



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA DE JOCS. JOCS AMB INFORMACIÓ INCOMPLETA

Autor: Max Sanjosé Garcia

Director: Dr. Josep Vives

Realitzat a: Departament
de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

Throughout this project, we are going to study the games with incomplete information. This work presents the Harsanyi's transformation, that allows us to transform a game with incomplete information into a complete but imperfect information game. We are going to see all the implications that this result can have.

We will start by seeing an introduction to understand the basic aspects of game theory. Then, we will explain the main topics of this project such as the definition of a Bayesian game or the Harsanyi's transformation. After that, we will see how useful can this kind of games be, by studying an example, the chain store game. And last but not least, we will study some applications of Bayesian games in the real world, like auction theory or mechanism design.

Resum

En aquest treball estudiarem amb profunditat els jocs amb informació incompleta. Estudiarem les transformacions de Harsanyi les quals ens permeten convertir un joc amb informació incompleta amb un joc amb informació completa però imperfecte. Veurem tots els resultats i totes les implicacions que això pot tenir.

Començarem amb una introducció per entendre bé els conceptes bàsics de la teoria de jocs. Després passarem a explicar els conceptes principals d'aquest treball com la definició de joc Bayesià o les transformacions de Harsanyi. A continuació veurem la utilitat que poden tenir aquest tipus de jocs amb un exemple molt ampli, el joc de la cadena de tendes. I per últim estudiarem diferents aplicacions dels jocs Bayesianes en el món actual, com serien la teoria de subhastes o el disseny de mecanismes.

Agraïments

En primer lloc m'agradaria expressar el meu agraïment al meu tutor, Dr. Josep Vives, per ajudar-me amb la elecció del tema, per explicar-me els conceptes necessaris i, en general, per el seu temps i la seva dedicació durant aquests últims mesos.

També m'agradaria agrair a tots els professors de la facultat per les seves ensenyances al llarg dels anys.

I per últim vull agrair tant a la meva família com als meus amics per el suport incondicional que m'han mostrat sempre i en especial en els moments de més dificultat.

Índex

1	Introducció	1
2	Conceptes preliminars	3
2.1	Conceptes bàsics	3
2.2	Classificació dels jocs	5
2.3	Equilibris	6
3	Jocs bayesians	8
3.1	La transformació de Harsanyi	8
3.2	Jocs Bayesians i Equilibri de Nash Bayesià	9
4	La paradoxa de la cadena de tendes	13
4.1	Teoria d'inducció i teoria de dissuasió	14
4.2	Solució de la paradoxa	14
4.3	Estratègies de cada jugador	16
5	Subhastes	21
5.1	Subhastes a primer preu	22
5.2	Subhastes a segon preu	26
5.3	Principi d'equivalència	28
6	Disseny de mecanismes	30
6.1	El pricipi de revelació	32
7	Conclusions	34

1 Introducció

El projecte

En el món actual ens trobem que cada dia es realitzen una gran quantitat d'acords i transaccions econòmiques, no només entre països, sinó també entre empreses i entre particulars. Totes aquestes transaccions poden ser estudiades i modelitzades a partir de la teoria de jocs. La teoria de jocs és una branca matemàtica i econòmica que utilitza models per estudiar i entendre interaccions en estructures formalitzades d'incentius, a les quals anomenem "jocs".

La finalitat de la teoria de jocs és predir el comportament d'un conjunt de jugadors, els quals actuen de forma racional, per així trobar la millor estratègia per cada un d'ells. És a dir, la teoria de jocs busca anticipar com es comportaran la resta de jugadors i trobar l'estratègia que maximitza els beneficis de cada jugador.

L'estudi de la teoria de jocs va néixer amb Ernst Zermelo (1913), Emile Borel (1921) i John Von Neumann (1928). Uns anys més tard, el mateix Von Neumann, juntament amb Oskar Moergenstern, van publicar el llibre *Theory of Games and Economic Behavior* (1944) on per primera vegada es formalitzava sistemàticament la teoria de jocs. Posteriorment, als inicis de la dècada dels 50, John Forbes Nash va demostrar l'existència de punts d'equilibri en els jocs i així va construir una base a partir de la qual generalitzar la teoria de jocs. Avui en dia la teoria de jocs és una disciplina molt completa i molt estudiada.

Podem classificar els jocs en funció de diferents criteris. Un d'aquests criteris és la quantitat d'informació de la qual disposen els jugadors. Distingim entre jocs amb informació completa i jocs amb informació incompleta. En els jocs amb informació completa, tots els jugadors coneixen totes les característiques del joc. Mentre que en els d'informació incompleta els jugadors només tenen informació parcial sobre el joc, és a dir, alguns jugadors desconeixen alguna de les característiques dels joc com per exemple el número de jugadors. En aquest projecte ens centrarem en estudiar els jocs amb informació incompleta. John Harsanyi va ser una de les persones que va aconseguir més avenços en l'estudi d'aquests jocs, ja que va demostrar que qualsevol joc amb informació incompleta es pot transformar en un joc amb informació completa però imperfecte introduint el concepte de l'atzar (natura). Aquest resultat va ser de gran importància ja que permet simplificar molt l'estudi dels jocs amb informació incompleta. Al llarg d'aquest treball s'explicaran amb més detall els conceptes d'informació completa, incompleta, perfecte i imperfecte.

Hi ha diverses aplicacions dels jocs amb informació incompleta, però ens centrarem en estudiar principalment dues. En primer lloc, la teoria de subhastes. Una subhasta és la venda d'un objecte en la qual guanya aquell participant amb una oferta més elevada. Ens focalitzarem en les subhastes a sobre tancat, és a dir, aquelles en que cada jugador fa la seva oferta de forma privada. Dins de les subhastes a sobre tancat, les més conegudes són les subhastes a primer preu, on el guanyador paga la seva oferta. Però també existeixen les subhastes a segon preu on el guanyador paga la segona oferta més elevada. Tot i que no són tant conegudes també són molt utilitzades en diferents àmbits.

D'entrada algú podria pensar que les subhastes a primer preu són més rentables per el venedor ja que en les de segon preu el venedor no rep l'oferta més elevada sinò la segona més elevada. Però algú altre podria pensar que com, en les subhastes a segon preu, el guanyador no haurà de pagar la seva oferta, sinò una més baixa, tots els jugadors són més propensos a fer ofertes més altes i per tant el venedor acaba obtenint més benefici. En aquest projecte veurem les similituds i les diferències entre les subhastes a primer preu i a segon preu i compararem quin dels dos estils és més eficient.

I en segon lloc estudiarem breument el disseny de mecanismes que és un camp que estudia els conceptes de solució per una classe de jocs amb informació privada. Intentarem donar una millor estratègia tant pels participants com per el director del mecanisme. Aquest conceptes seran explicats a la secció corresponent.

Estructura de la Memòria

La memòria està estructurada en 5 seccions més unes conclusions finals.

En la primera secció introduïm els conceptes bàsics de la teoria de jocs com la definició de joc, els equilibris de Nash i la classificació dels jocs.

En la segona ens centrem ja en els jocs amb informació incompleta o jocs Bayesianes, on expliquem els conceptes de joc Bayesià i d'equilibri de Nash Bayesià.

En la tercera expliquem la paradoxa de la cadena de tendes, que és un joc seqüencial que si l'entenem com un joc amb informació completa ens porta a una paradoxa, la qual es resol si el mirem com un joc amb informació incompleta.

I en les dos últimes seccions estudiarem cada una de les aplicacions dels jocs amb informació incompleta. És a dir, la teoria de subhastes, estudiant les diferents subhastes i les seves característiques; i el disseny de mecanismes.

2 Conceptes preliminars

2.1 Conceptes bàsics

Per començar, es necessari introduir algunes nocions bàsiques sobre teoria de jocs per així poder entendre els resultats i models que s'explicaran més endavant.

Un joc és un model estàtic que descriu situacions d'interacció entre els jugadors que hi participen. Cada jugador té una sèrie d'accions disponibles i una funció de pagaments associada. Els pagaments de cada jugador depenen tant de les accions que pren ell mateix, com de les accions que prenen la resta de jugadors.

Podem representar els jocs de dues maneres, en forma estratègica o en forma extensiva.

Definició 2.1. *Un joc en forma estratègica de n jugadors amb conjunt de jugadors $N := \{1, \dots, n\}$, és una parella $G := (A, u)$ formada per*

- **Conjunt d'estratègies:** *Per cada $i \in N$, A_i és el conjunt d'estratègies del jugador i . Direm que $A := \prod_{i=1}^n A_i$ és el conjunt de perfils d'estratègies.*
- **Funcions de pagament:** *Per cada $i \in N$, $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ és la funció de pagament del jugador i ; u_i assigna a cada perfil d'estratègies $a \in A$, el pagament que obtindrà el jugador i si es juga a , i escrivim $u := \prod_{i=1}^n u_i$.*

Definició 2.2. *Un joc en forma extensiva de n jugadors amb conjunt de jugadors $N := \{1, \dots, n\}$, és una 7-tupla $\Gamma := (X, E, P, W, A, p, U)$ formada per*

- **L'arbre del joc:** *(X, E) és un arbre finit. X és un conjunt finit de nodes i $E \subset X \times X$ és un conjunt finit de costats satisfent: **i)** hi ha un únic node r complint que no existeix cap $x \in X$ tal que $(x, r) \in E$, i **ii)** per cada $x \in X \setminus \{r\}$ existeix un únic camí que connecta r i x . Un camí és un conjunt de costats consecutius. Direm que un node $x \in X$ és terminal si no hi ha cap costat que comenci a x . Considerem Z el conjunt de tots els nodes terminals.
L'arbre descriu l'estructura del joc: els nodes no terminals representen els punts on un jugador ha de pendre una decisió; els costats que comencen en un node representen les possibles accions que pot pendre el jugador en aquell punt; i els nodes terminals representen els diferents finals del joc.*
- **La partició dels jugadors:** $P := \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ és una partició de $X \setminus Z$ que indica per cada node no terminal x , quin jugador ha de pendre la decisió a x . P_0 s'utilitza per representar l'atzar en aquells jocs on hi hagi alguna part d'atzar.
- **La partició d'informació:** $W := \{W_1, \dots, W_n\}$, on per cada $i \in N$, W_i és una partició de P_i . Cada $w \in W_i$ conté els nodes de P_i en que el jugador i té la mateixa informació sobre el que ha passat en el joc fins aquell moment. Per tant, si s'arriba al node $w \in W_i$ durant el joc, el jugador i només sap que ha de pendre una decisió, però no sap a quin node de w es troba. I per tant, cada $w \in W_i$ compleix **i)** en cada joc, w s'interseca com a molt un cop i **ii)** el número de costats que comencen a x i a y han de ser iguals si $x, y \in w$.

- **La partició d'accions:** Cada jugador ha d'escollir una alternativa a cada node de decisió però, degut a la partició d'informació, només pot escollir una acció a cada conjunt d'informació. Formalment, una acció pel jugador $i \in N$ al conjunt d'informació $\omega \in W_i$ és un conjunt que conté per cada $x \in \omega$, una alternativa a x . Direm A al conjunt de totes les possibles accions dels diferents jugadors als diferents conjunts d'informació. I, per cada $\omega \in W_i$, direm A_ω al conjunt d'accions a ω .
- **Una distribució de probabilitat:** p és una funció que assigna a cada costat del node inicial r , una probabilitat.
- **Funcions de pagament:** $U := (U_1, \dots, U_n)$. On per cada $i \in N$, U_i és la seva funció de pagaments.

Exemple 2.3. Per exemplificar i entendre bé les definicions anteriors, un dels millors jocs és *el dilema del presoner*. El dilema del presoner és un joc que consisteix en el següent: la policia ha detingut a dos sospitosos de cometre un crim greu i un robatori, i els ha posat en dues sales d'interrogatori separades. La policia té proves suficients per demostrar que són culpables del robatori i també sospita que són culpables del crim greu, però no té proves per demostrar-ho. Els dos sospitosos tenen dues opcions, confessar el crim (C), o no confessar (NC). Si cap dels dos confessa, només seran jutjats pel robatori i, per tant, només passaran un any a la presó. Si només un dels dos confessa i l'altre no ho fa, aleshores el que ha confessat quedarà en llibertat, mentre que l'altre passarà quinze anys a la presó. Per últim, si els dos confessen, els dos seran condemnats a deu anys de presó. Per tant, el dilema del presoner el podem veure com un joc (A, u) on:

- $A_1 = A_2 = \{C, NC\}$;
- $u_1(NC, NC) = -1$, $u_1(NC, C) = -15$, $u_1(C, NC) = 0$, $u_1(C, C) = -10$;
- $u_2(NC, NC) = -1$, $u_2(NC, C) = 0$, $u_2(C, NC) = -15$, $u_2(C, C) = -10$;

Jugador 1 / Jugador 2	No Confessar (NC)	Confessar (C)
No Confessar (NC)	-1, -1	-15, 0
Confessar (C)	0, -15	-10, -10

Taula 1: Dilema del presoner

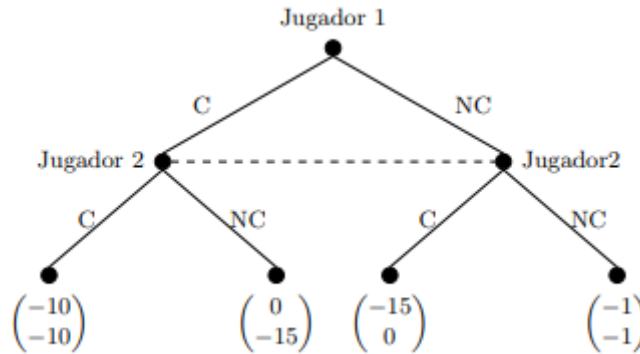


Figura 1: Dilema del presoner en forma extensiva

En la taula 1 podem veure el joc del dilema del presoner representat en forma estratègica. Mentre que en la figura 1 tenim aquest mateix joc representat en forma extensiva.

