

ALÈP8

Revista de la Facultat de Matemàtiques

Número 14

Maig 1988



Monogràfic Nombres: Especial 10è Aniversari.

ALEPH

Revista de la Facultat de Matemàtiques
Número 14
Maig 1988



M. Y. Binimelis. Capçalera Aleph.

Editorial

Ara fa pràcticament 10 anys, al Maig de 1978, envoltat per un gran aldarull, enmarcat per inacabables debats, polèmiques i discussions entorn innumerables qüestions de règim intern de la nostra facultat, quan es veien néixer les primeres organitzacions d'estudiants, en ple procés d'elaboració de l'Estatut del Professorat, i amb molt bona voluntat, aparegué un «...butlletí intern de la Facultat, pensat i dirigit pels estudiants...», com així cal·licaren els redactors fundadors de la que acabava de néixer: "Aleph. Revista dels estudiants de Matemàtiques".

Fa molt temps que va aparèixer el número 0. Han canviat moltes coses en ella. El principal canvi, potser, i que ja observareu a partir d'aquest número, és que ja no la subtitulem "Revista dels estudiants de Matemàtiques" sinó "Revista de la Facultat de Matemàtiques" (malgrat les ambigüitats que introdueix aquesta expressió).

La justificació, o una d'elles, és que creiem que la revista és un mitjà, entre d'altres moltes coses, d'expressió per a tothom que participa en el Món de la Matemàtica en aquesta Facultat. Tots sabem que la principal tasca la duen a terme els alumnes. Nogensmenys, esperem que aquest canvi de "cognom" inciti als professors (que també han estat alumnes!) a participar i col·laborar amb més fruïció de l'observada fins ara.

Amb tres períodes clarament diferenciables: 78-82, 83-85, 86-88; en els quals s'aprecia un canvi radical de redactors i col·laboradors, la revista s'obrí camí entre nosaltres, amb èpoques de decadència (curs 85-86) i èpoques d'apogeu (curs 83-84). Les temàtiques de la revista han evolucionat d'una manera notòria; les tècniques també. Igualment creix d'una manera apreciable el nombre d'exemplars per tirada, arribant-se a donar re-impressions.

Ara, avui, 10 anys després, amb el número 14 a les mans, què podem dir que és la revista Aleph? O hauríem de dir "qui és"? És de suposar que durant l'època d'apariació dels 5 primers números—maig del 78 fins a novembre del 81—la revista Aleph s'hauria d'identificar amb els redactors fundadors, que mostraren una sorprenent continuïtat i perseverància. Sí, en aquells temps és molt probable que això fos cert, és molt possible que la revista Aleph fos només un mitjà de comunicació dins de la Facultat. Creiem, però, que actualment l'Aleph ha sobrepassat als redactors com a persones individuals: ha deixat de ser un mitjà d'expressió per a convertir-se en l'expressió mateixa. Actualment no és l'Aleph per l'article, sinó l'article per l'Aleph. L'Aleph cobra vida i s'identifica no amb els redactors, sinó amb les interrelacions temporals entre ells, que li fan canviar constantment d'equip tècnic.

L'Aleph sorgeix inevitablement de les brumes que intenten per tots els mitjans que desapareixi, reneix inexorablement d'un gran mar, s'aixeca, s'alça i torna a renéixer. De vegades aquest procés és i ha estat llarg, però sempre ha culminat. Actualment, la revista Aleph és una necessitat que hem de recolzar amb tots els nostres ànims. Des d'aquí, per tant, la felicitem i li desitgem un molt exitós 10è aniversari. Per molts anys, Aleph.

I recordeu, si mai algun estudiant de primer us preguntés: "Què és la Revista Aleph?" (nom el qual coneixerà perquè haurà llegit l'anunci de la reunió que usualment convoquem a principi de curs per marcar-nos uns objectius i idees), si us plau, no li contesteu, com a mi em va passar, que "...és una xorrada que fan uns pirats de per aquí, una tonteria, no els facis cas..." O és que hi ha algú que gosa afirmar que s'ha de fer cas a aquestes paraules?

I perquè especial nombres? Això sí que no ho podem respondre. Heu de ser vosaltres mateixos qui heu de respondre a aquesta pregunta. En aquest número trobareu algunes de les respostes que sol·licitament ens han cedit alumnes i professors. Només es tracta d'una petita guia perquè creeu i imagineu les vostres pròpies. És una cosa tan meravellosa el Nombre pel Matemàtic. Que potser ho és també a l'inrevés? Res millor que el Nombre, per tant, per a celebrar el 10è aniversari d'una revista de matemàtiques.

LA REDACCIÓ

Portada: El geni matemàtic a punt d'aconseguir un nou nombre. Disseny: M^a Ysabel Binimelis.

Índex

1. Editorial		1
2. Secció Cartes al Director		3
3. Secció Pla d'Estudis		7
4. Enquesta		11
4. Secció Notícies		13
5. Secció Entrevista		23
6. Secció Papiroflèxia		28
7. Secció Lògica		29
8. Secció Forjadors de la Matemàtica Moderna:	S. Ramanujan	35
9. Especial Nombres:	Apertura	44
	Introducció	45
	Què són els nombres?	47
	Aritmètica China	58
	Anàlisi no Standard	62
	En busca d'infinít com a	
	pi periòdic	66
	Nombres p-àdics	67
	Sobre els nombres perfectes	69
	Clausura	72
10. Jocs i Divertiments		73
11. Jocs de tauler:	Agressió	78
	Shogi	85
12. Secció Go:	El Go en xifres	90
	Comentant una partida	94
	Trofeu Aleph	96
	I Trofeu Aleph	97
13. Consultorio del <i>Conde Víctor</i>		100
14. Esperanto		103
15. Peripècies d'un estudiant modèlic		105

La Revista Aleph no reconeix cap altre limitació al dret d'expressió que la que marca el respecte degut a les persones. Això no vol dir que la Redacció comparteixi les opinions que s'hi recullen. La Redacció, per tant, no es fa responsable de les opinions dels col·laboradors.

La reproducció total o parcial dels articles que s'hi inclouen és permesa i encoratjada. Us agraïrem que en citeu la procedència, i els autors, si s'escau.

EQUIP TÈCNIC: Jaume Amorós, Sebastián del Baño, Pep Burillo, M^a Ysabel Binimelis, Jordi Barroso, Dimas Cabré, Àngel Gea, Olívia Núñez, Marina Ranchal, Jordi Salvat, Albert Violant.

COL·LABORADORS: Jaume Amorós, Sebastián del Baño, Dra. Pilar Bayer, Antoni Benseny, Miquel Bosch, Dimas Cabré, Carles Díez, Francesc Fernández, Joaquim Font, Joan Carles Gandía, Núria Garcia, P. Gush, Marina, Sebastià Martí, Juan Enrique Martínez, Olívia Núñez, Quim Ortega, August Palanques, Joan Pons, Dr. Miquel Ralló, Jordi Salvat, Josep Anton Sánchez, Àlex Sierra, Carles Simó, Joan Carles Tatjer, Jaume Timoneda, Albert Violant.

IL·LUSTRADORS: M^a Ysabel Binimelis, Anna Mauri Boix, P. Gush, Olívia Núñez, Quim Ortega, Jordi Salvat, lo veí de lo Jaume i els germans Albert, Àlex, Daniel, Deborah, Patrícia, Sònia i Yolanda Violant.

El Regal: El regal d'aquest número de l'Aleph ha estat confeccionat per l'Albert Violant i tots els seus germans quan eren més petits. Els models a petita escala han estat cedits gustosament pels mateixos.

Revista realitzada i editada pels estudiants i professors de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES 585 (Txiringuito), 08007, Barcelona.

Agraïm el suport econòmic de *Alexander Hutchinson & sons & widows, Co. Ltd.'s Holding*.

Rèplica a l'article de l'Aleph nº 13

Acollint-nos al dret de rèplica, universalment reconegut, volem donar resposta amb aquestes línies a l'article recentment publicat a la revista Aleph: "Vida i fets de la famosa assignatura de Càlcul". Independentment de trametre aquesta carta a la redacció de l'Aleph per si s'escau publicar-la en el proper número, la fem pública per poder exercir l'esmentat dret de la rèplica en un termini raonable. Volem creure que és únicament la inexperiència editorial de la Redacció el que fa que hom no pugui fer servir aquest dret en el mateix número; en publicacions diàries o setmanals, la rèplica es pot fer en un número posterior, però la revista Aleph no sembla tenir aquesta periodicitat.

Els professors de l'assignatura estan disposats a acceptar tot tipus de crítiques i suggeriments per treure'n la informació convenient per a millorar tant el programa com la seva aplicació. Haguéssim preferit rebre crítiques per camins més adients, però estan disposats a obrir un debat sobre els temes que es qüestionen. És per això que recollim aquelles observacions que ens han semblat apropiades, com ara la revisió del tema introductori i la interconnexió amb altres assignatures de primer curs.

Val a dir que aquesta discussió s'hauria de dur dins de la més global i ben actual sobre Plans d'Estudis, que per cert trobem a mancar a la Revista i que sembla que els autors de "l'obra" tenen oblidada. Per si algú no ho sap, els nous Plans d'Estudis sembla que inclouran una assignatura de Càlcul Numèric en el primer cicle. Recordem que l'Informe Tècnic sobre el Títol de Llicenciat en Matemàtiques es troba al tauler d'anuncis i a la Biblioteca.

Voldriem ara comentar breument els dos primers "actes" i deixar per al final "l'acte tercer", puix ens mereix una especial atenció.

La "guionista" del "primer acte" hauria de saber que el llenguatge Fortran és prou útil: els grans paquets de software s'acostumen a trobar en Fortran, i no en Pascal. "Fóra bo ensenyar Informàtica", però per a fer què: ordenar un fitxer o portar la gestió d'una empresa? A quina Facultat estem? Potser la part pràctica de les Matemàtiques no interessa a tothom, però hi ha milers de persones treballant-hi, i no precisament fent "treballs manuals". Quin sentit té evitar que et proposin tots els problemes que no t'has proposat?

Curs de tortura? ànimes que es perden? Tècniques d'opressió faringeal que culminen amb un ofegament brutal? màrtirs cercant dreces? temps perdut amb vici? acudits sobre el mètode QR? aplicacions insospitades de la interpolació (?) de Richardson? ... Siguem seriosos!

Segons el senyor Jordi Salvat, l'assignatura de Càlcul Numèric és: "una pèrdua de temps", "una enganyifa", "una presa de pèl" i sobretot "desorientadora". Segons nosaltres aquests qualificatius caldria donar-los al seu "tercer acte".

El dit "acte", basat en la pura desqualificació, no serveix per a millorar el funcionament docent en aquesta Facultat. És doncs una pèrdua de temps.

Així mateix, es fonamenta en una visió restrictiva de les matemàtiques que les fa un conjunt de coneixements coherent i ben estructurat, i no una disciplina en evolució, plena sempre de problemes nous, tant de caràcter teòric com pràctic. Una Facultat de Matemàtiques és com un taller on hom aprèn a fer mobles, i no una botiga on hom va a comprar-los ja acabats i polits. A més cal que s'hi ensenyi a fer una taula sencera i no a esmerçar tot el temps en polir quatre potes soles! És per això que diem que el seu "tercer acte" és una enganyifa.

Mai cap alumne no ha necessitat l'esmentada "habilitat excepcional fins i tot en un comptable" per a resoldre un exercici o aprovar l'assignatura, i mai no s'ha dit a Càlcul Numèric que un matemàtic és una "persona que treballa en números". Aquest "tercer acte" és una presa de pèl als lectors.

"Un matemàtic no és..., sinó alguna altra cosa que no sóc capaç de determinar, però que tots tenim més o menys clar ara mateix", "veure "matemàtiques"". Claredat i precisió en l'expressió? És gairebé l'única assignatura que es critica constantment i a fons". D'això en diu crítica a fons?

Conjures de Departaments? "llocs de treball", "nens de primer",... Estem desorientats!

El Càlcul Numèric de primer seguirà a primer fins a l'aplicació del nou Pla d'Estudis. Li recomanem al Sr. Salvat que esmerci totes les energies en l'actual discussió sobre aquests Plans i no ens torni a fer perdre el temps, ni a enganyar, ni ens prengui el pèl, i sobretot que no ens desorienti!

Aquesta carta recull el sentiment expressat per altres professors i alumnes de la Facultat, ultra els sotasignants.

Ens agradaria també conèixer l'opinió dels nombrosos alumnes que han acabat els darrers anys i que professionalment estan treballant en temes relacionats amb la Matemàtica Aplicada i la

Informàtica.

Nota final. Un cop redactada aquesta carta, ha sortit publicada a "La Vanguardia" del diumenge una entrevista amb el Dr. Manuel Castellet. Recomanem vivament la seva lectura.

Barcelona, 21 de desembre de 1987.

Antoni Benseny Ardiaca

Miquel Bosch Gual

Joaquim Fons Arió

Núria Garcia Garcia

Juan Enrique Martínez Legaz

August Palanques Mestre

Carles Simó Torres

Joan Carles Tatjer Montaña

Jaume Timoneda Salat

Resposta de l'Olivia, en Dimas i en Jordi

La lectura de la rèplica que els professors del Departament d'Equacions Funcionals han dedicat als nostres articles ens ha deixat sobretot la sensació de que no se'ns ha entès correctament. No volem entrar en els motius d'aquesta manca de comprensió, però creiem necessari observar que les nostres crítiques no anaven adreçades a la Matemàtica Aplicada (que sempre hem considerat una branca prou important de la Matemàtica), ni al Càlcul Numèric com a disciplina, ni a l'assignatura de Càlcul Numèric de primer, sinó amb el fet que aquesta assignatura es cursi a primer. No dubtem que és necessari impartir una assignatura de Càlcul Numèric al primer cicle, però creiem que no hauria de ser a primer, sota pena de perdre tota la seva riquesa, o de convertir l'assignatura en un curset de bricolage.

Seguint els suggeriments dels replicants, hem parlat amb alguns alumnes que ja han acabat la carrera i que treballen en feines relacionades amb la Matemàtica Aplicada i la informàtica (sovint de gestió). Tots ells opinen que l'assignatura és excessivament difícil per als alumnes de primer curs. Un d'ells ens va dir fins i tot que havia preparat una assignatura de segon cicle resolent—i algun cop intentant resoldre sense èxit—problemes d'examen de Càlcul Numèric de primer. Ben cert que el nombre d'opinions que hem pogut recabar és molt reduït. Ens agradaria conèixer-ne més.

D'altra banda observem que a l'enquesta es publica en aquest mateix número la major part dels professors que han respost (sigh!) opinen que el Càlcul Numèric no s'hauria de cursar—almenys en la seva totalitat—a primer curs. Ens preguntem si aquests professors no es qüestionen, com nosaltres: "Perquè encara s'imparteix el Càlcul Numèric a primer?" Les quatre respostes que es suggerien al tercer acte només eren especulacions, i no es pretenia que fossin encertades. En quant a la resposta correcta, resta encara per nosaltres la més absoluta foscor.

Potser la resposta la podríem buscar en el to de despreci i amenaça que usen els replicants en afirmar: "El Càlcul Numèric de primer segurà a primer fins a l'aplicació del nou Pla d'Estudis." Doncs esperem que sigui ben aviat! Ja al número zero de l'Aleph, ara fa deu anys, es parlava d'un nou pla d'estudis! O és que el pla d'estudis és una cosa tan rígida que, un cop creat, ja no admet modificacions?

Malgrat tot, volem expressar la nostra alegria per la intenció que es manifesta de modificar el tema introductori, i esperem que sigui el principi d'una sèrie de canvis que millorin l'ensenyament de la Matemàtica en aquesta Facultat.

Barcelona, 23 d'Abril de 1988.

Olivia Núñez
2on. curs

Dimas Cabré
2on. curs

Jordi Salvat
4rt. curs

Realment un amor impossible?

La qüestió es va plantejar obertament a l'anterior número de l'Aleph: el Càlcul Numèric. Ràpidament vaig sentir la necessitat de dir algunes coses, ja que si bé coincideixo amb algunes opinions expressades difereixo en altres. Però d'això parlaré més endavant. Primer plantejaré una qüestió no menys important.

És molt probable que hi hagi alguna assignatura que no t'agradi (o que no t'hagi agradat). Però pensa per uns moments: què és el que no t'agrada, el contingut de l'assignatura o la forma en què s'imparteix? Que una matèria t'agradi o no depèn en bona part de la persona (molta és la gent, per exemple, a qui no li agraden les matemàtiques), però també depèn del professor, del programa i de la manera d'impartir l'assignatura, i d'això se'n diu PEDAGOGIA. Per exemple, m'he trobat amb alguna assignatura que no m'agrada estrictament pel seu contingut, encara que el professor ho fa bé (fins i tot el professor et pot fer néixer l'interès). Però també m'he trobat amb altra que m'agradava però que el professor m'ha fet perdre tot l'interès i crec que podia haver estat una matèria molt interessant. I això és molt més greu; després de tres anys puc afirmar que en aquesta Facultat fa falta força més pedagogia. I no em refereixo a donar classe pensant en els alumnes.

Molt sovint el professor està tan familiaritzat amb el tema que explica que dona per suposat que els alumnes ho estan, quan de fet allò que s'explica és nou per nosaltres. El professor ha de pensar que encara que allò que explica sigui fàcil per a ell, l'alumne requereix haver-li donat voltes per entendre-ho. També ha de pensar que els alumnes hem d'estudiar dels apunts que prenem a classe i si l'explicació es converteix en una cursa contra el rellotge, entendre l'explicació i fins i tot prendre uns apunts decents esdevé una tasca impossible. Tothom agraeix una explicació estructurada que permeti aclarir les idees així com comentaris sobre la importància del que s'està fent, de manera que l'alumne en resulti motivat. També entra dins la pedagogia reconsiderar la conveniència de modelar el programa de l'assignatura si aquest és massa llarg, potenciar algunes parts o escurçar-ne d'altres.

Per a un professor donar classe pot representar una part petita de la seva feina a la Universitat, però que pensi que per nosaltres els alumnes aquesta feina representa tota la nostra dedicació i depenem bàsicament de la qualitat de l'explicació a classe.

Fetes aquestes consideracions podem passar al tema del Càlcul Numèric. El problema principal és que una assignatura com aquesta amb el programa actual (tant per la longitud com pel nivell) no és adient per un primer curs i menys amb tres hores setmanals de teoria.

En les condicions actuals, l'alumne es troba amb una sèrie de problemes en la manera d'impartir l'assignatura que creen desorientació, repulsió i generalment una terrible confusió. Si fem Càlcul a primer fem-ho bé. És totalment desmesurat intentar donar en un primer curs el programa actual ja que és massa llarg i empra conceptes i mètodes inassolibles. No es pot pretendre que s'entenguin exemples amb funcions de vàries variables, equacions en derivades parcials, un tractament estadístic de l'error aleatori (quan pràcticament ningú té els conceptes estadístics necessaris), el teorema central de límit (que s'aplica al Càlcul malgrat ser l'objectiu final de la probabilitat de tercer) o una sèrie de teoremes-sense-demostració. Són realment necessaris aquests tipus d'exemples? Certament que no, i són substituïbles per d'altres que seran més al·licionadors si estan a un nivell que es puguin assimilar amb els coneixements que ja es tenen.

També es poden millorar els exàmens: al primer exercici que em vaig trobar en un examen calia derivar una integral (???) i al tercer es parlava d'un nombre aixecat a una matriu (??). Pot reflectir un examen els teus coneixements si l'enunciat parla de coses desconegudes? Una altra qüestió és el temps: la meua experiència va ser trobar-me davant de tres problemes i, encara sabent com fer-los, vaig anar just de temps (pobres dels que no tinguin les idees clares). No es pot fer l'examen de càlcul en dues sessions com es fa amb la resta de primer i segon?

El que no crec és que una assignatura de càlcul numèric sigui dolenta a primer, encara que no és el lloc ideal, sempre que es facin els canvis necessaris (bàsicament escurçar el programa i baixar el nivell). Perquè quin és l'objectiu bàsic del primer curs de matemàtiques? En la meua opinió, no és, de cap manera, donar uns coneixements bàsics per a poder treballar. El que sí realment cal aprendre a primer és la formulació, el llenguatge, la forma de raonar, en una paraula, la mentalitat pròpia d'un matemàtic i aquí es fa necessària una assignatura de matemàtica aplicada. A primer s'ha de mostrar, com als altres cursos, l'existència d'una diversitat dins la matemàtica: si pensa de manera diferent un filòleg d'un matemàtic, també pensa de manera diferent un geòmetra que un que treballa amb matemàtica aplicada, i això s'ha de poder copsar al primer curs.

El càlcul numèric (o anàlisi numèrica) ens porta a la dualitat de la matemàtica: la matemàtica com a ciència en sí mateixa amb una estructuració interna (construeix i desenvolupa teories independents

del món) i la matemàtica com a eina (aplica aquestes teories procurant els mitjans matemàtics necessaris). Si fins ara la 1ª concepció (creació de teories) ha dominat entre els matemàtics sobre la 2ª, amb el desenvolupament de la computació la 2ª concepció de la matemàtica pot cobrar energies; i aquí el càlcul numèric juga el seu paper.

Pensem a més que a primer el càlcul ja pot complementar les altres assignatures: ens indica com calcular aquella suma infinita que l'anàlisi ens diu que és convergent però que no sabem sumar exactament, aquella integral d'una funció que no té primitiva, aquella equació no lineal de la que volem trobar una solució i com guanyar en precisió.

Podem concloure doncs, que el plantejament actual de l'assignatura de càlcul numèric a primer és clarament millorable. Una solució és reduir el programa, millorar pedagògicament l'explicació a classe, ampliar el temps d'examen i evitar exemples i conceptes que no es troben al nivell dels coneixements i/o capacitat de l'ampla majoria de l'alumnat. Altra possible solució és passar l'assignatura a un altre curs o separar-la en dues parts quadrimestrals, de manera que a primer s'estudiessin conceptes bàsics (errors, sèries, aproximació de funcions, interpolació o integració numèrica) i la resta en un altre curs. També és recomenable la potenciació de la informàtica com a eina.

Ja que cada vegada és major el nombre de matemàtics que fan matemàtica aplicada per la seva sortida laboral, fóra desitjable encomanar-los l'interès i l'estimulació.

Queda doncs oberta la porta per a la reflexió dels professors sobre la seva tasca educativa. Però també per nosaltres: la majoria dels que avui estem estudiant ens guanyarem la vida com a professors. Serem llavors capaços de fer una bona feina pedagògica?

Josep Anton Sánchez
3er. curs

Defensa de la SPFC

Distingits senyors:

Som un grup d'assidus lectors de la vostra revista que ens hem sentit profundament commoguts per la denúncia pública feta a la vostra revista per la SPFC.

Ens sentim totalment identificats amb la ideologia d'aquesta societat. Realment creiem que aquestes funcions són molt maltractades, sobretot quan són operades per alumnes desapersejats que no n'han après prou, quedant en tan lamentable estat que és absolutament impossible fer les operacions inverses per tornar a l'estat inicial.

Malauradament, malgrat tots els nostres esforços incommensurables no ens hem pogut posar en contacte amb l'esmentada societat donat que en l'adreça publicada (C/. Logaritme, $\alpha...$) no s'especificava el caràcter —variable o constant— de α .

Anhelant conèixer més informació sobre aquesta "humanitària" (potser fóra millor dir *funcionària*) societat que mereix tots els nostres elogis i recolzaments, hem decidit formar l'Agrupació de Defensa de les Funcions Contínues, esperant la nostra fusió amb la SPFC.

Molt atentament,

A.D.F.C.
(inscrita amb el nombre e^m en el
Registre Incivil de Societats de Belana.)

Nota de la Redacció: Les cartes adreçades a aquesta secció s'hauran de dipositar a la bústia de la Revista Aleph, situada al capdamunt de les escales que duen al Txiringueto (actualment les antigues "coves"), o hauran de ser entregades en mà a qualsevol dels membres de l'equip de l'Aleph. Les cartes hauran d'estar signades pel seu autor, fent-hi constar el nom i els cognoms.

Cap dels membres de la Redacció de la Revista s'identifica necessàriament amb les opinions expressades en aquesta secció. La Redacció es reserva el dret de contestar les cartes rebudes, els originals de les quals no seran retornats.

Reforma del Pla d'Estudis.

Dins el marc de la reforma dels plans d'estudi, ja fa mesos que va aparèixer l'informe tècnic del grup de treball sobre el títol de Llicenciat en Matemàtiques. Extracte d'aquest informe:

- Carrera de primer cicle (amb títol terminal o diplomatura) i segon cicle.
- Duració estimada: 3 + 2 anys.
- Càrrega lectiva troncal : 51.5% (1er. cicle) + 25% (2on. cicle)
- Matèries troncal adscrites a àrees de coneixement : Àlgebra, Geometria i Topologia, Anàlisi Matemàtica, Matemàtica Aplicada, Estadística i Investigació Operativa, Computació i Intel·ligència Artificial.
- Matèries troncal no fixades al segon cicle.
- Opcionalitat de l'estudiant : 10% com a mínim.
- Càrrega lectiva màxima setmanal del 1er. cicle :
 - 12 hores teòriques
 - 8 hores pràctiques
 - 5 hores laboratori (ordinador).
- Unitat del títol de Llicenciat en Matemàtiques.
- Sense limitació inferior o superior al període d'escolaritat.
- Possibilitat de començar la Llicenciatura sense haver acabat la Diplomatura.

En base a aquest informe es va obrir a les Facultats un debat del qual sortien les observacions i els suggeriments que es trametien al Consell d'Universitats abans del 19 de febrer de 1988.

El 14 / 12 / 87 fou publicat el Reial Decret 1497 / 87 de directrius generals comunes a totes les carreres. Resum del decret :

- Definicions:
 - DIRECTRIUS GENERALS COMUNES = aquelles aplicables a tots els plans d'estudi.
 - DIRECTRIUS GENERALS PRÒPIES = a més de les anteriors, les que són d'aplicació a tots els plans d'estudi per a títols específics.
 - PLA D'ESTUDIS = conjunt d'ensenyaments d'una Universitat, la superació dels quals dona dret a l'obtenció d'un títol.
 - MATÈRIES TRONCAL = continguts homogenis mínims dels plans de estudi, establerts per les directrius generals pròpies. Són d'obligatòria inclusió en tots els plans d'estudi que condueixen al mateix títol oficial. Les Universitats podran organitzar les matèries troncal en assignatures concretes.
 - CURRICULUM = estudis concrets superats per l'estudiant.
 - CRÈDIT = 10 hores d'ensenyament teòric, pràctic o llurs equivalències.
- Ordenació cíclica de l'ensenyament :
 - PRIMER CICLE : dos a tres anys amb possibilitat de Diplomatura (a establir en les directrius generals pròpies).
 - SEGON CICLE : dos anys. Pot durar tres anys si el primer cicle és de dos anys.
- Aquesta duració en anys acadèmics no és obligatòria per a l'estudiant.
- Càrrega lectiva:
 - Entre 20 i 30 hores setmanals
 - Entre 60 i 90 crèdits per any acadèmic.
 - Com a màxim 15 hores setmanals de teoria.
- Hi ha matèries troncal, matèries obligatòries i optatives determinades per la Universitat, a més

de matèries de lliure elecció per l'alumne.

- Vinculació de les matèries a àrees de coneixement, és a dir, només podran donar les classes els professors de l'àrea o àrees que l'indiquin.

- Les directrius generals pròpies seran aprovades pel govern a proposta del Consell de Universitats.

- Possibilitat de valorar com a crèdits del curriculum les pràctiques realitzades en empreses, els treballs professionals acadèmicament dirigits, i els estudis realitzats en el marc de convenis internacionals subscrits per la Universitat.

Els dies 3, 4 i 5 de Febrer hi va haver una reunió dels Degans de Facultats de Matemàtiques a la UAB. Van redactar un document crític del RD 1497 / 87 amb els següents punts principals :

- El RD entra en contradicció amb algunes parts de la proposta del grup de treball.

- Consagra una excessiva càrrega lectiva.

- Excessives matèries troncales.

- El RD adscriu de manera rígida les matèries troncales del primer cicle a àrees de coneixement.

I d'entre les seves propostes :

- Modificar l'esmentat RD.

- Dedicar part de la càrrega lectiva a activitats que promouen el treball individual. Cal un treball personal fort per assimilar les matemàtiques.

- Limitar la troncalitat del primer cicle a un 30% dels crèdits.

- Assignar el 50% dels crèdits no troncales del primer cicle a 3 àrees triades entre gairebé totes les possibles dins les matemàtiques : Àlgebra, Anàlisi, Computació i Intel·ligència Artificial, Estadística i Investigació Operativa, Geometria i Topologia, Matemàtica Aplicada.

- Suprimir la troncalitat del segon cicle tot i destinant el 40% dels crèdits a algunes de les àrees esmentades abans.

- Descartar un títol exprés per a la docència a l'ensenyament mitjà.

- Permetre als matemàtics l'ensenyament de matèries matemàtiques d'altres títols.

Finalment, el passat 16 de Febrer hi va haver una Junta de Facultat en la qual van ésser aprovats els suggeriments i les observacions a l'informe tècnic, la pròpia proposta de la Facultat, i un acord de la Junta amb consideracions generals sobre la reforma. Tot s'ha tramès al Consell d'Universitats.

L'acord esmentat considera el RD 1497/87 inoportú, reglamentista i particularitzador, i sol·licita la seva modificació en els següents termes :

- Supressió de l'adscripció obligatòria a àrees de coneixement de les matèries troncales del primer cicle, a fi i efecte de permetre a les Universitats seleccionar el departament i el professorat per a les assignatures corresponents.

- Diferenciació clara entre "matèria" i "assignatura", de manera que en les directrius generals no apareguin assignatures sinó matèries.

- Flexibilització del concepte de crèdit, car una equivalència mecànica amb 10 hores lectives no permet valorar el treball individualitzat dels alumnes.

L'acord reivindica també la possibilitat que els matemàtics ensenyin matèries matemàtiques que hi pugui haver dins d'altres títols. I finalment distingeix entre dos models de llicenciatura, tots dos igualment vàlids :

- a) 5 anys = 3 (1er. cicle) + 2 (2on. cicle) anys. El primer cicle serà molt general. El segon cicle amb especialitzacions i, per tant, sense matèries troncales.

- b) 4 anys. Formació general forta amb inicis d'especialització, però deixant aquesta per al tercer cicle (post grau o doctorat). Aquest model s'assembla més a l'europeu o nordamericà.

Observacions i suggeriments a l'informe tècnic:

- Duració de 5 anys correcta si al segon cicle no hi ha matèries troncal. Però és preferible una llicenciatura de 4 anys per raons d'homologació amb altres països (especialment els de la CEE). En cas de crear-se la Diplomatura caldria potenciar les seves atribucions professionals.

- Nombre excessiu de crèdits si aquests s'entenen exclusivament referits a les hores de classe.

- Troncalitat excessiva al primer cicle. La relació de matèries troncal del primer cicle ho és de assignatures amb contingut molt detallat o massa extens. L'oferta de troncal al segon cicle és una llista sobreabundant i incompleta. Les Universitats han de tenir prou marge per establir les matèries del segon cicle en funció de les especialitats de cada comunitat universitària.

- No s'esmenta enlloc l'àrea de " Lògica i Filosofia de la Ciència".

Proposta de la Facultat per al títol de Llicenciat en Matemàtiques, d'acord amb les directrius generals comuns del RD 1497/87 :

- Carrera de primer cicle (sense títol terminal) i segon cicle.

- Duració estimada : 2+ 2 anys.

- Carrega lectiva troncal : 40% + 20%.

- Matèries troncal del primer cicle adscrites a totes les àrees de coneixement (que és tant com dir a cap).

Hem xerrat una mica de tot això amb el Degà de la nostra Facultat, en Josep Maria Font i Llovet, per tal d'aclarir algunes coses.

Les matèries troncal són aquelles obligatòries a tota Espanya. Això no vol pas dir que les matèries no troncal siguin lliures. Les Universitats poden posar-ne d'obligatòries bo i respectant el 10% de crèdits opcionals de l'alumne. La proposta dels Degans d'assignar el 50% dels crèdits no troncal al primer cicle a 3 àrees triades entre gairebé totes les possibles, respon al desig d'evitar que una Facultat pugui especialitzar-se excessivament, però sense recórrer a augmentar la troncalitat. És un compromís entre el manteniment del contingut convencional d'una llicenciatura en Matemàtiques i l'autonomia de cada Facultat per establir el seu pla d'estudis. En qualsevol cas l'estudiant té absoluta llibertat per escollir matèria dintre dels seus crèdits opcionals. Pot escollir des d'Història de l'Art fins Dret Romà.

Pel que fa a la Diplomatura en Matemàtiques, el Degà ens ha comentat que un títol és un permís per treballar. I resulta que hom no ha perfilat les competències professionals del diplomad, si és que n'hi ha (per exemple podrien ensenyar matemàtiques en els darrers anys d'EGB). Preguntat per la possibilitat que l'empresa privada no trobés avantatges en el llicenciat respecte el diplomad, el Degà ens ha dit que els coneixements més apreciats per les empreses (entre els que destaca clarament la informàtica) s'aprenen precisament en el segon cicle. Ha negat l'existència de corporativisme dins la comunitat matemàtica, perquè són pocs i no tenen col·legi professional. En definitiva la Facultat no s'oposa a la diplomatura si aquesta és dotada amb competències professionals específiques; en aquest cas es faria un Pla d'Estudis propi, no simplement agafant el primer cicle de la Llicenciatura.

Per últim, el Degà no es mostra gaire preocupat pel fet d'haver-se encetat la reforma dels plans d'estudi universitaris sense haver reformat abans l'ensenyament mitjà. Diu que això és el peix que es mossega la cua i que una Facultat de Matemàtiques té marge per adaptar el primer curs al nivell dels nousvinguts.

Joan Carles Gandía
2on. curs

Una llicenciatura de 4 anys?

El procés de discussió i debat de les directrius que hauran de seguir els nous plans d'estudis s'ha acabat. Tothom ja ha dit la seva i ara el "Consejo de Universidades" té la última paraula. Un cop s'hagi pronunciat començarà l'elaboració dels plans d'estudis i serà competència exclusiva de cada facultat (és a dir, tasca de tots nosaltres).

L'aspecte més important que fixaran les directrius definitives, el model de llicenciatura, determinarà la filosofia de l'ensenyament de Matemàtiques.

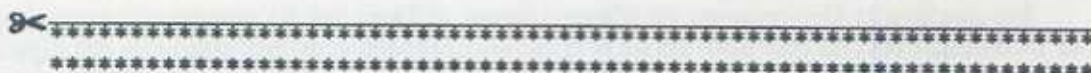
El model de 5 anys tindrà una estructura molt semblant a l'actual (amb una lleugera reducció de càrrega i/o hores lectives): un primer cicle de tres anys, i un segon cicle de dos sense matèries troncales en què s'impartirien assignatures d'un alt grau d'especialització. Després, uns cursos de doctorat que tractessin aspectes molt concrets i particulars.

El model de 4 anys no voldria pretendre que en aquest temps s'assimilés a la matèria que ara es cursa en 5 anys i que a mi em sembla ja excessiva, sinó que, contràriament, intentaria donar uns coneixements menys específics, aprofundint i assentant aquells conceptes bàsics en Matemàtiques que de vegades, bé quan els fem servir en cursos superiors o bé donant classes, ens adonem que no tenim ben assimilats.

D'aquesta manera, en quatre anys i segons la sortida professional escollida, cada llicenciat podria triar un curs de post-grau adient que reforçés i ampliés els seus coneixements en la direcció desitjada (ensenyament, empreses, informàtica,...), o bé podria seguir especialitzant-se tot estudiant un curs de doctorat. Aquest podria incloure moltes de les assignatures que ara es cursen a 5è, però estan a nivell de 3er. cicle. Finalment, afegir que la majoria de països del Mercat Comú tenen llicenciatures de 4 anys i produeixen igualment bons matemàtics.

Sigui quin sigui el model a seguir, caldrà no només suprimir allò que no funciona o no interessa de l'actual pla, sinó també introduir-hi noves idees i experiències a fi de paliar problemes greus tals com la desmotivació per part de l'alumne i, de vegades, del professor i la gran quantitat de suspesos.

Sebastià Martín
 Representant de la Comisió de
 Seguiment del Pla d'Estudis
 3er. curs



AGÈNCIA MATRIMONIAL DE L'ALEPH

Interessats reomplir la següent enquesta:

- 1/ Tendència política: ☐ Anarquista ☐ Axiomista
- 2/ Tens prejudicis en contra de les superfícies no orientables: ☐ Sí ☐ No
- 3/ La teva edat: ☐ Numerable ☐ No numerable(!?)
- 4/ Com t'agradaria que fos la relació amb la teva parella:

☐ Compacta	☐ Discreta	☐ Contínua
☐ Lògica	☐ Estrictament positiva	☐ Oberta

Per a més informació, pregunteu pel Doctor Alexander Hutchinson a la redacció de l'Aleph.



El primer cicle (cara i creu)
Part 2 (i creu)

Aquesta enquesta va ser realitzada durant el segon trimestre del curs 87/88. Es va enviar un qüestionari a cada professor de la Facultat, demanant-los que deixessin la resposta a la bústia de l'Aleph. Ens han arribat 16 qüestionaris omplerts. A continuació publiquem les dades que ens han semblat interessants a títol de curiositat, sense pretensions de que siguin representatives.

1.- Sobre la funció del primer cicle.

A cap dels professors enquestats no li va semblar que hi hagués especialitats injustament deixades de banda al primer cicle.

2.- Sobre l'assignatura de càlcul numèric.

12 dels 16 enquestats no mantindrien l'assignatura de Càlcul Numèric de primer tal com està, i 8 d'aquests 12 la dividirien en dues quadrimestrals que s'haurien de cursar a 1^{er} i a 3^{er}.

3.- Sobre el ranking de professors publicat a l'Aleph nº13.

11 dels 16 professors no consideren significatius els resultats. Les raons que donen són:

- Sovint la mostra d'alumnes és massa petita.
- L'alumne hauria d'opinar només dels professors que té el mateix any de l'enquesta.
- En un mes de classe (que era el que portavem quan vàrem passar l'enquesta) l'alumne no es pot formar una opinió global.
- Una puntuació, un número, és difícil d'entendre.
- Un professor del MAIA es queixava de que donàvem els promigs amb dos decimals i les desviacions típiques amb quatre decimals.

4.- Sobre les classes de problemes.

12 dels 16 professors opinen que haurien de ser una classe activa entre professor i alumne. Respecte de les classes holandeses, hi ha una gran diversitat d'opinions.

5.- Dedicació.

La majoria dels professors declara que dedica a les matemàtiques entre 40 i 50 hores a la setmana.

Cap professor no prefereix l'ensenyament a la investigació. 8 prefereixen investigar o estudiar i 7 troben igual d'interessants les dues.

La relació entre el temps dedicat a estudiar/investigar i el temps dedicat a ensenyar és molt variada. Però tothom dedica a la investigació més temps, o com a molt el mateix, que a l'ensenyament, essent un cas extrem la relació de 5 a 1.

6.- Interès per les matemàtiques.

11 dels 16 enquestats declaren tenir més interès per les matemàtiques que quan van començar la carrera. Els altres 5 diuen que el seu interès no ha variat des d'aleshores.

En general, no es penedeixen d'haver-se quedat a la Universitat. Només un es queixa de que el seu sou és massa baix, tot i que la feina és agradable. La resta ens recorden que la Universitat els permet dedicar-se a la recerca.

A la majoria no els molesta haver d'ensenyar, tot i que es queixen de que els alumnes posem poc de la nostra part.

A cap d'ells no li molesta haver d'estudiar/investigar.

NOTA: Aquesta enquesta pretenia ser un complement a la que es va publicar sota el mateix títol al número 13 de l'Aleph (Desembre 1987). Però no ha estat així. Què és el que no ha rutllat?

1. Vam portar malament la idea inicial de fer enquestes paral·leles al professorat i a l'alumnat, senzillament perquè vam dissenyar l'enquesta als alumnes sense preocupar-nos de quines serien les preguntes "paral·leles" que fariem als professors uns mesos més tard.

2. El resultat va ser una enquesta amb títol i contingut deslligats, com alguns professors ens han fet notar.

3. Tot i la nostra insistència, els professors s'han mostrat molt passius. La majoria no tan sols no han contestat les preguntes, sino que ni tan sols s'han donat per assabentats de que se'ls preguntava res.

4. Hi havia algunes preguntes improcedents, les preguntes d'identificació eren massa identificatòries.

Volem donar les gràcies a tots els professors que han contestat l'enquesta i/o ens han fet arribar les seves crítiques.

<u>Joan Carles Gandia</u>	<u>Olivia Núñez</u>
2on. curs	2on. curs
<u>Sebastián del Baño</u>	
2on. curs	

La Universidad de Jerusalén, víctima del "virus" del ordenador

Extret de La Vanguardia del dia 25
de Gener de 1988.

Jerusalén. (Efe.) - Un disco destructor, conocido como el "virus" israelí, ha paralizado momentáneamente el sistema de computación de la Universidad Hebrea de Jerusalén. "contagiando" a mil ordenadores personales como una verdadera epidemia. El disco actúa como un cáncer, instruyendo a los programas a automultiplicarse hasta desbordar la memoria de la computadora personal y paralizarla. Cuando el pasado miércoles se detectó el "virus", fue destruido por medio de un programa "antídoto" y se programó otro para "inmunizar" la memoria de los ordenadores. Sin embargo, las computadoras siguen paralizadas, situación que se atribuye a un sabotaje.

Crònica d'un desencís (variacions sobre un tema de Fermat)

És demostrable el darrer Teorema de Fermat? Durant quasi bé 300 anys, infinitat de persones s'han esforçat perquè ho sigui. No obstant, tots els igualment infinits intents han fracassat. Aquest any hem pogut assistir a un dels intents més espectaculars (potser pel grau de desenvolupament actual dels medis de comunicació...) i alhora decepcionant (podríem dir esperançador?) pas per pas (dins l'àmbit de la notícia). Heus aquí els articles que han marcat durant els mesos de Març i Abril la història d'un fracàs (qui espera que només momentani?), heus aquí una crònica d'un desencís originada per un matemàtic francès el nom del qual comença per 3'1415926535897932384626433832795028841971.

Article publicat al diari *La Vanguardia* el dia 20 de Desembre de 1987

(20-XII-1987) (Oboès) Un teorema establecido hace 350 años se resiste todavía a ser demostrado.

Fermat, el reto no resuelto de las matemáticas.

Newton reconoció explícitamente su deuda con Pierre de Fermat, cuyas técnicas de geometría analítica —por ejemplo para la determinación de máximos y mínimos de funciones algebraicas— sirvieron para sentar las bases del decisivo cálculo infinitesimal, parte de las matemáticas que impulsaron espectacularmente el desarrollo de las Ciencias y Tecnología gracias a Newton y Leibniz.

Fermat (1601-1665) fue matemático por afición, pues en realidad era abogado, llegando a ser magistrado de Toulouse. Su legado matemático es notable en los campos de la aritmética, cálculo de probabilidades, geometría analítica y especialmente su desarrollo de técnicas de análisis numérico, introducidas previamente por Diofanto. Pierre de Fermat ha pasado a la historia por méritos propios, pero sobre todo porque entre su legado ha dejado planteado uno de los retos de las matemáticas —el famoso último teorema de Fermat, como comenta en esta página (*) el catedrático de topología de la Universidad Autónoma de Barcelona, Manuel Castellet—, cuya resolución sigue pendiente más de tres siglos y medio después.

Fermat sólo dejó escrito en un margen de una obra de Diofanto —la mayor parte de la obra matemática de Fermat se conoce por su correspondencia y semejantes anotaciones marginales sin demostración— que había establecido una "notable demostración" de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución entera para un valor de n mayor que 2. Fermat sólo dejó una demostración para el caso concreto de $n=4$, pues en el citado margen únicamente anotó que no le cabía la demostración general de su tesis. Concretamente las palabras escritas por Fermat eran: "*Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados y una potencia cualquiera en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración de suyo notable, pero el margen del libro es demasiado estrecho para ponerla.*"

Desde entonces, muchos matemáticos han atacado el problema mediante diferentes técnicas sin llegar a establecer una demostración general viable. Euler realizó en 1770 una demostración parcial para el caso $n=3$, que fue completada por Gauss. Y posteriormente otros matemáticos abordaron el problema y lo siguen abordando hasta el presente. Las dos aportaciones más notables son la de Kummer, hacia 1850, y la de Faltings, hace cuatro años.

Kummer demostró la veracidad del teorema de Fermat para toda una serie de valores primos de exponente n y sus demostraciones fueron completadas posteriormente, en las que han intervenido procesos informáticos, para todos los valores primos de n menores que 125.000. Sin embargo, las demostraciones de Kummer no pudieron aportar nada a una generalización del problema.

En 1983, el joven matemático alemán Gerald Faltings consiguió demostrar el primer resultado general relacionado con el teorema de Fermat, aunque sea sólo una conclusión parcial. La conclusión de Faltings es que la ecuación de Fermat, si tiene soluciones, estas son únicamente en número finito para un exponente mayor o igual que tres, lo que obviamente es un paso importante para llegar a demostrar algún día que no existe solución alguna que cumpla la hipótesis establecida por el

(*) N.R.: Precisament fa referència a l'article que recomanen els professors de Càlcul en aquest mateix exemplar. [Veure secció "Cartes al Director".]

abogado-matemático francés del siglo XVII.

Para llegar a este resultado, Faltings previamente demostró las conjeturas —presuntas verdades intuitivas pero indemostradas— de Mordell, Tate y Shafarevitch. Las dos últimas están relacionadas con la que estableció el primero en 1922, cuyo enunciado es que toda curva algebraica —con la excepción de las más simples, como la recta y la circunferencia— sólo pasa por un número finito de puntos cuyas coordenadas son números racionales.

