Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: VALORACIÓN DE OPCIONES MEDIANTE EXTENSIONES DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

Autoría: Jeison Arley Moreno Carrillo

Tutoría: Josep Vives y Oriol Roch

Curso académico: 2025-2026

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat d'Economia i Empresa

Màster de Ciències Actuarials i Financeres

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

VALORACIÓN DE OPCIONES MEDIANTE EXTENSIONES DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

Autoría: Jeison Arley Moreno Carrillo

Tutoría: Josep Vives y Oriol Roch

El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto.

Resumen

El presente trabajo estudia los fundamentos de la modelización de extensiones del modelo de Black–Scholes en la teoría de valoración de opciones. En particular, estos modelos relajan las hipótesis de volatilidad y tipos de interés constantes para lograr una modelización de los activos más cercana a la dinámica del mercado. Empleamos el modelo de Vasicek para modelar la dinámica de los tipos de interés, el modelo de Heston para la dinámica de la volatilidad, un modelo híbrido que integra ambos modelos y finalmente una implementación numérica de los principales resultados teóricos hallados en el trabajo.

Palabras clave: Valoración de opciones, modelización, volatilidad, tipos de interés, cálculo estocástico.

Contenido

pág.

1. Introducción **6**

2. Preliminares **8**
2.1. Conceptos iniciales 8
2.2. El modelo de Black–Scholes 13
2.2.1. Las griegas 15

3. Tipos de interés estocásticos **18**
3.1. La curva de tipos de interés 19
3.2. Valoración de opciones 23
3.3. Dinámica del tipo instantáneo: El modelo de Vasicek 25

4. Volatilidad estocástica **29**
4.1. Ecuación de valoración 30
4.2. Dinámica de la volatilidad: El modelo de Heston 33

5. Extensiones de Black–Scholes con tipos y volatilidad estocásticos **37**
5.1. Modelos híbridos en la valoración de opciones 37
5.2. El modelo de Vasicek-Heston 39
5.2.1. Cambio de numerario 39
5.2.2. Fórmula de valoración 41

6. Aplicación empírica **45**
6.1. Calibración de modelos 46
6.2. Valoración de opciones europeas 48
6.3. Sonrisa de volatilidad implícita 50
6.4. Análisis de sensibilidad 51
6.5. Impacto del tipo de interés estocástico 53

7. Conclusiones **55**

Apéndice

A. Código **59**

Capítulo 1

Introducción

La valoración de derivados financieros constituye uno de los problemas centrales y posiblemente más desafiantes de las finanzas modernas. Desde la aparición del modelo de Black–Scholes en 1973, la teoría de valoración libre de arbitraje ha proporcionado un marco matemático fundamental para la determinación de precios de opciones y otros productos financieros derivados. A pesar de su elegancia y relevancia histórica, el modelo de Black–Scholes presenta limitaciones importantes, tales como las hipótesis de volatilidad y tipos de interés constantes. La evidencia empírica observada en los mercados financieros, particularmente la presencia de smiles y skews de volatilidad implícita, motivó el desarrollo de modelos más sofisticados capaces de incorporar dinámicas estocásticas para estas variables. En las últimas décadas se han desarrollado múltiples generalizaciones del modelo de Black-Scholes al incorporar en la modelización saltos en el activo subyacente, dividendos, tipos de interés estocástico, volatilidad estocástica, entre otros. De estos dos últimos, estudiaremos algunos de sus modelos, en particular, el modelo de Vasicek-Heston que incorpora el tipo de interés estocástico dentro de un modelo de volatilidad para formar un modelo híbrido. Por tanto, uno de nuestros objetivos trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué efectos produce la incorporación simultánea de volatilidad y tipos de interés estocásticos en la valoración de opciones europeas?

Christoffersen et al. (2009) estudiaron el modelo de Heston extendiéndolo a un modelo multifactorial donde la varianza es la suma de dos factores incorrelados que pueden estar individualmente correlacionados con el activo subyacente, mientras que recientemente, He & Lin (2026) consideraron un modelo multifactorial añadiendo al modelo de Vasicek-Heston un factor adicional de cambio de régimen. Otro modelo para el tipo de interés lo consideran Grzelak & Oosterlee (2011), quienes incorporan el modelo de CIR para el tipo de interés estocástico en el modelo de Heston, proporcionando una solución numérica pero no cerrada para valorar opciones europeas. Posteriormente, Recchioni & Sun (2016) hacen una extensión del modelo de Grzelak a un modelo multifactorial. He & Zhu (2018) también consideran un modelo híbrido Heston-CIR derivando una fórmula cerrada para opciones europeas en la forma de series infinitas. Chval (2020) estudia el modelo Heston–Hull–White calibrado con datos de opciones del índice DAX; compara precios con Black–Scholes y Heston bajo tasas negativas, encontrando diferencias relevantes. Roslan et al. (2022) derivan precios de warrants en un modelo Heston–CIR mediante solución analítica de una EDP, mostrando un mejor ajuste comparado con el modelo Black–Scholes clásico al optimizar

su función de error. Ascione et al. (2023) consideran un modelo Heston–CIR con saltos (Lévy) y aplican el método de Monte Carlo por Mínimos Cuadrados (LSMC) para valuar opciones FX americanas, mostrando resultados numéricos e impacto de cada factor. Más recientemente, Fallah (2026) propone un modelo Heston–Vasicek fraccionario (movimiento Browniano fraccionario en la tasa) y obtiene la función característica semicerrada mediante la transformada de Fourier para precios eficientes. Muchos de estos trabajos destacan la estabilidad y eficiencia de los métodos numéricos, pero reconocen que no existen fórmulas cerradas simples para todos los casos. Dentro de esta línea, nosotros adoptamos el modelo de Vasicek-Heston estudiado por Guo (2021).

Dentro de nuestros objetivos se encuentran analizar la valoración de opciones europeas en mercados financieros con volatilidad y tipos de interés estocásticos, estudiando las extensiones del modelo de Black–Scholes basadas en los modelos de Vasicek y Heston, así como su formulación híbrida, mediante técnicas del cálculo estocástico; además, realizar un análisis numérico comparativo de estas técnicas en la valoración de opciones y evidenciar la bondad de su ajuste ante precios de mercado, evaluando también el impacto de la volatilidad y los tipos de interés estocásticos sobre los precios de las opciones y la superficie de volatilidad implícita.

Dividimos este trabajo en siete capítulos, de los cuales el primero es la Introducción al mismo. Iniciamos el segundo capítulo enunciando los principales conceptos y resultados utilizados a lo largo del trabajo, haciendo una breve revisión de las hipótesis y de la construcción del modelo de Black–Scholes, siguiendo el razonamiento de Neftci (1996) para este fin. Luego, en el Capítulo 3 presentamos los principales elementos de la modelización de tipos de interés, desarrollando el modelo de Vasicek y la fórmula que utiliza para valorar opciones sobre bonos siguiendo de cerca el estudio de Lamberton & Lapeyre (2011). En el Capítulo 4, estudiamos las implicaciones de integrar una ecuación para la volatilidad estocástica a la ecuación del activo subyacente que modela el mercado, y presentamos el modelo más conocido para la volatilidad estocástica, el modelo de Heston, detallando su derivación para llegar a la fórmula de valoración de opciones europeas. Posteriormente, incorporamos en el Capítulo 5 la dinámica estocástica del tipo de interés a corto plazo y la volatilidad en el modelo de valoración de opciones. En particular, una combinación de los anteriores modelos. Aunque el modelo de Vasicek fue en su momento cuestionado por permitir que los tipos sean negativos, después de la crisis de 2008 esto pasó de ser un defecto matemático a ser una característica deseable en la modelización, evidencia que se ha recogido durante las últimas décadas (e.g., Jackson, 2015; Wu & Xia, 2020). Aún más, Recchioni et al. (2017) mostraron que permitir tipos de interés negativos puede mejorar el ajuste del modelo en la valoración de opciones. En el Capítulo 6, implementamos estos modelos con datos reales de opciones call, analizando la sensibilidad de sus parámetros, el ajuste a los precios de mercado y la volatilidad implícita resultante. Asimismo, los comparamos con el modelo de Black-Scholes y evaluamos el impacto de incorporar tipos de interés y volatilidad estocásticos. Por último, enunciamos las principales conclusiones del estudio.

Capítulo 2

Preliminares

> No te molestes; no hay almuerzo gratis, si de verdad se tratara de un billete de $100, ya lo habría levantado alguien.
>
> — Jonathan Berk

2.1. Conceptos iniciales

La valoración moderna de derivados financieros se fundamenta en principios del mercado como la ausencia de arbitraje y reglas del cálculo estocástico que permiten obtener el precio justo con que estos deben comercializarse. Nos referimos al arbitraje como la práctica de comprar y vender bienes equivalentes en mercados distintos para sacar ventaja de una diferencia de precios (Berk & DeMarzo, 2008). Este principio continuamente está presente en la teoría de valoración de derivados porque es parte del comportamiento empírico que muestra el mercado en la realidad. Una oportunidad de hacer arbitraje es como el dinero tirado en el suelo, una vez que es detectado desaparece con rapidez. Si un mercado competitivo carece de oportunidades de arbitraje, decimos entonces que es un mercado viable. Los mercados viables por tanto, no permiten que un mismo producto se negocie al mismo tiempo por precios diferentes en dos lugares distintos, debido a que esto crearía oportunidades de arbitraje para los inversores al poder comprar donde es más barato y vender donde es más caro y como resultado, los precios acabarían por igualarse. Esta ley puede enunciarse de la siguiente manera.

Definición 2.1 (Ley del precio único)**.** Si se negocian de manera simultánea oportunidades equivalentes de inversión en mercados competitivos distintos, entonces lo harán al mismo precio en ambos mercados.

De forma general, las estrategias de inversión consideradas en los modelos del mercado son estrategias donde no se introduce ni se extrae dinero externo del sistema después del momento inicial, es decir, cualquier cambio posterior a la construcción inicial de la cartera debe pagarse únicamente con las ganancias o pérdidas que genere la propia cartera.

Definición 2.2 (Cartera autofinanciada (Björk, 2009))**.** Una estrategia de inversión $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ se llama *autofinanciada* si no se inyecta ni se retira capital durante el período $[0,T]$, es decir, si su valor $V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ satisface $dV_t = H_t^0\, dS_t^0 + H_t\, dS_t$.

Definición 2.3. Decimos que existe una *oportunidad de arbitraje* si existe una estrategia autofinanciada h tal que $V_0^h = 0$, $\mathbf{P}(V_T^h \geq 0) = 1$ y $\mathbf{P}(V_T^h > 0) > 0$.

Proposición 2.4. *Suponga que existe una cartera autofinanciada h tal que el valor del proceso V^h tiene la dinámica $dV_t^h = k_t V_t^h\, dt$, donde k es un proceso adaptado. Entonces se cumple que $k_t = r_t$ para todo t, o de otra manera existirá una oportunidad de arbitraje.*

La proposición anterior utiliza el principio de no arbitraje, donde cualquier cartera que crezca de forma determinista al tipo k_t debe hacerlo exactamente al tipo libre de riesgo r_t.

Definición 2.5. El proceso de fijación de precios S^0 es el precio de un *activo libre de riesgo* si tiene la dinámica $dS_t^0 = r_t S_t^0\, dt$, con $t \in [0,T]$, y donde r es cualquier proceso adaptado que satisface $\int_0^T |r(s)|\, ds < \infty$ a.s.

Definición 2.6. Si $F(x)$ es una función de distribución unidimensional, su *función característica* correspondiente es la función compleja de la variable real t:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Definición 2.7. Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de un conjunto $X \neq \emptyset$ es una σ-álgebra si se cumple lo siguiente:

- $\emptyset \in \mathscr{F}$.
- $A \in \mathscr{F} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathscr{F}$.
- $A_n \in \mathscr{F}$, para $n = 1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.
- $A_n \in \mathscr{F}$, para $n = 1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Definición 2.8. Un espacio de probabilidad es un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ donde la medida $\mathbf{P}$ tiene la propiedad de que su masa total es igual a la unidad, es decir:

$$P(\Omega) = 1.$$

Al espacio subyacente Ω a menudo se le denomina el *espacio muestral*, y a los elementos de la σ-álgebra $\mathscr{F}$ se les llama *eventos*.

Definición 2.9. El símbolo $\mathscr{F}_t^X$ denota "la información generada por X en el intervalo $[0,t]$", o alternativamente "lo que le ha ocurrido a X a lo largo del intervalo $[0,t]$".

- Si, basándose en las observaciones de la trayectoria $\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$, es posible decidir si un evento dado A ha ocurrido o no, entonces esto lo escribimos como

  $$A \in \mathscr{F}_t^X,$$

  o decimos que "A es $\mathscr{F}_t^X$-medible".

- Si el valor de una variable aleatoria dada Z puede determinarse por completo dadas las observaciones de la trayectoria $\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$, entonces también escribimos

$$Z \in \mathscr{F}_t^X.$$

- Si Y es un proceso estocástico tal que se cumple que

$$Y_t \in \mathscr{F}_t^X$$

para todo $t \geq 0$, entonces decimos que Y está adaptado a la *filtración* $\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\geq 0}$. Para abreviar la notación, a veces escribiremos la filtración como $\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\geq 0} = \mathbf{F}$.

Una de las herramientas matemáticas más importantes en la teoría moderna de valoración de derivados que asegura su precio justo es la de *martingala*. Aunque está históricamente ligada a los juegos de azar, una martingala formaliza la noción de un "juego justo" donde, en promedio, el jugador no tiene una ventaja ni una desventaja sistemática a lo largo del tiempo.

Definición 2.10. Sea $(M_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a $(\mathscr{F}_t)_t$ con $E(|M_t|) < \infty$ para todo t. Decimos que (M_t) es una *martingala* si, para todo $s \leq t$,

$$E(M_t \mid \mathscr{F}_s) = M_s.$$

Enunciamos como sigue algunas de las principales propiedades de la esperanza condicionada y las martingalas (Williams, 1991).

Proposición 2.11. *Supongamos que X satisface $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ y $\mathscr{H}, \mathscr{G}$ son σ-álgebras de $\mathscr{F}$.*

- *Si $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ a.s. entonces $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.*
- *Si X es $\mathscr{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) = X$, a.s.*
- *(Linealidad) $\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2 \mid \mathscr{G}) = a_1\mathbb{E}(X_1 \mid \mathscr{G}) + a_2\mathbb{E}(X_2 \mid \mathscr{G})$, a.s.*
- *(Positividad) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) \geq 0$, a.s.*
- *(Propiedad de torre) Si $\mathscr{H}$ es una σ-álgebra de $\mathscr{G}$, entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{H}], \quad \text{a.s.}$$

- *(Sacar lo que es conocido) Si Z is $\mathscr{G}$-medible y acotada, entonces*

$$\mathbb{E}[ZX \mid \mathscr{G}] = Z\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}], \quad \text{a.s.}$$

- *(El rol de la independencia) Si $\mathscr{H}$ es independiente de $\sigma(\sigma(X), \mathscr{G})$, entonces*

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(\mathscr{G}, \mathscr{H})] = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}], \quad \text{a.s.}$$

En particular, si X es independiente de $\mathscr{H}$, entonces $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{H}) = \mathbb{E}(X)$, a.s.

- *Si* $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ *entonces* $M_t := \mathbf{E}(X|\mathscr{F}_t)$ *es una martingala.*

El siguiente resultado afirma que, en una filtración generada por un único Browniano, toda martingala puede representarse como integral estocástica. La consecuencia práctica es que cualquier variable aleatoria cuadrado-integrable puede replicarse mediante una estrategia dinámica de inversión, resultado que se usa de forma constructiva en la demostración de la Proposición 3.2 y el Corolario 3.3.

Teorema 2.12 (Representación de martingalas (Revuz & Yor, 2013))**.** *Toda martingala M respecto a la filtración* $(\mathscr{F}_t)_t$ *tiene una versión que puede ser escrita como*

$$M_t = C + \int_0^t H_s dW_s$$

donde C es una constante y H un proceso predecible que está en $\mathscr{L}^2(W)$*. En particular, cualquier martingala respecto a* $(\mathscr{F}_t)_t$ *tiene una versión continua.*

Este proceso H_s es único salvo tal vez en un conjunto de escenarios con probabilidad cero. Para poder escribir las ecuaciones diferenciales estocásticas que gobiernan los modelos de interés, es necesario dar sentido a integrales del tipo $\int_0^t H_s\, dW_s$. La construcción de la integral de Itô parte de procesos simples y se extiende por densidad a la clase de procesos H predecibles que satisfacen $\int_0^T H_s^2\, ds < \infty$ a.s. La propiedad clave de esta integral es la *isometría de Itô*:

$$E\left[\left(\int_0^T H_s\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right],$$

que garantiza que la integral estocástica es una martingala cuadrado integrable. Más aún, para procesos de Itô del tipo

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dW_s,$$

escritos abreviadamente como $dX_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t$, el lema de Itô proporciona la regla de cambio de variable fundamental del cálculo estocástico.

Teorema 2.13 (Lema de Itô unidimensional (Karatzas & Shreve, 2014; Øksendal, 2013))**.** *Sea* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathscr{C}^{1,2}$ *y sea* (X_t) *un proceso de Itô. Entonces el proceso* $Y_t = f(t, X_t)$ *es también un proceso de Itô y satisface*

$$df(t,X_t) = \partial_t f(t,X_t)\, dt + \partial_x f(t,X_t)\, dX_t + \tfrac{1}{2}\, \partial_{xx} f(t,X_t)\, (dX_t)^2,$$

donde se aplica la regla de multiplicación de Itô: $(dt)^2 = dt \cdot dW_t = 0$ *y* $(dW_t)^2 = dt$.

El lema de Itô es una de las herramientas de cálculo que frecuentemente utilizamos en el trabajo, tanto en la caracterización del proceso de densidad L_t (Proposición 3.2), en el cálculo del precio de bonos bajo Vasicek (Lema 3.8), en la ecuación de valoración con volatilidad estocástica (Capítulo 4) como también en la derivación de la función característica del modelo Vasicek–Heston (Lema 5.1).

Definición 2.14. Dos probabilidades $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^*$ son equivalentes si y solo si, para todo evento A, se tiene que $\mathbf{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^*(A) = 0$.

Un resultado crucial en la teoría de valoración de activos es que, bajo la medida de probabilidad real $\mathbf{P}$, los precios descontados de los activos no son en general martingalas. Sin embargo, bajo condiciones adecuadas, es posible cambiar de medida y trabajar bajo una medida equivalente $\mathbf{P}^*$, llamada *medida neutral al riesgo* o *medida martingala equivalente*, bajo la cual sí lo son. El fundamento matemático de este cambio es el teorema de Radon–Nikodym.

Teorema 2.15 (Radon–Nikodym (Williams, 1991))**.** *Sean* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{P}^*$ *dos medidas de probabilidad equivalentes sobre* $(\Omega, \mathscr{F})$*. Entonces existe una variable aleatoria* $L_T > 0$ *a.s. tal que*

$$d\mathbf{P}^*(\omega) = L_T(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) \quad a.s.,$$

con $\mathbf{E}(L_T) = 1$*. La variable* L_T *se llama densidad de Radon–Nikodym de* $\mathbf{P}^*$ *respecto a* $\mathbf{P}$*. Además, el proceso* $L_t := \mathbf{E}(L_T \mid \mathscr{F}_t)$ *es una martingala positiva uniformemente integrable.*

En el Capítulo 3 mostramos, usando el Teorema 2.12, que el proceso de densidad L_t tiene la forma exponencial

$$L_t = \exp\left(\int_0^t q(s)\, dW_s - \tfrac{1}{2} \int_0^t q(s)^2\, ds \right),$$

donde $q(t)$ es la prima de riesgo de mercado. El siguiente teorema hace operativo el cambio de medida transformando el Browniano.

