_0^k p_{kj}^{(n)} \end{aligned}$$

□

Nota 2.3. *L'evolució d'una cadena de Markov queda totalment determinada per la matriu de transició* P *i per la distribució de probabilitats inicial* π_0

2.3 Procés de Wiener

El 1827 el botànic escocès Robert Brown va estudiar amb un microscopi els moviments que feien els grans de pol·len suspesos en aigua. Va observar un moviment molt irregular, continu i aleatori però no en va poder determinar la causa. Realitzant més experiments amb partícules de pols va observar els mateixos moviments dels grans de pol·len i és així com va pensar que eren provocats pel xoc entre partícules. S'ha de dir que en aquesta època la idea atòmica de la naturalesa encara no estava corroborada.

Va ser Albert Eistein l'any 1905 el que va donar una descripició d'aquest model. Així va justificar que aquests moviments eren provocats per les molècules de l'aigua (o del fluid que sigui), confirmant la teoria atòmica.

Finalment entre els anys 1920 i 1923 Nobert Wiener va aconseguir donar un model matemàtic per a les trajectòries d'un moviment Brownià. Com es pot observar en la Figura 1 aquests tipus de trajectòries són molt especials ja que són funcions contínues però no són diferenciables en cap punt. És per aquesta raó que al moviment Brownià també se l'anomena Procés de Wiener.

Definició 2.14. *Un procés estocástic* $\{W(t) : t \in [0,T]\}$ *(en alguns casos pot ser* $T = \infty$*) és un procés de Wiener, o un moviment Brownià, si es compleixen les següents propietats:*

1. *W(0)=0*
2. *Fixat un* $\omega \in \Omega$*, la trajectòria* $t \to W(t)$ *és contínua.*
3. *Per a cada* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ *els increments*

$$W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

   són independents.

4. *Per a cada* $s, t \in [0,T]$ *tals que* $0 \leq s < t$ *l'ncrement* $W(t) - W(s)$ *és una variable aleatòria amb distribució normal de mitjana 0 i variància* $t - s$*, per tant,* $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$

Lema 2.3. *Sigui*

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = T, \quad t_i^n = \frac{i}{n}T, \quad i = 0, ..., n$$

una partició de l'interval $[0,T]$ *en* n *parts iguals. Anomenarem per*

$$\Delta_i^n W = W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$$

els correspondents increments del procés de Wiener de $\{W(t) : t \in [0,T]\}$*. Aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n W)^2 = T \quad en\ L^2$$

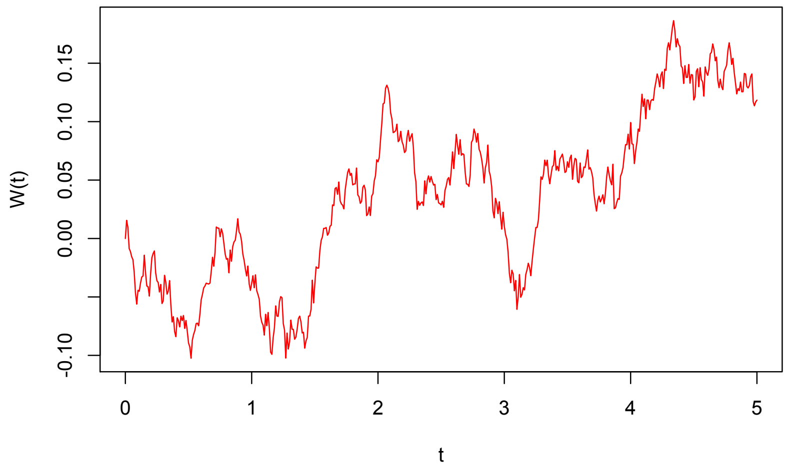

Figura 1: *Trajectòria d'un procés de Wiener.*

Demostració. Els increments $\Delta_i^n W$ són independents i segueixen una distribució normal de mitjana 0 i variància $\frac{T}{n}$, per tant

$$E[\Delta_i^n W] = 0 \quad E[(\Delta_i^n W)^2] = Var[(\Delta_i^n W)] = \frac{T}{n}$$

$$E[(\Delta_i^n W)^4] = Var[(\Delta_i^n W)^2] + E[(\Delta_i^n W)^2]^2 = 2\frac{T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2} = 3\frac{T^2}{n^2}$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n W)^2 - T\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((\Delta_i^n W)^2 - \frac{T}{n}\right)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left((\Delta_i^n W)^2 - \frac{T}{n}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(E\left[(\Delta_i^n W)^4\right] - 2\frac{T}{n}E\left[(\Delta_i^n W)^2\right] + \frac{T^2}{n^2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(3\frac{T^2}{n^2} - 2\frac{T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2}\right) = 2\frac{T^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Per definició de convergència en mitjana d'ordre 2 si $E[|X_n - X|^2] \to 0$, llavors $X_n \to T$ en L^2 i és per això que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n W)^2 = T \quad en\ L^2$$

$\square$

Teorema 2.2. *Sigui $\{W(t) : t \in [0,T]\}$ un procés de Wiener. La variació de la funció $W : [0,T] \to \mathbb{R}$ és infinita. Això vol dir que*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W| = \infty$$

amb $\Delta t = \max_{0 \le i \le n-1} |t_{i+1} - t_i|$

Demostració. Sigui una succesió $(t^n)_{n=1}^{\infty}$ de particions de l'interval $[0,T]$ en n parts iguals, definides com la partició del lema 2.3. Tenim la desigualtat següent:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W|^2 \le \left(\max_{1 \le i \le n-1} |\Delta_i^n W| \right) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W| \tag{4}$$

D'una banda per ser W una funció contínua tenim

$$\max_{1 \le i \le n-1} |\Delta_i^n W| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad q.s.$$

De l'altra, el lema anterior ens diu que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W|^2 = T \quad en\ L^2$$

i com que tota succesió $\{X_n : n \ge 1\}$ que convergeix a X en L^2 té almenys una subsuccesió $\{X_{n_k} : k \ge 1\}$ que convergeix també a X quasi segurament quan k tendeix a infinit, llavors existeix una subsuccesió $(t^{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(t^n)_{n=1}^{\infty}$, que són particions de $[0,T]$ tals que

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{n_k - 1} |\Delta_i^{n_k} W|^2 = T \quad q.s.$$

La part esquerra de la desigualtat (4) convergeix cap a T, i el màxim del valor absolut dels increments d'un procés de Wiener en l'interval $[0,T]$ convergeix cap a 0. D'aquí s'obté

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{n_k - 1} |\Delta_i^{n_k} W| = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \Delta t^{n_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{T}{n_k} = 0$$

Si aquest límit fos un nombre, tindriem que $T \le 0$, arribant amb una contradicció. $\square$

Aquest teorema té una gran importància pel capítol següent, en què es parlarà d'integrals estocàstiques ja que la integral

$$\int_0^T X(t)\,dW(t)$$

no pot ser definida com una integral de Riemann-Stieltjes si la funció W té variació infinita.