◇

Un joc representat en forma normal és una matriu de pagaments que mostra els jugadors, les estratègies i els beneficis. Quan es representa un joc d'aquesta manera, es suposa que els jugadors hi juguen de forma simultània o, al menys, sense saber que jugaran els altres. En canvi, un joc representat en forma extensiva es presenta en forma d'arbre i poden modelar tant jocs simultanis, com jocs seqüencials. En cas de que el joc sigui simultani, es dibuixa una línia dicontínua unint els vèrtexs que formen part del mateix conjunt d'informació. A més, en els jocs en forma extensiva tenim dos tipus d'estratègies:

Definició 2.4. *Sigui Γ un joc extensiu i $i \in N$. Una estratègia pura a_i del jugador i és una aplicació que assigna, a cada $\omega \in W_i$, una acció $a_i(\omega) \in A_\omega$. Un perfil d'estratègies pures d'un joc extensiu és una n -tupla d'estratègies pures, una per cada jugador.*

Definició 2.5. *Sigui Γ un joc extensiu i $i \in N$. Una estratègia de comportament b_i és una aplicació que assigna, a cada $\omega \in W_i$, una loteria sobre A_ω . És a dir, per cada $\omega \in W_i$ i cada $a \in A_\omega$, $b_i(a)$ és la probabilitat que el jugador i assigna a l'acció a quan està al conjunt d'informació ω . Les loteries pels diferents conjunts d'informació de cada jugador són independents les unes de les altres. Un perfil d'estratègies de comportament d'un joc extensiu és una n -tupla d'estratègies de comportament, una per cada jugador. Denotarem per B_i al conjunt d'estratègies de comportament del jugador i i per B al conjunt de perfils d'estratègies de comportament.*

En un joc extensiu, direm que un conjunt d'informació està pel camí d'una estratègia si és pot arribar a aquest conjunt, amb probabilitat positiva, quan els jugadors juguen seguint aquesta estratègia.

2.2 Classificació dels jocs

Podem classificar els jocs de moltes maneres diferents, però en aquest apartat només explicarem els criteris més utilitzats:

- **Segons els beneficis finals del joc:** Poden ser jocs de *suma zero*, en els quals, la suma del que guanyen els jugadors és, exactament igual, a la suma del que perden la resta de jugadors. O poden ser jocs de *suma no zero*, en els que la suma dels beneficis més las pèrdues no és igual a zero.
- **Segons la relació entre els jugadors:** Poden ser jocs *cooperatius*, en els quals els jugadors poden treballar junts i fer coalicions per aconseguir el màxim benefici. O jocs *no cooperatius* en que els jugadors estan competint entre sí.
- **Segons el moment en que es prenen les decisions:** Podem tenir jocs *estàtics*, que es caracteritzen perquè els jugadors prenen les decisions de forma simultània. O podem tenir jocs *dinàmics*, en els quals els jugadors actuen de forma seqüencial.
- **Segons la informació que té cada jugador:** Els jocs poden ser amb *informació completa* o amb *informació incompleta*. En els jocs amb informació completa, tots

els jugadors tenen tota la informació sobre el joc. En canvi en els jocs amb informació incompleta, alguns jugadors no disposen de tota la informació del joc, és a dir, desconeixen la quantitat de jugadors, o les estratègies d'algun altre jugador, o les funcions de pagament, etc.

Cal resaltar un concepte bastant important que és, la *informació perfecta* i la *informació imperfecta*. Diem que un joc (en forma extensiva) té informació perfecta si cada jugador sap exactament quines accions han fet previament tots els altres jugadors. És a dir, tot conjunt d'informació té un i només un node. Si algun jugador no coneix alguna de les accions que s'han fet previament, aleshores direm que el joc té informació imperfecta. La diferència entre informació imperfecta i informació incompleta és, que quan tenim informació imperfecta, els jugadors coneixen totes les possibles accions de cada jugador així com les funcions de pagament, però un jugador pot no saber quina acció ha jugat un jugador anterior. En canvi, si tenim informació incompleta, vol dir que algun jugador no coneix alguna de les possibles accions d'un altre jugador o alguna funció de pagaments etc.

En aquest treball estudiarem els jocs no cooperatius amb informació incompleta.

2.3 Equilibris

El següent pas és proposar una solució per poder descriure com s'haurien de comportar els jugadors racionals. El concepte més important per els jocs estratègics és *l'equilibri de Nash* que, dit de manera simple, és un perfil d'estratègies on cap jugador guanya al canviar unilateralment d'estratègia.

Diem que $a_i \in A_i$ és una estratègia del jugador i però, com veurem ara, molts cops és interessant veure el que passa quan el jugador i canvia la seva estratègia i la resta de jugadors no. De manera que per cada $i \in N$ direm A_{-i} al conjunt de tots els perfils d'estratègies de la resta de jugadors diferents de i . És a dir, $A_{-i} = A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n$. I per tant $a_{-i} \in A_{-i}$ és el perfil d'estratègies de tots els jugadors excepte i . D'ara en endavant, també considerarem $N := \{1, \dots, n\}$.

Definició 2.6. *Sigui $G := (A, u)$ un joc en forma estratègica. Un equilibri de Nash de G és un perfil d'estratègies $a^* \in A$, tal que per tot $i \in N$ i per tot $\hat{a}_i \in A_i$,*

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_{-i}^*, \hat{a}_i).$$

Exemple 2.7. En el joc del dilema del presoner només hi ha un equilibri de Nash i és (C, C) ja que:

Si el jugador 2 ha escollit confessar, aleshores el jugador 1 serà condemnat a 15 anys si no confessa, i a 10 anys si confessa. Per tant en aquest cas lo millor per el jugador 1 seria confessar. I si el jugador 2 ha escollit no confessar, aleshores el jugador 1 quedaria en llibertat si confessa i aniria un any a la presó si no ho fes. Per tant en aquest cas lo millor pel jugador 1 torna a ser confessar. Amb lo qual, faci el que faci el jugador 2, el jugador 1 sempre obtindrà més beneficis si escull confessar.

Utilitzant el mateix raonament, el jugador 2 també arribarà a la conclusió que el millor per ell és confessar.

Per tant, l'equilibri de Nash és que els dos sospitosos confessin.

Jugador 1 / Jugador 2	No Confessar (NC)	Confessar (C)
No Confessar (NC)	-1, -1	-15, <u>0</u>
Confessar (C)	<u>0</u> , -15	<u>-10</u> , <u>-10</u>

Taula 2: Equilibri de Nash del dilema del presoner

◇

En el cas dels jocs extensius, la definició d'equilibri de Nash és igual a la dels jocs estratègics. Però a més, en cas que estiguem davant d'un joc amb informació imperfecte, podem estudiar un concepte més concret d'equilibri, que és l'equilibri seqüencial. Per definir aquest concepte amb precisió, necessitem unes definicions previes.

Definició 2.8. *Sigui Γ un joc extensiu. Una valoració és una parella (b, μ) , on b és un perfil d'estratègies de comportament i μ és un sistema de creences. Un sistema de creences és una aplicació $\mu : X \setminus Z \rightarrow [0, 1]$, tal que per cada conjunt d'informació ω , $\sum_{x \in \omega} \mu(x) = 1$, que representa les probabilitats d'estar en el node x quan estem al conjunt d'informació ω .*

Sigui (b, μ) una valoració, per cada conjunt d'informació ω i cada $z \in Z$, $\mu_\omega(z, b) := \sum_{x \in \omega} \mu(x) p_x(z, b)$, on $p_x(z, b)$ és la probabilitat de que s'arribi al node z si els jugadors juguen seguint b en el node x . I $u_{i\omega}^\mu := \sum_{z \in Z} \mu_\omega(z, b) u_i(z)$ on $u_{i\omega}^\mu$ representa la utilitat esperada del jugador i quan s'arriba a ω si les seves creences venen donades per μ . A continuació veurem algunes característiques que ha de complir una valoració per ser un equilibri seqüencial.

Definició 2.9. *Sigui Γ un joc extensiu, (b, μ) una valoració, i $\bar{b}_i \in B_i$. Direm que $\bar{b}_i$ és la millor resposta del jugador i davant (b, μ) a ω si*

$$u_{i\omega}^\mu(b_{-i}, \bar{b}_i) = \max_{\hat{b}_i \in B_i} u_{i\omega}^\mu(b_{-i}, \hat{b}_i).$$

I direm que una valoració (b, μ) és seqüencialment racional si, per cada $i \in N$ i cada $\omega \in W_i$, b_i és la millor resposta del jugador i davant (b, μ) a ω .

Diem que una estratègia de comportament $b \in B$ és *completament mixta* si a cada conjunt d'informació, totes les accions poden ser escollides amb probabilitat positiva. Denotarem per B^0 el conjunt de tots els perfils d'estratègies de comportament completament mixtes.

Definició 2.10. *Sigui Γ un joc extensiu. Una valoració (b, μ) és consistent si existeix una successió $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B^0$, tal que $(b, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^n, \mu^n)$.*

I ara ja podem definir el concepte de equilibri seqüencial.

Definició 2.11. *Sigui Γ un joc extensiu. Un equilibri seqüencial és una valoració (b, μ) seqüencialment racional i consistent.*

3 Jocs bayesians

Com ja hem dit anteriorment, un joc amb informació incompleta és un joc en el que alguns jugadors no coneixen alguna característica important del joc com el número de jugadors, el conjunt de les diferents accions o les funcions de pagament. Per estudiar aquest tipus de jocs, primer necessitem un model matemàtic apropiat per descriure'ls. En aquest cas seguirem el model proposat per Harsanyi (1967) on va demostrar que els jocs amb informació incompleta, tant en forma extensiva, com en forma estratègica es poden representar com un joc en forma extensiva amb informació imperfecte.

Els jocs amb informació incompleta tenen una gran importància ja que, pràcticament qualsevol joc o interacció es pot expressar com un joc d'aquest tipus.

El problema de treballar amb aquest tipus de jocs és que, generalment, és molt difícil trobar jocs que representin amb veracitat les diferents interaccions que s'estan modelant i que, al mateix temps, siguin pràctics a l'hora de analitzar-lo.

3.1 La transformació de Harsanyi

Com sempre, denotarem $N := \{1, \dots, n\}$ com el conjunt de jugadors. I denotarem Ω al conjunt finit de tots els possibles estats del món que són rellevants pel joc que estudiem.

En primer lloc, Harsanyi va veure que, quan estudiem un joc amb informació incompleta, es pot assumir que la única font d'incertesa ve de les funcions de pagament del joc.

Suposem primer de tot que, hi ha informació incompleta sobre les accions d'algun jugador. En aquest cas, podem pendre una representació alternativa del joc en que, per cada jugador, hi ha un "conjunt universal d'accions" el qual inclou totes les seves possibles accions; aquests conjunts són coneguts per tots els jugadors. Suposem ara que, en el joc original, hi ha un estat del món $\omega \in \Omega$ en que l'acció a del jugador j no està present. Com el jugador j sap quin és el seu conjunt d'estratègies en cada estat, pot distingir entre aquells estats en que a està present, i entre aquells en que a no està present. Per tant, és suficient definir els pagaments del nou joc de manera que l'acció a és estrictament dominada en aquells estats en que no estava present en el joc original.

Per altre banda, suposem que hi ha incertesa en el número de jugadors. El procediment és bastant similar al anterior. Agafem una representació alternativa del joc en la que tenim un "conjunt universal de jugadors" i afegim una estratègia a cada jugador dient "estic jugant" o "no estic jugant". Aleshores és suficient amb definir els pagaments de forma que els jugadors tinguin els incentius adequats en els diferents estats del món. És a dir, que l'acció "no estic jugant" és estrictament dominant en aquells estats en que no estaban presents en el joc original.

Per últim, les incerteses sobre la funció de resultats o sobre les preferències dels jugadors es poden modelar conjuntament a base de definir les utilitats dels jugadors directament en l'espai de les estratègies.

Per tant podem considerar que un joc amb informació incompleta és un joc en el que alguns jugadors tenen alguna incertesa sobre les funcions de pagament.

L'element més important de la transformació de Harsanyi és el que coneixem com *espai de tipus* Θ , des del que es fixan els *tipus* de cada jugador abans de que comenci el joc. Cada jugador té un tipus $\theta \in \Theta$, el qual conté tota la informació que aquest jugador coneix i, a més, la seva funció de pagaments pot dependre del seu tipus. Abans de començar el joc té lloc un moviment de la natura (l'atzar) que determina el tipus de cada jugador.

Cada jugador és informat únicament del seu tipus. I d'aquesta manera, el joc és trans-forma en un joc extensiu amb informació imperfecte, però completa.
El desenvolupament temporal d'un joc Bayesià estàtic és el següent:

- **Moviment de la natura (atzar):** Es dona un estat del món $\omega \in \Omega$ i un perfil de tipus $\theta \in \Theta$.
- **Els jugadors reben la informació:** Cada jugador és informat del seu tipus i no rep cap altre informació ja que el tipus ja conté l'informació sobre el que ell sap.
- **Moviments dels jugadors:** Cada jugador escull simultàniament una acció condicio-nada pel seu tipus.
- **Es realitzen els pagaments:** Els jugadors reben els pagament corresponents amb els seus tipus i les accions que hagin escollit en aquell estat del món.