Sólo han pasado cuatro años de los resultados obtenidos por Faltings, pero seguro que en estos momentos en diferentes centros matemáticos del mundo se está trabajando para llegar a asegurar algún día que Fermat, hacia 1630, tenía razón al anunciar su hoy casi mítico teorema. Pero si importante es resolver el reto que sigue planteado desde hace unos 350 años, trascendental puede ser el avance de las matemáticas una vez obtenido este resultado. El teorema de Fermat no sólo ha supuesto que la curiosidad de los matemáticos haya espoleado la investigación en nuevos campos durante siglos. Cada vez que se da un paso decisivo en matemáticas y se supera un problema planteado durante años, el salto cualitativo y cuantitativo es enorme. Ahora estamos en el umbral de que algo así ocurra...

Vladimir de Semir

Traducció d'un article publicat al diari
International Herald Tribune del dia 10 de Març
de 1988.

(10-III-1988) (Trompetes) El darrer Teorema de Fermat: resultat?

El més famós de tots els problemes matemàtics no resolts, un problema que ha ocupat i exasperat les millors ments en matemàtiques durant 350 anys, pot haver estat resolt.

El problema, anomenat el darrer teorema de Fermat, ha incitat a resoldre'l a milers de matemàtics a través dels segles.

S'han ofert premis per una demostració i en una novel·la curta de 1954 el mateix diable ho va intentar i va fracassar en la demostració. Però fa dues setmanes, Yoichi Miyaoka, un matemàtic japonès de 38 anys, fou a la pissarra davant de tres dotzenes de matemàtics a l'institut Max Planck a Bonn i gargotejà una prova que fou automàticament reconeguda per la seva audiència com a seriosa i possiblement correcta.

Matemàtics d'Alemanya, França i Estats Units han estat comprovant la demostració i fins el moment no hi han trobat errors.

El problema comença amb el teorema de Pitàgores, $a^2 + b^2 = c^2$, que s'empra per determinar la hipotenusa d'un triangle. Si a^2 i b^2 són nombres enters —per exemple 3^2 i 4^2 — aleshores la solució és un nombre enter (*sic*). En aquest cas, c^2 fóra 5^2 .

Però això només funciona per quadrats. Cap potència superior dona una elegant solució entera.

Per exemple, en la relació $a^3 + b^3 = c^3$, les lletres a, b, c no poden ser enters positius.

Pierre de Fermat, un matemàtic amateur i jutge del segle XVII a Toulouse, França, va dir que ell podia demostrar que era impossible trobar solucions enteres per qualsevol potència més gran que dos. Va escriure el problema en un antic llibre d'aritmètica grega i va afegir al marge "he trobat per a això una prova realment magnífica, però el marge és massa estret per escriure-la".

Va ser una línia que va disparar milions d'equacions. Els matemàtics dels segles següents han pensat que el problema era massa difícil fins i tot per a Fermat i que va escriure la nota amb un pervers sentit del humor o, pitjor, es va enganyar a si mateix creient tenir la demostració.

«Si Fermat va tenir realment una demostració, ningú no té ni la més remota idea de com era», va escriure Ian Stewart de la Universitat de Warwick a Anglaterra. «Tant si Fermat se'n va adonar d'alguna cosa de la qual no s'ha percatat ningú fins ara, com si s'estava autoenganyant, la seva observació gairebé casual és responsable d'una gran quantitat de matemàtica. El darrer Teorema de Fermat és un exemple d'un problema tan bo que fins i tot els seus fracassos han enriquit les matemàtiques més enllà de tot límit».

Els intents de resoldre han obert diversos camps en matemàtiques. Alguns d'ells han tingut aplicacions pràctiques, una cosa no gaire corrent en matemàtiques pures. La recent creació de "codis

indesxifrables" és descendent dels treballs en el Teorema de Fermat.

La demostració del Dr. Miyaoka "és molt emocionant, perquè és i ha estat sempre el problema obert més famós en matemàtiques", va dir Ron Zagier, un matemàtic de la universitat de Maryland que treballa uns despatxos més enllà del del Dr. Miyaoka a Bonn. "De fet, és gairebé una pena que s'hagi resolt. La recerca d'aquesta demostració ha estat com la recerca del Sant Grial".

Com que encara hi ha alguna possibilitat d'error en el difícil raonament del Dr. Miyaoka, els matemàtics no declararan resolt el problema de Fermat fins que molts experts treballin sobre ell les dues setmanes següents.

El Dr. Miyaoka, un professor ajudant de la Universitat Metropolitana de Tokyo, va desenvolupar una demostració sense ordinador treballant sobre els resultats del matemàtic soviètic A.N. Parshin, de l'Institut Steklov a Moscou. El seu treball va constituir part de la solució, ha dit un matemàtic i el Dr. Miyaoka hi està d'acord.

La solució de Miyaoka no ens il·lumina sobre si Fermat tenia o no una demostració. Si la tenia, no era la que el Dr. Miyaoka ha trobat, que no funcionaria sense les tècniques de la matemàtica moderna, i fins i tot alguns resultats de física teòrica. "Aquesta demostració no podia haver existit ni tan sols fa 10 anys", va dir el Dr. Zagier.

Philip J. Hilts
Washington Post Service

Article publicat al diari *La Vanguardia*, el
dia 27 de Març de 1988.

(27-III-1988) (Violins) Seria la noticia matemática del siglo.
El Teorema de Fermat puede haber sido resuelto.

El pasado 20 de diciembre, llevados de una simple intuición escribíamos en estas páginas que posiblemente estábamos en el umbral de que se resolviera uno de los grandes retos que la ciencia tiene planteados: demostrar el teorema de Fermat, que se ha resistido durante 350 años a todos los intentos realizados por los más conspicuos matemáticos del mundo. Ahora, desde hace un par de semanas, el mundo de las matemáticas está convulsionado porque un matemático japonés ha anunciado—y en principio los expertos consideran que puede ser verosímil— el haber encontrado una aproximación muy importante que puede llevar a la solución del mítico problema planteado.

La historia arranca del siglo XVII cuando Pierre de Fermat —en realidad un abogado cuya afición eran las matemáticas— enunció que «es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados y una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente; he encontrado una demostración de suyo notable, pero el margen del libro es demasiado estrecho para ponerla». Estas simples dos frases se convirtieron en uno de los mayores retos y hasta ahora nadie lo ha sabido resolver.

El enunciado del teorema equivale a plantear que si n es un número entero mayor que 2, la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución entera positiva distinta de la trivial ($x=y=z=0$). Naturalmente para el valor 2 existen tales soluciones; basta utilizar por ejemplo los llamados números pitagóricos 3, 4 y 5, cumpliéndose que $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9+16=25$).

El propio Fermat nos legó una demostración para $n=4$. Euler realizó en 1770 una demostración parcial para el caso de $n=3$ que completó más tarde Gauss. Legendre i Dirichlet comprobaron la veracidad para el valor de 5 y otros matemáticos han demostrado casos concretos, incluso utilizando modernamente los recursos informáticos. Una aportación notable aunque no de carácter general fue la de Kummer, en 1850, que demostró el teorema de Fermat para una serie de valores primos del exponente n , que fueron completados mucho más recientemente para todos los valores primos menores de 125000. La única demostración de tipo general alcanzada hasta ahora la consiguió en 1983 un joven matemático alemán, Gerd Faltings, al llegar a la conclusión —demostrada, claro— de que el teorema de Fermat, si tiene soluciones, estas son únicamente un número finito para un exponente mayor o igual que 3.

A finales del pasado mes de febrero, Yoichi Miyaoka, un matemático japonés de 38 años de la Universidad Metropolitana de Tokyo, dio a conocer a grandes rasgos los eslabones de una

demostración en el Instituto Max Planck de Bonn ante una docena de relevantes matemáticos basada en potentes recursos de la geometría algebraica —sin recurrir para nada a computadoras—y basándose en trabajos previos del matemático soviético Parshin. Las primeras conclusiones que se han dado a conocer establecen que el trabajo es serio y verosímil, pero seguramente hará falta que transcurran varios meses para que los analistas ratifiquen o no que realmente se ha dado este paso de gigante en el mundo de la matemática. No puede ser de otra forma ante tan trascendental resultado que comportaría haber roto uno de los grandes mitos de la historia de la matemáticas.

El teorema de Fermat ha contribuido a lo largo de tres largos siglos y medio a desarrollar las matemáticas, ya que son innumerables los científicos que han abocado el problema sin llegar a soluciones válidas pero que han dejado en el camino su trabajo, muchas veces fructífero para diversas ramas de las matemáticas. Lo que está claro es que si realmente Fermat había encontrado una demostración plausible no tiene nada que ver con la posible demostración que ahora se haya efectuado, ya que se utilizan recursos desconocidos en aquellos tiempos. Sobre este respecto, el matemático Don Zagier de la Universidad de Maryland comentó días atrás al *Washington Post* que «la demostración que ahora estamos estudiando no podría haber existido sólo diez años atrás, ya que entonces no estaba tan desarrollada la matemática que utiliza el profesor japonés. La demostración es muy excitante, ya que es el más famoso problema que permanece abierto en las matemáticas y que posiblemente no admite parangón en toda la historia de la ciencia. Personalmente creo que casi es una lástima que pueda haber sido resuelto. La persecución de una solución al teorema de Fermat es equiparable con la busca del santo Grial».

El misterio permanece.

De todos modos, aunque se haya llegado al final de este camino, está claro que el misterio sobre las palabras de Fermat seguirá abierto. ¿Encontró realmente Fermat una demostración que hoy podría ser catalogada de sencilla con las bases matemáticas que él podía utilizar hacia 1637? Seguramente, cuando se confirme, o no, si Miyaoka pasa a la historia de la humanidad por haber resuelto el reto que ha permanecido planteado durante 350 años, los hombres de ciencia seguirán con la duda sobre si Fermat quiso o no pasar a la posteridad con una conjetura que él sabía que no podía demostrar, que se había equivocado, que simplemente deseaba plantear un desafío a la ciencia o que efectivamente era tan genial que nadie ha podido igualarlo hasta ahora.

Quizá sea exagerado afirmar que, si hay solución, se ha establecido el hilo más importante en la ciencia de nuestro siglo —a pesar de que el hombre haya llegado a la Luna—, pero lo que nadie negará es que la demostración del teorema de Fermat —si se confirma, insistimos— es la noticia más singular de nuestro siglo en el campo de las matemáticas.

Vladimir de Semir

Traducció d'un article publicat al diari
International Herald Tribune del dia 31 de Març
de 1988.

(31-III-1988) (Violoncel) La resolució del Teorema de Fermat es resisteix.

NEW YORK (NYT) —El problema matemàtic més notori no resol, el Darrer Teorema de Fermat, sembla ser que ha vençut en un altre atac, proposat per un professor japonès de Teoria de Nombres. Els experts que han examinat un esborrany manuscrit del Dr. Yoichi Miyaoka en l'Institut Max Planck de Bonn han trobat defectes que semblen seriosos.

"Sembla bastant pobre", declarà Don Zagier, un altre estudiós de Teoria de Nombres en l'Institut. "Hi ha hagut moltes objeccions, algunes d'elles fàcilment esquivables, però ara han aparegut alguns punts que finalment són certament preocupants. En Miyaoka mateix ja no està segur de que la seva demostració sigui correcta."

Durant 350 anys, afeccionats i professionals indistintament han lluitat amb aquesta conjectura decepcionadorament simple referent als nombres, escrita al marge d'un llibre de matemàtiques en llatí al segle XVII pel matemàtic Pierre de Fermat. Afirmà que cap combinació de nombres enter, exclòs el zero, podia satisfer l'equació $x^n + y^n = z^n$ a la potència n -èssima més y a la potència n -èssima és igual a z a la potència n -èssima per n més gran que 2.

El Dr. Miyaoka, que no desitjava fer comentaris en públic, digué provisionalment que ell havia demostrat un resultat més general el qual, com a conseqüència, hauria demostrat el Darrer Teorema de Fermat igualment—o quasi. "No és que hagi abandonat la demostració o que tota ella sigui inaprofitable," digué el Dr. Zeiger. "Però hi ha encara feina per fer, i serà molta feina."

Traducció d'un article publicat al diari
International Herald Tribune del dia 13 d'Abril
de 1988.

(13-IV-1988) (Contrabaix) És encara el Darrer Teorema, però potser no per gaire temps.

LOS ANGELES —Ha hagut molt nerviosisme i excitació recentment entre els matemàtics quan va semblar durant unes setmanes que el Darrer Teorema de Fermat, un problema venerable entre els estudiosos de la Teoria de Nombres, havia estat demostrat. Ai!, la demostració proposada per Yoichi Miyaoka mitjançant resultats de geometria algebraica ha estat jutjada com incompleta pels experts.

El Darrer Teorema de Fermat, que ha tormentat als matemàtics durant 350 anys, els eludirà almenys durant poc més. És capaç de saber algú durant quan més?

El teorema, proposat per Pierre de Fermat al 1637, afirma que no hi ha cap cub perfecte que sigui suma de dos cubs perfectes, cap potència quarta que sigui suma de dues quartes potències, cap potència cinquena que sigui suma de dues potències cinquenes, i així anant fent. (Sí hi ha, no obstant, una quantitat infinita de quadrats perfectes suma de dos quadrats perfectes, Cinc al quadrat és igual a la suma de tres al quadrat i quatre al quadrat, per exemple.)

Fermat afirmà el seu teorema al marge d'un llibre que estava estudiant, afegint, "He trobat una demostració realment meravellosa d'aquest teorema, però aquest marge és massa estret per a contenir-la." Aquesta frase "és tant famosa en la història de les matemàtiques com, diguem-ne, la Revolució Francesa en la història de l'home modern," escriu Edna E. Kramer a *La naturalesa i el creixement de la matemàtica moderna*.

Fins la data ningú ha estat capaç de demostrar el Darrer Teorema de Fermat (és l'últim perquè tots els altres han estat demostrats) o de refutar-lo mostrant un contraexemple. Així, quan un reconegut i respectat professor de Teoria de Nombres va mostrar el que plausiblement podia ser una demostració, la gent s'excità molt. Però després de d'examinar la demostració, els experts han determinat que, malgrat que l'atac del Sr. Miyaoka podria haver funcionat, de fet no ha resultat.

Un matemàtic que coneixem es preguntava si una demostració del Darrer Teorema de Fermat significaria "la fi de les matemàtiques," amb la qual cosa volia dir que només matemàtics especialitzats podran entendre la resta dels problemes.

Afortunadament i clara, no és aquest el cas. Mentre que hi ha moltes qüestions que requereixen preparació avançada en matemàtiques, hi ha encara molts problemes per resoldre en Teoria de Nombres senzills d'entendre. Molts d'ells ja els coneixien els grecs. Per exemple, primers amics són nombres primers (que són només divisibles entre ells i 1) que difereixen en 2, com 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, i 17 i 19. Hi ha infinites parelles d'aquesta forma? Ningú ho sap.

Un altre problema no resolt és la Conjectura de Goldbach, que afirma que tot nombre parell més gran que 2 es pot escriure com a suma de dos primers: $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3+7$. Aquest afirmació no ha estat mai demostrada; tampoc hi ha cap contraexemple.

Un nombre perfecte és un nombre que és la suma dels seus divisors, llevat d'ell mateix: $6 = 1+2+3$; $28 = 1+4+7+14$. Es coneixen trenta u. N'hi ha infinits? Ningú ho sap.

Per tant, confiïm en que hi ha prou a fer pels matemàtics. D'altra banda, el Darrer Teorema de Fermat està lluny de ser provat. El valent esforç del Sr. Miyaoka ha donat als matemàtics la Conjectura de Miyaoka. La solució s'hauria de trobar aviat, o el plantejament del Sr. Miyaoka seria finalment abandonada. No seria la primera vegada.

A començaments d'aquest segle, el gran matemàtic David Hilbert declarà, "Hem de saber. Sabrem." Poques dècades més tard, el lògic Kurt Gödel el corregí dient, "Bé, potser, potser, no." El coneixement perfecte, àdhuc en matemàtiques, mai pot ésser assolit. El Darrer Teorema de Fermat podria ser una proposició certa indemostrable.

Traducció d'un article publicat a la revista
Time el dia 18 d'Abril de 1988

(18-IV-1988) (Clavicèmbal) El Goig de la Matemàtica, o la vengança de Fermat

Durant uns brillants dies breus, semblà que el segle XX s'havia autojustificat. L'era de guerres mundial, bombes atòmiques, residus tòxics, SIDA, Muzak i ara, per refregar-lo, una carrera Bush-Dukakis pendent, s'ha redimit, sembla.

El Darrer Teorema de Fermat és el problema matemàtic no resolt més famós de tot el món. Deu la seva fama a la seva antigor—va néixer uns cinc anys abans d'Isaac Newton— i a la seva simplicitat. Els grecs van demostrar que hi havia nombres enters tals que $a^2 + b^2 = c^2$. Una solució pel teorema de Pitàgores, per exemple, és $a^2 + b^2 = c^2$. Pierre Fermat va conjecturar que l'equació pitagòrica no funciona per dimensions superiors per n més gran que 2, $a^n + b^n = c^n$ és impossible. No valdrà per a $n=3$. (No hi ha enters tals que $a^3 + b^3 = c^3$). Ni, teoritzà Fermat, per cap potència major, per a $n=4$ o $n=5$, i així.

Llavors arribà l'embolic. Fermat deixà la següent anotació marginal: «*He descobert una prova [d'aquest teorema] vertaderament remarcable, la qual no cap a aquest marge*». I la qual, durant més de tres segles, la ment humana ha estat massa nublada per trovar-la.

Tots aquests anys, els matemàtics han donat a Fermat el favor del dubte: el consens fou que el darrer teorema era probablement cert, però que Fermat estava equivocat al pensar o actuant perversament en clamar que l'havia demostrat. La llegenda va créixer i va desafiar 15 generacions de les millors ments matemàtiques del món. Es convertí en el Sant Grial de la Teoria de Nombres. Llavors, el mes passat arribaren notícies de que un professor adjunt japonès de 38 anys havia trobat la solució. Entre el banal i absurd que resulta la rutina, semblà que algun fet epic havia esdevingut.

Ai!, però no! Yoichi Miyaoka i els seus col·legues havien estat comprovant, i trobaren problemes, fonamentals i subtils, i molt endins de la demostració. Miyaoka veié una pampalluga del Grial, però res més. La decepció és dura—el segle XX roman irredimit—, però ve acompanyad d'un curios alivi! «*Més que una batalla perduda*—escrigué Wellington—*la major misèria és una batalla guanyada*». Per a ell era fàcil dir-ho (guanyà). No obstant, hi ha quelcom de savi i confortable en la frase de Wellington. Resoldre a Fermat hauria significat perdre'l. Amb l'error de Miyaoka, Fermat—aturdint, enganyant, desafiant a la posteritat per major glòria—continua.

I les matemàtiques hi guanyen. L'assalt de Miyaoka a Fermat és un recordatori, una confirmació del romanç novelesc que són les matemàtiques. Les matemàtiques són mal vistes actualment. En les ments populars ha esdevingut bé una síndrome (l'ansietat vers la matemàtica és una aflicció que ha de ser tractada com la por a volar) o bé una mera habilitat. Pensem en un matemàtic murmurador com en algú que pot fer mentalment el que una calculadora pot fer amb silici. Però això no és matemàtica. Això és avaluar, donar estimacions. La matemàtica real no és fer cruixir els nombres sinó contemplar els nombres i el misteri de les seves interconnexions. Per a Gauss, «*la aritmètica superior*» era un «*magatzem inesgotable de veritats interessants*» entorn a les relacions màgiques entre els supremes nombres. La matemàtica real tracta sobre si Fermat tenia raó.

Important això? És l'orgull del pensament polític el fet que totes les idees tenen conseqüències. «*Un matemàtic*», afirma Paul Erdős, un dels seus majors practicants vius i un dels més excèntrics, «*és una màquina per convertir cafè en teoremes*». Als matemàtics no els agrada admetre això, perquè, quan ho fan, els seus diners donats es sequen—és difícil exportar teoremes— i es sospita d'ells que només divaguen, cosa la qual, certament, és la que fan.

Els polítics i els periodistes necessiten creure que tot té, finalment, un ús i una aplicació. Així, quan s'anuncia una solució per quelcom com pot ser el Darrer Teorema de Fermat, es sent que la prova donarà profits en camps com, diguem-ne, criptografia i informàtica. Els matemàtics i els seus simpatitzants, perplexes per haver de justificar la seva existència, diran, com a última sortida, que fer matemàtiques és útil perquè «*cultiva la ment*».

Cultiva la ment? Per a què? per a calcular resultats electorals o comprendre pel·lícules de Fellini o fixar l'alça dels preus? Hem intercanviat els nostres fins i mitjans. Què pot ser més important que adorar l'Absolut? «*Déu va fer els enters*» digué un matemàtic del segle XIX, «*la resta és treball de*

l'home". Aquest treball són les matemàtiques, i hauria de justificar-la a sí mateixa per les seves aplicacions, com una eina per a fer el mundanal o perfeccionar l'efímer, és una afrenta no ja als matemàtics sinó a la criatura que les inventà. Quin ofici major pot haver-hi que cercar veritats inútils i hermoses? La Teoria de Nombres és tan bella i no gaire més inútil que la maestria en barres paral·leles o la marxa. I la nostra cultura gasta enormes sumes en aquests exercicis sense preguntar a quins fins superiors serveixen.

És més, de tots aquests exercicis, les matemàtiques són el més sublim. És la metafísica de l'home modern. Actua ben a prop de la religió, causa per la qual la numerologia és tant important en tantes creences i perquè estan tant fortament desenvolupat el sentit del transcendental en molts matemàtics, inclús en els menys religiosos. A Erdős, un agnòstic, li agrada parlar de que Déu té un Llibre que conté les més elegants i perfectes demostracions matemàtiques. El major complit d'Erdős, ens informa Paul Hoffman en el *Atlantic*, és que una demostració ve "directament del Llibre". Diu Erdős: "No has de creure en Déu, però has de creure en el Llibre".

En un dels contes breus de Borges, un bibliotecari celestial gasta vanament tota la seva vida buscant un volum semblant, el diví "llibre total" que explicaria el misteri de l'univers. Així, adonant-se que tal alegria no està destinada a ser seva, expressa el desig de que si més no pugui estar destinat a alguna altra persona: "Prego als Déus desconeguts que un home— només un, àdhuc que sigui de fa milers d'anys!— pugui haver-lo examinat i llegit. Si no puc abastar l'honor i la saviesa i la felicitat, que els puguin abastar uns d'altres."

Durant un parell de dies, semblà que l'honor i la saviesa i la felicitat eren d'en Miyaoka. Un miratge, finalment. Encara algun dia el Darrer Teorema de Fermat serà demostrat. Ni vostè ni jo entendrem aquesta demostració perfecta més que el que entenem la versió d'en Miyaoka. Nogensmenys, el pensament de que a algú, a algun lloc, algun dia, se li permetrà mirar a la pàgina de Fermat en el Llibre és per a mi, de moment, alegria suficient.

Charles Krauthammer

AQUEST ESPAI l'havíem reservat per a un article d'un col·laborador japonès amb qui vam signar contracte per dos anys. Descoberta la seva incapacitat per a demostrar teoremes ens hem vist obligats a rescindir-li el contracte. Preguem ens disculpin per aquest espai en blanc: a partir del proper número l'ocuparà la secció del Dr. Alexander Hutchinson!

Fermat's Last Theorem: Solved?

¿Sería la noticia matemática del siglo

By Philip J. Hilt
Washington Post Service

THE most famous of all unsolved mathematical problems, one that has entertained and infuriated the greatest minds in mathematics for 350 years, finally may have been solved.

The problem, called Fermat's Last Theorem, has drawn thousands of mathematicians over the centuries to attempt it.

Prizes have been offered for its proof and in 1954 short story, the Devil himself tried and failed to prove it. But two weeks ago, Yutaka Miyazaki, a Japanese mathematician, 38, went to the blackboard before three dozen mathematicians at the Max Planck Institute in Bonn and scratched out a proof that his audience at once knew was wrong, and possibly the real thing.

Mathematicians in Germany, France, and the United States have been checking the proof and so far have found no errors.

Pierre de Fermat, an amateur mathematician and judge in 17th-century Toulouse, France, said he could prove that it was impossible for any power above 2 to give whole-number results. He wrote out the problem in an old Greek arithmetic book and then wrote in the margin: "I have found for this a truly wonderful proof, but the margin is too small to hold it."

It was a line that launched a million equations. Frustrated mathematicians in the intervening centuries have suspected that the problem was too difficult even for Fermat, and that he wrote the note out of a perverse sense of humor, or worse, that he deluded himself into thinking he had a proof.

"If Fermat really did have a proof, nobody has the slightest idea what it was," wrote Sir Stewart of the University of Warwick in England. "Whether Fermat had, noticed something that has stumped everybody since, or if he was established here 350 años se resiste todavía a ser demostrado."

ation of "unbreakable codes" comes in a line of ancestry out of work on Fermat's theorem.

Dr. Miyazaki's proof "is very exciting, because it is the most famous open problem in mathematics and has always been," said Don Zagier, a University of Maryland mathematician working a few offices away from Dr. Miyazaki in Bonn. "In fact, it is almost a pity that it might be solved. This quest for this proof has been like the quest for the Holy Grail."

Because there is still a possibility of a small error somewhere in Dr. Miyazaki's difficult reasoning, mathematicians will not pronounce Fermat's problem solved until many experts have worked through it in the next two weeks.

Dr. Miyazaki, an assistant professor at the Tokyo Metropolitan University, developed his proof without a computer by building on the work of a Soviet mathematician, A.N. Pribitkin, of the Steklov Institute in Moscow. His work made possible a new mathematical solution

El teorema de Fermat de haber sido resuelto

El 20 de diciembre, leemos una noticia que nos ha dado a conocer establecen que el trabajo es serio y verosímil, pero seguramente hará falta que transcurran varios meses para que los análisis ratifiquen o no que realmente se ha dado este paso de gigante en el mundo matemático. No puede ser de otra forma ante tan trascendental resultado que comportaría haber roto uno de los grandes mitos de la historia de las matemáticas.

El teorema de Fermat ha contribuido a lo largo de estos tres largos siglos y medio a desarrollar las matemáticas, ya que son innumerables los científicos que han abordado el problema sin llegar a soluciones válidas pero que han dejado en el camino su trabajo, muchas veces fructífero para diversas ramas de las matemáticas. Lo que está claro es que si realmente Fermat había encontrado una demostración plausible no tiene nada que ver con la posible demostración que ahora se haya efectuado, ya que se utilizan recursos desconocidos en aquellos tiempos. Sobre este respecto, el matemático Don Zagier de la Universidad de Maryland comentó días atrás al "Washington Post" que "la demostración que ahora estamos estudiando no podría haber existido más allá del siglo XVIII, ya que entonces no estaba tan desarrollada la matemática que utiliza el profesor japonés. La demostración es muy excitante, ya que es el más famoso problema que permanece abierto en toda la historia de esta ciencia. Personalmente, creo que casi es una lástima que pueda haber sido resuelto. La persecución de una solución al teorema de Fermat es equiparable con la búsqueda del santo Grial".

En otros del siglo XVIII, el teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

El teorema de Fermat es un abogado cuya la matemática... "es imposible decir a cubo en dos cubos, do en dos bicuadrados, potencia cualquiera, unido, en dos potencias exponenciales, he una demostración de la, pero el margen del libro era demasiado estrecho para las simples dos frases en uso de los matemáticos de la época."

Fermat, el reto no resuelto por las matemáticas

Después de tres siglos y medio de intentos, el teorema de Fermat sigue siendo uno de los problemas más difíciles de las matemáticas. El teorema de Fermat establece que no existen números enteros positivos x , y y z tales que $x^n + y^n = z^n$ para n mayor que 2. Este teorema fue formulado por Pierre de Fermat en 1637 y ha sido uno de los problemas más difíciles de las matemáticas. En 1954, un matemático japonés, Yutaka Miyazaki, presentó una prueba que fue aceptada por tres doctores de la Max Planck Institute en Bonn. Sin embargo, los matemáticos en Alemania, Francia y Estados Unidos han estado verificando la prueba y hasta ahora no han encontrado errores.

El teorema de Fermat establece que no existen números enteros positivos x , y y z tales que $x^n + y^n = z^n$ para n mayor que 2. Este teorema fue formulado por Pierre de Fermat en 1637 y ha sido uno de los problemas más difíciles de las matemáticas. En 1954, un matemático japonés, Yutaka Miyazaki, presentó una prueba que fue aceptada por tres doctores de la Max Planck Institute en Bonn. Sin embargo, los matemáticos en Alemania, Francia y Estados Unidos han estado verificando la prueba y hasta ahora no han encontrado errores.



Pierre de Fermat, un matemático francés del siglo XVII, formuló el teorema que lleva su nombre.

It's Still the Last Theorem, But Perhaps Not for Long

LOS ANGELES — There was a flurry of activity for a few moments, a bit of excitement, but then the calm returned.

The Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

Fermat's Theorem Resists Solution

NEW YORK (NYT) — The most notorious unsolved problem of mathematics, Fermat's Last Theorem, appears to have defied yet another attack, put forward recently by a Japanese number theorist.

Experts who examined a draft manuscript by the number theorist Dr. Yutaka Miyazaki at the Max Planck Institute in Bonn, have found gaps that seem serious.

"It's looking rather poor," said Don Zagier, another number theorist at the institute. "There have been many objections, some easily handleable, but now several points have arisen which at the very least are quite worrying. Miyazaki himself is now not sure that his proof is correct."

Amateur and professional alike have struggled for 350 years with this deceptively simple conjecture about numbers, scribbled in the margin of a Latin mathematics text by the 17th-century mathematician Pierre de Fermat. He asserted that no combination of whole numbers, raised to the power of n , could satisfy the equation $x^n + y^n = z^n$ for n greater than 2.

Dr. Miyazaki, who has been unwilling to comment publicly, unsuccessfully proposed that he had proved a more general result than, as a hypothesis, would have proved Fermat's Last Theorem as well — or almost proved it, never been proved, nor is it not quite that he's retracted the proof or that it is lost," Dr. Zagier explained. "But there's still work to be done, and it may be a lot of work."

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge

THE Joy of Math, or Fermat's Revenge



Yutaka Miyazaki, un matemático japonés, presentó una prueba del teorema de Fermat.

Erasmus: la nostra oportunitat.

Pels qui encara no n'hagueu tingut notícia, Erasmus és un programa de beques d'intercanvi entre universitaris de països de la CEE que té per objectiu homogeneïtzar els estudis universitaris (no d'investigació ni de doctorat) arreu de l'Europa comunitària.

Entre d'altres coses, tenim l'oportunitat d'anar a estudiar per un període d'entre 3 i 10 mesos a una altra facultat de matemàtiques.

Això no suposarà una interrupció dels estudis donat que és condició necessària, per tal d'obtenir la beca, que els estudis siguin convalidats a la Universitat d'origen.

Aquest projecte contempla també la possibilitat de becar el professorat i les universitats participants.

Malgrat que el programa és jove (de l'estiu de l'any passat), ja hem fet tard, a causa de la manca d'entusiasme i d'informació per part de les "altes esferes" de la Universitat. Però no us amoïneu, encara podem agafar el tren si ens comencem a moure des d'ara mateix. Cal que a través dels 4 departaments de la nostra Facultat contactem amb altres departaments, creem programes d'intercanvi i enviïm la proposta a Brussel·les on haurà de ser aprovada i, per tant, financada.

Aquesta creació/homogeneïtzació de programes i continguts podria veure's en principi dificultada pel fet que a moltes de les Universitats europees la carrera dura 4 anys i per les diferents maneres de concebir la llicenciatura (donar més o menys relevància a uns o altres aspectes de la Matemàtica).

Es pot pensar que el programa Erasmus no porti res en l'àmbit purament matemàtic. Però atenció: l'enriquiment no serà únicament cultural o lingüístic (pràctica i perfeccionament de la llengua parlada en la Universitat escollida), ni serà només una experiència de convivència, sinó també un primer contacte amb altres maneres de veure, treballar i ensenyar les Matemàtiques a Europa.

Així doncs, ja ho saps, si t'interessa...

Sebastià Martín
3er. curs

Agraixo la col·laboració d'Albert Aguado i Anna Carlos.

COMPRI LA NOVA «MÀQUINA D'HIPÒTESIS» DEL DOCTOR ALEXANDER HUTCHINSON

Les estadístiques parlen per sí mateixes: amb l'antiga màquina calia una mitjana de 17.2 hipòtesis seleccionades a l'atzar entre les 2400 de que disposava per demostrar un teorema de primer curs. Amb la nova BRAIN-2, la mitjana s'ha reduït a 13.9!!! A més a més, conté més de 1500 noves hipòtesis rigurosament seleccionades (cedit pel Dr. Alexander Hutchinson, del seu llibre *Records in Mathematics*). Si la compra abans de Setembre, li regalem una calculadora que suma epsilons!!! Aprofiteu-se'n!!!

TÉ COMPLEXES ? Vingui, i li aplicarem el mètode Φ del Dr. Alexander Hutchinson, consistent en:

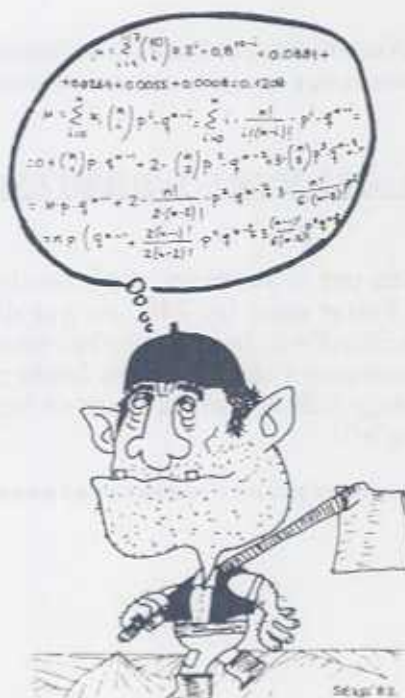
$$\Phi: \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z=a+bi \longrightarrow a$$

Sigui realista i oblidi's dels complexos!! Si s'opera abans de Novembre li regalem una calculadora que multiplica deltes!!! Aprofiti-se'n!!!

RECENT APARICIÓ d'un nou volum de la col·lecció Matemàtica metaaplicada postmoderna: *Improve your proves (but not too much)* del famós Dr. Alexander Hutchinson, i del qual oferim el fragment més interessant que hem trobat, on s'explica com millorar la probabilitat de resoldre un problema:

«Després d'haver reduït a un nombre discret les possibles solucions del problema (sigui n aquest nombre) com ja s'ha explicat, calculeu la probabilitat de que la solució obtinguda com a bona ho sigui veritablement (veure Capítol 8, Les lleis de Murphy avaluades en epsilons), i si aquesta probabilitat p és major que $1/n$ doneu-la com a bona, sinó trobeu un nombre a l'atzar entre 1 i n , i poseu la solució corresponent: la probabilitat de fer correctament el problema ha augmentat de p a $1/n$.»



Història d'una entrevista

Potser no heu pensat mai com es fa una entrevista. Jo tampoc ho havia pensat mai. Però de cop i volta m'he trobat amb que havia de fer-ne una, i a més disposant de molt poc temps. Us explicaré com va anar:

Dimarts jo sortia de classe d'Història i anava cap al Xiringuito, on acostumo a esmorzar després de l'esmentada classe, ja que tinc lliure, quan per l'escala em vaig trobar amb un dels companys que col·labora en la redacció de l'Aleph. La primera cosa que em va dir (després del bondia) va ser: «Què tal tens allò de l'entrevista?». Jo em vaig pensar que es referia a una entrevista que havíem dit que faríem pel número anterior de l'Aleph a cert professor de la casa i que vam haver de deixar córrer ja que ell no va voler. Per això li vaig dir: «Però, si... va dir que no!». «No, si no parlo d'aquesta, parlo de l'entrevista a la Dra. Bayer». «A la Dra. Bayer? Escolta, jo d'això no en sé res!». «Però si es va dir a la reunió». «Quina reunió?». «La que vam fer a finals de Gener. Si tu hi eres!». «Què dius! És la primera notícia que en tinc! I jo no vaig anar a cap reunió al Gener! A part de que tenia feina preparant exàmens (encara que hi ha gent que no s'ho creu, de tant en tant jo també estudio), ni me n'havia assabentat de que hi hagués cap reunió!». «Però, sí; si tu hi eres! Bé, ja en parlarem després; ara tinc classe.»

I després en vam parlar. Segons testimonis de la reunió, jo no hi havia estat, i el qui m'havia trobat per l'escala n'era el culpable, ja que havia estat l'encarregat de d'avisar-me i no ho havia fet. El cas és que havia de fer una entrevista a la Dra. Bayer. Bé, doncs, ho faré. «L'has de tenir per la setmana vinent.» «Escolta, que jo d'això me n'he enterat avui!» «Ja ho sé; per això et dono més temps.» Resignació. Vaig dir que col·laboraria amb l'Aleph en allò que fos necessari, i ara he de mantenir la meua paraula.

Haig de fer una entrevista a la Dra. Bayer. I, què li pregunto? La veritat és que no en tinc ni idea. Vejam, què en sé jo de la Dra. Bayer ... sé que és professora d'aquesta casa. Les persones amb les que he parlat de les seves classes me n'han parlat bé. Sé que toca el piano, em sembla que té la carrera de piano acabada (si és que en música es pot dir mai que s'ha acabat alguna cosa). Va tocar en el concert ara fa dos anys que (per si algú no ho sap, de tant en tant en aquesta casa els alumnes organitzem alguna activitat, i una que jo vaig trobar molt bonica va ser un concert que ... rem organitzar ara fa dos anys). Sé que dona classe de Teoria de Nombres a cinquè. No és saber gaire coses. Segueixo sense saber què preguntar-li. Bé, doncs seguiré la vella tècnica de la improvisació.

Dimecres vaig anar a veure si podia parlar amb ella, però no li anava bé en aquell moment. Al final vam quedar per divendres. Un dels companys en la redacció de l'Aleph (el mateix que us explicava al principi que m'havia trobat a l'escala) va dir que vindria amb mi. Improvisarem entre tots dos.

Finalment, divendres a les deu vam anar a parlar amb la Dra. Bayer. No li va fer gaire il·lusió el fet que jo dugués un magnetòfon per enregistrar la conversa, de manera que el deixo a terra una mica amagat per tal que no li molesti tant (i això ha fet que després desxifrar la conversa de la cinta hagi estat un turment per mi, ja que des d'on era no ha enregistat gaire clar). Aquí teniu el que n'ha sortit de tot això. Espero que ho trobeu prou bé. I si no, prometo que procuraré millorar la propera vegada que escrigui alguna cosa.

Després de començar una mica la conversa "disparem" la primera pregunta:

- **Aleph:** *Tu vas estudiar matemàtiques i vas estudiar música. Perquè et vas decidir a treballar en matemàtiques i no en música?*

- **Dra. Bayer:** És que aquesta decisió encara no l'he fet.

- *Però t'estàs dedicant a les matemàtiques, la música la tens una mica més deixada de banda.*

- Sí, això és veritat, però, al llarg dels anys me n'adono que de decisions n'he fet molt poques...

Realment aquesta pregunta no la puc contestar. No sé, jo anava fent les dues coses alhora i en cada moment em dedicava més a allò que tenia el sentiment de que em reclamava més fortament. Així en aquest període m'estic dedicant a les matemàtiques, però potser d'aquí a deu anys em dedicaré a compondre, per exemple.

- *Com recomanaries a algú que fes Teoria de Nombres ...?*

- Mai! Per principi no recomano mai res a ningú. Em sembla que les decisions han de ser fetes personalment, i justament tinc molt present evitar una propaganda així que pogués induir a prendre certes decisions a la gent. És a dir, jo sempre procuro presentar la situació el més objectivament possible.

- Però si algú et digués que estava dubtant entre fer Teoria de Nombres o fer alguna altra cosa?

- Bé, aleshores el que procuro és explicar-li com és la situació en la Teoria de Nombres i recomanar-li que li expliquin l'altra situació en una altra banda. Però d'entrada el que no faig, mai és intentar portar la gent cap a aquesta banda. Considero essencial que les decisions (bé, les decisions o el que sigui) les persones les facin amb la mínima influència exterior, encara que no sàpiguen ben bé perquè ho fan, però que no sigui perquè una altra persona els hi ha dit que ho facin. No hi ha ningú que estigui treballant ara aquí que pugui dir que és perquè jo un dia els ho vaig dir.

- Podries explicar-nos el que és actualment la Teoria de Nombres, una mica explicar-nos la seva evolució, tant en tècniques com en plantejaments de problemes?

- Bé, ha estat un procés molt continu. El que podria dir és que ja desde Egipte fins ara hi ha hagut gent que pensa, i pensa molt bé, i va tirant problemes endavant i es va sempre avançant però no presenta una ruptura, o desde un altre punt de vista en cada moment ha tingut la seva ruptura, cada moment ha tingut la seva eina impactant, saps que vull dir? obviament, doncs jo que sé, un bon sistema de numeració és una cosa que trenca, el disposar del zero és una altra cosa que trenca, i avui dia el disposar, doncs jo que sé, dels espais amb varietats abelianes, també, i dia a dia sempre hi ha hagut alguna cosa sorprenent que, en última instància ens ha permès estudiar uns fets numèrics que d'altra manera semblava talment impossible.

- I això com ho podríem interpretar, com que cada dia la Teoria de Nombres està descobrint nous mètodes per aplicar-los al seu estudi, o que està canviant constantment de direcció?

- És, com t'ho diria jo..., és una part essencial de la Matemàtica, que motiva Matemàtica, i... vols alguna cosa més matemàtica que els nombres... Si tu amb una teoria pots explicar un comportament que numèricament comproves, i a més amb nombres enters, no un procés aproximat..., uns fets, m'entens? Quan tu pots dir que qualsevol nombre és suma de com a màxim quatre quadrats, això són faves comptades. El que li poses al darrera per justificar-ho, és la teva estructura mental la que ho fa, i qui diu aquest resultat en diu d'altres molt més complexos que ens porten les matemàtiques. D'una banda hi ha tot un procés de descoberta, això vol dir, doncs, gent que ha calculat, avui dia gent que calcula no en queden gaires, però al segle XVIII això era totalment diferent, hi havia la gent que es dedicava a fer taules o la gent que es dedicava a observar aquests fets i perquè les coses anaven així, i aquest procés és lent, i d'altra banda és el resultat de càlculs molt brillants, requereix una gran facilitat per intuir. Això és una cosa que sempre ha estat així, amb noves tècniques es descobreixen camps nous, i aquests camps s'han d'explicar. D'altra banda hi ha tècniques matemàtiques creades potser expressament per explicar l'estructura de quelcom, però això són les menys, perquè normalment amb un càlcul numèric pots intentar demostrar-ho si és fàcil, però normalment la tècnica que necessites és molt més complexa. Aleshores aquestes altres tècniques a vegades no s'empren encara, però hi ha un influència, més que res perquè hi ha un conjunt de matemàtics que pot ajudar, i s'ha d'anar entenent i profunditzant, i això ho has de fer amb altra gent, i després hi ha els grans teòrics que han fet teories bestials.

- Aquest podria ser l'exemple de Kummer, que tota la teoria d'ideals la va descobrir ell.

- Això. Aquest és un cas molt bonic. Aquest sí que és el cas d'una teoria que neix al costat d'un problema. Expressament per això neix la teoria, després la desenvolupa, la va tirant endavant i torna a repercutir en el problema original.

- I actualment, quins són els problemes que s'estan estudiant a la Teoria de Nombres?

- Uf!

- Hi ha algun objectiu unificat o es van trobant resultats per aquí i per allà?

- La Teoria de Nombres està dividida en moltes especialitats. Naturalment, totes en última instància estudien els nombres, és clar, però hi ha la teoria additiva, la teoria multiplicativa, la teoria de la ziga-zaga,... i després no és pas una teoria aïllada dins de la Matemàtica, sinó que uses eines d'Àlgebra, o d'Anàlisi...

- És a dir, que per una part és font i per l'altra és receptacle, diríem.

- Sí.

- I tu, en particular, què estas investigant?

- Jo, en particular, no és que hi hagi un problema en concret, hi ha un equip gran i estudiem varies coses conjuntes. Estem estudiant la teoria de la conmutació, però l'estudiem dins la teoria algebraica dels nombres. Fem servir mètodes algebraics i mètodes analítics. Hi ha un aspecte que ens interessa molt que és el que connecta la Teoria de Nombres amb la Teoria de Galois, que és quelcom molt bonic i aquí a la casa s'està treballant molt en això. I després també hi ha un altra part que m'interessa molt que és la part de la Teoria de Nombres que té a veure amb el Teorema de Fermat.

- Qui més qui menys suposo que li ha dedicat algun esforç.

- No pensis qui més qui menys, no, perquè hi ha moltes maneres de mirar-se el Teorema de

Fermat. Te'l pots mirar solament el que diu o pots preocupar-te d'aspectes molt més profunds, connectant-lo amb corbes el·líptiques o varietats abelianes..., coses molt, molt profundes. El que passa és que jo et puc estar parlant d'aquestes coses durant tres anys i tu ni sospitar que al final d'aquests tres anys entendràs una mica més el Teorema de Fermat, no és agafar l'equació de Fermat i començar a substituir.

- No, no, realment senzilla no és. Ara que parlem del Teorema de Fermat...

- Tu vols fer Teoria de Nombres?

- No, jo estic a segon, i vaig més cap a la Lògica.