2.4 Integrals estocàstiques respecte a un procés de Wiener

Definició 2.15. *Una família de σ-àlgebres $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ és una filtració si és una succesió creixent, és a dir, per a tot $s < t$, llavors $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$. I a més es diu que el procés aleatori $\{X_t : t \geq 0\}$ està adaptat per $\mathscr{F}$ si per a tot t, X_t és $\mathscr{F}_t$-mesurable.*

Exemple 2.2. *Donat un procés aletori qualsevol $\{X_t : t \geq 0\}$ existeix una filtració adaptada natural $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ definida com*

$$\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\} = \{X_s^{-1}(B) : 0 \leq s \leq t,\, B \in B(\mathbb{R})\}$$

Si X_0 fos una constant, la filtració natural seria $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

Per poder continuar prendrem un espai de probabilitats $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ i un procés de Wiener $\{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ adaptat per la filtració natural $\{\mathscr{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$.

Definició 2.16. *Es diu que $X(t)$, $0 \leq t < T$ és un procés aleatori simple si existeix una seqüència finita de nombres $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ i n variables aleatòries $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ tals que*

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \boldsymbol{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

Les variables ξ_i són $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurables, i quadrat integrables. La funció $\boldsymbol{1}$ és la funció indicatriu.
A l'espai format per tots els processos aleatoris simples definits en $[0, T]$ l'anomenarem $\mathcal{H}_T^2$

Nota 2.4. *Les condicions de les variables ξ_i són molt importants perquè això fa que $X(t)$ sigui $\mathscr{F}_t$-mesurable i que sigui quadrat integrable ($E[|X|^2] < \infty$).*

Definició 2.17. *La integral estocàstica d'un procés aleatori simple $X \in \mathcal{H}^2_T$ respecte a un procés de Wiener es defineix com*

$$I(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

Exemple 2.3. *Si $X(t) = \mathbf{1}_{[0,T]}(t)$ llavors*

$$I(X) = \int_0^T dW(t) = W(T) - W(0) = W(T)$$

Teorema 2.3. *Si $X \in \mathcal{H}^2_T$, aleshores la integral $I(X) \in L^2$ i es verifica*

$$E\Big[|I(X)|^2\Big] = E\left[\int_0^T |X(t)|^2 \, dt\right]$$

Aquesta igualtat es coneix com la isometria d'Itô

Demostració. Anomenarem $\Delta_i W = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ l'increment de W en $\Delta_i t = t_{i+1} - t_i$. Per definició de procés de Wiener $\Delta_i W \sim N(0, \Delta_i t)$ i per tant

$$E[\Delta_i W] = 0 \quad E[(\Delta_i W)^2] = \Delta_i t$$

$$|I(X)|^2 = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (\Delta_i W)\Big)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 (\Delta_i W)^2 + 2 \sum_{j<k} \xi_j \xi_k (\Delta_j W)(\Delta_k W)$$

Les variables ξ_i i $\Delta_i W$ són independents, i si $j < k$ també ho són les variables $\xi_j \xi_k \Delta_j W$ i $\Delta_k W$. És així que

$$E[\xi_i^2 (\Delta_i W)^2] = E[\xi_i^2] E[(\Delta_i W)^2] = E[\xi_i^2] \Delta_i t$$

$$E[\xi_j \xi_k (\Delta_j W)(\Delta_k W)] = E[\xi_i \xi_j (\Delta_j W)] E[(\Delta_k W)] = 0$$

En conclusió

$$E\Big[|I(X)|^2\Big] = \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2] \Delta_i t$$

Les variables ξ_i són quadrat-integrables i per això obtenim primer que $I(X) \in$

L^2. D'una altra banda com $X \in \mathcal{H}_T^2$

$$\begin{aligned} E\Big[\int_0^T |X(t)|^2\,dt\Big] &= E\Big[\int_0^T \Big(\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}\Big)^2\,dt\Big] \\ &= E\Big[\int_0^T \Big(\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2 \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}\Big)\,dt\Big] \\ &= E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2 \int_0^T \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}\,dt\Big] \\ &= E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2(\Delta_i t)\Big] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2]\Delta_i t \end{aligned}$$

I així tenim finalment

$$E\Big[|I(X)|^2\Big] = E\Big[\int_0^T |X(t)|^2\,dt\Big]$$

$\square$

Lema 2.4. *L'aplicació $I : \mathcal{H}_T^2 \to L^2$ és lineal, és a dir, si $X, Y \in \mathcal{H}_T^2$ es té*

$$I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y)$$

Demostració. Sigui $0 \le t_0 \le \cdots \le t_n = T$ una partició de l'interval $[0,T]$. Com que $X, Y \in \mathcal{H}_T^2$ existeixen variables aleatòries ξ_i, $\psi_i \in L^2$ per a $i = 0, ..., n-1$ i, a més, són $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurables tals que

$$X = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})} \quad Y = \sum_{i=0}^{n-1}\psi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$$

(Si X i Y no tinguessin les mateixes particions, es podria trobar una partició en comú agafant tots els t_i de cada partició)

$$\begin{aligned}
I(\alpha X + \beta Y) =& I\bigg(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha\xi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})} + \sum_{i=0}^{n-1} \beta\psi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}\bigg) \\
=& I\bigg(\sum_{i=0}^{n-1} \Big(\alpha\xi_i + \beta\psi_i\Big) \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}\bigg) \\
=& \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\alpha\xi_i + \beta\psi_i\Big) \Delta_i W \\
=& \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta_i W + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i \Delta_i W \\
=& \alpha I(X) + \beta I(Y)
\end{aligned}$$

$\square$

Definició 2.18. *Anomenarem per $\mathcal{M}_T^2$ el conjunt format per tots els processos estocàstics $\{X(t) : t \in [0,T)\}$ tals que*

$$E\bigg[\int_0^T |X(t)|^2\, dt\bigg] < \infty$$

i a més, existeix una seqüència $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_T^2$ amb

$$\lim_{n\to\infty} E\bigg[\int_0^T |X(t) - X_n(t)|^2\bigg] = 0$$

En aquest cas es diu que la succeció de processos estocàstics simples $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ aproxima a X

Definició 2.19. *Sigui $X \in \mathcal{M}_T^2$ i $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una succesió de processos estocàstics simples que aproximin a X. Anomenarem la integral estocàstica d'Itô I(X) el límit de la succesió $(I(X_n))_{n=1}^{\infty}$ en L^2. Ara en comptes d'esciure $I(X)$ per referir-nos a la integral, l'escriurem com*

$$I(X) = \int_0^T X(t)\, dW(t)$$

Teorema 2.4. *Per a qualsevol $X \in \mathcal{M}_T^2$, $I(X) \in L^2$ existeix i, a més, és única, verificant la isometria d'Itô*

$$E\Big[|I(X)|^2\Big] = E\bigg[\int_0^T |X(t)|^2\, dt\bigg]$$

Demostració. Definim dues normes en els espais $\mathcal{M}_T^2$, L^2 com

$$\| X \|_{\mathcal{M}_T^2} = \sqrt{E\left[\int_0^T |X(t)|^2\, dt\right]} \qquad \| X \|_{L^2} = \sqrt{E[|X|^2]}$$

Sigui $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una succesió de processos estocàstics simples que aproximin $X \in \mathcal{M}_T^2$, tenim

$$\lim_{n\to\infty} \| X_n - X \|_{\mathcal{M}_T^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{E\left[\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2\, dt\right]} = 0$$