3.2 Jocs Bayesianes i Equilibri de Nash Bayesià

Com hem vist anteriorment, en un joc amb informació completa, la representació en forma estratègica exigeix concretar el número de jugadors, les accions disponibles per a cada jugador, i les funcions de pagament de cada jugador. Però en un joc Bayesià s'han d'afegir alguns nous elements per tal de poder definir-lo amb precisió tal i com veurem a continuació.

Definició 3.1. *Un joc Bayesià amb n jugadors i conjunt de jugadors N es una 5-tupla $BG := (\Omega, \Theta, \rho, A, u)$ formada per:*

- **Els estats del món:** Ω és el conjunt finit dels diferents estats de la natura. Per exemple, en un joc de cartes, Ω seria totes les diferents combinacions amb que es poden ordenar les cartes.
- **Els tipus dels jugadors:** Els elements del conjunt finit definit per $\Theta := \prod_{i \in N} \Theta_i$.
- **Conjectures:** $\rho \in \Delta(\Theta \times \Omega)$. La distribució de probabilitats sobre les combinacions dels tipus. És un conjunt de creences sobre els tipus dels rivals.
- **Les estratègies possibles:** Els elements del conjunt finit definit per $A := \prod_{i=1}^n A_i$. Una **estratègia pura** del jugador i és una aplicació $\hat{a}_i : \Theta_i \rightarrow A_i$. Sigui $\hat{A}_i$ el conjunt d'estratègies pures del jugador i i $\hat{A} := \prod_{i=1}^n \hat{A}_i$, (Donada una acció $\hat{a} \in \hat{A}$ i un perfil de tipus $\theta \in \Theta$, utilitzarem $\hat{a}(\theta)$ per denotar $(\hat{a}_1(\theta_1), \dots, \hat{a}_n(\theta_n))$), cada jugador ha d'escollir, per cada possible tipus, quina estratègia pendre.
- **Les funcions de pagament:** $u := \prod_{i=1}^n u_i$, on, per cada $i \in N$, $u_i : \Omega \times \Theta_i \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Ara, per cada $i \in N$ la **funció (Bayesiana) de pagaments** del jugador i $\hat{u}_i : \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es defineix, per cada $\hat{a} \in \hat{A}$ com $\hat{u}_i(\hat{a}) := \sum_{(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega} \rho_i(\omega | \theta_i) u_i(\omega, \theta_i, \hat{a}(\theta))$. (En cas de que hi haguessin infinits estats del món o infinits conjunts de tipus, substituïríem els sumatoris per integrals).

Definició 3.2. Sigui $BG = (\Omega, \Theta, \rho, A, u)$ un joc Bayesià. Un equilibri de Nash Bayesià en estratègies pures és un perfil d'estratègies $\hat{a}^* \in \hat{A}$ tal que, per cada $i \in N$ i cada $\hat{a}_i \in \hat{A}_i$,

$$\hat{u}_i(\hat{a}^*) \geq \hat{u}_i(\hat{a}_{-i}^*, \hat{a}_i) .$$

Anem ara a veure alguns exemples per comprendre bé les definicions que acabem de veure.

Exemple 3.3. Considerem una economia amb dues empreses E1 i E2. E1 té el monopoli d'un producte en un país en particular. E2 està considerant la possibilitat d'entrar al mercat. E2 sap que, al mateix temps, E1 podria estar preparant-se per una possible competència duopolística fent una inversió per millorar els seus canals de distribució. Però E2 no sap si la inversió necessària per aquesta millora és gran o petita, sinó que només té certes creences sobre el preu de la inversió. E2 creu que la probabilitat de que E1 hagi de fer una inversió gran és $p \in (0, 1)$ i, per tant, creu que la probabilitat de que E1 hagi de fer una inversió petita és de $(1 - p)$. Aquestes creences estan basades en fets objectius que són coneguts publicament, és a dir, E1 també coneix el valor de p . Els pagaments de les dues empreses en totes les possibles situacions estan descrits en les taules que hi ha a continuació. I i NI representen les accions de "invertir" i de "no invertir" respectivament; E i NE representen "entrar" i "no entrar" al mercat; mentre que G i P fan referència a si la inversió necessària és "gran" o "petita".

(G)	E	NE
I	0, -1,	2, 0
NI	2, 1	3, 0

(P)	E	NE
I	3, -1,	5, 0
NI	2, 1	3, 0

Clarament, estem davant d'un joc amb informació incompleta ja que el jugador 2 no coneix amb precisió la funció de pagaments del jugador 1. Aquesta situació pot ser analitzada fàcilment utilitzant el sentit comú. E1 escollirà NI en cas que la inversió necessària sigui gran, i escollirà I en cas que la inversió sigui petita independentment del que faci E2. Per tant E2 obtindrà $p \cdot (1) + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1$ si escull entrar i obtindrà 0 en cas que esculli no entrar. Amb el qual E2 escollirà E si $p > 1/2$, NE si $p < 1/2$, i li serà indiferent en cas que $p = 1/2$.

A continuació descriurem un joc Bayesià (utilitzant la definició anterior), que correspon al joc amb informació incompleta que estem estudiant.

- **Els estats del mon:** $\Omega = \{G, P\}$.
- **Els tipus dels jugadors:** En aquest cas els tipus són $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ i $\Theta_2 = \{\theta_2\}$. Els dos jugadors saben que el jugador 1 coneix l'estat del món que s'ha realitzat, mentre que el jugador 2 no coneix aquesta informació. $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$.
- **Conjectura:** $\rho(G) = p$ i $\rho(P) = (1 - p)$. Les creences són $\rho_1(G|G) = \rho_1(P|P) = 1$; $\rho_1(P|G) = \rho_1(G|P) = 0$; $\rho_2(G|G) = \rho_2(G|P) = p$; $\rho_2(P|G) = \rho_2(P|P) = (1 - p)$.

- **Les estratègies possibles:** $A_1 = \{I, NI\}$, i $A_2 = \{E, NE\}$.
- **Les funcions de pagaments:** Estan descrites a les taules anteriors.

En aquest exemple, el conjunt Ω podria ser eliminat introduint un segon tipus al jugador 1. Aleshores, el primer dels dos tipus seria el que té els pagaments associats a que la inversió sigui gran, i el segon tipus seria el que té els pagaments associats a que la inversió sigui petita. La següent figura mostra la representació extensiva del joc descrit. Hem escollit la representació en que el jugador 1 mou primer, però podríem haver escollit la representació en la que el jugador 2 mou primer sense problemes.

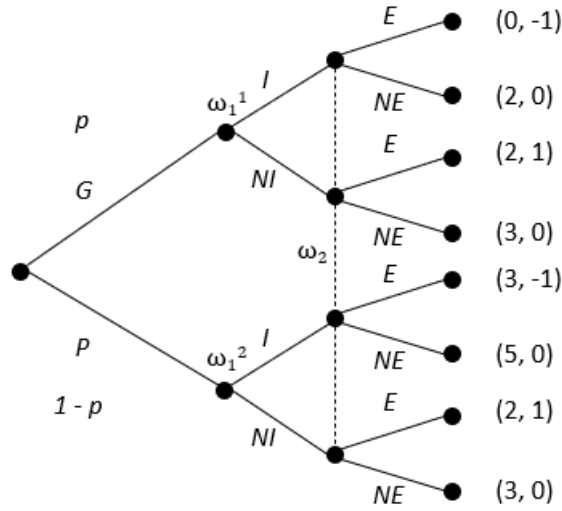


Figura 2: Joc extensiu amb informació imperfecte de l'exemple 3.3

I ara anem a calcular l'equilibri Bayesià de Nash del joc anterior.

Exemple 3.4. Suposem que tenim el joc explicat a l'exemple 3.3 i representat en forma extensiva. En aquest cas, les estratègies de cada jugador són:

$$A_1 = \{(I - I), (I - NI), (NI - I), (NI - NI)\},$$

$$A_2 = \{E, NE\}.$$

Anem a veure com són les funcions Bayesianes de pagaments utilitzant la definició 3.1, és a dir, $\hat{u}_i(\hat{\alpha}) := \sum_{(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega} \rho_i(\omega | \theta_i) u_i(\omega, \theta_i, \hat{\alpha}(\theta))$. Per fer-ho utilitzarem una bimatriu, ja que ens serà més útil a l'hora de calcular l'equilibri Bayesià.

	E	NE
$I-I$	$p \cdot 0 + (1-p) \cdot 3, p \cdot (-1) + (1-p) \cdot (-1)$	$p \cdot 2 + (1-p) \cdot 5, p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0$
$I-NI$	$p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2, p \cdot (-1) + (1-p) \cdot 1$	$p \cdot 2 + (1-p) \cdot 3, p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0$
$NI-I$	$p \cdot 2 + (1-p) \cdot 3, p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1)$	$p \cdot 3 + (1-p) \cdot 5, p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0$
$NI-NI$	$p \cdot 2 + (1-p) \cdot 2, p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1$	$p \cdot 3 + (1-p) \cdot 3, p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0$

Que això és pot reescriure com:

	E	NE
$I-I$	$3 - 3p, -1$	$5 - 3p, 0$
$I-NI$	$2 - 2p, 1 - 2p$	$3 - p, 0$
$NI-I$	$3 - p, -1 + 2p$	$5 - 2p, 0$
$NI-NI$	$2, 1$	$3, 0$

I si suposem que $p = 0.75$ per exemple, obtenim el següent:

$(p = 0.75)$	E	NE
$I-I$	$\frac{3}{4}, -1$	$\frac{11}{4}, \underline{0}$
$I-NI$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}, \underline{0}$
$NI-I$	$\frac{9}{4}, \frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}, 0$
$NI-NI$	$2, \underline{1}$	$3, 0$

Veiem que, en el cas que $p = 0.75$, l'únic equilibri Bayesià és $(NI-I, E)$, però també es clar que aquest equilibri va en funció del valor de p , amb el qual, si agaféssim un altre valor de p podríem obtenir un equilibri Bayesià diferent.

Per acabar el capítol veurem un resultat que pot ser d'utilitat a l'hora de trobar els equilibris Bayesianos d'un joc.

Proposició 3.5. *Sigui BG un joc Bayesià:*

- i. *Si un perfil d'estratègies pures en un joc extensiu amb informació imperfecte és un equilibri de Nash, aleshores aquest perfil d'estratègies també serà un equilibri Bayesià de Nash.*
- ii. *Si un perfil d'estratègies pures d'un joc amb informació incompleta és un equilibri de Nash Bayesià, aleshores aquest perfil d'estratègies serà un equilibri de Nash d'un joc extensiu amb informació imperfecte.*

Demostració: Utilitzarem la definició d'equilibri de Nash per fer aquesta demostració:

- i. Suposem que el perfil d'estratègies $a^* \in \hat{A}^*$ és un equilibri de Nash. Per definició sabem que $u_i(a^*) \geq u_i(a_{-i}^*, \hat{a}_i)$, és a dir, a^* és una estratègia que maximitza les funcions de pagament u_i . Volem demostrar que aquest mateix perfil d'estratègies també maximitza les funcions de pagament del joc Bayesià $\hat{u}_i(\hat{a}) := \sum_{(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega} \rho_i(\omega|\theta_i) u_i(\omega, \theta_i, \hat{a}(\theta))$. Com $\rho_i(\omega|\theta_i)$ és una distribució de probabilitat i $u_i(\omega, \theta_i, a^*(\theta)) \geq u_i(\omega, \theta_i, \hat{a}_i(\theta))$, podem dir que el perfil d'estratègies a^* és un equilibri de Nash Bayesià.

- ii. És demostra de forma analoga al cas anterior.

4 La paradoxa de la cadena de tendes

En aquest capítol estudiarem la paradoxa de la cadena de tendes que ens ajudarà a entendre millor la utilitat dels jocs amb informació incompleta.

En alguns jocs, pot passar que les estratègies racionals dels jugadors no acostumen a coincidir amb les estratègies que escullirien en la vida real o en algun experiment. Això podria portar a pensar que el potencial de la teoria de jocs no és tan alt com es pensava. Però en aquest capítol veurem com els jocs amb informació incompleta es poden utilitzar per explicar aquesta diferència de comportament entre les situacions de la vida real i les situacions on suposem que els jugadors són racionals.

La paradoxa de la cadena de tendes consisteix en un joc de $n+1$ (n finit) jugadors on tenim un jugador (M) que és el monopolista d'algun producte, i té una sucursal a n ciutats diferents. I tenim n competidors potencials ($J_1, J_2, \dots, J_n$), un a cada ciutat, que podran escollir si entrar al mercat i fer la competència al monopolista, o no entrar al mercat. Això ho faran de forma seqüencial, és a dir, primer escollirà J_1 , un cop ho hagi fet, escollirà J_2 , i així successivament. El monopolista només ha de jugar en cas que el competidor entri al mercat; si es dona aquesta situació, haurà d'escollir entre dos formes de posar els preus del producte, de forma cooperativa o de forma agressiva. En cas que el competidor decideixi no entrar al mercat, els pagaments són 0 pel competidor i $\alpha > 1$ pel monopolista. Si el competidor decideix entrar al mercat i el monopolista escull cooperar, aleshores els pagaments són β pel competidor, amb $0 < \beta < 1$, i 0 pel monopolista. I per últim, si el competidor entra al mercat i el monopolista opta per lluitar, els pagaments són de $\beta - 1$ pel competidor i, -1 pel monopolista.