- Tots dos fem Lògica.

- El que a mi m'ha sorprès molt és que a la biblioteca hi ha tant una demostració del Teorema de Fermat com una demostració de que el Teorema de Fermat no es pot demostrar. Les has mirades?

- Això ja passaré després a dir que ho llencin.

- Una està en un llibret de Lògica i l'altre en un informe...

- Ja està bé que n'hi hagi d'exemples, d'aquests. A Göttingen tenen una persona dedicada a l'estudi de les solucions que els van arribant.

- Sí, perquè hi ha el premi aquell...

- Sí, però no t'hi amoinis, quan es demostrï de debó ja ens enterarem. Però, vaja, l'equació de Fermat és bonica. D'una banda perquè és un problema que encara no és tancat, d'altra banda és bonic perquè des que es va plantejar el problema sempre s'ha anat avançant, de manera que sembla que algun dia sí que s'arribarà a tancar, però és a base de molt, molt, molt de treball. Treball d'equip. Aleshores el que és bonic és poder dir: «Ah, ja l'entenc una miqueta més!». Això és el que la fa apassionant. Hi ha molta gent treballant-hi i posant junta tota aquesta feina, perquè no és una cosa que tu la fas i quan la tens feta la deixes apart i, au, un altre camí, no, el camí es va eixamplant, es va eixamplant, i va venint un altre investigador, i un altre investigador...i això arriba fins...aquest any, comprens? Sempre hi ha un aspecte del problema que es té del problema anterior i permet avançar, o coses encara més sorprenents, i és que cercant en camps que en principi no tenen res a veure amb l'equació de Fermat, de retruc s'entén millor l'equació de Fermat, pot ser un camp paral·lel en el qual s'ha estat treballant durant cinquanta anys i que ningú sospitava que tingués res a veure amb l'equació de Fermat. Són problemes molt ben posats. Perquè hi ha problemes molt difícils, però no en pots dir res sobre ells, i això els fa molt avorrits. Un problema molt difícil que ningú no sap dir-ne res...no estaràs pas tota la vida dient: «Quin problema més difícil!». El que és bonic és un problema que dona feina a tothom.

- Sí, que a l'hora de veure'l és senzillíssim...

- Sí, això encara el fa més maco.

- Suposo que si et plantejges un problema de Matemàtica Abstracta, l'especialista el comprèn, però els altres no entenen res d'aquest problema. En canvi aquest té de maco això: que el pot entendre tothom...

- De tota manera, no vol dir que hi pugui treballar tothom...

- Exactament. Qui més qui menys el viu, aquest problema.

- Això. Cada dia hi ha més tècniques. El dia que s'entengui tot el procés, si és que algun dia s'arriba a entendre, diran coses no solament de l'equació de Fermat sinó de moltes altres coses, és una família de corbes planes... és un tipus d'equació que te'l pots mirar des de molts punts de vista. I hi ha molts fets que s'apliquen a l'equació de Fermat que s'apliquen també a altres nocions matemàtiques. Però el que passa és que les tècniques unes s'apliquen a unes coses, d'altres a d'altres, però totes s'apliquen a l'equació de Fermat. Recull vessants diferents.

- És interessant aquest problema.

- Sí, però això no es pot dir massa, això ho treieu de l'entrevista. No es pot dir massa perquè té una part demagògica. La gent «Ah, Fermat!», i clar, segons com, si tu els motives a través de Fermat es poden sentir com... desilusionats. Els dius que els explicaràs l'equació de Fermat i al final de tres cursos la veuen un dia.

- Solament es veu un dia aquesta equació?

- Potser sí. Tot el que tu saps, ho apliques i dius quelcom de Fermat. Però després de tres anys. Per tant no es pot anar pels corredors dient: «farem Fermat». Perquè no es fa Fermat. Es fa Teoria de Nombres. I quan en saps prou pots fer quelcom de Fermat. Clar, això no tothom està disposat a acceptar-ho! d'altra banda, si tu dones a la gent el que ells et venen a buscar, t'avorriries. Perquè et pots estar un dia fent substitucions a l'equació de Fermat, però tres anys no! Per això és el que us dic, que no es pot recomenar res a ningú, i s'ha de procurar que tothom descobreixi les coses per sí mateix. Però amb la música també passa. No pots per les bones posar-te a tocar un violí.

- Encara fós un piano, podries intentar tocar amb un dit!

- Sí, però tampoc és el mateix! Potser s'assembla encara més al violí. Per entendre-ho has de fer un procés molt llarg.

- *Jo sé que del Teorema de Fermat s'ha demostrat que si hi ha nombres que no el verifiquen, la potència ha de ser més gran que no sé quant.*

- Ah, sí, sí,... mira. D'entrada els primers es classifiquen en dos tipus: regulars i irregulars. Els primers regulars són els que compleixen una certa condició que es pot veure en qualsevol llibre, aleshores l'equació és certa. El que passa és que hi ha infinits primers irregulars. De regulars no se sap si n'hi ha un nombre finit o infinit. Aleshores pels irregulars hi ha uns criteris numèrics, de manera que els irregulars es sotmeten a una sèrie de proves, i si les passa totes l'equació de Fermat és certa. El que passa és que així com el tractament dels primers regulars és teòric i global, i es fa per tots els primers regulars, els irregulars els has d'agafar un a un, a veure si el passa o no el passa. S'ha pogut comprovar amb ajut d'ordinadors que si el nombre primer irregular és per sota de 125000 el passa. Bé, potser ara ja se n'han provat més; les darreres notícies que jo tinc són el 125000. De tota manera això és només una qüestió d'anar provant. Per tant, si el primer està per sota de 125000, l'equació de Fermat és certa. Conseqüentment, l'equació de Fermat és certa per tots els primers regulars, que no se sap quants n'hi ha, però existeix un criteri per saber si un primer és regular o no, i pels irregulars per sota de 125000. Ara, hi ha una qüestió dels nombres que no s'ha d'oblidar, per molts càlculs numèrics que es facin els nombres petits es poden comportar de manera diferent que els grans. Així, encara que tot sembli portar a una evidència del Teorema de Fermat, com que molts fenòmens no hi ha més remei que comprovar-los només pels nombres petits, pot ser que tinguis molts teoremes que depenguin numèricament i que fins allí on arriben les teves possibilitats de comprovació allò funcioni, però qualsevol dia es pot trobar un primer pel qual això no té perquè passar. Doncs encara que avui en dia hi hagin moltes conjetures comprovades numèricament que duen a pensar que l'equació de Fermat és certa, clar, les comprovacions numèriques no són demostracions. Hi han molts fenòmens dels primers on els nombres petits es comporten d'una manera i els grans d'una altra. Ara, cada problema té una noció de nombre petit i de nombre gros. Perquè, què vol dir que un nombre és petit? I què vol dir que un nombre és gran?

- *Depèn de com i quan.*

- En matemàtiques fins que les coses no estan demostrades no pots dir mai res. Encara que hi ha moltes conjetures que porten a creure que el Teorema de Fermat és cert, fins que no en tinguis una demostració...

- *No hem parlat gaire de música.*

- Ah! la música... la música és un altre món, també. Però jo la trobo molt semblant a les matemàtiques.

- *Però la música s'ha de fer més amb el cor; no hi valen màquines.*

- No, no què va! Tot es fa amb el cap! El fet és un procés mental que requereix una concentració extraordinària, i després té la part creativa. Un compositor, com un matemàtic, són persones força semblants en el sentit que és una feina que es fa amb el cap. Potser diria que el compositor és més solitari que el matemàtic. El matemàtic sí, pot treballar en solitari, però no massa temps. El matemàtic s'ha de relacionar necessàriament amb altres matemàtics. El cap s'ha de ventilar. Ha de rebre altres idees, perquè si no s'acaba amb un malestar fins i tot físic. El matemàtic ha de comunicar amb altres matemàtics, però naturalment a l'hora de fer un teorema s'ha de tancar i fer un esforç, amb inspiració, però amb treball, les dues coses. D'altra banda tens la part interpretativa. Obviament, al donar la classe, ets l'interpret. Perquè els altres ho han fet, però després vens tu i ho interpretes, igual que es fa amb la música. En aquest cas té més llibertat, naturalment, qui dona la classe, però bé, ja sabem que una mateixa peça tocada per l'un o tocada per l'altre poden canviar. Però en aquest cas potser trobo més ric fer la classe. Una classe et permet fer una interpretació molt més lliure, si tu vols. Tu pots fer un rubato de tant en tant, però has de fer el què l'autor exactament vol.

- *En una classe també pot haver-hi més interacció amb la gent.*

- Exactament. Interacció amb l'auditori; perquè tu, si algú del públic tus, doncs, no és que no estiguis tranquil, però pot influir...

- *És allò que penses que podria anar a tossir a un altre lloc!*

- I a la classe... potser en aquest sentit allò que preguntàveu abans de perquè la música o perquè matemàtiques, vaig veure que, en el moment d'interpretar, la matemàtica era més creativa. Això em va agradar més, vull dir... A més, també interpretes més estona... Un concertista s'ho ha d'estar preparant molt, molt de temps i per tocar un sol dia... En aquest sentit vaig trobar la vida del matemàtic més rica en interacció humana que la vida del músic. El músic el trobo més eina. Potser és perquè no he viscut tampoc tant la música. Potser si hagués viscut més per la música no ho veuria així. Però de moment em va semblar la vida del músic una vida més aïllada que la del matemàtic. I

després el públic. El públic que escolta música i els alumnes que escolten matemàtiques. I en el públic hi ha una gran diferència, també, però es pot seguir la comparació. I la diferència és que per escoltar música... escoltar música et requereix un esforç... però escoltar matemàtiques és encara més difícil. Per arribar a ser un bon públic de matemàtiques es requereix almenys haver estat assegut aquí una pila d'hores. Un alumne de primer encara no sap escoltar matemàtiques... Però hi ha aquests tres aspectes en paral·lel, que els trobo bonics. I apart d'això, també hi ha una cosa que a mi m'ha ajudat a l'hora de la meua vida professional de matemàtica, i és haver fet música de cambra. En la música de cambra has d'acompanyar, has d'ésser protagonista, has d'esperar, ara aquest té el cant, ara entro jo, i la trobo una preparació molt bona per un treball posterior en equip. Trobo que la persona que ha estat anys fent música de cambra ha de saber portar la veu principal, ha de saber lluir, però ha de saber que toquen tots tres. Això és el més maco d'un treball en equip. En el fons treballar en un equip de matemàtics és com treballar, depén, en un tercet, un quartet... això ja depén del nombre de persones, no? Ara li toca a aquest, ara aquest ha de fer el tema... I la música de cambra és molt maca. Tu n'has fet, oi que sí?

- No, no vaig arribar a fer-ne.

- No n'has fet? Es crea un clima entre les persones...

Justament en aquest moment va succeir un petit imprevist. I és que se'ns va acabar la cinta enregistradora i cap de nosaltres se'n va adonar. Bé, hauré d'explicar el que jo recordi. perquè ja he dit abans que èrem dos a entrevistar-la, però tot i que en sortir vam anar al *Xiringuito* per resumir el que no havia quedat enregistrat, el meu company va preferir jugar una partida de Go, una temptació que no va saber resistir, i no vam resumir res en aquell moment.

Gràcies a Déu no resta gaire per a dir. Ens va explicar ja només que no pot concebre la seva feina d'investigadora sense la seva feina de professora, i també a l'inrevés. Ens va dir que hi ha només una cosa que prefereix de les classes de segon cicle respecte les del primer cicle, i és el nombre d'hores, car diu que ella necessita alegrar-se de veure els alumnes, tenir ganes de veure'ls, i això no pot sentir-ho amb una hora diària de classe, que més aviat fa pensar «quin rotllo, ara que hauria de fer això o allò i me n'he d'anar a donar classe». No troba gaire diferència més, ja que diu que una persona que s'ha estat dedicant durant 20 anys a la matemàtica no troba gaire diferència d'evolució en procés de 5 anys: tots estan molt lluny d'on està ella.

Només us diré ja el que penso jo. He vist una persona que vol fer de cada classe un art i una il·lusió, i també de cada moment de la seva feina. M'agradaria que tots nosaltres, sigui quina sigui la feina que fem en la nostra vida, sapiguem fer-ho tan bé, perquè crec sincerament que només si se sap tenir aquella il·lusió pel que es fa es pot treballar d'una manera agradable per a tu mateix i també per als que t'envolten. Ella no vol recomanar res a ningú. Però crec que no és res dolent dir que hem de procurar tots tenir una mica d'aquest esperit que ella té.

Marina
5è. curs

Nota: En la part de l'entrevista que ha estat enregistrada solament he suprimit allò que degut a la mala qualitat de l'enregistrament he estat absolutament incapaç d'entendre. Desitjo no haver comès cap error en la part que sí he entés («más o menos»). Si és així, disculpeu-me.

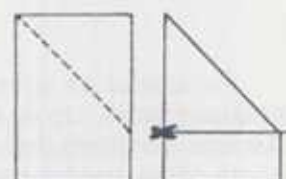
Para los amantes de la Papiroflexia

Notación:

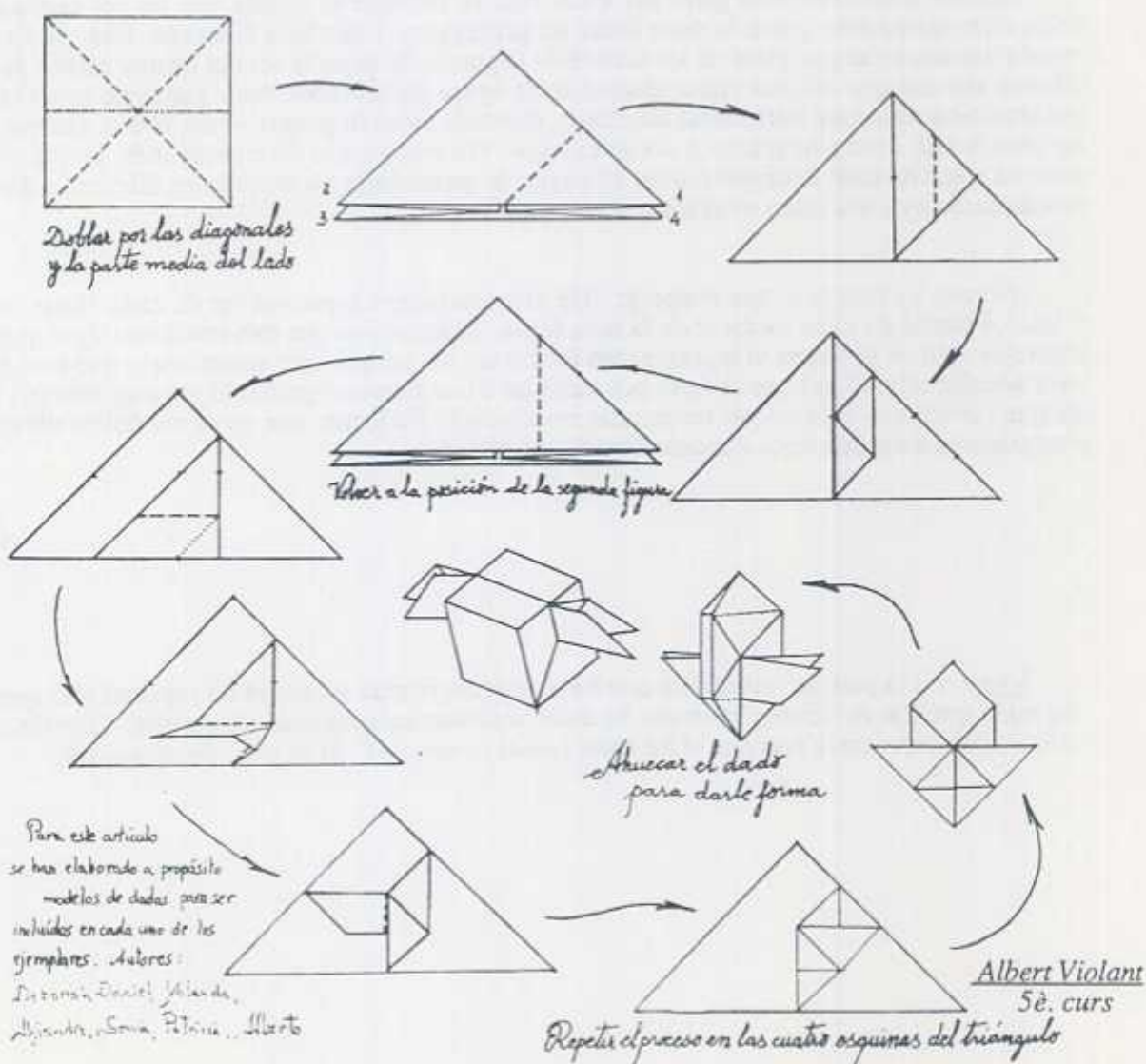


----- plegado en valle
 plegado en montaña

Cómo obtener un cuadrado de papel a partir de un folio



La fascinante magia del dado,
 probar tu suerte en los números,
 pero, ¿y si el dado está trucado y vuela?



Una aproximació a les Lògiques temporals. El concepte de veritat sintàctica condicionat a la naturalesa humana emprant el Relativisme cultural de Spengler.

"Prenem Tres com a base del raonament que fem...
Un nombre apropiat per començar...
li sumem Set, i Deu, i ho multipliquem tot
per Mil menys Vuit.

El resultat que obtenim el dividim, com es veu,
per Nou-cents Noranta-Dos;
i restem Disset, i la resposta ha de ser
exacta i perfectament justa"

Lewis Carroll, [2], *La caza del Snark*
(mètode d'addició ideat per Charles Dodgson (en l'exemple 2+1))

1.-Motivació (1)

« -Heus aquí un exemple que aprecio molt, encara que no es tracta d'un concepte sinó d'una operació: la suma aritmètica. Els lògics han definit l'aritmètica inductivament, mitjançant la definició axiomàtica dels successors de 1...

-*El sistema de Peano ...*

-Això és, el sistema de Peano. Crec, no obstant, que es tracta d'una presentació artificiosa. La definició de suma, com jo l'entenc, correspon a la situació en que es dona la catàstrofe elemental de captura d'un pou de potencial per part d'un altre, com en la cúspide. En tot pou de potencial hi ha objectes que es poden considerar com sòlids, en el sentit que no poden barrejar-se. En el procés de captura, doncs, els objectes continguts en un pou de potencial penetren en l'altre i no cal fer més que comptar el nombre d'objectes que hi ha després de la captura. És en part com allò que s'ensenyava als nens: per tal de sumar els ous de dos cistells es posa el contingut d'un en l'altre.

Tot està aquí ja: l'addició es defineix recorrent a un procés fonamentalment continu i només artificialment es realitza una operació definida de forma abstracta i discreta. El procés generador subjacent és continu. I, per altra banda, això no serveix només per l'addició. En general, crec que les úniques estructures matemàtiques interessants, dotades d'una certa legitimitat, són les estructures que tenen una realització natural en el continu. Les estructures discretes, doncs, no són interessants per mi més que en la mesura en que poden quedar immerses, d'alguna manera, en el continu. Allò que fa, per exemple, que l'infinit numerable tingui sentit, malgrat el fet que es tracta d'un infinit que no es pot esgotar, és el fet de poder-lo submergir d'una manera canònica en un segment de longitud infinita; això queda molt ben expressat en les conegudes paradoxes dels el·lèates.

Prenem la sèrie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots, \text{ i.e. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

que notòriament convergeix a 1. D'aquesta manera s'obtindrà el segment limitat [0,1]; es podrà submergir canònicament l'infinit numerable en tal segment i donar així una justificació a l'infinit numerable.

-*Un punt de vista força diferent del tradicional ...*

-Una autèntica visió, diria jo... Segons el punt de vista tradicional, el continu es construeix a partir del numerable per completació o mitjançant el pas de Dedekind. Però jo penso que és a l'inrevés: l'infinit numerable és allò que queda justificat per la seva immersió en el continu.

-*Però, aleshores l'operació de comptar és una operació que té una estructura contínua subjacent ...*

-És cert. I la millor prova d'això és que es tracta d'una operació que es desenvolupa en el temps; i el temps és continu.

Abans es parlava de complexitat semàntica, però en el cas dels nombres cardinals la complexitat semàntica de l'enter n és el seu propi valor, si més no des del punt de vista de l'aritmètica normal. És veritat que la bellesa de la teoria dels nombres és que aquesta escala normal—1,2,3,4,...—es pot substituir per molts altres ordres diferents, com per exemple els nombres primers o altres d'aques tipus. Per altra banda, tota la teoria dels nombres gira al voltant de les relacions entre els diferents tipus d'ordre que es poden atribuir als nombres enters. També en aquest cas estic convençut de que les estructures més discretes sorgeixen a partir d'una espècie de generació contínua subjacent. Com es veu molt bé, pel que fa a la resta, en teories purament algebraiques, com la teoria de grups abstractes, on es donen grups més o menys estranys que apareixen com grups d'automorfismes de figures contínues.» [5]

2.-Justificació (3)

Resulta evident que l'origen de la matemàtica es troba en els nombres. No en el concepte de nombre, sinó en els nombres. I no en els nombres en sí, sinó en les seves realitzacions més naturals i pròximes a l'home.

Admetent això, és comprensible que l'afirmació en la qual proposo que s'entengui la història de la matemàtica senzillament com la recerca (i no l'evolució) del concepte de nombre. De fet podem trobar una constatació d'aquesta idea en la filosofia de Hegel. En efecte, Hegel arriba a identificar en un procés de raonant la Filosofia i la Història de la Filosofia. Els punts d'interès són les afirmacions següents:

1.- La Dialèctica és el mateix procés complex i contadictori de la Realitat concebuda com totalitat en moviment i del Pensament, que així correctament la concebeix i la rebela.

2.- L'Absolut és la Realitat única originària, dinàmica, que produeix el ventall enorme de les seves determinacions o negativitats en les quals s'entranya i trova a sí mateix, es perd i pren consciència de sí.

3.- La realitat sencera, la Història, no és més que l'autorealització on l'Absolut s'expressa. És un sortir de sí per trobar-se, prendre consciència del que és i tornar a sí amb més plenitud.

4.- Existeixen tres fases en el desplegament de l'Absolut: l'Absolut en sí, l'Absolut fora de sí, i l'Absolut en sí i per sí.

Amb els 3 primers punts queda clara la dinàmica de l'Absolut. Fàcilment es veu que la Història de la matemàtica és igualment aquest procés en el qual el nombre inicialment és en sí (i.e: el nombre té una existència inicial innegable dependent o no —en principi la qüestió no és senzilla de resoldre— de les seves realitzacions). Amb l'aparició de l'home (punt clau en el desenvolupament de la Matemàtica quan aquest s'identifica amb la seva història), la matemàtica surt fora de sí, es realitza i devé inessencial. Finalment, és en ella mateixa que la matemàtica cerca el retorn en sí i per sí d'aquest transsumpte per incrementar la seva plenitud.

L'explicació de tot aquest procés és ben senzilla. L'home, al llarg de la història ha anat donant concepcions del nombre que han tendit cap a una abstracció cada cop més elevada. Notarem, no obstant, que el camí es tanca, però, com ja hem afirmat, retornant amb més plenitud. Veiem-ho. El grec identifica el nombre amb la geometria. És una concepció no gens simplista si tenim en compte els profunds problemes de constructibilitat amb regla i compàs. No obstant és la més senzilla en quant que el nombre és quelcom materialment abastable. Els problemes venen quan es veu que no tota construcció representa un nombre ($\sqrt{2}$, per exemple). Ho expressem afirmant la no-conmesurabilitat, i Euclides tracta de solucionar el problema amb uns complicats capítols sobre raons que són una primera aproximació involuntària (?) al concepte de límit. No obstant, ningú se n'adona.

Els següents passos són la creació dels conceptes de nombre negatiu i imaginari. Són dos grans salts que dilaten les mires. No obstant, el grau d'abstracció encara no és gran.

Haurem d'esperar a l'aparició del concepte de grup i la construcció dels nombres reals per donar les abstraccions algebraica i topològica del concepte de nombre. Què vol dir això? Senzillament que el matemàtic no deixa de treballar mai amb els nombres, el que passa és que cada cop ho fa amb una idea més abstracta d'ell.

El punt culminant el trobem quan, amb la Teoria de Classes, on el zero es defineix com el conjunt buit ($0 = \emptyset$), i amb la construcció de l'Univers de Von Neumann, veiem que tota classe és el resultat de generar classes a partir del conjunt buit fent les operacions convenientes. És a dir, tota

classe prové finalment del conjunt buit, el zero, el nombre. La matemàtica reafirma la seva identificació amb el nombre. El problema sorgeix quan tractem d'identificar la Teoria de Classes amb la Matemàtica. Realment, és molt difícil admetre aquesta afirmació quan s'ha meditat un cop sobre les seves implicacions. Això vol dir que tant el logicisme com les concepcions bourbakistes han d'ésser remodelables. I com trobem la solució? La resposta està en el vent. Si la matemàtica per alçar la seva plenitud ha de tornar a sí, fem que torni a sí. Si la matemàtica és la Realitat, no privem a la matemàtica de la Realitat. Donem una dinàmica a la matemàtica, dotem-la del moviment que la impulsa.

3.-Formalització (5)

Una de les grans aportacions de la lògica moderna és la descoberta de mètodes per a estudiar matemàticament els llenguatges (les lògiques). Si tenim en compte que la Matemàtica no és sinó una lògica (un llenguatge), resulta clar que la Lògica Matemàtica ha aconseguit potenciar mètodes per a estudiar la Matemàtica com a objecte matemàtic. Ara bé, resulta evident que la Lògica Matemàtica és part integrant de la Matemàtica (malgrat alguns ho dubten i neguen). En conseqüència, la Matemàtica pot estudiar-se a sí mateixa amb sí mateixa. Aquest raonament té una sèrie de dificultats a l'hora de posar-lo en pràctica.

Suposem que disposem d'una matemàtica basada en la teoria de classes NBG, i diguem-li M_0 . A partir de M_0 crearem la Lògica Matemàtica, on, com és clàssic, els llenguatges (lògiques) són classes amb unes certes propietats, i, per exemple, una interpretació es defineix com una aplicació amb certes restriccions. Resulta evident que tot això és factible. Diguem H_0 a aquesta teoria que hem creat. A continuació ve el pas fonamental. Pel fet de ser la Matemàtica un llenguatge (o, en altres paraules, poder ser "realitzada" en un llenguatge), podem "verificar" que s'amotlla al concepte de llenguatge que tenim en H_0 . Així, si $\mathbb{L}$ és el predicat "ser una lògica" en H_0 , existeix un X tal que:

$$\begin{aligned} H &\subseteq M_0, \\ \mathbb{L}X, \\ X &\equiv M_0. \end{aligned}$$

Resulta clar que no podem escriure directament $\mathbb{L}M_0$. Ara bé, sabem que no hi ha només una matemàtica en el sentit intuitiu. Sigui M_λ la classe de les matemàtiques generades a partir del mateix vocabulari λ . De manera anàloga, definim la classe de les teories lògiques associades, H_λ . Llavors:

- És cert que tota $M \in M_\lambda$ és una lògica en la seva lògica associada H ?
- Quines condicions s'han de verificar per a que M sigui una lògica en el sentit de H' (associada a M')?

Aquesta pregunta motiva la següent construcció per a respondre-la. Sigui M_λ^* la matemàtica (o una matemàtica) sobre la qual es puguin construir tots els elements de M_λ , a la qual anomenarem matemàtica λ -global. Llavors, el que tenim és una teoria unificada de les matemàtiques. Així sorgeix la qüestió: amb quines lògiques $H_{\lambda,i}$ (associades a matemàtiques $M_{\lambda,i}$ respectivament) es pot demostrar que una matemàtica $M_{\lambda,k}$ és consistent, per exemple? En altres paraules, és justificat fer servir la Lògica Clàssica per estudiar les lògiques? Són els resultats actuals de la Teoria de Models plenament justificats? Si tenim en compte que aquests es demostren fent servir una "teoria intuitiva", no, evidentment. Només podem dir: "de $H_{\lambda,i}$ es dedueix que $M_{\lambda,k}$ ($H_{\lambda,k}$) és consistent." Doncs bé, construïm M_λ^* de la següent manera:

- Considerem totes les $H_{\lambda,i}$ consistents com a axiomes de M_λ^* ;
- K (una teoria) és un teorema de M_λ^* si existeix una $H_{\lambda,i}$ amb la qual es pot demostrar que K és consistent.

D'aquesta manera generalitzarem el concepte de consistència relativitzant-lo a lògiques particulars. És fàcil veure que amb aquesta construcció perd sentit parlar de la consistència (absoluta) d'una lògica (teoria).

Suposem ara que M_0 pot ser submergida canònicament a M_λ^* , és a dir existeix un X tal que $X \equiv M_0$ i $X \subseteq M_\lambda^*$. Si això és cert (?) el que hem aconseguit és relativitzar el concepte de veritat de la matemàtica usual (i de manera anàloga de tantes altres). Les proposicions ja no són teoremes (cas de ser-los intuitivament) absoluts sinó relatius a la teoria que els predica i estudia (i no a la que els conté i expressa).

Donar una idea del que succeeix al submergir M_0 en M_λ^* és molt senzill. Per començar

definirem una teoria temporal com una aplicació $T: \mathbb{R} \rightarrow M_\lambda^*$. Definim una topologia τ no trivial sobre M_λ^* . Anomenem τ -lògica a una teoria temporal $T: (\mathbb{R}, \tau_u) \rightarrow (M_\lambda^*, \tau)$ contínua, on τ_u és la topologia usual a $\mathbb{R}$. D'aquesta manera, el concepte de veritat va evolucionant, intuitivament, d'una forma contínua.

Resulta clar que aquesta construcció és extrínseca, d'igual manera que podem definir extrínsecament la lògica de primer ordre en la Teoria de Classes identificant les fórmules amb els seus nombres de Gödel corresponents, i.e., aritmetitzant-la. Si suposem que aquesta construcció pot ser caracteritzada d'una manera intrínseca, al parlar de matemàtica dinàmica el que estem fent és identificar-la amb aquesta construcció. Així, intuitivament, els conceptes matemàtics, fins ara fixos, van variant a mesura que avança el temps (?!). Els conceptes estan dotats d'una dinàmica que retorna la matemàtica als seus orígens.

Finalment, sigui ψ l'aplicació que associa a cada matemàtica la seva teoria lògica associada, $\psi(M) = H$. Siguí ϕ l'aplicació que associa a cada llenguatge la classe de totes les matemàtiques que es poden construir amb ell, $\phi(\lambda) = M_\lambda$. Finalment, donat λ , sigui χ tal que $\chi(\lambda) = M_\lambda^*$, matemàtica λ -global de $\phi(\lambda)$. Amb això, podem fer la següent pregunta: és $\chi(\lambda) \subset \phi(\lambda)$? Amb altres paraules, si denotem per $v(T)$ el llenguatge sobre el que està construïda la teoria T , és $\chi(\lambda \cup \{\chi(\lambda)\}) \equiv \chi(\lambda)$? És a dir, és "idempotent" l'aplicació χ ? Si no ho fós, tindriem un mètode general per anar perfeccionant el concepte de matemàtica reiteradament (així, per exemple, això no ho proporciona el mètode de simetrització en àlgebra, ja que el simetritzat del simetritzat és isomorf al simetritzat, com tots sabem).

4.-Explicació (35)

Creiem que el que dona realitat a la matemàtica és el fet de que sigui canviant, i que canviï junt amb l'home. Amb les construccions anteriors, tractem de donar una aproximació al fet de que les proposicions poden passar de ser "veritat" a no ser-ho, sintàcticament parlant, o recíprocament. Amb això, per exemple, és possible definir $i = \sqrt{-1}$ com un objecte α sobre una teoria temporal que, a mida que avancem sobre $\mathbb{R}$, va passant de valdre $+1$ a -1 . Això introdueix la continuïtat intrínseca dels conceptes de suma i producte que indica René Thom, ja que, per fer α^2 , el que hem de fer realment és $\alpha_t \times \alpha_{t+\eta}$, on $\times$ és la multiplicació clàssica i $\eta \in \mathbb{R}$ és tal que $\alpha_t = -\alpha_{t+\eta}$ (alternança que hem mencionat), essent α_t el valor de α en t . Per tant, $\alpha^2 = \alpha_t \times \alpha_{t+\eta} = (+1) \times (-1) = (+1) \times (-1) = -1$ (!).

En definitiva, és perfectament coherent donar significats a aquestes construccions.

Quan generalitzem la idea intuitiva de teoria temporal obtenim el concepte més abstracte de matemàtica λ -global.

Per últim, indiquem que, quan tenim T , teoria temporal esglaonada, (en el sentit usual), tenim efectivament una aplicació induïda $T^*: \omega \rightarrow M_\lambda$ (on ω denota el conjunt dels nombres naturals), i.e.: una successió de lògiques. És a dir, la Teoria de Models, que es pot estudiar a partir de successions de lògiques "convergentes" (per exemple, demostracions de ω -consistència, teorema de compacitat, etc.) té cabuda com a subteoria dins d'aquest més general.

Aquestes idees ja les esposa (conscientment o no) Ostwald Spengler (1880-1936), professor de matemàtiques al Gymnasium de Munich, en *La decadència de l'Occident* quan afirma que la cultura és la determinant del veritable i el fals. Diu «Heus aquí el que li falta al pensador occidental... la comprensió de que les seves conclusions tenen un caràcter històric relatiu, de que no són sinó l'expressió d'una manera singular de ser i només d'ell... no sap que les seves "veritats", les seves "veritats eternes", són veritats només per a ell i són eternes només per la seva pròpia visió del món.» ([5], introducció, 8).

Clarament es veu que l'evolució de la cultura humana, la història humana, la dialèctica de l'home, la Matemàtica (segons les identifications que hem fet al començament) s'expressen llavors formalment com a successions contínues de criteris de veritat, com a successions de tècniques de raonament (que poden variar tant en el mètode (sintaxi) com en les hipòtesis o creences (axiomes)), i.e.: com a aplicacions contínues de $\mathbb{R}$ sobre el conjunt de les lògiques.

5.-Retorn (71)

Amb el que hem dit fins ara resulta comprensible finalment la cita del principi. René Thom observa que en la matemàtica actual hem eliminat el concepte de PROCÉS d'una operació qualsevulla. És aquesta idea errònia de la innecesitat d'aquest concepte que elimina la coherència interna a la ciència. Més errònia encara si tenim en compte que els grecs ja la concebien com un procés dinàmic

geomètric. No obstant, no observa que el concepte de PROCÉS DE FER matemàtic també ha estat eliminat. Hom dedueix en un nombre finit de passos. La deducció es fa en salts no continus, creant una estructura discreta falsa. La deducció és un procés continu, infinit (és útil indicar aquí que la famosa conversa entre Aquil·les i la tortuga entorn del concepte i mecànica de deducció cobra un nou interès), i per tant inaprehensible en un nombre finit de passos. Es dona així una reafirmació de la crítica al principi del terç exclós, ja que perd sentit quan les lògiques extrínseques van variant intrínsecament en el transcurs d'una deducció. Allò que es fonamental observar és que els objectes perden la seva essencialitat com a ingènument concebuda. Aquesta cobra una nova dimensió independent de cada estat particular. Com indica Hegel: «El Tot és anterior a les parts». I com reafirma Wittgenstein: «El concepte formal està ja donat quan es dona un objecte que cau sota ell. No es pot, doncs, introduir com idea primitiva els objectes que cauen sota un concepte formal i el concepte formal mateix. No es pot, doncs, per exemple, introduir (com Russell fa) el concepte de funció i també les funcions especials com idees primitives: o el concepte de nombre i nombres determinats» [6].

Arribem a la màxima expressió dilucidativa quan llegim: «Expressions com "1 és un nombre", "n'hi ha un sol nombre zero", i totes altres semblants, són un sense sentit. (És tant sense sentit dir "n'hi ha només un 1" com dir "2+2 és a les 3 en punt igual a 4").» [6].

Per tant, assistim a un retorn del concepte de nombre a sí mateix efectivament amb major plenitud. I el procés s'itera indefinidament, *ad infinitum*.

6.-Conclusió (72-78)

Aquest article, amb la reafirmació per part de la cita de René Thom, professor de l'Institut de Hautes Études Scientifiques de Bures-sur-Yvette, introductor de la Teoria de Catàstrofes, vol donar una idea del procés de desenvolupament que ha d'efectuar encara la matemàtica donant una volta a tots els seus principis platònics, indicant que és molt plausible que sigui intrínsecament generable una nova matemàtica. La idea es troba en fer notar que el concepte de PROCÉS, en totes les seves dimensions, no és ni trivial ni no essencial.

Amb aquesta idea, es mostra que aquest objectiu es pot abastar en certa manera tenint en compte que la matemàtica està intrínsecament relacionada al concepte de nombre. De fet, aquesta, com es mostra, no és més que un constant MOVIMENT del mateix. En aquesta idea l'exposició intrínseca troba la seva expressió formal. En altres paraules, el procés al qual fem referència consisteix en construir una matemàtica efectivament intrínseca, on les estructures clàssiques assoleixen d'aquesta manera la dinàmica requerida. Tot consisteix, per tant, en observar que, un cop s'ha sortit de sí, en el constant i iterat procés de retorn a sí mateix troba qualsevol esdeveniment («El món és tot el que esdevé» [6]) el seu constant perfeccionament. Finalment, observem que això és una reformulació del fet que l'univers no és estàtic, ja que això implicaria la seva perfecció absoluta, la qual, d'altra banda, mai pot ésser assolida. El parlar d'aquest procés de retorn intrínsec implica igualment la impossibilitat de discurs, o almenys no són capaços de concebre un discurs apte per expressar intrínsecament aquest nou esdeveniment.

Dimas Cabré
2on. curs

Referències:

- [1] BARWISE, John **Handbook of Mathematical Logic**, Col. Studies in logic and the foundations of Mathematics, Vol.90, North Holland Publishing Company, 1977.

NOTA: Una idea intuitiva dels apartats 3 i 4 es pot obtenir observant la semblança amb l'estudi que es feia de les geometries no-clàssiques submergint models d'elles en l'eulídea. Si el que fem és submergir la geometria eulídea en d'altres, i creem una "geometria" (en el sentit de Klein, i.e.: grup de transformacions) dels submergiments d'una geometria dins una altra, obtenim un model intuitiu de la idea de matemàtica λ -global.

- | | |
|--------------------------|---|
| [2] CARROLL, Lewis | El juego de la lógica, Col. El libro de bolsillo, Vol.363, Alianza Editorial, Madrid 1972. |
| [3] NORIYUKI Nakayama | The Treasure Chest Enigma, edita Noriyuki Nakayama, Tokyo 1984. |
| [4] SPENGLER, Ostwald | La decadencia del Occidente. |
| [5] THOM, René | Parábolas y catástrofes , Col. Superínfimos, Vol.5, Tusquets Editores, Barcelona 1985. |
| [6] WITTGENSTEIN, Ludwig | Tractatus Logico-Philosophicus, Col. Alianza Universidad, Vol. 50, Alianza Editorial, Madrid, 1985. |

FORJADORS DE LA MATEMÀTICA MODERNA

Srinivasa Ramanujan



SRINIVASA RAMANUJAN AIYANGAR.

Die mathematische Analysis, gewissermassen, eine einzige Symphonie des Unendlichen ist.

David Hilbert, Über das Unendliche (*)

Un día lluvioso, en el condado de East Anglia (i.e., un día cualquiera en el condado de East Anglia) el profesor Godfrey J. Hardy de Trinity College (Cambridge) recibía una carta fechada 16 de Enero de 1913 de un tal Srinivasa Ramanujan Aiyangar.

«Apreciado señor:

Me permito presentarme a usted como un contable del Accounts Department del Port Trust Office de Madrás con un salario de £20 anuales. Tengo cerca de 23 años de edad. [Tenía realmente 25.] No he recibido educación universitaria, pero he seguido los cursos de la escuela ordinaria. Una vez dejada la escuela he empleado el tiempo libre de que disponía en estudiar matemáticas. No he pasado por el proceso regular convencional que se sigue en un curso universitario, pero estoy siguiendo una trayectoria propia. He hecho un estudio detallado de las series divergentes en general y los resultados a que he llegado son calificados como "sorprendentes" por los matemáticos locales.

Yo querría pedirle que repasara los trabajos aquí incluidos. Si usted se convence de que hay alguna cosa de valor, me gustaría publicar mis teoremas, ya que soy pobre. No se me han dado a conocer las investigaciones actuales ni las expresiones que he adoptado, pero he indicado el proceso que sigo. Debido a mi poca experiencia,

(*) El análisis matemático es la singular sinfonía del infinito. David Hilbert, *Sobre el infinito*.

tendría en gran estima cualquier advertencia que usted me hiciera. Pido que me excuse por las molestias que ocasiono.

Quedo, apreciado señor, a su entera disposición.

Srinivasa Ramanujan.»

Con la carta se adjuntaba unas hojas con alrededor de 120 teoremas sin demostración (las demostraciones, triviales en su mayoría se dejan como fácil ejercicio para el lector) de las cuales he escogido 18 por ser las más aprehensibles.

$$(1.1) \quad 1 - \frac{3!}{(1! \cdot 2!)^3} \cdot x^2 + \frac{6!}{(2! \cdot 4!)^3} \cdot x^4 - \dots = \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right)$$

$$(1.2) \quad 1 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13 \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

$$(1.3) \quad 1 + 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17 \cdot \left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25 \cdot \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2} \cdot [\Gamma(\frac{3}{4})]}$$

$$(1.4) \quad 1 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9 \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^5 - 13 \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^5 + \dots = \frac{2}{[\Gamma(\frac{3}{4})]^4}$$

$$(1.5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \cdot \dots \, dx = \frac{1}{2} \cdot \pi^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(b+1) \cdot \Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(b-a+1)}$$

$$(1.6) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^4)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^5+r^7+\dots)}$$

$$(1.7) \quad \text{Si } \alpha \cdot \beta = \pi^2, \text{ entonces } \alpha^{-1/4} \cdot \left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) = \beta^{-1/4} \cdot \left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right)$$

$$(1.8) \quad \int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi^{1/2} - \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{1}{a} - \frac{2}{2a} - \frac{3}{a} - \frac{4}{2a} \dots$$

$$(1.9) \quad 4 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-\sqrt{5}x}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1+} - \frac{1^2}{1+} - \frac{1^2}{1+} - \frac{2^2}{1+} - \frac{2^2}{1+} - \frac{3^2}{1+} - \frac{3^2}{1+} - \frac{4^2}{1+} \dots$$

$$(1.10) \quad \text{Si } u = \frac{x}{1+} - \frac{x^5}{1+} - \frac{x^{10}}{1+} - \frac{x^{15}}{1+} \dots \text{ y } v = \frac{x^{1/5}}{1+} - \frac{x}{1+} - \frac{x^2}{1+} - \frac{x^3}{1+} \dots$$

entonces
$$v^5 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}$$

$$(1.11) \quad \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+...} = \left(\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) e^{2\pi/5}$$

$$(1.12) \quad \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+} \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+...} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5^{3/4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2} - 1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) e^{2\pi\sqrt{5}}$$

(1.13) Si $F(k) = 1 + \frac{1}{2}k + \frac{1.3}{2.4}k^2 + \dots$ y $F(1-k) = \sqrt{210} \cdot F(k)$, entonces

$$k = (\sqrt{2}-1)^4 (2-\sqrt{3})^3 (\sqrt{7}-\sqrt{6})^4 (8-3\sqrt{7})^2 (\sqrt{10}-3)^4 (4-\sqrt{15})^4 (\sqrt{15}-\sqrt{14})^2 (6-\sqrt{35})^2$$

(1.14) El coeficiente de x^n en $(1-2x+2x^4-2x^9+\dots)^{-1}$ es el número entero más próximo a

$$\frac{1}{4n} \left(\cosh \pi\sqrt{n} - \frac{\sinh \pi\sqrt{n}}{\pi\sqrt{n}} \right)$$

(1.15) El total de números entre A y x que son cuadrados o suma de 2 cuadrados es

igual a $K \int_A^x \frac{dt}{\sqrt{\log t}} + \Theta(x)$, donde $K=0.764\dots$ y $\Theta(x)$ es muy pequeño comparado con la integral

$$(1.16) \quad \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{15}{2\pi^4}$$

$$(1.17) \quad \frac{\coth \pi}{1^7} + \frac{\coth 2\pi}{2^7} + \frac{\coth 3\pi}{3^7} + \dots = \frac{19\pi^7}{57700}$$

$$(1.18) \quad \frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1} + \frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1} + \frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1} + \dots = \frac{1}{24}$$

25 años antes, el 22 de Diciembre de 1887, en el distrito de Tanjore de la Presidencia de Madrás, nacía Srinivasa Ramanujan Aiyangar, gracias a las súplicas de su abuelo a la diosa Namagiri de Namakkal.

A los 7 años entró en el Town High School de Kumbakonam donde una excelente predisposición para las matemáticas le hizo inmediatamente famoso entre los demás alumnos, a los que recitaba tantas cifras de π o $\sqrt{2}$ como quisieran. A los 15 años un amigo suyo le consiguió un libro, *Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics*, al que Ramanujan destinaria la

mayor parte de su tiempo. Se trata básicamente de una enumeración de 6000 teoremas de diversas ramas de la matemática, fue escrito por George Shoobridge Carr en 1880.

A los 16 años recibe una beca para estudiar, pero su poco conocimiento del inglés obstaculiza el curso normal de sus estudios y pierde la beca el siguiente año.

En 1909 se casó, necesitaba un trabajo fijo para mantener a su familia. Buscando un empleo consiguió una recomendación para un auténtico amante de la matemática, Diwan Bahadur R. Ramachandra Rao de Nellore. La sorpresa de Ramachandra Rao ante la visita de Ramanujan queda manifiesta en el siguiente párrafo.