Comprovarem que la succesió $\{I(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ és succesió de Cauchy en L^2. Sigui $\varepsilon > 0$ qualsevol, existix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\| X - X_n \|_{\mathcal{M}_T^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ i per a tot $n, m \geq n_0$ es té

$$\begin{aligned}
\| I(X_n) - I(X_m) \|_{L^2} &= \| I(X_n - X_m) \|_{L^2} \\
&= \sqrt{E\Big[|I(X_n - X_m)|^2\Big]} \\
&= \sqrt{E\left[\int_0^T |X_n - X_m|^2\, dt\right]} = \\
&= \| X_n - X_m \|_{\mathcal{M}_T^2} \\
&= \| X_n - X \|_{\mathcal{M}_T^2} + \| X - X_m \|_{\mathcal{M}_T^2} \\
&= \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

L^2 amb la norma $\| \|_{L^2}$ és un espai complet i, per tant, tota succesió de Cauchy convergeix en L^2, en particular, $\{I(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix cap a una variable $I(X)$ en L^2. Amb això queda demostrada l'existència.
Ara suposarem que existeix una altra succesió $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de processos estocàstics que aproximin també a X. Aleshores la succesió $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, ...\}$ també aproxima a X, i pel mateix raonament que abans $\{I(X_1), I(Y_1), I(X_2), I(Y_2), ...\}$ convergeix en L^2. Si una succesió convergeix, qualsevol subsuccesió convergeix també i al mateix límit. És així que

$$\lim_{n\to\infty} I(X_n) = \lim_{n\to\infty} I(Y_n) = I(X)$$

cosa que prova la unicitat.

Per acabar

$$\begin{aligned}\| I(X_n) \|_{L^2} &= \sqrt{E\Big[|I(X_n)|^2\Big]} \\ &= \sqrt{E\Big[\int_0^T |X_n(t)|^2\,dt\Big]} \\ &= \| X_n \|_{\mathcal{M}_T^2}\end{aligned}$$

i prenent límits quan $n \to \infty$ obtenim la igualtat desitjada

$$\| I(X) \|_{L^2} = \| X \|_{\mathcal{M}_T^2}$$

$\square$

Exemple 2.4. *Amb tot això fet podem calcular la integral estocàstica en el cas que la variable aleatòria sigui el mateix procés de Wiener, és a dir, calcularem la integral*

$$\int_0^T W(t)\,dW(t)$$

Primer hem de comprovar que $W(t) \in \mathcal{M}_T^2$. Hi ha un teorema que no s'ha demostrat en aquest treball que diu que si un procés estocàstic $\{X(t) : t \in [0, T]\}$ està adaptat per una filtració $\mathscr{F}_t$, les seves trajectòries són contínues i, a més, verifica que

$$E\Big[\int_0^T |X(t)|^2\,dt\Big] < \infty$$

aleshores, aquest procés pertany a l'espai $\mathcal{M}_T^2$. El procés W(t) tal i com l'hem definit està adaptat per la filtració natural $\mathscr{F}_t$ i les seves trajectòries són contínues. Només quedaria provar que

$$\begin{aligned}E\Big[\int_0^T |W(t)|^2\,dt\Big] &= \int_0^T E\big[|W(t)|^2\big]dt \\ &= \int_0^T t\,dt = \frac{T^2}{2} < \infty\end{aligned}$$

Aleshores tenim la primera cosa que seria $W(t) \in \mathcal{M}_T^2$. Per continuar agafarem l'interval $[0, T]$ i el dividirem en n parts iguals amb $t_i^n = \frac{i}{n}T$, $i = 0, \ldots, n$. Els següents processos estocàstis simples

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n)\,\boldsymbol{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(t)$$

aproximen a W. En efecte ja que

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^T |W-W_n|^2 dt\right] =& \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} E\left[|W(t)-W(t_i^n)|^2\right] dt\\
=& \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (t-t_i^n)\, dt\\
=& \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)^2\\
=& \frac{T^2}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

I per acabar tindríem prou veient que la succesió $(I(W_n))_{n=1}^{\infty}$ convergeix en L^2. Per poder continuar farem servir aquesta identitat

$$
a(b-a)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)-\frac{1}{2}(a-b)^2
$$

Per definició, la integral d'un procés estocàstic simple és

$$
\begin{aligned}
I(W_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n)(W(t_{i+1}^n)-W(t_i^n))\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W(t_{i+1}^n)^2-W(t_i^n)^2)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W(t_{i+1}^n)-W(t_i^n))^2\\
&= \frac{1}{2}W(T)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n W)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}W(T)^2-\frac{1}{2}T \quad \textit{en } L^2
\end{aligned}
$$

Així podem concloure que la integral val

$$
\int_0^T W(t)\, dW(t)=\frac{1}{2}W(T)^2-\frac{1}{2}T
$$

2.5 Equacions diferencials estocàstiques

Definició 2.20. *Una equació diferencial estocàstica és una equació de la forma*

$$
dX(t)=f(X(t))\, dt+g(X(t))\, dW(t) \tag{5}
$$

Direm que un procés estocàstic $\{X_t : t\in[0,T]\}$ és solució de l'equació diferencial estocàstica (5) amb valor inicial $X(0)=X_0$ si

1. X_0 *és* $\mathscr{F}_0$*-mesurable*

2. $f(X(t)) \in L^1$ *i* $g(X(t)) \in \mathcal{M}^2_T$

i, a més, verfica que per a tot $t \in [0,T]$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))\,ds + \int_0^t g(X(s))\,dW(s)$$

La integral $\int_0^t f(X(s))\,ds$ és una integral de Riemann mentre que la integral $\int_0^t g(X(s))\,dW(s)$ és una integral d'Itô, definides i contruïdes en el capítol anterior. Els processos estocàstics que siguin solució d'una equació diferencial estocàstica se'ls anomena processos de difusió.

Hi ha un teorema molt semblant al teorema fonamental d'equacions diferencials ordinàries per donar condicions d'existència i unicitat per a les equacions diferencials estocàstiques

Teorema 2.5. *Siguin* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funcions Lipschtiz. Això vol dir que existeix una constant* $C > 0$ *tal que per a tot* $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad |g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$$

Sigui X_0 *una funció* $\mathscr{F}_0$*-mesurable amb* $E[|X_0|^2] < \infty$, $f(X(t)) \in L^1$ *i* $g(X(t)) \in \mathcal{M}^2_T$*. Aleshores el problema de valors inicials*

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(X(t))\,dt + g(X(t))\,dW(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \tag{6}$$

té un procés de difusió $\{X(t) : t \in [0,T]\}$ *que és solució de (6) i, a més, és única en el sentit que si existís un altre procés de difusió* $\{Y(t) : t \in [0,T]\}$ *que verifiqués (6) tindriem que per a tot* $t \in [0,T]$

$$P(X(t) = Y(t)) = 1$$

Demostració. Per començar contruïrem la norma següent en l'espai $\mathcal{M}^2_T$.

$$\| X \|_\lambda = E\left[\int_0^T e^{-\lambda t} |X(t)|^2\,dt \right]$$

Amb això $(\mathcal{M}^2_T, \| \, \|_\lambda)$ és un espai complet. El nombre λ serà deduït més endavant. Sigui $\Gamma : \mathcal{M}^2_T \to \mathcal{M}^2_T$ l'operador definit com

$$\Gamma(X) = X_0 + \int_0^t f(X(s))\,ds + \int_0^t g(X(s))\,dW(s)$$

Si l'aplicació Γ fos contractiva, aplicaríem el teorema del punt fix. Aquest teorema diu que si tenim un espai mètric complet (A, d) i una aplicació $f : A \to A$ contractiva, aleshores f té un únic punt fix. Per poder provar-ho, provarem millor que les funcions

$$Z_1(X(t)) = \int_0^t f(X(s))\, ds \quad Z_2(X(t)) = \int_0^t g(X(s))\, dW(s)$$

són contractives, és a dir, existeixen dues constants positives α_1, α_2 amb $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ verficant

$$\begin{aligned} \| Z_1(X(t)) - Z_1(Y(t)) \|_\lambda &\leq \alpha_1 \| X(t) - Y(t) \|_\lambda \\ \| Z_2(X(t)) - Z_2(Y(t)) \|_\lambda &\leq \alpha_2 \| X(t) - Y(t) \|_\lambda \end{aligned}$$