Teorema 2.16 (Girsanov (Björk, 2009; Shreve, 2004))**.** *Sea* W *un proceso Browniano estándar sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}, (\mathscr{F}_t))$ *y sea* (φ_t) *algún proceso adaptado. Escojamos un* T *fijo y definamos el proceso* L *en* $[0,T]$ *por* $dL_t = \varphi_t L_t dW_t$*,* $L_0 = 1$*, esto es*

$$L_t = e^{\int_0^t \varphi_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds}. \tag{2.1}$$

Supongamos que $E^{\mathbf{P}}[L_T] = 1$*, y definamos la nueva medida de probabilidad* Q *en* $\mathscr{F}_T$ *por*

$$L_T = \frac{dQ}{dP}, \quad \text{sobre } \mathscr{F}_T.$$

Entonces

$$dW_t = \varphi_t dt + dW_t^{\mathbf{Q}},$$

donde $W^{\mathbf{Q}}$ *es un proceso Browniano bajo* $\mathbf{Q}$*.*

El teorema de Girsanov permite eliminar el drift de riesgo de las dinámicas de los activos, convirtiendo la tasa de retorno μ en el tipo libre de riesgo r bajo $\mathbf{P}^*$. Esta operación aparece implícitamente en la sección 1.2 para el modelo de Black–Scholes y de forma explícita en las secciones 2.1 y 4.2.1 al derivar la medida neutral al riesgo para bonos cupón cero y al realizar el cambio de numerario en el modelo Vasicek–Heston.

Una técnica muy usada en la valoración de derivados es la del cambio de numerario, que generaliza la idea de trabajar bajo la medida neutral al riesgo. En lugar de descontar por el activo libre de riesgo S_t^0, se puede descontar por cualquier activo estrictamente positivo N_t llamado *numerario*, obteniendo una medida equivalente bajo la cual el precio relativo de cualquier activo es una martingala.

Teorema 2.17 (Cambio de numerario)**.** *Para cualquier elección de numerario $A(t)$ y cualquier $T > 0$ existe una medida de probabilidad $\mathbf{P_A}$ equivalente a $\mathbf{P}^*$ tal que para el precio $V(t)$ de cualquier derivado descontado por $A(t)$ se convierte en martingala bajo $\mathbf{P_A}$ en el intervalo $[0,T]$, esto es,*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P_A}}\left(\frac{V(T)}{A(T)}\middle|\mathscr{F}_t\right) = \frac{V(t)}{A(t)} \quad \textit{para } 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Como consecuencia inmediata, el precio en t de cualquier derivado con pago h en T puede expresarse, para cualquier elección del numerario, como

$$V_t = A(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P_A}}\left(\frac{h}{A(T)}\middle|\mathscr{F}_t\right).$$

Esta fórmula generaliza la valoración neutral al riesgo estándar (que corresponde a $A_t = S_t^0 = e^{\int_0^t r_s\,ds}$) y resulta especialmente útil cuando el payoff del derivado es naturalmente expresable en términos de otro activo. En el Capítulo 5, por ejemplo, elegimos como numerario el bono cupón cero $P(t,T)$ para pasar a la medida forward $\mathbf{Q^T}$, simplificando considerablemente el cálculo del precio de la call en el modelo que consideraremos. El cambio de numerario es también la pieza técnica que, en el modelo de Heston (Capítulo 4), nos permite separar el precio de la call en dos probabilidades P_1 y P_0 análogas a las de la fórmula de Black–Scholes.

2.2. El modelo de Black–Scholes

El modelo de Black–Scholes, publicado en 1973, proporciona una fórmula cerrada como solución a la valoración de opciones europeas cuando las siguientes condiciones se cumplen:

1. El tipo de interés libre de riesgo es constante durante la vida de la opción.
2. El activo subyacente no paga dividendos antes de que la opción venza.
3. La opción es de tipo europea, de manera que no puede ser ejercida antes de la fecha de vencimiento.
4. El precio S_t del activo subyacente sigue un movimiento Browniano geométrico, donde el término determinista y de difusión de dS_t son proporcionales a S_t.
5. No existen costes de transacción, y los activos son infinitamente divisibles.

Bajo estas hipótesis, existen dos aproximaciones para el cálculo del precio de una opción call europea C_t pactada sobre el precio de una acción S_t: El desarrollo original de Black & Scholes (1973), que implica formar una cartera libre de riesgo, obtener una ecuación diferencial parcial (EDP) en $F(S_t,t)$, y por último resolverla numérica o analíticamente. El segundo enfoque usa la teoría de martingalas, donde encontramos una probabilidad "sintética" $\mathbf{P}^*$ bajo la cual $e^{-rt}S_t$ se convierte en una martingala. Entonces podemos obtener el precio de la call usando el hecho de que

$$C_0 = \mathbf{E}^*(e^{-rT}\,\text{máx}(S_T - K, 0)) \tag{2.3}$$

ya sea numérica o analíticamente (Hull, 2022, (15.22)).

En esta sección hacemos una breve revisión del modelo de Black–Scholes bajo el enfoque de martingalas que nos será de utilidad posteriormente para entender cómo se ha extendido este modelo al modificar sus hipótesis y hacerlas más cercanas al comportamiento real del mercado.
La fórmula de Black–Scholes para el precio de un derivado $F(t,S_t)$ se obtiene al resolver analíticamente la EDE (Ecuación Diferencial Estocástica):

$$-rF + F_t + rS_tF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{ss} = 0$$

donde $0 \leq S_t$ y $0 \leq t \leq T$. En particular, para una opción call se tiene la condición de frontera $F(S_T,T) = \text{máx}\{S_T - K, 0\}$. La conocida fórmula de Black–Scholes se puede escribir como

$$F(t,S_t)_{\text{Call}} = C_t = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}), \tag{2.4}$$

con

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Hemos denotado por r al tipo de interés libre de riesgo, T el momento de expiración de la opción call, K el precio de ejercicio, σ la volatilidad y Φ es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

Por la condición 4 tenemos que $dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t$ donde W_t es un proceso Browniano estándar. Esta ecuación tiene una solución cerrada, dada por $S_t = S_0 e^{Y_t}$, donde $Y_t = \mu t + \sigma W_t$. Es claro que Y_t sigue una distribución normal bajo la medida de probabilidad real $\mathbf{P}$. Sin embargo, queremos mostrar que bajo la medida equivalente $\mathbf{P}^*$ definida por

$$Y_t \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t,\ \sigma^2 t\right),$$

$(e^{-rt}S_t)$ es una martingala. Para esto, en primer lugar tenemos que la función generadora de momentos de la variable aleatoria normal Y_t bajo $\mathbf{P}$ es $M(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda Y_t}) = e^{\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\lambda^2}$. En particular, con $\lambda = 1$, $\mathbf{E}(e^{Y_t}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}$. Aplicando esto a la medida neutral al riesgo para la variable $\Delta Y_t = Y_t - Y_u$ se sigue que $\mathbf{E}^*(e^{\Delta Y_t}) = e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-u) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-u)} = e^{r(t-u)}$. Como los incrementos en un movimiento Browniano son independientes, entonces $\mathbf{E}^*(e^{\Delta Y_t}) = \mathbf{E}^*(e^{\Delta Y_t}|S_u) \Longrightarrow \mathbf{E}^*(e^{\Delta Y_t}|S_u) = e^{r(t-u)} \Longrightarrow \mathbf{E}^*(e^{-r(t-u)}S_0 e^{Y_t}|S_u) = S_0 e^{Y_u} \Longrightarrow \mathbf{E}^*(e^{-rt}S_t|S_u) = e^{-ru}S_u$. Por tanto, es bajo esta medida de probabilidad que podemos evaluar el precio de la call con la expresión (2.3), que también puede expresarse como

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\,\text{máx}(S_T - K, 0)d\mathbf{P}^*. \tag{2.5}$$

Ahora, por definición tenemos que $d\mathbf{P}^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2}dY_T$. De lo anterior,

al sustituir en (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\,\text{máx}(S_0 e^{Y_T} - K, 0)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(Y_T - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2} dY_T \\ &= \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} e^{-rT}(S_0 e^{Y_T} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(Y_T - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2} dY_T, \end{aligned}$$

debido a que $\text{máx}(S_T - K, 0) = 0$ se cumple cuando $Y_T < \ln(K/S_0)$. La anterior integral se puede separar en dos partes de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} C_0 =& S_0 \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} e^{-rT} e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(Y_T - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2} dY_T \\ &- K e^{-rT} \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(Y_T - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2} dY_T. \end{aligned}$$

Luego, cada una de estas integrales es evaluada tomando el cambio de variable

$$Z = \frac{Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

de donde se obtiene (2.4).

El modelo de Black–Scholes no solamente permitió dar una base sólida y objetiva para valorar opciones europeas, sino que también sentó las bases para desarrollar técnicas de arbitraje para la cobertura de opciones utilizando carteras replicantes.

2.2.1. Las griegas

La replicación nos da una forma de proteger una posición corta de una opción construyendo una estrategia que nos garantiza el dinero que vamos a necesitar para cumplir con la obligación. Esta operación de asegurar una posición en contra del riesgo es llamada *cobertura*. Para garantizar que la posición de nuestra cartera sea una cobertura es necesario ajustarla continuamente según sea el movimiento del mercado. Por esto, consideramos el comportamiento del valor de la opción, o de forma equivalente el proceso de la cartera que replica, a través de los parámetros presentes en la fórmula de Black–Scholes (Capiński & Kopp, 2012). La sensibilidad del precio de una opción (o de una cartera replicante de esta) respecto a los diferentes factores de la fórmula es medida por lo que en finanzas se conocen como *las griegas*.

Para empezar, tomamos una cartera (x, y, z) con las posiciones del activo subyacente S, del activo libre de riesgo A y del derivado C, respectivamente. Escribimos entonces el valor de esta cartera como $V = xS + yA + zC$. Para estudiar la sensibilidad de los parámetros en la ecuación de Black Scholes tomaremos cada uno por separado, asumiendo que todos los demás permanecen invariantes. En primer lugar consideramos el activo subyacente y definimos para un t fijo $V_{(x,y,z)}(t) = V(S)$. La sensibilidad del valor de la cartera al activo

subyacente medida por la derivada, y también llamada la "Delta" de la cartera, es

$$\Delta_V = \frac{\partial V}{\partial S},$$

de manera que si $\Delta_V = 0$, entonces $V(S+\varepsilon) \approx V(S)$, por lo que en un sentido informal, el valor de la cartera permanece constante ante cambios muy pequeños del activo subyacente, cubriéndola así ante variaciones del activo. Para el caso de una copción call puede mostrarse que $\Delta_C = \Phi(d_1)$. Esta letra Delta puede además ser ilustrada por la pendiente de la curva AB sobre la superficie graficada en la figura 2.1 que en seguida comentamos.

A través de la solución (2.4) de la ecuación de Black–Scholes, graficamos el precio de opción call en función de los parámetros S y t, fijando los parámetros $r = 0,7$, $K = 100$, $\sigma = 0,4$, y $T = 1$. Estos corresponden a un escenario del mercado con un tipo de interés libre de riesgo del 7 % y una volatilidad del 40 % en un intervalo $t \in [0,1]$. El plazo de la opción call es 1, una unidad de tiempo que bien puede representar un año, seis meses, o algún otro intervalo de tiempo; y el precio de ejercicio son 100 unidades monetarias. La curva AB sobre la gráfica representa el valor de la opción para diferentes precios del activo subyacente en el intervalo $[80,120]$ fijando $t = 0,45$, y su derivada corresponde a letra Delta de la opción para los diferentes valores de $S_{0,45}$. Si desplazamos la curva AB hacia valores de t cercanos al vencimiento, observamos que esta tiende a la curva $t = 1$ que está en el contorno de la gráfica, y corresponde al *payoff* de la opción.

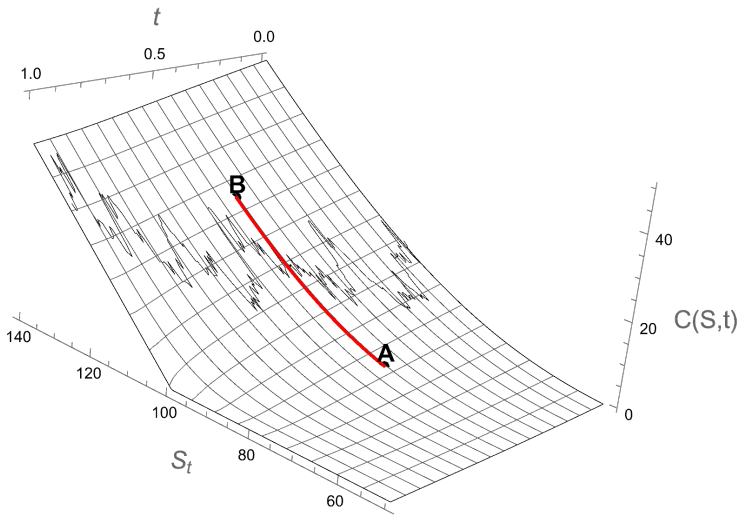


Figura 2.1. Superficie del precio de una opción call europea bajo el modelo de Black–Scholes.
Fuente: Elaboración propia.

Así mismo, podemos considerar las sensibilidades de las otras variables en la fórmula de Black–Scholes. Para una cartera más general que depende de los factores que describen la dinámica de los activos y el vencimiento de las opciones, $V = V(T,r,S,\sigma)$ se definen las

principales griegas[1] como

$$\Delta_V = \frac{\partial V}{\partial S}, \qquad \Gamma_V = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \qquad \Theta_V = \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad \mathscr{V}_V = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \qquad P_V = \frac{\partial V}{\partial r},$$

llamadas respectivamente Delta, Gamma, Theta, Vega y Rho. Delta mide la sensibilidad del valor de la cartera ante cambios en el activo subyacente; Theta es el deterioro temporal de la opción, la rapidez con que el precio de la opción cambia (y cae) a lo largo del tiempo dejando todos lo demás parámetros fijos. Esta griega es siempre negativa, como lo ilustra la figura (2.3) donde las curvas con S_t fijo son descendentes conforme el momento t se acerca al plazo de la opción. La letra Vega mide la sensibilidad del precio de la opción ante cambios de la volatilidad implícita del activo subyacente, enfocándose en la incertidumbre del mercado; y Rho mide la sensibilidad a los cambios de los tipos de interés. El enfoque de EDP's para el desarrollo de la fórmula de Black Scholes utiliza una cobertura Delta con la que se elimina el riesgo proveniente de los cambios en el activo subyacente, ajustando la posición en función de estos cambios[2].

Las griegas son de especial utilidad no solo en la cobertura de opciones mediante la construcción de carteras replicantes, sino también en la valoración de modelos más complejos[3]. Pero por otra parte, las griegas también permiten ver las limitaciones reales que derivan de las hipótesis del modelo de Black–Scholes al compararlas con la dinámica real del mercado.
En realidad, ninguno de los cinco supuestos que hemos visto al inicio de esta sección se cumplen en la práctica, y por esto enfocaremos nuestro estudio principalmente en remover la hipótesis de tipos de interés y volatilidad constantes. Por ejemplo, la necesidad de cubrirse respecto del riesgo de Vega ($\mathscr{V} = S\sqrt{T}\Phi(d_1)$) contradice el supuesto de una volatilidad constante. La razón por la que debemos medir la sensibilidad del precio de una opción a la volatilidad, es porque esta cambia a lo largo del tiempo. Los operadores continuamente deben ajustar su exposición a Vega, reconociendo así que la volatilidad no es un parámetro fijo, sino un proceso estocástico. Uno de los autores de este modelo ha señalado esta debilidad al decir: "Supongamos que utilizamos la desviación estándar de los posibles rendimientos futuros de una acción como medida de su volatilidad. ¿Es razonable considerar esa volatilidad como una constante a lo largo del tiempo? Yo creo que no" (Black, 1976). Así mismo, dado que tenemos la necesidad de gestionar el riesgo del mercado de los tipos de interés midiendo la sensibilidad de la opción a estos por medio de Rho, debemos admitir que los tipos de interés deben ser una variable estocástica.

---

[1] En la literatura pueden encontrarse otras griegas que miden la sensibilidad de las mismas griegas, tomando derivadas parciales de mayores órdenes.

[2] Para una descripción más detallada de las griegas vea Wilmott (2013, cap. 7)

[3] En el Capítulo 4 utilizaremos una cobertura Delta y Vega para la resolución de un modelo de volatilidad estocástica.

Capítulo 3

Tipos de interés estocásticos

> ¿Por qué, pues, no pusiste mi dinero en el banco, para que al volver yo, lo hubiera recibido con los intereses?
>
> — Lc. 19:23

Hemos supuesto anteriormente que los tipos de interés son constantes a lo largo del tiempo. Sin embargo, la realidad apunta en una dirección más compleja, dado que los tipos de interés dependen tanto del momento de emisión de un préstamo como del plazo a su vencimiento. Si denotamos por $F(t,T)$ el monto a pagar por el préstamo de una unidad monetaria adquirida en t hasta un plazo T, el tipo de interés medio $R(t,T)$ resultante de la operación está dado por $F(t,T) = e^{(T-t)R(t,T)}$. Esto expresa el principio del valor del dinero en el tiempo, según el cual una unidad monetaria recibida en el futuro tiene un valor inferior al de esa misma unidad en el presente.

Si consideramos que F es conocida en el intervalo $[t,s]$, bajo ausencia de arbitraje debe cumplirse que $F(t,s) = F(t,u)F(u,s)$ para toda $u \in (t,s)$ [1]. De esto, y teniendo en cuenta que $F(t,t) = 1$ (pues no existe devengo de intereses en un lapso nulo) se sigue que si $F_s(t,s)$ (la derivada parcial de F en s) existe entonces hay una función $r(t)$ que satisface

$$F(t,T) = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right) \forall t < T,$$

y por tanto

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds.$$

Esta función $r(t)$ se interpreta como el tipo de interés libre de riesgo instantáneo, y en la práctica es entendido como el rendimiento de un préstamo en un intervalo "corto" de tiempo $[t,dt]$ (como puede ser un día). Generalmente, $F(u,T)$ no es conocida cuando $t < u < T$ y t es el momento presente, por lo que $r(s)$ debe ser modelado como un proceso estocástico. En la sección 3.3 veremos cómo influye el modelo de $r(s)$ sobre $R(t,T)$ y la relación que resulta de estos.

---

[1] De (McInerney & Zastawniak, 2015, Proposición 1.3) es inmediato tomando en cuenta que $F(t,T) = P(t,T)^{-1}$, donde $P(t,T)$ es definida en 3.1.

3.1. La curva de tipos de interés

Antes de abordar la valoración de opciones, es necesario tener los instrumentos básicos que permiten descontar flujos futuros tomando en cuenta los tipos de interés. En un mercado sin arbitraje, la ley del precio único implica que para conocer el valor presente de cualquier pago futuro debe poder expresarse en términos de activos negociados. En particular, instrumentos que fijen el valor hoy de un pago cierto en una fecha futura. Para tal efecto, el bono cupón cero es el estándar en el mercado.

Definición 3.1. Un *bono cupón cero* (bono de descuento puro) con vencimiento en T es un contrato que garantiza a su poseedor el pago de una unidad monetaria en el momento T, sin pagos intermedios. El valor del contrato en el momento $t < T$ se denota por $P(t,T)$. Claramente, $P(T,T) = 1$ para toda T.