«Hace algunos años, un sobrino mío, ignorante por completo de todo conocimiento matemático me dijo: "Tío, tengo un visitante que habla de matemáticas y no lo comprendo; ¿Podría mirar si hay algo de interés en su charla?". Y en la plenitud de mi sabiduría matemática, condescendí a que Ramanujan hablara en mi presencia. Una pequeña figura rústica, vigorosa, sin afeitar, desaliñada, con un rostro conspicuo - los ojos brillantes - entró con un gastado libro de notas bajo el brazo. Era extremadamente pobre. Había ido desde Kumbakonam a Madrás a fin de conseguir medios para proseguir sus estudios. Jamás pidió ninguna distinción. Necesitaba desahogo; en otras palabras, que se le suministrara el mínimo vital sin esfuerzo de su parte y que se le permitiera soñar.

Abrió el libro y empezó a explicar algunos de sus descubrimientos. Al punto vi claramente que era algo fuera de lo conocido; pero mis conocimientos no me permitieron juzgar si hablaba con sentido o sin él. Suspendiendo todo juicio le pedí que viniera de nuevo y así lo hizo. Apreció debidamente mi ignorancia y me demostró algunos de sus hallazgos más simples. Estos iban más allá de los libros existentes y ya no tuve duda de que era un hombre notable. Después, paso a paso, me inició en las integrales elípticas y en las series hipergeométricas; finalmente su teoría de las series divergentes, no divulgada todavía, me convirtió. Le pregunté qué era lo que deseaba. Dijo que él quería una pequeña pensión para vivir y así proseguir sus estudios».

Ramachandra mantuvo a Ramanujan pero al cabo de un tiempo éste rechazó el ofrecimiento y comenzó a trabajar en un despacho del Port Trust de Madrás.

En 1911 publicó su primer artículo: "Some properties of Bernoulli's Numbers" en el Journal of the Indian Mathematical Society. Poco a poco sus amigos le empujaron a escribir a G.J. Hardy la carta con que comienza este escrito. Hardy quedó claramente atónito como podemos comprobar en el siguiente comentario que hizo.

«Quisiera que intentaran imaginarse la reacción inmediata de un matemático profesional corriente que recibe una carta como ésta, de un contable hindú desconocido.

El primer problema era el de saber si podría siquiera reconocer alguna cosa. Yo había demostrado algo semejante a (1.7) y la (1.8) me parecía vagamente conocida. Realmente la (1.8) es clásica; es la fórmula de Laplace probada por primera vez con rigor por Jacobi y la (1.9) se encuentra en un trabajo publicado por Rogers en 1907. Pensé que, como experto en integrales definidas, podría seguramente comprobar (1.5) y (1.6) y así lo hice, aunque con mucha más dificultad de lo que había supuesto...

Encontré francamente intrigantes las fórmulas de series (1.1) - (1.4) y pronto me convencí de que Ramanujan debía poseer teoremas mucho más generales y se había guardado la mayor parte en la manga. La segunda es la fórmula de Bauer bien conocida en la teoría de las series de Legendre, pero las otras son más complicadas de lo que parecen...

Las fórmulas (1.10) - (1.13) son de un nivel distinto y, desde luego, tan difícil como profundo. Un experto en funciones elípticas puede ver inmediatamente que (1.13) se deriva, de alguna manera, de la teoría de 'multiplicación compleja'; pero (1.10) - (1.12) me desconciertan por completo. Nunca, antes de ahora, había visto nada siquiera parecido a ellas. Una ojeada es suficiente para comprender que solamente podían ser escritas por un matemático de la más alta categoría. Deben de ser ciertas, porque si no lo fueran, nadie habría tenido suficiente imaginación para inventarlas. Por último... el autor debe ser enteramente honesto, ya que tan increíble destreza es más frecuente en los matemáticos enminentes que no en los ladrones y embaucadores...

A pesar de que Ramanujan tuvo numerosos y brillantes éxitos, sus trabajos sobre los números primos y todos los problemas relacionados con esta teoría estaban ciertamente equivocados. Puede decirse que este fue su gran error. Pero todavía no estoy convencido de que, su equivocación no fuera más maravillosa que cualquiera de sus éxitos...».

En Mayo de 1913 tras ser invitado por Hardy y después de ser debidamente autorizado por su madre, Ramanujan parte para Cambridge. En palabras de Hardy:

«Al fin el consentimiento llegó, fácilmente, de una manera inesperada. Una mañana, su madre declaró que la noche anterior había tenido un sueño, en el que había visto a su hijo, en una gran sala, rodeado de un grupo de europeos y que la diosa Namagiri le había ordenado que no se interpusiera en el camino de su hijo y que colaborara al objeto de su vida.»

Hardy fue la persona que mantuvo mayor contacto con Ramanujan durante su estancia en Cambridge, el siguiente párrafo es un comentario de Hardy acerca de Ramanujan.

«Había una gran incógnita. ¿Qué método debía seguirse para enseñarle matemáticas modernas? Las lagunas de su conocimiento eran tan asombrosas como su profundidad. Era un hombre que podía trabajar con ecuaciones modulares y teoremas de multiplicación compleja, con métodos desconocidos; su dominio de las fracciones continuas era, por lo menos en el aspecto formal, superior al de cualquier matemático del mundo; había encontrado por sí solo la ecuación funcional de la función Zeta y el tecnicismo usual de los más famosos problemas de la teoría del análisis numérico. Pero nunca había oído hablar de una función doblemente periódica o del teorema de Cauchy; no tenía ni la más remota idea de que era una función de variable compleja. Describía nebulosamente su concepto acerca de lo que constituía una demostración matemática. Había obtenido todos los resultados, nuevos o viejos, verdaderos o falsos, por un proceso de prueba mixta, intuición e inducción, de la cual era completamente incapaz de dar cualquier razón coherente.

Era imposible pedir a este hombre que se sometiera a una instrucción sistemática para intentar aprender de nuevo matemáticas desde el principio. Temía además que, si yo insistía indebidamente en materias que Ramanujan consideraba tediosa, podía destrozar su confianza o romper el encanto de su inspiración. Por otra parte había cosas que era necesario que aprendiera. Algunos de sus resultados eran equivocados, en particular los que concernían a la distribución de los números primos, a los que él daba la mayor importancia. Era imposible permitirle ir por el mundo suponiendo que todos los ceros de la función Zeta eran reales. Así, yo intentaba enseñarle y en cierto modo tuve éxito, aunque, obviamente, yo aprendí de él mucho más de lo que él aprendió de mí...

Debo añadir unas palabras sobre las aficiones de Ramanujan aparte de las matemáticas. Al igual que sus matemáticas, mostraban los más extraños contrastes. Yo diría que le interesaba muy poco la literatura como tal, y tampoco el arte; pero podía distinguir la buena literatura de la mala. Por otra parte era un filósofo sutil, pero de una modalidad que pareció muy nebulosa a los compañeros de la escuela moderna de Cambridge y un ardiente político, pacifista y ultraradical. Se ajustaba a las prescripciones religiosas de su casta con una severidad muy poco corriente en los indios residentes en Inglaterra; pero su religión era materia de rito, no convicción intelectual; recuerdo bien su confidencia (que me sorprendió mucho) de que todas las religiones le parecían por igual más o menos verdaderas. Tanto en literatura, como en filosofía y en matemáticas, tenía verdadera pasión por lo inesperado, extraño y estrambótico; poseía casi una pequeña librería de obras sobre la cuadratura del círculo y otras curiosidades... Era vegetariano en el sentido más estricto -esto provocó más tarde, cuando estuvo enfermo, una gran dificultad- y durante el tiempo que estuvo en Cambridge cocinó todos sus alimentos él mismo; nunca lo hizo sin antes ponerse en pijama.

Fue en la primavera de 1917 cuando empezó a manifestarse la enfermedad de Ramanujan. Se trasladó a un sanatorio de Cambridge a principios de verano y otra vez guardó cama durante algún tiempo. Estuvo en sanatorios de Wells, Matlock y Londres y no mostró síntomas claros de mejoría hasta otoño de 1918. Entonces reanudó el trabajo activo, estimulado quizás por su elección en la Royal Society y algunos de sus mejores teoremas fueron descubiertos por esta época. Su elección en la Trinity Fellowship fue un acicate más. Cada una de estas famosas sociedades puede congratularse de haber reconocido sus méritos antes de que fuera demasiado tarde.

Me he preguntado a menudo si Ramanujan tenía algún secreto especial, si sus métodos eran mejores que los del resto de los matemáticos o si había alguna cosa realmente extraordinaria en su modo de pensar. No puedo contestar a estas preguntas con seguridad y convicción; pero no lo creo. Mi opinión es que todos los matemáticos piensan, en el fondo, con el mismo método y que Ramanujan no era una excepción. Tenía, por descontado, una memoria extraordinaria. Podía recordar la naturaleza de los números de una manera casi pavorosa. Creo que fue Mr. Littlewood quien señaló que "cada entero positivo era uno de sus amigos personales". Recuerdo una vez que fui a verle cuando yacía enfermo en Putney. Yo había viajado en el taxi número 1729 y observé que el número me parecía más bien insípido y que esperaba que no le fuera de mal agüero. "No-replicó-es un número muy interesante; es el número más pequeño expresable como suma de dos cubos de dos maneras diferentes." Le pregunté, naturalmente, si conocía la respuesta al problema correspondiente a la cuarta potencia y él replicó, después de un momento de reflexión, que el ejemplo no era obvio y que el primero de tales números debía ser muy grande. Su memoria y su facilidad de cálculo estaban fuera de lo corriente, pero no podían llamarse propiamente 'antinaturales'. Si tenía que multiplicar dos números grandes lo hacía de la

manera usual, podía efectuar la multiplicación con extraordinaria rapidez y seguridad, pero no más rápidamente y con más seguridad que cualquier matemático que sea naturalmente rápido y tenga el hábito de calcular.

Lo más asombroso era su perspicacia en fórmulas algebraicas, transformaciones de series infinitas y demás. En este aspecto, ciertamente, no he encontrado nada parecido y sólo puedo compararlo con Euler o Jacobi. Trabajó por inducción de ejemplos numéricos mucho más que la mayoría de matemáticos modernos; todas sus propiedades de congruencia de particiones, por ejemplo, fueron descubiertas de esta manera. Pero añadió a su memoria, a su paciencia y a su facilidad de cálculo, un poder de generalización, una percepción del método y una capacidad de rápida modificación de sus hipótesis realmente sorprendentes y que le sitúan, en su tiempo, en el lugar más destacado.

Generalmente se dice que ahora es mucho más difícil que un matemático sea original que no lo era en los días épicos en que se establecían los fundamentos del análisis moderno; sin duda es verdad en cierto modo. Puede haber opiniones diferentes acerca de la importancia del trabajo de Ramanujan, la medida con la que debería juzgarse y la influencia que probablemente tenga en las futuras matemáticas. No tiene la simplicidad y la inevitabilidad de las más grandes obras, podría ser más importante si en él no hubiera excentricidades. Pero tiene un don que no puede negarse: una profunda e insuperable originalidad. Probablemente habría sido mejor matemático si lo hubieran descubierto y educado un poco en su juventud; habría hallado más cosas nuevas y, sin duda, de mayor importancia. Por otra parte habría sido menos parecido a Ramanujan y más semejante a un profesor europeo; en este caso la pérdida podría haber sido mayor que la ganancia.»

En Abril de 1920 murió Ramanujan aquejado de una fuerte tuberculosis que no había dejado de empeorar desde que retornó a la India. Como final quisiera mencionar las palabras de un matemático de nuestros días, Askey, sobre la obra de Ramanujan.

«Para Hardy, era una pena que Ramanujan no hubiera nacido 100 años antes. En mi opinión, es una pena que Ramanujan no hubiera nacido 100 más tarde. Ahora estamos intentando resolver problemas con varias variables- los problemas son más difíciles y hubiera sido maravilloso contar con alguien con su intuición para que ayudara en los planteamientos iniciales.

Ramanujan es importante no sólo como matemático, sino también por lo que nos dice sobre lo que puede hacer la mente humana. Alguien con su capacidad es tan raro y precioso que no nos podemos permitir el lujo de perderlo. Un genio puede surgir en cualquier lugar del mundo.»

Sebastián del Baño
2on. curs

Carta Astral de Srinivasa Ramanujan.

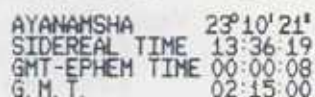
Es fundamental para la buena comprensión de la personalidad de S.Ramanujan el tener en cuenta quien era y donde vivía. La India de finales del siglo XIX era una colonia británica en donde la occidentalización despertó un nacionalismo hindú que no se había dado nunca anteriormente y por un lado estaban el progreso económico y el bienestar alcanzado por ciertas clases privilegiadas y por otro los movimientos nacionalistas enfrentados al dominio colonial.

Nativo de Sagitario, Srinivasa cumple con las disposiciones necesarias establecidas por la mecánica celeste para ser una luz en la ciencia matemática.

Su ascendente, situado a 17 grados 10 minutos de la constelación de Capricornio, ya induce a pensar que tendrá todos los atributos del carnero, símbolo de la constelación.

La luna en Piscis, cuadrada a su sol indica que tuvo que tener problemas relacionados con su madre y su casa, aunque la presencia de la luna en la casa III denota que su vida gravitó entorno al campo mental e intelectual.

En general, el ascendente trigono mercurio se ha visto ya en otras grandes personalidades de la ciencia, pero aquí presenta un énfasis especial al estar el ascendente cuadrado a Urano, ello significa que los logros o progresos llevados a cabo por Ramanujan no habrían de merecer la fama que les correspondería, si bien habrían de ser muy importantes e incluso, dada la proximidad de Marte a Urano, geniales y decisivos en el desarrollo y trabajos de otros matemáticos.



$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$	$\frac{H}{A}$
133 14	65 1	90 22	9 10	5 42	73 56	130 41	148 7	68 13	136 24	142 25	155 23	74 11	81 11			
Sesqui		Square	Conjun	Conjun	Quintl		Quincu	3/16	Sesqui	BiQuin	TriSep	Quintl	BiNovl			
1 46 A		0 22 S	9 10 S	5 42 S	1 56 S		1 53 A	0 43 S	1 24 A	1 35 A	1 6 S	2 11 S	1 11 S			

Neptuno en Tauro le debió provocar una serie de intuiciones o apariciones que dejarían una profunda huella en su ser, y que ciertamente guiaron al buen hombre por la senda del conocimiento, primero abstracto, luego sintético, y posteriormente sinalagmático. Su espíritu sibilino y misterioso, algunas veces confuso, encontró, así lo señala Saturno en Leo conjunto al nodo Norte, una paz relativa en el mundo de los números, pero esto no fue para el fin de la ansiada búsqueda del nirvana que tan acentuada estaba por Venus en Escorpio y en la Casa X, sino un principio de la luz benéfica que habría de guiarlo.

Su poderosa memoria era debida a la influencia de las oposiciones Júpiter-Neptuno Júpiter-Plutón, aunque por el hecho de ser oposiciones y no conjunciones tenía carácter inconstante e intermitente. Esto junto con el trígono Marte-Plutón le daban la apariencia de un ser dual con dos tipos de carácter bien diferenciados, uno el de un asceta o brahman intelectualizado al estilo occidental, y otro el de un indio místico al que se le aparecía la diosa Namagiri dictándole teoremas o induciéndole a hacer tal o cual cosa.

El Ayanamsha establecido en 23 grados le confiere la doble fuerza del Sagitario sideral y el tropical juntos (sol a 29 grados de Sagitario), y acentúan su pasión por los viajes, tanto físicos como astrales.

Los datos sobre la posición de los planetas están tomados de las efemérides de Raphael, y de las efemérides de la NASA para el año 1887 publicadas en la edición de 1970.

Los cálculos han sido realizados por el programa Kepler de Kepler Softpack int. U.K. y la interpretación corre a cargo de Jordi Llagostera miembro de la Asociación de Astrólogos Americanos A.F.A.

El Algebra de los Planetas

Comúnmente conocida como astrología, se trata del vasto conjunto de propiedades, teoremas y corolarios que se dan en el Espacio Astral.

Entendemos por Conjunto Astral o Conjunto asociado, al conjunto {Sol, Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Plutón, ascendente, nodo norte, nodo sur}.

Conjunto zodiacal es el conjunto de los signos del zodiaco.

Conjunto Principal es el conjunto {cuadratura, trigono, oposición, conjunción, sextil, semisextil}.

Grado astral es la aplicación biyectiva

$$f: I \longrightarrow \text{Conjunto principal} \cup \{f(\emptyset)\}$$

donde $I = \{\emptyset, 0, 30, 60, 90, 120, 180\}$ tal que:

$$\begin{array}{lll} f(0) = \text{conjunción}, & f(30) = \text{semisextil}, & f(60) = \text{sextil}, \\ f(90) = \text{cuadratura}, & f(120) = \text{trigono}, & f(180) = \text{oposición}. \end{array}$$

Diremos Aplicación Esencial a toda aplicación g tal que, dados $a, b \in \text{Conjunto Astral}$:

$$\begin{array}{l} g: \text{C.Astral} \times \text{C.Astral} \longrightarrow [0, 360] \subset \mathbb{R} \\ (a, b) \longrightarrow g(a, b) = \text{ángulo en grados que separa } a \text{ de } b. \\ g(a, a) = 0 = 360 \end{array}$$

Homotecia de enlace astral HE es aquella tal que:

$$\begin{array}{l} \text{HE: } \text{Img} \longrightarrow I \\ g(a, b) \longrightarrow Kg(a, b), \text{ donde } K \text{ es el menor real tal que } K > 0 \text{ y } Kg(a, b) \in I. \end{array}$$

Si $K \notin [0.7, 1.4228]$ se considera la K inmediatamente superior, si dicha K no cumple $Kg(a, b) \in I$ y $K \in [0.7, 1.4228]$ entonces se define $\text{HE}(g(a, b)) = \emptyset$.

Evidentemente g es única, y si bien no es exhaustiva ni inyectiva, es susceptible de composición con f mediante la homotecia HE .

Proposición.- Sea f el grado astral, g la aplicación esencial, HE la homotecia de enlace.

Tesis.- $Dir = f \circ HE \circ g$ es aplicación biyectiva.

La demostración queda como ejercicio. (Indicación: ver dimensiones y rangos de los conjuntos implicados e intentar construir un homomorfismo constructivo con cierto espacio dual por todos conocido.)

Sean C =conjunto de las letras del abecedario

C_p = conjuntos de p letras, $p \in \mathbb{N}$.

C_n^p = reunión arbitraria de C_p , $n \in \mathbb{N}$.

F aplicación (aún no está demostrado por nadie) que llamaremos personal tal que:

$$F: C.Astral \times C.Astral \times C.Principal \longrightarrow C_n$$

$$(a,b, Dir(a,b)) \longrightarrow C_{a,b}$$

entrando en la definición propiedades topológicas derivadas del Conjunto zodiacal y propiedades algebraicas de Dir .

Entendemos por Espacio Astral toda colección $(C.Astral \times C.Astral, I, C.Principal, g, f, HE, F, C.zodiacal, C_n)$.

F depende de cada astrólogo y da lugar a distintas interpretaciones.

Jordi Llagostera
2on. curs

SCHWEIZERISCHE NATIONALBANK
BANCA NAZIONALE SVIZRA



BANQUE NATIONALE SUISSE
BANCA NAZIONALE SVIZZERA

ESPECIAL

NOMBRES



Bitllet de curs legal: 10 francs suïssos. Emés en reconeixement d'Euler a les seves contribucions. Pioner en la teoria de grafs per resoldre el problema del ponts de Königsberg i potser el més increïble manipulador de fórmules matemàtiques.

Introducció. Una excursió al País dels Nombres.

Hi ha un món ple de Fantasia i habitatge de somnis que molt pocs han visitat. Allí les criatures viuen en una harmonia que a cap altre lloc hom ha pogut observar més melodiosa. Alguns li diuen el Món de les Matemàtiques. Els seus habitants li diuen el País dels Nombres (tot amb un llenguatge que no pot deixar de recordar-me el pausat idioma dels Ents).

Voldria presentar-vos un personatge molt curiós. És molt probable que no el conegueu, i no obstant, de seguida us fareu molt amic d'ell. Ningú no sap com es diu en realitat, doncs fins i tot ell ho ha oblidat. Ara es fa dir Lo Set! Habitant del nostre món va decidir un dia, no saben ben bé per quins motius, abandonar-nos, o quasi. El fet és que va decidir que el Món de la Matemàtica era molt més interessant que un aire contaminat i un anar de bòlit constantment. Coneixedor del tema, no li va costar gaire fer una mutació extraordinària: es va convertir en un nombre! Qui diria que un home més aviat geperut, amb barba cana i vista no gaire bona seria capaç de fer aquesta proesa?

Però no li agrada massa que se'n parli gaire d'això (s'estima més que comprin el seu llibre, cosa la qual, certament, li produeix més beneficis).

Actualment, i gràcies a certa influència (no us penseu que és el primer que ho ha fet, això. En conec que actualment treballen com a varietats diferenciables a un país de fora) va aconseguir fer-se el càrrec de la posició decimal 10^{197-34} del nombre pi. Ja sabeu, mantenir relacions màgiques amb els seus companys, perpetuar la irracionalitat, assegurar la transcendència, anar sempre amb compte amb tots aquells heretges que s'obstinen en fer passar el seu amo per un simple algebraic... Això li produeix una satisfacció personal força interessant. Imagineu-vos, actualment s'ha enterat de que el dígit $350^{184}+15$ és un gran aficionat al GO (de fet és "ell"-DAN). Podeu saber ja el que ha passat. Però això no és tot. També es dedica a les relacions públiques. És ell qui fa de mediador entre els nombres e, i i -1 . Tota una feinada. Ultimament les rivalitats entre i i -1 han abastat un caire insuportable. e i π , amb els seus poders transcendents, fan el que poden.

Ademés, així s'ha fet amic de nombrosos díigits d' e . Diu que són força simpàtics, un pel curiosos i, sobretot, màgics, sorprenentment màgics. Bé, millor que us ho expliqui ell:

"Hola amics, sóc Lo Set. Si em disculpeu un moment. Fa uns minuts, un brètol s'ha obstinat en aproximar al meu amo a tres díigits, i no veieu. No creieu que tot són alegries, aquí, constantment amenaçats de ser eliminats, sempre per culpa dels maleïts errors (ecs! són insuportables, si els veiessiu. No, millor que no; només de pensar en ells se m'esgarriren els divisors). Però ja ens ho fem.

Com ja us ha dit l'amic, volia parlar-vos de la convensió dels nombres algebraics que es va celebrar dijous passat. Si els haguéssiu vist. Allí anava el nombre auri (tots el veneren) amb ununtuós radical per sobre les espatlles. Junt amb ell anava un pila de solucions d'equacions de grau cinc. Al darrera de tot s'hi trobaven els algebraics lineals. Ningú els tolera. Són dolents, aquests algebraics. Ah, no us ho he contat això. Resulta que al segle X a.C. van fer una convenció. Intrigats (orgullosos que són) que ningú els conegués encara van maquinat un plan diabòlic. S'ocultaven en les equacions ("cases" en diuen ells) de grau major que quatre i d'allí no els pogué treure ningú mai més. Maleïts. I si sabéssiu. Ultimament han estat planejant sindicar-se amb nosaltres, els transcendents. Però d'això, res. No permetrem inconsistències en la Matemàtica per un caprici com aquest.

I ara el que faltava, després de dos segles de molestar, han tornat a despertar. Els pobres signes algebraics no donen abast. Les empreses de radicals han quedat colapsades. Hem hagut de llogar milers i milers de polinomis per allotjar-los a tots. I tot perquè? Ara pretenen ser no-numerables. On s'ha vist. No en teniem prou, ja. I el comitè haurà de decidir si els deixa procrear-se. I si ho aconsegueixen, evidentment, ens veurem seriosament afectats per evitar inconsistències. No voldria estar en la pell dels Dominis d'integritat. Si, ells formen el comitè que decidirà si s'accepta o no la proposta...

Ho sentim, però no tenim més lloc perquè Lo Set ens conti les seves aventures. Aquí teniu, però, un preciós bocí d'aquest món que hem preparat per vosaltres. Tant sols ens caldrà un xic d'imaginació per endinsar-vos en aquest màgic univers que formen aquestes criatures matemàtiques, els nombres. Només us aconsellem que si no teniu intenció de tornar amb nosaltres, ho feu saber. Així evitarem als Nombres Amigables haver de buscar-vos als Boscos de Logaritmes, que són

primívors (la guàrdia la formen els Nombres Amigables perquè mai és recomenable anar sol per aquests paratges), per si us haguéssiu perdut. I als que torneu, recordeu que sempre estareu a temps de repensar-vos-lo.

Al final d'aquest fragment del món tant meravellós, del país tant hermós que han creat els nombres, comparable a les fantàstiques i paradisiàques platges d'Alquàlonde, hi trobareu una pila d'exemplars del llibre de Lo Set: "*Perquè em vaig fer nombre?*" Només cal que l'imaginareu. És molt possible que el nostre món molt aviat es quedi deshabitat. Aneu-hi! Correu-hi!! Ja!!!



El fastuós Nombre Auri.



El Bosc de Logaritmes Neperians.



La meva llar (posició $10^{197.34}$)

Què són els nombres?

NOMBRE: Resultat de comptar les coses que formen un agregat (dos, tres, quatre, etc. i també un, o sia la unitat) o qualsevol dels ens abstractes que resulten de generalitzar aquest concepte.

(segueixen les definicions de 43 menes de nombres)

Diccionari de la Gran Enciclopèdia Catalana.

ELS NOMBRES NATURALS

1. El concepte de nombre.

En parlar de nombre ens referim a un nombre natural qualsevol diferent de zero. *Nombre* és allò comú al set, al trenta-cinc, al 18 965... El set és un exemple de nombre, però un conjunt de set coses no és un exemple de nombre.

"El matemàtic contempla separat el que no ho està; per exemple, en l'esfera de bronze considera simplement la figura esfèrica a l'espai i en el regle només la línia recta, igual com al raig lluminós."

Oskar Becker

La recta i l'esfera són conceptes, com el nombre. Però hi ha entre ells una diferència fonamental: els primers són conceptes visuals, perquè són geomètrics, però el nombre no ho és. De la mateixa manera que el concepte de líquid neix a partir de la observació de moltes coses líquides, el concepte de recta s'origina en la observació de moltes coses rectes i el d'esfera es construeix a partir de la observació de moltes coses esfèriques. Pel contrari, el concepte de nombre no neix de la observació de cap realitat física, sinó de "la observació" dels diferents nombres (el set, el nou, el mil cent...). És, en aquest sentit, un metaconcepte.

El procés de formació del concepte de nombre en la humanitat ha estat força lent. Algunes tribus primitives estudiades per antropòlegs fa relativament poc temps no sabien comptar més enllà de dos o tres; la resta dels nombres eren per ells "molts".

En un principi es percebien els nombres com una propietat inseparable d'una col·lecció concreta d'objectes, sense distingir clarament la propietat. La situació és comparable a la d'un profà davant d'una peça musical: la sent, però no diferencia melodia, harmonia, tonalitat...

Sense separar els nombres de les col·leccions que els posseïen, mica en mica es van anar entenent com a propietats d'aquestes col·leccions, i es van anar comparant els nombres de diferents col·leccions, determinant si eren el mateix o eren diferents. Això és el que anomenem comptar. Així, d'una col·lecció de cinc elements es deia que en tenia "tants com una mà". Per això en algunes tribus el nombre cinc es diu "mà", o el nombre vint es diu "home sencer".

En l'estadi següent es van inventar adjectius que substituïssin les locucions "com tal cosa" a l'hora de comptar. De l'adjectiu es va passar al nom que designava aquella propietat comú a totes les col·leccions a les quals es podia aplicar un mateix adjectiu i no comú a les col·leccions no qualificables amb l'esmentat adjectiu.

Per tal de comprendre millor aquesta evolució, podem comparar-la amb la que va portar l'home a copsar el concepte de color. Podem esquematitzar aquesta evolució com segueix:

1.- No distingim el color d'allò que el posseïx, però d'alguna manera el percebem. Correspon a l'etapa en què, tot i percebre el nombre, no som capaços de distingir-lo de la col·lecció que el té.

2.- Ja som capaços de copsar que dues coses diferents poden tenir un mateix color — o un mateix nombre —, però continuem percebent la propietat lligada a l'objecte que la posseeix. Així, podem dir que una cosa és "com un corb" per dir que es negra, o que és "com una mà" si està

formada per cinc elements.

3.- Inventem els adjectius per designar les propietats. D'allò que abans en dèiem "com un corb" o "com una mà", ara en direm cosa negra o cosa "de cinc".

4.- Inventem els noms per propietats concretes. Ara parlem de la negror, del cinc... Ara ja hem separat del tot la propietat d'allò que la posseeix.

5.- Percebem la negror com a oposada a la blancor, la blavor..., o el cinc com a oposat a set, nou..., i veiem que fan referència a aspectes diferents de les coses. Així sorgeixen els conceptes de color, nombre, forma...

Però els nombres no van néixer un a un, sinó més o menys a la vegada, plens de relacions entre ells. Així com els diferents nombres sorgiren de la observació de col·leccions d'objectes, d'ajuntar i separar col·leccions van sortir la suma i la resta, de l'hàbit de comptar col·leccions iguals el producte i del de distribuir col·leccions entre persones la divisió.



Aquestes operacions entre els nombres coneguts ens van permetre entendre altres nombres, desconeguts per ser inaccessibles per altres mitjans. Així, el nombre 6720 el podem entendre com a reunió de 560 dotzenes, però no directament: ens és impossible fer-nos una imatge mental d'una col·lecció de 6720 coses.

A més d'ampliar la quantitat de nombres coneguts i de facilitar-nos la comprensió dels ja coneguts, el coneixement d'aquestes operacions va simplificar l'assignació de noms als nombres. Donem noms originals a uns pocs nombres; la resta els anomenem mitjançant les seves relacions amb els altres. Així, en anglès *twenty* vol dir "dos deus", en francès *quatre-vingt* vol dir "quatre vints", en català *cent vintinou* vol dir cent més vint més nou.

La introducció dels símbols escrits per als nombres va ser també un gran ajut per a la seva comprensió. Els símbols numèrics són quelcom tangible que ens serveix per a visualitzar el nombre abstracte representat. D'altra banda, l'escriptura facilita l'explicitació de les relacions entre els nombres i els càlculs.

Una altra de les relacions entre els nombres tan antiga com el nombre és la d'ordre. El nombre d'una col·lecció és més gros que el d'una altra si en intentar bijectar-les ens sobren elements de la primera. El concepte de bijecció, però, és molt posterior. La idea d'ordre està molt relacionada amb la de suma i és important, entre altres coses, perquè ajuda a tenir una visió organitzada de la totalitat dels nombres.

És a dir, els nombres no aparegueren com a entitats independents, sinó com a sistema interrelacionat. De fet, un nombre només té sentit ficat en aquest sistema. Les seves propietats no són res més que les seves relacions amb els altres nombres i són les imatges abstractes de les relacions entre col·leccions d'objectes.

Però... quan es va copsar que la successió dels nombres es pot perllongar indefinidament? Va ser, indubtablement, molt després. Al segle III a.C. Arquímedes evidencia que al seu temps encara no ho tenien massa clar quan escriu:

"Hi ha alguns, rei Geló, que pensen que el nombre de grans de sorra és infinit en multitud, i jo em refereixo a la

sorra que existeix no només en les proximitats de Siracusa i en la resta de Sicília, sinó també a la que es troba en altres regions, ja siguin habitades o no. D'altra banda, hi ha alguns que, sense considerar-lo com a infinit, pensen que encara no s'ha fixat un nombre prou gran com per excedir la seva multitud. I és clar que si tots aquells que sostenen aquest punt de vista s'imaginessin una massa formada per sorra tan gran com la massa de la Terra incloent-hi en ella tots els mars i depressions plens fins a una alçada igual a la de la muntanya més alta, tindrien encara més dificultats per reconèixer que pot expressar-se algun nombre prou gran com per excedir la multitud de tota aquesta sorra. Però tractaré de provar, mitjançant demostracions geomètriques que vos podreu seguir, que d'entre els nombres anomenats per mi i indicats en l'obra que vaig enviar a Zeuxippus alguns excedeixen no només el nombre de la massa de sorra igual en magnitud a la Terra omplerta en la forma descrita, sinó també la d'una massa igual en magnitud a la de l'Univers."

Arquímedes. "L'arenari"

L'origen de l'apreciació de la infinitud dels nombres és sens dubte la observació de que sempre que tenim un nombre, per gros que sigui, podem fabricar-ne un de més gros.

II. Cap a una formalització dels nombres naturals.

La formalització del concepte intuïtiu de nombre no és gens trivial. Bàsicament, podem tirar per dos camins: l'un defineix els nombres cardinals i l'altre els nombres ordinals. El primer és més lligat a la intuïció i defineix nombre natural com «tot allò que pot ser cardinal d'un conjunt». L'altre és més allunyat de l'experiència i postula axiomàticament que existeix un conjunt, els elements del qual anomenarem nombres naturals, amb unes certes propietats d'ordre; si després aquests nombres ens serveixen per representar el cardinal d'un conjunt és "pura casualitat".

En principi, tots dos camins són bons, perquè un cop definits els ordinals és fàcil passar als cardinals i viceversa. El que passa és que el primer és més lligat a l'experiència i menys operatiu, perquè si volguéssim conèixer els nombres a partir d'aquesta definició hauríem de conèixer abans els cardinals de tots els conjunts possibles. A més a més en aquesta definició es confonen nombres naturals i nombres transfinitos.

A. Nombre = "tot allò que pot ser cardinal d'un conjunt"

El 1884 Gottlob Frege publicà els seus "Grundlagen der Arithmetik", que conté un dels primers intents coneguts de definició de nombre. La seva idea és que "nombre és tot allò que pot ser resultat de comptar". Russell va prendre aquesta idea i l'exposa a "Introduction to Mathematical Philosophy".

Què és comptar? En termes moderns, comptar és establir una bijecció. Donats dos conjunts qualssevol equipotents (és a dir, tals que es pot establir una bijecció entre ells) diem que aquests dos conjunts tenen "el mateix nombre d'elements", encara que aquest nombre no té perquè ser natural. La relació d'equipotència és d'equivalència, i per tant ens dona una partició del "conjunt de tots el conjunts" en classes d'equivalència. Es diu nombre d'un conjunt a la classe d'equipotència a que pertany i es diu nombre a tot allò que pot ésser nombre d'un conjunt.

El concepte d'ordre és totalment extern a la definició i s'hi afegeix després. Notem a més a més que aquesta definició no diferencia nombres naturals i nombres transfinitos. Tan nombre és segons aquesta definició el 17 com l'aleph-sub-zero (cardinal del conjunt dels naturals), perquè tots dos són cardinal d'algun conjunt.

B. Definició axiomàtica de nombre natural.

La primera fou la de Peano, al 1889, amb cinc axiomes molt coneguts:

«Existeix un conjunt, que diem conjunt dels nombres naturals, que compleix:

- 1- El zero és un nombre natural.
- 2- A cada nombre natural a li correspon un altre, únic, que s'anomena el següent d' a .
- 3- El 0 (zero) no és següent de cap nombre natural.
- 4- Si el següent d' a i el següent de b són iguals, han de ser per força a i b iguals.
- 5- Principi d'inducció. Tot conjunt M de naturals que conté el 0 i tal que si conté un nombre conté el seu següent és $M=\mathbb{N}$ »

Aquests axiomes es van considerar vàlids durant molts anys. Però en ells hi ha alguns "inconvenients lògics", com per exemple que diu que 0 és un nombre natural sense dir a què es refereix quan diu 0. És a dir, que hi ha una certa circularitat, perquè a la definició es fa servir una de les coses que es pretén definir. El treball de Cantor va suggerir que era possible buscar una definició de nombre totalment conjuntista. Ja al segle XX, von Neumann va definir els ordinals partint del $\emptyset$. La idea d'aquesta construcció és la mateixa que la de la construcció de Peano, però en aquest cas s'evita la circularitat.

Donat un conjunt A es defineix el següent d' A com el conjunt $A \cup \{A\}$. El següent d' A és per tant un conjunt que té un element més que A : $\{A\}$. Si B és el següent d' A , es diu que A és l'anterior de B . Es demostra fàcilment que entre un conjunt i el seu següent no hi ha cap altre conjunt. La construcció en sí només té un axioma i un teorema. L'axioma postula l'existència de conjunts tals que el buit hi pertanyi com a conjunt -no que hi estigui contingut— i que si un conjunt hi pertanyi, també hi pertanyi el seu següent. El teorema diu que hi ha un conjunt mínim que compleix això. Es el que anomenem conjunt dels naturals i els seus elements són:

$$\begin{aligned}
 0 &= \emptyset; \\
 1 &= \emptyset \cup \{\emptyset\}; \\
 2 &= 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{1\}; \\
 3 &= 2 \cup \{2\} = \{\emptyset\} \cup \{1\} \cup \{2\}; \dots
 \end{aligned}$$

Notem que en aquesta construcció el paper que abans feia el zero el fa el conjunt buit. Aquesta és la manera d'evitar la circularitat.

I ELS ALTRES NOMBRES... D'ON SURTEN?

1.- Racionals i Irracionals

No sembla que els homes primitius necessitessin gaire les fraccions. En general, s'evitava el seu ús en la mesura creant subunitats que arribin fins a les mesures més petites, tot i que tenien alguna noció de particions (la meitat d'un cabrit i similars). En l'Edat del Bronze les proporcions es fan més necessàries, i les dues civilitzacions més antigues, a Egipte i Mesopotàmia, ja tenen sistemes propis de fraccions.

A Egipte s'utilitzen les fraccions unitàries (de la forma $1/n$) i, de vegades, les seves complementàries $((n-1)/n)$, especialment la $2/3$, amb valor sagrat. Tot nombre racional es descomposa en part entera i una suma de fraccions unitàries (o també la $2/3$), sense repetir denominadors. Així, $38/11 = 3 + 1/3 + 1/9 + 1/99$. Tot nombre racional que no estés en aquesta forma es considerava una fase en el procés de reducció a la "forma canònica", l'única considerada com a nombre (*). Aquest sistema, a pesar de les dificultats que plantejava, va ser usat també a Grècia i fins i tot a Europa en l'Edat Mitjana.

(*)Sortosament pels egipcis, tot nombre natural entre zero i u pot expressar-se com a suma finita de fraccions unitàries sense repetir cap denominador. Teniu de temps fins al proper nombre d'Aleph per a trobar el per què (no costa gaire veure-ho si es sap cap on mirar). Podeu començar veient que les fraccions de la forma $2/n$, n senar, són suma de dues fraccions unitàries.

Els mesopotàmics, també dits babilonis, van adoptar un sistema més modern: les fraccions sexagesimals, sistema anàleg al nostre sistema posicional decimal, però en base 60, prolongació de la seva notació posicional sexagesimal pels naturals. El nombre $3+7/80$ l'escriuen com $3;5,15$ ($3+5/60+15/3600$), amb els seus signes, és clar.

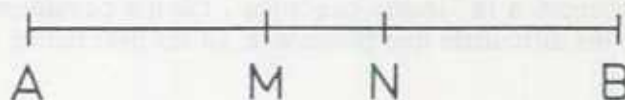
Els xinesos ja des de l'antigor coneixien les fraccions comuns, amb les que podien operar perfectament, i, en els seus càlculs, utilitzaven sobretot les fraccions decimals (com els nostres decimals actuals), que sembla que van introduir abans de l'any 1000 a.C.



Les primeres fraccions que sabem que els grecs van usar són les unitàries, a la manera dels egipcis, però aviat van adoptar les fraccions sexagesimals mesopotàmiques, i van desenvolupar les fraccions comuns (ja sé que "aviat" no vol dir gran cosa, però en sabem molt poc de la cronologia de la Matemàtica grega, com a continuació podreu veure). Hom considerava com a nombres només els naturals, i a les fraccions com a raons d'aquests nombres (aquesta idea ha perdurat fins a l'actualitat, en que la usem per a construir el conjunt $\mathbb{Q}$). Les fraccions unitàries i sexagesimals van passar dels grecs als romans, àrabs i als europeus medievals. No va ser fins els segles XVI-XVII que les fraccions decimals van imposar-se a Europa, gràcies en gran part a la difusió que en van fer Vieta, Stevin, Girart i algun altre.

Egipcis, mesopotàmics i xinesos no sembla que ni tan sols es plantejessin la qüestió de si hi hauria nombres que no fossin racionals (de fet, gairebé mai distingien entre resultats exactes i aproximats, pel que podien donar solució racional a tots els seus càlculs). Els grecs al començament van seguir el mateix camí. Pitàgores va fundar una secta que deia que «*tot és nombre*», referint-se només als naturals. Aquesta visió va canviar, el segle V a.C. probablement, al descobrir-se segments amb longituds en proporció que no era cap raó de nombres naturals. Possiblement fos Hipàs de Metapont el descobridor del primer irracional. Hipàs va ser membre de la secta pitagòrica i en va ser expulsat, no sabem del cert si per descobrir els irracionals o per altres qüestions polítiques. Aquest potser hauria estat $\sqrt{2}$, mitjançant una prova aritmètica «*basada en la distinció entre nombres parells senars*» segons Aristòtil (per als que no la coneixen: es suposa $\sqrt{2} = p/q$, $\text{mcd}(p,q)=1$, aleshores $p^2/q^2 = 2$, es veu que això implica que p i q són parells, i s'arriba a contradicció). Però és molt possible que el primer irracional i la primera prova no hagin estat aquests, sino la raó àuria i una prova geomètrica, a les que els grecs d'aquella època estaven molt familiaritzats:

Els grecs coneixien la raó àuria i donat un segment AB, sabien calcular «*la raó mitja i extrema*» o «*raó harmònica*» dels seus extrems, que era un punt M situat de tal forma que originava dos nous segments tals que la raó entre les longituds del més curt MB i el més llarg AM —en les nostres coordenades lineals, designant per 0 i 1 els extrems, les solucions serien els punts de coordenades $(\sqrt{5}-1)/2$ i $(1-\sqrt{5})/2$.



Si aquesta raó fos racional, existiria un segment prou petit tal que els dos nous segments AM i MB serien aquell segment un nombre enter de vegades. Aquest segment constant també dividiria els segments AN i NB, on AN té la longitud de MB, per tant també dividiria a NM, essent N la raó harmònica de A i B. Conclusió: si un segment constant divideix als dos segments en que la raó

harmònica parteix a un segment inicial, també divideix als dos segments de la partició harmònica del segment llarg de la partició anterior. Iterant prou vegades, caldria que el segment constant dividís a un segment de longitud tant curta com es vulgui, cosa impossible. Si aquesta va ser realment la primera prova de l'existència d'irracionals, aleshores el primer irracional descobert hauria estat $(\sqrt{5}-1)/2$ (el nombre auri). Una tercera prova candidata, basada també en el nombre auri i anàloga a aquesta, és la incommensurabilitat del costat i la diagonal del pentàgon regular (es pot demostrar sintèticament i qui no se'n surti, que consulti la bibliografia de l'article, o a algun geometra de la casa).

El descobriment dels nombres irracionals va influir força en la Matemàtica grega. Eudox de Cnido i altres van crear un nou concepte geomètric, la magnitud (associada a la longitud d'un segment, o a una àrea, o a un volum), independent dels "nombres" (que eren els naturals i per extensió els racionals), i van desenvolupar una àlgebra geomètrica, deslligada dels nombres, basada en magnituds i les seves raons (Aquesta teoria de les magnituds va ser l'única explicació rigorosa de què eren els irracionals fins al segle XIX). Aquesta àlgebra geomètrica, amb rigor matemàtic, que va coexistir sempre amb una àlgebra aritmètica menys rigorosa, que trobava o aproximava numericament les solucions d'equacions també numèriques. Totes dues van passar dels grecs als àrabs, i d'aquests als europeus a l'Edat Mitjana. Els europeus es van decantar cap a l'aritmètica, i això ocasionava un problema: quina mena de nombres eren els irracionals? En principi, aritmèticament no es podien definir, però els matemàtics cap als segles XV-XVI els van acceptar plenament, perquè podien aproximar-los, tant bé com vulguessin amb nombres racionals. No va ser fins el s. XIX en que finalment es van definir rigorosament tots els reals a partir dels racionals: Dedekind els va definir per mitjà de la "talladura" (la idea, en versió simplificada, és: es considera un subconjunt α de $\mathbb{Q}$, no buit, no igual a $\mathbb{Q}$, i tal que si $x \in \alpha$ i $y < x$, aleshores $y \in \alpha$, i que no tingui element màxim; aleshores α és un nombre real). En la mateixa època — 1850-60 — C. Meray, Weierstrass i Cantor van construir els reals considerant les successions de Cauchy a $\mathbb{Q}$ fent equivalents aquells parells de successions la diferència de les quals tendeixi a 0: cada classe és un nombre real.

Els primers nombres que es van identificar com a irracionals eren solució d'equacions polinòmiques amb coeficients racionals. En els segles XVII i XVIII i al començament del XIX aquestes equacions van ser un tema molt estudiat, desenvolupant-se una teoria dels "nombres algebràics" (con es deien els tals nombres). El 1844 Liouville va descobrir que els nombres de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot 10^{n!}$$

on els K_n són dígitos entre 1 i 9, no eren algebràics; els nombres d'aquesta nova classe van rebre el nom de trascendents. El 1873 Hermite va demostrar que e és transcendent, però la situació va canviar radicalment a partir dels treballs de Cantor, que va provar que «gairebé tots» els nombres reals eren transcendents (a la secció de nombres transfinitos ho expliquem amb més detall). El 1882 en Lindemann va demostrar que π és transcendent, acabant amb el somni de moltes generacions de quadradors del cercle.

