Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Valoració d´opcions financeres i equacions en derivades parcials. Resolució de l´ equació de Black-Scholes

Mohamed Taibouch

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de Probabilitats, Lògica i Estadística . UB

Barcelona, juny 2013

Abstract

We are currently facing many difficulties with the economic crisis that has destroyed both the financial and labour markets. Because of this I have decided to enter the financial sector once I have completed my mathematics degree, and try to understand the complexities and learn the secrets of this sector. When thinking of the different financial stocks and options you cannot ignore the Black-Scholes equation, which is for many the most important factor in economic development, and for which Robert C. Merton and Myron Scholes received the Nobel prize for economics in 1997. Here we derive and solve this equation. Our work is based on the valuation of financial options, specifically the Call and Put options. In order to value these options we use the Black Scholes parabolic partial differential equation. We derive this equation in three different ways. The first uses instantaneous replication, the second the "risk price" of the market and the final method calculates the forward price. We present also three distinct methods to solve it. The first two are based on the resolution of the Heat Equation, as the Black-Scholes Equation can be transformed to this using an apropriate change of variables. The third derivation uses the Mellin transform. Finally we give a numerical solution using a finite difference method. Obviously, before we derive the equation, we must first define and explain the financial and mathematical concepts needed to derive, solve and interpret the equation. From this we can also introduce the Heat Equation and the Fourier Transform. Finally to finish we present a C program which calculates the price of a Call and Put options.

Índex

1 Introducció

A principis del segle XX existien models per calcular el valor dels derivats financers, però aquests no eran molt precisos i això provocava un gran error entre el valor calculat pel model i el valor real negociat en el mercat. Evidenment l'equació de Black-Scholes va ser una gran innovació financera. El 1969, Black i Scholes ja havien concebut l'equació del preu "sense arbitratge" que s´ha de pagar pel dret a comprar o vendre un derivat financer depenent de caracteritzacions particulars i del temps pactat prèviament. L'article va ser publicat al Journal of Political Economy el 1973.

Suposem que hi ha dues persones A i B que acorden llançar un moneda de manera que si el resultat és cara A paga 1 euro a B, i si el resultat és creu, A no paga rés a B. Llavors, quant ha de pagar B a A per a què jugui amb ell? La resposta és 50 centims, tenint en compte que hi ha la mateixa probabilitat de que surti cara que creu.

Suposem ara que la quantitat a pagar no es basa en el resultat de llançar una moneda al aire sinó en la cotització d'una determinada acció a la borsa, o sigui, si per exemple tenim una acció que avui val 1 euro i que demà pot valer 3 euros o 50 centims, llavors si el preu puja A ha de pagar 1 euro a B i si no A no ha de pagar rés. En principi sembla que per fixar el preu caldria estimar la probabilitat p de que l'acció pugi i establir com a preu simplement p euros. Així ens trobem amb una curiosa irregularitat. Suposem que $p = 0,5$. Llavors si B paga 50 centims a A per jugar, A pot seguir l'estrategia següent. Amb els 50 centims que li dona$B$ pot comprar mitja acció. Si l'acció pujar a 3 euros A tindrà $1,5$ euros a la cartera, dels quals haurà d'utilitzar 1 euro per pagar a B, i si l´acció baixa A tindrà 25 centims i no haurà de pagar res a B. Evidentment A sempre guanya, i B ho sap. Llavors A hauria d'acceptar cobrar un mica menys per jugar. El preu just és $0,2$ euros. En efecte, si B paga $0,2$ euros a A, A pot demanar en préstec $0,2$ euros i comprar $0,4$ accions (això es diu estrategia de cobertura). Llavors si l´acció puja a 3 euros A tindrà1 euro per pagar a B i $0,2$ pe tornar el préstec. Si l´acció baixa a $0,5$ euros A tindrá $0,2$ euros, just el que necessita per recuperar el préstec. Veiem que aquest és el resultat d'un sistema de dues equacions amb dues incognites (les accions que comprem y els diners que demanem en préstec). En el mon real, les possibles cotitzacions d'accions no són dues sinó un número gran que podem considerar infinit. En aquest cas la cobertura s'ha de fer de manera més o menys continuada en el temps, comprant i venent continuament accions i possiblement prestant o demanant préstecs. Aquest pas al limit del comportament de cobertura és el que es diu Teoria de Black-Scholes i va ser desenvolupada per Robert Merton, Fischer Black i Mayron Scholes el 1973. Scholes i Merton van guanyar el premi Nobel d'Economia en 1997 per aquesta teoria. La teoria es concreta en la equació en derivades parcials que estudiarem en aquest treball.

1.1 Biografia

1.1.1 Fischer Black

Figura 1.1: Fischer Black ($1938 - 1995$)

Va nèixer l'11 de gener de 1938 a Washington i va morir el 30 d'agost de1995 a Nova York. Es va doctorar en Matemàtiques a Harvard el1964. El 1971 va començar a treballar a la Universitat de Chicago i després va passar a treballar a l'Escola d'Administració Sloan del MIT, a Massachusetts. El 1984, va entrar a Goldman Sachs, on va treballar fins a la seva mort. El 1997 Myron Scholes i Robert Merton van rebre el Premi Nobel d'Economia pel seu treball històric sobre el desenvolupament de l'avaluació d'opcions, i en el qual Black va participar. Black havia mort el 1995. En l'anunci de la concessió, el comitè Nobel esmentà el paper prominent de Black.

1.1.2 Myron Scholes

Figura 1.2: Myron Scholes (1941)

Va néixer l'1 d'juliol del 1941 a Timmins, població situada a l'estat canadenc d'Ontàrio.Va estudiar Economia a la Universitat McMaster de Hamilton, on es va graduar l'any 1962. Posteriorment es traslladà a la Universitat de Chicago, on realitzà un postgrau el 1964 i el doctorat l'any 1969.

Actualment és professor d'Economia a la Universitat de Stanford. Interessat igualment que Robert Merton en els derivats financers, al costat d'aquest i de Fisher Black, va desenvolupar el model Black-Scholes, que va permetre el gran desenvolupament de la utilització d'aquests instruments financers. L'any 1997 fou guardonat, juntament amb Robert Merton, amb el Premi Nobel d'Economia pels seus estudis econòmics sobre els derivats financers.

1.1.3 Robert C. Merton

Figura 1.3: Robert C. Merton (1944)

Va nèixer el 31 de juliol del 1944 a la ciutat de Nova York. Es va llicenciar en Enginyeria Matemàtica a la Facultat d'Enginyeria i Ciències Aplicades de la Universitat de Columbia, va fer un Mestratge en Ciències a l'Institut de Tecnologia de Califòrnia, i el doctorat en Economia a l'Institut de Tecnologia de Massachusetts el 1970 sota la direcció de Paul A. Samuelson. Després va entrar a l'Escola d'Administració Sloan del MIT, on va ensenyar fins a 1988. Posteriorment es va traslladar a la Universitat de Harvard, on va ensenyar fins el 1998. Merton va ajudar a introduir el càlcul estocàstic en l'economia financera, fet que va permetre que el comportament dels preus fos descrit amb el llenguatge precís de la probabilitat. També va aplicar la teoria del control òptim per a trobar les regles amb les quals els agents econòmics troben la distribució òptima en les seves carteres. El 1997 junt amb Myron Scholes va rebre el premi de Nobel de Economia, pel seu treball historic de determinar el valor dels productes finacers derivats.

2 Conceptes financers necessaris

2.1 Tipus de Interès

2.1.1 Interès Simple

Donada una taxa d'interès anual r i donada una quantitat inicial de V_0 euros, al cap d'un temps t , mesurat en anys, es té la quantitat de $V = V_0(1 + r)^t$ euros.

2.1.2 Interès Compost

Donada una taxa d'interès anual r i donada una quantitat inicial de V_0 euros, amb interès compost n vegades, al cap d'un temps t, mesurat en anys, es té la quantitat de $V = V_0(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ euros.

2.1.3 Interès Continu

Si fem tendir n a infinit, obtenim la formula d'interès continu $V = V_0 e^{rt}$.