En la següent figura veiem la representació del joc en forma extensiva.

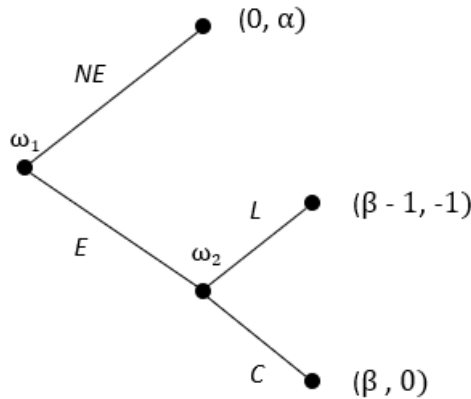


Figura 3: Joc de la cadena de tendes

Aquest resultat ens porta a dues teories diferents per el joc, la teoria d'inducció (que seria la correcte des del punt vista de la teoria de jocs), i la teoria de dissuasió.

4.1 Teoria d'inducció i teoria de dissuasió

Teoria de la inducció:

Considerem la decisió que pendrà l'últim competidor. Ell sap que si escull entrar al mercat, la millor jugada del monopolista és cooperar. Ja que els beneficis que rebrà són majors que si decidís lluitar, i ja no hi ha cap competidor futur a qui poder intimidar. Sabent això, el competidor n entrarà al mercat i el monopolista cooperarà.

Ara considerem la decisió que pendrà el jugador $n-1$. Ell sap que el monopolista cooperarà en el següent període independentment del que passi en aquest. Per tant si el competidor $n-1$ entra al mercat, el monopolista haurà de cooperar, ja que d'aquesta manera rebrà uns beneficis majors, i no té sentit intentar intimidar al competidor n perquè, com hem vist abans, aquest entrarà al mercat passi el que passi. Per tant el competidor $n-1$ escollirà entrar i el monopolista tornarà a cooperar.

Aquest procés d'inducció cap enrere és manté fins al competidor 1. Amb el qual, cada competidor escollirà entrar al mercat i el monopolista sempre cooperarà. Amb això els beneficis seran de 0 per el monopolista, i de β per cada competidor.

Teoria de la dissuasió:

Aquesta teoria postula que el monopolista pot obtenir uns beneficis superiors a 0. Suposem que el monopolista està disposat a lluitar amb els primers competidors, per tal d'intimidat al competidors futurs i així dissuadir-los d'entrar al mercat. Si es dona aquesta situació, podria passar, per exemple, que la primera meitat de competidors entressin al mercat i en resposta, el monopolista lluités, però gràcies a això aconseguís intimidar a la segona meitat de competidors i aquests deixessin d'entrar al mercat. En aquest cas els beneficis del monopolista serien de : $u_M = (n/2) \cdot (-1) + (n/2) \cdot \alpha$, i com $\alpha > 1$ tindriem que $u_M > 0$. Per tant els beneficis serien superiors als aconseguits seguint las estratègies de la teoria d'inducció.

Si el monopolista segueix les estratègies òptimes de la teoria de jocs, que són les de la teoria d'inducció, tindrà una rendibilitat menor que si utilitza les estratègies de dissuasió. Això crea una aparent paradoxa de la teoria de jocs ja que, segons la teoria de jocs, l'estratègia d'inducció hauria de ser "òptima", però sembla ser que l'estratègia de dissuasió és "més òptima". I això és el que coneixem amb el nom de la *paradoxa de la cadena de tendes*.

4.2 Solució de la paradoxa

La paradoxa explicada anteriorment es deguda a que el model no recull una característica molt important sobre les situacions reals. A la pràctica és molt possible que els competidors tinguin alguna incertesa sobre la funció de pagaments del monopolista. Podrien no conèixer amb exactitud el cost que té ser agressiu pel monopolista o podrien pensar que el monopolista no vol compartir el mercat de cap manera.

Basant-nos en aquestes consideracions, plantejem el següent joc amb informació incompleta. Tenim dos estats del món: F i D, amb probabilitats q i $(1-q)$ amb $q > 0$. En l'estat D, tenim un monopolista que és *dèbil* i la seva funció de pagaments en cas de que el competidor entri al mercat és la del joc original: 0 si coopera i -1 si és agressiu. Per contra en l'estat del món F, tenim un monopolista *fort* on els seus beneficis si el competidor entra al mercat són 0 si lluita i -1 si coopera. És a dir, un monopolista *fort* prefereix sempre

lluitar a cooperar. El monopolista és l'únic que coneix el verdader estat del món, i com no hi ha cap altre falta d'informació no necessitem especificar els tipus dels jugadors. A continuació es mostren dues figures que representen el joc i els beneficis dels jugadors en els diferents estats del món.

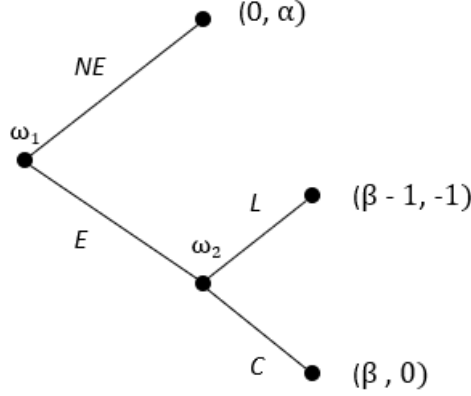


Figura 4: Estat D. Joc de la cadena de tendes amb un monopolista dèbil

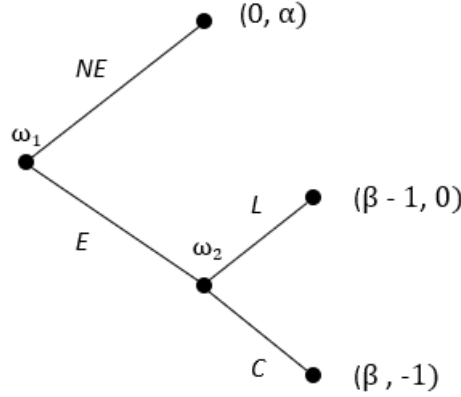


Figura 5: Estat F. Joc de la cadena de tendes amb un monopolista fort

Assumim que repetirem el joc de la cadena de tendes T vegades amb un competidor diferent a cada període. El conjunt de les accions possibles en cada període són $A_1 := \{E, NE\}$ per al competidor, representant entrar i no entrar al mercat. I $A_2 := \{C, L\}$ per el monopolista, representant cooperar i lluitar. I com sempre, $A := A_1 \times A_2$. Enumerarem als competidors amb el nombre del període en que els hi toca jugar, és a dir el competidor t serà el que juga en el període t .

Direm $h_t \in A^t$ a l'historial d'accions que s'han jugat fins al període t , $A^0 := \{\emptyset\}$ i $H := \cup_{t=1}^T A^{t-1}$ el conjunt de tots els possibles historials. Assumim també que tenim observabilitat completa sobre les accions passades, en particular, cada competidor està completament informat sobre les estratègies anteriors del monopolista. Per tant, quan hagi de jugar el competidor t , aquest basarà les seves accions en el historial passat ($h_{t-1} \in A^{t-1}$). I com en el període t , el monopolista també sap que ha jugat el competidor t , el monopolista basarà les seves accions en (h_{t-1}, e_t) on $h_{t-1} \in A^{t-1}$ i $e_t \in A_1$.

Utilitzant el contingut del capítol anterior, podem definir el joc amb informació incompleta que correspon a aquesta situació de la següent forma:

- **Els estats del món:** $\Omega := \{F, D\}$. Només el monopolista és informat sobre l'estat del món que s'ha realitzat. Els competidors no coneixen la funció de pagaments del monopolista.
- **Conjectura:** $\rho(F) := q$, i $\rho(D) := 1 - q$.
- **Les estratègies possibles:** Com ja hem vist, les estratègies pels competidors són $A_1 := \{E, NE\}$ i les estratègies pel monopolista són $A_2 := \{C, L\}$. Una estratègia **pura** del competidor t és una aplicació $\hat{e}_t : A^{t-1} \rightarrow A_1$. Una estratègia **pura** per el monopolista és una aplicació $\hat{m} : \Omega \times H \times A_1 \rightarrow A_2$.
- **Les funcions de pagament:** Els pagaments de cada entrant són els pagaments que obté en el joc de la cadena de tendes que juga. Mentre que els pagaments del monopolista són la suma de tots els pagaments que ha obtingut a cada període.

4.3 Estratègies de cada jugador

Ara que ja hem vist com podem pensar en el joc de la cadena de tendes com un joc amb informació incompleta, anem a veure quines són les accions més adequades per cada jugador.

El perfil d'estratègies que anem a definir té la propietat que les accions de cada jugador depenen, únicament, de les creences que té sobre la probabilitat de que l'estat del món sigui F o D tenint en compte l'historial del joc. Com ja hem dit, el monopolista té informació perfecte. Per tant només hem de definir aquestes creences per els competidors. Direm $q_1 := q$ i, per cada $t \in \{2, \dots, T\}$, $q_t(h_{t-1})$ denota la probabilitat que li assigna el competidor t a que el monopolista sigui fort després d'haver observat l'historial h_{t-1} . A partir d'ara utilitzarem q_t per denotar $q_t(h_{t-1})$. En la construcció que farem, podem calcular q_t directament a partir de q_{t-1} . Per tant podem calcular aquestes probabilitats recursivament de la següent manera:

- Si el competidor $t - 1$ no entra al mercat, aleshores $q_t = q_{t-1}$.
- Si el competidor $t - 1$ entra al mercat, el monopolista lluita i $q_{t-1} > 0$, aleshores $q_t = \max\{\beta^{T-t+1}, q_{t-1}\}$.
- Si el competidor $t - 1$ entra al mercat i, el monopolista coopera, o $q_{t-1} = 0$, aleshores $q_t = 0$.

I ara definim les estratègies de cada jugador com a funcions de les probabilitats q_t . Comencem amb les **estratègies del monopolista**:

- Si el monopolista és fort, sempre lluitarà amb els competidors que entrin al mercat.
- Suposem que el monopolista és dèbil i que el competidor t entra al mercat. Aleshores l'estratègia del monopolista depèn de t i de q_t . Si $t = T$ el monopolista dèbil coopera, ja que no té necessitat de crear una reputació. Si $t < T$ i $q_t \geq \beta^{T-t}$, el monopolista dèbil lluita. I per últim si $t < T$ i $q_t < \beta^{T-t}$, aleshores el monopolista dèbil lluita amb probabilitat

$$\frac{(1 - \beta^{T-t})q_t}{(1 - q_t)\beta^{T-t}}$$

i coopera amb la probabilitat complementària.

I les **estratègies dels competidors** són:

- Si $q_t > \beta^{T-t+1}$, el competidor t no entra al mercat.
- Si $q_t < \beta^{T-t+1}$, el competidor t entra al mercat.
- Si $q_t = \beta^{T-t+1}$, el competidor t no entra al mercat amb probabilitat $\frac{1}{\alpha}$ i entra amb la probabilitat complementària.

Abans de demostrar que les estratègies anteriors són adequades, necessitem veure el següent resultat.

Lema 4.1. *Sigui $t \in \{1, \dots, T\}$.*

- i. Si $q_t < \beta^{T-t+1}$, aleshores, si els jugadors segueixen les estratègies anteriors, els beneficis totals esperats d'un monopolista dèbil des del període t en endavant són 0.*
- ii. Si $q_t = \beta^{T-t+1}$, aleshores, si els jugadors segueixen les estratègies anteriors, els beneficis totals esperats d'un monopolista dèbil des del període t en endavant són 1.*

Demostració: La demostració es fa fent inducció (cap enrere) sobre t . Suposem primer que $t = T$ i que $q_t < \beta^{T-t+1}$. Aleshores, el competidor t entra al mercat i el monopolista dèbil coopera i obté 0 com a pagament. I ara suposem que $t = T$ i que $q_t = \beta^{T-t+1}$. Aleshores el competidor t no entra al mercat amb probabilitat $1/\alpha$. Si el competidor t entra al mercat, el monopolista dèbil coopera i rep 0 com a benefici. I si no entra al mercat, el monopolista obté α com a benefici. Per tant, els pagaments esperats són:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha + (1 - \frac{1}{\alpha}) \cdot 0 = 1$$

Suposem ara que els dos punts anteriors són certs per tot $\hat{t} > t$, amb $1 \leq t \leq T$, i veurem que també són certs per t .

Suposem que $q_t < \beta^{T-t+1}$. Aleshores el competidor t entra al mercat. Si el monopolista dèbil coopera, guanyarà 0 en aquest període; a més, $q_{t+1} = 0 < \beta^{T-t}$ i, per tant, per hipòtesis d'inducció, tindrà uns beneficis totals esperats de 0 des del període $t+1$ en endavant. Ara bé, si el monopolista dèbil lluita, obtindrà -1 en aquest període; i $q_{t+1} = \beta^{T-t}$ i, un altre cop per hipòtesis d'inducció, tindrà uns beneficis totals esperats de 1 des del període $t+1$ en endavant. Amb el qual, els beneficis esperats si lluita, també són 0. Això prova el punt *i*).