En el cas de Z_1 s'obté la desigualtat fàcilment només aplicant que f és funció Lipschitz. Per al cas de Z_2 hem d'aplicar també que g és funció Lipschitz i, a més, utilitzarem la isometria d'Itô.

$$\begin{aligned} \| Z_2(X) - Z_2(Y) \|_\lambda &= \| \int_0^t \Big(g(X(s)) - g(Y(s)) \Big) dW(s) \|_\lambda \\ &= E\Big[\int_0^T e^{-\lambda t} \Big| \int_0^t \Big(g(X(s)) - g(Y(s)) \Big) dW(s) \Big|^2 dt \Big] \\ &= E\Big[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |g(X(s)) - g(Y(s))|^2 \, ds\, dt \Big] \\ &\leq E\Big[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t C^2 |X(s) - Y(s)|^2 \, ds\, dt \Big] \\ &= C^2 E\Big[\int_0^T e^{-\lambda s} |X(s) - Y(s)|^2 \int_s^T e^{\lambda s} e^{-\lambda t} \, dt\, ds \Big] \\ &= C^2 E\Big[\int_0^T e^{-\lambda s} |X(s) - Y(s)|^2 \Big(\frac{1}{\lambda} \big(1 - e^{\lambda(s-T)} \big) \Big) \, ds \Big] \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda} E\Big[\int_0^T e^{-\lambda s} |X(s) - Y(s)|^2 ds \Big] \\ &= \frac{C^2}{\lambda} \| X - Y \|_\lambda \end{aligned}$$

Com que la succesió $\frac{C^2}{\lambda}$ convergeix cap a zero quan $\lambda \to \infty$, podem triar un λ perquè α_2 sigui més petita que u i així Z_2 sigui contractiva.
Aleshores aplicant el teorema del punt fix, existeix un únic procés de difusió $\{X_t : t \in [0, T]\}$ que es solució de (6). $\square$

2.6 Mètodes numèrics per a equacions diferencials estocàstiques

Fins ara hem construït la integral estocàstica, a continuació hem definit que és una equació diferencial estocàstica i per concloure hem explicat com interpretar una solució d'una equació diferencial estocàstica. Al final del tot hem demostrat que donades unes certes condicions per a les funcions f, g es pot trobar un procés estocàstic que sigui solució i, a més, que sigui única.

Evidenment, el teorema d'existència i unicitat no diu res a com trobar la solució, i per això necessitem de mètodes numèrics que ens permetin trobar solucions aproximades.

Un mètode per trobar solucions numèriques a les equacions diferencials estocàstiques és el mètode d'Euler-Maruyama. Aquest mètode és una generalització del mètode d'Euler per a equacions diferencials ordinàrias.

Considerarem l'equació (5) amb condició inicial $X_0 = x_0$ (X_0 és una constant i, per tant, és $\mathscr{F}_0$-mesurable). Si $g = 0$ estaríem en el cas determinista i s'aplicaria directament el mètode d'Euler. En canvi, si $g \neq 0$, comencem dividint l'interval $[0, T]$ en n parts iguals amb $\Delta t = \frac{T}{n}$. La idea es fer iteracions agafant primer el valor $X_0 = x_0$ i calcular des de $i = 1$ fins a n

$$X_i = X_{i-1} + f(X_{i-1})\Delta t + g(X_{i-1})\Delta W$$

ΔW segueix una distribució normal $N(0, \Delta t)$. Per tant hem de generar nombres aleatoris que segueixin una distribució normal amb mitjana zero i variància Δt (en cas de només poder generar nombres amb una distribució normal estàndar, es multipliquen aquests nombres per $\sqrt{\Delta t}$)

Exemple 2.5. *Un cas molt senzill seria l'equació diferencial estocàstica*

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{7}$$

amb μ, σ constants. La solució de (7) és un procés de difusió conegut que es diu moviment geomètric brownià i aquesta seria la solució exacta

$$X(t) = x_0\, exp\Big(\Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t + \sigma W(t)\Big)$$

Prenent $\mu = 1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 1$ i l'interval $[0, 1]$, es poden observar dues trajectòries que apareixen en la Figura 2. La trajectòria dibuixada en color

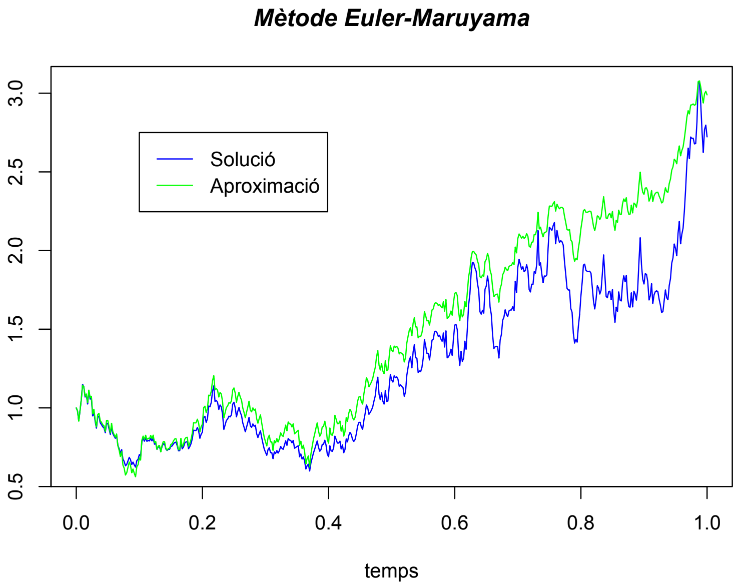

Figura 2: *Mètode Euler-Maruyama per a una equació diferencial estocàstica.*

blau és la solució exacta de la equació (7), i la que està en color verd seria la trajectòria dibuixada fent les iteracions del mètode de Euler-Maruyama. Totes dues són gairebé semblants al principi, encara que al final s'allunyen una mica.