2.1.4 Taxa anual del pagament d'un actiu

Observem que r és la taxa anual continua del benefici d'un actiu V amb preu inicial V_0 i preu V_t a l'instant t, és a dir, $r = \frac{1}{t} ln(\frac{V_t}{V_0})$.

2.2 El mercat de futurs i opcions

2.2.1 Contractes a termini o "forward"

Un contracte a termini és un contracte per vendre o comprar un producte en un cert instant determinat de futur a un determinat preu. Es negocien en mercats no regulats ("over-the-counter").

♦ La posició llarga ("long position") accepta comprar i la posiciò curta ("short position") accepta vendre.

♦ Estan obligats a realitzar la transacció i no es paga cap prima inicial.

♦ El contrari és un contracte al comptat ("spot") en el que la transacció tè lloc en el instant actual.

Exemple. Un comerciant es compromet comprar-li a un agricultor 10 tones de collita de patates a $0,2$ euros/quilo 6 mesos desprès de signar el contracte.

2.2.2 Contractes de futur

Un contracte de futur és equivalent a un contracte a termini peró es negocia en un mercat regulat que especifica les condicions dels contractes. Hi ha molts mercats que organitzen contractes de futur en diferents llocs del món. Als Estats Units es troben els dos mès grans que són el "Chicago Board of Trade" (www.cbot.com) i el "Chicago Mercantile Exchange" (www.cme.com). Els mès grans d'Europa són el "London International Financial Futures and Option Exchange" (www.liffe.com) i l' "Eurex"(www.eurexchange).

Exemple. Un inversor acudeix al CBOT i demana a un broker comprar un contracte 5 tones de ferro pel mes de setembre. El preu resultant será consequencia de l'ajust entre l'oferta i la demanda que apareixen en el CBOT.

2.2.3 Contractes d'opcions

Una opció és un contracte que dona el dret a comprar, si és una opció de compra ("Call"), i dona el dret a vendre, si és una opció de venda ("Put"), una quantitat de béns ("underlying") a un preu determinat ("strike price") abans de o en una data de venciment determinada ("expiry date").

Propietats del contracte d'opcions:

♦ Per obtenir el dret, el posseïdor ha de pagar una quantitat determinada ("option price").

♦ Hi ha molts tipus d'opcions. Alguns son:

. *Europees*: Només es poden exercir en la date de venciment.

. *Americanes*: Es poden exercir durant tot el periode que dura l'opció.

. *Barreres*: Aquests tipus d'opcions depenen de que l'actiui assoleixi el preu barrera, com les "knock out", que quan assoleixen el preu de barrera deixen de valer. També hi ha les "knock in" que tenen valor si assoleixen el preu de barrera. Un altre exemple són les "cap" que són europees i que en cas d'assolir el preu de barrera l'execució és obligatoria.

. *Basquet Option*: Són opcions sobre un conjunt de actius.

Altres conceptes importants que farem servir en el treball són:

♦ *Actius*: Són qualsevol bé comercialitzable en un mercat financer.

♦ *Cartera*: És un conjunt d'actius financers (accions, opcions, bons, futurs, etc.). Es modelitza com un vector $V \in \mathbb{R}^n$ amb $n \in \mathbb{N}$, tal que cada coordenada i del vector representa la quantitat d'actius del tipus i.

♦ *Mercats*: Són els llocs on es realitzan les transaccions financers, i estan dividits en diferents árees depenent dels actius que es comercialitzen.

♦ *Derivat*: És un bé tal que el seu valor depèn d'altres bens (els subjacents). Per exemple, les opcions són derivats.

♦ *Arbitratge* : És una operació que assegura guanyar sense tenir cap risc. Per exemple, guanyar diners sense haver invertit abans. Se suposa que els arbitratges no són possibles en els mercats eficients.

Exemple. Considerem la final del mundial Espanya-Alemanya. Evidentment hi ha dos resultats possibles: E i A . Suposem que hi ha apostes a Madrid i a Berlin, i el resultat per cada 100 butlletes és el següent:

	Berlin	*Madrid*
E	40	55
A	60	45

Observem que en aquest cas hi ha sempre una possiblitat de guanyar. Si aposto a per A a Madrid i b per E a Berlin, amb $a + b = 1$, el meu saldo serà

$$\frac{a}{0,45} - 1, \ si \ guanya \ E \qquad \frac{b}{0,4} - 1, \ si \ guanya \ A.$$

Hi ha parells (a, b) per als quals les dues quantitats són positives. Per exemple $a = 0,53$ i $b = 0.47$ valen 0.18 cada una. L'existencia d'aquestes oportunitats es diu arbitratge.

♦ $Dividends$: És la xifra dels diners, fixa o variable, que paguen molts actius.

♦ $Planquejament$: És una tècnica per invertir mitjançant la qual s'augmenta la rendibilitat de la inversió a costa d'un augment considerable del risc.

Les següents condicions s'han d'especificar en els contractes tant de Put com de Call:

. El subjacent S: És l'actiu amb risc que pot ser comprat o venut

. La mida del contracte: El numero d'unitats del subjacent reflectides en el contracte.

. El preu del exercici K: El preu amb el que el subjacent ha de ser comprat si s'exerceix l'opció.

. La data del contracte: La data en la que se signa i es paga el contracte.

. Data de venciment: La data en la que l'opció venç o expira.

. Tipus: Europea o Americana.

. La prima: El preu pagat pel contracte.

♦ Valor d'una opció Call a venciment:

$C_t = máx\{S_t - K, 0\}$,S_t és el preu del mercat en el instant t.

. Si l'opció és americana, llavors $0 \leqslant t \leq T$.

. Si l'opció és europea llavors $T = t$

. T és el temps de venciment de l'opció.

♦ Valor de una opció Put a venciment:

$P_t = máx\{K - S_t, 0\}$,S_t és el preu del mercat en el instant$t$.

. Si l'opció és americana, llavors $0 \leqslant t \leq T$.

. Si l'opció és europea llavors $t = T$.

. T és el temps de venciment de l'opció.

Exemple. Un empresari adquireix avui una opció de compra de 100 acccions de Telefónica per 15 euros, que la pot exercir al cap de tres mesos.

3 Conceptes matemàtics necessaris

3.1 Les distribucions Normal i Lognormal

Els preus es descriuen mitjançant un model estocàstic. En aquest treball ens centrarem en el model lognormal.

3.1.1 La distribució normal

Es diu que una variable aleatoria real X té una distribució normal amb mitjana $\mu \in \mathbb{R}$ i variança $\sigma > 0$ si la seva densitat és la següent:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

S'escriu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i la seva esperança i la seva variància son

$$E(X) = \mu \quad i \quad V(X) = \sigma^2.$$

3.1.2 La distribució lognormal

Es diu que una variable X positiva és lognormal si el seu logaritme, $\ln X$, és normal. La seva densitat és

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}^{-\frac{1}{2}(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma})^2}$$

i la seva esperança i la seva variància són:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

3.2 Moviment Brownià o procés de Wiener

En 1906 Louis Bachelier va introduir un model del moviment Brownià (observat a la Natura per Brown el 1826) per modelar les fluctuacions dels preus de la Borsa de Paris.

El procès de Wiener W definit a l'interval $(0, T)$ és un procés estocàstic que compleix les propietats següents:

- $W(0) = 0$
- $\forall t \geq 0$,$\forall h \geq 0$, la variable $W(t+h) - W(t)$ és independent de $W(t)$.
- $\forall t \geq 0$,$\forall h \geqslant$0, la variable $W(t+h) - W(t)$ $\sim N(0, h)$

3.3 Moviment Brownià Geomètric

Definim el moviment Brownià Geomètric com el procés $S(t)$ tal que $S(t) = S_0 e^{X(t)}$, on $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ i $S(0) = S_0 > 0$ és el valor inicial. Aquest model ens servirà per descriure la distribució de probabilitat dels preus d'un actiu.

3.4 Lemma de Itô

Aquest lemma és una versió estocàstica del teorema fonamental del calcul.