II.- El zero i els negatius

Els zeros més antics que coneixem apareixen a Mesopotàmia cap al 300 a.C. Allí, més de dos mil anys abans, s'havia creat una notació posicional sexagesimal per a nombres racionals, que tenia un defecte: només es podia deduir pel context si mancava alguna potència de 60 intermitja.

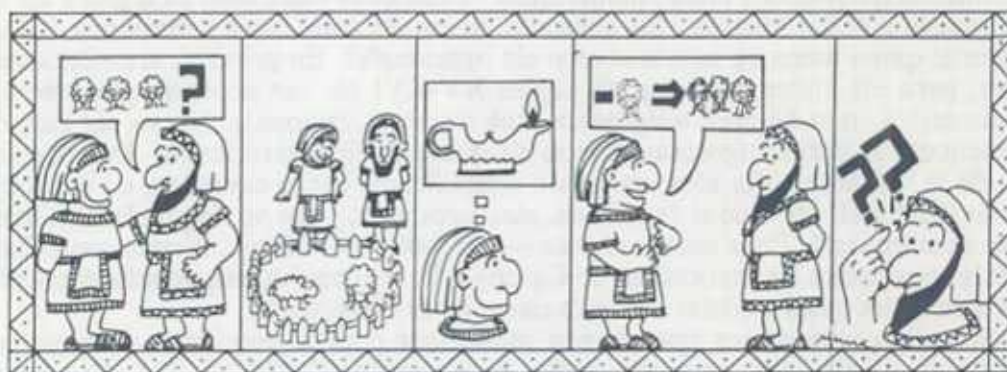
$155 = 2 \cdot 60 + 35$ i $7235 = 2 \cdot 60^2 + 35$ s'escriuen idènticament. Això devia donar lloc a moltes confusions, que es van resoldre en crear un símbol que indicava "lloc buit". Però aquest zero no es considerava com a nombre en sí, sinó només com un símbol auxiliar, que apareixia per a cobrir posicions intermitges buides en els nombres. Els grecs, que no tenien una notació posicional, també van trobar el zero (com a resultat d'alguns càlculs o problemes), però el van rebutjar com a nombre, ja que com diu Aristòtil «no val per a construir raons» (o sigui, que no es pot dividir per zero, fet que el distingeix dels altres nombres). Ni egipcis, ni mesopotàmics ni grecs sembla que coneguessin o es preocupessin gaire pels nombres negatius.

Aquest zero posicional també apareix en la notació maia, a partir del segle I d.C. Durant els segles VII-IX d.C. el zero posicional apareix a Xina i l'Índia, on completa la notació posicional decimal que encara fem. D'allí passaria a Xina abans del segle XIII. És a l'Índia on per primer cop es considera al zero com un nombre. Així ho fa Brahmagupta en el segle VII d.C., que

també sosté que $0/0 = 0$. Al segle XII, Bhaskara, un altre matemàtic hindú, ja escriu que si dividim un nombre no nul pel zero obtindrem l'infinit.

Els xinesos ja coneixien des de l'antigor els nombres negatius, que usaven en els seus càlculs, però que no admetien com a nombres (no els consideraven solució de les equacions). A l'Índia, Brahmagupta ja considerava els negatius com a nombres en la seva obra, i ell i els seus successors ja usarien una aritmètica amb positius, negatius i zero, admetent als darrers com a solució d'equacions.

A Europa, mentretant, als segles XII-XIII es difon el sistema decimal, i amb ell el zero. Aquest i els negatius s'aniran reconeixent poc a poc com a nombres. Nicolas Chuquet, que el 1484 publicava el llibre d'àlgebra *Triparty en la science des nombres* ja usa exponents i coeficients negatius en les equacions, tot i que no admet el zero com a solució. Els negatius són batejats "*numeri absurdi*" al segle XVI, però se n'estudien les propietats aritmètiques. En el segle XVII és quan s'accepten del tot, amb els irracionals i parcialment els complexos (**), per tal que es compleixi l'enunciat de que "*les equacions de grau n tenen n solucions*". Així seran acceptats els negatius, i finalment usats pels físics per a descriure els fenòmens elèctrics. Pel que fa a la seva definició, s'adopta el mètode de simetrització dels positius respecte de la suma.



Pots vendre'm tres ovelles?

No, ho sento. Només en tinc dues.

(Idea!)

Espera, te'n puc donar tres i quedar-me amb menys una.

Tu ets boig!

III.- Els complexos

Pels volts del 1500 es van descobrir a Europa els mètodes per a resoldre les equacions de tercer i quart grau. Però la resolució de les equacions cúbiques exigia de vegades (sempre que hi haguessin tres solucions reals) el càlcul d'arrels quadrades de nombres negatius. Cardano considera aquests nombres com "*sofístics*" i "*tan subtils com inútils*", però els matemàtics del segle XVI-XVII n'estudiaren les propietats necessàries per a resoldre les cúbiques (com operar amb elles i treure'n arrels). En el segle XVII, al començar a estendre's les primeres idees de que "*equacions de grau n tenen n solucions*" (primer per a $n = 2, 3, 4$) alguns matemàtics — Descartes i Newton, entre ells — van començar a considerar els complexos, tot i que consideren i un nombre "*imaginari*". En el segle XVIII, Jean Bernoulli, De Moivre, Euler i molts d'altres estenen les funcions trigonomètriques, exponencial i logarítmica al domini complex per mitjà de les sèries polinòmiques. Això i la perfilació definitiva del Teorema Fonamental de l'Àlgebra, consagren els complexos com a nombres, però els matemàtics de l'època encara no tenien una idea massa clara de què eren els complexos. Cap al 1800, i independentment, el danès Caspar Wessel, el suís J. Argand i Gauss van tenir la idea de considerar els complexos com els punts d'un pla, amb la recta real i la dels imaginaris purs com a eixos. Els treballs de Gauss en la matèria, no publicada fins trenta anys més tard, serien els que finalment difondrien aquesta visió dels complexos entre tots els matemàtics.

(**) Irracionals i negatius van ser acceptats en gran part en observar-se la correspondència entre tots els nombres reals i tots els punts d'una recta.

El 1831, W. Hamilton completà la interpretació geomètrica dels complexos, identificant sumes amb translacions, i multiplicacions amb rotacions seguides d'homotècia. Aquest mateix Hamilton va intentar prolongar els complexos a espais de dimensió superior. El resultat va ser la seva invenció dels quaternions, una extensió dels reals a un cos de dimensió 4, anticommutatiu.

IV.- Dels infinits als transfinits

Els primers que semblen haver-se preocupat de l'infinit en Matemàtiques són els grecs. Els grecs usaven l'infinit en un sentit potencial (rectes que es podien prolongar indefinidament, que la seva suma repetides vegades d'un nombre pogués superar a qualsevol altre; en general, veien l'infinit com quelcom il·limitat), però sentien un veritable "*horror infiniti*", pel que fa a l'infinit actual. Rebutjaven qualsevol procés que repetís un nombre infinit de vegades alguna operació: així, en particular, no van poder resoldre les paradoxes de Zenó, com la d'Aquiles i la Tortuga, i en general van donar els passos necessaris per a no descobrir el concepte de límit, del qual van ser a un pas (això és una altra història, i força interessant). Després dels grecs, els hindús també es van trobar l'infinit, en intentar la divisió per 0: en Bhaskara (s.XII d.C.) defineix l'infinit com el resultat de dividir un nombre finit per 0, però a continuació afirma que, si $a \cdot 0 = 0$, també $0/0 = a$.

A Europa, a l'Edat Mitjana, l'infinit tant potencial com actual apareixen en el pensament (a la Teologia, l'Escolàstica, i d'allí passà a la Matemàtica). Cap al 1350 un lògic anglès, R. Suiseth, també dit "*Calculator*", ja va demostrar retòricament que $2 = 1/2 + 2/4 + \dots + n/2^n + \dots$.

Nicole Oresme, eclesiàstic i matemàtic francès d'aquella època, va inventar una rudimentària representació gràfica de funcions d'una variable, i va intuir la relació entre l'àrea sota la corba i el que considerem la integral de la funció. Això li va donar un mètode gràfic per a estudiar les sèries geomètriques i per provar, per primer cop, que la sèrie harmònica és divergent. A partir d'aquesta època, els matemàtics europeus van usar freqüentment (i massa alegrement de vegades) les successions i sèries de nombres primerament i de funcions després, començant en J. Gregory el 1668 amb la sèrie

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

El mateix segle XVII els matemàtics van haver d'inventar els infinitèsims (aleshores magnituds menyspreables respecte a altres). En Galileo Galilei, el 1632, fa notar com hi han tants naturals com quadrats perfectes, tot i que en créixer els naturals els quadrats perfectes són cada cop més rars. En treu la conclusió que no es pot dir que un nombre infinit sigui més gran que un altre. En els segles XVIII i XIX va augmentar el rigor en l'ús de sèries, successions i infinitèsims, però l'infinit actual continuava essent un concepte indefinit. Això va canviar radicalment amb l'obra de Dedekind i sobretot de Georg Cantor. El 1872 Dedekind va definir "*sistema infinit*" com aquell que és "*semblant a una part pròpia de sí mateix*" (aplicat a conjunts, un conjunt és infinit si es pot establir una bijecció entre ell i una part pròpia). Cantor al 1874, va anar més enllà, establint una ordenació dels conjunts infinits segons la seva "*potència*" (que podem considerar com el tamany). Demostrà que els naturals, naturals quadrats perfectes, enters i altres tenen la mateixa potència, establint bijeccions entre ells. Els conjunts amb aquesta potència els anomena "*numerables*". A continuació demostrà que els conjunts dels nombres racionals i dels algebraics també són numerables, mentre que el dels reals no ho és. Cantor va veure que els reals tenien el mateix "*cardinal*" (com va dir després a la potència) que $\mathbb{R}^n$, per a tot natural n , o que l'interval $(0,1)$. Suposava que el cardinal de $\mathbb{R}$ era el de les parts de $\mathbb{N}$, però això ha resultat ser indemostrable. Amb aquesta suposició va crear els nombres transfinits: va demostrar que el conjunt de les parts d'un conjunt té sempre un cardinal superior i així va crear una successió de cardinals "*transfinits*" començant pels de $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$, seguint pel del conjunt de les parts de $\mathbb{R}$, el del conjunt de les parts d'aquest últim, etc., i encara va crear una aritmètica dels transfinits, entenent-los com a nombres ordinals. Els seus contemporanis van arribar a prendre Cantor per boig per les seves idees revolucionàries, que al començament ningú entenia. El Kronecker va combatre enèrgicament a Cantor i la seva obra durant anys. Això va afectar molt a Cantor, i la seva salut mental va anar empitjorant fins a morir en un manicomi el 1918. La història dels nombres infinits no s'acaba amb Cantor, però ja es complica massa per incloure-la aquí.

EL QUE ALGUNES PERSONES CREUEN QUE SÓN ALGUNS NOMBRES

Hem preguntat a unes quantes persones què són els nombres. A continuació presentem un recull

de les respostes que ens han semblat més interessants. Com que no vam fer l'enquesta amb gravadora ens resulta impossible reproduir íntegrament el que ens van contestar.

- Un nombre... segons es miri. N'hi ha de moltes classes. Per exemple, els nombres romans. Els coneixeu? el meu pare tenia un rellotge de paret que tenia les hores en nombres romans. Jo estava desesperada per entendre el rellotge, perquè no entenia ni el de mon pare ni els altres, i ell em deia que era molt fàcil. I tenia raó: després ho vaig aprendre jo sola.

- Jo no en sé, d'aquestes coses. Pregunta-li a un matemàtic.

- Què són els nombres? Ostres, no en tinc ni idea. Un nombre, en el millor dels casos, acaba essent un element d'un model d'una teoria. Per exemple, si definim els reals per completitud dels racionals, un nombre real és una classe d'equivalència de successions de Cauchy. Un nombre acaba per ser una constant d'un sistema axiomàtic d'una lògica.

- Què són els nombres? Els de l'Aleph esteu com una cabra. És impossible definir tot el que fem servir els matemàtics. Aquell que digui que ho ha fet fa trampa. Fa trampa de la mateixa manera que en fa els diccionaris. Si una persona s'enfronta a un diccionari sense saber cap paraula de bell antuvi, és ben segur que no entendreà res. I és que en un diccionari tota paraula és definida a partir d'unes altres... i el sistema és tancat. Els conceptes matemàtics també formen un sistema interdependent. Però això no ens ha de preocupar, als matemàtics. Els conceptes primitius com el de nombre són molt pocs. La resta està ben fonamentat sobre aquests conceptes primitius, i això és el que importa. Per posar una frontera en això dels nombres, tot el que hi ha per sota de $\mathbb{R}$ ens resulta només relativament interessant — podríem dir que, més que matemàtiques, és filosofia.

- Els nombres són una quadració de la naturalesa.

- Pregunta: Què creieu que són els nombres?

- Resposta: Què crec que són els nombres? Jo en principi sóc molt incrèdul i no crec res. Els nombre no són res. Són una entelèquia, un somni del matemàtic, un nom, un invent.

- Pregunta: I què fa que a una cosa li diguem nombre i a una altra no? Què creieu que tenen en comú totes les coses que diem nombre?

- Resposta: La idea inicial de nombre és la de nombre natural. La resta del que diem nombres són successives ampliacions. Així, els enters engloben els naturals, els racionals engloben els enters... El motiu pel qual anomenem nombres a aquestes successives ampliacions és històric. També hi ha nombres que no engloben cap dels esmentats anteriorment. En aquest cas el que fa que els diguem també nombres és el fet que són operatius, o sigui, que tenen operacions semblants a les dels reals, que es comporten com a nombres en algunes ocasions.

Tot això, però, és una qüestió ontològica. Un matemàtic no s'ha de preocupar d'això. Per a un matemàtic, l'únic concepte vàlid de nombre és el que donen els axiomes que prengui com a base del seu treball. El matemàtic ha de prendre aquests axiomes com a certs i treballar amb ells sense preocupar-se de més. Es pot ser un bon conductor sense conèixer a fons la mecànica dels cotxes. Això no vol pas dir que el matemàtic no hagi de tenir intuïcions sobre les coses amb les que treballa.

Els nombres són quelcom que definim com qui defineix el concepte de funció contínua o qualsevol altra cosa. I hem de pensar en ells així. Per què no m'heu vingut a preguntar què és una funció contínua? El motiu és sens dubte que els nombres venen de comptar, que és molt més intuïtiu que no par definir funcions contínues. Però hem de tractar els nombres com si fossin funcions contínues.

- Els nombres formen un llenguatge universal, que no necessita traducció.

- Els nombres? $\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \dots$ Són una eina de treball, una eina per resoldre problemes físics, mecànics, químics, econòmics, polítics...

- Els nombres són allò que apareix a la llibreta d'estalvis de cadascú en successió la majoria de les vegades decreixent. Periòdicament reps una carta de la caixa d'estalvis informant-te que aquests nombres han esdevingut negatius i que t'has d'ocupar de resoldre aquest petit problema momentani.

- Els nombres són un conjunt d'elements arbitraris als quals donem una estructura que els fa útils per anomenar (o numerar) qualsevol altre conjunt. Aquesta nomenclatura té una relació directa amb la quantitat (de matèria, de distància).

- Res.

- Els preus. Cars. Pugen i baixen.

- Els nombres? No sabem què són, però tenim regles per a manipular-los, com si fossin funcions, o qualsevol altra cosa.

- Un nombre és una barreja de tonalitats grogues amb una mica de blau i una pinzellada de vermell.

- Distància.

- Són la base de la societat, una eina i un mitjà de comunicació.

Olivia Núñez
2on. curs

El Batxiller Jaume Amorós
vel d'Aspa
2on. curs

Agraïments:

A en Sebastián del Baño per la seva col.laboració en la recollida d'opinions de professors de la Facultat sobre la naturalesa dels nombres i pel seu recolzament en tots els aspectes.

A la Montse Matz per la seva col.laboració en la recollida d'opinions a l'Escola d'enginyers industrials.

Als doctors Casas, Pla i Ralló i a la doctora Carro per haver-nos dit què pensen dels números i de nosaltres.

Bibliografia:

PART REAL

- | | | |
|-----|--|---|
| [1] | BOYER, C. | Historia de la matemática, Alianza Ed., Madrid 1986. |
| [2] | CAJORI, F | A History of Mathematics, Mc.Millan & Co., New York, 1960. |
| [3] | DIEUDONNÉE, J. | Abrégé d'histoire des mathématiques, Ed. Hermann, Paris 1978. |
| [4] | FLEGG, G. | Numbers: Their History and Meaning, André Deutsch Ltd., 1983. |
| [5] | KASNER, E./NEWMAN, J | Matemáticas e imaginación, Biblioteca científica Salvat. Barcelona, 1987 |
| [6] | BECKER, O | Magnitudes y límites del pensamiento matemático, Ed. Rialp, S.A. Madrid, 1966 |
| [7] | ALEKSANDROV, A.D., KOLMOGOROV, A.N., LAURENTIEV, M.A. Y OTROS. | La matemática: su contenido, métodos y significado, (3 volúmenes). Alianza Universidad. Madrid, 1985. |
| [8] | NEWMAN, J.R. | Sigma. El mundo de las matemáticas, (antología en 6 volúmenes). Ed. Grijalbo, 1968. |

- [9] VARIS **The Miss America Book of pictures, 1987**, Ed. Willey. New York, 1987.(***)
 [10] ESCOBAR, MANOLO **¿Dónde estará mi carro?**, Ed. Polimar. Barcelona, 1969.

PART IMAGINARIA

- [1i] LO SET **Per què em vaig fer nombre?**, Eunibar. Barcelona, 1980.
 [2i] DESCONEGUT **Com fer quaternions de paper**, Sèries papiroflèxiques. Editorial Doblegada.
 [3i] LA GATA CRISTI **Assassinat en el Transfinit Express**, Ed. Molino. Barcelona, 1950.
 [4i] SERGEI DIVUITOVICH **L'exploració dels nombres a la societat capitalista**, Ed. Mir. Moscú, 1936.

(***) Ben segur que trobeu aquest llibre molt diferent de la resta de la part real. És el llibre on surten totes les fotos del concurs de bellesa Miss America. El consultava el meu col·laborador (sí, sí, el Jaume Amorós!!) *com a font d'inspiració i per descansar entre número i número*, segons les seves pròpies paraules. Signat: Olívia Núñez, Miss Amèrica Imaginària.

Aritmética China

Tradicionalmente, de entre las antiguas civilizaciones orientales, se ha considerado a la cultura india la preponderante en cuestiones matemáticas. Esto es lógico dado que el nivel alcanzados por ellos fue superior al de sus vecinas y ha tenido mayor repercusión histórica. Pero ello no hace menos interesante los trabajos realizados por otras como la china, sobre todo en aritmética y álgebra.

En la primera obra en la que aparecen trazos de trabajos matemáticos es el I Ching de Confucio o libro de las permutaciones. En él aparece el "Pa Kua" como en la fig.1.

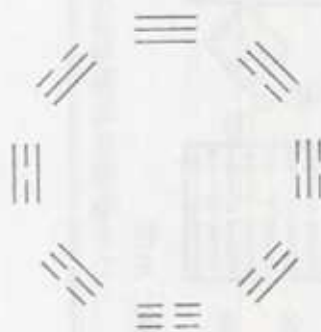


figura 1

Está constituido por 8 grupos de tres caracteres. Cada caracter es una linea continua "yang-xio" (principio masculino) o dos segmentos "ying-xio" (principio femenino). Se ha interpretado el "Pa kua" como una sucesión de numeros expresados en base dos (yang 1, ying 0) utilizada con fines cabalísticos. En el mismo libro y de la misma época (2200 a.C.) son unos cuadrados mágicos como el "lo-shu" que aparece a continuación en la fig.2, y que según cuenta la leyenda fue transmitido a la humanidad por una tortuga del rio Lo (amarillo) que llevaba inscrito el cuadrado en el caparazón, en los tiempos del emperador Yü.

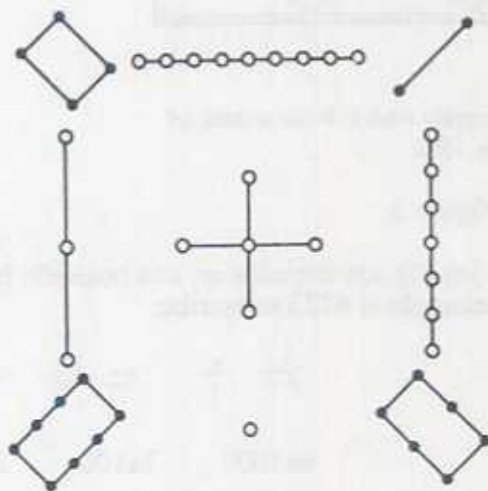


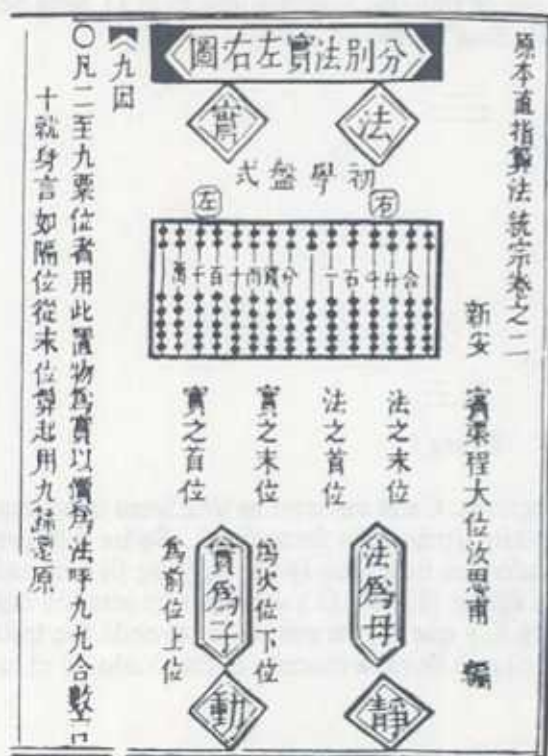
figura 2

Los chinos utilizaron un sistema de numeración decimal o más bien dos, uno de ellos posicional y otro "multiplicativo", incorporaron el 0 tardíamente por influjo de los indios. La agilidad del sistema posicional les permitió obtener resultados interesantes en aritmética (y obtener algoritmos de cálculo eficientes). También diseñaron ábacos para realizar cálculos. En ellos usan barras de color negro para numeros positivos "*cheng*", y rojo para los negativos "*fu*" (igual que en la cartilla del banco). El ábaco (*sha pan*) difiere del árabe, pues el chino tiene una barra central que divide los 15 alambres en

dos, en la parte superior del alambre hay dos bolas y en la inferior 5 (por 10 en el árabe). Cada bola superior equivale a 5 inferiores.

Anterior al ábaco son las tablas de calcular que conjuntamente con una colección de varillas de bambú servían para realizar los cálculos en el sistema de numeración "de varillas" (v. fig.3).

En el sistema multiplicativo los números se escriben de abajo a arriba o de izquierda a derecha. En dicho sistema los símbolos son como muestra la figura 4.



Antigua ilustración impresa sobre el ábaco, tomada del *Suan Fa Thung Tsung*, 1593.

figura 3

一	=	1
二	=	2
三	=	3
四	=	4
五	=	5
六	=	6
七	=	7
八	=	8
九	=	9
十	=	10
百	=	100(10 ²)
千	=	1000(10 ³)

figura 4

En este sistema los dígitos situados en una posición impar se multiplican por el siguiente (es semi posicional). Por ejemplo el 6723 se escribe:

$$\begin{array}{cccc} \text{六} & \text{千} & \text{七} & \text{百} & \text{二} & \text{十} & \text{三} \\ 6 \times 1000 & & 7 \times 100 & & 2 \times 10 & & 3 \end{array}$$

En el sistema posicional o "de varilla" los números se agrupan por parejas y así tenemos símbolos del 1 al 9 (figura 5a) y los respectivos para el 10, 20, 30, ... , como se observa en la fig.5b.



figura 5a



figura 5b

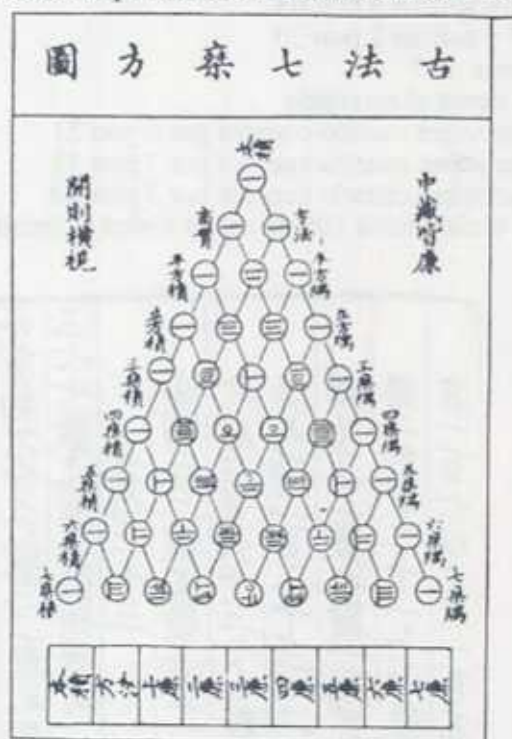
Estos símbolos se escriben alternadamente de derecha a izquierda (por grupos de dos). El 0 se simboliza "o" y es de introducción posterior; inicialmente se dejaba un hueco.

Por ejemplo, 6439721 se escribe:

丁 三 ||| ≡ 千 = |

Cuando introducen el 0 hay una redundancia de símbolos pues queda determinado el valor por la posición independientemente de utilizar el símbolo para decenas o para unidades.

Empiezan a usarlos indiscriminadamente, y en el siguiente triángulo de "Pascal" de Zhou Jijie de 1300 (fig.6), se observan casos de permutación de símbolos sin introducir ambigüedades.



El «triángulo de Pascal» en una obra china de Zhou Jijie (1303). Los dígitos se leen de abajo a arriba.

figura 6

Al utilizar un sistema de notación posicional tenían eficientes algoritmos de cálculo. Por ejemplo, el siguiente es un algoritmo de multiplicación que importaron de la India igual que hicieran los árabes. Supongamos que queremos multiplicar 357 por 528 (fig. 7):

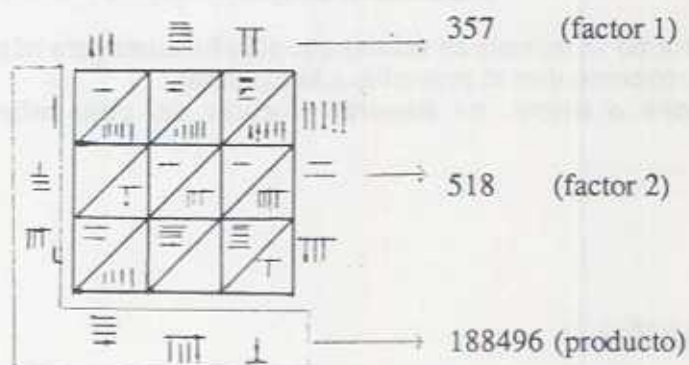


figura 7

Para obtener el producto se disponen a dos lados de un rectángulo los factores, en cada casilla se multiplican los dígitos correspondientes situando en la mitad superior las decenas y en la inferior las unidades (a efectos de multiplicar no tendremos en cuenta si los dígitos corresponden a unidades o

decenas). Finalmente se suman "llevando" en la diagonal de derecha a izquierda. El resultado se lee de arriba a abajo y sigue a la derecha.

Acabamos con el teorema chino del resto, enunciado por primera vez en el Sun Tzci Suan-ching (entre el 280 y el 473 de nuestra era). El enunciado original se muestra en la figura 8, y traducido viene a decir:

«Tenemos cosas de las que no sabemos la cantidad, si las contamos de tres en tres sobran 2, si las contamos de cinco en cinco sobran 3, si las contamos de siete en siete sobran 2. ¿Cuántas cosas hay? Contestación: 23. Método:

si las cuentas por 3 y sobran 2 pon 140

si las cuentas por 5 y sobran 3 pon 63

si las cuentas por 7 y sobran 2 pon 30

Suma estas y obtienes 233

de aquí resta 210 y tienes el resultado

Por cada unidad que sobre cuando cuentes por 5 pon 21

Por cada unidad que sobre cuando cuentes por 7 pon 15

Por cada unidad que sobre cuando cuentes por 3 pon 40

si (la suma) es 106 o más, resta 105 de esto y tienes el resultado.»

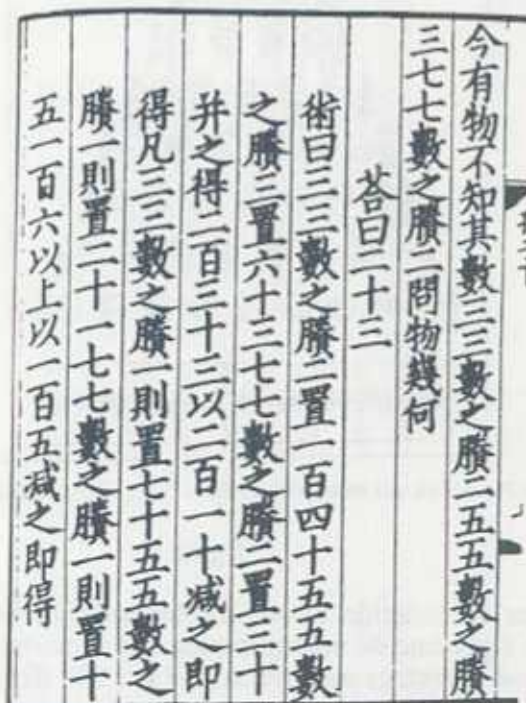


figura 8

El autor no se molesta en señalar que sólo funciona para números menores de 105 ($3 \times 5 \times 7$) ni lo justifica, pero como dice el proverbio (chino, claro):

"Blanco o negro, no importa el color del gato mientras cace ratones".

Joaquim Ortega
2on. curs

Bibliografia:

- | | |
|----------------|---|
| BOYER, C.B. | Historia de la matemática, Alianza Editorial, Madrid 1986. |
| DAVIS & HERSH | The mathematical experience. |
| COLLETTE, J.P. | Historia de las matemáticas, Editorial Siglo XXI, Montreal 1981. |
| EVES, HOWARD | An Introduction to the history of mathematics, Saunders College Publishing, 1983. |

Nombres infinitament petits. Anàlisi no Standard

"Student: the car has a speed of 50 miles an hour. What does that mean?

Teacher: Given any $\varepsilon > 0$ there exists a δ such that if $|t_1 - t_2| < \delta$, then

$$\left| \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50 \right| < \varepsilon.$$

Student: How in the world did anybody ever think of such an answer?".[2]

Si el professor a qui va dirigida la qüestió hagués estat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), la seva resposta hauria estat, segurament, més semblant a la següent:

$\frac{ds}{dt}$ és infinitament pròxim a 50 quan dt és infinitament petit.

És clar que aquesta resposta planteja nous interrogants. En primer lloc, què són els nombres infinitament petits? L'existència d'aquests nombres i les seves propietats han preocupat els matemàtics des d'aleshores. Segons Leibniz:

"... on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la rigueur, mais seulement comme lorsqu'on dit dans l'optique, que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment éloigné et ainsi sont estimés parallèles. Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou d'infiniment petit, c'est comme le globe de la terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semidiamètre du globe de la terre, de sorte que la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamètre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer."

"... Si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblable à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune..."

Leibniz no dona molta importància a l'existència d'aquesta mena de nombres, està interessat en el mètode de càlcul que permeten desenvolupar. Tanmateix aquesta no és l'única qüestió a respondre, doncs tampoc no queda gaire clar què és ds . Evidentment cal entendre que si $dt = t_2 - t_1$, aleshores $ds = s(t_2) - s(t_1) = s_2 - s_1$, però què han de ser el parell de nombres t_1 i t_2 per tal que la seva diferència sigui un infinitèssim? Com cal operar amb aquesta mena de nombres? Si s és una funció real de variable real, què hem d'entendre que són $s(t_1)$ i $s(t_2)$? En aquest sentit Leibniz escriu:

"...et il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini comme s'il avait des atomes (c'est à dire, des éléments assignables de la nature), quoiqu'il n'y en ait point la matière étant actuellement sousdivisée sans fin; et que viceversa les règles de l'infini réussissent dans le fini, comme s'il y avait des infiniment petits métaphysiques, quoiqu'on n'en ait point besoin; et que la division de la matière ne parvienne jamais à des parcelles infiniment petites: c'est parce que tout se gouverne par raison, et qu'autrement il n'y aurait point de science ni règle, ce qui ne serait point conforme avec la nature du souverain principe."

Leibniz ens explica que aquests nombres tenen, de fet, les mateixes propietats que els nombres reals, però l'únic argument que dona és un principi sobirà que ho justifica tot. Mirat amb una òptica actual costa de creure que la teoria de Leibniz prosperés. La naturalesa i les propietats dels nombres infinitament petits no sembla pas que quedin prou clares a partir d'aquestes explicacions. Però de fet el mètode de Leibniz, tot i que no és clar que hagués estat completament comprès [6], fou adoptat per la majoria de matemàtics continentals de l'època. És raonable si pensem que entronca directament amb el mètode dels indivisibles emprat fins aleshores i ampliament difós per B. Cavalieri en el llibre *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635). Recordem que fins i tot ell mateix diu que només s'aparta de l'estil d'Arquímedes en les expressions, que són més directes i més adequades a l'art d'inventar.

Al costat del mètode de Leibniz es trobava el mètode de les fluxions de Isaac Newton, que també

permetia desenvolupar el càlcul diferencial i integral. La polèmica va sorgir respecte de la originalitat del treball de Leibniz. Segons [1] els fets foren, en resum, així: Ampliament reconegut a tots els nivells el treball i la persona de Newton a Anglaterra, l'any 1695 Wallis li fa saber que a Holanda hom creu que el càlcul és una descoberta de Leibniz. Leibniz és acusat de plagi a la "Royal Society". Davant d'aquesta acusació reclama justícia i finalment, l'any 1712, un comitè designat per la "Royal Society" per estudiar l'afer determina que Newton fou el primer inventor del càlcul i, a més, dóna suport a les idees de plagi. Aquesta polèmica sembla haver trascendit fins als nostres dies, doncs en la introducció de [8] podem llegir: "...There is some evidence, however, that Newton's fluxion as a general method was created after Leibniz' calculus of differentials appeared as a general method." El mètode de Newton, però, no convenia a tothom. El text següent correspon al llibre *The Analyst* de B. G. Berkeley publicat l'any 1734: "And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities?"

L'èxit del mètode de Leibniz fou absolut al continent. Només dotze anys després de la invenció del seu càlcul infinitesimal, l'any 1696, apareixia "*Analyse des infiniment petits*" del marquès de De l'Hôpital que és el primer manual desenvolupant el càlcul diferencial i integral mitjançant aquest mètode. Només en l'interval de temps entre 1684 i 1708 es publiquen més d'un centenar d'articles emprant o estudiant el mètode de Leibniz, que a principis del segle XVIII ja era popular [6].

Així doncs, per quina raó i quan el mètode dels infinitessimals va ser deixat de banda pels matemàtics? Cal arribar fins l'any 1872, que Weierstraß defineix el concepte de límit tal com el coneixem ara. Acte seguit defineix els conceptes de continuïtat i de derivabilitat a partir del de límit i així pot desenvolupar un càlcul diferencial i integral independent del mètode dels infinitessimals. La raó per la que els matemàtics van optar pels límits, sembla ser que rau en les dificultats que sorgien en el mètode de Leibniz. Per entendre això retrocedirem fins l'any 1821, en el que Cauchy demostrà mitjançant aquest mètode un teorema sobre la continuïtat de la suma d'una sèrie puntualment convergent de funcions contínues. Malgrat que molts matemàtics asseguraven que el resultat era incorrecte i fins i tot Abel en donà un contraexemple l'any 1826, Cauchy, quatre anys abans de morir, publicà uns aclariments defensant la validesa d'aquest teorema, era l'any 1853.

L'Anàlisi no Standard permet revisar aquest fet des de noves perspectives, doncs s'acompleix que una successió (standard) de funcions que convergeixi puntualment en tots els punts del (que vindria a ser el) continu de Leibniz, ja és uniformement convergent.

Pel que sembla, bona part del problema estava en la dificultat d'entendre el què significava que una sèrie fos puntualment convergent en tots els punts. Eren tots els punts del continu de Leibniz? O bé els punts reals? I pel que fa al contraexemple, per demostrar que efectivament ho era, calia veure quin era el comportament de la sèrie en els punts que no eren reals. Ara bé, com s'havia d'estendre una funció real al continu de Leibniz? Les possibilitats eren diverses. A més els infinitessimals de Cauchy ja no eren propiament els infinitessimals de Leibniz, sinó que s'havien convertit en una mena de magnituds reals variables. La cita següent correspon al llibre de Cauchy *Resumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimal* de l'any 1823: "Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissant indéfiniment de manière à s'abaisser au dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zero pour limite." [5]. Aquesta mena de dificultats entorpien el desenvolupament de la matemàtica en la direcció dels infinitessimals. Així els matemàtics van optar per emprendre el nou camí dels límits, que oferia perspectives millors.

Els infinitessimals van quedar arraconats durant prop d'un segle fins que, encara no fa vint-i-vuit anys, Abraham Robinson va formalitzar el concepte d'infinitesimal. En el pròleg de [7] podem llegir: "In the fall of 1960 it occurred to me that the concepts and methods of contemporary Mathematical Logic are capable of providing a suitable framework for the development of the Differential and Integral Calculus by means of infinitely small and infinitely large numbers..." "...The resulting subject was called by me Non-standard Analysis..." De fet actualment l'Anàlisi no Standard ha esdevingut un mètode amb aplicacions a moltes branques de les matemàtiques, i especialment a la probabilitat.

Seguint les idees de A. Robinson no resulta difícil construir un model del "continu de Leibniz". En el conjunt S de les successions de números reals identifiquem aquelles successions que coincideixen en tots els termes llevat, possiblement, d'un nombre finit. És a dir, si $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ són

dues successions de reals,

$$(a_n)_n \equiv (b_n)_n \text{ si i només si } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \text{ és cofinit.}$$

El conjunt quocient de S respecte d'aquesta relació d'equivalència el designem per ${}^*\mathbb{R}$. Definim en ${}^*\mathbb{R}$ les operacions $+$ i $\cdot$ per components. És fàcil comprovar que aquestes definicions no depenen del representant escollit. Així si representem per $[(x_n)_n]$ la classe corresponent a una successió $(x_n)_n$,

$$[(a_n)_n] + [(b_n)_n] = [(a_n + b_n)_n]$$

$$[(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n] = [(a_n \cdot b_n)_n]$$

També podem definir un ordre per

$$[(a_n)_n] < [(b_n)_n] \text{ si i només si } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < b_n\} \text{ és cofinit.}$$

Identifiquem cada número real r amb el corresponent ${}^*r = [(r)_n]$, la classe de la successió de terme constant i igual a r , en ${}^*\mathbb{R}$. Si designem per Ω la classe de la successió $(n)_n$ s'acompleix que

$${}^*r < \Omega \text{ per a tot nombre real } r.$$

Així podem entendre que Ω juga el paper de nombre infinitament gran. Si prenem la classe ω determinada per la successió $(1/n)_n$ és fàcil comprovar que

$${}^*0 < \omega < {}^*r \text{ per a tot nombre real estrictament positiu } r.$$

Podriem dir que ω és un nombre positiu i infinitament petit.

Tanmateix aquesta construcció té el defecte de no ser un cos. Efectivament,

$$[(0,1,0,1,0,1,0,1,\dots)] \cdot [(1,0,1,0,1,0,1,0,\dots)] = [(0,0,0,0,0,0,0,0,\dots)]$$

i cap dels dos factors no és zero. Tampoc no és cert que el conjunt quocient que en resulta sigui totalment ordenat. Per tal de resoldre aquestes dificultats modificarem l'equivalència definida anteriorment. Ens caldrà la següent conseqüència de l'axioma d'elecció:

Existeix una aplicació $m: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

- (i) $m(\mathbb{N}) = 1$.
- (ii) $m(A) = 0$ per a tot subconjunt finit A de $\mathbb{N}$.
- (iii) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si A i B són disjunts.

Ara, modifiquem la definició de l'equivalència anterior així:

$$(a_n)_n \equiv (b_n)_n \text{ si i només si } m(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\}) = 1,$$

o bé tal com diríem amb el llenguatge clàssic de la teoria de mesures, si i només si $(a_n)_n = (b_n)_n$ quasi per tot. Com que $\mathbb{N}$ és la reunió dels conjunts $\mathbb{P}$ dels nombres parells i $\mathbb{S}$ dels nombres senars i aquests conjunts són disjunts, resulta que un dels dos ha de tenir mesura 1 i l'altre mesura 0. D'això en resulta que els divisors de zero anteriors esdevenen *0 i *1 o viceversa. De fet aquesta definició dóna lloc a un cos totalment ordenat que continuarem designant per ${}^*\mathbb{R}$. Els elements *r que provenen d'elements $r \in \mathbb{R}$, els anomenarem *elements standard* de ${}^*\mathbb{R}$ i els altres elements els anomenarem *elements interns* de ${}^*\mathbb{R}$. ${}^*\mathbb{R}$ és més gran que $\mathbb{R}$, doncs conté els elements ω i Ω que no són standard. Això ens permet donar les definicions següents:

Un element $x \in {}^*\mathbb{R}$ és *infinitament petit* si i només si $-{}^*r < x < {}^*r$ per a tot nombre real $r \in \mathbb{R}^+$ diferent de zero.

Un element $x \in {}^*\mathbb{R}$ és *finit* si i només si existeix un nombre real $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $-{}^*r < x < {}^*r$. Observem que tots els nombres infinitament petits són finits. Els elements de ${}^*\mathbb{R}$ que no siguin finits,

direm que són *infinites* o *infinitament grans*.

Dos nombres $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ són *infinitament pròxims* si i només si $x - y$ és infinitament petit. En aquestes cas escriurem $x \approx y$.

Imaginem ara que tenim una funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Com podem estendre aquesta funció a ${}^*\mathbb{R}$? Seguint els mateixos mètodes que fins ara podem definir ${}^*f: {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ per

$${}^*f(\llbracket (x_n)_n \rrbracket) = \llbracket (f(x_n))_n \rrbracket \quad \text{per a tot } x = \llbracket (x_n)_n \rrbracket \in {}^*\mathbb{R}.$$

f és una extensió de f a ${}^\mathbb{R}$, en el sentit que si $f(r) = s$, aleshores ${}^*f({}^*r) = {}^*s$ per a tot parell de nombres reals r i s . Es comprova que aquesta definició és independent del representant escollit. Amb aquestes definicions podem enunciar els resultats més clàssics de l'Anàlisi.

Continuïtat

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$,

f és contínua en x_0 si i només si ${}^*f(x) \approx {}^*f(x_0)$ sempre que $x \approx {}^*x_0$.

Derivabilitat

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$,

f és derivable en x_0 si i només si $\frac{{}^*f(x) - {}^*f(x_0)}{x - {}^*x_0} = {}^*r$ per a un cert $r \in \mathbb{R}$, si $x \approx {}^*x_0$.

En aquest cas $f'(x_0) = r$.

Les demostracions d'aquests resultats es poden trobar en [7] o [8] per exemple i permeten resoldre molt fàcilment els problemes de la continuïtat i de la derivabilitat de la suma, del producte o de la composició de funcions contínues i derivables respectivament. Tot això sense haver d'usar en cap moment el concepte que, fa poc més d'un segle, va introduir Weierstrass. No cal dir que L'Anàlisi no Standard no s'acaba aquí, les seves aplicacions abasten pràcticament totes les branques de les matemàtiques. Mentrestant la majoria del col·lectiu matemàtic observa el seu desenvolupament amb escepticisme.

Dr. Miquel Ralló
Departament de MAIA

Referències:

- [1] BOYER, C. A History of Mathematics, Wiley (1968).
- [2] GRABINER, J.V. Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, Amer. Math. Month. 90 - I, 185-194, (1983).
- [3] HARNIK, V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson. Time to bring them back to school, The Mathematical Intelligencer 8 n°2 (1986).
- [4] LAKATOS, I. Cauchy and the continuum en Mathematics Science and Epistemology, Cambridge U. P. (1978).
- [5] LAUGWITZ, D. The theory of infinitesimals. An introduction to Nonstandard Analysis, Publicacions de l' "Accademia Nazionale dei Lincei" (1980).
- [6] LORENZO, J. de Anàlisi infinitesimal. Gottfried Wilhelm Leibniz, Tecnos, Colección Clásicos del pensamiento (1987).
- [7] ROBINSON, A. Non Standard Analysis, North Holland P. C., (1970).
- [8] STROYAN, K. D., LUXEMBURG, W.A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals, Academic Press (1976).
- [9] LINDSTROM, T. An invitation to Nonstandard Analysis, Curs a la University of Hull 1986 (Anglaterra).

En busca d'infinít com a pi periòdic.

∞ 'π ...Ah!

En vaig sentir parlar per primera vegada fa molts anys: aleshores no vaig creure en la seva existència; és clar, tampoc Cantor creia en una bijecció entre $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ de petit...

Però hi ha coses que amb els anys s'obren pas entre la selva del sentit comú (aquests prejudicis acumulats abans de la majoria d'edat— aquesta definició de sentit comú del sentit comú no és meua, és d'un dislèxic molt famós— o més ben dit, mentres hom encara és prou crèdul—hi ha a qui li dura tota la vida—) fins a arribar a zones més pregones i menys domesticades del cervell (o de la ment, o el que sigui).