3 Un model epidèmiològic SIR amb cadenes de Markov

3.1 Descripició del model

En la introducció del treball s'ha presentat alguns models epidemiològics. Apareixen els models deterministes SIS, SI i SIR i s'exposen dos models estocàstics. Ara farem un model estocàstic més realista i molt semblant al de Reed-Frost en què hi ha tres estats possibles: susceptible, infectat i recuperat. Aquest model va ser proposat per Henry C. Tuckwell i Ruth J. Williams l'any 2006. Exposarem les condicions prèvies del model.

a) La població es manté constant al llarg del procés, suposant que sigui n la grandària de la població.

b) El model és discret. El conjunt $T = \{t : t \geq 0\} \subseteq \mathbb{N}$ indica el dia del procés en què estem, és a dir, si $t = i$ indica que estem en el dia i.

c) Per a cada individu $i = 1, .., n$ tenim el procés aleatori $\{Y_i(t) : t \geq 0\}$ i cada variable aleatòria pren només els valors 0 o 1 indicant que l'individu i no està infectat en temps t en cas de ser 0, o que sí ho està en cas de que sigui 1. Per tant, el nombre de persones infectades en el dia t serà

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)$$

d) L'individu i es trobarà amb $N_i(t)$ persones en el dia t. El nombre $N_i(t)$ és aleatori i, a més, suposarem que les variables aletòries $\{N_i(t) : i = 1, ..., n\}$ són independents entre sí.

e) Si una persona s'infecta en el dia t, romandrà en aquest estat r unitats de temps. Això vol dir que si l'individu i es contagia en temps t, estarà infectat en els temps $\{t, t+1, ..., t+r-1\}$. En el temps $t+r$ es recuperarà i haurà obtingut inmunitat a la malaltia, mantenint-se en l'estat de recuperat. (Si l'individu i era susceptible en el temps t i es contagia en $t + 1$ vol dir que s'ha produït el contagi en el interval $(t, t + 1]$). Suposarem que r es constant (hi ha alguns models que prenen r com si fos una variable aleatòria, però no es farà en aquest treball per simplificar els càlculs), i l'anomeramem com al període de recuperació. També considerarem el cas en el que r sigui infinit i per tant un cop que una persona s'hagi contagiat, es mantendrà en l'estat d'infectat per sempre.

f) Si una persona i susceptible en temps t es troba en el període $(t, t+1]$ amb una persona infectada, la persona i podrà contagiar-se amb probabilitat $p \in [0, 1]$.

g) Sigui Y(t) el nombre d'infectats en temps t la probabilitat que una persona triada a l'atzar i estigui infectat serà

$$P(Y_i(t) = 1) = \frac{Y(t)}{n}$$

Amb tot això, ja podrem començar a plantejar el model estocàstic SIR i així descriure'l amb cadenes de Markov. Siguin les $N_i(t)$ variables aleatòries independents i igualment distribuïdes. Fixem primer un temps $t \geq 0$

- $Y^k(t)$ és el nombre d'individus que són infecciosos en t i porten amb la malaltia k unitats de temps, podent arribar com a màxim r dies amb la infecció, és a dir, $k = 0, 1, ..., r-1$
- $X(t)$ i $Z(t)$ són el nombre de susceptibles i recuperats respectivament en temps t
- Asumim que en $t = 0$ les persones que estiguin infectades s'hauran infectat en aquest temps, per tant tenim que $Y(0) = Y^0(0)$ i $Y^k(0) = 0$ per a $k = 1, ..., r-1$. Hi ha n persones, de les quals no hi ha cap recuperats quan comença el procés $Z(0) = 0$ i $Y(0) + X(0) = n$

La cadena de Markov que tenim fins ara és

$$V(t) = \{X(t), Y^0(t), \dots, Y^{r-1}(t) : t \geq 0\}$$

amb el conjunt d'estats següent

$$I = \{(x, y^0, \dots, y^{r-1}) \in \mathbb{N}^{r+1} : x + \sum_{i=0}^{r-1} y^i \leq n\}$$

La variable $Z(t)$ és coneguda ja que si sabem la grandària n i tots els susceptibles i infectats podem trobar el nombre de recuperats. Hi ha tres restriccions més a tenir en compte

$$\begin{aligned}
Y^{k+1}(t) =& Y^k(t-1), \quad k = 0, 1, ..., r-2 \\
Z(t) =& Z(t-1) + Y^{r-1}(t-1) \\
Y(t) =& \sum_{k=0}^{r-1} Y^k(t)
\end{aligned}$$

La primera indica que el nombre d'infectats que porten k dies amb la infecció en temps $t-1$ seran els infectats que porten $k+1$ dies en temps t. La segona equació diu que el nombre de recuperats en temps t són els que ja ho eren més els infectats que porten $r-1$ dies amb la malatia en temps $t-1$. L'última fa referència al nombre total de persones infectades.

Continuarem modificant aquesta cadena de Markov una mica més. Tenim per a cada $i = 1, \ldots, n$ el procés $\{Y_i(t) : t \geq 0\}$ tal que $Y_i(t)$ pot prendre els valors 1 o 0 indicant si la persona i és infecciosa o no respetivament. Definim també $X_i(t)$ i $Z_i(t)$ unes variables que prenguin els valors 1 o 0 indicant com abans si la persona és susceptible o no, si ja està recuperada o si encara segueix infectada. En conclusió:

$$X_i(t) + Y_i(t) + Z_i(t) = 1 \quad t \geq 0$$

que vol dir clarament que l'individu i només està en un estat possible, una d'aquestes variables serà 1 i les altres dos 0. Per últim el nombre total de persones que hi ha en cada estat seran:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) \quad Y(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(t) \quad Z(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(t)$$

Per concloure, definirem la cadena de Markov de tal manera que sembli més un model de cadena binomial. Per a cada individu $i = 1, ..., n$ siguin les variables aleatòries $\{Y_i^k(t) : k = 0, ..., r-1\}$. Aquestes variables prenen els valors 1 o 0 indicant que si $Y_i^k(t) = 1$ l'individu i estarà infectat en el dia t i portarà amb la malaltia k dies. En cas que no fos així seria 0.
La cadena de Markov que finalment hem obtingunt pel nostre model serà:

$$\mathbf{V}(t) = \{X_i(t), Y_i^0(t), ..., Y_i^{r-1}(t) : t \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\}$$

amb el conjunt finit d'estats

$$\mathbf{I} = \{(x_1, y_1^0, \ldots, y_1^{r-1}, \ldots, x_n, y_n^0, \ldots, y_n^{r-1}) \in \{0,1\}^{n(r+1)} :$$
$$: a_i = x_i + \sum_{k=0}^{r-1} y_i^k \leq 1 \quad i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\}$$

Les variables $Z_i(t)$ queden unívocament definides coneixent tots els valors de la cadena de Markov $\mathbf{V}(t)$

3.2 Probabilitats de transició

En aquest apartat es calcularen les probabilitats de transició per a la cadena de Markov $\mathbf{V}(t)$ amb el conjunt finit d'estats $\mathbf{I}$ anteriorment contruïda.
Primer fixem un individu $i = 1, ..., n$. La persona i pot estar en un dels $r + 2$ estats possibles, i per això, només una d'aquestes variables aleatòries $X_i(t), Y_i^0(t), ..., Y_i^{r-1}(t), Z_i(t)$ pren el valor 1 i la resta seran 0. Si alguna de les variables $Y_i^0(t), ..., Y_i^{r-1}(t)$, $Z_i(t)$ prengués el valor 1 les probabilitats de transició queden totalment determinades per 1 si passa a l'estat següent i 0 en cas contrari. Per exemple si $Y_i^0(t) = 1$ tenim:

$$P(Y_i^1(t+1) = 1 | Y_i^0(t) = 1) = 1$$

$$P(X_i(t+1) = 1 | Y_i^0(t) = 1) = P(Y_i^0(t+1) = 1 | Y_i^0(t+1) = 1) =$$
$$P(Y_i^2(t+1) = 1 | Y_i^0(t) = 1) = \cdots = P(Y_i^{r-1}(t+1) = 1 | Y_i^0(t) = 1) =$$
$$P(Z_i(t+1) = 1 | Y_i^0(t) = 1) = 0$$