Per provar el punt *ii*) utilitzarem arguments molt similars. Suposem que $q_t = \beta^{T-t+1}$. Aleshores el competidor t entrarà al mercat amb probabilitat $(1 - 1/\alpha)$ i no entrarà amb probabilitat $1/\alpha$. Si el competidor no entra al mercat, el monopolista dèbil obtindrà α com a benefici; i $q_{t+1} = q_t = \beta^{T-t+1} < \beta^{T-t}$ i per hipòtesis d'inducció, tindrà uns beneficis totals esperats de 0 des del període $t+1$ en endavant. I si el competidor t entra al mercat el monopolista dèbil lluitarà i obtindrà un pagament de -1; però $q_{t+1} = \beta^{T-t}$ i,

per hipòtesis d'inducció, tindrà uns beneficis totals esperats de 1 des del període $t+1$ en endavant. Per tant els beneficis totals esperats si el competidor t no entra al mercat són α i si entra al mercat són 0. Amb el qual els pagaments totals esperats del monopolista seran:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot 0 = 1$$

□

La demostració que acabem de fer ens mostra que, quan $q_t < \beta^{T-t}$ i $t < T$, a un monopolista dèbil li és indiferent lluitar o cooperar ja que els pagaments esperats són 0 en les dues situacions. De forma similar, en la proposició següent veurem que, quan $q_t = \beta^{T-t+1}$, al competidor t li és indiferent entrar o no entrar al mercat.

Per cada $t \in \{1, \dots, T\}$, direm $u_t(q_t)$ als beneficis totals esperats per un monopolista dèbil des del període t fins a T , quan les creences del competidor t són donades per q_t i els dos jugadors segueixen les estratègies anteriors. Direm $k(q) := \min\{n \in \mathbb{N} : \beta^n < q\}$ si $q > 0$ i $k(0) = \infty$. El valor $k(q)$ indica que, donat q , el monopolista es trobarà que el primer competidor que entrarà al mercat serà quan quedin $k(q) - 1$ períodes. Per tant el primer competidor que entri serà en el període $T - k(q) + 2$. En particular, si $k(q) = 1$ ningun competidor entrarà al mercat, i si $k(q) - 1 > T$ el competidor número 1 entrarà. Basant-nos en aquestes observacions i en el lema anterior, podem construir u_t de la següent manera:

$$u_t(q_t) = \begin{cases} \alpha(T - t - k(q_t) + 2) + 1 & \text{si } \beta^{T-t+1} < q_t = \beta^{T-k(q_t)} \\ \alpha(T - t - k(q_t) + 2) & \text{si } \beta^{T-t+1} < q_t < \beta^{T-k(q_t)} \\ 1 & \text{si } q_t = \beta^{T-t+1} \\ 0 & \text{si } q_t < \beta^{T-t+1} \end{cases}$$

Proposició 4.2. *Les estratègies i les creences explicades anteriorment formen un equilibri seqüencial del joc de la cadena de tendes, extensiu i amb informació imperfecte.*

Demostració: Hem de demostrar que aquestes estratègies i creences són consistents i seqüencialment racionals.

Consistència de les creences: Si volguéssim ser completament formals i demostrar que aquestes creences són consistents tal i com ho hem definit als capítol 2, hauríem de definir una seqüència de perfils d'estratègies completament mixtes que convergis al nostre perfil d'estratègies i que les creences corresponents convergissin a les nostres creences. En lloc de fer això, separarem l'anàlisi en dues parts. Començarem per veure que, pel camí de l'estratègia, les creences poden ser computades utilitzant la fórmula de Bayes. Ja que qualsevol creença computada com el límit de creences associades a perfils d'estratègies completament mixtes que convergeixen al nostre perfil d'estratègies, tenen la propietat que poden ser computades directament utilitzant la fórmula de Bayes a partir de l'estratègia límit. I després veurem el cas de les creences fora del camí.

Si en el període t el competidor no entra al mercat, aleshores no s'aprèn res nou del monopolista, per tant $q_{t+1} = q_t$. Suposem ara que el competidor t ha entrat al mercat. Si $q_t \geq \beta^{T-t}$, se suposa que el monopolista ha de lluitar independent de si és fort o dèbil, per tant, un altre cop, no s'aprèn res nou del monopolista i $q_{t+1} = q_t$. Si $q_t = 0$, aleshores un monopolista dèbil hauria de cooperar i, un cop ho hagi fet, per la fórmula de Bayes

tindrem que $q_{t+1} = q_t$. Tots aquests casos coincideixen amb les definicions de q_t que hem donat. Ara, sigui $q_t \in (0, \beta^{T-t})$. En aquest cas, un monopolista dèbil pot tant lluitar com cooperar. Si coopera, com sabem que un monopolista fort sempre prefereix lluitar, la fórmula de Bayes implica que $q_{t+1} = 0$. Si el monopolista dèbil decideix lluitar, aleshores la fórmula de Bayes implica que

$$q_{t+1} = Pr(F|L^t) = \frac{Pr(F \cap L^t)}{Pr(L^t)} = \frac{Pr(L^t|F)Pr(F)}{Pr(L^t|F)Pr(F) + Pr(L^t|D)Pr(D)}$$

On L^t denota l'esdeveniment en que el monopolista lluita en el període t .

I ara tenim que, $Pr(F) = q_t$, $Pr(D) = 1 - q_t$, $Pr(L^t|F) = 1$, i $Pr(L^t|D) = \frac{(1 - \beta^{T-t})q_t}{(1 - q_t)\beta^{T-t}}$.

Per tant

$$q_{t+1} = \frac{q_t}{q_t + \frac{(1 - \beta^{T-t})q_t}{(1 - q_t)\beta^{T-t}}(1 - q_t)} = \beta^{T-t}$$

Que també és correspon amb la nostre definició.

I ara anem a veure les creences fora del camí, és a dir, creences en conjunts d'informació on no podem aplicar la fórmula de Bayes. Només hi ha dues situacions on això pot passar: i) $q_t \geq \beta^{T-t}$ i el monopolista coopera quan el competidor entra al mercat; ii) $q_t = 0$ i el monopolista lluita. En els dos casos les nostres creences assumeixen que $q_{t+1} = 0$. Una manera d'interpretar aquestes creences fora del camí és pensar en que el monopolista fort està realment decidit a lluitar i, per tant, totes les desviacions a aquesta estratègia són atribuïdes als "dubtes" d'un monopolista dèbil. A més, aquesta creença és irreversible, en el sentit que, independentment del que els pròxims competidors observin, sempre pensaran que el monopolista és dèbil amb probabilitat 1. Per tal de definir la seqüència d'estratègies completament mixtes la qual les creences corresponents convergeixen cap les nostres creences, podem especificar, per cada conjunt d'informació en que un jugador només pot escollir una acció si segueix el nostre perfil d'estratègies, la probabilitat de que aquest jugador no esculli aquesta acció. Anomenarem a aquestes accions com "errors". Per tant, és suficient amb especificar les probabilitats d'un error de manera que convergeixin cap a 0. La manera en que definim un error d'un competidor és indiferent, ja que no té efecte en les creences dels competidors següents. Per cada $n \in \mathbb{N}$, cada error d'un monopolista dèbil es dona amb probabilitat $1/n$, mentre que un error d'un monopolista fort és bastant més improbable, tenint una probabilitat de $1/n^2$.

Racionalitat seqüencial: Comencem amb els incentius dels competidors.

- Si $q_t > \beta^{T-t}$, el competidor t espera que el monopolista lluiti si entra al mercat, per tant no entrarà.
- Si $\beta_{T-t+1} < q_t < \beta^{T-t}$, el competidor t espera que el monopolista lluiti amb probabilitat $Pr(L|F)Pr(F) + Pr(L|D)Pr(D)$, i això és igual a

$$q_t + \frac{(1 - \beta^{T-t})q_t}{(1 - q_t)\beta^{T-t}}(1 - q_t) > \beta^{T-t+1} + \frac{(1 - \beta^{T-t})\beta^{T-t+1}}{(1 - \beta^{T-t} + 1)\beta^{T-t}}(1 - \beta^{T-t+1}) = \beta.$$

Per tant, els beneficis esperats si entra al mercat són menors que $\beta(\beta-1)+(1-\beta)\beta = 0$. Per tant el competidor t no entrarà al mercat.

- Si $q_t = \beta^{T-t+1}$, ara el competidor t espera que el monopolista lluiti amb probabilitat β i els seus beneficis esperats serien exactament 0. Per tant li és indiferent entrar o no entrar.
- Per últim, si $q_t < \beta^{T-t+1}$, els beneficis esperats del competidor t si entra al mercat, són positius. I per tant entrarà al mercat.

Els incentius d'un monopolista fort són bastant clars. Sabent les estratègies dels competidors, si en algun punt coopera, l'únic que aconseguirà és augmentar el número de futurs competidors entrant al mercat. I per tant, un monopolista fort, sempre prefereix lluitar.

I ara veurem els incentius d'un monopolista dèbil, que es poden deduir fàcilment gràcies al lema que hem demostrat abans. Suposem que el competidor t entra al mercat. Si el monopolista coopera, obté 0 de beneficis en aquest període i en tots els períodes futurs. Si lluita, obté -1 en aquest període i els beneficis esperats en un futur són *i)* 0 si $q_t = 0$; *ii)* 1 si $0 < q_t < \beta^{T-t}$; *iii)* més de 1 si $q_t > \beta^{T-t}$. I per tant seguir les nostres estratègies serà sempre la millor resposta tant pels competidors com per el monopolista.

□

5 Subhastes

En aquest capítol estudiarem les subhastes com una aplicació dels jocs amb informació incompleta. Una subhasta és una venda organitzada d'un producte basada en la competència directa i generalment pública, és a dir, a aquell comprador que pagui la major quantitat de diners a canvi del producte.

Ens centrarem en les subhastes a sobre tancat, que són aquelles en les que els compradors (postors) presenten la seva oferta només una vegada en un sobre. El valor de la oferta és conegut únicament per el postor que l'ha realitzat i es fan públiques, totes a la vegada, al final.

La teoria de subhastes pot ser vista com un pont entre la matemàtica que hi ha al darrere de la teoria de jocs, i alguns camps de la economia, com el diseny de mecanismes, la economia de la informació, etc.

En aquesta secció, veurem algunes de les subhastes més importants que poden ser analitzades amb el model de joc Bayesià que hem introduït als capítols anteriors.

Una subhasta consisteix en un conjunt N de jugadors competint per obtenir un objecte. Cada jugador té una valoració del objecte dins del interval $[0, \bar{v}]$ on $\bar{v} > 0$; i aquesta valoració determina la seva funció de pagaments. Suposem que les valoracions són independents i idènticament distribuïdes en $[0, \bar{v}]$ segons alguna distribució de probabilitat ρ amb densitat diferenciable i suport positiu. En el moment d'enviar les ofertes, cada jugador coneix la seva valoració (que serà el seu tipus) $\theta_i \in [0, \bar{v}]$ i que les valoracions dels altres competidors són independents i distribuïdes segons ρ ; és a dir, les valoracions són privades. La resta d'elements són coneguts per tots els competidors. Seguint el model de Harsanyi, podem veure una subhasta com:

- **Moviment de la natura:** La natura fa el seu moviment i es realitzen els tipus.
 - **Els jugadors reben la informació:** Cada jugador és informat del seu tipus i no rep cap altre informació.
 - **Moviment dels jugadors:** Cada jugador realitza la seva oferta.
 - **Es realitzen els pagaments:** El jugador amb la oferta més alta obté l'objecte. En cas d'empat, cada un dels millors postors rep l'objecte amb igual probabilitat.
- Segons els pagaments, distingim entre dos tipus de subhastes:

- **A primer preu:** El jugador que rep l'objecte paga la seva oferta.
- **A segon preu:** El jugador que rep l'objecte paga la segona oferta més alta.

Com cada jugador no coneix les valoracions dels altres, una subhasta és un joc amb informació incompleta. Una característica especial de les subhastes és que, al conèixer la valoració d'un jugador, també coneixem la seva informació i viceversa. Per tant, quan estudiem les subhastes, l'espai de tipus i els estats del món són equivalents.

Anem a descriure formalment i analitzar les subhastes a primer i segon preu.

5.1 Subhastes a primer preu

Si analitzem les subhastes a primer a preu, observem que són molt similars a subhastes holandesas. Les subhastes holandesas són aquelles en que el venedor comença la subhasta amb un preu molt alt i el va rebaixant fins que algú està disposat a acceptar el preu del subhastador. Tant en una subhasta holandesa com en una subhasta de sobre tancat a primer preu, el postor decideix quina serà la seva oferta i, al final de la subhasta, si resulta ser el guanyador, serà perquè la seva oferta és la més alta i coneixerà el preu final del objecte (la seva oferta). De manera que podem dir que oferir una certa quantitat de diners en una subhasta de sobre tancat a primer preu, es correspon a oferir la mateixa quantitat de diners en una subhasta holandesa. El resultat obtingut serà el mateix pel comprador i pel venedor.