Finalment em vaig decidir a organitzar una expedició, amb pocs mitjans i menys fortuna. Com la recerca d'El Dorado, cada pas endavant em permetia descobrir una nova llegenda, alguna pista remota o uns cingles infranquejables... mai res de tangible.

Cada cop les expedicions—doncs agafada la febre és difícil aturar-se—creixien en mitjans, i el material acumulat esdevenia ja difícil de catalogar.

Així que un bon dia em vaig tancar amb pany i clau donant avís de que no volia que em destorbessin i vaig començar a estudiar aquells vells documents, aquells rumors que corrien encara frescs...

Tot plegat, quedaven encara massa coses indeterminades...

Aleshores ho vaig veure: infinits, processos de límits, indeterminació!

És ben cert que des dels grecs, l'únic pas en el concepte de límit ha estat acceptar l'infinít actual a més del potencial, però l'anàlisi "no standard" encara ho és per contraposició a el standard, que evoluciona de les *fluxions* de Newton!

Calia començar pels límits indeterminats! Calia començar pel zero si volia arribar a l'infinít. A la darrera expedició he començat per estendre els reals de la següent manera:

$$E(k,p) = \lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot n^p,$$

on $k, p \in \mathbb{R}$, i el límit s'entén amb $n \in \mathbb{N}$ i avançant d'un amb un cap a l'infinít; és imprescindible distingir aquest cas del cas en què n avança de 3 en 3; aleshores tindriem:

$$\lim_{n \rightarrow (3) \infty} k \cdot n^p = \lim_{n \rightarrow (1) \infty} k \cdot (3n)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^p \cdot k \cdot n^p = E(3^p \cdot k, p).$$

La inclusió dels reals és natural: $r \rightarrow E(r,0)$, i la suma i el producte no presenten problema:

$$E(k,p) \cdot E(c,q) = E(k \cdot c, p+q)$$

$$E(k,p) + E(c,q) = E(k+c, p) \text{ si } p=q$$

$$E(k,p) \text{ si } |p| > |q|$$

$$E(c,q) \text{ si } |p| < |q|.$$

Finalment, el límit del producte (i de la suma) és igual al producte (suma) de límits! (Si els estudiants de BUP ho sabessin...).

Naturalment, això només està definit per a funcions racionals de n , però aquestes són denses dins el conjunt de funcions...

Crec que estic en el bon camí, els fruits obtinguts en aquesta darrera expedició, com els bons vins, tenen cos,...

Ara estic preparant una nova expedició, gairebé serà una excursió, n'estic segur; ara que la meua vella lupa d'arqueòleg m'ha permès descobrir la multitud d'infinits que comfoniem amb un sol ∞ (i els seus inversos, tot barrejats en el zero), em miraré els altres reals, començant pel famós e ($=2.718... = \lim_{n \rightarrow (1) \infty} (1+1/n)^n$, quan $n \rightarrow (1) \infty$); segurament caldrà una nova ampliació, amb unes operacions més fines, més potents, però res no m'espanta.

Quan torni d'aquest passeig— llstima que Bernoulli no em vulgui acompanyar, diu que busca el mar on desemboca el riu Dirac..., no s'adona que jo ja estic arribant a les seves platjes!—, quan torni, deia, prepararé la gran expedició, en busca de $\infty \cdot \pi$!

Joan Pons
3er. curs

Els nombres p-àdics.

L'objectiu final de la Teoria de Nombres és poder resoldre les equacions diofàntiques, és a dir, les equacions polinòmiques amb coeficients enters (o racionals), i dels quals interessin, òbviament, les solucions enteres (o racionals). És clar que aquesta tasca és digna d'un Heracles i dubto que s'assoleixi mai, però com passa sempre en Matemàtiques, els mitjans arriben a ser més importants que el fi, i les tècniques desenvolupades a efecte de resoldre un problema obren noves branques en aquest fantàstic arbre que és la nostra ciència. Una petita mostra d'aquest fet és la creació dels nombres p-àdics, que s'han imposat com una de les eines més potents en el camp de la Teoria de Nombres i que de fet, avui són l'ABC per tot aquell que vulgui dedicar-se a aquesta al·lucinant especialitat.

A finals del segle passat Minkowski provà el seu teorema (anomenat ara de Hasse-Minkowski) sense la utilització del llenguatge dels p-àdics. La introducció d'aquests nombres és deguda a Hensel, i data de l'any 1897. Ens explica en Helmut Hasse, principal deixeble de Hensel i veritable impulsor dels nombres p-àdics, que mentre estudiava a Göttingen, l'any 1913 comprà en una llibreria de vell un exemplar a molt bon preu de la *Zahlentheorie* (Teoria de Nombres) de Hensel. Quedà impresionat pel gran material allí contingut i decidí anar a Marburg, on estava Hensel, a fer el doctorat; provocant d'aquesta manera la compassió dels companys i professors de Göttingen en anar a doctorar-se a un lloc tan petit com Marburg. A partir d'aquí Hasse impulsà tota la teoria dels p-àdics, que serà un punt cardinal en l'estudi de l'Àlgebra Moderna.

Però, què són els nombres p-àdics? Formalment, l'anell d'enters p-àdics és el completat de $\mathbb{Z}$ amb la mètrica p-àdica. En paraules més senzilles: trieu un primer $p \in \mathbb{Z}$ i construïm el que s'anomena la valoració p-àdica: Assignem a cada nombre enter l'exponent al qual apareix elevat p en la descomposició en factors primers:

$$\begin{aligned} v_p: \quad \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ n &\rightarrow v_p(n) = \alpha \text{ si } p^\alpha \mid n \text{ i } p^{\alpha+1} \nmid n \end{aligned}$$

A partir d'aquí definim una mètrica a $\mathbb{Z}$ (la mètrica p-àdica):

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p: \quad \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow \|n\|_p = p^{-v_p(n)}. \end{aligned}$$

Això converteix $\mathbb{Z}$ en un espai ultramètric. Ultramètric vol dir que la desigualtat triangular es verifica d'una manera més forta:

$$\|n+m\|_p \leq \max(\|n\|_p, \|m\|_p)$$

I aleshores l'únic que s'ha de fer és passar al completat. No us espanteu, passar al completat és una cosa que tothom que és en aquesta casa ha fet com a mínim un cop: la construcció de $\mathbb{R}$. S'han d'agafar successions de Cauchy, fer quocient per les successions de límit zero, etc., però ara amb la distància p-àdica. Aquest és l'anell $\mathbb{Z}_p$ dels enters p-àdics.

També, com passa gairebé sempre, no varen néixer així els p-àdics. Ningú no es va aixecar un dia i va dir: "avui completaré $\mathbb{Z}$ amb alguna mètrica estranya". Els p-àdics varen sortir a la llum degut a la necessitat d'estudiar infinites congruències alhora. M'explicaré: un nombre p-àdic es pot interpretar com una sèrie del tipus:

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot p^n, \quad 0 \leq a_n < p \quad \forall n$$

(Aquesta sèrie no té sentit a $\mathbb{Z}$, però recordeu que en la mètrica p-àdica, p^n és més "petit" conforme n es fa gran). Si considereu la successió $\{x_n\}_{n \geq 0}$ de sumes parcials, obtenim una altra expressió del p-àdic a. Fixem-nos que $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$. Aleshores, si tenim dos p-àdics $x = \{x_n\}$ i $y = \{y_n\}$, escriure $x \equiv y$ és el mateix que escriure $x_n \equiv y_n \pmod{p^n} \quad \forall n \geq 0$ i el fet d'haver de treballar sovint amb aquesta expressió va motivar la creació del p-àdics.

Les propietats de l'anell dels p-àdics el fan especialment útil a l'hora de treballar: és evidentment complet, tota successió de Cauchy és convergent, i $\mathbb{Z}$ és dens dins $\mathbb{Z}_p$, és clar. És també un espai mètric compacte. Com a propietats algebraïques, cal remarcar: és un anell local (amb un sol ideal

maximal), i aquest maximal està format pels múltiples de p . Degut a això, tot element s'expressa de la forma $p^n u$, on u és un p -àdic inversible (els inversibles són els que no són múltiples de p), la qual cosa el converteix en un anell de valoració discreta.

Però encara hi ha més. Si construïm el cos de fraccions de $\mathbb{Z}$ (mètode usual: totalment anàleg a la construcció de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$), obtindrem un cos, $\mathbb{Q}_p$, amb més propietats també molt divertides. Naturalment, el procés de completació i del pas al cos de fraccions es pot invertir. Quan completem $\mathbb{Q}$ amb la mètrica p -àdica (definida de manera anàloga que a $\mathbb{Z}$, ara la valoració pot agafar valors negatius) obtenim també el cos $\mathbb{Q}_p$. I això és doblement important en quan el teorema d'Ostrowski assegura que les úniques mètriques possibles a $\mathbb{Q}$ són la usual i les p -àdiques, o sigui, els únics completats de $\mathbb{Q}$ que hi ha són $\mathbb{R}$ i els cossos $\mathbb{Q}_p$ amb p primer. A més, les propietats de $\mathbb{R}$ fan que se'l consideri moltes vegades com si fos un $\mathbb{Q}_p$ amb un primer nou, anomenat primer de l'infinit; i això impulsa un tractament global de tots els completats de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ inclòs. Una mostra de fins quin punt és així és el teorema de Hasse-Minkowski, que assegura que tota equació diofàntica del tipus:

$$a_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_2^2 + \dots + a_n \cdot x_n^2 = a, \quad a, a_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k$$

té solució racional si i només si té solució a $\mathbb{R}$ i a tots els cossos $\mathbb{Q}_p$. I això és important perquè és relativament fàcil saber quan aquesta equació té solució a $\mathbb{Q}_p$, mitjançant uns invariants convenientment definits.

Espero que aquest exemple us hagi convençut de la importància que poden arribar a tenir els p -àdics dintre la Teoria de Nombres. I espero que aquest article hagi contribuït a que es coneguin una mica millor aquests nombres, tan fascinants i tan útils.

P. Gush

Referències:

GENTILE, E.R. Métodos locales-Globales (Aspectos históricos), Instituto Argentino de Matemática. Preprint n°96, Mayo 1986.

Sobre els nombres perfectes.

Tan difícil hauria de ser trobar la perfecció en les obres humanes, com trobar la perfecció en els nombres.

Definició. Un nombre natural és perfecte quan és igual a la suma dels seus divisors estrictes.

Exemples. $10 \neq 1 + 2 + 5$
 $12 \neq 1 + 2 + 3 + 4 + 6$
 $6 = 1 + 2 + 3$
 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

Per tant, 6 i 28 són nombres perfectes.

Euclides ja va fer notar en els seus *Elements* que si $2^m - 1$ era primer per un cert m , aleshores $2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$ era perfecte.

Lema. Sigui n un nombre positiu, i sigui

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

la seva descomposició en factors primers. Aleshores, els seus divisors són clarament nombres del tipus

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}, \text{ amb } 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_n \leq \alpha_n.$$

i la suma de tots els seus divisors és:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n} = \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \cdot \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} p_n^{\beta_n} \right) = \\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}. \end{aligned}$$

Teorema (Elements d'Euclides). Si $2^m - 1$ és primer, aleshores $2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$ és perfecte.

Demostració. Sigui $n = 2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$. Donat que $2^m - 1$ és primer, aleshores:

$$\sigma(n) = \frac{2^{(m-1)+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{(2^m - 1)^{1+1} - 1}{(2^m - 1) - 1} = (2^m - 1) \cdot \frac{(2^m - 1)^2 - 1}{2^m - 2} = (2^m - 1) \cdot \frac{2^{2m} - 2 \cdot 2^{m+1} - 1}{2^m - 2} = (2^m - 1) \cdot 2^m = 2 \cdot n$$

i per tant n és un nombre perfecte, ja que si tots els seus divisors sumen $2n$, aleshores els seus divisors estrictes sumaran n . #

Exemples. $m = 2$ $2^2 - 1$ primer $n = 6$ perfecte
 $m = 3$ $2^3 - 1$ primer $n = 28$ perfecte

$m = 5$	$2^5 - 1$ primer	$n = 496$ perfecte
$m = 7$	$2^7 - 1$ primer	$n = 8128$ perfecte
(Tots els anteriors eren ja coneguts per l'escola pitagòrica.)		
$m = 13$	$2^{13} - 1$ primer	$n = 33\,550\,336$ perfecte (s. XV)
$m = 17$	$2^{17} - 1$ primer	$n = 8\,589\,869\,056$ perfecte (Cataldi, 1548-1625)
$m = 19$	$2^{19} - 1$ primer	$n = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$ perfecte

Hauríem d'esperar a Euler (1707-1783) per conèixer el vuitè nombre perfecte (1770) i establir genialment el recíproc de l'anterior teorema.

Teorema (Euler). n és nombre parell perfecte $\Leftrightarrow n$ és de la forma $2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$, amb $2^m - 1$ primer.

Demostració. Suposem n parell:

$$n = 2^t \cdot u \text{ amb } t > 0 \text{ i } u \text{ imparell. Llavors:}$$

$$2^{t+1} \cdot u = 2 \cdot n = \sigma(n) = \sigma(2^t) \cdot \sigma(u) = \frac{2^{t+1} - 1}{2 - 1} \cdot \sigma(u) = (2^{t+1} - 1) \cdot \sigma(u)$$

Per tant,

$$\sigma(u) = \frac{2^{t+1} \cdot u}{2^{t+1} - 1} = u + \frac{u}{2^{t+1} - 1}$$

Està clar que u i $u/(2^{t+1} - 1)$ són dos divisors de u (observem que $\sigma(u)$ és enter i per tant $2^{t+1} - 1$ realment divideix u).

Però donat que $\sigma(u)$ és la suma de tots els divisors de u , deduïm que u té només dos divisors, i en conseqüència és primer, i $u/(2^{t+1} - 1) = 1$. Amb la qual cosa el teorema queda demostrat. #

Una vegada es disposa d'aquest teorema, descobrir nombres perfectes parells és tan fàcil (o tan difícil) com descobrir nombres primers de la forma $2^m - 1$.

Lema. $2^m - 1$ primer $\Rightarrow m$ primer.

Demostració. Suposem $m = m_1 \cdot m_2$. Aleshores:

$$2^m - 1 = (2^{m_1} - 1) \cdot (1 + 2^{m_1} + 2^{2m_1} + \dots + 2^{(m_2-1)m_1}).$$

El recíproc és en general fals:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

$$2^{23} - 1 = 8\,388\,607 = 47 \cdot 178\,481. \quad \#$$

Els primers de la forma $2^m - 1$ amb m primer reben el nom de **primers de Mersenne** i han estat objecte de profunds estudis. Avui en dia no es coneixen tots els nombres primers, però els primers més grans que es coneixen són precisament d'aquesta forma. Els resultats impliquen en molts casos complicades tècniques de computació. Fins el present, se sap que $2^m - 1$ és primer per als següents valors de m :

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4259,
4423, 9689, 9941, 11 213, 19 937, 21 701, 23 209, 44 497, 132 049.

Que $2^{127} - 1$ era primer ho va demostrar Lucas l'any 1876. A partir de l'any 1952 es troba la resta amb l'ajut de les computadores. El 1979 es descobreix el cas $m = 44\,497$, que dona lloc a un nombre de 13 395 dígits. El nombre primer més llarg conegut fins ara correspon al cas $m = 132\,049$. No se sap si la llista de primers de Mersenne continua, ni tampoc se sap si s'acaba. Però mercès a aquest estudi podem afirmar que almenys coneixem els vint-i-vuit nombres perfectes parells més "petits". (Així, per $m = 61$, tenim que $n = 2\,658\,455\,991\,569\,831\,744\,654\,692\,615\,953\,842\,176$ és perfecte.)

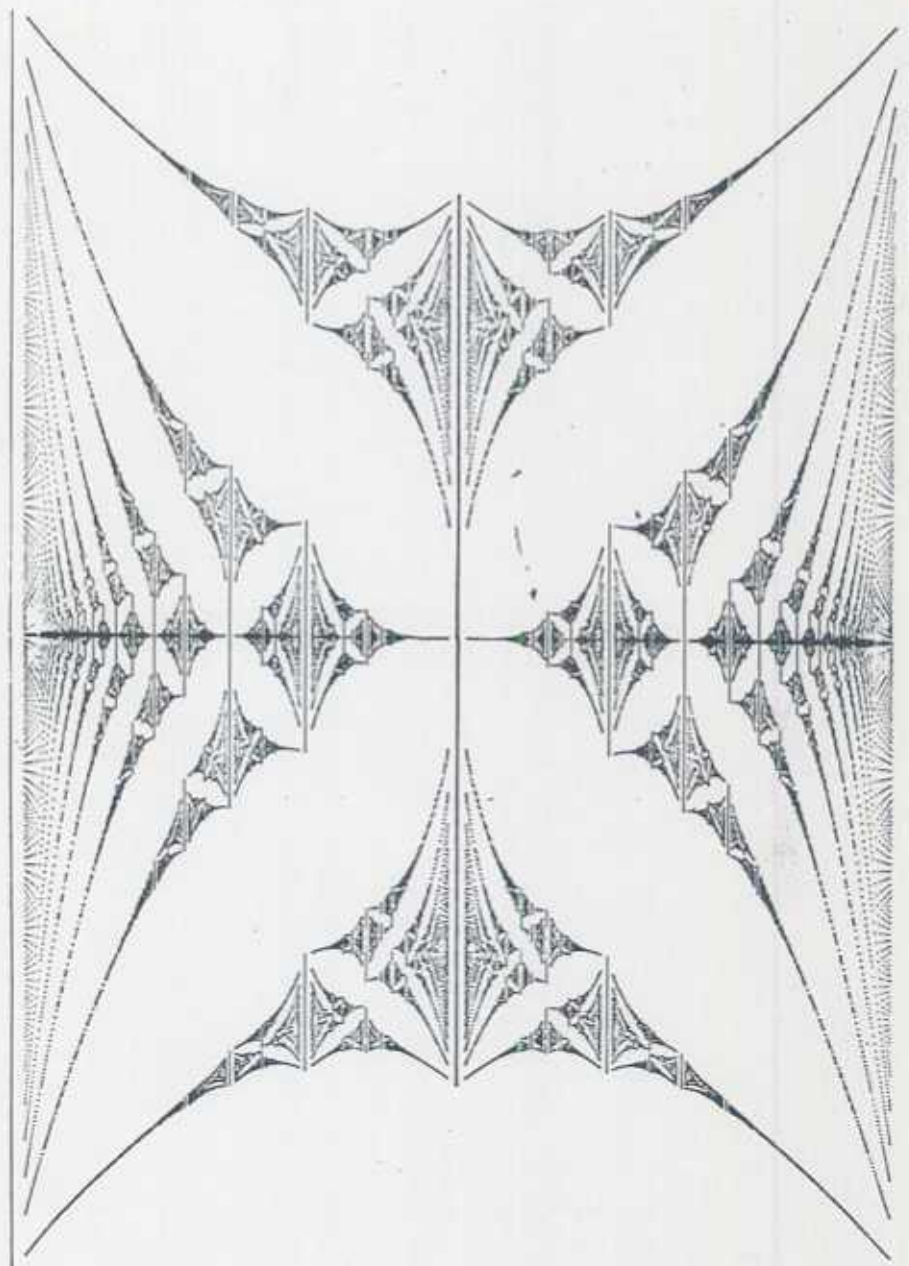
Així, cercar la perfecció entre els nombres parells és molt difícil. Cercar la perfecció entre els nombres senars és avui en dia pràcticament impossible. Fins el present no se n'ha descobert cap (ni

tan sols se sap si n'existeixen). Però Hagi i Mc.Daniel han determinat que si existeix un nombre perfecte senar hauria de ser més gran que 10^{50} i hauria de ser divisible per un factor primer més gran que 100 110.

Albert Violant
5è. curs



La 271ena. Fira de Nombres Trascendents



Els àrids deserts de les hostils tribus de nombres imaginaris.

...i fl.

1.- Col·laboració especial

En fe del buen acogimiento y honra que vuestras excelencias hacen a toda suerte de problemas, mayormente los que por su ingenio y sagacidad se abaten al servicio del esparcimiento, he determinado de sacar a luz los siguientes al abrigo del clarísimo nombre del Aleph, a quien, con el acatamiento que debo a tanta grandeza, suplico le reciba agradablemente en su protección, para que a su sombra, aunque desnudo de aquel precioso ornamento de elegancia y erudición del que suelen andar vestidos los otros artículos, ose parecer seguramente en el juicio de algunos, que, no contentiéndose en los límites de su ignorancia, suelen condenar con mas vigor y menos justicia los trabajos ajenos, que poniendo los ojos la prudencia de vuestras mercedes en mi buen deseo, fio que no desdenyaran la cortedad de tan humilde servicio.

Uno. Empezaremos con una serie asaz diabólica encomendada al año de gracia MCMLXXXVIII.

Primero. Si acaeciére que p fuere primo y p^2+8 asimismo lo fuere, pruebase que p^4+1988 a su vez lo es. Si aconteciére que se tratare de una falaz mentira encuentrese un contraejemplo.

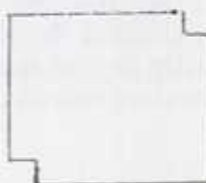
Segundo. Siendo a, b mayores que 0, se procede a dividir a^2+b^2 por $a+b$. Con la venia de sus mercedes llámese q al cociente y r al resto. Encuentrense, si tienen tiempo y voluntad para ello, la parejas (a, b) tales que $q^2+4r = 1988$.

Tercero. Pueden encontrarse 1988 enteros estrictamente positivos y distintos menores o iguales que 10^5 tales que 3 cualesquiera de ellos no sean terminos consecutivos de una progresion aritmetica? He mentido como un vil malandrín?

Cuarto. Con cuantos ceros acabara 1988! ? Ruego encarecidamente a sus excelencias borren de sus agraciados rostros la mueca de suspicacia aparecida tras tamanya impertinente cuestion.

Dos. Habiendo conocido en tierras africanas un juego arabe llamado escaques o ajedrez y teniendo a mano uno de los tableros, en esto acaece que se me ocurren tres cuestiones:

Primero. De facil resolucion para el lector ingenioso: Si aconteciére que suprimieremos dos cuadrados opuestos tal como indica la figura, se puede tapar el tablero con 31 fichas de domino? (Cada ficha tapa dos cuadros.)



Segundo. Si estubiesemos pertrechados de 21 fichas de domino mas grandes, que tapen tres casillas, es facil disponerlas en el tablero de manera que solo reste una casilla sin tapar. Por que diseño del destino queda siempre la C-3, C-6, J-3 o J-6 sin tapar?

Tercero. Considerense descomposiciones de un tablero en p rectangulos no superpuestos bajo las siguientes condiciones:

- (i) Cada rectangulo ha de tener tantos cuadrados blancos como negros;
- (ii) Si a_i es el numero de cuadrados del rectangulo i , entonces:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_p.$$

Encuentrese el maximo valor de p para el cual la descomposicion es posible, y si por ventura aconteciere que lo encontrareis determinar para susodicho p todas las sucesiones posibles $a_1, a_2, \dots, a_p$.

Habiendo llegado a mis oidos merced a un mensajero, comparable a Mercurio solamente, que el numero en sus manos del Aleph disertara sobre numeros, no oso despedirme sin proponerles los siguientes problemas o acertijos:

Tres. Encuentrese el mas pequenyo n tal que

- (i) El ultimo dígito es un 6;
- (ii) Si el 6 pasa a ocupar la primera posicion el numero resultante es 4 veces mayor.

Cuatro. Hallar el mayor numero de n cifras que es una potencia n -esima exacta.

Si acaeciére que alguien osare no enviar un problema, acertijo, jeroglífico, comentario ironico... para el proximo numero, voto a brios que tomare venganza cumplida; ya pueden irse encomendando a su espada y a su dama. Y con esto que Dios reparta salud, suerte y cervezas, y a mi no olvide.

Don Miguel de Secantes Saavedra

El Blanco de $\mathbb{R}_p$ - anto

Joaquim Ortega i Jaume Amorós

Enviats especials de l'Aleph
(15 anys) a la presó d'Alger

2.- A modo de concurso, el Departamento de Historia del Aleph se complace en invitaros a resolver un par de problemas extraidos de la correspondencia entre Euler y Lagrange. Las demostraciones de los lectores pueden dejarse en el buzón del Aleph. De entre ellas se seleccionará la mejor, cuyo dueño será premiado con un valioso obsequio:

Carta de Leonard Euler a Joseph Louis De La Grange.

«Voilà, Monsieur et très honoré confrère un théorème de la plus grande importance, et un problème très difficile à résoudre:

Theorema.- Si formula $mx^2 + ny^2$, casu $x=a$ et $y=b$, praebeat numerum primum α , tunc omnes numeri primi in formula $ax^2 \pm 4mnp$ contenti, simul erunt numeri formae $mx^2 + ny^2$.

Problema.- Invenire duos numeros quorum productum, tam summa quam differentia sive auctum sive minutum, fiat quadratum.

$$xy+x+y = ?$$

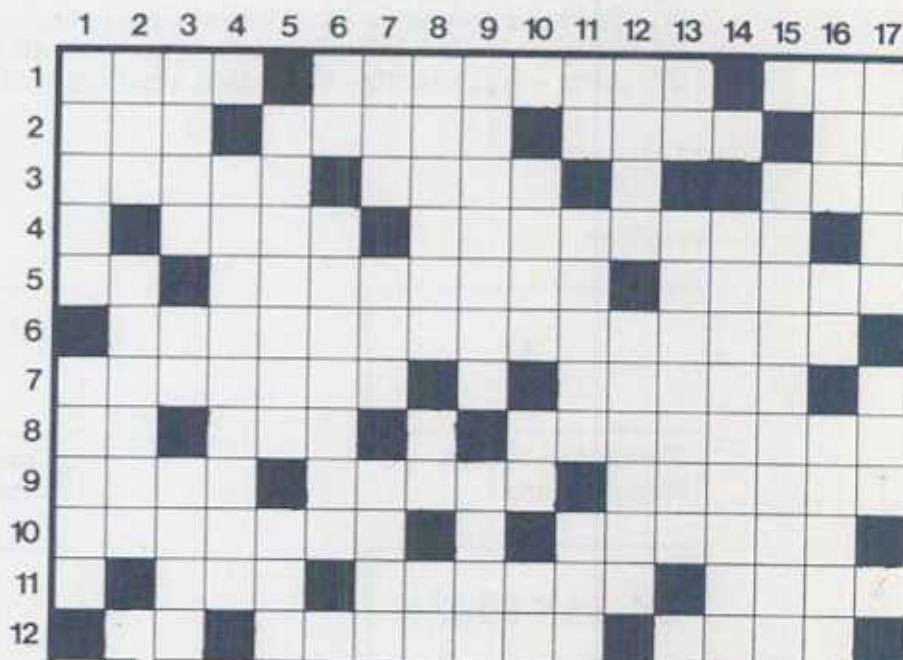
$$xy-x-y = ?$$

$$xy+x-y = ?$$

$$xy-x+y = ? \quad »$$

Sebastián del Baño
2on. curs

3.- Crucigrama.



HORITZONTALS.

- 1.- Nato en cristià.- Muntanya, riu o ciutat de la Índia o del Nepal.- Mant beduí.
- 2.- Ningun.- Beguda que fa panxeta.- Crit de guerra skin.- Continua el d'abans.
- 3.- Muntanya castissa on va anar a parar Noé.- Grapeja, soba.- Símbol d'algun element.- Riu Suís.
- 4.- Un altre símbol (de pel·lícula).- Manduca.- Es diu d'alguns professors, degut als seus efectes immediats.- Primera vocal, començant des del principi.
- 5.- Negació d'estupidesa natural.- La guarra.- Utilitat de la mantega a l'hora d'esmorzar.
- 6.- Segon plat.
- 7.- Bestiola especialment dolenta, que produeix picor i fa de mala educació gratar-se.- Amb aquesta i la següent es fa VIRUTA.- Símbol del sofre.
- 8.- No t'...teres.- NaCl.- Una lletra.- Relatiu a Bearn.
- 9.- Sorroll de porta.- Cuentista.- Hola, com et va?
- 10.- Apropar-se el suficient com per a establir contacte físic.- Disjunció.- Equipatge que va al revés.
- 11.- Una A.- Joc infantil.- Joc de dauss dins un galliner.- Crema de mans sense X.
- 12.- Va darrera de la manilla, a la butifarra.- Tot.- OLE!

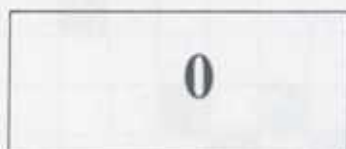
VERTICALS.

- 1.- Casi un "ocaso".- No és massa ràpida.
- 2.- ...penat, sempre està cap avall.- Arregla.- La vocal de sempre.
- 3.- Tornem amb la manduca.- Força odílica.- De casualitat ha sortit el reberberi de la veu quan un parla de cara a una muntanya.
- 4.- Símbol químic.- Dir-li alguna cosa incongruent a en Simó.
- 5.- ...i no va dir res.- Corrent d'aigua que neix a dalt dels turons i, després de llarg viatge, va a parar a la mar, que és el morir.

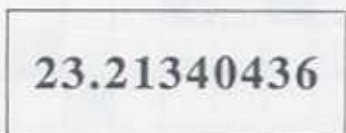
- 6.- QUI?— Pebrots.— El símbol químic.
- 7.— Allò que diuen que fa en t:apies.— Gasta un país molt gran.— Viu sense ulls (o igual li falta un).
- 8.- Xalat, boig, el que m'ha donat l'idea de la definició anterior.— El més gran matemàtic que han vist i veuran els segles.— Quatre.
- 9.- Txulo putes.— Partit Obrer Revolucionari Espanyol (P.O.R.E.).
- 10.- La vocal.— Fot la pota al revés.— Qualitat del crucigrama.— Símbol químic que comença per *i* i acaba per *r*.
- 11.- Què no, home, què no!— Adjectiu bòvid.— Podriem dir les sigles d'una emissora de ràdio.
- 12.- Surt amb els Picapiedra, i és molt animal.— Faci la millor defensa.
- 13.- Imprescindible al revés per la truita.— ... sanfaina.— La vocal.
- 14.- Un pal.— Oxidar molt.
- 15.- Ja n'hi ha prou de la vocal! — Coses que es fan.
- 16.- Sierpe.— Símbol de l'astat.— Animal que porta els genolls pelats pels seus pecats.
- 17.- Airar.— Surt, castellà.— Vocal fàcil d'escriure (molt fàcil).

Paco Fernández
5è. curs

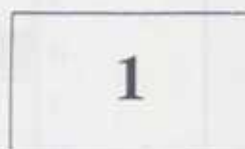
3.- Jeroglífics



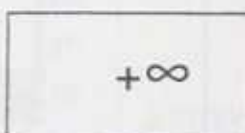
Tenim dues opcions: per bogeria la una...



¿Qué pintas?



¿Cuales han sido los diagnósticos?

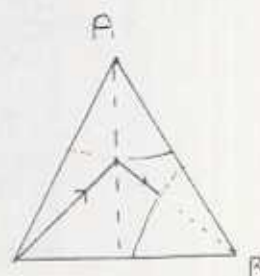
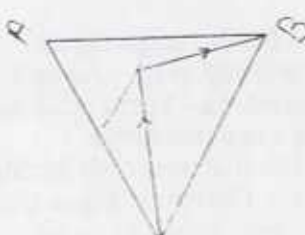
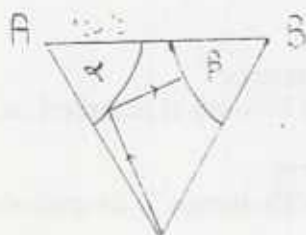


¿Qué estás escribiendo?

Dimas Cabré
2on. curs

5. Solucions dels problemes del número 13

1.- Tot camí ha de passar per les zones anomenades α i β , doncs s'ha d'arribar a veure en tots els racons. Anem a trobar el camí més curt que passi per α i β . Suposem que va primer fins a α . Un cop arribem a α , per anar a β el camí més curt és una recta que passi per B. Dels camins que vagin de la porta a α el més curt és una recta, i.e. volem optimitzar els camins de la forma que indica la fig.1, que és equivalent a optimitzar els camins del tipus de la fig.2. D'aquests camins el més curt



és el que té el *punt de gir* a l'alçada des de A, doncs en aquell punt la circumferència amb centre A és tangent a l'el·lipse de focus porta B, i tots els punts fora de l'el·lipse (tots els altres de la circumferència en especial) tenen una suma de distàncies als focus més grans que el punt de tangència. En resum, el camí més curt que permet veure els punts A i B és el que es pot observar al gràfic de la figura 3. Però a més a més, per aquest camí es veu tot el triangle; per tant és el camí desitjat.

2.- No ho és. Agafem una persona qualsevol; s'escriu amb 16 membres de tres temes. Hi haurà un tema sobre el qual s'escriurà amb 6 persones com a mínim. Aquestes 6 persones s'han d'escriure entre elles sobre els dos temes restants, perquè sinó tancarien el "triangle". Tornem a fer el raonament inicial: agafem una persona d'aquestes 6, que s'escriu amb 5 més sobre dos temes. Amb 3 s'escriu sobre el mateix. Aquestes 3 persones no tenen més remei que escriure's sobre el tercer tema doncs no poden escollir-ne cap altre sense tancar també un "triangle".

- 3.- a) Nadaré donde la Rosarito nada.
(Nada - redondel - aros - arito - nada)
b) Descartes - Fermat.

4.- Agafem un primer qualsevol α amb el seu valor $p(\alpha)$. Ara prenem β , un primer més gran que $p(\alpha)$, i tenim $p(\beta)$. Ara només cal expressar $p(\beta)$ en base β i els dígit ens donaran els coeficients del polinomi.

De fet $p(\alpha)$ només serveix per tenir una cota superior dels coeficients: tota la informació és a $p(\beta)$.

5.- Dracmes: 10503067; membres de la tribu: 118 menys en Lo-To-Ton-Go (que és mort). '17.

6.- Donat que a més de l'Integrana Jones hi ha 25 persones, cada persona es mulguifava amb 24 persones com a màxim (mai amb un mateix ni amb la seva parella). Tots es mulguifaven amb un nombre diferent de persones, és a dir es prenen tots els valors 0, 1, 2, 3, ..., 22, 23, 24. Ara el de 24 es mulguifava amb tothom menys amb la seva parella, que ha de ser per força el 0 que no es mulguifava amb ningú. El 23 ho feia amb tots menys amb el 0 i amb la seva parella; el 1 només es mulguifava amb el 24, i per tant és la parella del 23. Si continuem anirem emparellant des dels extrems i només queda sense parella el 12, que és la Dra. Writer, doncs l'Integrana òbviament no és a la llista. En general, si hi ha n parelles i les condicions són iguals, la Dra. Writer es mulguifava amb $n-1$ persones i també l'Integrana.

Quim Ortega
enviat especial de l'Aleph
al refugi d'Integrana Jones
2on. curs

Agressió!

El joc d'aquest número, com el de l'anterior, no es juga sobre un tauler pròpiament dit. Bé... no és que no n'hi hagi de tauler, però no sempre és el mateix; o sigui... vull dir que pot haver tauler però no cal... ja m'enteneu, oi?

Per a jugar a aquest joc que té un títol tan agressiu no calen tancs ni bazookes, només dos jugadors munts de sengles llapis de diferent color i un full de paper. El joc té tres fases, començant cada fase el mateix jugador que hagi començat la primera.

Primera fase: "On és el tauler?"

Precisament en això consisteix aquesta fase, en crear el tauler. Els jugadors s'aniran tornant dibuixant cadascú una regió adherida a, com a mínim, una de les anteriors (excepte, és clar, al dibuixar la primera) fins a haver dibuixat 20 regions. El resultat és un "mapa" que es pot guardar per altres partides. També es pot prescindir d'aquesta fase partint d'un mapa de 20 regions tret, per exemple, d'un atlas de la Patagònia. Una observació: el color de les regions no influeix per a res en el joc.

Segona fase: "A mi la Guàrdia!"

Ara hem de distribuir els nostres exèrcits (que per cert són 100 per jugador). Aquest cop sí que influeix el color, ja que serveix per distingir els exèrcits d'ambdós contrincants. Per torn, els jugadors escullen una regió lliure i situen el nombre d'exèrcits que desitgin sempre que en tinguin suficients (és a dir, si a la primera regió coloca 8, a la segona pot colocar com a màxim 92, encara que jo no ho aconsello gaire). Si abans d'assolir les 10 regions que li pertocuen algun dels participants ha distribuït ja els seus 100 exèrcits, deixarà a l'altre que acabi de disposar els seus (ocupant com a màxim 10 regions) i les zones buides no es consideraran en la:

Tercera fase: "Iaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa!"

Crec que el títol és força eloqüent; d'on creieu que sortia el nom del joc? Ja heu vist que els NOMBRES són part important de les regles. Oh! M'he descuidat de dir-vos una cosa: no tothom pot jugar a aquest joc, cal saber sumar i comparar números. Ho sento, sé que molts de vosaltres teníeu gran il·lusió en poder jugar, però el món és dels espavilats. De tota manera crec que a quart es dona, això: ja teniu motivació per la carrera. (Sé que ja esteu farts de les meves rucades, però bé he de guanyar-me la vida i l'article m'estava quedant massa curt. Les queixes al "Redactor-in-chief".)

Una jugada consisteix en escollir un territori de l'adversari (és a dir, que conté exèrcits de l'oponent) t.q. la suma dels exèrcits dels territoris propis colindants (no són colindants si només ténen un punt en comú) sigui superior al nombre d'exèrcits de la regió adversària escollida. Per exemple, si escollim un territori adversari amb dues regions pròpies colindants amb 7 i 4 exèrcits respectivament, i la regió adversària té 10 ó menys, agafarem el llapis amb tota la ràbia i tatxarem, tatxarem, tatxarem el territori de l'adversari, quedant eliminat del joc. Observació: els territoris enemics colindants no poden donar suport a la regió atacada. Quan un dels participants es queda sense jugada possible l'altre continua la seva tasca fins que també quedi sense poder jugar. El guanyador: el que tingui més territoris supervivents. OK?

Complements:

Propostes d'aquest número: com el joc d'avui té un caire topològic us explicaré un altre joc dins la mateixa línia del qual a ben segur no us costarà trobar l'infalible estratègia guanyadora: Partint de 3 ó altre nombre major imparell de punts aleatòriament distribuïts en un full de paper, una jugada consisteix en unir un parell de punts per un camí (línia) dibuixant un nou punt enmig del camí. Quan d'un punt surten tres camins (fixem-nos que quan creem un punt d'aquest ja surten dos camins) es rodeja amb un cercle per indicar que ja no es pot tornar a utilitzar. Perd qui no pot jugar.

Sabeu el Teorema dels Quatre Colors? Encara no sé si hi ha alguna demostració acceptada, però per trenta-i-no-sé-quantas regions només amb quatre colors pot pintar-se tot mapa sense que dues regions colindants tinguin el mateix color. Una cosa és que sigui possible, però no és gens fàcil. Per dos jugadors: agafeu un mapa d'unes trenta regions i 4 llapis de diferent color. Aneu-vos tornant pintant de qualsevol color qualsevol regió sense pintar. No val parlar. Si aconsegiu pintar tot el mapa de manera que dues regions veïnes tinguin sempre diferent color guanyeu els dos. Sinó no.

Macro-Agressió: amb el mapa de les províncies espanyoles o els estats americans podeu fer una macro-partida contant cada jugador amb 250 exèrcits, si us sap a poc agafeu els dos-cents-i-"pico" estats del món, o totes les províncies d'Europa...

Si us dona per filosofar podeu estudiar mapes predeterminats, o inclús jugar repetidament la tercera fase amb la mateixa disposició d'exèrcits, o buscar estratègies en mapes de menys regions.

Si voleu treure un "wargame" de l'Agressió feu-vos amb un mapa apropiat en primer lloc. A l'hora d'eliminar territoris ambdós jugadors tiren un dau i afegeixen el resultat al seu número d'exèrcits. Així no és segura l'eliminació del territori adversari i es pot atacar un territori enemic estant en inferioritat numèrica. En cas d'empat (com a tot "wargame") guanya el defensor.

Opció: Més de dos jugadors, pactes satànics entre ells (que no necessàriament s'han de respectar; de fet jo eliminaria el "necessàriament"). Fer unes cartes d'objectius consistint en el nom d'un jugador i distribuir-les a l'atzar: si et toca la carta amb el nom "Pep", l'objectiu és eliminar en "Pep". Puntuació: territoris supervivents propis restant els territoris supervivents de, en aquest cas, en "Pep". Inclús si voleu millorar més el joc podeu desfer-vos d'ell i comprar-ne un altre de millor.

Mancala: No hem pogut donar abast als programes d'ordinador que juguen al Mancala, per tant no els publicarem tots, només un que sembla que funciona i tot. Agrair a Jaume Franch que va solucionar el problema proposat de com tornar a la situació de partida jugant a l'Awari: és impossible. Tota jugada deixa buit un forat, per omplir-lo amb 4 fitxes la mateixa jugada caldria que aquest forat donés 4 voltes completes, és a dir, contingués les 48 pedres. Situació impossible (sinó, no ho seria el problema) perquè per evitar que a l'anterior jugada (que deuria omplir el forat amb les 48 pedretes) hagués quedat un "rastre" de fitxes del forat jugat al que s'ha d'omplir s'hauria de jugar des del forat del costat una sola pedreta, que per cert hauria d'estar al cantó contrari per evitar que el mateix jugador hagués de jugar dos cops. Segons la notació emprada a l'anterior número, caldria una pedreta a f i la resta a A. Ara digueu-me, quina ha estat la darrera jugada abans d'aquesta situació sabent que l'ha haguda de fer el jugador del costat ABCDEF?

A continuació us reproduïm la carta que hem rebut del Jordi Salvat, amb el llistat del seu programa de Mancala i alguns exemples de partides:

«Aquest programa juga al Mancala estudiant l'arbre primer en profunditat, propagant el valor de les jugades per minimax i podant (no gaire) l'arbre segons el mètode $\alpha\beta$ (alfa-beta), mètode de poda que assegura el mateix resultat que si estudies l'arbre sencer (*).

La profunditat de la búsqueda és indicada per l'usuari. No recomano l'us de profunditats superiors a set o vuit (caldria tenir força paciència).

La funció d'avaluació utilitzada és la més simple possible: només té en compte el nombre de fitxes capturades. Animo al lector a suggerir-hi millores. Aquestes millores també podrien ser emprades per a ordenar les jugades de "millor" a "pitjor" abans d'estudiar-les resseguint l'arbre de joc, millorant notablement l'eficiència de la poda $\alpha\beta$.

El programa no reconeix les situacions cícliques que forcen el final del joc quan encara queden fitxes al tauler. M'agradaria rebre suggeriments sobre com reconèixer aquestes situacions d'una manera senzilla.

El programa podria estar escrit en Basic, inclús en Fortran, però resultaria francament difícil de llegir. Jo he escollit el Pascal perquè de tots els llenguatges que permeten definir una funció recurrentment (el Fortran i el Basic no ho permeten, el PL-1, per exemple, sí), és el que té la sintaxi i la semàntica més simples, de manera que qualsevol que conegui la llengua anglesa o sàpiga una mica d'informàtica el pot entendre sense massa esforç. Si no és així, jo mateix us hi puc donar un cop de mà.

Per als qui vulguin picar i fer funcionar el programa, diré que he procurat escriure'l en un Pascal força standart, de manera que pugui córrer en gairebé qualsevol ordinador que disposi d'un compilador o intèrpret d'aquest llenguatge. Si desitgeu obtenir el programa (font i/o objecte) en disquetes format MS-DOS (per IBM-PC o compatible), poseu-vos en contacte amb mi.

(*) De llibres sobre aquests temes (estudi d'arbres de joc, minimax, poda $\alpha\beta$, etc...) no n'he trobat a la biblioteca de la facultat. Qui hi estigui interessat, que provi a la facultat d'informàtica o que em busqui. Amb molt de gust li explicaré el poc que en sé.