Només hi ha una probabilitat de transició a tenir en compte

$$\rho_i = P(Y_i^0(t+1) = 1 | X_i(t) = 1,\, Y(t) = y) \tag{8}$$

que és la probabilitat que l'individu i passi de ser susceptible en t a ser infecciós en $t + 1$ sabent que hi ha y infectats.
En el temps t hi haurà $Y(t) = y$ persones infectades i la persona i es troba amb un nombre aleatori de persones $N_i(t)$. D'aquestes algunes seran infeccioses i podran transmitir la malatia a i amb probabilitat p. La probabilitat que de les $N_i(t)$ persones hi hagi k infectades segueix una binomial $\xi \sim B(N_i(t), \theta)$ amb probabilitat $\theta = \frac{y}{n-1}$, aleshores

$$P(\xi = k) = \binom{N_i(t)}{k} \theta^k (1-\theta)^{N_i(t)-k} \tag{9}$$

La probabilitat que i s'infecti sabent que hi ha k infectats és:

$$p_k = 1 - (1-p)^k \tag{10}$$

i finalment obtenim:

$$
\begin{aligned}
\rho_i &= \sum_{k=0}^{N_i(t)} p_k P(\xi = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N_i(t)} (1-(1-p)^k) \binom{N_i(t)}{k} \theta^k (1-\theta)^{N_i(t)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N_i(t)} \binom{N_i(t)}{k} \theta^k (1-\theta)^{N_i(t)-k} - \sum_{k=0}^{N_i(t)} (1-p)^k \binom{N_i(t)}{k} \theta^k (1-\theta)^{N_i(t)-k} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{N_i(t)} \binom{N_i(t)}{k} ((1-p)\theta)^k (1-\theta)^{N_i(t)-k} \\
&= 1 - ((1-p)\theta + 1 - \theta)^{N_i(t)} \\
&= 1 - (1-p\theta)^{N_i(t)} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_i(t)}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Amb la probabilitat ρ_i queda clar quina és la probabilitat que l'individu i segueixi sent susceptible en temps $t+1$

$$
P(Y_i^0(t+1) = 0 \mid X_i(t) = 1, Y(t) = y) = 1 - \rho_i = \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_i(t)}
$$

3.3 El temps de recuperació és infinit, és a dir, r = ∞

En aquest cas una vegada que la persona i es contagia en temps t passarà a ser infecciosa per sempre. La cadena de Markov varia una mica ja que no tenen sentit ni les variables $\{Y_i^k(t) : k = 0, ..., r-1\}$ ni la variable $Z_i(t)$ per un individu i. Aquí no existeix la possibilitat d'estar recuperat i si es coneixen el nombre d'infectats $Y(t) = y$, aleshores el nombre de susceptibles serà $X(t) = n - y$. Per tant en aquest cas la cadena de Markov serà simplement

$$
\mathbf{V}_\infty(t) = \{Y(t) : t \geq 0\} \quad \mathbf{I}_\infty = \{1, \ldots, n\}
$$

Recordem que les variables aleatòries $N_i(t)$ són independents i estan igualment distribuïdes. L'individu i es troba en el dia t amb $N_i(t)$ persones i la probabilitat que de les $N_i(t)$ hi hagi k infectats ve donada per l'equació (9). La probabilitat que i en t sigui susceptible i que en $t+1$ es torni infectat és la probabilitat de l'equació (11).

Anomenarem ΔY a la variable que defineix l'increment d'infectats entre dos dies consecutius com

$$\Delta Y(t+1) = Y(t+1) - Y(t)$$

Suposant $Y(t) = y \Rightarrow X(t) = n - y \Rightarrow \Delta Y(t+1) = k, \quad k \in \{0, 1, ..., n-y\}$.
Donarem la funció de massa de probabilitats de $\Delta Y(t+1)$.
Llavors, la probabilitat que no hagi contagi al dia següent serà

$$P(\Delta Y(t+1) = 0 | Y(t) = y) = \prod_{i=1}^{n-y} (1 - \rho_i) = \prod_{i=1}^{n-y} \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_i(t)} \tag{12}$$

La probabilitat que una persona es contagiï al dia següent serà

$$\begin{aligned} P(\Delta Y(t+1) = 1 | Y(t) = y) &= \sum_{i=1}^{n-y} \left[\rho_i \prod_{l=1, l\neq i}^{n-y} (1 - \rho_l)\right] \\ = \sum_{i=1}^{n-y} \left[\left(1 - \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_i(t)}\right) \prod_{l=1, l\neq i}^{n-y} \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_l(t)}\right] \end{aligned} \tag{13}$$

La probabilitat que es contagiïn dues persones més al dia següent serà

$$\begin{aligned} P(\Delta Y(t+1) = 2 | Y(t) = y) &= \sum_{i=1, j>i}^{n-y} \left[\rho_i \rho_j \prod_{l=1, l\neq i,j}^{n-y} (1 - \rho_l)\right] \\ = \sum_{i=1, j>i}^{n-y} \left[\left(1 - \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_i(t)}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_j(t)}\right) \prod_{l=1, l\neq i,j}^{n-y} \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^{N_l(t)}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Com es pot veure, les probabilitats es compliquen i les fórmules es fan més complexes. Per tant intentarem fer uns càlculs que siguin més senzills. Per fer-ho exigirem que la variable $N_i(t)$ sigui constant $N_i(t) = N$, això vol dir que totes les persones susceptibles es troben amb el mateix nombre de persones cada dia, de què algunes estaran infectades.

Definim la variable ΔY com haviem fet abans. La probabilitat p que un individu i susceptible en t passi a ser infectat en $t+1$ ve donada per l'equació (11) i com ara $N_i(t) = N$ és constant tenim que aquesta probabilitat val

$$p = 1 - \left(1 - \frac{py}{n-1}\right)^N$$

La variable $\Delta Y(t+1)|_{Y(t)=y}$ segueix una distribució binomial de paràmetres $B(n-y,p)$ i la seva funció de massa de probabilitats per als valors $k = 0,1,\dots,n-y$ és

$$P(\Delta Y(t+1)=k|Y(t)=y) = \binom{n-y}{k} p^k (1-p)^{n-y-k} = \binom{n-y}{k}\left(1-\left(1-\frac{py}{n-1}\right)^N\right)^k \left(1-\frac{py}{n-1}\right)^{N(n-y-k)} \tag{15}$$

L'esperança i la variància d'una distribució binomial $X \sim B(n,\theta)$ són

$$E[X] = n\theta \quad Var[X] = n\theta(1-\theta)$$

Pel nostre cas l'esperança i la variància de la variable $\Delta Y(t+1)|_{Y(t)=y}$ són

$$E[\Delta Y(t+1)|Y(t)=y] = (n-y)\left(1-\left(1-\frac{py}{n-1}\right)^N\right) \tag{16}$$

$$Var[\Delta Y(t+1)|Y(t)=y] = (n-y)\left(1-\left(1-\frac{py}{n-1}\right)^N\right)\left(1-\frac{py}{n-1}\right)^N \tag{17}$$