Definició 5.1. Una subhasta a primer preu de n jugadors amb conjunt de jugadors N és una 4-tupla (Θ, ρ, A, u^I) formada per:

- **Els tipus dels jugadors:** $\Theta := \prod_{i \in N} \Theta_i$, on per cada $i \in N$, $\Theta_i = [0, \bar{v}]$.
- **Conjectura:** La distribució de probabilitat sobre $[0, \bar{v}]$, denotada per ρ , des d'on s'assignen independentment els tipus de cada jugador.
- **Les possibles estratègies:** $A := \prod_{i=1}^n A_i$, on $A_i := [0, \infty)$. Una estratègia **pura** del jugador i és una funció $\hat{a}_i : \Theta_i \rightarrow A_i$. $\hat{A}_i$ és el conjunt de les estratègies pures del jugador i , i $\hat{A} := \prod_{i=1}^n \hat{A}_i$.
- **Les funcions de pagament:** $u^I := \prod_{i=1}^n u_i^I$, on per cada $i \in N$, $u_i^I : [0, \bar{v}] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ està definida de la següent manera:

$$u_i^I(\theta_i, a_i) = \begin{cases} \theta_i - a_i & \text{si } a_i > \max_{j \neq i} a_j \\ \frac{\theta_i - a_i}{|j : a_j = \max_{k \in N} a_k|} & \text{si } a_i = \max_{j \neq i} a_j \\ 0 & \text{si } a_i < \max_{j \neq i} a_j \end{cases}$$

Per cada $i \in N$ la funció Bayesiana de pagaments de i $\hat{u}_i^I : \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}$ està definida per:

$$\hat{u}_i^I(\hat{a}) := \int_{\theta \in [0, \bar{v}]^n} u_i^I(\theta_i, \hat{a}(\theta)) d\rho(\theta_1) \dots d\rho(\theta_n)$$

Anem ara a veure els equilibris de les subhastes a primer preu. Moltes vegades el conjunt d'equilibris és molt extens, lo qual fa que sigui molt complicat d'analitzar. Per tant ens centrarem només en uns equilibris en específic. En particular, estudiarem els equilibris Bayesianes que són *i*) simètrics, és a dir, que tots els jugadors juguen la mateixa estratègia; i *ii*) diferenciables i creixents com a funcions de $[0, \bar{v}]$ a $[0, \infty)$. Quan tractem amb perfils d'estratègia simètrics, farem un petit abús de notació i utilitzarem $\hat{a}^I$ per denotar tant les estratègies individuals, com el perfil d'estratègies.

Sigui F la funció de distribució associada a ρ i sigui Z la variable aleatòria que dona el valor més gran de $n - 1$ realitzacions de ρ . Aleshores la funció de distribució associada a Z és $\hat{F}$, on per cada $v \in [0, \bar{v}]$, $\hat{F}(v) = F(v)^{n-1}$. Això és degut a que si $X_1, \dots, X_r$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes segons una distribució de probabilitat G . Aleshores podem calcular la funció de distribució $\hat{G}$ de la variable $\max\{X_1, \dots, X_r\}$ de la següent manera:

$$\begin{aligned}\hat{G}(x) &= Pr(\max\{X_1, \dots, X_r\} \leq x) \\ &= Pr(X_1 \leq x, \dots, X_r \leq x) \\ &= Pr(X_1 \leq x) \cdots Pr(X_r \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^r Pr(X_i \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^r G(x) \\ &= G(x)^r.\end{aligned}$$

Proposició 5.2. *El perfil d'estratègies $\hat{a}^I$ donat per $\hat{a}^I(\theta) := \mathbb{E}(Z|Z < \theta)$ és l'únic equilibri de Nash Bayesià simètric, diferenciable i creixent de una subhasta a primer preu.*

Demostració: Suposem que $\hat{y} : [0, \bar{v}] \rightarrow [0, \infty)$ és un equilibri de Nash Bayesià simètric, diferenciable i creixent de la subhasta a primer preu (Θ, ρ, A, u^I) . Primer anem a veure que la distribució de probabilitat induïda per $\hat{y}$ en $[0, \bar{v}]$ és difusa, és a dir, la probabilitat de que dues valoracions coincideixin és nula. Suposem que això últim no és cert i que $b \in [0, \bar{v}]$ és una puja en la que els jugadors poden empatar amb probabilitat positiva quan es juga $\hat{y}$. Aleshores, com ρ té el suport positiu el conjunt $D = \{\theta \in [0, \bar{v}] \setminus \{b\} : \hat{y}(\theta) = b\}$ té probabilitat positiva. Com els empats en les valoracions passen amb probabilitat positiva a la puja b i $\hat{y}$ és un equilibri, si $v \in D$ aleshores $v > b$. I com D té probabilitat positiva, existeix $v \in D$ tal que $v > b$. Aleshores existeix un $\epsilon > 0$ suficientment petit tal que cada jugador pot canviar d'estratègia al tipus v per $\hat{y}(v) = b + \epsilon$. Aquest canvi li seria rentable ja que seria l'únic guanyador de la subhasta, sempre que els tipus de la resta de jugadors estiguin a D . I per tant obtindria $v - b - \epsilon$ de beneficis sense haver-ho de compartir amb cap altre jugador. Amb lo qual, durant la resta de la demostració, no ens hem de preocupar per l'empat, ja que els empats passen amb probabilitat 0. Cal notar que el fet de que $\hat{y}$ tingui el suport positiu, implica que $\hat{y}$ és estrictament creixent i, per tant, invertible.

Ara anem a calcular la oferta òptima $b \in [0, \bar{v}]$ d'un jugador qualsevol $i \in N$ amb tipus θ_i si es juga el perfil d'estratègies $\hat{y}$. Si i té el tipus θ_i i fa una oferta estrictament superior a θ_i , aleshores els seus beneficis esperats són negatius. Per tant $\hat{y}(0) = 0$ i $\hat{y}(\bar{v}) \leq \bar{v}$. Ara, per cada $j \neq i$, $\theta_j \in [0, \bar{v}]$. El jugador i guanya la l'objecte si $\max_{j \neq i} \hat{y}(\theta_j) < b$. Com $\hat{y}$ és creixent, $\max_{j \neq i} \hat{y}(\theta_j) = \hat{y}(\max_{j \neq i} \theta_j) = \hat{y}(Z)$. Per tant i guanyarà si $\hat{y}(Z) < b$, és a dir, si $Z < \hat{y}^{-1}(b)$. I per tant, els beneficis esperats de i amb tipus θ_i són:

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}[u^I(\theta_i, \theta_{-i}, b, \hat{y}_{-i})] \\ &= Pr(\max_{j \neq i} \hat{y}(\theta_j) < b)(\theta_i - b) + Pr(\max_{j \neq i} \hat{y}(\theta_j) > b) \cdot (0) \\ &= Pr(Z < \hat{y}^{-1}(b))(\theta_i - b) \\ &= \hat{F}(\hat{y}^{-1}(b))(\theta_i - b).\end{aligned}$$

Ara l'objectiu és maximitzar aquesta funció. Per fer-ho, fem la derivada i igualem a 0.

$$\frac{\partial(\hat{F}(\hat{y}^{-1}(b))(\theta_i - b))}{\partial b} = 0$$

Utilitzant el teorema de la funció inversa obtenim:

$$\begin{aligned} & \hat{f}(\hat{y}(b) \frac{\partial(\hat{y}^{-1}(b))}{\partial b})(\theta_i - b) - \hat{F}(\hat{y}^{-1}(b)) \\ &= \frac{\hat{f}(\hat{y}^{-1}(b))}{\hat{y}'(\hat{y}^{-1}(b))}(\theta_i - b) - \hat{F}(\hat{y}^{-1}(b)) = 0 \end{aligned}$$

On $\hat{f}$ és la funció de densitat de la variable Z .

Com estem mirant únicament els equilibris simètrics, perquè $\hat{y}$ sigui un equilibri, ha de ser el cas que $\hat{y}(\theta_i) = b$. És a dir, tots els jugadors ofertaran b quan el seu tipus sigui θ_i i, per tant, $\hat{y}^{-1}(b) = \theta_i$. Amb lo qual, per què $\hat{y}$ sigui un equilibri, ha de solucionar l'equació diferencial:

$$\frac{\hat{f}(\theta_i)}{\hat{y}'(\theta_i)}(\theta_i - \hat{y}(\theta_i)) - \hat{F}(\theta_i) = 0 \longleftrightarrow \hat{F}(\theta_i)(\hat{y}'(\theta_i)) + \hat{f}(\theta_i)(\hat{y}(\theta_i)) = \hat{f}(\theta_i)\theta_i$$

Que ho podem reescriure com:

$$(\hat{F}(\theta_i)\hat{y}(\theta_i))' = \theta_i \hat{f}(\theta_i).$$

Com $\hat{y}(0) = 0$, integrant aquesta equació diferencial obtenim:

$$\hat{y}(\theta_i) = \frac{1}{\hat{F}(\theta_i)} \int_0^{\theta_i} z \hat{f}(z) dz = \mathbb{E}[Z|Z < \theta_i]$$

Per tant, hem vist que $\hat{a}^I$ és l'únic perfil d'estratègies que pot ser un equilibri Bayesià de Nash simètric, diferenciable i creixent d'una subhasta a primer preu.

I ara anem a demostrar que $\hat{a}^I$ realment és un equilibri. Sigui $i \in N$ un jugador qualsevol i θ_i el seu tipus. Veurem que $\hat{a}^I(\theta_i)$ és la millor resposta de i quan els altres jugadors juguen $\hat{a}^I$. Sigui $b \in [0, \bar{v}]$. Si $b > \hat{a}^I(\bar{v})$, aleshores b és estrictament dominada per l'estratègia $(b + \hat{a}^I(\bar{v}))/2$. Per tant podem assumir que $b \in [0, \hat{a}^I(\bar{v})]$. Direm $v = (\hat{a}^I)^{-1}(b)$, és a dir, $\hat{a}^I(v) = b$. I denotarem als beneficis esperats del jugador i , un cop ha sigut informat de que el seu tipus és θ_i , està jugant el perfil d'estratègies a_i i la resta de jugadors estan seguint el perfil d'estratègies $\hat{a}_i$, per $u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}, a_i))$. Aleshores:

$$\begin{aligned} u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}, a_i)) &= Pr((\hat{a}^I)^{-1}(b) > Z)(\theta_i - b) + Pr((\hat{a}^I)^{-1}(b) < Z)(0) \\ &= \hat{F}((\hat{a}^I)^{-1}(b))(\theta_i - b) = \hat{F}(v)(\theta_i - b) \\ &= \hat{F}(v)(\theta_i - \hat{a}^I(v)) = \hat{F}(v)\theta_i - \hat{F}(v)\hat{a}^I(v) \\ &= \hat{F}(v)\theta_i - \hat{F}(v)\mathbb{E}(Z|Z < v) = \hat{F}(v)\theta_i - \int_0^v y \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

(Integrant per parts amb $y=u$ i $\hat{f}(y)dy = dv$)

$$= \hat{F}(v)\theta_i - \hat{F}(v)v + \int_0^v \hat{F}(y)dy$$

$$= \hat{F}(v)(\theta_i - v) + \int_0^v \hat{F}(y)dy$$

.

Tot seguit, compararem els beneficis obtinguts amb el perfil d'estratègies $b = \hat{a}^I(v)$ i els obtinguts amb el perfil d'estratègies $\hat{a}^I(\theta_i)$:

$$\begin{aligned} & u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}_i^I(\theta_i))) - u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, b)) \\ &= \int_0^{\theta_i} \hat{F}(y)dy(\theta_i - \theta_i) - (\hat{F}(v)(\theta_i - v) + \int_0^v \hat{F}(y)dy) \\ &= \int_0^{\theta_i} \hat{F}(y)dy + \hat{F}(v)(v - \theta_i) - \int_0^v \hat{F}(y)dy \end{aligned}$$

Podem veure que aquesta diferència sempre serà positiva, tant si $v > \theta_i$ com si $v < \theta_i$, ja que la funció $\hat{F}$ és creixent. Distingim entre els següents casos:

- $v = \theta_i$: En aquest cas, clarament, la diferència entre els beneficis obtinguts és nula.
- $v > \theta_i$: En aquest cas:

$$u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}_i^I(\theta_i))) - u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, b)) = \hat{F}(v)(v - \theta_i) - \int_{\theta_i}^v \hat{F}(y)dy$$

. I com la diferència ha de ser positiva tindrem que:

$$\int_{\theta_i}^v \hat{F}(y)dy \leq \hat{F}(v)(v - \theta_i).$$

- $v < \theta_i$: En aquest cas:

$$u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}_i^I(\theta_i))) - u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, b)) = \int_v^{\theta_i} \hat{F}(y)dy - \hat{F}(v)(\theta_i - v).$$

I com la diferència ha de ser positiva tindrem que :

$$\int_{\theta_i}^v \hat{F}(y)dy \geq \hat{F}(v)(\theta_i - v).$$

En tots els casos tenim que $u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, \hat{a}_i^I(\theta_i))) \geq u_i^I(\theta_i, (\hat{a}_{-i}^I, b))$. Per tant, canviar unilateralment l'estratègia respecte el perfil $\hat{a}^I(\theta_i)$ no és rentable. Amb lo qual, $\hat{a}^I$ és un equilibri Bayesià de Nash d'una subhasta a primer preu.

Per tant queda demostrat que $\hat{a}^I$ és l'únic equilibri Bayesià de Nash simètric, diferenciable i creixent.

□

Exemple 5.3. Anem a veure un exemple molt simple per entendre millor la proposició anterior:

Suposem que estem en una subhasta a primer preu amb n jugadors i ρ corresponent a la distribució uniforme en l'interval $[0, 1]$. És a dir, per cada $x \in [0, 1]$ tenim que $F(x) = x$, $f(x) = 1$, $\hat{F}(x) = x^{n-1}$ i $\hat{f}(x) = (n-1)x^{n-2}$. Per tant, per cada $\theta \in [0, 1]$ tenim:

$$\hat{a}^I(\theta) = \frac{1}{\hat{F}(\theta)} \int_0^\theta z \hat{f}(z) dz = \frac{1}{\theta^{n-1}} \int_0^\theta z(n-1)z^{n-2} dz = \frac{n-1}{n} \theta$$

Com veiem, cada jugador ofertarà una porció de la seva valoració.