Jordi Salvat
Barcelona, 23 d'Abril de 1988


```

program Mancala; { Jordi Salvat, abril 1988 }

{ El tauler es representa per un vector de 12 enters, amb índexs de 1 a 12.
  Les posicions 1..6 són les del jugador humà, 7..12 són les de la màquina: }

type Objecte_artistic_folkloric=array [1..12] of integer;

{ Funció que fa una jugada i determina si es pela l'adversari. A més a més posa
  el nombre de pedres capturades en la jugada a la variable 'Capturades': }

function FerJugada(var Tauler: Objecte_artistic_folkloric;
                  Jugada: Integer; { entre 1 i 12 }
                  var Capturades: Integer
                  ): Boolean;
var
    Ma: Integer; { Nombre de fitxes a la mà del jugador }
    PosMa: Integer; { Posició de la mà del jugador }
    Zona: Integer; { Posició de la zona de l'oponent (1 o 7) }
    Final: Integer; { Posició on s'ha dipositat la última fitxa }
    Pelat: Boolean;
begin
    if Jugada<=6 then Zona:=7 else Zona:=1; { Determinar la zona de l'oponent }
    PosMa:=Jugada; { Posar la mà sobre el forat indicat }
    Ma:=Tauler[Jugada]; Tauler[Jugada]:=0; { Agafar les fitxes }
    while Ma>0 do begin { Mentre tinguem fitxes a la mà... }
        PosMa:=PosMa+1; if PosMa>12 then PosMa:=1; { passar al següent forat... }
        Ma:=Ma-1; Tauler[PosMa]:=Tauler[PosMa]+1; { i deixar-hi una fitxa }
    end;
    Capturades:= 0; { Iniciar el compte de fitxes capturades }
    Final:=PosMa; { Cal recordar on hem acabat }
    { Capturem primer les que estan abans del forat on hem anat a parar: }
    while (PosMa in [Zona..Zona+5]) and { mentre estem a la zona contrària... }
        (Tauler[PosMa] in [2,3]) do begin { i hi hagi dues o tres fitxes... }
        Capturades:=Capturades+Tauler[PosMa]; Tauler[PosMa]:=0; { capturem... }
        PosMa:=PosMa-1; { i passem al forat anterior }
    end;
    { I ara les que hi hagi després: }
    PosMa:= Final; { La posició on havíem acabat }
    if (Tauler[PosMa]=0) then begin { Si aquí hem menjat fitxes... }
        PosMa:= PosMa+1; { passar al forat següent }
        while (PosMa in [Zona..Zona+5]) and { I capturar com abans }
            (Tauler[PosMa] in [2,3]) begin
            Capturades:=Capturades+Tauler[PosMa]; Tauler[PosMa]:=0;
            PosMa:=PosMa+1;
        end;
    end;
    { Ara comprovem si hem deixat pelat a l'adversari: }
    Pelat:= TRUE; { Si mentre no es demostrí el contrari }
    for PosMa:= Zona to Zona+5 do
        if Tauler[PosMa]<>0 then Pelat:=FALSE; { En aquest cas no }
    if Pelat then { Si l'hem deixat pelat, també ens quedem les nostres fitxes }
        for PosMa:= 1 to 12 do begin
            Capturades:= Capturades+Tauler[PosMa];
            Tauler[PosMa]:=0;
        end;
    FerJugada:= Pelat; { Valor tornat per la funció }
end; { FerJugada }

```



```

( Aquesta funció és el cor del programa. Donada una posició i un jugador,
  busca la 'millor' jugada estudiant l'arbre de joc fins a la profunditat
  indicada. Torna el valor de la 'millor' jugada i posa la jugada a la variable
  'MillorJugada'. El valor d'una jugada és el nombre de fitxes capturades menys
  el valor de la resposta contrària. )

function Valor(Tauler: Objecte_artistic_folkloric;
  Profunditat: Integer;
  Jugador: Integer;
  Alfa: Integer;
  var MillorJugada: Integer
): Integer;
  ( Profunditat de l'estudi :
    ( 1: Màquina. -1: Home :
    ( Aquest és l'α de la poda αβ :

var
  Beta: Integer; ( β de αβ. Valor de la millor jugada entre les ja estudiades )
  Zona: Integer; ( Posició de la zona del jugador :
  Tauler2: Objecte_artistic_folkloric;
  Jugada: Integer; ( Jugada que estem estudiant :
  Capturades: Integer; ( Nombre de fitxes capturades al fer-la )
  Val: Integer; ( Valor d'aquesta jugada :
  X: Integer;

begin
  if (Jugador=-1) then Zona:=1 else Zona:=7; ( Determinar la zona del jugador )
  MillorJugada:= 0; ( De moment no hi ha millor jugada :
  Beta:=-MaxInt; ( MaxInt és l'"infinít" )
  ( Calcular el valor de totes les jugades (si hi ha fitxes al forat): )
  for Jugada:=Zona to Zona+5 do if (Tauler[Jugada]<>0) then begin
    Tauler2:=Tauler;
    if not FerJugada(Tauler2,Jugada,Capturades) then begin (Si no el pelo..)
      if Profunditat=0 then begin
        ( El valor és el nombre de fitxes capturades: )
        Val:= Capturades;
      end else begin
        ( El valor és el nombre de fitxes capturades menys
          el valor de la resposta del contrari: )
        Val:=Capturades-Valor(Tauler2,Profunditat-1,-Jugador,-Beta,X);
      end;
      if (Val>Beta) then begin
        Beta:=Val;
        MillorJugada:= Jugada;
        if Beta>Alfa then begin ( Si la jugada és massa bona, deixar-ho )
          Valor:= Beta; ( Tornar β com a valor de la jugada )
          exit;
        end;
      end;
    end;
  end;
  if (MillorJugada=0) then begin ( Si, faci el que faci, el deixa 'pelat'... )
    ( En aquest cas la 'millor' jugada és qualsevol on hi hagi fitxes: )
    for Jugada:= Zona to Zona+5 do
      if Tauler[Jugada]<>0 then MillorJugada:= Jugada;
    ( I el valor és el total de fitxes que hi hagi al tauler: )
    Beta:= 0;
    for Jugada:=1 to 12 do Beta:=Beta+Tauler[Jugada];
  end;
  Valor:= Beta; ( El valor tornat per la funció és el de la millor jugada )
end;

```



```
{ Ja només falten les trivialitats: }

var
    Tauler: Objecte_artistic_folkloric;
    CapturesHome, CapturesMaquina, NivellDeJoc: Integer;
    Acabar: Boolean;
    { Les variables globals: }
    { TRUE si la partida s'ha acabat. }

procedure EnsenyarTauler;
var
    i: Integer;
begin
    WriteLn(' F E D C B A Capturades MàQUINA');
    WriteLn(' -- -- -- -- -- ', CapturesMaquina:2);
    for i:=12 downto 7 do Write(Tauler[i]:3); WriteLn;
    for i:= 1 to 6 do Write(Tauler[i]:3); WriteLn;
    WriteLn(' -- -- -- -- -- ', CapturesHome:2);
    WriteLn(' a b c d e f HOME');
end;

procedure JugarHome;
var
    c: Char;
    Jugada, Jug3, Capturades, Cap3: Integer;
    Tauler2, Tauler3: Objecte_artistic_folkloric;
    Legal: Boolean;
begin
    repeat
        repeat
            WriteLn;
            Write('Entra la teva jugada ("p" per a plegar):');
            c:= ' ';
            ReadLn(c);
        until c in ['a'..'f', 'p'];
        if c='p' then begin
            Acabar:= true;
            exit;
        end else begin
            Jugada:=ord(c)-ord('a')+1;
            Legal:= TRUE; { La jugada és legal mentre no es demostrï el contrari }
            if Tauler[Jugada]=0 then Legal:= FALSE
            else begin
                Tauler2:= Tauler;
                if FerJugada(Tauler2, Jugada, Capturades) then begin { Si el pelo... }
                    { la jugada serà ilegal si n'hi ha alguna que no ho faci: }
                    for Jug3:=1 to 6 do begin
                        Tauler3:= Tauler;
                        if not FerJugada(Tauler3, Jug3, Cap3) then Legal:= FALSE;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    until Legal;
    { La jugada és legal. Recuperar-ne el resultat: }
    Tauler:= Tauler2;
    CapturesHome:= CapturesHome+Capturades;
    WriteLn;
end;
```



```

procedure JugarMaquina(Jugador: Integer);
var
    Jugada,X,Capturades: Integer;
begin
    X:= Valor(Tauler,NivellDeJoc,Jugador,MaxInt,Jugada); { Determinar la jugada }
    Acabar:= FerJugada(Tauler,Jugada,Capturades);    { Acabar si el deixa pelat }
    if (Jugador>0) then begin
        CapturesMaquina:= CapturesMaquina+Capturades;
        WriteLn('La meva jugada és: ',chr(ord('A')+Jugada-7));
    end else begin
        CapturesHome:= CapturesHome+Capturades;
        WriteLn('La meva jugada és: ',chr(ord('a')+Jugada-1));
    end;
    WriteLn;
end;

{ I finalment el programa principal: }
var
    i,Jugador: Integer;
    c: Char;
begin
    { Inicialitzar el tauler: }
    for i:=1 to 12 do Tauler[i]:= 4;
    CapturesHome:= 0;
    CapturesMaquina:= 0;
    repeat
        Write('Qui vols que comenci (Màquina/Home/X)?');
        ReadLn(c);
        WriteLn;
    until c in ['m','M','h','H','x','X'];
    repeat
        Write('Nivell de joc (1 a 8):');
        ReadLn(NivellDeJoc);
        WriteLn;
    until NivellDeJoc in [1..8];
    if c in ['m','M'] then Jugador:=1 else Jugador:= -1;
    Acabar:= false;
    while not Acabar do begin
        if not (c in ['x','X']) then EnsenyarTauler;
        if (Jugador>0) or (c in ['x','X']) then JugarMaquina(Jugador)
            else JugarHome;
        Jugador:= -Jugador;
    end;
    WriteLn;
    EnsenyarTauler;
end.

```


PARTIDES. Per a la notació, observeu el format del tauler al llistat del programa (pàg.81).

MÀQUINA v. MÀQUINA

Nivell 4. a A c A d A f A b C f E e A a C b D c E b F d A b C e B c B d D e A f C f F a D
b F a E a F e

Resultat: Minúscules 27 - Majúscules 21

Nivell 5. a A e A b A e B b C a E a D a E c B b E a D b E e B d F c E a F a A e D f A e B
d A a B e D a F a E a F a C e F f B b A c B f C e D d B f A e B f E a C b D c F a
A b B c C d D e A f E [fi] a A b B c C d D e E f F a A b B ...

Resultat: partida nul.la

Nivell 6. a A e D a A b E a F a A e B d E b D d E c D a A b C b A c F b A c E a D b F a E
b F a B d A c B f F c E e B b D c A d E e A f F a A b C c B d C f A e A f F a D
a E a F a A b B c C d D e E a F f A a B b C c D d E e F f [fi] A a B b C c D d E
e F f...

Resultat: partida nul.la

Nivell 7. a A f A b A c A d A e A a B a A c B d E a F c C a C b B e D d C e F c D d B f E
f A f F e A f F e A f E

Resultat: Minúscules 23 - Majúscules 25.»

Al proper númeo us oferirem noves partides—comentades—d'enfrontaments de l'home contra la màquina.

Alex Sierra
Campió mundial d'Agressió
(trenta set cops enviat a la presó)
2on. curs

ESTÀ FART DE LA SECCIÓ DE JOCS DE TAULER ?

Compri Boardgames of Cochinchina del Dr. Alexander Hutchinson, on trobarà jocs veritables de tauler amb regles senzilles i concises, sense desencertats comentaris poca-soltes ni suggerències tan infantiloides. Si l'adquireix abans d'Octubre li adjuntem dues piles per a qualsevol de les calculadores gamma A.H.!!!

SE LI CAUEN LES FUNCIONS? Amb la loció Derivposit del Dr. Alexander Hutchinson, mai més! I ara, si vol recuperar el terreny perdut, el nou Derivestrictposit!!! I al extraordinari preu de... $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n$!!! Correu abans de que s'esgoti!!! Si la compra abans de Juliol li regalem una calculadora que resta infinits!

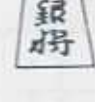
Shogi: el gran desconegut.

Dedicat a Honorino Mielgo
i a Albert Trepac.

Hi ha moltíssima gent que juga a escacs. Aquí a Occident és el rei dels jocs, i a Rússia és l'esport nacional, on fins i tot s'ensenya a les escoles. Si parreu amb un jugador de go us dirà: "Igual que aquí els escacs, a l'Orient Llunyà, el joc més popular és el go, amb Japó fent el paper de Rússia". Però al Japó el go té un competidor fort, que aquí és gairebé desconegut: el shogi o escacs japonesos.

L'origen del shogi és francament antic, es diu que va neixer l'any 1122 a.C., i fou extremadament important i popular a partir del segle XVI, quan el primer "shogun" de la família Tokugawa va crear el "shogidokoro" (oficina del shogi), un lloc on es reunien els millors jugadors, comandats pel Meijin, el jugador més fort. Un dels primers objectius del Shogidokoro va ésser unificar les regles del shogi, que al llarg dels segles s'havien diversificat molt, donant lloc a multitud de variants.

El shogi es juga sobre un tauler de 9x9 quadrats, i la seva mecànica és l'habitual: els dos jugadors fan una jugada alternativament. Les fitxes de shogi són planes i es distingeixen pels dibuixos (els noms en japonès) que hi ha a cadascuna d'elles. Són les següents:

	En situació habitual	Coronat
Rei (K)		
Torre (R)		
Àfil (B)		
General d'or (G)		
General d'argent (S)		
Cavall (N)		
Llança (L)		
Peó (P)		

A efecte dels diagrames i de desenvolupar un mètode d'anotació de les jugades, les fitxes s'anomenen per la inicial anglesa, indicada entre parèntesi. Anem a estudiar-les una per una.

El rei és la peça més important. El seu moviment és exactament igual al del seu company dels escacs, un quadre en cada direcció.

Els principals companys del rei són els generals. El seu moviment és semblant al del rei, però no en totes direccions. Al general d'or se li prohibeix moure en diagonal cap al darrera, i el d'argent no pot moure's als costats ni retrocedir en direcció vertical; només pot retrocedir en diagonal. El seu moviment és, en certa manera, complementari al del general d'or.

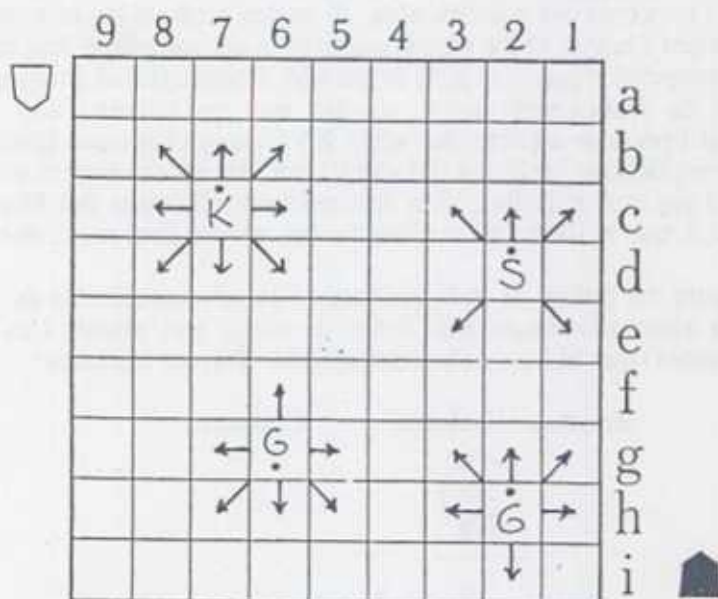


Diagrama 1

moviment del rei i els generals

Fixeu-vos que algunes lletres porten un punt a dalt i d'altres a baix. Les que el porten a dalt són les negres i tenen direcció cap amunt. Les del punt a baix són blanques i mouen en sentit descendent.

El cavall mou com el cavall dels escacs, però només cap al davant. Només té dues possibilitats. Aquesta aparent restricció no ho és pas si tenim en compte els "drops", que veurem més endavant.

La llança mou al front, tantes caselles com vulgui, no pot saltar per sobre de peces pròpies ni alienes i tampoc pot retrocedir. El seu moviment sembla també molt restringit, però no ho és.

El peó mou també cap al front, però només un quadre i sempre un quadre. Captura altres peces també cap al front i no retrocedeix.

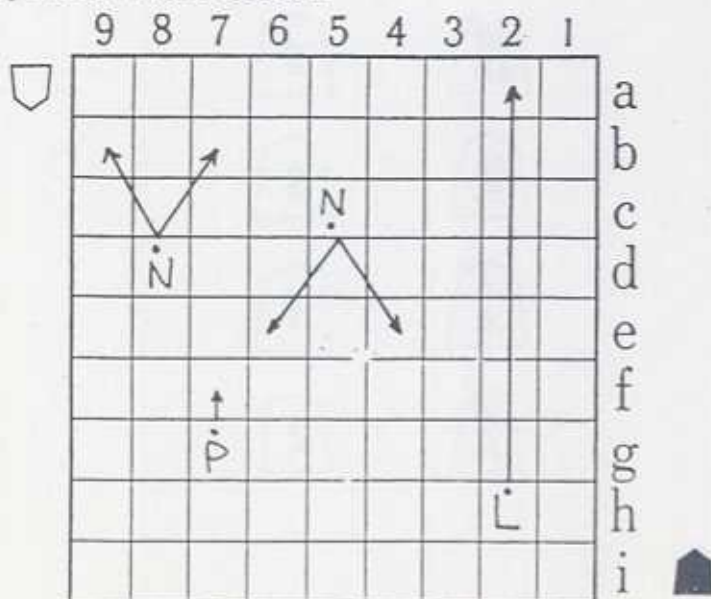


diagrama 2

moviment del cavall, la llança i el peó.

La torre i l'àlfil mouen anàlogament als seus col·legues dels escacs.
Les captures es realitzen col·locant la peça que captura en el lloc de la capturada.

La posició inicial :



Diagrama 3.

La coronació és un dels factors que fa interessant el joc. La zona de coronació està formada per les tres primeres files del contrari. O sigui, el negre corona a les files a,b,c i el blanc a g,h,i. Una peça corona quan fa un moviment que entra a la zona de coronació, un moviment tot dintre la zona o bé un que surt d'ella. El fet que es pugui coronar sortint de la zona de coronació és important degut als "drops" i a que la coronació és voluntària, i de fet són molts els casos en que coronar no és bo. Tan sols és obligatori coronar quan un peó o una llança arriben a la última fila o bé un cavall a les dues últimes, doncs si no ho fessin no tindrien moviment possible. El rei i el general d'or no coronen. Les peces que coronen tenen al dors el dibuix corresponent (vid. Fig.1) i per coronar només s'ha de tombar la fitxa.

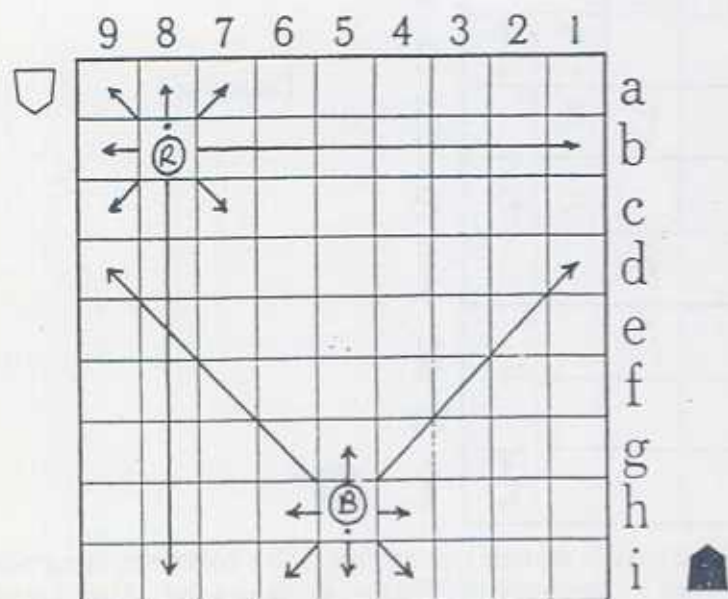


Diagrama 4

Moviment de la torre i l'àlfil coronats.

Com mouen les fitxes coronades? Molt fàcil. Les peces menors (peó, cavall, llança i general d'argent) perden la seva qualitat i totes passen a moure com un general d'or. Això és un gran avantatge en el cas d'un peó, per exemple, però no tant si és un general d'argent (que pot retrocedir molt més àgilment que un d'or) o bé un cavall (degut a la seva capacitat d'enforquillar dues fitxes). Per això la coronació no és obligatoria.

La torre no perd el seu moviment en coronar, i hi afegeix moviment en diagonal, però només d'un quadre de llargada. I l'àlfil anàlogament, afegeix un quadre en sentits vertical i horitzontal.

El "drop" és el factor que dona més vivesa i versatilitat al joc, que el fa diferir dels escacs i que li dona més complicació encara que aquest últim. Quan un jugador captura una peça, aquesta no desapareix. El jugador que l'ha capturat se la guarda, i pot tornar a posar-la al tauler en qualsevol moment, en lloc de fer una jugada pròpia. Això dona la mobilitat a les peces que no entenen, com el cavall o la llança. Una peça sempre es "dropa" en forma normal, mai coronada, encara que es posi a la zona de coronació. Ha de moure's perquè la coronació sigui efectiva.

Està prohibit "dropar":

- Un peó o una llança a l'última fila, així com un cavall a les dues últimes.
- Un peó en una columna on n'hi hagi un altre, a efecte d'impedir que es produeixin peons doblats. Sí que poden conviure, però, a la mateixa columna, un peó i un peó coronat i dos peons coronats.
- Un peó en un lloc on doni mat al rei contrari (no em pregunteu perquè). Una altra peça sí que es pot "dropar" donant mat.

Tot jugador té dret a saber en qualsevol moment les fitxes que l'altre té a la mà, a efecte de prevenir els "drops".

L'objectiu és donar mat al rei contrari. La "regeneració" produïda pels "drops" fan que les combinacions i sacrificis estiguin a l'ordre del dia. No poden produir-se aquells finals de partida llargs i tediosos amb un peó de més que hi ha en els escacs. Aquí tot és zas! atac, combinació i mat. Les taules només es produeixen per repetició de jugades, molt rarament, o bé per una situació especial anomenada "impasse", extremadament rara i que és molt complicada per explicar-la aquí.

Exemple: els dos reis blancs següents estan en mat:

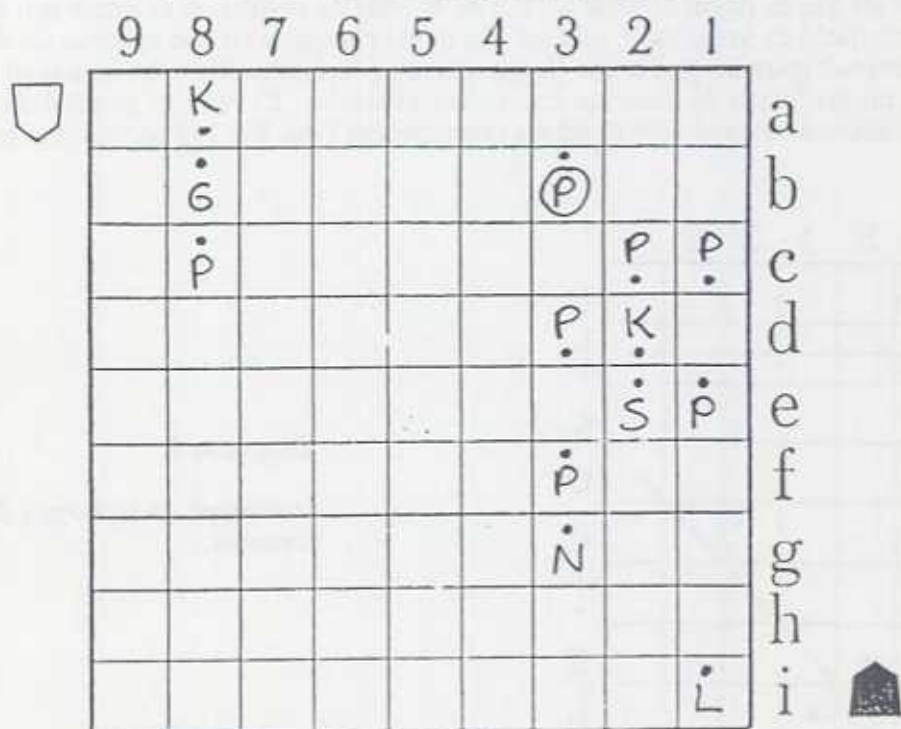


Diagrama 5

Per anotar una jugada es segueix el mateix mètode que en escacs: les columnes es numeren de dreta a esquerra; és japonès) i les files s'expressen per lletres, de la a a la i. Una jugada que consisteixi en moure un general d'argent a 2g és S-2g, o bé si pot haver-hi confusió, podem escriure

N7f-6d, si tenim un altre cavall a 5f. Recordeu que podeu tenir fins a quatre cavalls propis en el tauler. Els "drops" es posen amb un asterisc: G*2d, i les captures amb una aspa: Lx1c. Quan una peça corona una creu: R-7b+, i si no corona quan pot fer-ho: R-7b=. Una peça coronada s'expressa també amb una creu: +B-6h. Ja tenim els ingredients per poder fer alguns exemples.

El negre juga i dona mat en dues jugades (diagrames 6 i 7):

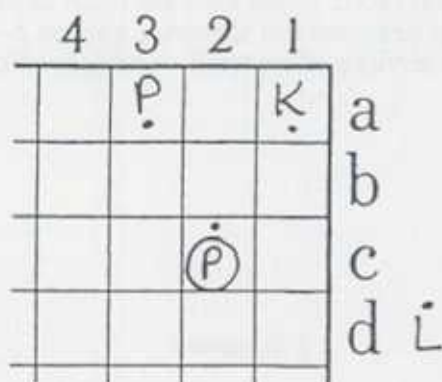


Diagrama 6

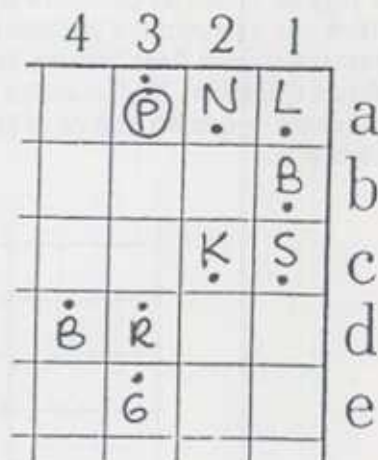


Diagrama 7

(Diagrama 6) La solució és ben senzilla: 1.L*1c,K-2a
2.L-1b+,mat.

(Diagrama 7) La solució:
1.B-2b+,Sx2b
(si Kx2b,R-3b+). I aleshores
2.G-2d és mat.

Ja per finalitzar, us deixo dos problemes per a que practiqueu:

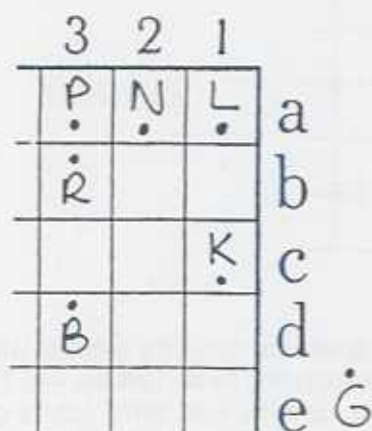


Diagrama 8

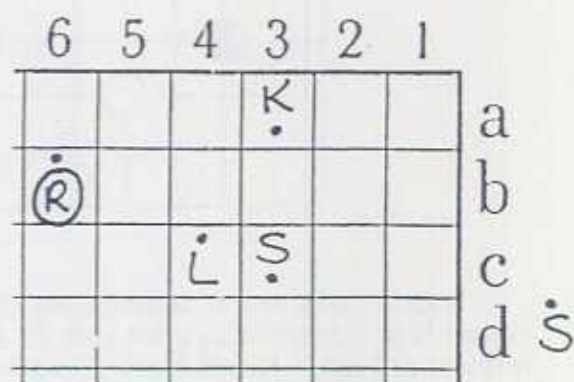


Diagrama 9

P. Gush - 20 kyu

Tots els exemples són del llibre FAIRBAIRN, J. *Shogi for beginners*, Tokyo. The Ishi Press, 1984.

Tots aquells que vulgueu practicar i iniciar-vos en el Shogi poseu-vos en contacte amb la redacció de l'Aleph i us n'informaran.

El Go en xifres.

El go és un joc vell, d'uns 3 ó 4 mil anys. La primera partida de la que es guarda memòria és, però, del segle II, xinesa.

Es juga en un tauler de 19×19 interseccions (38 línies), és a dir, 361 interseccions, i les mateixes possibilitats per a la primera jugada. Essent aquests—més o menys— els dies de l'any (a Orient, per cert, s'utilitzava molt l'any llunar), la literatura n'ha tret profit. Quan hom comença la partida, té 361 possibilitats diferents, 32 d'aquestes són standard—si descomptem simetries queden 5— i n'hi ha 1 més—al centre— que no està gaire estudiada. També he vist professionals començar a llocs molt més inversemblants.

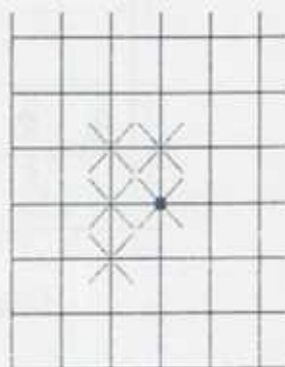


Diagrama 1

Essent el normal començar pels racons, la lluita en aquesta zona està molt estudiada, existint uns quants milers de Josekis, que són com les obertures dels escacs però localitzades en un racó. El "Dictionary of Basic Josekis" d'en Yoshio Ishida recull prop d'un miler, dedicant 570 diagrames a les continuacions desde la posició del diagrama 2, un centenar de pàgines de les més de 800 que tenen els 3 volums de l'obra, la meitat de la qual són les continuacions a partir d'una jugada en el 3-4.

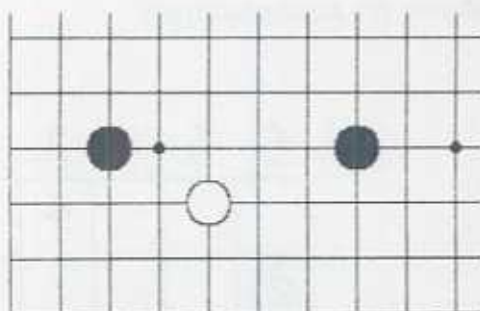


Diagrama 2

Naturalment, essent aquestes seqüències locals, cal tenir en compte abans de triar una altre variant la posició global, i sobre això, dit fuseki o apertura, hi ha Teories—al 1930, Go Seigen, xinès resident al Japó, i Kitani Minoru (japonès), van elaborar una nova teoria que s'ha imposat amb força— i algunes posicions estan bastant estudiades, no totes, però, doncs només limitant-se a les jugades standard del diagrama 1 i suposant que cada jugador ocupa un racó buit amb les primeres 4 jugades—que és molt suposar, si bé també és molt freqüent—. A mi em surten 1056 posicions diferents si cada jugador ocupa racons oposats en diagonal i 2080 si els racons són al mateix costat (fuseki en paral·lel); en total 3136. És clar que algunes d'aquestes posicions són considerades per alguns professionals com favorables a algú: Takeo Kajiware, un dels teòrics que hi ha ara, critica la segona jugada d'una partida, així com la resposta de negre, ocupant un racó buit en comptes d'atacar immediatament perquè sols treia un 90% del que la posició donava de sí; però en aquests assumptes no tots els professionals estan d'acord. Citant una frase apareguda al *Go World* nº 46 ó 47: "Hi han professionals que els hi agrada envair al 3-3 i n'hi ha que els agrada ser-hi envaïts. Per exemple, Cho

Chikun i Takemiya, que en el 85 eren els jugadors més forts sens dubte, i que continuen entre els 5 primers del món. Si ells no es posen d'acord..."

Al càlcul sobre les primeres 4 jugades (2b.,2n.) hem descomptat les posicions simètriques, però, un cop fetes les primeres jugades, la simetria desapareix i aviat tenim més de 300 jugades possibles. Això fa que el nombre de partides possibles—que no raonables, que també—sigui aclaparadora: la primera estimació coneguda és del segle VIII d.C., feta per un tal I-Hsing: 10^{208} configuracions diferents possibles; per a un tauler de 5×5 va calcular 847.288.609.443 configuracions. Segons Needham, 1970, són 10^{172} . Naturalment, "configuracions" no és equivalent a "partida".

Pel que fa a partides possibles, en un tauler de 3×1 n'hi han 907 (sense descomptar les simètriques)—en Jordi Salvat i el Dimas Cabré han fet un programa que les ha jugades totes!—, pel de 19×19 tinc una estimació de 10^{761} feta per Zobrist el 1969 contra 10^{100} partides raonables(?!); per als escacs s'han calculat 10^{120} i 10^{35} respectivament (Shannon, 1950). D'escacs no hi entenc gaire, però aquestes xifres pel go són certament altre cosa que una grollera fita inferior: Heine, al 1979, dona $2 \cdot 10^{88}$ partides possibles en un tauler de 5×5 i dona, citant a Schippers 3^{361} elevat a 3^{361} , aproximadament igual a 10 elevat a 10^{172} .

Pel què fa a les restriccions, les partides "raonables", les deixa de l'ordre de 10^{450} .

Com es calcula tot això?

Primer cal una estimació del número de jugades que calen per acabar una partida; si agafem el recull anual de partides de professionals recollides per la federació japonesa tindreu unes 300 partides raonables al més alt nivell: surt un promig de 265 jugades, a les que cal sumar unes 20, doncs a les partides anotades no hi consta l'omplir els "dame" o punts buits entre territoris on no té importància qui jugui. Naturalment no hem comptat les partides on algú abandona, aproximadament la meitat. Cal fer notar que les partides de menys nivell solen tenir de promig més jugades.

Bé, tenim 285 jugades (142 de blanques i 142 de negres) i a cada jugada, quants n'hi havia per a triar? $(361+361-285)/2=218$.

Això ens dona 218^{285} com a xifra per a començar. Ara bé, 285 és un nombre massa petit per a les partides possibles i 218 massa gros si raonable vol dir raonablement raonable. Quant pot durar una partida, doncs?

Per arribar a les 500 jugades no caldria fer gaires disbarats (veure diagrama 3, que mostra una partida de professionals de 361 jugades). És possible que això baixés el promig de possibilitats per jugada a ...100? Això ens donaria $100^{500} = 10^{1000}$ partides diferents. Simetries apart, caldria dividir per 8. I no tot!

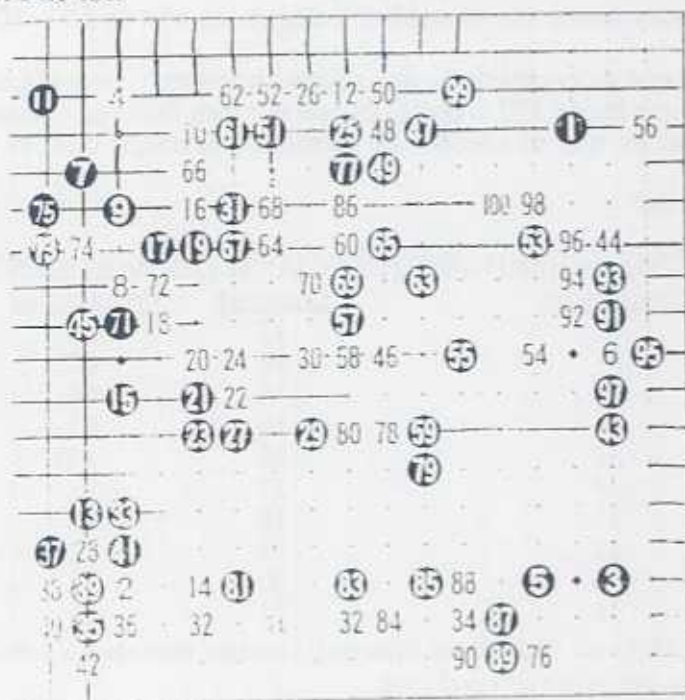


Diagrama 3a

Però si les partides han d'ésser totes, el promig es torna a pujar (es captura, l'altre torna a jugar al mateix lloc on ha perdut un grup, l'altre el torna a capturar...), posem 180, i les jugades totals

poden arribar a les 1000 sense problemes, i això ens donaria $180^{1000} = 1'8 \cdot 10^{2000}$...

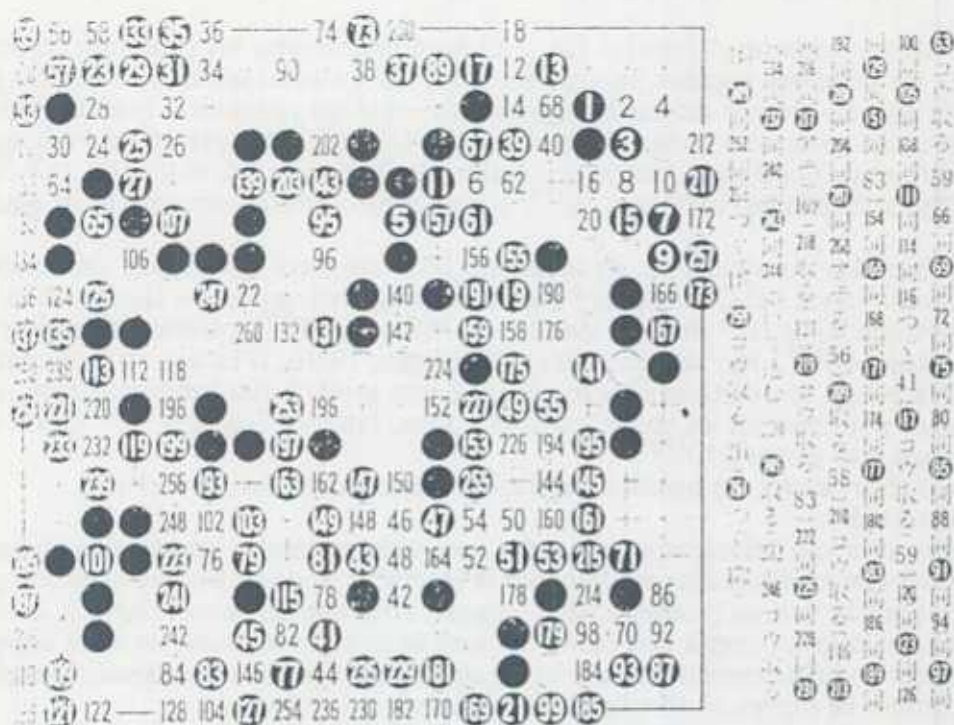


Diagrama 3b(*)

I tantmateix també hi han les partides de manys de 1000 jugades, i partides de més de 1000. 10 elevat a 10^{172} no sembla tant forassenyat com a fita superior, però no massa superior; potser la cosa sigui de l'ordre de 10 elevat a 10^{100} .

I les raonables? El promig raonable és 285, i les jugades raonables al nivell de 1-Dan amateur, un nivell més que raonable a Occident!, en una posició donada pot ser de 5—a cops 1, moltes vegades més de 10, tot i que ell mateix n'estalvia sols considerant 305, amb alguna no tant bona com moltes de les que deixa fora!

Ara $5^{285} = (10/2)^{285} = (10^{285})/(6'21 \cdot 10^{85}) = 10^{200}/6 \geq 10^{199}$.

Però les partides de 300 jugades també són raonables! I d'aquestes n'hi ha $5^{300} \approx 10^{214}$. I també les partides de 350...

L'estadística, però, fa pensar que en contra de lo que aquests nombres diuen, abundèn més les partides raonables de 270 jugades que les de 370, o potser és que són més fàcils de trobar?

No, certament hi ha un punt en que el nombre de partides possibles, d'on el de jugades, disminueix. Quin?

I si utilitzem una dada coneguda?

TAULA DE RELACIÓ LONGITUD-FREQÜÈNCIA DE LES PARTIDES 3x1

Longitud	Freqüències	Longitud	Freqüències
2	1	12	54
3	3	13	62
4	7	14	66
5	12	15	84
6	22	16	108
7	24	17	92
8	32	18	96
9	42	19	72
10	36	20	32
11	38	21	24

(*) Aquesta és una partida de l'any 1985 entre Otake Hideo (blanques), considerat entre els deu millors jugadors del món, i O Meien (negres), una jova promesa que guanyà d'un punt i mig.

Per a la interpretació dels gràfics del diagrama 3b, $\square$ = ídem; una fitxa amb un $n^{\circ}(N)$, uns quants caràcters sino-japonesos i un $n^{\circ}(X)$ entre parèntesis vol dir que la jugada N es fa a la mateixa intersecció que a la X. Els caràcters fan explícit si connecta, captura o què.

Amb partides de $3 \times 1 = 3$ interseccions, tenim 907 partides, veieu a dalt les freqüències relatives pel que fa al número de jugades.

El promig és de $12'7$. Curiosament, no és estrictament creixent fins arribar al màxim ni decreixent fins arribar al mínim.

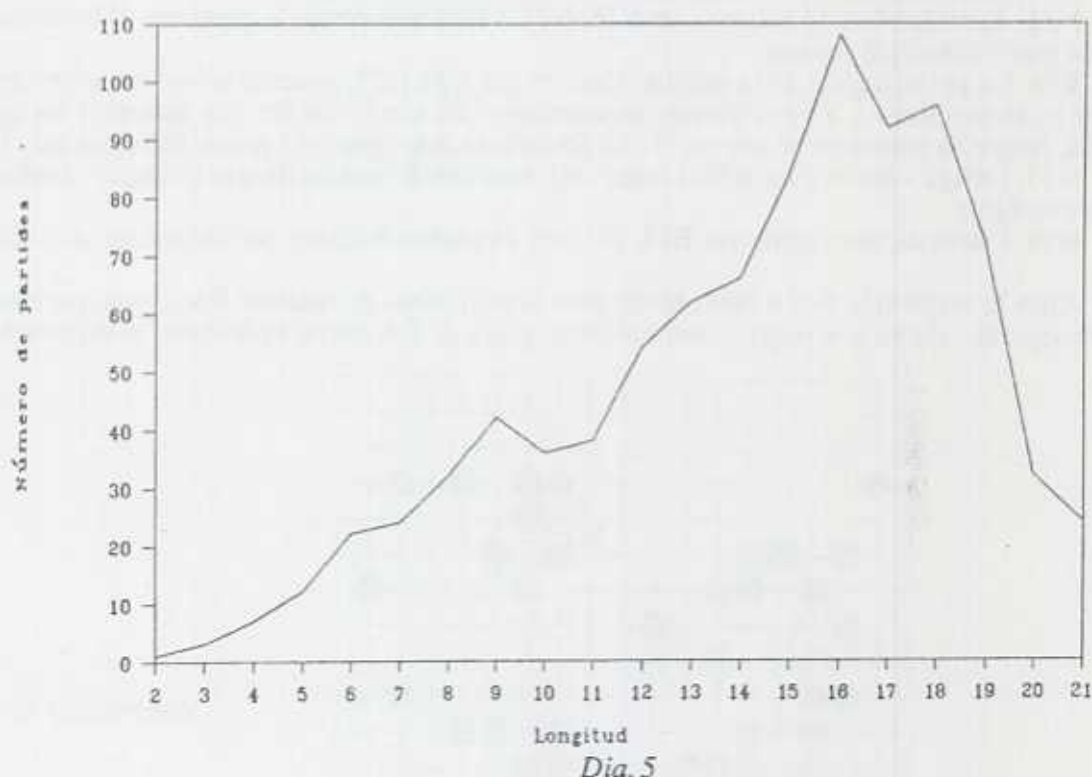
Cal tenir en compte que són partides jugades amb el reglament que permet més jugades possibles, en toleren com els xinesos, cosa que els japonesos no permeten, que algú passi i l'altre segueixi jugant.

Bé doncs, un promig de $1'5$ jugades possibles (a ull) i $12'7$ jugades per partida: $1'5^{12'7} = 172'324 < < < 907(!)$.

Tenint en compte que existeix una única partida raonable (negre juga enmig, blanc ha de passar i negre passa i guanya per dos punts); la proporció és notable.

No crec però, que aquestes dades tinguin cap valor de cara a les extrapolacions, doncs manquen dades sobre el de 19×19 ó altres de més petits (a partir de 5×5) on l'estratègia guanyadora és també prou trivial) per a estendre els càlculs.

Longituds de les partides 3×1



Joan Pons I-Dan
3er. curs

Bibliografia:

- [1] Un llibre de Philip C. Jackson de 1979 sobre I.A. (Biblioteca d'Informàtica).
- [2] L'article de William Pinckard al *Go World* núm. 47 (Primavera 1987).
- [3] *Igo '85*, de la Federació Japonesa de Go.
- [4] L'article de Klaus Heine al II Congrés de Teoria del Go editat pel propi Heine (1979).
- [5] Resultats del programa que juga totes les partides de 3×1 d'en Jordi Salvat i Dimas Cabré (Dia.5).
- [6] Els meus càlculs per a configuracions standard (realment diferents) amb quatre pedres.

Comentant una partida.

Aquesta és una partida vella (*), però tanmateix el *fuseki* és prou interessant —a nivell d'errors d'estratègia— com perquè valgui la pena comentar-la:

N7. És el primer error, aquí cal fer una pinça. Gairebé diria que qualsevol jugada a la tercera o quarta línia i des de 8 fins a 9 és millor que la feta. B8 és la resposta simple i correcta a l'error de negre.

N9. Millor en A, ara li falta força i blanc, no sentint-se amenaçat, agafa un gran punt amb B10.

N11. Millor en B, atacant les blanques i agafant els punts del racó; després de B12 (excel·lent) les tres pedres blanques d'abaix són pel cap baix un 50% més eficients que les tres negres, doncs les dues blanques de la dreta no són en perill.

N15. Hauria d'atacar per l'altra banda, o bé jugar en B16 ó en C.

N21. Terrible! Si B16 estigués en N25, N21 a N23 fóra correcte, però ara, el forat que deixa és massa gran i blanc pot separar.

B26. La pitjor jugada de la partida. Quan negre juga N27, conecta les seves pedres que podrien haver estat dividides i, a punt d'error, massacrades. En canvi són les tres blanques les que queden inútils. Negre ha recuperat de cop tot el que portava de desavantatge i potser una mica més i tot.

N33. Obliga a blanc a fer B34, i blanc està molt i molt content de que l'obliguin a reforçar el seu grup més feble.

B36. Estranya, molt estranya; B16, per cert, es podria rescatar, però blanc no se n'adona.

Amb la seqüència fins a N49, blanc perd l'oportunitat de rescatar B16, cosa que mantindria a negre separat, i deixa que negre connecti els seus grups de l'esquerra, esdevenint ja inatacable.