3.4 Un procés de difusió si $\mathbf{r} = \infty$

Continuant amb les indicacions de H.C. Tuckwell i R.J. Wlliams i amb els càlculs fets per a l'esperança (16) i la variància (17) de la variable $\Delta Y(t+1)$ que indica l'increment d'infectats entre dos dies consecutius en el cas que la persona un cop infectada romangui en aquest estat per sempre ($r = \infty$), podem obtenir un procés de difusió per a la variable aleatoria Y(t) (nombre d'infectats en temps t). Per poder fer-ho suposarem que la grandària de la població n és gran, la probabilitat de contagi p és molt petita i que el valor nNp té un valor moderat.
Volem trobar un procés de difusió, i com que el procés $\{Y(t) : t = 0,1,\dots\}$ és discret hem de restructurar-lo una mica.
En particular, definim un nou procés continu

$$\hat{Y}^n(t) = \frac{Y([nt])}{n}, \quad t \geq 0$$

en què $[\cdot]$ representa la part entera. $\hat{Y}^n(t)$ serà per tant, la fracció entre el nombre d'infectats en temps $[nt]$ partit per la grandària de la població n. Amb les equacions (16) i (17), la gràndaria n gran, la probabilitat p petita, un valor moderat per a $\theta = nNp$ i fent servir l'aproximació $1-(1-x)^N \approx Nx$ per a valors d'x molt petits, obtenim que si $\Delta t = \frac{1}{n}$ i $t = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots,$

$$E\big[\hat{Y}^n(t+\Delta t) - \hat{Y}^n(t) | \hat{Y}^n(t) = \hat{y}\big] \approx (1-\hat{y})Np\hat{y} = \theta\hat{y}(1-\hat{y})\Delta t \tag{18}$$

$$Var\big[\hat{Y}^n(t+\Delta t) - \hat{Y}^n(t) | \hat{Y}^n(t) = \hat{y}\big] \approx (1-\hat{y})Np\hat{y}(1-Np\hat{y})\Delta t \approx \frac{\theta}{n}\hat{y}(1-\hat{y})\Delta t \tag{19}$$

Prenent límits es pot aproximar $\hat{Y}^n(t)$ per un procés de difusió $\hat{Y}(t)$ que pren valors en l'interval $[0,1]$ i, a més, verifica l'equació integral estocàstica següent

$$d\hat{Y}(t) = \theta\hat{Y}(t)\big(1-\hat{Y}(t)\big)dt + \sqrt{\frac{\theta}{n}\hat{Y}(t)\big(1-\hat{Y}(t)\big)}dW(t) \tag{20}$$

en què $\{W(t) : t \geq 0\}$ és un procés de Wiener. Per a proves similars d'aproximació d'una cadena de Markov en temps continu, vegeu el llibre [4, Capítol 11].

Es pot justificar aquest pas d'una altra manera. Suposarem que per a Δt prou petit, la variable aleatòria $\hat{Y}^n(t+\Delta t) - \hat{Y}^n(t)$ és aproximadament una normal amb esperança (18) i variància (19). Sigui $Z \sim N(0,1)$ una variable aleatòria amb distribució normal estàndar, aleshores

$$\hat{Y}^n(t+\Delta t) \approx \hat{Y}^n(t) + \theta\hat{Y}^n(t)(1-\hat{Y}^n(t))\Delta t + \left(\sqrt{\frac{\theta}{n}\hat{Y}^n(t)(1-\hat{Y}^n(t))}\right)\sqrt{\Delta t}\, Z$$

són les aproximacions del mètode d'Euler-Maruyama de l'equació diferencial estocàstica (20).

3.5 Simulacions

En aquesta part es presentaran unes gràfiques que simulen el model anterior en el cas que el temps de recuparació sigui infinit. Per fer totes les simulacions s'ha utilitzat el programa R. Evidentment en aquest procés com que mai un individu es recupera de la malaltia i roman en l'estat d'infectat per sempre, hi haurà un moment en què totes les persones estiguin infectades.

Aquest model epidemiològic ha estat descrit amb cadenes de Markov i es pot simular gràcies a les probabilitats de transició amb l'equació (15). També s'ha obtigunt un procés de difusió amb l'equació diferencial estocàstica (20) i per poder simular-lo es farà servir el mètode d'Euler-Maruyama.

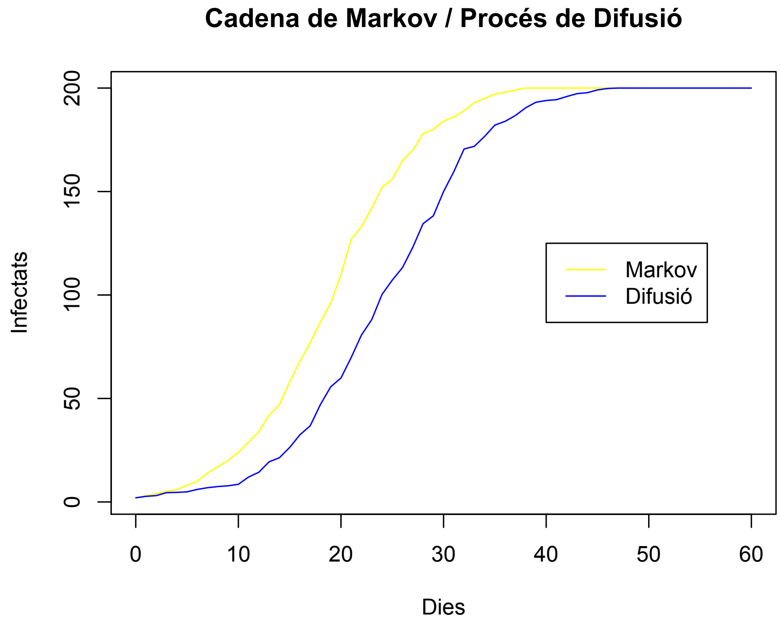

Figura 3: *Simulació del model epidemiològic quan $r = \infty$ descrit amb cadenes de Markov i amb un procés de difusió. Les dades d'aquesta simulació són: grandària de la població n=200, probabilitat de contagi p=0.05, N=4 contactes d'un individu per dia i 2 persones infectades al principi.*

En la Figura 3 apareixen dues simulacions del model. Per a la grandària de la població s'ha pres $n = 200$, el nombre de contactes d'un individu amb altres individus per dia és N=4 i la probabilitat que algú es contagiï quan està en conctate amb un infectat és $p = 0.05$. El nombre d'infectats al principi del procés es de dos persones (Y(0)=2). La línia grogra indica la simulació amb cadenes de Markov i la línia blava és la simulació del procés de difusió aplicant el mètode d'Euler-Maruyama. Com es pot observar les dues trajectòries són molt semblants tot i que en la blava tota la població tarda més en contagiar-se.

Les altres tres figures són simulacions en què varien algun paràmetre, ja sigui la grandària de la població n, o el nombre de contactes N per dia , o la probabilitat de contagi p. Les simulacions de les Figures 4, 5 i 6 s'han calculat únicament pel mètode d'Euler-Maruyama, és a dir, s'ha utilitzat només el procés de difusió (20) amb $Y(0) = Y_0 = 2$ persones infectades al principi.