5.2 Subhastes a segon preu

La subhasta de sobre tancat a segon preu, en canvi, és correspon amb la subhasta anglesa. Tot hi que en aquest cas, la correspondència no és tant evident. La subhasta anglesa és un tipus de subhasta en que el venedor comença la subhasta amb un preu de sortida del objecte, i després va acceptant les ofertes cada cop més altes que van realitzant els compradors. La subhasta anglesa dona informació sobre el moment en que els altres postors es retiren del joc. Per exemple, en una subhasta anglesa no és optíim mantenir-se dins de la subhasta quan el preu ha excedit la pròpia valoració, ja que això ens portaria a obtenir pèrdues. Tampoc és optíim retirar-se de la subhasta abans de que el preu assoleixi la pròpia valoració, ja que estariem rebutjant guanys potencials. En el cas de les subhastes de sobre tancat a segon preu, no s'obté aquesta informació. Així, amb valoracions privades, en una subhasta anglesa la millor opció és mantenir-se dins la subhasta fins que el preu assoleixi la pròpia valoració. I veurem que en una subhasta de sobre tancat a segon preu, el millor que pot fer cada jugador és oferir la seva valoració.

Definició 5.4. Una subhasta a segon preu de n jugadors amb conjunt de jugadors N és una 4-tupla $(\Theta, \rho, A, u^{II})$ formada per:

- **Els tipus dels jugadors:** $\Theta := \prod_{i \in N} \Theta_i$, on per cada $i \in N$, $\Theta_i = [0, \bar{v}]$.
- **Conjectura:** La distribució de probabilitat sobre $[0, \bar{v}]$, denotada per ρ , des d'on s'assignen independentment els tipus de cada jugador.
- **Les possibles estratègies:** $A := \prod_{i=1}^n A_i$, on $A_i := [0, \infty)$. Una estratègia **pura** del jugador i és una funció $\hat{a}_i : \Theta_i \rightarrow A_i$. $\hat{A}_i$ és el conjunt de les estratègies pures del jugador i , i $\hat{A} := \prod_{i=1}^n \hat{A}_i$.
- **Les funcions de pagament:** $u^{II} := \prod_{i=1}^n u_i^{II}$, on per cada $i \in N$, $u_i^{II} : [0, \bar{v}] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ està definida de la següent manera:

$$u_i^{II}(\theta_i, a_i) = \begin{cases} \theta_i - \max_{j \neq i} a_j & \text{si } a_i > \max_{j \neq i} a_j \\ \frac{\theta_i - \max_{j \neq i} a_j}{|j : a_j = \max_{k \in N} a_k|} & \text{si } a_i = \max_{j \neq i} a_j \\ 0 & \text{si } a_i < \max_{j \neq i} a_j \end{cases}$$

Per cada $i \in N$ la funció Bayesiana de pagaments de i $\hat{u}_i^{II} : \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}$ està definida per:

$$\hat{u}_i^{II}(\hat{a}) := \int_{\theta \in [0, \bar{v}]^n} u_i^{II}(\theta_i, \hat{a}(\theta)) d\rho(\theta_1) \dots d\rho(\theta_n)$$

Ara estudiarem els equilibris de les subhastes a segon preu. Igual que en el cas de les subhastes a primer preu, ens centrarem en estudiar aquells equilibris que són simètrics, diferenciables i creixents.

Proposició 5.5. *Sigui $(\Theta, \rho, A, u^{II})$ una subhasta a segon preu. Aleshores, per cada $i \in N$ amb valoració θ_i , l'estratègia definida per $\hat{a}^{II}(\theta_i) := \theta_i$ és una estratègia dominant. És a dir, per cada $\hat{a}_{-i} \in \hat{A}_{-i}$ i cada $\hat{a}_i \in \hat{A}_i$, $\hat{u}_i^{II}(\hat{a}_{-i}, \hat{a}_i) \geq \hat{u}_i^{II}(\hat{a}_{-i}, \hat{a}_i)$.*

Demostració: Sigui $\hat{a}_{-i} \in A_{-i}$ i $\hat{a}_i \in A_i$. Sigui $\theta \in [0, \bar{v}]^n$. Demostrarem que ofertar θ_i és una estratègia dèbilment dominant pel jugador i . Considerem $\hat{b} := \max_{j \neq i} \hat{a}_j(\theta_j)$, i anomenem b a una oferta del jugador i . Veurem que sempre és pitjor o igual oferir b que oferir θ_i . Distingim entre els següents casos:
Suposem que $b > \theta_i$ i el jugador i ofereix b :

- Si $\hat{b} > b > \theta_i$: Aleshores el jugador i perd la subhasta, com ho faria si hagués ofert θ_i .
- Si $\hat{b} = b > \theta_i$: El jugador i guanya la subhasta amb probabilitat $1/k$ amb $k > 1$ i obté uns beneficis esperats de $(\theta_i - \hat{b})/k$. És a dir, tindria pèrdues. Però si la seva oferta fos θ_i , perdria la subhasta i els seus beneficis serien 0.
- Si $b > \theta_i > \hat{b}$: Aleshores el jugador i guanya la subhasta i obté beneficis de $(\theta_i - \hat{b})$ que són els mateixos que si la oferta fos θ_i .
- Si $b > \hat{b} > \theta_i$: Aleshores el jugador i guanya la subhasta i els seus beneficis són de $(\theta_i - \hat{b})$, que en aquest cas serien negatius. En canvi, si oferís θ_i , perdria la subhasta i obtindria 0 de beneficis.

Supose, que $\theta_i > b$ i el jugador i ofereix b :

- Si $\theta_i > b > \hat{b}$: Aleshores el jugador i guanya la subhasta i obté $(\theta_i - \hat{b})$ de beneficis. El mateixos que obtindria si oferís θ_i .
- Si $\theta_i > b = \hat{b}$: Aleshores els beneficis del jugador i seran $(\theta_i - \hat{b})/k$ amb $k > 1$. Si hagués ofert θ_i , obtindria $(\theta_i - \hat{b})$ que seria un benefici més alt ja que $k > 1$.
- Si $\hat{b} > \theta_i > b$: El jugador i perd la subhasta igual que si la seva oferta fos θ_i .
- Si $\theta_i > \hat{b} > b$: Aleshores el jugador i perd la subhasta, mentre que si oferís θ_i , guanyaria la subhasta i obtindria $(\theta_i - \hat{b})$ de beneficis.

Per tant, tant en el cas en que $\theta_i > b$ com en el cas en que $b > \theta_i$, sempre és millor o igual oferir θ_i que oferir b .

□

Proposició 5.6. *El perfil d'estratègies $\hat{a}^{II}$ definit en la proposició anterior, és l'únic equilibri Bayesià de Nash simètric, diferenciable i creixent d'una subhasta a segon preu.*

Demostració: Sigui $\hat{y} : [0, \bar{v}] \rightarrow [0, \infty)$ un equilibri Bayesià de Nash simètric, diferenciable i creixent d'una subhasta a segon preu $(\Theta, \rho, A, u^{II})$. Anem a veure que, per cada $i \in N$ amb valoració $\theta \in [0, \bar{v}]$, oferir θ és una estratègia estrictament dominant pel jugador i . Ho farem en dos passos:

Primer pas: Veurem que, per cada $\theta \in (0, \bar{v})$, $\hat{y}(\theta) \geq \theta$. Suposem que, per el contrari, existeix $\theta \in (0, \bar{v})$ tal que $\hat{y}(\theta) < \theta$. Per la continuïtat de $\hat{y}$, tindrem que existeix $\underline{b} \in (0, \theta)$ tals que $\hat{y}(\underline{b}) < \theta$. Fixem $i \in N$. Com ρ té suport positiu, aleshores, hi ha una probabilitat positiva de que, per cada $j \neq i$, $\theta_j \in (\underline{b}, \theta)$. Per tant, si el tipus de i és $\theta_i = \theta$, hi ha una probabilitat positiva de que i guanyi la subhasta i pagui més que θ quan ofereix $\hat{y}(\theta)$, amb lo qual obtindria unes pèrdues respecte el que obtindria si hagués ofert θ (lo qual garantitza sempre una pagament no negatiu).

Segon pas: Veurem que, per cada $\theta \in (0, \bar{v})$, $\hat{y}(\theta) \leq \theta$. Suposem que, per el contrari, existeix $\theta \in (0, \bar{v})$ tal que $\hat{y}(\theta) > \theta$. Per la continuïtat de $\hat{y}$, tindrem que existeix $\hat{b} \in (\theta, \bar{v})$ tals que $\hat{y}(\hat{b}) > \theta$. Fixem $i \in N$. Com ρ té suport positiu, aleshores, hi ha una probabilitat positiva de que, per cada $j \neq i$, $\theta_j \in (\theta, \hat{b})$. Per tant, si el tipus de i és $\theta_i = \theta$, hi ha una probabilitat positiva de que no guanyi la subhasta, mentre que tindria uns beneficis positius en cas de oferir θ ja que guanyaria la subhasta.

Els resultats per els tipus 0 i $\bar{v}$ es dedueixen de la continuïtat de $\hat{y}$.

□

5.3 Principi d'equivalència

Ara que ja hem estudiat les estratègies d'equilibri d'aquests dos formats de subhastes, una pregunta que ens pot sorgir és: Quina de les dues subhastes és més rentable per el venedor? És a dir, quin dels dos tipus de subhasta li proporciona uns ingressos majors? El resultat que veurem a continuació ens mostra que, des del punt de vista del venedor, els dos formats són equivalents ja que proporcionen els mateixos ingressos esperats.

Teorema 5.7. (Principi d'equivalència d'ingressos): *Considerem totes les subhastes en sobre tancat i amb un número n de postors. Suposem que totes les valoracions són independents i idènticament distribuïdes sobre $[0, \bar{v}]$. Aleshores, els ingressos esperats del venedor d'una subhasta a primer preu coincideixen amb els d'una subhasta a segon preu.*

Demostració: Primer de tot, cal notar que els ingressos esperats del venedor són la suma dels pagaments esperats dels compradors. A continuació veurem com són aquests ingressos.

Igual que en els casos anteriors, considerem $\hat{F}$ la funció de distribució de la variable Z ,

on Z és la variable aleatòria que dona el valor més gran de $n - 1$ realitzacions de ρ . Sigui $\pi(v)$ els pagaments esperats d'un comprador amb tipus v . Anem a veure a que equival $\pi(v)$ en cada un dels dos tipus de subhasta:

- **Subhasta a primer preu:** En l'equilibri que hem vist anteriorment, un jugador amb tipus v farà una oferta igual a $\mathbb{E}(Z|Z < v)$ i, com la resta de jugadors també segueixen aquesta estratègia, la probabilitat de que guanyi és $\hat{F}(v)$. I en aquest cas el guanyador paga la seva oferta. Per tant $\pi(v) = \hat{F}(v)\mathbb{E}(Z|Z < v)$.
- **Subhasta a segon preu:** Un altre cop, seguint l'estratègia d'equilibri que hem vist anteriorment tenim que, un jugador amb tipus v farà una ofert de v i la probabilitat de que guanyi és, igual que en el cas de les subhastes a primer preu, $\hat{F}(v)$. I en aquest cas, el guanyador paga la segona millor oferta, i això serà $\mathbb{E}(Z|Z < v)$. Per tant $\pi(v) = \hat{F}(v)\mathbb{E}(Z|Z < v)$.

I amb això hem acabat. El pagament esperat d'un jugador, abans de conèixer el seu tipus, és $\int_0^{\bar{v}} \pi(v)d\rho(v)$, el qual és igual per una subhasta a primer preu i una subhasta a segon preu. Per tant, en els dos casos, els ingressos esperats del venedor seran $n \int_0^{\bar{v}} \pi(v)d\rho(v)$.

□

Cal mencionar que, sempre que els tipus siguin independents de la mateixa funció de distribució, el principi d'equivalència és vàlid per una gran quantitat de formats de subhastes i no només per subhastes a primer i a segon preu.

6 Disseny de mecanismes

Els problemes sobre disseny de mecanismes constitueixen un dels majors camps d'aplicació dels jocs Bayesianes. De fet, totes les subhastes que hem estudiat al capítol anterior, es poden considerar com una classe especial de mecanismes. Anem ara a veure un exemple per entendre el que és un problema de disseny de mecanismes. El mànager d'una empresa vol contractar a un nou treballador i té dos possibles candidats. Els dos poden ser treballadors d'alta productivitat o de baixa productivitat, i aquesta informació és desconeguda per el mànager. Al mànager, obviament, li agradaria contractar un treballador d'alta productivitat, però no és clar com aconseguir això. Si els hi pregunta directament als candidats si són d'alta o baixa productivitat, és bastant probable que un candidat de baixa productivitat digui que és d'alta productivitat per així poder ser contractat. Per tant, el problema del mànager és el de dissenyar un mecanisme (que en aquest cas seria un contracte) que proporcioni als candidats els incentius suficients per dir la veritat. Generalment, això només es pot fer d'una forma molt costosa, per tant, el problema és dissenyar un mecanisme que sigui el més eficient possible des del punt de vista del mànager. Més generalment, un problema de disseny de mecanismes pot ser descrit de la següent manera. Hi ha un jugador distingit, el *director*, i la resta de jugadors són els *agents*. Els agents tenen algun coneixement privat, és a dir, hi alguna informació que és coneguda únicament pels agents. Tant el director com els agents es troben davant d'una situació estratègica en la que el director voldria pendre una acció en base als tipus dels agents. Per tant, el problema del director consisteix en dissenyar un mecanisme que li permeti conèixer informació dels agents per tal de pendre la millor acció possible. En la majoria de casos, és molt costós assegurar que la informació rebuda és verídica. Amb lo qual, hi una compensació entre el cost d'aconseguir la informació i el benefici de més que obtindrà el director al conèixer aquesta informació. El disseny de mecanismes és centra pricipalment en el problema que té el director i, recentment, s'ha tornat bastant popular degut a la gran quantitat d'aplicacions que té en els diferents camps de l'economia. Alguns exemples d'aquestes aplicacions serien: discriminació de preus, taxació òptima, disseny de subhastes, disposició de bens públics, entre d'altres.