Sigui W un procès de Wiener. Sigui $G = G(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$. Llavors es té

$$dG(W,t) = \frac{\partial G}{\partial x}(W_t,t)dW_t + \frac{\partial G}{\partial t}(W_t,t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(W_t,t)dt$$

3.5 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier és un operador, que sota certes hipotesis, ens permet tranformar una equació amb derivades parcials en una equació diferencial ordinària.

Definició. Sigui $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Definim la transformada de Fourier de f com

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

L'operador de la transformada de Fourier el notem per F, de manera que $F(f) = \hat{f}$.

Teorema. *Formula d'inversió de Fourier.*

Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ continua i acotada i sigui $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Aleshores

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Denotem per F^{-1}aquest operador.

Demostració. Sigui $\beta(x)$ una funció contínua tal que $\beta(0) = 1, |\beta(x)| < c,\ \beta, \hat{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i

$$\int_{R^n} \hat{\beta}(\xi)d\xi = (2\pi)^n.$$

□

Un exemple d'aquest tipus de funcions és $\beta(x) = \prod_{j=1}^{n} \beta_j(x_j)$, amb $\beta_j(x_j) = e^{-|x_j|}$

Considerem ara la integral

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \beta(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \int_{R^n} \beta(\epsilon\xi)\left(\int_{R^n} f(y)e^{i(x-y)\xi}dy\right)d\xi \qquad (1)$$

Com que és integrable, pel Teorema de Fubini, alternem l'ordre de la integració.
Aleshores

$$f_\varepsilon(x) = \int_{R^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \beta(\epsilon\xi)e^{-i(-x+y)\xi}d\xi)\right)f(y)dy$$

Fent el canvi de variable $\varepsilon\xi = \eta$, llavors tenim

$$f_\varepsilon(x) = \int_{R^n} \frac{1}{(\epsilon)^n}\hat{\beta}(\frac{y-x}{\epsilon})f(y)dy$$

i amb el canvi $t = \frac{y-x}{\varepsilon}$, tenim

$$f_\varepsilon(x) = \int_{R^n} \hat{\beta(t)}f(x+t\epsilon)dt$$

Com $\hat{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i f és continua i acotada, llavors fent servir el Teorema de Convergéncia Dominada tenim que

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \int_{R^n} \hat{\beta}(t)f(x)dt = (2\pi)^n f(x)$$

Aplicant un altre cop el Teorema de Convergéncia Dominada a (1), tenim

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \int_{R^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Corol·lari. *Si* $\hat{f} = \hat{g}$, *aleshores* $f = g$.

Demostració. Si $\hat{f} = \hat{g}, \Longrightarrow \widetilde{(f-g)} = 0$ i aplicant la formula d'inversió de Fourier, tenim que f=g. □

Proposició. *Propietats de la transformada de Fourier.*

Sigui f,g,$h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i F l'operador de la transformada de Fourier. Es té:

1. *Linealitat.*

Si $f = \alpha g + \beta h$,

$$F[f] = F[\alpha\hat{g} + \beta\hat{h}]$$

2. *Translacions.*
Si $a \in \mathbb{R}^n$,

$$F[f(x-a)] = e^{-ia\cdot\xi}\hat{f}, \qquad F[e^{ia\cdot x}f] = \hat{f}(\xi - a)$$

3. *Escala.*
Si $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$F[f(hx)] = \frac{1}{|h|^n}\hat{f}(\frac{\xi}{h})$$

4. *Derivades.*

$$F(\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}) = (i\xi)^n \hat{f}.$$

5. *Conjugació.*

$$Si\ h(x) = \overline{f(x)}, \quad \text{aleshores } \hat{h}(\xi) = \overline{\tilde{f}(-\xi)}.$$

6. *Dualitat.*

$$Si\ h(x) = \hat{f}(x), \text{ aleshores } \quad \hat{h}(\xi) = f(-\xi).$$

Definició. de convolució

Donades dues funcions mesurables i definides sobre $\mathbb{R}^n$, es defineix l'operador de convolució com

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy$$

quan esta bent definit.

Teorema. *de convolució*

$$F(f * g) = \hat{f}.\hat{g}$$

Lema. *Riemann-Lebesgue*

Si $f \in L^1$,aleshores$\hat{f}(\xi) \longrightarrow 0, \qquad$ quan $|\xi| \to \infty$
Aquest lema ens permet demostrar que la trasformada de Fourier és uniformament continua.

En aquest treball farem servir la transformada de Fourier per resoldre l'equació de Black-Scholes.

3.6 L'Equació de la Calor

L'Equació de la Calor és una equació amb derivades parcials molt important. Va ser proposada per Fourier el 1807. Aquesta equació descriu la distribució de la calor en un regió determinada al llarg del temps o l'evolució de la temperatura en un cos sòlid.

L'equació és la següent:

$$\begin{cases} \triangle_x u = \frac{\partial u}{\partial t}, & \text{en el domini } \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \end{cases}$$

on $u \in C^2$ per $x \in \mathbb{R}^n$, i $u \in C^1$per $t \in [0,T]$ i $\triangle_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ és l'operador Laplacià.

En aquest treball ens restringirem al cas $n = 1$.

Per tant com que tenim que $u_{xx} - u_t = 0$ aleshores $F(u_{xx} - u_t)(\xi) = 0$

Llavors aplicant la propietat de derivació obtenim el següent:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0 \end{cases}$$

o sigui

$$\begin{cases} \frac{\hat{u}_t(\xi,t)}{\hat{u}(\xi,t)} = -\xi^2 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0 \end{cases}$$

Per tant integrant entre 0 i t tenim la solució

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

I per tant aplicant el teorema d'inversió i el teorema de convolució de Fourier obtenim,

$$u(x,t) = F^{-1}[\hat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds$$

3.7 La Volatilitat

La volatilitat és la desviació típica de la variació del creixement del preu.També la podem definir com la rao del canvi en el preu d'un actiu subjacent. Com la taxa d'interés, representa una taxa de retorn, però difereix de la taxa d'interés en el fet de que els interessos acumulen una taxa positiva, mentre que la volatilitat representa una combinació de retorns positius i negatius.

Exemple. Si invertim diners amb una taxa de interès fixa, amb el temps s'incrementara, en canvi si invertim en un actiu subjacent amb $\sigma \neq 0$ el valor del actiu pot baixar o pujar, o sigui hi ha risc de perdre els diners en el futur.

Hi ha diferents definicions de volatilitat:

3.7.1 La Volatilitat històrica

La podem calcular fent servir un registre dels moviments del preu de les accions. El preu de les accions el podem observar en intervals fixos de temps (día, setmana,...etc). Suposem que tenim $n+1$ observacions. Sigui S_i el preu de les accions al final de l'interval i $(i = 0, 1, ..., n)$. Sigui τ la duració de l'interval del temps en anys. Definim

$$u_i = \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$$

Una estimació s de la desviació típica de les u_i seria:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - u)^2}$$

on u és la mitjana de u_i.