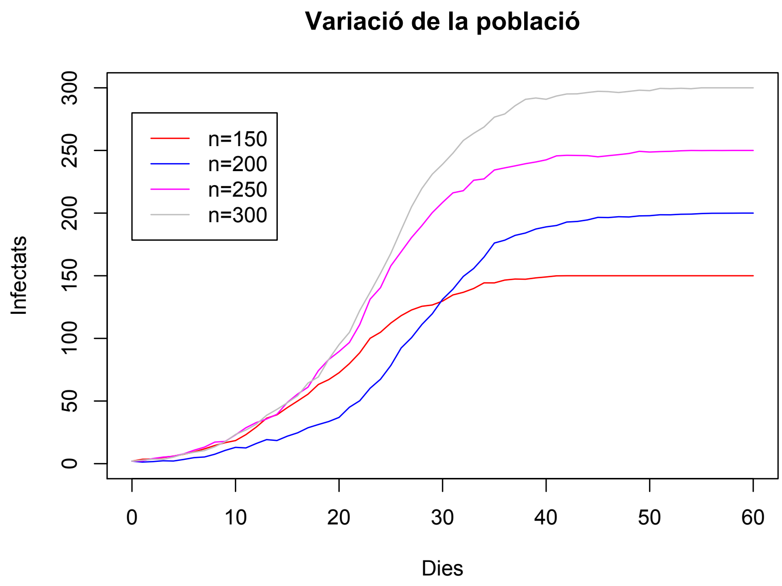

Figura 4: *Simulació variant la grandària de la població n.*

En la Figura 4 varia la grandària de la població que pren els valors $n = 150, 200, 250, 300$. En 50 dies tots quedarien infectats.

En la Figura 5 varia el nombre N de contactes d'un individu amb altres individus per dia. El que es pot concloure d'aquesta gràfica és que si hagués dos contactes per persona i dia, el procés tardaria fins a cent dies perquè tots acabin infectats, i si hagués només un contacte per persona i dia encara no estarien tots infectats. Queda clar que una manera per disminuir la velocitat de l'epidèmia seria restringir el contacte entre els individus.

Per acabar, en la Figura 6 varia la probabilitat de contagi. En 100 dies si la probabilitat de contagi fos molt petita, en aquest cas $p = 0.01$, no arribarien a estar tots infectats, però si fos $p = 0.1$ o $p = 0.15$ tothom quedaria contagiat en aproximadament 20 dies.

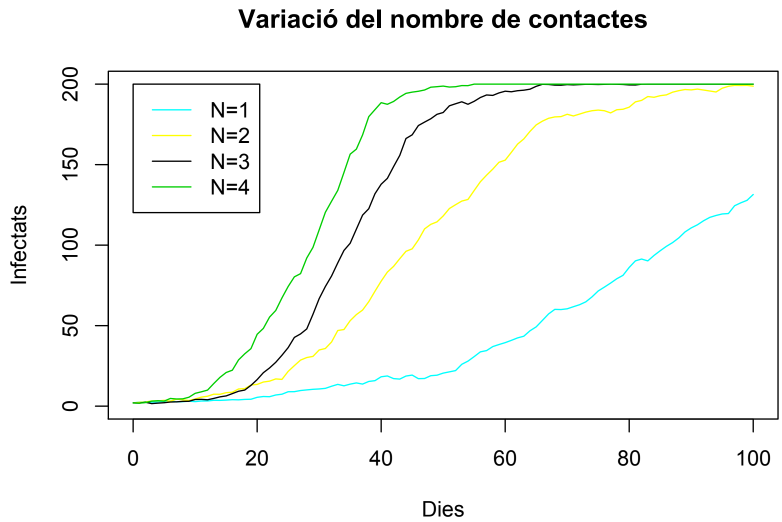

Figura 5: *Simulació variant el nombre N de contactes que té una persona amb altres individus per dia.*

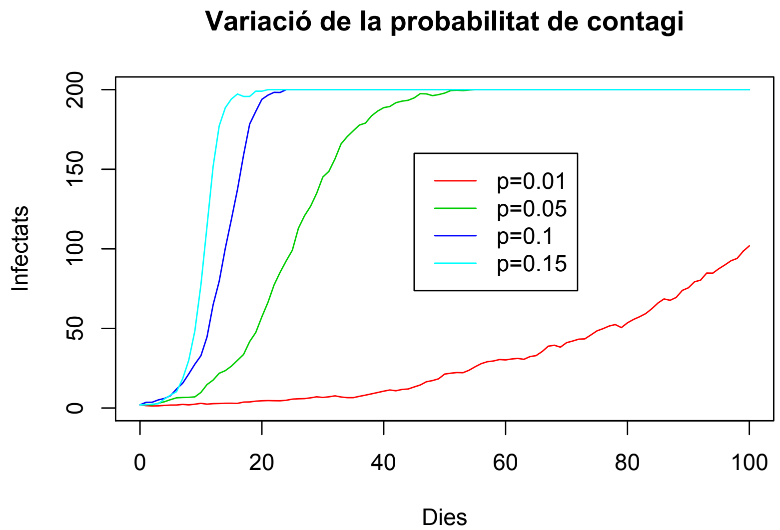

Figura 6: *Simulació variant la probabilitat p que un individu es trobi amb un infectat i es contagiï.*

Conclusions

Els models estocàstics permeten modelar molt bé aquests tipus d'epidèmies. Si la població no és molt gran, els models estocàstics tenen en compte a cada individu. Es per això, que en el nostre cas és millor modelar amb models estocàstics que amb models deterministes.

Aquest treball m'ha ajudat a entendre millor la part de processos estocàstics i a poder conèixer que són les integrals i equacions diferencials estocàstiques. Les aplicacions dels processos estocàstics són molt diverses i jo volia fer alguna cosa que tingués relació amb la biologia. Per aquesta raó vaig trobar un model epidemiològic estocàstic gràcies al meu tutor, el qual vaig investigar.

Per poder fer les simulacions vaig utilitzar un procés de difusió del model quan el temps de recuperació és infinit. Aquest model és un model molt simple que no té moltes aplicacions. Podriem dir que és un primer contacte per poder entendre com fer un model epidemiològic i, a partir d'aquí, continuar per trobar models més complexos que sí tinguin alguna aplicació més real.

Referències

[1] Zdzislaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak, Basic Stochastic Processes, Springer.

[2] Some properties of a simple stochastic epidemic model of SIR type. Henry C. Tuckwell and Ruth J. Williams. 2007. Descarregat el dia 25/02/2016 de http://wwwf.imperial.ac.uk/~ejm/M3S4/Problems/Enhanced2008article.pdf

[3] D. Nualart, M. Sanz, Curs de Probabilitats, Promociones y publicaciones universitarias, 1990

[4] S.N. Ethier, T.G. Kurtz, Markov Processes, Characterization and Convergence, Wiley, New York, 1986

[5] Procesos estocásticos. Integral estocástica. Ecuaciones diferenciales estocásticas. Lema de Ito. Descarregat el dia 17/04/2016 de http://www.uv.es/olmos/mod_din_estocastico.pdf

[6] Construyendo la integral estocástica de Ito, Luis Rincón, Departamento de matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, México DF. Descarregat el dia 20/04/2016 de http://www.dynamics.unam.edu/lars/pub/ede.pdf

[7] Introducción a la integral estocástica. José R. Berrendero. Departamento de matemáticas. Universidad autónoma de Madrid. Abril 2013. Descarregat el dia 2/05/2016 de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/joser/docencia/intest/2013-integracion-estocastica.pdf

[8] Movimiento Browniano, Rosario Romera, Febrero 2009. Descarregat el dia 2/05/2016 de http://ocw.uc3m.es/estadistica/procesos-estocasticos-con-aplicaciones-al-ambito-empresarial/lecturas/Tema6_Movimiento_Browniano.pdf

[9] Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas, Osval Antonio Montesinos-López y Carlos Moisés Hernández-Suárez. Decarregat el dia 15/03/2016 de http://www.scielosp.org/pdf/spm/v49n3/07.pdf