Anem ara a descriure les bases del model. Tenim $n + 1$ jugadors: els n agents ($i \in N = \{1, \dots, n\}$) i el director que és el jugador $n + 1$. Cada agent $i \in N$ té un tipus $\theta_i \in \Theta_i$ i el conjunt de perfils de tipus és $\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$. Els tipus són donats d'una funció de distribució ρ definida sobre Θ i cada jugador és informat, de forma privada, del seu tipus. La situació en que ens trobem, és molt similar a la del capítol anterior, al saber el tipus d'un jugador, també coneixem la seva informació i viceversa. Per tant en aquest cas, podem considera l'espai de tipus i els estats del món com la mateixa entitat. El director ha de fer una elecció en un subconjunt compacte, convex i no buit $C \in \mathbb{R}^n$ i seleccionar un vector $p \in \mathbb{R}^n$ de pagaments per els agents (transferència monetària que pot ser tant positiva com negativa); dit d'una altre forma, el director ha de proposar una assignació $z = (c, p) \in C \times \mathbb{R}^n$. Els agents poden acceptar o rebutjar l'assignació proposada pel director, és a dir, cada agent té sempre una opció *externa* que li dona el seu *pagament de reserva*. Podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que el pagament de reserva de cada agent és 0. Tots els jugadors tenen funcions de pagament: per cada $i \in \{1, \dots, n, n + 1\}$, $u_i : \Theta \times C \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Idealment, el director voldria condicionar l'assignació en funció dels tipus dels agents per tal de maximitzar els seus beneficis. Com la informació de cada agent és privada, el director dissenya un mecanisme segons el qual els agents li envien missatges que, en algun moment, poden revelar informació.

En funció dels missatges rebuts, el director escollirà una assignació. Un mecanisme és un joc estratègic pels agents, en el qual els seus conjunts d'estratègies són els diferents missatges que poden enviar al director. Direm $M = \prod_{i \in N} M_i$ al conjunt de tots els perfils de missatges. Per cada perfil de missatges, el director escull una assignació seguint la aplicació $S : M \longrightarrow C \times \mathbb{R}^n$, a la que anomenarem *esquema d'assignació*. Cal ressaltar que, el director no és un jugador del mecanisme, és a dir, ell és comproment amb un esquema d'assignació S que és anunciat públicament als agents abans de que aquests hagin de jugar. Les funcions de pagament es defineixen combinant l'esquema d'assignació i les funcions u_i .

La cadena del joc Bayesià és la següent:

- i. Els tipus es realitzen, cada jugador és informat únicament del seu tipus, i el director no rep cap informació.
- ii. El director proposa un mecanisme, és a dir, és comproment amb un esquema d'assignació.
- iii. Els agents envien els seus missatges.
- iv. El director escull una assignació i es donen els pagaments.

Les decisions dels agents en el pas iii) estan condicionades en els seus tipus. Per tant, en el pas iv), l'assignació escollida per el director dependrà dels tipus dels agents a través dels missatges. Hi ha alguns problemes de disseny de mecanismes en els que els agents poden decidir si participar en el joc proposat pel director o no fer-ho i obtenir el seu pagament de reserva. D'ara en endavant, direm que, per cada $i \in N$, $r \in M_i$ és el missatge de rebutjar la participació en el joc. Cal notar que els jugadors decideixen si participar o no en el pas iii). Un cop un agent ha decidit participar, ja no pot rebutjar la assignació proposada pel mecanisme al pas iv), encara que els pagaments que obtingui siguin menors que el seu pagament de reserva. Anem a definir formalment el concepte de mecanisme.

Definició 6.1. *Un mecanisme de n jugadors amb conjunt de jugadors N és una 5-tupla (Θ, ρ, M, S, u) formada pels següents elements:*

- **Els tipus dels jugadors:** $\Theta := \prod_{i \in N} \Theta_i$.
- **Conjecturas:** La distribució de probabilitat ρ des d'on es donen els tipus dels jugadors. En aquest cas els tipus dels jugadors no són necessàriament independents.
- **El perfil d'estratègies:** $M := \prod_{i=1}^n M_i$. Una estratègia **pura** del jugador i és una aplicació $\hat{m}_i : \Theta_i \longrightarrow M_i$. Anomenarem $\hat{M}_i$ al conjunt de totes les estratègies pures i $\hat{M} := \prod_{i=1}^n \hat{M}_i$.
- **L'esquema d'assignació:** Com ja hem dit, $S : M \longrightarrow C \times \mathbb{R}^n$.
- **Les funcions de pagament:** $u := \prod_{i=1}^n u_i$, on, per cada $i \in N$, $u_i : \Theta \times C \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Per cada $i \in N$ la funció de pagaments Bayesiana del jugador i $\hat{u}_i : \hat{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ es defineix com $\hat{u}_i(\hat{m}) := \int_{\theta \in \Theta} u_i(\theta, S(\hat{m}(\theta))) d\rho(\theta)$.

L'objectiu del director és dissenyar un mecanisme tal que la seva assignació d'equilibri li sigui rentable, és a dir, un mecanisme es pot veure com la segona etapa d'un joc extensiu amb informació imperfecte en el que el director és un jugador amb una funció de pagament definida a $\Theta \times C \times \mathbb{R}^n$. Primer de tot, la natura dona els tipus de cada agent. Després, el director, sense cap informació sobre els tipus dels agents, es compromet amb un mecanisme el qual és anunciat publicament. I després, els agents escullen les seves accions.

Però, com que la classe de tots els mecanisme és molt general, la dificultat de trobar un mecanisme òptim és un problema complicat pel director. Afortunadament, el director pot utilitzar el major resultat del disseny de mecanismes per simplificar aquest problema. Aquest resultat és el que anem a estudiar a continuació i es coneix com el *principi de revelació*.

6.1 El pricipi de revelació

Com ja hem dit, el principi de revelació és un instrument molt important per dissenyar jocs quan els jugadors tenen informació privada. Abans de definir-lo formalment, hem d'introduir alguns conceptes previs.

Definició 6.2. *Sigui (Θ, ρ, M, S, u) un mecanisme. Direm que aquest mecanisme és un mecanisme directe si*

$$M = \prod_{i \in N} \Theta_i \cup \{r\}.$$

És a dir, els possibles missatges dels agents coincideixen amb els seus tipus més la decisió de no participar.

Definició 6.3. *Donat un mecanisme directe, si revelar els seus veraders tipus és un equilibri pels agents, aleshores direm que aquest equilibri és verdader. En particular, en un equilibri verdader, tots els agents accepten participar en el joc així que*

$$M = \prod_{i \in N} \Theta_i.$$

I ara que ja hem introduït aquests conceptes, ja podem definir el principi de revelació. De manera informal, la idea del principi és la següent. Qualsevol equilibri Bayesià de Nash d'un joc Bayesià, es pot representar amb un nou equilibri Bayesià de Nash en un nou joc Bayesià escollit adequadament. Quan diem que "es pot representar" ens referim a que, per cada combinació possible dels tipus dels jugadors, les accions i els beneficis dels jugadors en el nou equilibri són exactament iguals a les accions i els beneficis del joc original. Amb lo qual podem dir que:

Teorema 6.4. (Principi de revelació). *Sigui (Θ, ρ, M, S, u) un mecanisme qualsevol i $\hat{m}$ un equilibri Bayesià. Aleshores, existeix un mecanisme directe en el qual hi ha un equilibri verdader tal que els resultats d'aquest equilibri coincideixen amb els resultats de l'equilibri en el joc original.*

Demostració. Sigui (Θ, ρ, M, S, u) un mecanisme i $\hat{m}$ un equilibri Bayesià. Com $\hat{m}$ és un equilibri, vol dir que maximitza els beneficis de cadascun dels jugadors un cop donades les accions de la resta de jugadors.

Considerem ara el mecansime $(\Theta, \rho, \bar{M}, \bar{S}, u)$ on definim $\bar{M}$ i $\bar{S}$ de la següent manera. $\bar{M} := \prod_{i \in N} \Theta_i \cup \{r\}$, i per cada $\theta \in \Theta$, $\bar{S}(\theta) := S(\hat{m}(\theta))$. I ara és fàcil veure que dir la pròpia valoració és un equilibri Bayesià del nou mecanisme i també és clar que això porta als mateixos resultats que l'equilibri en el mecansime original.

□

La idea al darrere del principi de revelació és bastant simple. Donat un mecanisme i un equilibri $\hat{m}$ d'aquest mecansime, podem demanar als jugadors que reportin el seu tipus i, per cada perfil reportat $\theta \in \Theta$, escollim l'assignació que hauríem seleccionat en el mecanisme original després d'observar el missatge $\hat{m}(\theta)$. Si $\hat{m}(\theta)$ era un equilibri en el joc original, aleshores dir la veritat ha de ser un equilibri del mecanisme directe i clarament els resultats en els dos casos coincideixen.

7 Conclusions

La teoria de jocs és una de les branques que més aplicacions té en el món actual. Fa aproximadament un segle que va aparèixer i alguns dels matemàtics i economistes que s'han dedicat a estudiar-la han sigut premiats amb el premi Nobel com per exemple John Nash i John Harsanyi al 1994.

En aquest treball hem vist com són els jocs amb informació incompleta. I com, gràcies a les idees de Harsanyi, podem transformar-los en jocs amb informació completa però imperfecte afegint el concepte de l'atzar. A més hem estudiat també la noció d'equilibri Bayesià i la importància d'aquest en tots els jocs.

En particular, hem vist un exemple de l'utilitat dels jocs amb informació incompleta. Hem vist com a la paradoxa de la cadena de tendes teniem un joc seqüencial on semblava que arribàvem a una paradoxa ja que les estratègies òptimes de la teoria de jocs no donaven els màxims beneficis al monopolista. Però que aquesta paradoxa es podia solucionar interpretant el joc com un joc amb informació incompleta on hi havien dos estats del món, un on el monopolista era agressiu i sempre lluitava, i un altre on el monopolista era dèbil i preferia cooperar a lluitar. I seguint les estratègies adients arribàvem a un equilibri el qual sí proporcionava els màxims beneficis al monopolista.

També hem estudiat les diferents aplicacions de la teoria de jocs. Començant per la teoria de subhastes, on ens hem centrat en les subhastes a sobre tancat. Hem estudiat les subhastes a primer preu i a segon preu i les seves estratègies d'equilibri. On per una banda tenim que en una subhasta a segon preu, oferir la pròpia valoració de l'objecte és un equilibri. I en canvi en les subhastes a primer preu trobem un equilibri en l'estratègia $\hat{a}^I(\theta) := \mathbb{E}(Z|Z < \theta)$ on Z és la variable aleatòria màxima de la resta de jugadors. I respecte a la pregunta que ens feiem sobre quin dels dos estils de subhasta proporcionava uns beneficis majors al venedor, hem observat que independentment del tipus de subhasta que faci, el venedor sempre tindrà els mateixos beneficis esperats. I això és el que és coneix com el principi d'equivalència d'ingressos.

I per últim hem estudiat el disseny de mecanisme, una aplicació dels jocs amb informació incompleta de gran importància en el món actual degut a la gran quantitat de camps en que està present. Hem vist com el director vol dissenyar un mecanisme per poder conèixer la verdadera informació de cada agent. I com el principi de revelació ens diu que independentment del mecanisme que tinguem, sempre podem trobar un mecanisme directe i verdader amb els mateixos resultats que el mecanisme original.

Durant l'últim any dels meus estudis del grau de matemàtiques he descobert la teoria de jocs. Una teoria d'interès tant en el món de les matemàtiques com en el món de l'economia. Gràcies a aquest projecte he pogut aprofundir molt en els coneixements teòrics sobre aquesta branca i he pogut entendre, des d'un punt de vista analític el funcionament de les subhastes i del disseny de mecanismes.

Referències

- [1] Ordeshook, Peter C.: "Reputation and the Chain-Store Paradox". A Political Theory Primer. Routledge: 247-249, 1992.
- [2] Selten, Reinhard: "The chain store paradox". Theory and Decision. 9: 127-159, 1978.
- [3] Harsanyi, John C.: "Games with incomplete information played by "Bayesian" players, I-III. part I. The Basic Model". Management Science. 14: 159-182, 1967.
- [4] González-Díaz, J.; García-Jurado, I; Fiestras-Janeiro, M. G.: "An Introductory Course on Mathematical Game Theory" Vol.115 :14, 18, 99-105, 115-129, 163-189, 2010.
- [5] Binmore, Kenneth: "Teoria de juegos". McGraw-Hill: 485-493, 2008.