La desviació típica de les u_i és $\sigma\sqrt{\tau}$, i per tant s és l'estimació de $\sigma\sqrt{\tau}$. Aleshores, si anomenem $\hat{\sigma}$ a l'estimació de σ tenim

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}.$$

3.7.2 La volatilitat implícita

Considerem la fórmula de Black-Scholes amb σ com a parametre lliure i considerem un derivat que cotitza en un mercat. Igualant la fórmula al preu observat C_{bs}^{obs} d'aquest derivat i aillant σ obtenim el que s'anomena volatilitat implícita. Si anomenem I a la volatilitat implícita, satisfà l'equació

$$C_{BS}(t, K, T, I) = C_{BS}^{obs}$$

4 Tres maneres de deduir l'equació de Black-Scholes

Per obtenir l'equació fem servir el següent:

a) El procés de preus S_t d'un actiu, que suposarem que es comporta com un moviment brownià geomètric, és a dir, que satisfà l'equació diferencial estocàstica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

b) Un compte bancari sense risc que satisfà l'equació seguent:

$$dBt = rBdt$$

amb $B_0 = 1$. El paràmetre r és la taxa d'interés, que suposem constant.

c) Una opció Call tal que

$$C_T = max\{S_T - K, 0\}$$

d) No hi ha oportunitats d'arbitratge

4.1 Primera manera (replicació instantànea)

Construim una cartera amb x unitats de l'actiu S, i y unitats de diners en el compte bancari. Llavors, a l'instant t la nostra cartera tindra el valor,

$$V_t = x_t S_t + y_t B_t$$

Imposem que $\forall t$ el preu de la cartera i del Call siguin idèntics, i també que no es pot agregar o treure diners a la cartera (condició d'autofinançament). Llavors considerem l'interval $[t, t + dt]$ i suposem que las unitats x_t i y_t no es canvien en aquest interval. Per tant l'evolució del preu del derivat depèn només de la variació del preu de l'actiu i el creixement del compte bancari. Un cop som a l'instant $t + dt$ modifiquem els pesos de la cartera, peró sense canviar el valor total de la cartera o sigui fent el següent:

- Si treiem alguna cosa del banc ho fem per aumentar la nostre posició en el actiu i viceversa.

- Si venem una part de la nostre posició en l'actiu, las dipositem en el banc.

Aleshores tenim el següent:

$$V_t = x_t S_t + y_t B_t \qquad (1)$$

$$V_{t+dt} = x_t S_{t+dt} + y_t B_{t+dt} =$$

$$= x_{t+dt} S_{t+dt} + y_{t+dt} B_{t+dt} \qquad (2).$$

Fent la diferència entre els valors en temps $t + dt$ i t obtenin el segúent:

$$V_{t+dt} - V_t = x_t S_{t+dt} + y_t B_{t+dt} - x_t S_t - y_t B_t$$

$\Longrightarrow$

$$dV_t = x_t dS_t + y_t dB_t.$$

Fent servir el model tenim,

$$dV_t = x_t S_t(\mu dt + \sigma dW_t) + y_t r B_t dt =$$

$$= (x_t S_t \mu + y_t r B_t)dt + \sigma x_t S_t dW_t \qquad (3)$$

El preu de l'opció és una funció del preu de l'actiu i del temps.
Aplicant el Lemma d'Ito a la funció $C(S_t, t)$ tenim el següent:

$$dC(S_t, t) = (\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{dC}{dS} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})dt + \sigma S_t \frac{dC}{dS} dW_t \qquad (4)$$

Perqué la (3) i la (4) siguin iguals s'ha de complir

$$x_t = \frac{dC}{dS}(S_t, t).$$

De (1) tenim

$$y_t = B_t^{-1}(V_t - S_t \frac{dC}{dS}(S_t, t)).$$

Sabent que $V_t = C(S_t, t)$. Llavors

$$y_t = B_t^{-1}(C(S_t, t) - S_t \frac{dC}{dS}(S_t, t)).$$

També les parts multiplicadas per dt de (3) i (4) han de ser iguals. Per tant

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{dC}{dS} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = x_t S_t \mu + y_t r B_t$$

$$= \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) S \mu + B_t^{-1}[(C(S_t, t) - S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)] r B_t$$

$$= \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) S \mu + [C(S_t, t) - S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)] r$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S} = rC$$

que és l'equació de Black-Scholes.

4.2 La segona manera (el preu del risc en el mercat)

Apliquem el Lemma d'Itô a la funció de preus del Call a (4) i dividim les dues parts per $C_t = C(S_t, t)$. Obtenim el següent:

$$\frac{dC_t}{C_t} = A(S_t, t)dt + B(S_t, t)dW_t, \quad \text{on}$$

$$A(S_t, t) = \frac{1}{C_t}(\frac{\partial C}{\partial S} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})$$

$$B(S_t, t) = \sigma \frac{S_t}{C_t} \frac{\partial C}{\partial S}.$$

Fent servir que $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$, podem eliminar el risc de la manera següent:

$$\frac{dC_t}{B(S_t, t)C_t} - \frac{dS_t}{\sigma S_t} = (\frac{A(S_t, t)}{B(S_t, t)} - \frac{\mu}{\sigma})dt$$

Llavors la cartera (sense risc) que hem construit és

$$V_t = x_t C_t - y_t S_t, \qquad on$$

$$x_t = \frac{1}{B(S_t, t)C_t},$$

$$y_t = \frac{1}{\sigma S_t},$$

per a l'interval $[t, t + dt]$.

Llavors la cartera a l'interval$[t, t + dt]$, ha de créixer com un compte bancari., Per tant tenim el segünet,

$$dV_t = V_t r dt = (x_t C_t - y_t S_t) r dt = (\frac{1}{B_t} - \frac{1}{\sigma}) r dt$$

$\Rightarrow$

$$(\frac{A(S_t, t)}{B(S_t, t)} - \frac{\mu}{\sigma}) = (\frac{1}{B(S, t)} - \frac{1}{\sigma})r$$

Si no fos axí, es permetria guanyar sense risc (hi hauria oportunitats d'arbitratge).

De la igualtat anterior tenim la identitat següent:

$$\frac{A(S_t, t) - r}{B(S_t, t)} = \frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda$$

on λ és l'anomenat preu del risc de mercat i representa l'excès de rendibilitat per sobre la taxa lliure de risc r, per unitat de volatilitat assumida. Evidentment la informació mès important que ens dona aquesta relació és que la rendibilitat esperada depèn de la seva volatilitat, és a dir:

$$A(S_t, t) = r + \lambda B(S_t, t)$$

Llavors sabent que

$$A(S_t, t) = \frac{1}{C}(\frac{\partial C}{\partial S} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})$$

i

$$B(S_t, t) = \sigma \frac{S_t}{C} \frac{\partial C}{\partial S},$$

tenim que

$$\frac{1}{C}(\frac{\partial C}{\partial S} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}) = r + \lambda \sigma \frac{S_t}{C} \frac{\partial C}{\partial S}$$

i per tant

$$\frac{\partial C}{\partial S} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} - \lambda \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

Finalment, sabent que $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ tenim l'equació de Black-Scholes.

4.3 La tercera manera (replicació del preu"forward")

Considerem una cartera formada per x unitats del actiu y y unitats invertides en un bo cupó zero de venciment T. Es tracta de un instrument financer que paga una unitat monetària en temps T i tals que es seu preu inicial el denotem per $P(0, T)$. Per tant com que suposem tipus d'interés constant, el preu del bo ve donat, a cada instant t pel preu

$$P(t, T) = B_t B_T^{-1} = e^{-r(T-t)}.$$

Ara construim una cartera de x_t unitats del actiu S_t i y_t unitats del bo $P(t, T)$.

Tenim

$$V_t = x_t S_t + y_t P(t, T).$$

I en temps $t + dt$, sabent que la cartera és autofinanciada tenim,

$$V_{t+dt} = x_t S_{t+dt} + y_t P(t + dt, T).$$

Dividint per $P(t + dt, T)$ tenim:

$$\frac{V_{t+dt}}{P(t+dt,T)} = x_t \ + y_t.$$

Observem que $\frac{V_{t+dt}}{P(t+dt,T)}$ i $\frac{S_{t+dt}}{P(t+dt,T)}$ són el preus "forward" de la cartera i de l'actiu subjacent a temps $t+dt$

En general, definim els preus forward a temps t com

$$U_t = \frac{V_t}{P(t,T)},$$

$$F_t = \frac{S_t}{P(t,T)}.$$

Aleshores tenim

$$U_t = x_t F_t + y_t,$$

$$U_{t+dt} = x_t F_{t+dt} + y_t.$$

i

$$dU_t = x_t dF_t. \qquad (i)$$

Per tant el que fem és eliminar els diners invertits pel bo canviant el preu del subjacent pel seu preu forward.