Si $r(s)$ es conocida en $[t,T]$,

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}. \tag{3.1}$$

Ya que los precios de los bonos cupón cero son las magnitudes básicas en la teoría de tipos de interés (Brigo & Mercurio, 2006), veremos cómo valorarlos en función de los tipos y posteriormente, utilizarlos como activos subyacentes en la valoración y cobertura de opciones europeas. Aquí precisaremos de cierta formalidad.

Consideramos en primer lugar un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}, (\mathscr{F}_t)_{0\leq t\leq T})$ donde $(\mathscr{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es la filtración aumentada de un movimiento Browniano estándar $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ (Karatzas & Shreve, 2014, Definición 7.2) y $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$.

En el capítulo anterior, con el Modelo de Black-Scholes hemos visto una medida de probabilidad que convierte el precio descontado del activo en una martingala. De forma más general, bajo condiciones adecuadas, es posible garantizar la existencia de una medida de probabilidad con la anterior propiedad para el modelo de mercado que se esté considerando. En adelante, supondremos estar en un mercado sin arbitraje. Entonces, según el Teorema fundamental de valoración de activos (Björk, 2009, Teorema 11.24) existe una medida de probabilidad $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ bajo la cual, para todo real $u \in [0,T]$, el proceso $(\tilde{P}(t,u))_{0\leq t\leq u}$ definido por

$$\tilde{P}(t,u) = e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,u)$$

es una martingala. Por tanto, esto conlleva a que

$$\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^u r(s)ds}\middle|\mathscr{F}_t\right) = \mathbf{E}^*\left(\tilde{P}(u,u)\middle|\mathscr{F}_t\right) = \tilde{P}(t,u),$$

y quitando el descuento del precio

$$P(t,u) = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^u r(s)ds}\middle|\mathscr{F}_t\right). \tag{3.2}$$

A diferencia de la igualdad (3.1), donde se asume un tipo de interés instantáneo que es siempre conocido, esta fórmula muestra que en un modelo donde $r(s)$ es estocástico, $P(t,u)$ es la media de todos los posibles factores de descuento futuros bajo la medida neutral al riesgo.

Antes de especificar una expresión que permita dar el precio a un bono cupón cero bajo la medida $\mathbf{P}$, debemos entender mejor la dinámica del proceso que relaciona ambas medidas de probabilidad. Dado que ambas medidas son equivalentes, por el teorema 2.15 (Radon-Nikodym) existe una variable aleatoria no negativa L_T sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ de forma que para toda $\omega \in \Omega$, $d\mathbf{P}^*(\omega) = L_T(\omega)d\mathbf{P}(\omega)$ *a.s.* Llamamos a L_T la densidad de la probabilidad $\mathbf{P}^*$ con respecto a $\mathbf{P}$. Así, para toda variable aleatoria X no negativa,

$$\mathbf{E}^*(X) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbf{P}^*(\omega) = \int_\Omega X(\omega)L_T(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{E}(XL_T),$$

y si X es F_t-medible, entonces $\mathbf{E}^*(X) = \mathbf{E}(XL_T) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(XL_T|\mathscr{F}_t\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\mathbf{E}\left(L_T|\mathscr{F}_t\right)\right) = \mathbf{E}(XL_t)$, donde $L_t := \mathbf{E}\left(L_T|\mathscr{F}_t\right)$. Esto es, L_t es la densidad de $\mathbf{P}^*$ restringida a $\mathscr{F}_t$ con respecto a $\mathbf{P}$.

La siguiente proposición permite caracterizar a L_t mediante una exponencial estocástica.

Proposición 3.2. *Existe un proceso adaptado $(q(t))_{0\le t\le T}$ tal que para toda $t \in [0,T]$,*

$$L_t = \exp\left(\int_o^t q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_o^t q(s)^2 ds\right) \quad a.s.$$

Demostración. Se tiene para $u < s < T$ que $\mathbf{E}(L_s|\mathscr{F}_u) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_s)|\mathscr{F}_u) = \mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_u) = L_u$. También, como $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^*$ son equivalentes $\mathbf{P}(L_T > 0) = 1$, de forma que $\mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_t) = L_t > 0$ *a.s.* para cualquier t. Así, $\mathbf{E}(|L_t|) = \mathbf{E}(L_t) = \int_\Omega L_t d\mathbf{P} = \int_\Omega d\mathbf{P}^* = 1$, y en particular $\mathbf{E}(L_T) = 1$. De esto, el proceso $(L_t)_{0\le t\le T}$ es una martingala relativa a $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le T}$, que es la filtración aumentada del proceso Browniano $(W_t)_{0\le t\le T}$. Por el Teorema de representación de martingalas existe un proceso adaptado $(H_t)_{0\le t\le T}$ que satisface $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ *a.s.* y para toda $t \in [0,T]$

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad a.s. \tag{3.3}$$

donde $L_0 = 1$ por lo anterior. Ahora, aplicaremos la fórmula de Itô al logaritmo de L_t, y para mostrar que $\ln(L_t)$ está bien definida comprobamos antes que $\mathbf{P}(\forall t \in [0,T],\ L_t > 0) = 1$.
Suponga por contradicción que $\mathbf{P}(\exists t \in [0,T],\ L_t = 0) > 0$, es decir, $\mathbf{P}(\{t \in [0,T] : L_t = 0\} \neq \emptyset) > 0$. Sea $\tau = \text{ínf}\{t \in [0,T] : L_t = 0\}$, entonces por el Teorema de Muestreo Opcional (Björk, 2009, Teorema C.18) $L_\tau = \mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_\tau)$. Pero $L_\tau = 0$ [2], y sustituyendo, $0 = \mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_\tau)$, lo que es imposible, porque $\mathbf{P}(L_t > 0) = 1$ para toda t como ya hemos dicho.
Por el lema de Itô se tiene que

$$\ln(L_t) = \int_0^T \frac{1}{L_s} H_s ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{L_s^2} H_s^2 ds \quad a.s.$$

Y tomando $q(t) = H_t/L_t$ se concluye la prueba.

□

Note que la medida $\mathbf{P}^*$ determina de forma unívoca el proceso (H_t), por el Teorema de

[2] Para una trayectoria de $(L_t)_{0\le t\le T}$ continua, el conjunto $\{t \in [0,T] : L_t = 0\}$ es la preimagen de $\{0\}$, de manera que $\{t \in [0,T] : L_t = 0\}$ es cerrado y $\tau \in \{t \in [0,T] : L_t = 0\}$.

representación de martingalas, y el proceso (L_t) dado que es la densidad de Radon-Nikodym; y por consiguiente, un único proceso $q(t)$. Así mismo, el proceso $q(t)$ por la proposición anterior determina de forma única el proceso L_t y por tanto una única medida $\mathbf{P}^*$. O sea, la unicidad de $\mathbf{P}^*$ es equivalente a la unicidad $q(t)$.

Corolario 3.3. *El precio en el momento t de un bono cupón cero con vencimiento $u \geq t$ se puede expresar como*

$$P(t,u) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\int_t^u r(s)ds + \int_t^u q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^u q(s)^2 ds\right)\middle|\mathscr{F}_t\right) \tag{3.4}$$

Demostración. Por la fórmula de Bayes abstracta (Björk, 2009, Proposición B.41) se tiene que para una variable aleatoria X con esperanza finita,

$$\mathbf{E}^*(X|\mathscr{F}_t) = \frac{\mathbf{E}(L_T X|\mathscr{F}_t)}{\mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_t)} = \frac{\mathbf{E}(L_T X|\mathscr{F}_t)}{L_t}.$$

Además, si X es $\mathscr{F}_u$-medible para $t \leq u \leq T$ entonces

$$\frac{\mathbf{E}(L_T X|\mathscr{F}_t)}{L_t} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{E}(L_T X|\mathscr{F}_u)|\mathscr{F}_t)}{L_t} = \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{E}(L_T|\mathscr{F}_u)|\mathscr{F}_t)}{L_t} = \frac{\mathbf{E}(XL_u|\mathscr{F}_t)}{L_t}.$$

De esta manera, según la ecuación 3.2 y tomando $X = e^{-\int_t^u r(s)ds}$ se obtiene

$$\begin{aligned} P(t,u) &= \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^u r(s)ds}\middle|\mathscr{F}_t\right) = \frac{\mathbf{E}\left(L_u e^{-\int_t^u r(s)ds}\middle|\mathscr{F}_t\right)}{L_t} = \mathbf{E}\left(\frac{L_u}{L_t}e^{-\int_t^u r(s)ds}\middle|\mathscr{F}_t\right) \\ &= \mathbf{E}\left(e^{-\int_t^u r(s)ds + \int_t^u q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^u q(s)^2 ds}\middle|\mathscr{F}_t\right). \end{aligned}$$

□

El proceso $(q(t))$ del corolario anterior puede ser interpretado como una prima de riesgo sobre el rendimiento instantáneo en t del precio del bono. Para ver esto, la siguiente proposición muestra esta relación con una ecuación diferencial estocástica.

Proposición 3.4. *Para cada momento de vencimiento u, existe un proceso adaptado $(\sigma_t^u)_{0\leq t\leq u}$ tal que en $[0,u]$,*

$$\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t))dt + \sigma_t^u dW_t. \tag{3.5}$$

Demostración. Dado que el proceso $(\tilde{P}(t,u))_{0\leq t\leq u}$ es una martingala bajo $\mathbf{P}^*$, $(\tilde{P}(t,u)L_t)_{0\leq t\leq u}$ es una martingala bajo $\mathbf{P}$, pues si $t_1 < t_2$, entonces $\mathbf{E}\left(\tilde{P}(t_2,u)L_{t_2}\middle|\mathscr{F}_{t_1}\right) = \mathbf{E}\left(\tilde{P}(t_2,u)\mathbf{E}\left(L_u|\mathscr{F}_{t_2}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_1}\right) = \mathbf{E}\left(\tilde{P}(t_2,u)L_u\middle|\mathscr{F}_{t_1}\right) = L_{t_1}\mathbf{E}^*\left(\tilde{P}(t_2,u)\middle|\mathscr{F}_{t_1}\right) = L_{t_1}\tilde{P}(t_1,u)$. De esto, y siguiendo el mismo proceso de la proposición anterior, existe un proceso adaptado $(I_t^u)_{0\leq t\leq u}$ tal que $\int_0^u (I_s^u)^2 ds < \infty$ y

$$\tilde{P}(t,u)L_t = \tilde{P}(0,u) + \int_o^t I_s^u dW_s.$$

Así, aplicando el lema de Itô,

$$\begin{aligned} d\left(\ln\left(\tilde{P}(s,u)L_s\right)\right) &= \frac{1}{\tilde{P}(s,u)L_s} I_s^u dW_s - \frac{1}{2\tilde{P}(s,u)^2 L_s^2}(I_s^u)^2 ds \\ \ln\left(\tilde{P}(t,u)L_t\right) &= \ln\left(\tilde{P}(0,u)\right) + \int_0^t \frac{1}{P(s,u)L_s} I_s^u dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{P(s,u)^2 L_s^2}(I_s^u)^2 ds \\ \tilde{P}(t,u)L_t &= \tilde{P}(0,u)\exp\left(\int_0^t \frac{I_s^u}{P(s,u)L_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(I_s^u)^2}{P(s,u)^2 L_s^2} ds\right). \end{aligned}$$

Si $\theta_s^u = \frac{I_s^u}{P(s,u)L_s}$, entonces se tiene que

$$\tilde{P}(t,u)L_t = \tilde{P}(0,u)\exp\left(\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\theta_s^u)^2 ds\right).$$

De esta forma, sustituyendo L_t de la proposición 3.2 y dividiendo por el factor de descuento, la anterior igualdad se convierte en

$$P(t,u) = P(0,u)\exp\left(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t (\theta_s^u - q(s))dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left((\theta_s^u)^2 - q(s)^2\right) ds\right),$$

de donde, aplicando nuevamente el lema de Itô,

$$dP(t,u) = P(t,u)\left(r(t) - \frac{1}{2}\left((\theta_t^u)^2 - q(t)^2\right)\right)dt + P(t,u)\left(\theta_t^u - q(t)\right)dW_t + \frac{1}{2}P(t,u)\left(\theta_t^u - q(t)\right)^2 dt$$

y simplificando,

$$\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} = \left(r(t) - \theta_t^u q(t) + q(t)^2\right)dt + \left(\theta_t^u - q(t)\right)dW_t.$$

Al definir $\sigma_t^u = \theta_t^u - q(t)$, se obtiene la igualdad 3.5.

□

De esta proposición podemos notar en primer lugar que, a diferencia de la dinámica del activo libre de riesgo dado por $dS_t^0 = r(t)S_t^0 dt$, el rendimiento instantáneo del bono cupón cero tiene un componente adicional de riesgo, con una desviación dada por σ_t^u que acompaña al término dW_t. Además, el término determinista $r(t) - \sigma_t^u q(t)$ puede verse como la media de este rendimiento en el momento t al tomar la esperanza en la igualdad, y por consiguiente $\sigma_t^u q(t)$ como la diferencia entre el tipo de interés libre de riesgo y el rendimiento medio del bono. Esto es, $q(t)$ funciona como una prima de riesgo. Aún más, por el teorema de Girsanov el proceso $(\tilde{W}_t)$ definido por $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t q(s)ds$ es un movimiento Browniano estándar bajo la medida de probabilidad $\mathbf{P}^*$, y sustituyendo en la igualdad 3.5 resulta en

$$\frac{dP(t,u)}{P(t,u)} = r(t)dt + \sigma_t^u d\tilde{W}_t. \tag{3.6}$$

Note que el proceso $q(s)$ asociado a una prima de riesgo ya no está presente en esta expresión, sino que el rendimiento medio bajo $\mathbf{P}^*$ en t es exactamente $r(t)$, al igual que ocurre con el

activo libre de riesgo S_t^0.

3.2. Valoración de opciones

En esta sección tenemos por objetivo presentar la fórmula general de valoración neutral al riesgo para opciones que hemos ya usado antes por construcción bajo el modelo de Black-Scholes, pero previo a esto hacemos una breve aclaración sobre los tipos de opciones que vamos a considerar.
Recuerde que iniciamos la sección anterior utilizando un espacio de probabilidad con una sola fuente de incertidumbre (el movimiento Browniano) asociada al riesgo de la tasa corta de interés. Para que el activo subyacente que consideremos valga para este mismo espacio de probabilidad debe ser tal que su valor dependa únicamente de la información generada por los tipos de interés a través de su movimiento Browniano, es decir, que sea adaptado a la misma filtración definida por $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ [3] [4]. Por esto, valoramos opciones solo sobre activos de forma tal que su precio esté determinado por el movimiento de las tasas de interés, por ejemplo los bonos cupón cero como hemos visto previamente.

En consecuencia, para cubrir las opciones usamos una cartera autofinanciada de activos libres de riesgo y bonos cupón cero con vencimiento en T. Definimos una estrategia como un proceso adaptado de la forma $((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$. H_0^t representa la cantidad de activos libres de riesgo, H_t representa el número de bonos en el momento t con vencimiento en T en la cartera y ambos toman valores en $\mathbb{R}$. Así, el valor de la cartera en el tiempo t se escribe como

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T) = H_t^0 e^{\int_0^t r(s)ds} + H_t P(t,T)$$

y por la condición de ser autofinanciada se tiene que

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dP(t,T).$$

Definición 3.5. Una estrategia $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$ se llama *admisible* si es autofinanciada y el valor descontado $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{P}(t,T)$ de la cartera correspondiente es no negativo para toda t y si $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ es cuadrado integrable bajo $\mathbf{P}^*$.

La siguiente proposición muestra de qué forma es posible cubrir las opciones europeas con vencimiento en $\theta < T$ bajo ciertas condiciones. Aquí imponemos que $\int_o^T |H_t^0 r(t)|dt < \infty$ y tomando σ_t^u de la proposición 3.4, que $\int_0^T (H_t \sigma_t^u)^2 dt < \infty$ *a.s.*

Proposición 3.6. *Supongamos que $(r(t))$ está acotado uniformemente en $[0,T]$ a.s. y $\sigma_t^T \neq 0$ a.s. para toda $t \in [0,\theta]$. Sea $\theta < T$ y sea h una variable aleatoria $\mathscr{F}_\theta$-medible tal que $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$ es cuadrado integrable bajo $\mathbf{P}^*$. Entonces existe una estrategia admisible que cumple que su valor en el momento θ es igual a h. El valor en $t \leq \theta$ de esta estrategia está dado por*

$$V_t = \mathbf{E}^* \left(e^{-\int_t^\theta r(s)ds} h \middle| \mathscr{F}_t \right).$$

---

[3] En realidad, para opciones europeas basta con que el activo sea $\mathscr{F}_\theta$-medible donde θ es el momento de vencimiento.

[4] En el capítulo siguiente introducimos una combinación de dos fuentes de riesgo para un mismo modelo de valoración.