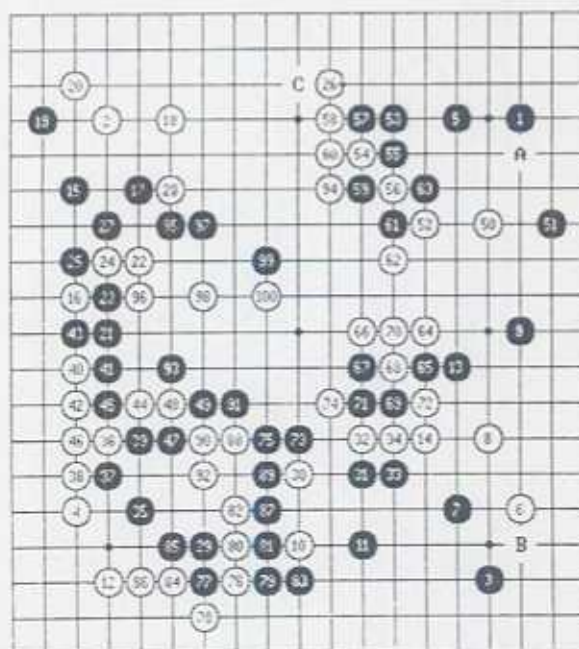


Diagrama 1 (1-100)

B50. Potser arriscada.

N51. Gairebé tant dolenta com B26: deixar a blanc fugir amb B52 és de covards. Cal N51 en B52.

Amb la seqüència fins a B60, negre aconsegueix reforçar blanc de manera que ja no pot envair-lo a canvi de res.

(*) Pertany a la primera ronda de la Lliga Universitària '87-88. Blanc és Pep Burillo (9 Kyu) i Negre és Dimas Cabré (10Kyu aleshores). Negre guanyà de 5 1/2 punts.

N67. Un error, millor a B68.

N73. Un altre de més greu; amb B74, blanc uneix els dos grups febles que té transformant-los, en capturar tres negres, en un grup viu i inatacable.

N77. Negre es pensa que així captura les dues blanques d'abaix i fa molts punts. La seqüència que segueix pot ser millorada, però el resultat és el raonable: sí que les captura, però no hi fa gaires punts. "Pot ser millorada" vol dir que B76, N79, N81, N83, B84, N85 i N87 són horribles.

B94. Petita. El racó de dalt a la dreta és més important.

B96. ??? Fins a N115, aconsegueix rescatar aquelles i ara té l'oportunitat de jugar B116 (per fi!), però, a quin preu? Els punts que perd per culpa de rescatar dues pedres són massa. Podria haver guanyat si les hagués deixat per mortes i hagués jugat B96 a B116 directament, aleshores negre no hauria pogut fer la invasió sacrificant N119. Llavors la partida hauria anat més igualada, essent la situació favorable a blanc.

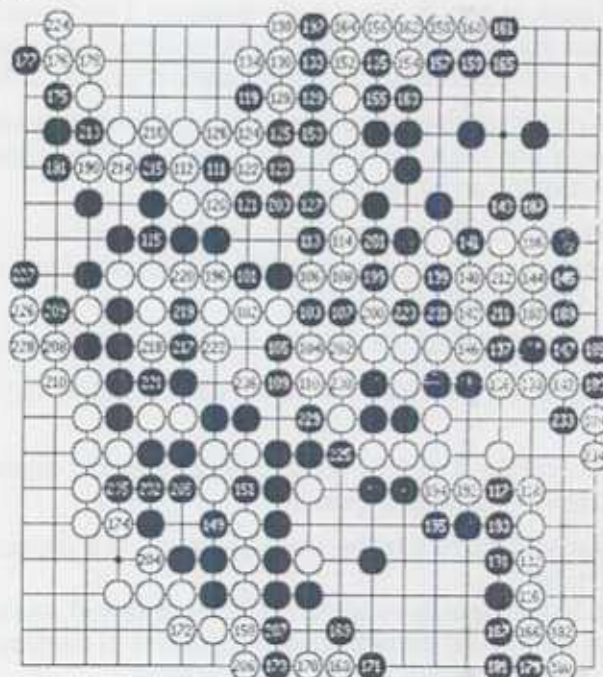


Diagrama 2 (101-236)

Joan Pons 1-Dan
3er. curs

Trofeu Aleph de partides ràpides de Go

La Revista Aleph, amb motiu del 10è aniversari, va prendre la decisió d'organitzar un trofeu periòdic anual de partides ràpides de GO. La idea bàsica d'aquest trofeu és l'exhibició per a donar-lo a conèixer al gran públic estudiantil (no necessàriament de matemàtiques). Aquest es va crear amb l'ajut del Club de Go de la Facultat de Matemàtiques. És aquest qui organitzarà anualment un curset d'introducció al Go. Amb l'ànim de promoure'l es celebra també aquest trofeu. Pasem ara a descriure el reglament, per a la seva organització, per que hi quedi constància en endavant:

- 1.- El Trofeu Aleph de Partides Ràpides de Go l'organitza anualment la Revista Aleph i el Club de Go de la Facultat de Matemàtiques.
- 2.- Es celebrarà anualment, al mes de Març preferiblement, i posteriorment a la lliga universitària del curs corresponent, en un dia de dilluns a divendres, no festiu, procurant que el lloc d'encontre sigui de la màxima afluència estudiantil possible, amb durada màxima de 24 h.
- 3.- La Revista Aleph s'encarregarà explícitament dels detalls de financiació, emprant la subvenció que per a organitzar aquestes activitats rep, decidint cada any el nombre i tipus de premi (copa o medalla); així com de la promoció i anunciament de l'encontre.
- 4.- El Club de Go de la Facultat de Matemàtiques serà el responsable d'aportar el material de joc (taulells, rellotges, taules, etc.) pels mitjans que desitgi i hi siguin al seu abast. No es limitarà ni el nombre ni procedència dels participants.
- 5.- Cas de no haver-hi acord, el Club de Go tindrà prioritat en afers d'organització.
- 6.- El reglament que regeix les partides és el vigent que estipuli l'organització NIHON KIIN en la data de celebració.
- 7.- El handicap màxim serà de 9 pedres. En cap cas es donaran punts addicionals llevat del 1/2 punt de jigo i els 5 1/2 de komi en partides a igualtat.
- 8.- El temps per jugador serà de 10 minuts sense byoyomi (els organitzadors tenen reservat el dret de modificar aquests detalls)
No es considerarà que hagi caigut la bandera del rellotge fins el moment en que el adversari ho indiqui. Així, hom pot jugar més de 10 minuts sense byoyomi si el contrincant no dona l'avís oportú. Cas de caiguda de bandera, perd el jugador al qual hi hagi caigut.
L'organització es reserva els drets de decidir conflictes.
- 9.- Els detalls, colocació de rellotge, color en cas de partides a igualtat, etc, es decideix segons el reglament del Campionat de Go Amateur del Món.
- 10.- L'organització es reserva el dret de modificar convenientment les categories dels participants (prenent les disposicions per a la seva conservació).
- 11.- El mètode de classificació i emparellaments es decidirà cada any en funció de les particulars circumstàncies regnants. Només podrà haver-hi un primer premi.
- 12.- L'abonament d'inscripció—cas de haver-n'hi— mai servirà per finançar el trofeu en sí. Per altra banda, sí es permetés aquest tipus de recaptació per a activitats marginals com pot ser el vermut de comiat i altres.
- 13.- La Revista Aleph conservarà els drets en exclusiva de publicació de resultats i partides, i es compromet a fer-ne pública almenys la classificació dels 5 primers classificats.
- 14.- Tant la Revista Aleph com el Club de Go de la Facultat de Matemàtiques es comprometen a emprar el mètodes legals necessaris i possibles per a garantir la continuïtat d'aquest trofeu.

FIRMEN / CONFIRMEN:

-Revista Aleph.

-Club de Go de la Facultat de Matemàtiques.

I Trofeu Aleph de Partides Ràpides de Go

Seguint les darreres estipulacions, el dimarts 15 de Març de 1988, al Pati de Ciències de la UB, es va celebrar el primer Trofeu Aleph de Partides Ràpides de Go, començant a les 12h 30m.

El mètode d'emparellament va ser per punts i categoria (iniciant a 0 punts), donant-se un punt per partida guanyada. La classificació es va efectuar per punts i coeficients en cas d'empat (i.e.: sistema suís). A la segona ronda s'hi afegiren dos nous jugadors ([†]). Finalment es presentaren 18 participants que passem a indicar —marquem amb (*) els jugadors del Club de Go de la Facultat de Matemàtiques—:

Watanabe.....	4dan
Joan Pons (*).....	1dan
Francesc Fernández (*).....	2kyu
César Sánchez.....	5kyu
Pau Bofill.....	6kyu
Dimas Cabré (*).....	7kyu
Pep Burillo (*).....	9kyu
Jordi Salvat (*).....	11kyu
Olivia Núñez (*).....	13kyu
Joaquim Ortega (*).....	13kyu
Jaume Amorós (*).....	13kyu
Jordi Gené.....	17kyu
Jordi Barroso (*).....	18kyu
Dionisio Barrasa.....	18kyu
Jaume Gudayol (*).....	18kyu
Eduard Falcó.....	18kyu ([†])
Pere Blanes.....	18kyu ([†])
Andreu Cabré.....	20kyu

S'efectuaren quatre rondes, de les quals passem a donar els resultats parcials i finals.

1ª ronda

Watanabe – Joan	0-1
Francesc – César	1-0
Pau – Dimas	0-1
Pep – Jordi S.	0-1
Olivia – Quim	0-1
Jaume A. – Jordi G.	0-1
Jordi B. – Dionisio	0-1
Jaume G. – Andreu	0-1

2ª ronda

Joan – Francesc	1-0
Dimas – Jordi S.	1-0
Quim – Jordi G.	1-0
Dionisio – Andreu	0-1
Watanabe – César	0-1
Pau – Pep	0-1
Olivia – Jaume A.	1-0
Jordi B. – Jaume G.	1-0
Eduard – Pere	1-0

3ª ronda

Joan – Dimas	1-0
Quim – Andreu	1-0
Francesc – Pep	0-1
César – Jordi S.	1-0
Olivia – Jordi G.	0-1
Jordi B. – Eduard	1-0
Dionisio – Jaume A.	1-0
Watanabe – Pau	1-0
Jaume G. – Pere	1-0

4ª ronda

Joan – Quim	1-0
César – Dimas	1-0
Pep – Jordi G.	1-0
Jordi B. – Andreu	1-0
Dionisio – Jaume G.	1-0
Watanabe – Francesc	0-1
Jordi S. – Olivia	1-0
Eduard – Jaume A.	0-1
Pau – Pere	1-0

La classificació final fou, per tant:

Posició	Jugador	Punts	Coefficient	Coefficient Victòries	Categoria
1er.	Joan Pons	4	8	8	1dan
2on.	Joaquim Ortega	3	9	5	13kyu
3er.	César Sánchez	3	7	5	5kyu
4rt.	Pep Burillo	3	7	5	9kyu
5è.	Dionisio Barrasa	3	7	5	18kyu
6è.	Jordi Barroso	3	7	4	18kyu
7è.	Francesc Fernández	2	11	5	2kyu
8è.	Andreu Cabré	2	10	4	20kyu
9è.	Dimas Cabré	2	9	3	7kyu
10è.	Jordi Salvat	2	9	4	11kyu
11è.	Jordi Gené	2	8	2	17kyu
12è.	Watanabe	1	10	1	4dan
13è.	Olivia Núñez	1	8	1	12kyu
14è.	Jaume Gudayol	1	8	0	18kyu
15è.	Jaume Amorós	1	7	1	13kyu
16è.	Pau Bofill	1	6	0	6kyu
17è.	Eduard Falcó	1	4	0	18kyu
18è.	Pere Blanes	0	3	0	18kyu

Així, el campió fou Joan Pons, 1 dan, el qual, dit sigui de pas, representarà aquest any a Espanya en el Torneig del Món Amateur de Go que es celebrarà el Maig a Japó. Potser quan aparegui aquest exemplar ja hi serà participant. Des d'aquí li desitgem el millor. Finalment es va fer un vermut clausurant-se a les 3h la celebració.

Agraïm la col·laboració de Marina Ranchal, Carles Bussom i Àngel Gea en ocupar-se de les classificacions, emparellaments i anotacions, a contrarellotge. Igualment a Carles Bussom (el mateix), Carles Trián, Assumpta Triana i Pau Bofill, per les facilitats que ens van donar en l'obtenció dels rellotges necessaris. A tots moltes gràcies, i fins l'any vinent.

I Trofeu ALEPH de Partides Ràpides de GO

Organitza: Revista Aleph



Lloc: Pati de Ciències de la UB
Data: 15 de Març de 1988
Inscripcions: el mateix dia

La final. La final d'aquest trofeu, com és fàcil d'observar, la van disputar Joan Pons i Joaquim Ortega. No obstant, a causa de la inexperiència de negre (Quim) en jugar partides ràpides, la partida resulta incommutable d'una manera racional, ja que els errors comesos per aquest no reflexen la seva categoria real. Finalment, blanc guanya per caiguda de bandera. Malgrat això, donem aquí la reproducció de la partida. Agraïm els esforços de Carles Bussom en aconseguir anotar-la simultàniament fins a un estat tan avançat.

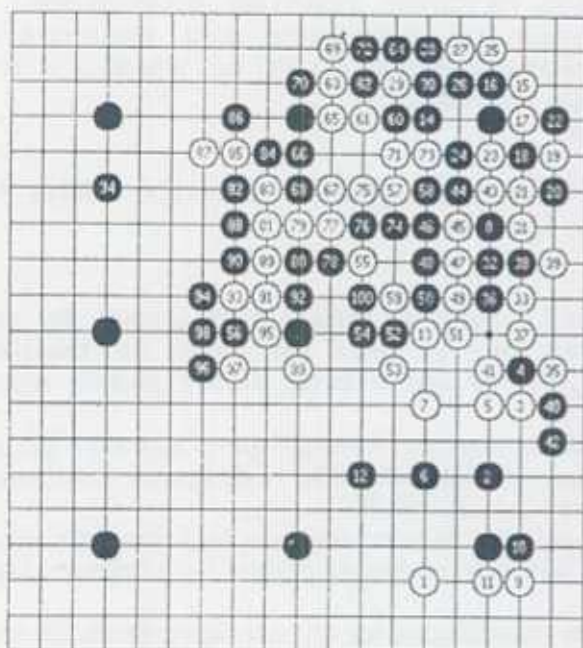


Diagrama 1 (1-100)

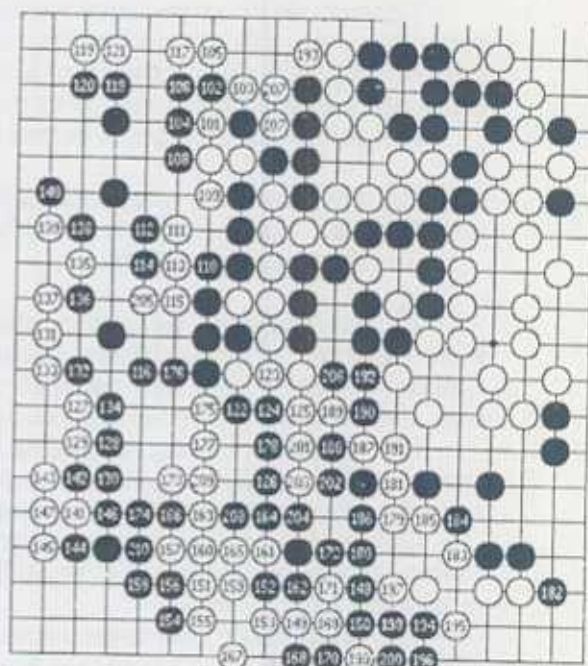


Diagrama 2 (101-211)

211 a 160

Equip Aleph
Club de Go de Matemàtiques

Todo lo que quería usted saber sobre el 4341 y aunque se atrevía a preguntar nadie osaba contestar.

CONSULTORIO INFORMÁTICO-SENTIMENTAL DEL CONDE VÍCTOR

Después de un largo descanso espiritual en La Cartuja, alejado del mundanal ruido, vuelvo a estar con vosotros para contestar todo aquello que os acongoja, para resolver esas dudas trascendentales y calmar ese picor loco que os atormenta cada día que vais a la Sala de Terminales (bastaría con despiojar la sala de vez en cuando, pero bueno...).

Ahí van las preguntas que hemos recibido:

P1: El famoso y conocido mensaje V.M. read, ¿quiere decir que Víctor Marqués está leyendo? *Antonio Desfasado (Pimedios, Girona).*

R1: Eso era antes, muchacho.

P2: La múltiple pregunta que voy a formular se refiere a un parato del que se ha oído hablar mucho últimamente. Creo que es algo así como un multinosequé. Quisiera saber qué es, pa qué sirve y, si es interesante, dónde podría agenciarme uno. *Juan Xorizo (La Mina der Bezó).*

R2: ¡Múltiplex dudas me asaltan acerca de tu pregunta! Supongo que el aparato a que te refieres es el multiflexor. El multiflexor es un cacharro imprescindible en el equipo de todo aquel que se considere un aficionado a la informática y otros MANGONEOS.

Como todos debéis saber ya, uno de los peligros de la profesión es la de momificación precoz. Este es el mal que combate el multiflexor. Cuando se empiezan a notar los primeros síntomas es interesante adquirir uno.

Un multiflexor consta en esencia de un comediscos, un altavoz de campaña (a ser posible adquiriéndose un IBM) y un sensor-braguero que se acopla a la riñonada de un manera cómoda y placentera.

Este sensor detecta inmediatamente cualquier rigidez y automáticamente arranca una serie de abstrusos y complicados programas en *assembler* que ponen en funcionamiento el comediscos (al cual se le ha debido introducir previamente un diskette de 5.25, a ser posible de la Jane Fonda o, en su defecto, de otro/a cantautor/a de Aerobic). Se le puede también acoplar un generador automático de palmadas, lo cual sin duda redundará en una mejor «mise en scene». Ante semejante estruendo, el terminalero no puede por menos que lanzarse a un bailoteo frenético que acabará con las pocas ganas que tuviera de seguir trabajando. De esta manera se va a su casa a descansar, que es lo que de verdad le conviene.

Para instalaciones grandes, se suele regalar un disco de Mecano, especialmente apropiado para huidas masivas de usuarios.

Como supongo que ahora ya estás convencido de lo imprescindible del multiflexor y de que no puedes vivir ni un segundo más sin conseguir uno, te indicaré dónde puedes conseguirlo.

De hecho, en cualquier tienda del puerto te lo pueden vender, pero sin duda encontrarás más cómodo y barato venir a nuestra tienda autoservicio de la Gran Vía, abierta todas las noches, y donde te podrán asesorar perfectamente sobre el modelo más adecuado a tu *look*.

P3: Querido Sr de Conde: me gustaría que vd. que está tan al corriente de los últimos avances de la informática me dijera si es cierto que ha salido al mercado un programa capaz de leer una lista de nombres y ordenarla alfabéticamente. *Atentamente, Virginia Flor del Largo-Suspiro.*

R3: Tú has leído demasiadas novelas de Asimov, jovencita soñadora.

P4: ¿Por qué cambiaron al director del Ciub? *Inocencio Stultus (Egara).*

R4: El anterior Jefe del Estado (perdón, quería decir director del Ciub) realizó una espléndida labor en pro de un mejor y más eficiente aprovechamiento de los recursos informáticos cuyos resultados todavía estamos padeciendo. A pesar de las numerosas muestras de apoyo que recibió y de las voces que se alzaron en contra de que dejara el cargo (casi todas provenientes de los alumnos, por supuesto), labores más importantes para con su patria le reclamaron y debemos ser generosos y pensar que no sólo la Universidad de Barcelona tiene derecho a tener personas de su valía en sus

cargos directivos.

En cualquier caso, todos cuantos disfrutamos de su capacidad de diálogo y de su sensibilidad para con los problemas del alumnado le mandamos nuestros más sinceros parabienes y deseamos que su alto sentido del deber le impida dejar su actual cargo y volver a dirigir nuestros destinos como líder (¡qué digo como líder!, como Caudillo indiscutible), auténtico cruzado de la causa informática.

P5: ¿Alguien ha conseguido alguna vez hacer funcionar un programa Fortran? *Un edepero de la vieja escuela.*

R5: Yo una vez vi un programa que funcionaba, pero él no me vio a mí.

P6: ¿Alguien me podría decir lo que es la programación estructurada? *Hunabof Enel Desierto (Verjoyansk, Siberia).*

R6: ¡Qué pregunta más estúpida! Yo creía que todo el mundo sabía esto. En fin, te lo explicaré. La programación estructurada es una técnica para producir programas "in stream" (traducido, en churro) que se basa en el famoso Teorema de la Programación Estructurada, que reza así:

(*Oremos:*) «Cualquier programa escrito en cualquier lenguaje se puede escribir sólo con GOTOS y poca cosa más.»

Y aún va más lejos el Corolario I, también conocido como Lema-Limón:

«Allá donde va cualquier sentencia, puede ir un GOTO, y nada puede sustituirlo.»

(Hay más corolarios que empalman curiosamente con la conocida Teoría de Catástrofes, pero no disponemos de espacio, ni de tiempo, ni de ganas para explicarlos).

Este Teorema y sus diez corolarios se resumen en dos:

1) Colocarás un GOTO por encima de todas las cosas;

2) Pon un GOTO bien y no mires sobre quién.

La programación estructurada es una reacción lógica ante el caos que provocaban los programas escritos con otras normas. Además, un programa escrito según este Teorema es mucho más fácil de seguir, más estético y musical (basta recordar la famosa canción: "GOTO, GOTO, no quiero verte más", de Loliya & The Waylers o el archiconocido grupo anarco-informático Pepe GOTO Vallecas).

Para aquellos incrédulos, rojos y masones (que en todas partes los hay), voy a dar un ejemplo clarificador. Se trata de un complicado programa que lee un número y te dice si es mayor que 0 o no (se recomienda abstención y abstinencia a aquellos que no sean Expertos).

* Programación no estructurada:

GET LIST (N)

IF (N>0) THEN

PUT SKIP LIST (' EL NUMERO ES MAYOR QUE 0 ')

ELSE

PUT SKIP LIST (' EL NUMERO ES MENOR QUE 0 ').

¡Qué zafio, vulgar, ramplón, vacilón y complicado! Veamos la solución con programación estructurada:

* Programación estructurada:

GOTO F

A : GOTO A

(¡percátase el lector del buclecillo optimizador!)

B : PUT SKIP LIST (' EL NUMERO ES MENOR O IGUAL QUE 0 ')

GOTO F

C : IF (N>0) THEN GOTO E

ELSE GOTO D

F : GET LIST (N)

GOTO C

D : IF (N≤0) THEN GOTO A

E : IF (N=43) THEN GOTO A (por si alguien es tan burro como para preguntar si 43 es positivo)

ELSE GOTO G

G : PUT SKIP LIST (' EL NUMERO ES MAYOR QUE 0 ')

GOTO F

¡Qué sencillez! ¡Qué belleza! Hasta el corazón más insensible se sentirá emocionado ante este soneto informático, obra de George Mc. Ricke, que fue publicado por primera vez en su libro Coplas por la muerte de mi padre, provocada propiamente por las mismas.

Queda claro, pues, que el futuro de la informática pasa por la programación estructurada.

P7: ¿Por qué hay tanta gente que le gusta la informática en la Facultad de Matemáticas? *James Vit (Louisiana, Colombia)*.

R7: En este mundo siempre hay Judas dispuestos a venderse al dólar.

P8: Hay un concepto que siempre me ha obsesionado y que no me deja dormir por las noches, viéndome obligada a a hacerlo en clase, a pesar de la amenidad de las mismas. ¿Me podría usted decir qué significa 'integridad de una Base de Datos'? *Julita Mosquita (La Cachonda)*.

R8: De hecho, hay dos conceptos ligados a esta expresión.

Por un lado, se dice que una base de datos es íntegra cuando no se deja mancillar por ningún programa (cuando esto ocurre se dice que la base de datos ha sido violada y se pone la correspondiente denuncia).

También se habla de integridad de una base de datos cuando los segmentos o miembros que la componen no contienen datos redundantes o contradictorios (en definitiva, que no hay promiscuidad entre los datos). Este fenómeno se llama, simplemente, orgía, sarao o farra, y los datos deben ser reprendidos severamente por el administrador de la base. (Por cierto, Julita, ¿tú estudias o trabajas?)

P9: ¿Qué es el ADA? *Cenicienta Vázquez (Bosque Verde, Badajoz)*

R9: Es un potentísimo lenguaje de programación que va a revolucionar sin duda el mundo de la informática debido a su inmejorable arquitectura, las modernas técnicas que permite aplicar y a que lo paga el Departamento de Defensa de Gringolandia. El único defecto (pequeña mácula en un océano impoluto) es que el compilador se tira 6 minutos por sentencia.

P10: ¿Qué es un paquete? *Curro Vargas (Jaén)*.

R10: En el contexto de esta sección debo pensar que no preguntas por el significado de esa palabra en la jerga torera, de larga y embarazosa explicación. En el mundo informático se llama paquete a un ente incognoscible que suele ser lento de ejecución y que ocupa mucha memoria (con lo cual cumple con las normas de la AVISPA — Asociación de Vendedores Internacionales de Sucios Paquetes Automáticos) y que sirve normalmente para calcular medias aritméticas, desviaciones standard y ceros de polinomios de primer e incluso a veces de segundo grado.

La U.B. dispone en su biblioteca de programas de varios de estos interesantes paquetes.

P11: ¿Qué es el A.O.S.? *Anacleto Oscuro Sarpullido (El Sanatorio, S.Boi)*.

R11: *Annoying Operative System* (no lo vende IBM, de ahí su nombre).

Carles Díez
Ex-alumne
Ex-monitor
Ex-soltero de oro
Ex-cedente de cupo

Recuerdo que podéis dejar vuestras preguntas en el buzón del Aleph (por cierto, que alguien podría quitarle las telarañas).

Kiel vi fartas?

Nulo: L'altre cap de setmana vaig anar a fora. El dilluns, al tornar a la Facultat, algú em va preguntar: «què has fet aquest cap de setmana?». «He anat a una trobada esperantista». «Una trobada QUE???»...vaig haver d'explicar què era. Al cap d'una estona algú em va fer la mateixa pregunta i vaig donar la mateixa resposta: «I això què és???». A mig matí, després del que es pregunta cada dilluns, i la meua resposta d'aquesta setmana: «Com has dit, una trobada esperitista?». «No, ESPERANTISTA!!!». Ja n'estic farta! us ho explico a tots alhora, no em doneu més la llauna, que ja tinc prou feina. (Bé, si algú no ho acaba d'entendre, que em busqui i li acabaré d'explicar).

Unu: Kio estas Esperanto?: L'Esperanto és una llengua internacional. Millor dit, és LA llengua internacional, ja que qualsevol altre representa en major o menor grau una cultura o nacionalitat determinades.

Du: Kia estas Esperanto?: L'Esperanto és fàcil i lògic. És fàcil perquè només té 16 regles, i lògic perquè aquestes setze regles no tenen mai excepcions. A més, les paraules es formen a partir de prefixes i sufixes a partir d'una mateixa arrel, de manera que quan coneixes una paraula coneixes un nom, un verb, un adverb, un adjectiu, les paraules que signifiquen el contrari de les anteriors,... tot en una sola segons com la comencis i acabis.

Tri: Kiom da tempo estas necesa por lerni E-o?: Essent tant fàcil com és ja us podeu imaginar que en molt poc temps el podeu dominar perfectament. (Sí, hi ha coses que no necessites anys i anys per aprendre, i aquesta n'és una: només calen sis mesos).

Kvar: Kie estat uzata E-o?: S'usa com a idioma de treball en la A.I.Cibernètica i és usat per molts estats com a idioma turístic (entre d'altres Japó, Xina, França, Itàlia, i també Espanya, o l'Estat espanyol, com preferiu). A part d'això és l'únic idioma que s'utilitza en els 200 Congressos Internacionals Esperantistes que cada any s'organitzen arreu del món.

Kvin: Kiu kreis E-o?: Aquest idioma va ésser creat per un metge polac, L.L. Zamenhof, l'any 1887.

Ses: Kiam estis la unua oficialigo de E-o?: L'E-o va ser reconegut oficialment per primera vegada justament al nostre país l'any 1911, dos anys després de que el seu creador assistís al 5è Congrés Universal que es celebrà a Barcelona el 1908. Posteriorment ha estat reconegut i/o recomenat per la Unió Telegràfica Universal, la UNESCO, l'Acadèmia de Ciència Francesa, el Consell Científic del Japó i també el Xinès, la ONU, la Creu Roja, l'Organització Internacional del Turisme,...

Sep: Kial Esperanto?: Hi ha molts motius per preferir l'Esperanto a d'altres idiomes en tasques internacionals. Però em limitaré a dir-ne un parell. Ja he dit que és un idioma molt fàcil d'aprendre, per tant no és gaire difícil que tothom el pugui emprar (només és necessari tenir-ne ganes). A més, perquè hem de donar prioritat a un idioma nacional sobre un altre a l'hora de reunir-nos gent de diversos països?

Ok: Kiel povas esti utila nun E-o?: L'Esperanto el podeu usar per tenir correspondència amb l'estranger, o per viatjar-hi. Hi ha associacions esperantistes que ens poden permetre conèixer gent d'arreu, de manera que es pot començar aquest contacte. És possible que hi hagi bons matemàtics que siguin esperantistes i amb els quals no us podrieu escriure si no és així.

Naŭ: Kies aŭtoroj ekzistas Esperanto-tradukoj?: N'hi ha molts. Des d'autors clàssics com Homer o Shakespeare fins autors de ciència-ficció com Asimov o Arthur C. Clarke, passant per Hergé amb el seu Tintin i Uderzo i Goscinny amb el seu Astèrix.

Dek: I ja que us he anat posant tots els números, puc explicar-vos com es compta. Millor, us poso uns quants exemples i ho podeu deduir solets. Per dir cent ho direu exactament igual que en català, però pronunciant "Tsen". Per dir mil, també ho direu igual. Dotze seria dek du, que és diferent

de dudek, que seria vint. Si voleu dir 1988 direu mil naücent okdek ok. Si voleu anar al número 585 de la Gran Via, anireu al kvincent okdek kvin. I si teniu 23 anys en teniu dudek tri. És clar que si en teniu 19 seran dek naü, o 18 dek ok. I quan arribem a l'any 2000 (us pensàveu que diria el 1992) serem a l'any dumil (el 1992 és mil naücent naüdek du). Em sembla que ja en teniu prou (i massa i tot). Per tant no em queda més que dir-vos

Ûis revido

Marina
Sè.curs

NOTÍCIES

Última hora.- Un cop tancada la Redacció vam rebre aquest darrer article que continua la seqüència d'escrits a diaris i revistes generats a partir de la notícia de Yoichi Miyaoka. En no poder-la incloure a la posició setena (*Orquestra*) us l'oferim aquí per tal que en quedi constància. Continuarem informant.

Reproducció d'un article publicat a
la Vanguardia el dia 8 Maig 1988

(8-V-1988) (*Orquestra*)

El teorema de Fermat, totaví un reto

El pasado día 26 de febrero el matemático japonés Yoichi Miyaoka presentaba en el Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn los resultados de sus últimas investigaciones que pretendían completar uno de los programas que conducen a la demostración del último teorema de Fermat, para exponentes suficientemente grandes.

Es un lugar a dudas más popular de todos los problemas abiertos en Matemáticas, "¿había efectivamente erróneo?" La noticia causó conmoción, la prensa internacional se hizo eco de ella y en el Instituto Max Planck se vivieron días de una gran agitación.

Como es conocido, el famoso último teorema de Fermat afirma que la ecuación

$$X^n + Y^n = Z^n$$

donde n es un entero $n \geq 3$, no tiene soluciones enteras no triviales.

Muchos han sido, a lo largo de la historia, los intentos de demostración de esta aparentemente sencilla afirmación hecha por Pierre de Fermat (1601-1665), sin embargo, ninguna demostración general se ha logrado establecer.

La contribución de Miyaoka debe situarse dentro de la filosofía del matemático ruso A. N. Parshin. Parshin ha desarrollado una estrategia, que, de completarse, conduciría a la demostración del teorema de Fermat para exponentes suficientemente elevados. A grandes rasgos las ideas son las siguientes: si cierta desigualdad entre las clases de Chern que para superficies algebraicas complejas es cierta (atribuida por Miyaoka, 1977), lo fuera también para superficies aritméticas, entonces la conjetura de Szpiro, acotando el discriminante relativo de la curva elíptica delimitada sobre el cuerpo de los números racionales, sería cierta. Por otro lado, el matemático alemán Gerhard Frey ha



probado (1986) que la conjetura de Szpiro implica el último teorema de Fermat para exponentes grandes.

El geometra algebraico Y. Miyaoka afirmaba que había completado un eslabón de esta cadena probando que, para superficies aritméticas era cierta la desigualdad de Szpiro. Las primeras reacciones, tras la conferencia de Miyaoka, fueron muy diversas. Algunos como D. Zagier, E. Bombieri, A. Weil mostraron un gran entusiasmo, otros como G. Faltings fueron entusiásticamente críticos. Recordemos que el matemático

alemán Gerd Faltings obtuvo fructíferos resultados utilizando y desarrollando ideas de Parshin y Arakelov que permiten pensar geométricamente cuestiones aritméticas. Tras un análisis más profundo de la exposición de Miyaoka, se empezaron a detectar algunas dificultades técnicas, algunas afirmaciones no justificadas, todo esto en un clima de cierta oscuridad. Se decidió que, el día 22 de marzo, Miyaoka diera otra conferencia a la que debían asistir expertos de todo el mundo. La tarde anterior Miyaoka tuvo una larga conversación con el matemático Barry Mazur de la Universidad de

Harvard, tras la cual reanuda su demostración. Traducido a continuación un mensaje electrónico mandado por el también especialista en Teoría de Números americano Kenneth A. Ribet, el día 23 de marzo: "... Miyaoka ahora ha retirado su afirmación de haber probado la desigualdad de Parshin. El error era según parece que se había permitido hacer ciertas extensiones de base; pensaba que esto era inofensivo, pero Barry Mazur lo convenció de que cambiaba el problema completamente. Fue en este punto que Miyaoka se dio cuenta que tenía que retirarse. Los otros puntos en discusión se volvieron irrelevantes. K. R." El día 29 de marzo en el periódico japonés "Nihon Keizai Shimbun" de Tokio apareció un artículo firmado conjuntamente por G. Faltings y Y. Miyaoka en el que hacían público que había un error definitivo en dicha demostración.

El último teorema de Fermat se ha resistido una vez más a ser demostrado.

¿Qué expectativas se tienen ahora? ¿Hasta falta esperar mucho tiempo para tener el teorema de Fermat? Nadie puede dar una respuesta a esta cuestión. Son muchas las vías que pueden conducir a Fermat. Actualmente se están haciendo grandes esfuerzos y son muchas las conjeturas generales planteadas en varias ramas de la aritmética que llevan al teorema de Fermat.

Se trata, pues, de un problema vivo, en constante evolución, motor de desarrollo de nuevas ideas, de las que cada día se obtienen nuevos resultados y que, en cualquier caso, nos permiten entender un poco mejor parte del mundo en que vivimos. El único a demostrar el último teorema de Fermat es un éxito que seguro mueve la matemática de este siglo.

NÚRIA VILA
Facultat de Matemàtiques i
Ciències de Barcelona

Peripècies d'un estudiant modèlic.

Un eixerit estudiant de matemàtiques troba molt avorrit d'assistir a les classes d'una certa assignatura. Decidit a justificar científicament la temptació de dedicar les hores de classe a jugar al Go, es fa el propòsit d'establir un model matemàtic que tingui en compte els elements més significatius del problema.

Podem ajudar l'entremaliat estudiant?

Considerem un període d'un quadrimestre. Escollim els següents esdeveniments:

Treure insuficient (I)	Faltar 0 mesos (0m)
Treure aprovat (A)	Faltar 1 mes (1m)
Treure notable (N)	Faltar 2 mesos (2m)
Treure excel·lent (E)	Faltar 3 mesos (3m)
	Faltar 4 mesos (4m)

I, A, N, E, 0m, 1m, 2m, 3m, 4m, són els estats del sistema. 0m, 1m, 2m, 3m, 4m, són també les decisions possibles, que denotarem per 0, 1, 2, 3, 4.

Assignem un valor (una mesura d'utilitat o satisfacció) a cada esdeveniment:

$U(I) = 0$	$U(0m) = 0$
$U(A) = 5$	$U(1m) = 5$
$U(N) = 7$	$U(2m) = 6$
$U(E) = 9$	$U(3m) = 7$
	$U(4m) = 8$

Per últim determinem la distribució de probabilitat de la qualificació (C) per a cada decisió:

	I	A	N	E
0m	0	0.3	0.4	0.3
1m	0.1	0.4	0.3	0.2
2m	0.2	0.4	0.3	0.1
3m	0.3	0.5	0.2	0
4m	0.5	0.5	0	0

on la suma de cada fila és la unitat.

Aleshores, emprant el criteri de l'esperança matemàtica, el valor esperat de la satisfacció per a cada decisió és:

$$V(K) = U(Km) + EM_K(C), \quad K = 0, 1, 2, 3, 4$$

on $EM_K(C)$ és l'esperança matemàtica de la qualificació havent decidit faltar a classe K mesos:

$$EM_K(C) = p(I/K) \cdot U(I) + p(A/K) \cdot U(A) + p(N/K) \cdot U(N) + p(E/K) \cdot U(E).$$

Fent càlculs:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 + 0 \cdot 0 + 0.3 \cdot 5 + 0.4 \cdot 7 + 0.3 \cdot 9 = 7, \\ V(1) &= 5 + 0.1 \cdot 0 + 0.4 \cdot 5 + 0.3 \cdot 7 + 0.2 \cdot 9 = 10.9, \\ V(2) &= 6 + 0.2 \cdot 0 + 0.4 \cdot 5 + 0.3 \cdot 7 + 0.1 \cdot 9 = 11, \\ V(3) &= 7 + 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 5 + 0.2 \cdot 7 + 0 \cdot 9 = 10.9, \\ V(4) &= 8 + 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 9 = 10.5. \end{aligned}$$

Per tant, la decisió òptima és faltar dos mesos a classe.

Cal fer un aclariment. El criteri de l'esperança matemàtica és de dubtosa aplicació en aquest cas, car no es tracta d'una circumstància que es repeteixi moltes vegades. En qualsevol cas el criteri

és coherent amb la definició subjectiva de les dades. Hom pot assajar la sensibilitat de la solució fent servir diferents conjunts de dades.

El professor Frank N. Stein ha recollit un altre desafiament que es presentà al nostre estudiant. Resulta que aquest surt normalment amb tres noies que podem anomenar Rossa (R), Bruna (B) i Pèl-Roja (P). Cada dissabte truca a una d'elles i li proposa d'anar d'excursió el diumenge. Si la noia no accepta l'estudiant roman a casa estudiant. S'ha adonat que l'acceptació o el rebuig de les noies depèn de què s'esdevingué la setmana abans, car les noies es coneixen i hi ha rivalitat entre elles. De la història passada ha inferit que la probabilitat d'acceptació és més o menys:

L'altra setmana	Truca a:	R	B	P
Sortí amb R		0.8	0.6	0.3
Sortí amb B		0.5	0.4	0.6
Sortí amb P		0.2	0.6	0.5
Restà a casa		0.6	0.7	0.8

L'estudiant desitja sortir amb les noies el major nombre possible de diumenges. Quina ha d'ésser la seva estratègia?

A l'enunciat ja hem definit un model amb els estats del sistema i les decisions possibles per a cada estat.

Estats: Sortir amb la rossa (R)
Sortir amb la bruna (B)
Sortir amb la pèl-roja (P)
Restar estudiant (E)

Decisions: Trucar la rossa (r)
Trucar la bruna (b)
Trucar la pèl-roja (p)

Nomenclatura: $f_n(x)$: esperança matemàtica del nombre de setmanes que, seguint la política òptima, l'estudiant roman a casa quan hi ha n setmanes per davant i l'estat (allò que s'esdevingué la setmana que precedeix a la n , és a dir la setmana $n+1$) és x .

$$x \in \{R, B, P, E\}$$

$u_n(x)$: primera decisió de la política òptima, quan resten n setmanes i l'estat és x .

$$x \in \{r, b, p\}$$

$p(x, u)$: probabilitat d'acceptació de u si l'estat és x .

$$q(x, u) = 1 - p(x, u)$$

Esquema de la situació:

DECISIO		ATZAR	
		$p(x, u)$	
$f_n(x)$	x	U	$f_{n-1}(U)$
	x, u	$q(x, u)$	
		E	$1 + f_{n-1}(E)$
	n	$n-1$	

on U vol dir que u accepta sortir.

Aquest esquema suggereix la següent equació:

$$f_n(x) = \min_u \{p(x,u) \cdot f_{n-1}(U) + q(x,u) \cdot (1 + f_{n-1}(E))\} \quad ; \quad x = R, B, P, E$$

o bé:

$$f_n(x) = \min_u \{q(x,u) + p(x,u) \cdot f_{n-1}(U) + q(x,u) \cdot f_{n-1}(E)\}$$

Si ens interessa una estratègia a llarg plaç, aquesta formulació té el problema que $f_n(x)$ tendeix a infinit quan n tendeix a infinit. Si s'escriu:

$$f_n(x) = n \cdot g_n + w_n(x),$$

amb (per exemple) $w_n(E) = 0$ ($g_n = f_n(E)/n$), l'equació queda:

$$n \cdot g_n + (n-1) \cdot g_{n-1} + w_n(x) = \min_u \{q(x,u) + p(x,u) \cdot w_{n-1}(U) + q(x,u) \cdot w_{n-1}(E)\}$$

Suposem que aquestes equacions s'estabilitzen quan n tendeix a infinit:

$$g + w(x) = \min_u \{q(x,u) + p(x,u) \cdot w(U) + q(x,u) \cdot w(E)\} \quad (*)$$

Si hi ha una regla de decisió (una decisió per a cada estat) que verifica les equacions (*) la suposició és correcta. Fixada una regla de decisió queda un sistema lineal de 4 equacions amb 4 incògnites ($w(E) = 0$). La solució g és el valor de la regla de decisió, la proporció de setmanes que l'estudiant romandrà a casa seva si segueix indefinidament aquesta regla. S'ha de trobar la regla de decisió que tingui el valor mínim. Per a això partim d'una regla inicial, resollem el sistema lineal associat i determinem la regla que defineix el segon membre de les equacions (*). Si coincideix amb la regla inicial ja és òptima, car verifica (*). Altrament la prenem com a nova regla inicial i repetim les operacions.

Per exemple, triem la següent regla inicial:

$$u_0(R) = r \quad ; \quad u_0(B) = b \quad ; \quad u_0(P) = p \quad ; \quad u_0(E) = b.$$

Resulta el sistema (recordem $w(E) = 0$):

$$\begin{array}{ll} g_0 + w_0(R) = 0.2 + 0.8 \cdot w(R) & g_0 = 6/13 \\ g_0 + w_0(B) = 0.6 + 0.4 \cdot w(B) & w_0(R) = -17/3 \\ g_0 + w_0(P) = 0.5 + 0.5 \cdot w(P) & w_0(B) = 3/13 \\ g_0 = 0.3 + 0.7 \cdot w(B) & w_0(P) = 1/13 \end{array}$$

Com ja dit, $u_1(x)$ és la regla de decisió que fa mínim $[q(x,u) + p(x,u) \cdot w_0(U) + q(x,u) \cdot w_0(E)]$. La solució és:

$$u_1(R) = r, \quad u_1(B) = r, \quad u_1(P) = r, b, p \text{ indistintament}, \quad u_1(E) = r.$$

Si escollim $u_1(P) = r$, el nou sistema és:

$$\begin{array}{ll} g_1 + w_1(R) = 0.2 + 0.8 \cdot w_1(R) & g_1 = 0.25 \\ g_1 + w_1(B) = 0.5 + 0.5 \cdot w_1(R) & w_1(R) = -0.25 \\ g_1 + w_1(P) = 0.8 + 0.2 \cdot w_1(R) & w_1(B) = 0.375 \\ g_1 = 0.4 + 0.6 \cdot w_1(R) & w_1(P) = 0.5 \end{array}$$

Ara $u_2(x)$ fa mínim $[q(x,u) + p(x,u) \cdot w_1(U) + q(x,u) \cdot w_1(E)]$. I és:

$$u_2(R) = r, \quad u_2(B) = r, \quad u_2(P) = b, \quad u_2(E) = r.$$

Obtenim el sistema:

$$g_2 + w_2(R) = 0.2 + 0.8 \cdot w_2(R) \quad g_2 = 0.25$$

$$\begin{aligned} g_2 + w_2(B) &= 0.5 + 0.5 \cdot w_2(R) & w_2(R) &= -0.25 \\ g_2 + w_2(P) &= 0.4 + 0.6 \cdot w_2(B) & w_2(B) &= 0.125 \\ g_2 &= 0.4 + 0.6 \cdot w_2(R) & w_1(P) &= 0.225 \end{aligned}$$

I $u_3(x)$ fa mínim $[q(x,u) + p(x,u) \cdot w_2(U) + q(x,u) \cdot w_2(E)]$. Així resulta:

$$u_3(R) = r, \quad u_3(B) = r, \quad u_3(P) = b, \quad u_3(E) = r.$$

És a dir, $u_3(x) = u_2(x)$, per a qualsevol x . Per tant aquesta és la regla òptima de decisió, i seguint-la l'estudiant romandrà a casa un de cada quatre diumenges.

Observem que la regla de decisió u_1 també té el valor $g=0.25$. Aquesta és, doncs, una altra regla òptima. Però és preferible la regla u_2 perquè $|w_2(x)| \leq |w_1(x)|$, per a tot x . Les $w(x)$ representen la diferència de partir d'un estat inicial o d'un altre.

Joan Carles Gandia
2on. curs.

संस्कृत-विद्यापीठ