Per replicar per tot instant t hem de tenir el segúent:

$$dU_t = d\tilde{C}(F_t,t), \qquad (ii)$$

on $\tilde{C}$ és el preu "forward" del call:

$$\tilde{C}(F_t,t) = \frac{C(P(t,T)F_t,t)}{P(t,T)}.$$

Apliquem la condició de replicació, segons (i) i (ii) tenim:

$$d\tilde{C}(F_t,t) = x_t dF_t.$$

Tenim també

$$dF_t = d(e^{r(T-t)}S_t)$$

$$= -rF_t dt + e^{r(T-t)}dS_t$$

$$= F_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t).$$

Això vol dir que el preu del "forward" del subjacent segueix el mateix moviment Brownià que el preu spot S_t, peró amb deriva $\mu - r$.

Llavors aplicant el Lemma d'Itô obtenim el següent:

$$d\tilde{C}(F_t, t) = (\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\mu - r)F_t\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F} + F_t^2\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2})dt + \sigma F_t\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}dW_t$$

Igualant les dues ultimes expressions i fen servir $d\tilde{C}(F_t, t) = x_t dF_t$ obtenim:

$$(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\mu - r)F_t\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F} + F_t^2\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2})dt + \sigma F_t\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}dW_t$$

$$= x_t F_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t).$$

Imposant que $x_t = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}$, la part estocástica és idéntica i per tant

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\mu - r)F_t\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F} + F_t^2\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2} = (\mu - r)F_t\frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}.$$

Finalment,

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + F_t^2\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2} = 0.$$

Per tant obtenim l'equació de Black-Scholes amb condició final:

$$\tilde{C}(F_T, T) = \frac{\tilde{C}(\frac{S_T}{P(T,T)}, T)}{P(T,T)} = \tilde{C}(S_T, T) = C(F_T, T).$$

..

5 Resolució analítica de l'equació de Black-Scholes

5.1 Primera manera de resoldre l'equació de Black-Scholes (mitjançant l'equació de la Calor)

Resolem l'equació per un Call europeu. Tenim la segúent equació de Black-Scholes:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S} = rC & (*) \\ C(S,T) = máx\{S-K,0\}, \quad \text{Condició final } (t=T) \\ C(0,t) = 0, \quad \text{Condició inicial} \\ \lim_{S\to\infty} C(S,t) = \infty \end{cases}$$

Veiem que aquest sistema depèn de 4 variables o parámetres, i que són:

- La volatilitat σ.
- El temps de venciment T.
- El tipus d'interès r.
- El preu d'exercici K.

Per trobar la solució fem els canvis de variables següents:

$$S = Ke^x, \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad C(S,t) = KV(x,\tau).$$

Ara calculem les derivades parcials:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{2}{K\sigma^2}\frac{\partial C}{\partial t}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial C}{\partial S}S,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{K}(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial C}{\partial S}S) = \frac{1}{K}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Aplicant aquests canvis a la condició inicial tenim:

$$V(x,0) = \frac{1}{K}C(S,T) = \frac{1}{K}máx\{S-K,0\} = máx\{e^x-1,0\}.$$

De $S = Ke^x$, tenim $x = ln(\frac{S}{K})$. Fent servir la regla de cadena obtenim el següent:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}K\frac{\partial V}{\partial x} = e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S}(-e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x} + e^{-x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) = \frac{e^{-2x}}{K}(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}).$$

Ara substituim aquestes equivalències a l'equació i obtenim,

$$rKV = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{K}(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x})\sigma^2 K^2 e^{2x} + re^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}Ke^x$$

Aleshores dividint per K tenim,

$$rV = -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}e^{-2x}(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x})\sigma^2 e^{2x} + re^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}e^x.$$

Aeshores

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial V}{\partial \tau} = -rV + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x})\sigma^2 + r\frac{\partial V}{\partial x}$$

i

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{-2rV}{\sigma^2} + (\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Finalment

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}V.$$

Pel que fa les condicons de contorn tenim:

$$C(S,T) = Kmáx\{(e^x - 1), 0\},$$

i per tant

$$V(x,0) = máx\{e^x - 1, 0\}.$$

D'altra banda com que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$,

$$C(0,t) = K\lim_{x\to-\infty} V(x,\tau) = 0, \quad \forall\tau.$$

Ara agafem $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$ per poder simplificar la notació.

Aleshores el nostre nou sistema és el següent:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda V \\ V(x,0) = m\acute{a}x\{e^x - 1, 0\} \\ \lim_{x\to-\infty} V(x,\tau) = 0 \\ \lim_{x\to\infty} V(x,\tau) = \infty \end{cases}$$

Veiem que aquesta nova equació té un unic paràmetre λ.

Fem un nou canvi de variable per eliminar els termes de menor ordre:

$$V(x,\tau) = e^{ax+b\tau}u(x,\tau)$$

Ara reescrivim tot en funció del canvi de variables:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = e^{ax+b\tau}bu(x,\tau) + e^{ax+b\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} = e^{ax+b\tau}(bu(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{ax+b\tau}au(x,\tau) + e^{ax+b\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} = e^{ax+b\tau}(au(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^V}{\partial x^2} = e^{ax+b\tau}a(au(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}) + e^{ax+b\tau}(a\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2})$$

$$= e^{ax+b\tau}(a^2u(x,\tau) + 2a\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2})$$

Substituint a l'equació obtenim el següent:

$$e^{ax+b\tau}(bu(x,\tau) + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau})$$

$$= e^{ax+b\tau}(a^2u + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + (\lambda-1)e^{ax+b\tau}(au + \frac{\partial u}{\partial x}) - \lambda e^{ax+b\tau}u$$

$\Longrightarrow$

$$(a^2u + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + (\lambda-1)(au + \frac{\partial u}{\partial x}) - \lambda u = bu + \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda-1)\frac{\partial u}{\partial x} + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + a^2u + (\lambda-1)au - \lambda u - bu = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Sabent que a i b son arbitraris, podem imposar:

$$a = \frac{1-\lambda}{2},$$

$$b = -\frac{(1+\lambda)^2}{4}.$$

Substituint aquests valors a l'equació, obtenim l'equació de la Calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ u(x,0) = m\grave{a}x\{e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}x}, 0\} \\ \lim_{x\to-\infty} u(x,\tau) = 0 \\ \lim_{x\to\infty} u(x,\tau) = \infty \end{cases}$$

Observem que $u(x,0) > 0$ si i nomès si $x > 0$. Aleshores,

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{\lambda+1}{2}x} - e^{\frac{\lambda-1}{2}x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La solució de l'Equació de la Calor ve donada per

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

Ara aïllem la solució del nostre problema original i fem un altre canvi de variable:

$$y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}, \qquad ds = \sqrt{2\tau} dy$$

$\Longrightarrow$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau} y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Si $s < 0 \Longrightarrow u_0(s) = 0$. Si $s \geq 0,\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}$. Aleshores,

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau} y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda\text{-}1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda\text{-}1)\sqrt{2\tau}y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= I_1 - I_2.$$

Aleshores tenim:

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y - \frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{4}\tau(1+\lambda)^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y - \frac{y^2}{2}} e^{-\frac{1}{4}\tau(1+\lambda)^2} dy$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{4}\tau(1+\lambda)^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})^2} dy$$

Ara fem aquest canvi de variables

$$\omega = y - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}, \qquad d\omega = dy$$

$\Longrightarrow$

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{4}\tau(1+\lambda)^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega$$

Veiem que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega$ és la simétrica de la funció distribució de la llei normal estàndar que denotem per N. Aleshores tenim:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega$$

$\Longrightarrow$

$$I_1 = e^{\frac{1}{4}\tau(1+\lambda)^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1)x} N(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}).$$

Com que I_1 és idèntic a I_2 nomès hem de canviar $\lambda + 1$ per $\lambda - 1$, i per tant

$$I_2 = e^{\frac{1}{4}\tau(\lambda-1)^2 + \frac{1}{2}(\lambda-1)x} N(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau}).$$