Por tanto, el valor de la opción en el momento t debe naturalmente ser definido por la expresión $\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^\theta r(s)ds}h\middle|\mathscr{F}_t\right)$ *(Björk, 2009, Principio de valoración 1).*

Demostración. Definimos $X = e^{-\int_0^\theta r(s)ds}h$ y (M_t) por $M_t = \mathbf{E}^*(X|\mathscr{F}_t) = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds}h\middle|\mathscr{F}_t\right)$. Entonces, por la desigualdad de Jensen para esperanzas condicionadas, $M_t^2 = (\mathbf{E}^*(X|\mathscr{F}_t))^2 \leq \mathbf{E}^*\left(X^2\middle|\mathscr{F}_t\right) \Longrightarrow \mathbf{E}^*\left(M_t^2\right) \leq \mathbf{E}^*\left(\mathbf{E}^*\left(X^2\middle|\mathscr{F}_t\right)\right) = \mathbf{E}^*\left(X^2\right)$, y ya que X es cuadrado integrable por hipótesis, M_t también lo es. Por tanto, M_t es martingala bajo $\mathbf{P}^*$. Por otro lado, siguiendo el mismo razonamiento de la proposición 3.4, de lo anterior se tiene que (L_tM_t) es martingala bajo $\mathbf{P}$, de donde, aplicando el teorema de representación, existe un proceso predecible (K_t) de forma que

$$L_tM_t = M_0L_0 + \int_0^t K_s dW_s.$$

Por el lema de Itô para el cociente, se tiene que

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{L_tM_t}{L_t}\right) &= \frac{1}{L_t}d\left(L_tM_t\right) - \frac{L_tM_t}{L_t^2}dL_t - \frac{1}{L_t^2}d\left(L_tM_t\right)d(L_t) + \frac{L_tM_t}{L_t^3}(dL_t)^2 \\
&= \frac{K_t}{L_t}dW_t - \frac{M_t}{L_tH_t'}dW_t - \frac{1}{L_t^2}K_tH_t'(dW_t)^2 + \frac{M_t}{L_t^2}H_t'^2dt \\
&= \left(\frac{M_tH_t'^2}{L_t^2} - \frac{K_tH_t'}{L_t^2}\right)dt + \left(\frac{K_t - M_tH_t'}{L_t}\right)dW_t \\
&= \left(\frac{K_t - M_tH_t'}{L_t}\right)\frac{-H_t'}{L_t}dt + \left(\frac{K_t - M_tH_t'}{L_t}\right)dW_t
\end{aligned}$$

tomando en cuenta que $d(L_tM_t) = K_tdW_t$ y $dL_t = H_t'dW_t$ de 3.3. De esta manera, definiendo $J_t = \left(\frac{K_t - M_tH_t'}{L_t}\right)$ se sigue que

$$d(M_t) = d\left(\frac{L_tM_t}{L_t}\right) = J_t\left(\frac{-H_t'}{L_t}\right)dt + J_tdW_t = J_t\left(dW_t - q(t)dt\right)$$

y por la definición de $(\tilde{W})$ usada en la igualdad 3.6, $dM_t = J_td\tilde{W}_t$. Por lo tanto, tomando la integral de la expresión anterior podemos expresar M_t como

$$M_t = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta r(s)ds}h\right) + \int_0^\theta J_s d\tilde{W}_s.$$

Sean $H_t = \frac{J_t}{\tilde{P}(t,T)\sigma_t^T}$ y $H_t^0 = \mathbf{E}^*\left(he^{-\int_0^\theta r(s)ds}\middle|\mathscr{F}_t\right) - \frac{J_t}{\sigma_t^T}$ con $0 \leq t \leq \theta$. Para verificar que esta estrategia es como indicamos en el enunciado, note en primer lugar que $V_\theta = h - \frac{J_\theta}{\sigma_\theta^T}e^{\int_0^\theta r(s)ds} + \frac{J_\theta}{\sigma_\theta^T}e^{\int_0^\theta r(s)ds} = h$. Claramente, como $M_t \geq 0$ para toda t, $\tilde{V}_t \geq 0$, dado que $\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t\tilde{P}(t,T) = M_t - \frac{J_t}{\sigma_t^T} + \frac{J_t}{\tilde{P}(t,T)\sigma_t^T}\tilde{P}(t,T) = M_t$. También, por la desigualdad maximal

de Doob, y como M_t es martingala cuadrado integrable bajo $\mathbf{P}^*$, tenemos

$$\mathbf{E}^*\left(\sup_{0\leq t\leq\theta}\tilde{V}_t^2\right)=\mathbf{E}^*\left(\sup_{0\leq t\leq\theta}M_t^2\right)\leq 4\mathbf{E}^*\left(M_\theta^2\right)<\infty.$$

Por último, observe que

$$V_t=M_te^{\int_0^t r(s)ds}=M_tS_t^0, \tag{3.7}$$

y tomando el diferencial,

$$\begin{aligned}dV_t&=M_tdS_t^0+S_t^0dM_t=M_tdS_t^0+S_t^0J_td\tilde{W}=M_tdS_t^0+S_t^0J_td\tilde{W}+\frac{J_t}{\sigma_t^T}dS_t^0-\frac{J_t}{\sigma_t^T}dS_t^0\\&=\left(M_t-\frac{J_t}{\sigma_t^T}\right)dS_t^0+\frac{J_tS_t^0}{\sigma_t^T}\left(r(t)dt+\sigma_t^Td\tilde{W}_t\right).\end{aligned}$$

Pero $r(t)dt+\sigma_t^Td\tilde{W}_t=\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}$ por la igualdad 3.6. Así,

$$dV_t=\left(M_t-\frac{J_t}{\sigma_t^T}\right)dS_t^0+\frac{J_t}{\tilde{P}(t,T)\sigma_t^T}dP(t,T)=H_t^0dS_t^0+H_tdP(t,T),$$

y en consecuencia, $((H_t^0,H_t))_{0\leq t\leq T}$ es admisible.

Finalmente, la forma de V_t bajo la esperanza condicional ya la hemos usado, y se obtiene directamente de (3.7). □

Pregunta 3.7. El modelo de mercado sobre el que hemos trabajado nos ha llevado a observar una medida de probabilidad libre de riesgo bajo la cual el precio descontado de los bonos es una martingala en ausencia de arbitraje. Sin embargo, una pregunta que naturalmente surge viene dada por la unicidad de esta medida. En otras palabras, ¿el mercado que hemos considerado es completo?

Artzner & Delbaen (1989, Proposición 3, Teorema 2) afirman que si el coeficiente de volatilidad σ_t^T (3.6) del bono es distinto de cero en casi todas partes, los procesos $(r(t))_{0\leq t\leq T}$ y $P(t,T)$ definen de forma única a $(q(t))_{0\leq t\leq T}$, y por tanto la medida $\mathbf{P}^*$ también es única. Por esta razón hemos supuesto que $\sigma_t^T\neq 0$ *a.s* para toda $t\in[0,\theta]$ en la proposición 3.6.

3.3. Dinámica del tipo instantáneo: El modelo de Vasicek

Para poder calcular el precio de bonos, observamos que es necesario conocer ya sea la dinámica de $r(t)$ bajo $\mathbf{P}^*$ (3.2) o la dinámica de $r(t)$ y $q(t)$ bajo $\mathbf{P}$ (3.4). Esto nos conduce al estudio de modelos estocásticos con los que pueda ser caracterizada de forma explícita la evolución de $r(t)$. Los primeros modelos de tipos de interés instantáneo que han sido desarrollados asumen homogeneidad en el tiempo, es decir, dependen solo de coeficientes constantes, y además tienen una alta capacidad analítica para la valoración de bonos y opciones sobre bonos. Entre ellos, el modelo propuesto por Oldřich Vašíček fue el primero en capturar la reversión a la media, una característica importante de los procesos de tipos

de interés que los delimita a moverse en un rango de valores específicos, en contraste con la dinámica seguida por los precios de acciones. Este modelo asume que el tipo de interés instantáneo sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con coeficientes constantes. Esto es, el proceso $r(t)$ satisface

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t$$

donde $a, b, \sigma \geq 0$. Si $q(t) = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces por definición de $\tilde{W}$ podemos escribir este proceso como $\tilde{W} = W_t + \lambda t$. Luego, sustituyendo en el proceso anterior se obtiene

$$dr(t) = a(b^* - r(t))dt + \sigma d\tilde{W}_t \tag{3.8}$$

con $b^* = b - \lambda\sigma/a$. Tomando $d(e^{at}r(t))$, se sigue que

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s. \tag{3.9}$$

Entonces $r(t)$ sigue una distribución normal con media $r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at})$ y varianza $\sigma^2/(2a)(1 - e^{-2at})$. Cuando t tiende a infinito, la media de $r(t)$ se aproxima a b y su varianza a $\sigma^2/(2a)$.

Con el objetivo de calcular el precio de un bono cupón cero bajo el marco del proceso (3.8), aplicamos la igualdad (3.2). Para esto, note en primer lugar que si $X_t^* = r(t) - b^*$, entonces $e^{-\int_t^T r(s)ds} = e^{-\int_t^T X_s^* ds} \cdot e^{-b^*(T-t)}$ de forma que podemos escribir el precio como

$$P(t,T) = e^{-b^*(T-t)}\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^T X_s^* ds}\middle|\mathscr{F}_t\right). \tag{3.10}$$

Ya que (X_t^*) es solución de la ecuación de difusión

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma d\tilde{W}_t, \tag{3.11}$$

este proceso es homogéneo en el tiempo y su esperanza puede escribirse como (Øksendal, 2013, Teorema 7.1.2)

$$\mathbf{E}^*\left(e^{-\int_t^T X_s^* ds}\middle|\mathscr{F}_t\right) = F(T-t, X_t^*) = F(T-t, r(t) - b^*) \tag{3.12}$$

donde la función F es dada por $F(\theta, x) = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}\right)$ y (X_t^x) es la única solución de 3.11 restringida a que $X_0^x = x$ (Øksendal, 2013, Teorema 5.2.1.).
El problema de calcular el precio del bono se convierte así en calcular la función $F(\theta, x)$.

Al observar la igualdad 3.9 y de la definición de X_t^* se tiene que X_t^x es un proceso gaussiano, y por tanto, $\int_0^\theta X_s^x ds$ es una variable aleatoria normal. De esto, y tomando en cuenta la función generadora de momentos para una variable aleatoria con distribución normal, se sigue que

$$F(\theta, X_t^x) = \mathbf{E}^*\left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}\right) = \exp\left(-\mathbf{E}^*\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right)\right).$$

Dado que $X_0^x = x = r(0) - b^* \Longrightarrow r(0) = x + b^*$, entonces $\mathbf{E}^*(X_s^x) = r(0)e^{-at} - b^*e^{-at} = xe^{-at}$.

Y por el teorema de Fubini para esperanzas,

$$\mathbf{E}^*\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) = \int_0^\theta \mathbf{E}^*(X_s^x)ds = \int_0^\theta xe^{-as}ds = x\frac{a-e^{-a\theta}}{a}.$$

Ahora bien, para la varianza se tiene que

$$\text{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) = \mathbf{E}^*\left(\left(\int_0^\theta \tilde{X}_s^x ds\right)^2\right) = \mathbf{E}^*\left(\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{X}_u^x\tilde{X}_t^x dudt\right) = \int_0^\theta\int_0^\theta \mathbf{E}^*\left(\tilde{X}_u^x\tilde{X}_t^x\right)dudt.$$

También, dado que $X_t^x = r(t) - b^*$ donde $r(0) = x + b^*$, como hemos comentado antes, entonces

$$X_t^x = (x+b^*)e^{-at} + b^*(1-e^{-at}) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}d\tilde{W}_s = xe^{-at} + b^* + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}d\tilde{W}_s.$$

Para simplificar la notación, denote $I_a^b := \int_a^b e^{as}d\tilde{W}_s$. De esta manera, la expresión para la esperanza es

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^*\left(\tilde{X}_u^x\tilde{X}_t^x\right) &= \mathbf{E}^*\left(\sigma e^{-au}I_0^u \cdot \sigma e^{-at}I_0^t\right) = \sigma^2 e^{-a(t+u)}\mathbf{E}^*\left(I_0^u \cdot I_0^t\right) \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+u)}\mathbf{E}^*\left(\left(I_0^{u\wedge t}\right)^2 + I_{u\wedge t}^{u\vee t}\cdot I_0^{u\wedge t}\right) = \sigma^2 e^{-a(t+u)}\mathbf{E}^*\left(\left(I_0^{u\wedge t}\right)^2\right) \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+u)}\int_0^{u\wedge t} e^{2as}ds = \sigma^2 e^{-a(t+u)}\frac{e^{2a(u\wedge t)}-1}{2a}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\text{Var}\left(\int_0^\theta X_s^x ds\right) = \int_0^\theta\int_0^\theta \sigma^2 e^{-a(t+u)}\frac{e^{2a(u\wedge t)}-1}{2a}dudt = \frac{\sigma^2}{a^2}\left(\theta - \frac{1-e^{-a\theta}}{a}\right) - \frac{\sigma^2}{2a}\left(\frac{1-e^{-a\theta}}{a}\right)^2.$$

Finalmente, de 3.10 y 3.12 tenemos que

$$\begin{aligned}
P(t,T) &= \exp\left(-b^*(T-t)\right)F(T-t, r(t)-b^*) \\
&= \exp\left[-(T-t)b^* - (r(t)-b^*)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{a^2}\left(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\frac{\sigma^2}{2a}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)^2\right)\right] \\
&= \exp\left[-(T-t)\left(b^* - \frac{\sigma^2}{(2a)^2} - \frac{1}{a(T-t)}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\left(b^* - \frac{\sigma^2}{(2a)^2} - r(t)\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Para comprender mejor esta fórmula, sea $R(\theta, r) = b^* - \frac{\sigma^2}{(2a)^2} -$

$\frac{1}{a\theta}\left(1-e^{-a\theta}\right)\left(b^*-\frac{\sigma^2}{(2a)^2}-r\right)+\frac{\sigma^2}{4a^3\theta}\left(1-e^{-a\theta}\right)^2$ y denote R_∞ por $R_\infty = \lim_{\theta\to\infty} R(\theta,r) = b^*-\frac{\sigma^2}{(2a)^2}$. Entonces,

$$R(\theta,r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta}\left((R_\infty - r)\left(1-e^{-a\theta}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^2}\left(1-e^{-a\theta}\right)^2\right)$$

y en consecuencia

$$P(T,t) = \exp\left(-(T-t)R(T-t,r(t))\right). \tag{3.13}$$

De estas expresiones podemos observar que la función R se comporta como el tipo de interés medio del bono en el lapso $[t,T]$, y R_∞ como el tipo alcanzado al largo plazo.

Una forma útil de expresar la ecuación (3.13) de forma equivalente es tomar $B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$ y $A(t,T) = \left(b^*-\frac{\sigma^2}{(2a)^2}\right)(-B(t,T)-(T-t)) + \frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2$. De esta manera, el valor del cupón se escribe como

$$P(t,T) = \exp\left(A(t,T) + r_t B(t,T)\right). \tag{3.14}$$

Concluimos este capítulo con un resultado clásico que nos será de utilidad más adelante.

Lema 3.8 (Ecuación de la estructura temporal)**.** *El precio de un bono cupón cero bajo el modelo de Vasicek satisface la siguiente EDP:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + a(b^*-r)\dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \\ P(r,T:T) = 1. \end{cases}$$

Demostración. Siendo $\tilde{P}_t = e^{-\int_0^t r(s)ds}P(t,T)$, se tiene que

$$d\tilde{P}_t = d\left(e^{-\int_0^t r(s)ds}\right)P(t,T) + dP(t,T)e^{-\int_0^t r(s)ds}.$$

También, por el lema de Itô,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}dt = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + a(b^*-r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)dt + \frac{\partial P}{\partial r}\sigma d\tilde{W}_t \tag{3.15}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} d\tilde{P}_t &= -rPe^{-\int_0^t r(s)ds}dt + e^{-\int_0^t r(s)ds}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial t} + a(b^*-r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)dt + \frac{\partial P}{\partial r}\sigma d\tilde{W}_t\right] \\ &= e^{-\int_0^t r(s)ds}\left[\left(-rP + \frac{\partial P}{\partial t} + a(b^*-r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)dt + \frac{\partial P}{\partial r}\sigma d\tilde{W}_t\right]. \end{aligned}$$

Pero ya que $\tilde{P}(t,T)$ es martingala, debe suceder que

$$-rP + \frac{\partial P}{\partial t} + a(b^*-r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = 0. \qquad \square$$

Capítulo 4

Volatilidad estocástica

> Dave... me señaló una peculiar asimetría en los precios de las opciones sobre el Nikkei: los precios de las opciones *put out-of the-money* eran inesperadamente más altos que los de otras opciones.
>
> — Emanuel Derman

Antes de la crisis global de 1987 con la caída del ínidice Dow-Jones, el modelo de Black–Scholes-Merton era ampliamente utilizado en los mercados para la valoración de opciones. Sin embargo, tras aquel día, los operadores se dieron cuenta de que debían pagar más por las opciones de venta con precio de ejercicio bajo que por las opciones de compra con precio de ejercicio alto. La línea plana de la volatilidad había comenzado a inclinarse y a curvarse (Derman, 2012).
El modelo de Black–Scholes permite aún hoy ver el precio de las opciones como una apuesta de la volatilidad futura en el rendimiento de las acciones, pues entre más alto es el nivel de volatilidad, más probable es que esta apuesta termine siendo verdadera, y por tanto debería pagarse más por ella. Es así como este modelo fue el primero en traducir el precio de una opción en la volatilidad teórica futura que una acción debería tener para que el precio sea justo, medida que es conocida como *volatilidad implícita*.
Durante los años posteriores, los inversores se dieron cuenta que debían protegerse ante la posibilidad de que el mercado tuviera un salto brusco a la baja de forma casi instantánea, de forma que estarían dispuestos a pagar para no volver a sufrir las consecuencias de la misma crisis que habían atravesado, y las opciones de venta out-of-the-money fueron una de las mejores formas de asegurarse. Esto causó que la volatilidad implícita de estas opciones con un precio de ejercicio más bajo fuera más alta que las demás, como mencionamos anteriormente. Esta curva generada por los precios de ejercicio frente a la volatilidad implícita fue llamada *"la sonrisa"*, fenómeno que el modelo de Black–Scholes ya no pudo afrontar.

Por esta razón, Hull & White (1987) fueron los primeros en desafiar la hipótesis de volatilidad constante del modelo de Black–Scholes. Propusieron que no solo el precio del activo sigue un movimiento Browniano, sino que la varianza también evoluciona según su propia ecuación diferencial estocástica. Además, su modelo dio cuenta de la utilidad de los modelos de volatilidad estocástica para ayudar a explicar por qué el precio de opciones con diferentes precios de ejercicio tienen diferentes volatilidades implícitas, o sea, la razón de la existencia de la sonrisa de volatilidad. Estos modelos de volatilidad estocástica pueden ser vistos como

resultado de un movimiento Browniano subordinado a un "reloj imperfecto" que mide la velocidad de evolución del proceso de variación de precios. Este reloj hace referencia al volumen del trading o frecuencia de negociaciones. Si el volumen de negociación cambia, también lo hace la volatilidad (Clark, 1973), así que, los inversores que usan el modelo de Black–Scholes tendrían que cambiar manualmente la volatilidad implícita en su modelo para emparejar el valor de mercado al valor teórico. Esto ya no es necesario cuando se trabajan con modelos de volatilidad estocástica.

4.1. Ecuación de valoración

Al relajar la hipótesis de una volatilidad constante en el tiempo y sustituirla por un proceso estocástico, suponemos en adelante que el precio de la acción S y su varianza v siguen las siguietes EDE's.

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{s,t} \tag{4.1}$$
$$dv_t = \alpha(S_t, v_t, t)dt + \eta\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t} dW_{v,t} \tag{4.2}$$

con

$$\mathbf{E}(dW_{s,t} \cdot dW_{v,t}) = \rho dt$$

donde μ_t es la desviación instantánea determinista de la rentabilidad de las acciones, v representa la volatilidad instantánea de los rendimientos del activo, $\rho \in (-1,1)$ es la correlación entre la rentabilidad aleatoria de las acciones y los incrementos en v_t, y $W_{s,t}, W_{v,t}$ son movimientos Brownianos. Note que en el límite $\eta \to 0$, la EDE seguida por el precio de la acción en (4.1) es equivalente a la dinámica seguida por la versión del modelo de Black–Scholes con volatilidad dependiente del tiempo y determinista. Esta es una propiedad importante en los modelos de volatilidad, dado que en la práctica se tiende normalmente a pensar la dinámica de la variación de precios en términos de Black–Scholes. Mientras tanto, la ecuación (4.2) es más general en cuanto a que no asumimos una forma específica para α por la parte determinista o β en el término de difusión.