Ara recuparem la formula, definint $\omega(x,\tau)$ tal que:

$$\omega(x,\tau) = e^{-\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2 - \frac{1}{2}(\lambda-1)x} u(x,\tau) = e^{-\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2 - \frac{1}{2}(\lambda-1)x} (I_1 - I_2)$$

$$= e^{-\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2-\frac{1}{2}(\lambda-1)x}e^{\frac{1}{4}\tau(1+\lambda)^2+\frac{1}{2}(\lambda+1)x}N(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})$$

$$-e^{-\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2-\frac{1}{2}(\lambda-1)x}e^{\frac{1}{4}\tau(\lambda-1)^2+\frac{1}{2}(\lambda-1)x}N(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau})$$

$$= e^{x}N(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})-e^{-\lambda\tau}N(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau}).$$

Ara invertim els canvis que hem fet abans. Aleshores tenim:

$$\lambda=\frac{2r}{\sigma^2}, \qquad x=ln(\frac{S}{K}), \qquad \tau=\frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad C=K\omega(x,\tau).$$

I per tant obtenim la Formula de Black-Scholes :

$$C(S,t)=SN(a_1)-Ke^{-r(T-t)}N(a_2)$$

on,

$$a_1=\frac{ln(\frac{S}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$a_2=\frac{ln(\frac{S}{K})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Llavors un cop tenim la solució per un Call Europeu, per un Put Europeu la solució és:

$$C+Ke^{-r(T-t)}-S=P$$

$$P(S,t)=SN(a_1)-Ke^{-r(T-t)}N(a_2)-S+Ke^{-r(T-t)}$$

$$=S[N(a_1)-1]+Ke^{-r(T-t)}[-N(a_2)+1],$$

$$=-SN(-a_1)+Ke^{-r(T-t)}N(-a_2).$$

Exemple. Suposem que el preu inicial de un actiu financer és de 60 euros. La volatilitat del preu de l'actiu és 15%. El tipus d'interès anual ès del 5%.

a) Clacula la prima d'un Call europeu amb venciment a sis mesos i preu d'exercici de 50 euros.

b) Clacula la prima d'un Put europeu amb venciment a sis mesos i preu d'exercici de 50 euros.

Solució:

a) Tenim $S = 60$, $K = 50$, $\sigma = 0,15$, $r = 0,05$,$T = 0,5$, $t = 0$ i volem trobar $C(S,t) = SN(a_1) - Ke^{-r(T-t)}N(a_2)$.

$$N(a_1) = N\left[\frac{\ln(\frac{60}{50}) + 0,5(0,05 + \frac{(0,15)^2}{2})}{0,15\sqrt{0,5}}\right]$$

$$= N(2,00768)$$

$$= 0,977678$$

$$N(a_2) = N(a_1) - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$= 0,977678 - 0,15\sqrt{0,5}$$

$$= 0,971389$$

Aleshores

$$C(S,t) = 60(0,977678) - 50e^{-0,05(0,5)}(0,971389)$$

$$= 11,2904.$$

b) Fent el mateix que abans, tenim $S = 60$, $K = 50$, $\sigma = 0,15$, $r = 0,05$,$T = 0,5$, $t = 0$ i volem trobar $P(S,t) = -SN(-a_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-a_2)$.

$$P(S,t) = 50e^{-0,05(0,5)}(0,0286111) - 60(0,0223216)$$

$$= 0,0549016.$$

5.2 Segona manera (Resolució mitjançant la transformada de Mellin)

Tenim l'equació Black-Scholes següent:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + S_t^2 \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t) S_t \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \\ \quad V(T,S) = f(S), \end{cases} \qquad (i)$$

tal que

. $V(S,t)$ és el valor de l'actiu derivat a l'instant t.

. S és el subjacent.

. $f(S)$ és el valor de l'actiu el dia del venciment T.

Observem que en aquest cas permetem que σ^2 i r siguin funcions deterministes de t.

Ara el primer que fem és definir la transformada de Mellin.

Definició. La transformada de Mellin és una transformada integral que pot ser considerada com una versió multiplicadora de la transformada bilateral de Laplace. Aquesta transformada integral està íntimament relacionada amb la teoria de les sèries de Dirichlet, i és usada habitualment en la teoria de nombres i la teoria de sèries asimptòtiques; també està fortament relacionada amb la transformada de Laplace, la transformada de Fourier i la teoria de la funció Gamma, i forma part de les funcions especials. Es diu que una funció $g(x)$ pertany al domini de la transformada de Mellin si la funció $g(x)x^{k-1} \in L^1([0,\infty))$, és a dir, és integrable Lebesgue en $[0,\infty)$. Llavors la transforma de Mellin de $g(x)$, que denotem com $M[g(x)](z)$ es defineix com

$$g^*(z) = M[g(x)](z) = \int_0^\infty g(x)x^{z-1}dx \qquad Re(z) \leq k \qquad (ii).$$

Ara definim les propietats de la transformada de Mellin que fem servir.

Proposició. *La transformada de Mellin compleix les següents propietats:*

1.M és lineal

2. Si $\lim_{x\to 0} x^{k-1}g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^{k-2}g\,'(x) = 0$, aleshores

$$M[xg'(x)](z) = -zg^*(z) \qquad (iii),$$

$$M[x^2g''(x)](z) = (z^2+z)g^*(z) \qquad (iv).$$

3. L'inversa de la transformada de Mellin ve donada per

$$M^{-1}[g^*(z)](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} g^*(x)x^{-z}dz, \qquad \alpha > k \qquad (v)$$

Considerem el problema (i), que admet una solució $V(S,t)$ tal que $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ pertànyen al domini de la transformada de Mellin. Sigui

$$v(t)(z) = M[V(\cdot,t)](z) = \int_0^\infty S^{z-1}V(S,t)dS. \qquad (vi)$$

Llavors fent servir (iv) , (v) i (vi) obtenim les següents igualtats:

$$M[S\frac{\partial V}{\partial S}(\cdot,t)](z) = -zv(t)(z) \qquad (vii)$$

$$M[S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\cdot,t)] = (z^2+z)v(t)(z) \qquad (viii).$$

Considerem també $f(S)$ pertanyent al domini de la transformada de Mellin. Aleshores,

$$f^*(z) = M[f(S)](z) = \int_0^\infty S^{z-1} f(S) dS \qquad (ix)$$

Ara si apliquem la Transformada de Mellin a l'equació de Black-Scholes obtenim el següent:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = r(t)V - \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(t)S\frac{\partial V}{\partial S},$$

Aleshores

$$M[\frac{\partial V}{\partial t}] = M[r(t)V - \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(t)S\frac{\partial V}{\partial S}].$$

Aleshores

$$\frac{\partial}{\partial t}M[V] = r(t)M[V] - \frac{1}{2}\sigma^2(t)M[S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}] - r(t)M[S\frac{\partial V}{\partial S}].$$

Aleshores

$$\frac{d}{dt}v(t)(z) = r(t)v(t)(z) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)(z^2+z)v(t)(z) + r(t)zv(t)z,$$

Aleshores

$$\frac{d}{dt}v(t)(z) = -[\frac{1}{2}\sigma^2(t)z^2 + (\frac{1}{2}\sigma^2(t) - r(t))z - r(t)]v(t)(z).$$

I per tant l'equació és:

$$\frac{d}{dt}(v(t)(z)) = -p(z)v(t)(z) \qquad 0 \le t \le T \qquad v(T)(z) = f^*(z),$$

on

$$p(z) = \frac{1}{2}\sigma^2(t)z^2 + (\frac{1}{2}\sigma^2(t) - r(t))z - r(t).$$

Observem que es tracta d'una equació diferencial ordinaria, que té com a solució

$$v(t)(z) = f^*(z)e^{-p(z)(t-T)}, \qquad 0 \le t \le T.$$

I aplicant la inversa de la transformada de Mellin obtenim:

$$V(S,t) = M^{-1}[v(t)(z)](S) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} S^{-z} f^*(z) e^{-p(z)(t-T)} dz.$$

Ara fem aquest canvi de variable

$$z = \alpha + i\tau, \qquad dz = id\tau.$$

Per tant tenim

$$V(S,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S^{-(\alpha+i\tau)} f^*(\alpha+i\tau) e^{-p(\alpha+i\tau)(t-T)} d\tau,$$

$$V(S,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S^{-(\alpha+i\tau)} f^*(\alpha+i\tau) e^{\tilde{p}(\tau)(t-T)} d\tau \qquad (*),$$

on,

$$\tilde{p}(\tau) = -p(\alpha+i\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(t)\tau^2 + [r(t) - (\alpha+\frac{1}{2})\sigma^2(t)]\tau i - [\frac{1}{2}\sigma^2(t)\alpha^2 + \alpha(\frac{1}{2}\sigma^2(t) - r(t)) - r(t)].$$

Observem que $V(S,t)$ és solució de l'equació de Black-Scholes.