A diferencia del modelo de Black–Scholes, donde hay una sola fuente de riesgo y el precio puede ser cubierto por acciones, al introducir una segunda fuente de riesgo para la volatilidad los cambios aleatorios en esta también deben ser cubiertos para poder formar una cartera libre de riesgo, de manera que aplicaremos una cobertura Delta y Vega. Definimos entonces una cartera Π que contiene la opción a valorar con precio $V(t,S,v)$, una cantidad $-\Delta$ acciones y una cantidad $-\Delta_1$ de otro activo que dependa de la volatilidad con valor $V_1(t,S,v)$. Así,

$$\Pi(t,S,v) = V(t,S,v) - \Delta S(t,v) - \Delta_1 V_1(t,S,v).$$

Entonces, aplicando el lema de Itô el diferencial de la cartera se escribe como

$$d\Pi = d\nu\left(\frac{\partial V}{\partial \nu} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial \nu}\right) + dS\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S}\right) + dt\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\nu\left(\beta^2\eta^2\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + 2\rho\beta\eta S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \nu} + S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) - \frac{1}{2}\Delta_1\nu\left(\beta^2\eta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2} + 2\rho\beta\eta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial \nu} + S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}\right)\right].$$

De esto, para que la cartera sea libre de riesgo debe suceder que

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} = 0 \tag{4.3}$$

para eliminar el riesgo generada por el activo, y

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial \nu} = 0 \tag{4.4}$$

para eliminar el riesgo generado por la volatilidad. En este caso, $d\Pi$ se convierte en

$$d\Pi = dt\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\nu\left(\beta^2\eta^2\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + 2\eta\rho S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \nu} + S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) - \frac{1}{2}\Delta_1\nu\left(\beta^2\eta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2} + 2\eta\rho S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial \nu} + S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}\right)\right] = r\Pi dt = r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1)dt.$$

donde asumimos en este capítulo que el tipo de interés es constante y que el rendimiento de una cartera libre de riesgo debe igualar al del tipo libre de riesgo. Al agrupar los términos con V y V_1 a ambos lados de la igualdad y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.3) y (4.4), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial \nu}}\left[\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\beta\eta\nu S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \nu} + \frac{1}{2}\beta^2\eta^2\nu\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} - rV\right] = \\ \frac{1}{\frac{\partial V_1}{\partial \nu}}\left[\frac{\partial V_1}{\partial t} + rS\frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\beta\eta\nu S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial \nu} + \frac{1}{2}\beta^2\eta^2\nu\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2} - rV_1\right]\end{aligned} \tag{4.5}$$

Podemos resaltar en esta expresión que en la parte izquierda hay una función solo de V y en la parte derecha, una función solo de V_1. Aún más, ambos lados de la igualdad presentan la misma función evaluada en V y V_1, de forma que puede escribirse como

$$\mathscr{A}(V) = \mathscr{A}(V_1).$$

También, observemos que no hay nada de especial en los activos que hemos tomado con valor V y V_1 en cuanto a que son dos activos cualesquiera que dependen de de S, r y ν, obteniendo luego que evaluados en $\mathscr{A}$ resultan ser iguales. Con esto queremos decir entonces que la función $\mathscr{A}$ es invariante al activo en que se evalúe, fijando S, t y ν. La única forma en que

esto puede ocurrir es que $\mathscr{A}$ realmente no dependa de V, o V_1, sino que dependa solo de t, S y ν mediante alguna función $f(t,S,\nu)$. En otras palabras, el cociente en (4.5) depende solo de las propiedades intrínsecas del mercado, y no de la naturaleza del contrato con valor V. Lo anterior significa que

$$\mathscr{A}(V) = -f(t,S,\nu)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\beta\eta\nu S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\nu} + \frac{1}{2}\beta^2\eta^2\nu\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2} - rV = -f(t,S,\nu)\frac{\partial V}{\partial\nu}. \quad (4.6)$$

Como veremos, esta función $-f$ debe representar el precio que el mercado paga por correr el riesgo de volatilidad.

Bajo una medida neutral al riesgo $\mathbf{P}^*$, $(e^{-rt}V)$ es una martingala, tal como hemos visto en el capítulo anterior aplicado a los bonos cupón cero. Con esta condición,

$$\mathbf{E}^*(d(e^{-rt}V)) = 0 \Longrightarrow \mathbf{E}^*(dV) - rVdt = 0. \quad (4.7)$$

Por otro lado, se tiene del lema de Itô que

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\partial S} + \frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial\nu}d\nu.$$

Bajo la medida neutral al riesgo, $dS_t = rS_t dt + \sqrt{\nu_t}S_t d\tilde{W}_{s,t}$ y $d\nu_t = (\alpha(S_t,\nu_t,t) + \eta\beta(S_t,\nu_t,t)\sqrt{\nu_t}\lambda_2)dt + \eta\beta(S_t,\nu_t,t)\sqrt{\nu_t}d\tilde{W}_{\nu,t}$. Entonces, sustituyendo en (4.7) se tiene que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\partial S} + \frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = -(\alpha - \beta\sqrt{\nu_t}\phi)\frac{\partial V}{\partial\nu}. \quad (4.8)$$

donde por convención denotamos $\phi := -\eta\lambda_2$. Al comparar (4.6) y (4.8) resulta que $f(t,S,\nu) = \alpha - \beta\sqrt{\nu_t}\phi$. El proceso $\phi(t,S,\nu)$ es llamado el **precio de mercado del riesgo de volatilidad**. Para ver por qué ϕ se interpreta de esta manera, consideremos nuevamente una cartera Π_1 que consiste en una opción con cobertura delta solo por parte de un activo. Entonces, tal como se razona con el modelo de Black–Scholes (Hull, 2022, (15.12)),

$$\Pi_1 = V - \frac{\partial V}{\partial S}S,$$

y aplicando el lema de Itô,

$$d\Pi_1 = d\nu\frac{\partial V}{\partial\nu} + dt\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu\left(\beta^2\eta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2} + 2\beta\eta\rho S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\nu} + S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right]$$

Así, al restar el rendimiento libre de riesgo de esta cartera y de (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} d\Pi_1 - r\Pi dt &= d\nu\frac{\partial V}{\partial\nu} + dt\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu\left(\beta^2\eta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2} + 2\beta\eta\rho S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\nu} + S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right] \\ &= \beta\sqrt{\nu_t}\frac{\partial V}{\partial\nu}\left(\phi(S,\nu,t)dt + \eta dW_{\nu,t}\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Siguiendo un razonamiento heurístico, observemos que el retorno extra por encima de la tasa libre de riesgo (del lado izquierdo de la igualdad) es proporcional a $\phi \times \beta\sqrt{v_t}\ \partial V/\partial v$ (del lado derecho). Aquí podemos ver una similitud con el modelo de valoración de activos financieros, mediante el cual entendemos que el retorno extra exigible por un inversor por asumir el riesgo de un activo es proporcional al precio del riesgo (o prima de riesgo del mercado) y la cantidad de riesgo (o exposición del activo al riesgo del mercado) (Cochrane, 2009, p. 152). En nuestra cartera, el rendimiento extra por unidad de riesgo de volatilidad $dW_{v,t}$ es ϕdt, el precio del riesgo, y en proporción a $\beta\sqrt{v_t}\ \partial V/\partial v$, la exposición al riesgo de volatilidad. De forma alternativa, si seguimos el razonamiento anterior sustituyendo el drift de dv_t bajo la medida neutral al riesgo como $dv_t = \alpha' dt + \eta\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t}d\tilde{W}_{v,t}$ donde $\alpha' = \alpha - \beta\sqrt{v_t}\phi$, la prima por el riesgo de volatilidad es suprimida de la expresión (4.9).

4.2. Dinámica de la volatilidad: El modelo de Heston

Presentamos en esta sección el modelo más conocido para volatilidad estocástica, que posteriormente utilizaremos en el siguiente capítulo para derivar un modelo híbrido en la valoración de opciones. Este modelo, desarrollado inicialmente por Heston (1993), permite relajar la hipótesis de Black–Scholes de una volatilidad que permanece constante en el tiempo, y tiene la ventaja de tener una solución semi analítica, propiedad que lo ha hecho muy popular.

Para este modelo, de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se escogen $\alpha(t,S,v) = -\lambda(v_t - \tilde{v})$ y $\beta(t,S,v) = 1$. Con estas condiciones, se tiene que el activo y la volatilidad siguen las ecuaciones

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{s,t} \tag{4.10}$$

y

$$dv_t = -\lambda(v_t - \tilde{v}) + \eta\sqrt{v_t} dW_{v,t} \tag{4.11}$$

donde $\mathbf{E}(dW_{s,t} \cdot dW_{v,t}) = \rho dt$, el proceso de la varianza v_t de la acción S_t es un proceso de raíz cuadrado con reversión a la media en la que $\lambda > 0$ determina la velocidad de ajuste de la volatilidad hacia su media teórica $\tilde{v}$. Este proceso también es usado en el modelo CIR de tipos de interés estocásticos. La ecuación (4.10) sigue un proceso geométrico, y $\eta > 0$ es la volatilidad de segundo orden, o sea, la volatilidad de la volatilidad.

Bajo este marco, al sustituir α y β en la ecuación de valoración (4.8) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta vS\frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = \lambda(v_t - \tilde{v})\frac{\partial V}{\partial v}. \tag{4.12}$$

Dado que nuestro enfoque está en la valoración de opciones, como mencionamos en la sección anterior aquí suponemos que los parámetros del modelo de Heston son ajustados a precios de mercado, compatibles la medida de probabilidad neutral al riesgo de tal forma que la prima por riesgo de volatilidad ϕ de (4.8) ya es incorporada en las ecuaciones y por tanto es suprimida en la ecuación (4.12).

Con el fin de resolver la ecuación (4.12) para una opción call europea, especificamos las variables que usaremos en el modelo. En primer lugar denotamos por K al precio de ejercicio,

T al momento de vencimiento de la opción, $F_{t,T}$ al precio forward en el momento T de la acción, es decir, $F_{t,T} = S_t e^{r\tau}$ y $x_t := \ln(F_{t,T}/K)$. Además, consideramos C como el valor futuro de la opción europea al vencimiento, esto es, $C = \mathbf{E}^*((S_T - K)^+)$ y como es habitual, $\tau = T - t$. Así las cosas, la ecuación (4.12) resulta en

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \lambda(\bar{\nu} - \nu)\frac{\partial C}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\nu\left[\eta^2\frac{\partial^2 C}{\partial \nu^2} - \frac{\partial C}{\partial x} + 2\eta\rho\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial \nu} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right] = 0. \tag{4.13}$$

Por otro lado, por definición tenemos que $C(\tau, x, \nu) = \mathbf{E}^*((S_T - K)^+) = \mathbf{E}^*(S_T \mathbf{1}_{S_T > K}) - K\mathbf{E}^*(\mathbf{1}_{S_T > K})$. El segundo sumando es solo la probabilidad bajo la medida neutral al riesgo de que $S_T > K$, esto es, $\mathbf{P}^*(S_T > K) = \mathbf{P}^*(x_T > 0) = P_0(\tau, 0, \nu)$, siendo $P_0(\tau, x, \nu) := \mathbf{P}^*(x_T > x)$. Para el primer sumando de C hacemos un cambio de numerario para que el nuevo numerario sea el activo S_t. Entonces, la derivada de Radon-Nikodym es $\frac{d\mathbf{P}^{\mathbf{S}}}{d\mathbf{P}^*} = \frac{S_T}{S_t e^{r\tau}} = \frac{S_T}{F_{t,T}}$ y de esta forma, $\mathbf{E}^*(S_T \mathbf{1}_{S_T > K}) = \mathbf{E}^*\left(F_{t,T}\frac{S_T}{F_{t,T}}\mathbf{1}_{S_T > K}\right) = F_{t,T}\mathbf{E}^*\left(\frac{d\mathbf{P}^{\mathbf{S}}}{d\mathbf{P}^*}\mathbf{1}_{S_T > K}\right) = F_{t,T}\mathbf{P}^{\mathbf{S}}(S_T > K) = F_{t,T}\mathbf{P}^{\mathbf{S}}(x_T > 0) = F_{t,T}P_1(\tau, 0, \nu)$, donde $P_1(\tau, x, \nu) := \mathbf{P}^{\mathbf{S}}(x_T > x)$. De lo anterior, podemos sugerir que el precio forward de la opción tiene la forma

$$C(\tau, x, \nu) = F_{t,T}P_1 - KP_0 = K(e^x P_1 - P_0). \tag{4.14}$$

Tal como en la fórmula de Black–Scholes, el primer término entre paréntesis representa la pseudo esperanza del nivel final del índice dado que la opción está "in-the-money", y el segundo término representa la pseudo probabilidad de ejercicio (Gatheral, 2011). Continuando con el argumento, al sustituir la solución (4.14) de la call en la ecuación (4.13) obtenemos

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{2} - j\right)\nu\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta^2\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial \nu^2} + \rho\eta\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial \nu} + (a - b_j\nu)\frac{\partial P_j}{\partial \nu} = 0 \tag{4.15}$$

para $j = 0, 1$ donde $a = \lambda\tilde{\nu}$ y $b_j = \lambda - j\rho\eta$. Esta ecuación está sujeta a una condición terminal, determinada por el pay-off de la opción. Notemos que $C(x, \nu, 0) = K(e^{\ln(S_T/K)}P_1 - P_0) = S_T P_1 - KP_0$. Por tanto, si en T la opción está in-the-money (equivalente a $x > 0$), $C(0, x, \nu) = S_T - K$ y $P_0 = P_1 = 1$, de lo contrario, $C(0, x, \nu) = 0$ y $P_0 = P_1 = 0$. Podemos escribir esta condición de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \to 0} P_j(x, \nu, \tau) &= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \\ &:= \theta(x).\end{aligned} \tag{4.16}$$

En este enfoque utilizamos la transformada de Fourier para que la condición terminal de las funciones P_j tenga forma exponencial. Para esto, definimos

$$\tilde{P}(\tau, u, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} P(x, \nu, \tau) dx.$$

De la condición terminal se tiene que

$$\tilde{P}(0,u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\theta(x)dx = \frac{1}{iu},$$

y su inversa es

$$P(\tau,x,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{iux}\tilde{P}(u,v,\tau). \tag{4.17}$$

Al sustituir esta transformación en la ecuación (4.15) tenemos que

$$-\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \tau} - \frac{1}{2}u^2 v\tilde{P}_j - \left(\frac{1}{2} - j\right) iuv\tilde{P}_j + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 \tilde{P}_j}{\partial v^2} + \rho\eta iuv\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial v} + (a - b_j v)\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial v} = 0 \tag{4.18}$$

Si definimos $\alpha = -\frac{u^2}{2} - \frac{iu}{2} + iju$, $\beta = \lambda - \rho\eta j - \rho\eta iu$ y $\gamma = \frac{\eta^2}{2}$, entonces la EDP anterior se convierte en

$$v\left(\alpha\tilde{P}_j - \beta\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial v} + \gamma\frac{\partial^2 \tilde{P}_j}{\partial v^2}\right) + a\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \tau} = 0. \tag{4.19}$$

Ahora bien, si suponemos que la solución de $\tilde{P}$ tiene la forma

$$\tilde{P}_j(\tau,u,v) = \tilde{P}_j(0,u,v)\exp(C(u,\tau)\bar{v} + D(u,\tau)v) = \frac{1}{iu}\exp(C(u,\tau)\bar{v} + D(u,\tau)v),$$

se sigue de la ecuación (4.19) que C_j, D_j deben satisfacer

$$\begin{aligned} aD_j - \tilde{v}C_j' = 0 &\iff \frac{\partial C_j}{\partial \tau} = \lambda D_j \\ \alpha - \beta D_j - D_j' + \gamma D_j^2 = 0 &\iff \frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \gamma(D_j - r_+)(D_j - r_-) \end{aligned} \tag{4.20}$$

donde

$$r_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} =: \frac{\beta \pm d}{\eta^2}.$$

Así las cosas, la solución del sistema (4.20) viene dado por

$$\begin{aligned} D_j(u,\tau) &= r_- \frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - g_j e^{-d_j\tau}} \\ C_j(u,\tau) &= \lambda\left(r_-\tau - \frac{2}{\eta^2}\log\left(\frac{1 - g_j e^{-d_j\tau}}{1 - g_j}\right)\right), \end{aligned}$$

siendo $g := r_-/r_+$.

Para concluir, siguiendo a Gatheral (2011, p. 18-19), se tiene que al tomar la inversa con (4.17) se llega a que

$$P_j(x,v,\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{\exp(C_j(u,\tau)\bar{v} + D_j(u,\tau)v + iux_T)}{iu}\right) du. \tag{4.21}$$

La integral en (4.21) puede ser computada usando técnicas numéricas estándar. Esta ecuación junto con (4.14) nos permite tener una fórmula cerrada en la valoración de una opción call, que ya no depende de las medidas de probabilidad que antes consideramos, sino solo de las propiedades del contrato. Luego, ¿es siempre posible suponer que existe una fórmula cerrada como esta para valorar opciones sea el modelo que usemos para describir la dinámica de los procesos?

Ciertamente esta propiedad del modelo de Heston lo diferencia de otros modelos para la volatilidad estocástica, pues hace que sea más fácil de implementar su cómputo al tener una solución con forma semi analítica para valorar opciones europeas. Pero como es posible intuir, la respuesta a la pregunta anterior es negativa, y también depende en gran medida de la complejidad de los modelos, en particular, de la estructura de dependencia entre las variables de estado (el activo subyacente, la volatilidad, etc.). Volveremos a esto en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Extensiones del modelo de Black–Scholes para tipos de interés y volatilidad estocásticos

5.1. Modelos híbridos en la valoración de opciones

Al hablar de modelos híbridos nos referimos a aquellos modelos financieros para la valoración de productos derivados que integran tres o más fuentes de riesgo estocástico y las correlaciones entre ellos. Estos se especifican generalmente usando un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que corresponden a las variables de estado como las acciones, el tipo de interés o la volatilidad. Como hemos comentado brevemente en el capítulo anterior, es usual que una solución cerrada en los modelos híbridos no exista, por lo que se hace necesario utilizar métodos de aproximación numérica para evaluar el precio de los derivados. Para poder manejar la complejidad analítica y computacional de los modelos en la fijación de precios, se ha considerado conveniente imponer una estructura suficiente a la distribución condicional de las variables de estado para obtener expresiones cerradas, o casi cerradas, de los precios de los derivados. Una hipótesis ampliamente considerada que trata este problema, es que las variables de estado sigan *procesos difusión afines* (AD), que son, en términos generales, procesos de difusión en los que el vector de tendencia y la matriz de covarianza "instantánea" tienen una dependencia afín del vector de estado (Duffie et al., 2000), es decir, que son formados por funciones lineales de los procesos de estado. Como vimos en el modelo de Heston, la existencia de una solución cerrada para el precio del derivado se reduce a la existencia de una solución cerrada de la función característica. Por esta razón, esta clase de procesos son muy útiles, dado para ellos una solución cerrada de la función característica existe (Grzelak & Oosterlee, 2011).

Más específicamente, supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, o sea,

$$d\mathbf{X}(t) = \mu(\mathbf{X}(t))dt + \sigma(\mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t). \tag{5.1}$$

Decimos que el sistema (5.1) es de forma afín si

1. $\mu(\mathbf{X}(t)) = a_0 + a_1\mathbf{X}(t)$ para algún $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$,

2. $\left(\sigma(\mathbf{X}(t))\sigma(\mathbf{X}(t))^T\right)_{ij} = (c_0)_{ij} + (c_1)_{ij}^T\mathbf{X}(t)$, con $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n\times n}$,

3. $r(\mathbf{X}(t)) = r_0 + r_1^T\mathbf{X}(t)$ para $(r_0, r_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

para $i, j = 1, \ldots, n$, donde $r(\mathbf{X}(t))$ es un componente de tipo de interés. Bajo estas condiciones, la función característica descontada tiene la forma (Duffie et al., 2000, 2.4):

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{X}(t), t, T) = \mathbf{E}^*\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds + i\mathbf{u}^T\mathbf{X}(T)\right)\middle|\mathscr{F}_t\right) = e^{A(\mathbf{u},\tau)+\mathbf{B}^T(\mathbf{u},\tau)\mathbf{X}(t)}, \quad (5.2)$$

Al tomar el diferencial para φ, tenemos que para un lapso τ, los coeficientes $A(\mathbf{u}, \tau)$ y $\mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \tau)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \tau) = -r_1 + a_1^T\mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \tau) + \frac{1}{2}\mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \tau)c_1\mathbf{B}(\mathbf{u}, \tau), \\ \frac{d}{d\tau}A(\mathbf{u}, \tau) = -r_0 + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \tau)a_0 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \tau)c_0\mathbf{B}(\mathbf{u}, \tau). \end{cases} \quad (5.3)$$

Ahora bien, como caso particular, con el vector de estados $\mathbf{X}(t) = (\ln(S(t)), \nu(t))^T$, bajo la medida neutral al riesgo, el modelo de volatilidad estocástica de Heston satisface (4.10) y (4.11) donde $\mu_t = r$. Aunque suele definirse el modelo de Heston con el diferencial del activo S_t, un modelo con esta variable de estado no está en la clase de procesos afines, debido a que $(dS_t)^2 = \nu_t S_t^2 dt$, y no cumple la condición 2, pues la varianza instantánea de S_t no es lineal en S_t. Sin embargo, al tomar el logaritmo $\ln(S_t)$ el modelo sí es afín. Por esta razón transformamos S_t definiendo $x(t) = \ln(e^{r\tau}S_t/K)$ en la segunda sección del capítulo anterior. Entonces, de lo anterior la función característica descontada en el modelo de Heston está dada por

$$\varphi_H(u, \mathbf{X}(t), \tau) = \exp(A(u, \tau) + B(u, \tau)y(t) + C(u, \tau)\nu(t)), \quad (5.4)$$

en donde $y_t = \ln(S_t)$, y las funciones $A(u, \tau), B(u, \tau)$ y $C(u, \tau)$ cumplen ecuaciones diferenciales ordinarias con solución cerrada. Aunque en este modelo la función característica es explícita, por su forma no puede obtenerse su inversa analíticamente para recuperar la función distribución, por lo que debe obtenerse con métodos numéricos, precisamente la razón por la que hemos usado el Teorema de inversión en el modelo de Heston.

Nuestra intención es la de extender el modelo de Heston al incorporar en el sistema un tipo de interés estocástico, debido a que un tipo de interés constante puede ser insuficiente en la valoración de productos sensibles a cambios en el tipo. Por esto, extendemos ahora el vector de estados añadiendo una variable para el tipo de interés, que expresamos por $\mathbf{X}(t) = (S(t), \nu(t), r(t))^T$. Este modelo es ahora un modelo híbrido de volatilidad estocástica de acciones con un proceso estocástico de tipos de interés, $r(t)$. Este modelo extendido puede expresarse de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sqrt{\nu_t}d\tilde{W}_{s,t}, & S(0) > 0, \\ d\nu_t = \kappa(\tilde{\nu} - \nu_t)dt + \sigma_\nu\sqrt{\nu_t}d\tilde{W}_{\nu,t}, & \nu(0) > 0, \\ dr_t = \lambda(\theta(t) - r_t)dt + \sigma_r r^p(t)d\tilde{W}_{r,t}, & r(0) > 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde el exponente $p = 0$ produce el modelo de Heston-Hull-White, y si además $\theta(t) = \theta \in \mathbb{R}$ obtenemos el modelo de Heson-Vasicek. También, si $p = 1/2$, se tiene el modelo

de Heston-CIR. Para estos modelos las correlaciones están dadas por $d\tilde{W}_{s,t}d\tilde{W}_{v,t} = \rho_{s,v}dt$, $d\tilde{W}_{s,t}d\tilde{W}_{r,t} = \rho_{s,r}dt$, $d\tilde{W}_{v,t}d\tilde{W}_{r,t} = \rho_{v,r}dt$ y κ, σ_v y $\tilde{v}$ son como en el modelo de Heston. $\lambda > 0$ determina la velocidad de reversión a la media para el proceso del tipo de interés, $\theta(t)$ es la estructura temporal de los tipos de interés y σ_r controla la volatilidad de los tipos de interés. El sistema (5.5) no es afín, incluso si tomamos $\ln(S_t)$ en la primera ecuación. En particular, la matriz de covarianzas instantánea es

$$\sigma(\mathbf{X}(t))\sigma(\mathbf{X}(t))^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v(t) & \rho_{s,v}\sigma_v v(t) & \rho_{s,r}\sigma_r r^p(t)\sqrt{v(t)} \\ * & \sigma_v^2 v(t) & \rho_{r,v}\sigma_v\sigma_r r^p(t)\sqrt{v(t)} \\ * & * & \sigma_r^2 r^{2p}(t) \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Aquí podemos observar que en algunas de las componentes de la matriz no son lineales en las variables de estado, y aún si hacemos que $\rho_{r,v} = 0$, esto no haría que el sistema sea afín. Solo tendremos que la matriz (5.6) es lineal con respecto al vector de estados $(\ln(S_t), v_t, r(t))$ si las correlaciones $\rho_{r,v}$ y $\rho_{s,r}$ son iguales a cero. En tal caso, sí tendremos un modelo afín, con el que podemos encontrar una solución cerrada de la función característica de la forma (5.2) para la valoración de opciones. Por tanto, nos centraremos ahora bajo este marco, y discutimos en la siguiente sección un modelo híbrido para valorar opciones europeas donde integramos la dinámica de los modelos Vasicek y Heston siguiendo las ideas de Guo (2021).

Otros modelos que consideran dos correlaciones iguales a cero pueden ser consultados en (Oosterlee, 2007), y casos con correlaciones distintas de cero son estudiados en (Grzelak & Oosterlee, 2011).

5.2. El modelo de Vasicek-Heston

5.2.1. Cambio de numerario

Para modelar la dinámica conjunta en el mercado del activo negociable, la volatilidad y el tipo de interés, enmarcamos el modelo sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}, (\mathscr{F}_t))$ definido sobre un proceso Browniano estándar (W_t) 3-dimensional donde $W_t = (W_{s,t}, W_{v,t}, W_{r,t})$ y $\mathscr{F}_t = \sigma(W_{s,u}, W_{v,u}, W_{r,u} : 0 \le u \le t)$. Asumimos en nuestro caso la siguiente estructura de correlaciones en $\tilde{W}_t$, el movimiento Browniano bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo: $\mathbf{E}^*(d\tilde{W}_{s,t} \cdot d\tilde{W}_{r,t}) = \mathbf{E}^*(d\tilde{W}_{v,t} \cdot d\tilde{W}_{r,t}) = 0$, y $\mathbf{E}^*(d\tilde{W}_{s,t} \cdot d\tilde{W}_{v,t}) = \rho dt$, con $t > 0$ y $\rho \in (-1, 1)$.

Podemos entonces presentar ahora la dinámica del modelo híbrido Vasicek-Heston bajo una medida neutral al riesgo $\mathbf{P}^*$:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sqrt{v_t} d\tilde{W}_{s,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} d\tilde{W}_{v,t} \\ dr_t = (\eta - \gamma r_t)dt + \sigma_r d\tilde{W}_{r,t} \end{cases} \tag{5.7}$$

donde S es el activo subyacente, v_t es la volatilidad, y r_t es el tipo de interés libre de riesgo. $\kappa,\ \theta,\ \sigma_v,\ \eta,\ \sigma_r$ y $\gamma \neq 0$ son constantes. Como es usual en la valoración de derivados, es conveniente cambiar el numerario S_t^0 del activo libre de riesgo por el precio $P(t,T)$ del bono

cupón cero introduciendo una medida forward $\mathbf{Q^T}$ con el objeto de que el precio de la call descontado por el precio del bono cupón cero sea una martingala bajo esta medida y poder expresar el precio de la opción europea como

$$\frac{C_t}{P(t,T)} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q^T}}\left(\frac{C_T}{P(T,T)}\middle| S_t\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q^T}}(C_T|S_t),$$

es decir,

$$C(S,v,r,t) = P(t,T)\mathbf{E}^{\mathbf{Q^T}}(\text{máx}(S_T - K, 0)|S_t) \tag{5.8}$$

donde K es el precio de ejercicio.
Bajo esta nueva medida de probabilidad, debemos ver la forma en la que cambia la dinámica del sistema 5.7 del modelo. En cuanto al tipo de interés r_t, se tiene de 3.6 que $dP(t,T) = P(t,T)r(t)dt + P(t,T)\sigma_t^T d\tilde{W}_t$. Entonces, la densidad de $\mathbf{Q}$ relativa a $\mathbf{P}^*$ se puede expresar (McInerney & Zastawniak, 2015, Proposición 2.3) como

$$\xi(t) = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}^*}\bigg|_{\mathscr{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \sigma_u^T dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_u^T)^2 du\right),$$

de donde, por el teorema de Girsanov, el proceso $(B_{r,t})$ dado por $dB_{r,t} = d\tilde{W}_{r,t} - \sigma_t^T dt$, es un movimiento Browniano bajo $\mathbf{Q}$. Por otro lado, de (3.14) se tiene que $\dfrac{\partial P}{\partial r}\sigma_r d\tilde{W}_{r,t} = B(t,T)P(t,T)\sigma_r d\tilde{W}_{r,t}$, e igualando los términos de difusión de (3.15) con (3.6) se sigue que

$$\sigma_t^T P(t,T) = B(t,T)P(t,T)\sigma_r \Longrightarrow \sigma_t^T = B(t,T)\sigma_r.$$

Así, sustituyendo en $dB_{r,t}$, se obtiene $dB_{r,t} = d\tilde{W}_{r,t} - B(t,T)\sigma_r dt$. De esto, la ecuación para el tipo de interés se convierte en

$$dr_t = (\eta - \gamma r_t)dt + \sigma_r(dB_{r,t} - B(t,T)\sigma_r dt) = (\eta - \gamma r_t - B(t,T)\sigma_r^2)dt + \sigma_r dB_{r,t}.$$

Para el activo S_t y la volatilidad v_t usamos una generalización del teorema de Girsanov (Revuz & Yor, 2013, Teorema 1.4), por el que el cambio de los procesos $\tilde{W}_{s,t}$ a $B_{s,t}$ y $\tilde{W}_{v,t}$ a $B_{s,t}$ se escriben de forma alternativa como

$$d\tilde{W}_{s,t} = dB_{s,t} + \langle d\tilde{W}_{s,t}, \frac{d\xi_t}{\xi_t}\rangle = dB_{s,t} + \text{Cov}\left(d\tilde{W}_{s,t}, \frac{d\xi_t}{\xi_t}\right).$$

Como $\dfrac{d\xi_t}{\xi_t} = B(t,T)\sigma_r d\tilde{W}_t$, entonces

$$d\tilde{W}_{s,t} = dB_{s,t} + \text{Cov}\left(d\tilde{W}_{s,t},\ B(t,T)\sigma_r d\tilde{W}_{r,t}\right) = dB_{s,t} + B(t,T)\sigma_r \text{Cov}\left(d\tilde{W}_{s,t},\ d\tilde{W}_{r,t}\right) = dB_{s,t},$$

de manera que $d\tilde{W}_{s,t} = dB_{s,t}$. De forma análoga se tiene también que $d\tilde{W}_{v,t} = dB_{v,t}$.
Por lo anterior, la dinámica del modelo bajo la medida forward $\mathbf{Q^T}$ se puede expresar como

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sqrt{v_t} dB_{s,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dB_{v,t} \\ dr_t = (\eta - \gamma r_t - B(t,T)\sigma_r^2)dt + \sigma_r dB_{r,t} \end{cases} \tag{5.9}$$

con $B(t,T) = \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma(T-t)}\right)$.

5.2.2. Fórmula de valoración

Seguimos a continuación un razonamiento similar al que hemos visto con el modelo de Heston para valorar una opción call europea. Sea $y_t = \ln(S_t)$ y denote por $f(y)$ a la función de densidad de probabilidad de $y_T =: y$ dada la información disponible hasta t ($f_{y_T|\mathscr{F}_t}$). Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q^T}}(\text{máx}(e^y - K, 0)|\mathscr{F}_t) &= \int_{\ln(K)}^{\infty} (e^y - K) f(y) dy = \int_{\ln(K)}^{\infty} e^y f(y) dy - K \int_{\ln(K)}^{\infty} f(y) dy \\ &= P_1 - K P_2, \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde $P_1 = \int_{\ln(K)}^{\infty} e^y f(y) dy$ y $P_2 = \int_{\ln(K)}^{\infty} f(y) dy$. Así, la ecuación (5.8) se puede expresar como

$$C(y, v, r, t) = P(r, t; T)(P_1 - K P_2).$$

Aunque esta expresión se acerca más a una fórmula cerrada para el precio de la opción, es insuficiente debido a que no conocemos de manera explícita cómo se comporta f, la densidad del activo subyacente[1]. No obstante, la distribución de y_T se encuentra determinada de forma única por su función característica (Definición 2.6).

El siguiente lema muestra la forma de esta función bajo el modelo que consideramos.

Lema 5.1. *Si el activo subyacente sigue la dinámica del sistema (5.9), la función característica de este puede ser derivada por*

$$\varphi = e^{C(\tau,\phi) + D(\tau,\phi)v + E(\tau,\phi)r + i\phi y}$$

donde $C(\tau,\phi), D(\tau,\phi)$ y $E(\tau,\phi)$ son dadas por (5.13).

Demostración. Por definición se tiene que

$$\varphi(\phi; t, T, y, v, r) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q^T}}\left(e^{i\phi y_T} \middle| y_t, v_t, r_t\right).$$

También, por el lema de Itô,

---

[1] De forma alternativa a la solución analítica que presentamos, es posible usar Monte Carlo para aproximar f y computar las variables P_1 y P_2

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\eta - \gamma r - \sigma_r^2 B)\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \kappa(\theta - \nu)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2 \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} + rS\frac{\partial \varphi}{\partial S} + \frac{1}{2}\nu S^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} \right.$$
$$\left. + \rho \sigma_\nu \nu S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S \partial \nu} \right) dt + \sqrt{\nu} S \frac{d\varphi}{dS} dB_{s,t} + \sigma_\nu \sqrt{\nu} \frac{d\varphi}{d\nu} dB_{\nu,t} + \sigma_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} dB_{r,t}, \tag{5.11}$$

y tomando en cuenta que $y = \ln(S)$,

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\eta - \gamma r - \sigma_r^2 B)\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \kappa(\theta - \nu)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2 \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} + \left(r - \frac{1}{2}\nu \right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right.$$
$$\left. + \rho \sigma_\nu \nu S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S \partial \nu} \right) dt + \sqrt{\nu} S \frac{d\varphi}{dS} dB_{s,t} + \sigma_\nu \sqrt{\nu} \frac{d\varphi}{d\nu} dB_{\nu,t} + \sigma_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} dB_{r,t}.$$

Dadas las propiedades de la doble esperanza, se tiene de la definición de φ que esta última es una martingala, por lo que $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(d\varphi) = 0$. De esto, y si denotamos $\tau = T - t$, entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = (\eta - \gamma r - \sigma_r^2 \tilde{B}(\tau;T))\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \kappa(\theta - \nu)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2 \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} + \left(r - \frac{1}{2}\nu \right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$
$$+ \rho \sigma_\nu \nu S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S \partial \nu} \tag{5.12}$$

donde $\tilde{B}(\tau;T) = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma\tau})$, y con la condición inicial $\varphi|_{\tau=0} = e^{i\phi y}$.
Ahora bien, dado que los procesos de Heston y Vasicek son modelos afines, podemos suponer que la función característica tiene una forma exponencial. Para ver esto, suponemos que φ tiene la forma

$$\varphi = e^{C(\tau,\phi) + D(\tau,\phi)\nu + E(\tau,\phi)r + i\phi y}.$$

Entonces, al sustituir φ en la ecuación (5.11) se llega a lo siguiente.

$$\begin{cases} \frac{dD(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}\sigma_\nu^2 D(\tau)^2 + (i\phi\rho\sigma_\nu - \kappa)D(\tau) - \frac{1}{2}(\phi^2 + i\phi) \\ \frac{dE(\tau)}{d\tau} = -\gamma E(\tau) + i\phi \\ \frac{dC(\tau)}{d\tau} = \kappa\theta D(\tau) + \left(\eta - \sigma_r^2 \tilde{B}(\tau)\right) E(\tau) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 E(\tau)^2 \end{cases} \tag{5.13}$$

donde $C(0) = D(0) = E(0) = 0$. Al resolver el sistema anterior sistema de EDO con condición inicial, se tiene que

$$D = \frac{d - (\rho\sigma_\nu i\phi - \kappa)}{\sigma_\nu^2} \cdot \frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}}$$

donde $d = \sqrt{(\rho\sigma_\nu i\phi - \kappa)^2 + \phi\sigma_\nu^2(i + \phi)}$ y $g = \frac{(\rho\sigma_\nu i\phi - \kappa) - d}{(\rho\sigma_\nu i\phi - \kappa) + d}$,

$$E = \frac{i\phi}{\gamma}(1 - e^{-\gamma\tau})$$

y

$$C = \frac{k\theta}{\sigma_v^2}\left((d-(\rho\sigma_v i\phi - k))\tau - 2\ln\left(\frac{1-ge^{d\tau}}{1-g}\right)\right) + \frac{i\phi\eta}{\gamma}\left(\tau + \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\tau} - \frac{1}{\gamma}\right)$$
$$+ \frac{i\phi\sigma_r^2(i\phi-2)}{2\gamma^2}\left(\tau + \frac{2}{\gamma}e^{-\gamma\tau} - \frac{1}{2\gamma}e^{-2\gamma\tau} - \frac{3}{2\gamma}\right).$$

□

Por último, detallamos el precio de una opción call bajo el modelo de Vasicek-Heston.

Teorema 5.2. *Si el precio del activo subyacente sigue la dinámica del sistema (5.9), la fórmula del precio para una opción call europea es dada por*

$$C(t,y,v,r) = P(r,t;T)(P_1 - KP_2)$$

donde

$$P_1 = \varphi(-i;t,T,y,v,r)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left(\frac{e^{-i\phi\ln(K)}\varphi(\phi-i;t,T,y,v,r)}{i\phi\,\varphi(-i;t,T,y,v,r)}\right)d\phi\right),$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left(\frac{e^{-i\phi\ln(K)}\varphi(\phi;t,T,y,v,r)}{i\phi}\right)d\phi.$$

Demostración. Si F es la función de distribución de S_T, por el Teorema de inversión (Gil-Pelaez, 1951)

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{itx}\varphi(-t) - e^{-itx}\varphi(t)}{it}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{e^{-itx}\varphi(t)} - e^{-itx}\varphi(t)}{it}dt$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\left(e^{-itx}\varphi(t)\right)}{t}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-itx}\varphi(t)}{it}\right)dt,$$

Aquí tomamos en cuenta la propiedad $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$, que se puede verificar directamente de su definición. Entonces,

$$P_2 = \int_{\ln(K)}^\infty f(y)dy = 1 - F(\ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\phi\ln(K)}\varphi(\phi)}{i\phi}\right)d\phi.$$

Para aplicar de forma análoga el Teorema de inversión para la primera integral en (5.10), necesitamos que $e^y f(y)$ sea una función de densidad, mas como puede observarse falla en esto en cuanto que $\int_{-\infty}^\infty e^y f(y) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(e^y|\mathscr{F}_t) = \varphi(-i)$. Por tanto, definimos $\tilde{P}_1 = P_1/\varphi(-i) = \int_{\ln(K)}^\infty e^y f(y)/\varphi(-i)dy$ y la nueva función de densidad $g(y) = e^y f(y)/\varphi(-i)$. Si denotamos por ψ a su función característica, tenemos que

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^\infty e^{iuy}g(y)dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iuy}e^y f(y)}{\varphi(-i)}dy = \frac{1}{\varphi(-i)}\int_{-\infty}^\infty e^{i(u-i)y}f(y)dy = \frac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)}.$$

De esta manera, por el Teorema de inversión y siendo $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)dy$,

$$\tilde{P}_1 = 1 - G(\ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\phi\ln(K)}\psi(\phi)}{i\phi}\right)d\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\phi\ln(K)}\varphi(\phi - i)}{i\phi\varphi(-i)}\right)d\phi.$$

Finalmente, la forma de P_1 se tiene de $P_1 = \varphi(-i)\tilde{P}_1$.