Anem a comprovar-ho. Si $f(S)$ pertany al domini de la transformada de Mellin, llavors tenim

$$V(S,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S^{-(\alpha+i\tau)} f^*(\alpha+i\tau) d\tau = f(S) \qquad (**),$$

i tenint en compte la definició obtenim

$$|f^*(\alpha+i\tau)| \leq M(\alpha) = \int_0^\infty |f(x)| x^{\alpha-1} dx \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Per a $0 \leq t \leq T$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S^{-(\alpha+i\tau)}||f^*(\alpha+i\tau)||e^{\tilde{p}(\tau)(t-T)}| d\tau$$

$$\leq M(\alpha) S^{-\alpha} e^{(t-T)(-\frac{1}{2}\sigma^2(t)(\alpha^2+\alpha)+r(t)(\alpha+1))} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t)\tau^2(t-T)} d\tau < \infty.$$

I per tant l'expressió$(*)$ esta ben definida, i satisfà l'equació $(**)$.

Llavors sabent que $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^j e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t)(t-T)} d\tau < \infty$ amb $j = 1, 2$ y $0 \leq t \leq T$ i usant el teorema de diferénciació tenim que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S^{-(\alpha+i\tau)} f^*(\alpha+i\tau)p(\alpha+i\tau)e^{-p(\alpha+i\tau)(t-T)} d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\alpha+i\tau)S^{-(\alpha+i\tau)-1} f^*(\alpha+i\tau)e^{-p(\alpha+i\tau)(t-T)} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\alpha+i\tau)(\alpha+i\tau+1)S^{-(\alpha+i\tau)-2} f^*(\alpha+i\tau)e^{-p(\alpha+i\tau)(t-T)} d\tau.$$

Ara substituïnt aquests valors a l'equació original de Black-Scholes obtenim

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S_t^2 \frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S_t \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S^{-(\alpha+i\tau)}[-p(\alpha+i\tau) + \frac{\sigma^2(t)}{2}S^2(\alpha+i\tau)(\alpha+i\tau+1)S^{-2} -$$

$$-r(t)S(\alpha+i\tau)S^{-1} - r(t)]f^*(\alpha+i\tau)e^{-p(\alpha+i\tau)(t-T)} = 0,$$

i per tant comprovem que és solució.

6 Solució numérica de l'equació de Black-Scholes

6.1 Reducció de la equació de Black-Scholes a l'equació de la Calor

L'equació de Black-Scholes pel valor del actiu derivat $V(S,t)$ en el instant t i per un valor del subjacent S és la següent:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + S_t^2 \frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S_t \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \\ V(T,S) = f(S), \end{cases} \qquad (i)$$

tal que

$.V(S,t)$ és el valor de l'actiu derivat a l'instant t

. S és el subjacent

. $f(S)$ és el valor de l'actiu el dia del venciment Tf

Fem els següents canvis de variables per transformar la nostra equació en l'equació de la Calor:

$$x = \ln(\frac{S}{K}), \circledcirc \qquad z = \frac{\sigma^2(t)}{2}(T-t), \qquad V(t,S) = KW(t,S).$$

Aleshores derivant obtenim

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{K}{S}\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{K}{S^2}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{K}{S^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Substituint en l'equació (i) de forma similar a com ho hem fet abans obtenim el següent:

$$\frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial z} - r(t)W = 0 \qquad (ii).$$

Ara fem el mateix canvi que a l'apartat anterior $W(x,z) = e^{a(t)x+b(t)z}$ i derivant respecte x i z obtenim:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = e^{a(t)x+b(t)z}\left(a(t)u(x,z) + \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = e^{a(t)x+b(t)z}\left(a^2(t)u(x,z) + 2a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = e^{a(t)x+b(t)z}\left(b(t)u(x,z) + \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Ara substituint en l'equació (ii) i reordenant obtenim:

$$\frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2(t)}{2}2a(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} + r(t)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$+\left(\frac{\sigma^2(t)}{2}a^2(t) + r(t)a(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}a(t) - r(t) + b(t)\frac{\partial z}{\partial t}\right)u = 0. \qquad (iii)$$

Per a què aquesta equació sigui l'equació de la Calor s'ha de complir el següent:

$$\frac{\sigma^2(t)}{2}2a(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} + r(t) = 0,$$

$$\frac{\sigma^2(t)}{2}a^2(t) + r(t)a(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}a(t) - r(t) + b(t)\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Per tant de la primera igualtat tenim

$$a(t) = \frac{1}{2} - \frac{r(t)}{\sigma^2(t)}.$$

I suposant que $c(t) = \frac{2r(t)}{\sigma^2(t)}$ tenim

$$a(t) = \frac{1-c(t)}{2}.$$

A la segona igualtat dividim per $\frac{\sigma^2(t)}{2}$ i obtenim:

$$a^2(t) + r(t)a(t) - a(t) - r(t) + b(t)\frac{\partial z}{\partial t}\frac{2}{\sigma^2(t)} = 0.$$

Substituint el valor de $a(t)$ obtenim:

$$\frac{1+c^2(t)-2c(t)}{4} + \frac{c(t)-c^2(t)}{2} - \frac{1-c(t)}{2} - c(t) + b(t)\frac{\partial z}{\partial t}\frac{2}{\sigma^2(t)} = 0,$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{-1-c^2(t)-2c(t)}{4} + b(t)\frac{\partial z}{\partial t}\frac{2}{\sigma^2(t)} = 0,$$

$\Longrightarrow$

$$b(t)\frac{\partial z}{\partial t}\frac{2}{\sigma^2(t)} = \frac{(1+c(t))^2}{4}.$$

Aleshores

$$b(t) = \frac{(1+c(t))^2}{4}(\frac{\partial z}{\partial t})^{-1}\frac{\sigma^2(t)}{2}.$$

Per tant amb aquestes $a(t)$ i $b(t)$ l'equació (iii) queda com:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Anem a calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$ tal que $z = \frac{\sigma^2(t)}{2}(T-t)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2}\left([\sigma^2(t)]'(T-t) - \sigma^2(t)\right).$$

Ara denotem

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\sigma^2(t)}{2} = \frac{\sigma^2(t)}{[\sigma^2(t)]'(T-t)-\sigma^2(t)} = D(z(t)).$$

Per tant substituint en $b(t)$ obtenim:

$$b(t) = -\frac{(1-c(t))^2}{4}D(z(t)).$$

I al final obtenim l'equació de la Calor

$$\frac{\partial u}{\partial z} = D(z(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (iv).$$

I com que $z(T) = 0$ la condició final es converteix en una condició inicial de la forma

$$V(S,T) = Ke^{a(T)x}u(x,z) = f(S),$$

$$u(x,z)=\frac{1}{K}f(Ke^{x})e^{-a(T)x}=g(x),$$

on

$$a(T)=\frac{1-c(T)}{2}, \qquad b(T)=-\frac{(1+c(T))^2}{4}D(z(T)),$$

$$c(T)=\frac{2r(T)}{\sigma^2(T)}, \qquad D(z(T))=\frac{\sigma^2(T)}{[\sigma^2(t)]'(T-t)-\sigma^2(t)}=1,$$

$$x(S)=\ln(\frac{S}{K}) \qquad z(t)=\frac{\sigma^2(t)}{2}(T-t).$$

Per resoldre l'equació de la Calor fem servir mètodes de diferéncies finites. Aplicant els mètodes de diferències finites obtenim la solució aproximada $\tilde{u}(x,z)$ en alguns punts de pla.