□

Corolario 5.3. *El precio de una opción Put bajo la dinámica del sistema (5.9) es*

$$Put(t, y, \nu, r) = P(r, t; T)(P_1 - KP_2 + K) - S_t.$$

Capítulo 6

Aplicación empírica

> En teoría, no hay diferencia entre teoría y práctica. En la práctica, la hay.
>
> — Yogi Berra

Al acercarnos al final de nuestro estudio, retomamos lo visto en los capítulos anteriores donde hemos desarrollado los fundamentos teóricos de los modelos de Black–Scholes, Heston y Vasicek–Heston, así como sus respectivas formulaciones bajo medida neutral al riesgo. En este capítulo aplicamos las formulaciones obtenidas para estos modelos y validarlos con una muestra de datos para reproducir los precios observados en el mercado y capturar fenómenos empíricos como la sonrisa de volatilidad implícita. Realizamos una aplicación numérica de los modelos estudiados utilizando datos reales de opciones europeas sobre el índice S&P 500 (SPX). En particular, analizamos la capacidad de cada modelo para calibrarse a precios de mercado, reproducir la estructura de volatilidad implícita y describir adecuadamente las sensibilidades de las opciones frente a cambios en las variables fundamentales del modelo. Para ello, empleamos opciones call europeas obtenidas de la web Barchart, considerando un vencimiento fijo de 125 días y un conjunto de strikes *near-the-money*. Posteriormente, calibramos los parámetros de cada modelo mediante minimización de errores cuadráticos y comparamos sus resultados en términos de precisión de pricing, estructura de volatilidad y comportamiento de las griegas.

A la fecha de descarga de los datos el índice tiene un nivel de $S_0 = 7408.5$. Además, utilizamos un tipo libre de riesgo de $4.3\,\%$, correspondiente al rendimiento del T-bill estadounidense a un mes. De los datos de opciones disponibles al plazo mencionado, hemos aplicado dos filtros antes de calibrar los modelos, de los cuales de entre 300 opciones tomadas, seleccionamos 181. En el primer filtro, un rango para el grado del dinero (K/S_0) de $\pm 12\,\%$, dado que hemos comprobado que fuera de este rango los modelos comienzan a ser numéricamente inestables, y adicionalmente estas opciones tienen poca liquidez real. Segundo, un filtro de liquidez mínima, en el que excluimos los contratos con precio de mercado menor a \$5. Resumimos los principales descriptivos de los datos en la Tabla 6.1.

Variable	Valor
Número de opciones seleccionadas	181
Precio spot del índice (S_0)	7408.5
Tiempo al vencimiento (T)	$\frac{125}{365} \approx 0{,}3425$
Tipo libre de riesgo (r)	4.3 %
Strike mínimo	6300 $(K/S_0 \approx 0.85)$
Strike máximo	8500 $(K/S_0 \approx 1.15)$
Volatilidad implícita mínima	14.15 %
Volatilidad implícita máxima	30.34 %
Volatilidad implícita media	20.84 %

Tabla 6.1. Estadísticas descriptivas de las opciones seleccionadas.
Fuente: elaboración propia.

6.1. Calibración de modelos

Realizamos la calibración de los modelos minimizando la diferencia entre los precios observados en el mercado y los precios teóricos generados por cada modelo. Para ello, se consideró como función objetivo un error cuadrático ponderado definido como

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \left(C_i^{\text{modelo}} - C_i^{\text{mercado}} \right)^2,$$

donde C_i^{market} representa el precio de mercado de la opción i, C_i^{model} el precio obtenido mediante el modelo correspondiente y w_i un peso inversamente proporcional al precio de mercado de la opción. Esta ponderación nos permite evitar que las opciones con precios elevados dominen completamente la calibración y otorga mayor estabilidad numérica al procedimiento.
En el caso del modelo de Black–Scholes, la calibración consiste únicamente en estimar la volatilidad constante σ, por lo que el problema de optimización resulta unidimensional. Para los modelos de Heston y Vasicek–Heston, en cambio, la calibración implica determinar simultáneamente varios parámetros relacionados con la dinámica de la volatilidad y de los tipos de interés, tal como hemos detallado en los capítulos anteriores. Debido a la naturaleza no lineal de la función objetivo y a la posible existencia de mínimos locales, se empleó el algoritmo de optimización de Nelder–Mead (Virtanen et al., 2020). Este método resulta adecuado en este contexto porque no requiere el cálculo explícito de derivadas y presenta un comportamiento robusto en problemas de calibración financiera.

Con el fin de reducir el riesgo de convergencia a mínimos locales y mejorar la estabilidad del algoritmo, la calibración de Heston y Vasicek–Heston la realizamos utilizando múltiples puntos iniciales. En particular, construimos un conjunto de configuraciones iniciales basadas en estimaciones aproximadas de la volatilidad implícita *at-the-money*, seleccionando

posteriormente la solución con menor error cuadrático.
Asimismo, durante la calibración del modelo de Heston impusimos la condición de Feller, $2\kappa\theta > \sigma_v^2$, mediante una penalización en la función objetivo cuando dicha restricción no se satisface. Esta condición garantiza que el proceso de varianza permanezca estrictamente positivo y evita trayectorias degeneradas en las cuales la volatilidad pueda alcanzar valores cercanos a cero. La imposición de esta restricción mejora significativamente la estabilidad de la función característica utilizada en la valoración mediante transformadas de Fourier y evita comportamientos explosivos durante la calibración.

En la Tabla 6.2 mostramos el valor de los parámetros la calibrados para cada modelo. Observamos que el valor de $\sqrt{\theta} \approx 40.87\,\%$ del nivel al largo plazo de la volatilidad es considerablemente superior al observado en el mercado en la Tabla 6.1 con un máximo de $30.34\,\%$, al igual que la volatilidad de la volatilidad con un $58.6\,\%$, un valor coherente lo que suele ser en la literatura para índices bursátiles, entre $40\,\%$ y $60\,\%$ (Gatheral, 2011). También, la correlación entre el índice y la volatilidad es esperadamente negativa, debido a que las caídas del mercado tienden a ir acompañadas de aumentos de la volatilidad. En el modelo VH, vemos que la velocidad de reversión es relativamente alta al tipo de interés al largo plazo $13\,\%$, mientras que la volatilidad del tipo es baja, reflejando poca incertidumbre en el lapso que consideramos.

Modelo	**Parámetros calibrados**	**SSE**
Black–Scholes	$\sigma = 0.1560$	107034.49
Heston	$\kappa = 1.028, \quad \theta = 0.1670, \quad \sigma_v = 0.586$ $\rho = -0.592, \quad v_0 = 0.0014$	0.14
Vasicek–Heston	$\gamma = 4.629, \quad \eta/\gamma = 0.1300, \quad \sigma_r = 0.0063$	0.14

Tabla 6.2. Parámetros calibrados de los modelos considerados.
Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, la Tabla 6.3 presenta los errores de calibración de los tres modelos medidos mediante el error absoluto medio (MAE), la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el error máximo (MaxErr), todos expresados en porcentaje relativo al precio de mercado. Los resultados muestran que los modelos de Heston y Vasicek–Heston producen ajustes significativamente superiores al modelo clásico de Black–Scholes. En particular, ambos modelos de volatilidad estocástica reducen de forma considerable tanto el error medio como el error máximo de calibración, reflejando su capacidad para capturar la estructura no lineal de volatilidad implícita observada en el mercado.
Podemos observar que el modelo de Heston obtiene el menor error absoluto medio, mientras que el modelo Vasicek–Heston presenta un mejor error máximo. Este resultado indica que la introducción de tipos de interés estocásticos produce únicamente una mejora marginal respecto al modelo de Heston puro.
Por el contrario, el modelo de Black–Scholes presenta errores considerablemente superiores, especialmente en opciones alejadas del dinero. Aunque la calibración de la volatilidad

constante permite reproducir adecuadamente los precios cercanos a la región *at-the-money*, el modelo es incapaz de adaptarse simultáneamente a toda la estructura de strikes. Esta limitación se refleja claramente en el error máximo del 85.97 %, correspondiente a opciones profundamente *out-of-the-money*.

Modelo	**MAE (%)**	**RMSE (%)**	**MaxErr (%)**
Black–Scholes	10.97	19.61	85.97
Heston	0.47	0.61	2.85
Vasicek–Heston	0.48	0.61	2.74

Tabla 6.3. Errores de calibración de los modelos considerados.
Fuente: Elaboración propia.

6.2. Valoración de opciones europeas

Los resultados obtenidos para el precio de las opciones call europeas sobre el índice SPX bajo los modelos de Black–Scholes, Heston y Vasicek–Heston se resumen en la Figura 6.1 y la Tabla 6.4, junto con sus respectivos errores relativos respecto a los precios observados en el mercado. Las figuras fueron construidas utilizando la totalidad de los datos disponibles, mientras que en la tabla se presenta una selección representativa de quince *strikes*. La Figura 6.1 muestra tanto la estructura de precios en función del *moneyness* como el comportamiento del error relativo de cada modelo.

En términos generales, los tres modelos reproducen adecuadamente la forma decreciente de los precios de las opciones conforme aumenta el *strike*, como puede observarse en la Figura 6.1(a). Sin embargo, aparecen diferencias relevantes en la precisión de ajuste, especialmente para opciones alejadas de la región *at-the-money*.

El modelo de Black–Scholes presenta un ajuste razonablemente preciso cerca de $K/S_0 \approx 1$, donde los errores relativos permanecen reducidos. No obstante, conforme aumenta el *moneyness*, el error crece rápidamente, alcanzando valores superiores al 80 % para opciones profundamente *out-of-the-money*. Este comportamiento refleja la principal limitación estructural del modelo: la hipótesis de volatilidad constante impide capturar adecuadamente la curvatura y asimetría presentes en la estructura de volatilidad implícita del mercado.

Por otra parte, los modelos de Heston y Vasicek–Heston producen un ajuste considerablemente más estable a lo largo de prácticamente todo el rango de strikes considerado. Como podemos observar en la Figura 6.1(b), ambos modelos mantienen errores relativos moderados incluso para opciones *out-of-the-money*, reproduciendo de manera mucho más precisa la pendiente de la curva de precios observada en el mercado. En particular, el modelo de Heston logra una reducción significativa del error máximo respecto a Black–Scholes, confirmando que la incorporación de volatilidad estocástica es responsable de una mejora significativa en la capacidad de ajuste.

Finalmente, el modelo Vasicek–Heston presenta un comportamiento muy similar al modelo de Heston, aunque con errores ligeramente inferiores para strikes altos. La introducción de tipos de interés estocásticos aporta mayor flexibilidad en la estructura temporal de descuento

y permite mejorar marginalmente la precisión de valoración en regiones extremas del *smile*. Sin embargo, las diferencias entre ambos modelos permanecen relativamente pequeñas, resultado coherente con el análisis de sensibilidad que comentaremos más adelante, donde el parámetro σ_r mostró un impacto reducido sobre la forma general de la volatilidad implícita.

K/S_0	**Mercado**	**BS**	**Heston**	**VH**	**ErrBS (%)**	**ErrH (%)**	**ErrVH (%)**
0.880	1024.65	999.86	1026.78	1027.27	2.42	0.21	0.26
0.894	935.80	904.36	932.97	933.45	3.36	0.30	0.25
0.908	840.60	811.79	841.12	841.59	3.43	0.06	0.12
0.923	751.00	718.65	747.39	747.84	4.31	0.48	0.42
0.937	668.00	638.00	664.79	665.23	4.49	0.48	0.42
0.952	579.85	554.38	577.30	577.72	4.39	0.44	0.37
0.968	487.85	469.94	486.61	487.00	3.67	0.25	0.17
0.982	413.00	402.36	412.02	412.38	2.58	0.24	0.15
0.996	341.70	340.98	342.58	342.92	0.21	0.26	0.36
1.011	274.75	283.48	276.17	276.46	3.18	0.52	0.62
1.026	216.30	232.92	217.03	217.28	7.68	0.34	0.45
1.039	169.85	192.82	170.20	170.41	13.52	0.20	0.33
1.054	126.10	154.85	126.74	126.91	22.80	0.51	0.64
1.073	84.10	115.11	83.73	83.84	36.87	0.44	0.31
1.117	28.85	53.65	28.53	28.56	85.97	1.11	1.01

Tabla 6.4. Precios de opciones call europeas y errores relativos de calibración.
Fuente: Elaboración propia.

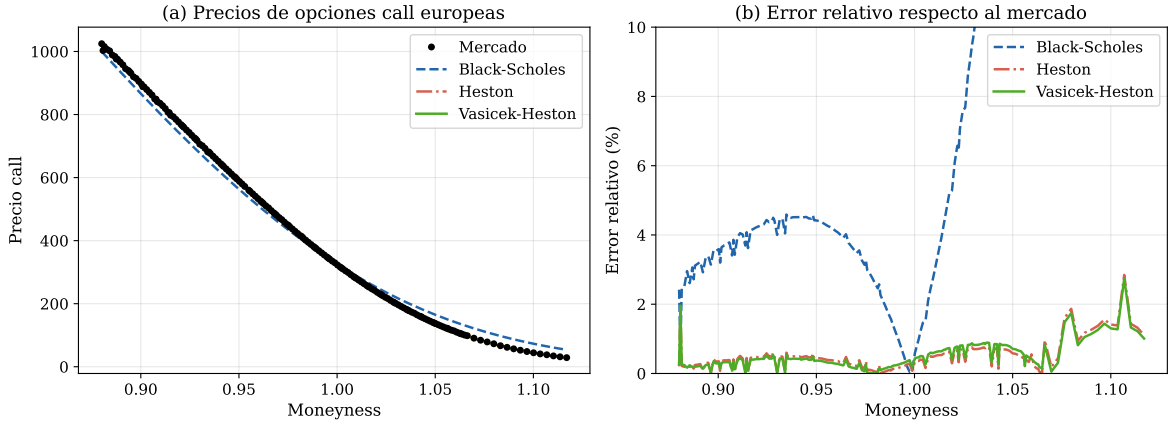


Figura 6.1. Resultados del precio de las opciones call.
Fuente: Elaboración propia.

6.3. Sonrisa de volatilidad implícita

Presentamos también en la Figura 6.2 la estructura de volatilidad implícita obtenida, junto con las volatilidades reproducidas por los modelos de Black–Scholes, Heston y Vasicek–Heston. Esta figura nos permite evidenciar una de las principales limitaciones del modelo clásico de Black–Scholes que discutimos en Preliminares: su incapacidad para reproducir adecuadamente la dependencia de la volatilidad implícita respecto al *strike*.
Como puede observarse, la volatilidad implícita de mercado no permanece constante respecto al *moneyness*. Por el contrario, presenta una estructura claramente decreciente conforme aumenta el *strike*. Aunque tradicionalmente utilizamos el término *sonrisa de volatilidad*, en índices bursátiles como el SPX es más habitual observar una estructura asimétrica con pendiente negativa, fenómeno que es mejor conocido como *volatility skew*. Este comportamiento refleja que las opciones con strikes bajos incorporan mayores niveles de volatilidad implícita debido a la mayor probabilidad percibida de movimientos extremos a la baja en el mercado.
En consecuencia, el modelo de Black–Scholes produce una línea totalmente horizontal correspondiente a una volatilidad constante cercana al 15.6 %. Aunque dicha volatilidad permite reproducir razonablemente las opciones próximas a la región *at-the-money*, el modelo resulta incapaz de capturar la pendiente negativa observada en los datos reales. Esta limitación puede explicar el incremento de errores de valoración para opciones alejadas del dinero mostrado en la sección anterior.
Por otra parte, tanto el modelo de Heston como el modelo Vasicek–Heston logran reproducir adecuadamente la estructura decreciente de la volatilidad implícita. La incorporación de volatilidad estocástica introduce una dependencia dinámica entre la volatilidad y el nivel del activo subyacente, permitiendo generar de forma natural estructuras de *skew*. En particular, el parámetro de correlación negativa ρ entre el movimiento browniano del precio y el de la volatilidad provoca que caídas en el activo se asocien con incrementos de volatilidad, lo que

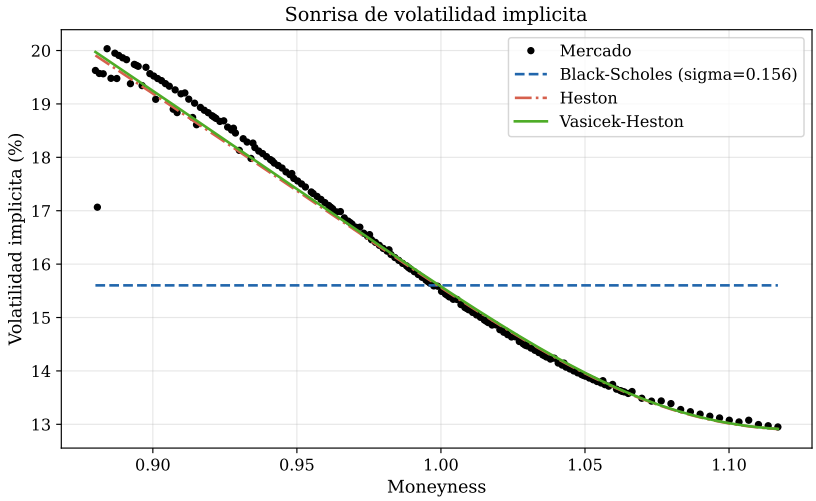


Figura 6.2. Volatilidad implícita de las opciones call europeas.
Fuente: Elaboración propia.

reproduce la asimetría observada empíricamente en los mercados bursátiles.
Podemos observar además que las curvas generadas por Heston y Vasicek–Heston prácticamente coinciden a lo largo de todo el rango de *moneyness*. Esto nos confirma que la volatilidad estocástica constituye el principal mecanismo responsable de reproducir la forma del *skew*, mientras que la incorporación de tipos de interés estocásticos produce pequeños ajustes en la estructura de volatilidad implícita.
Finalmente, estos resultados apoyan directamente el cambio estructural observado en los mercados tras el colapso bursátil de 1987, discutido en el Capítulo 4. Antes de dicha crisis, la hipótesis de volatilidad constante era considerada razonable en la práctica. Sin embargo, el comportamiento extremo de los mercados durante y después del *crash* evidenció la necesidad de modelos capaces de incorporar volatilidad variable y distribuciones no gaussianas. La aparición sistemática de sonrisas y *skews* de volatilidad implícita constituyó precisamente una de las principales motivaciones para el desarrollo de modelos de volatilidad estocástica como Heston y demás extensiones.

6.4. Análisis de sensibilidad

Comparamos las principales sensibilidades (las griegas) de las opciones obtenidas bajo los modelos de Black–Scholes y Heston a través de la Figura 6.3, mientras que la Figura 6.4 analiza el efecto de distintos parámetros sobre la estructura de volatilidad implícita.

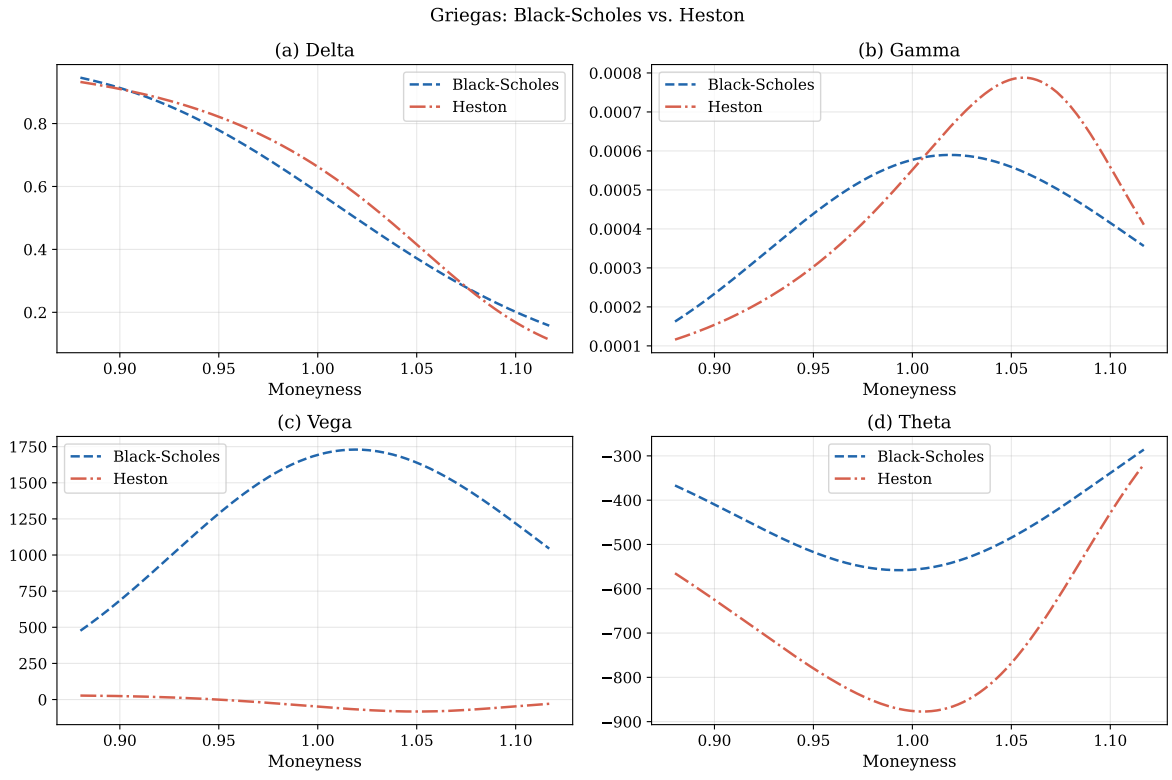


Figura 6.3. Letras Delta, Gamma, Vega y Theta de los modelos Black–Scholes y Heston.
Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, la Delta presenta un comportamiento decreciente conforme aumenta el *moneyness*, reflejando la menor sensibilidad de las opciones *out-of-the-money* frente a variaciones del subyacente. La Gamma alcanza su máximo alrededor de la región *at-the-money*, donde pequeñas variaciones del precio producen mayores cambios en la Delta. En Heston, la Gamma resulta más suave y desplazada hacia strikes ligeramente superiores, posiblemente consecuencia de la dinámica estocástica de la varianza y de la mayor dispersión implícita en los retornos.
Por otra parte, la Vega refleja diferencias importantes entre ambos modelos. Mientras Black–Scholes presenta sensibilidades elevadas y relativamente simétricas, Heston incorpora parte de la incertidumbre directamente en la dinámica de volatilidad, reduciendo significativamente la dependencia del precio respecto a variaciones marginales de una volatilidad constante, en este modelo, particularmente porque $\sigma_v = 0.586$ hace que la perturbación de σ_v afecte poco al precio normalizado.
La Theta, por su parte, es negativa en ambos modelos, indicando la pérdida de valor temporal de la opción conforme se aproxima el vencimiento. No obstante, Heston produce valores más negativos, especialmente cerca de la región *at-the-money*, debido al impacto adicional de la volatilidad estocástica sobre la evolución temporal de la opción.

La Figura 6.4 muestra cómo distintos parámetros afectan la sonrisa de volatilidad implícita bajo los modelos de Heston y Vasicek–Heston. En la subfigura (a), valores negativos de ρ producen una pendiente negativa pronunciada (*skew*), reproduciendo el comportamiento

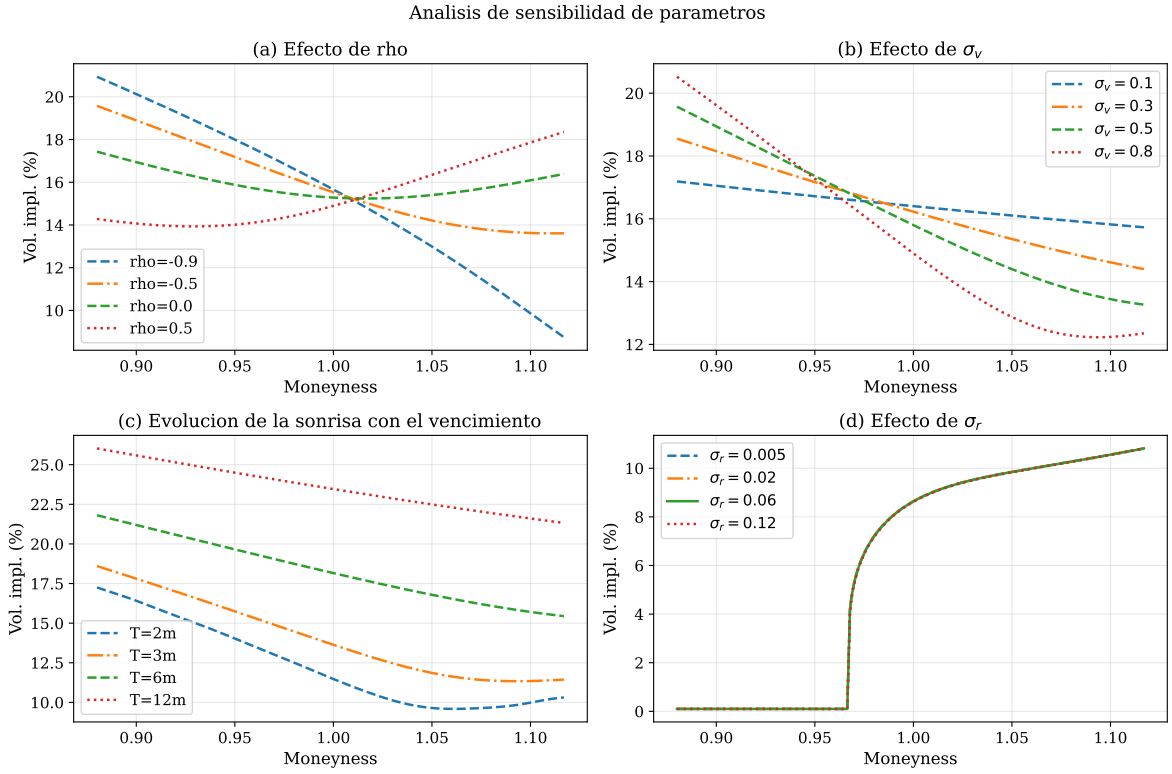


Figura 6.4. Sensibilidad de los precios de la opción a diferentes parámetros.
Fuente: Elaboración propia.

empírico de los índices bursátiles: a medida que ρ decrece de -0.5 a -0.9, la curva se mueve en torno al punto ATM, elevando la volatilidad ITM y reduciéndola en la zona OTM. Para $\rho = 0.5$ la pendiente se invierte, con volatilidad implícita creciente en el strike, característico de mercados donde las subidas del activo van asociadas a incrementos de volatilidad.
La subfigura (b) muestra que un incremento de σ_v no produce una sonrisa más curvada sino una pendiente negativa más pronunciada, pues con los parámetros calibrados ($\rho = -0.4$) el efecto de asimetría domina sobre el de curvatura. El nivel ATM permanece aproximadamente constante ($\approx$ 15–17 %), lo que indica que σ_v controla la forma de la sonrisa, no su nivel.
La subfigura (c) muestra que para vencimientos largos ($T = 12$ meses) la volatilidad implícita es más alta y la pendiente más suave, reflejando la reversión a la media de la varianza hacia θ. Para vencimientos cortos ($T = 2$ meses) la pendiente es más pronunciada, aunque la curva colapsa hacia cero en la zona OTM ($K/S_0 > 1.05$) debido a inestabilidades numéricas de la función característica con $\sigma_v = 0.586$, y no a un resultado económico.
Finalmente, la subfigura (d) muestra que las cuatro curvas de $\sigma_r \in \{0.005, 0.02, 0.06, 0.12\}$ son prácticamente indistinguibles. El elevado parámetro de reversión calibrado ($\gamma = 4{,}6$) hace que el tipo de interés converja rápidamente hacia su media η/γ, reduciendo el impacto acumulado de σ_r sobre la valoración. Ello sugiere que la mejora de Vasicek–Heston sobre Heston proviene principalmente del ajuste del factor de descuento vía el bono $P(0,T)$, y no de la dinámica estocástica del tipo corto.

6.5. Impacto del tipo de interés estocástico

La Figura 6.5 presenta la diferencia de precios $C_{\mathrm{VH}} - C_{\mathrm{H}}$ para tres niveles de volatilidad del tipo de interés ($\sigma_r \in \{0.01, 0.05, 0.10\}$), permitiendo cuantificar directamente el impacto de incorporar tipos de interés estocásticos en la valoración de opciones europeas sobre el S&P500.
El primer resultado destacable es que la diferencia es positiva en todo el rango de *moneyness* considerado, lo que confirma que el modelo Vasicek–Heston produce sistemáticamente precios superiores a los del modelo de Heston puro. Este resultado refleja el efecto adicional introducido por la incertidumbre en la estructura temporal de tipos: el bono cupón cero $P(0,T)$ bajo el modelo de Vasicek incorpora una prima de riesgo sobre el tipo de interés que, al actuar como numerario en la medida forward $\mathbf{Q^T}$ del Capítulo 5, eleva ligeramente el precio descontado de la opción respecto al caso de tipo constante. Adicionalmente, este efecto puede observarse incluso considerando solo la incertidumbre del tipo de interés en comparación con el modelo clásico de Black–Scholes (Abudy & Izhakian, 2013).
El segundo resultado destacable es que la diferencia es decreciente con el *moneyness*. Para opciones ITM profundas ($K/S_0 \approx 0{,}88$) la diferencia alcanza aproximadamente \$0.49, \$0.45 y \$0.33 para $\sigma_r = 0.01$, 0.05 y 0.10, respectivamente, mientras que para opciones OTM ($K/S_0 > 1.10$) la diferencia es casi nula en los tres casos. Este patrón indica que el impacto del tipo estocástico es mayor en opciones con alto valor intrínseco, donde el factor de descuento $P(0,T)$ tiene mayor peso relativo sobre el precio total. Las opciones OTM, cuyo valor proviene casi exclusivamente de la prima temporal, son menos sensibles al nivel del tipo de descuento y por tanto menos afectadas por su aleatoriedad.
El tercer resultado, aparentemente contraintuitivo, es que la diferencia es decreciente con σ_r.

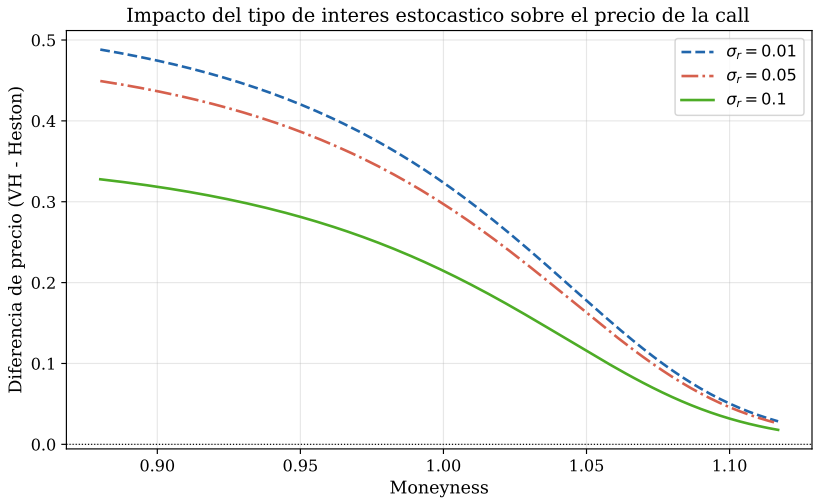


Figura 6.5. Impacto del tipo de interés estocástico sobre el precio de la opción.
Fuente: Elaboración propia.

La curva con $\sigma_r = 0.01$ supera sistemáticamente a la de $\sigma_r = 0.10$ en todo el rango. Esto se debe a que una mayor volatilidad del tipo genera, a través del término de ajuste de varianza (`vh_call_approx` en el código), una tasa forward r_{fw} implícitamente más alta, lo que reduce el precio de la call respecto a Heston en lugar de aumentarlo. En otras palabras, para valores elevados de σ_r el efecto de descuento más agresivo compensa parcialmente la prima de riesgo de tipos, reduciendo la diferencia neta respecto a Heston. En cualquier caso, las diferencias absolutas son pequeñas (inferiores a \$0.50 sobre precios de entre \$300 y \$1 000), lo que representa un impacto relativo inferior al 0.2 % en la zona ATM. Este resultado nos confirma que, para opciones sobre índices bursátiles con vencimiento a cuatro meses, la volatilidad estocástica es la fuente dominante de incertidumbre en el proceso de valoración, y el tipo de interés estocástico actúa como una corrección de segundo orden. El elevado parámetro de reversión calibrado ($\gamma = 4.609$) amortigua rápidamente las fluctuaciones del tipo corto hacia su media de largo plazo η/γ, limitando su influencia acumulada sobre el factor de descuento durante el período de vida de la opción.

Capítulo 7

Conclusiones

Hemos estudiado en el presente trabajo el impacto de incorporar dinámicas estocásticas en la volatilidad y en los tipos de interés sobre la valoración de opciones europeas, partiendo del modelo de Black–Scholes como referencia clásica y extendiéndolo hacia formulaciones más flexibles y realistas. A lo largo de estos capítulos hemos desarrollado los fundamentos teóricos de los modelos de Vasicek para el tipo de interés, Heston para la volatilidad y el modelo híbrido Vasicek–Heston que integra ambas fuentes de incertidumbre.

La aplicación empírica realizada con opciones call sobre el S&P500 muestra que el modelo de Black–Scholes resulta insuficiente para reproducir los precios observados fuera de la región at-the-money, con errores relativos máximos superiores al 85 % y una incapacidad estructural para capturar la pendiente negativa de la volatilidad implícita (volatility skew). Esta limitación evidencia que la hipótesis de volatilidad constante no refleja adecuadamente el comportamiento real del mercado, donde los inversores exigen primas de riesgo asimétricas ante movimientos extremos a la baja.

La incorporación de volatilidad estocástica mediante el modelo de Heston mejora notablemente el ajuste, reduciendo el error máximo al 1.11 % y reproduciendo de forma coherente la forma del skew. La extensión al modelo híbrido Vasicek–Heston, que permite tipos de interés negativos, aporta una mejora adicional aunque moderada, con un error máximo del 1.01 %. Esta diferencia reducida es coherente con la rápida reversión a la media del proceso de Vasicek ($\gamma = 4.629$), que limita el impacto de la incertidumbre sobre el factor de descuento en vencimientos cortos (125 días).

El análisis de sensibilidad reveló que los parámetros más influyentes en la sonrisa de volatilidad son la correlación ρ y la volatilidad de la volatilidad σ_v, mientras que la volatilidad de los tipos de interés σ_r apenas modifica la estructura implícita en el horizonte considerado. Por lo tanto, el trabajo ha permitido confirmar que las extensiones del modelo de Black–Scholes mediante la inclusión de volatilidad estocástica constituye una mejora sustancial en la valoración de opciones europeas, y que la incorporación de tipos de interés estocásticos aporta un refinamiento adicional. Ambos modelos, Heston y Vasicek–Heston, resultan herramientas adecuadas para la práctica profesional, siempre que se disponga de una calibración cuidadosa y se tenga en cuenta la estabilidad numérica de sus funciones características.

Bibliografía

Abudy, M. & Izhakian, Y. (2013). Pricing stock options with stochastic interest rate. *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, 1(3):250–277.

Artzner, P. & Delbaen, F. (1989). Term structure of interest rates: the martingale approach. *Advances in Applied Mathematics*, 10(1):95–129.

Ascione, G., Mehrdoust, F., Orlando, G., & Samimi, O. (2023). Foreign exchange options on Heston-CIR model under Lévy process framework. *Applied Mathematics and Computation*, 446:127851.

Berk, J. & DeMarzo, P. (2008). *Finanzas Corporativas*. Pearson Educación, México.

Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, Oxford, 3 edition.

Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, 3(1-2):167–179.

Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.

Brigo, D. & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models — Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2 edition.

Capiński, M. & Kopp, E. (2012). *The Black–Scholes Model*. Cambridge University Press, Cambridge.

Christoffersen, P., Heston, S., & Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, 55(12):1914–1932.

Chval, D. (2020). Heston-Hull-White model. In *Annual Conference on Finance and Accounting*, pages 85–94. Springer.

Clark, P. K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, 41(1):135–155.

Cochrane, J. H. (2009). *Asset Pricing: Revised Edition*. Princeton University Press, Princeton.

Derman, E. (2012). *My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343–1376.

Fallah, S. (2026). A Heston Fractional Vasicek Framework for Option Pricing. *Journal of Mathematics and Modeling in Finance*. págs. 225–249.

Gatheral, J. (2011). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

Gil-Pelaez, J. (1951). Note on the inversion theorem. *Biometrika*, 38(3–4):481–482.

Grzelak, L. A. & Oosterlee, C. W. (2011). On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2(1):255–286.

Guo, Z. (2021). Option pricing under the Heston model where the interest rate follows the Vasicek model. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 50(12):2930–2937.

He, X.-J. & Lin, S. (2026). Analytically pricing european options under a two-factor Heston-Vasicek model with regime switching and stochastic interest rate. *AIMS Mathematics*, 11(2):3986–4007.

He, X.-J. & Zhu, S.-P. (2018). A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of computational and applied mathematics*, 335:323–333.

Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343.

Hull, J. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281–300.

Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, Harlow, 11 edition.

Jackson, H. (2015). The international experience with negative policy rates. Technical report, Bank of Canada.

Karatzas, I. & Shreve, S. E. (2014). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York, 2 edition.

Lamberton, D. & Lapeyre, B. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2 edition.

McInerney, D. & Zastawniak, T. (2015). *Stochastic Interest Rates*. Cambridge University Press, Cambridge.

Neftci, S. N. (1996). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, New York.

Øksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 6 edition.

Oosterlee, C. W. (2007). The ING problem: a problem from the financial industry. In *Proceedings of the 61st European Study Group Mathematics with Industry*, pages 91–115.

Recchioni, M. C. & Sun, Y. (2016). An explicitly solvable Heston model with stochastic interest rate. *European Journal of Operational Research*, 249(1):359–377.

Recchioni, M. C., Sun, Y., & Tedeschi, G. (2017). Can negative interest rates really affect option pricing? empirical evidence from an explicitly solvable stochastic volatility model. *Quantitative Finance*, 17(8):1257–1275.

Revuz, D. & Yor, M. (2013). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Berlin, Heidelberg, 3 edition.

Roslan, T. R. N., Karim, S., Ibrahim, S. Z., Jameel, A. F., & Yahya, Z. R. (2022). Stochastic pricing formulation for hybrid equity warrants. *AIMS Mathematics*, 7(1):398–424.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, New York.

Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al. (2020). SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272.

Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge.

Wilmott, P. (2013). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, Chichester, 2 edition.

Wu, J. C. & Xia, F. D. (2020). Negative interest rate policy and the yield curve. *Journal of Applied Econometrics*, 35(6):653–672.

Apéndice A

Código

Haga click aquí para ver los códigos empleados en el trabajo: Código de Wolfram Mathematica y Python.