Considerem el següent domini

$$0\leq z\leq Z_{max}, \text{on } Z_{max}=\frac{\sigma^2(0)}{2}T,$$

$$X_{min}\leq x\leq X_{max}, \text{ on } X_{min}=\ln(\frac{S_{min}}{K}) \text{ i } X_{max}=\ln(\frac{S_{max}}{K}).$$

Dividim el pla en una xarxa de punts , en els quals busquem la solució aproximada de l'equació de la Calor. La xarxa de punts constitueix en un feix de rectes paral.leles a l'eix X que es tallen amb el feix de rectes paral.leles a l'eix Z.

Les rectes són equidistants, la distancia entre les rectes paral.leles a l'eix X és $h=\triangle x$ i la distancia entre les rectes paral.leles a l'eix Z és $k=\triangle z$. Els punts d'interseció d'aquestes rectes són els nodes de la xarxa.

$$(jh,nk), \quad j=\frac{X_{min}}{h},\ldots\ldots,\frac{X_{max}}{h}, \quad n=0,\ldots\ldots,\frac{Z_{max}}{k}.$$

Denotem per u_j^n al valor de la solució en el punt (jh,nk), és a dir $u(jh,nk)=u_j^n$.

Per calcular la solució en aquests punts fem una aproximació de les derivades primera i segona en l'equació (iv). Llavors fent servir el desenvolupament de Taylor tenim:

$$u(x_0+h,z_0)=u(x_0,z_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,z_0)h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,z_0)h^2+\cdots+\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(x_0.z_0)h^j+O(h^{j+1}),$$

$$u(x_0,z_0+k)=u(x_0,z_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,z_0)k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,z_0)k^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^j}(x_0.z_0)k^n+O(k^{n+1}).$$

6.1.1 Esquema explícit

Evidentment per resoldre la nostra equació de Black-Scholes és suficient resoldre l'equacio (iv).

Llavors tenim

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = D(z(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, o) = g(x) \end{cases}$$

Prenem el valor de l'equació en el punt (jh, nk) qulasevol, on $h = \triangle x$ i $k = \triangle z$:

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_j^n = D^n\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n \qquad (v).$$

Fem servir el desenvolupament de Taylor per calcular una aproximació de $\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_j^n$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_j^n k + O(k^2),$$

Aleshores

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k) \qquad (vi).$$

Per obtenir l' aproximació del terme de la segona derivada respecte x calculem el desenvolupament de Taylor en els punts $u(jh + h, nk)$ i $u(jh - h, nk)$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_j^n h + +\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n h^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)_j^n h^3 + O(h^4),$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_j^n h + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n h^2 - \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)_j^n h^3 + O(h^4),$$

Per tant sumant les dues expresions obtenim:

$$u_{j+1}^n + u_{j-1}^n = 2u_j^n + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n h^2 + O(h^4).$$

Aleshores tenim

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{h^2} + O(h^2).$$

Per tant l'equació avaluada en el punt (jh, nk) és la següent:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k) = D^n\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{h^2} + O(h^2) \qquad (vii).$$

Llavors traient els termes d'error ens queda

$$\frac{\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_j^n}{k} = D^n\frac{\tilde{u}_{j+1}^n + \tilde{u}_{j-1}^n - 2\tilde{u}_j^n}{h^2},$$

Aleshores finalment tenim

$$\tilde{u}_j^{n+1} = \tilde{u}_j^n + D^n k \frac{\tilde{u}_{j+1}^n + \tilde{u}_{j-1}^n - 2\tilde{u}_j^n}{h^2}.$$

Les condicions de forntera pemeten l'aproximació de la solució real. La condició inicial permet calcular el valor de la solució aproximada en els punts tals que $z = 0$, $u_j^0 = u(jh, 0)$.

També hi han solucions en els punts que pertanyen a les condicons de frontera

$$u_{j_{min}}^n = g_1(n\triangle z) \quad 1 \le n \le \frac{Z_{max}}{k},$$

$$u_{j_{max}}^n = g_2(n\triangle z) \quad 1 \le n \le \frac{Z_{max}}{k}.$$

6.1.2 Esquema implícit

El métode s'aplica en el punt $(jh, nk + k)$ fent servir els nivells $(j, n + 1)$ i (j, n). L'equació en el punt $(j, n + 1)$ és

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j^n = D^{n+1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1}.$$

Per aproximar la derivada respecte z fem servir l' aproximació backward, i obtenim:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k).$$

I per aproximar la segona derivada respecte x fem la mateixa aproximació que el mètode explícit pero avaluant en el punt $(j, n + 1)$, i obtenim:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{h^2} + O(h^2).$$

Aleshores la nostre equació queda d'aquesta forma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k) = D^{n+1} \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{h^2} + O(h^2).$$

Per tant l'aproximació de l'equació de la Calor en aquest esquema és

$$u_j^{n+1} = u_j^n + D^{n+1} \frac{k}{h^2} \left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}\right),$$

$\Longrightarrow$

$$u_j^n = -D^{n+1} \frac{k}{h^2} u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + 2D^{n+1} \frac{k}{h^2}\right) u_j^{n+1} - D^{n+1} \frac{k}{h^2} u_{j+1}^{n+1}.$$

Per resoldre-ho s' ha de resoldre aquest sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} u^n_{j_{min}+1} \\ u^n_{j_{min}+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u^n_{j_{max}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2D^{n+1}\frac{k}{h^2} & -D^{n+1}\frac{k}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -D^{n+1}\frac{k}{h^2} & 1+2D^{n+1}\frac{k}{h^2} & -D^{n+1}\frac{k}{h^2} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -D^{n+1}\frac{k}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -D^{n+1}\frac{k}{h^2} & 1+2D^{n+1}\frac{k}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1}_{j_{min}+1} \\ u^{n+1}_{j_{min}+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{n+1}_{j_{max}-1} \end{pmatrix}.$$

Les condicions de frontera i inicials són les mateixes que a l'esquema explícit. Per resolde el mètode s'ha d'invertir la matriu del sistema d'equacions, i fer servir métodes com el d'eliminació gaussiana, Gauss-Seidel,etc.

6.2 Mètode alternatiu de resolució de diferències finites

Tenim la següent equació de Black-Scholes per un Put:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + S_t^2 \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(T,S) = f(S) = m\acute{a}x\{K-S,0\} \end{cases}$$

on

$$V(S,t) : [0,\infty) \times [0,T] \to \mathbb{R}.$$

Suposant que $S = S_0, \ i \ t = t_0$ i aplicant la formula de Taylor i diferències finites obtenim:
Per $\frac{\partial V}{\partial t}$ aplicant diferències progressives en el temps tenim

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_0,t_0) = \frac{V(S_0, t_0 + \triangle t) - V(S_0,t_0)}{\triangle t} - \frac{\triangle t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S_0,\eta_1), \qquad t_0 \le \eta_1 \le t_0 + \triangle t \qquad (*),$$

i per les derivades de S aplicant diferències centrades tenim

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_0,t_0) = \frac{V(S_0+\triangle S, t_0) - V(S_0 - \triangle S, t_0)}{2\triangle S} - \frac{(\triangle S)^2}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(\xi_1,t_0), \qquad S_0 \le \xi_1 \le S_0 + \triangle S \qquad (**),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_0,t_0) = \frac{V(S_0+\triangle S,t_0) - 2V(S_0,t_0) + V(S_0-\triangle S,t_0)}{(\triangle S)^2}$$

$$-\frac{(\triangle S)^2}{12}\frac{\partial^4 V}{\partial S^4}(\xi_2,t_0), \ S_0 \le \xi_2 \le S_0 + \triangle S, \ (***).$$

Ara fem els següents canvis per a l'aproximació del punt (S_0,t_0), pel node (j,n):

$V(S_0,t_0) \simeq V_{j,n}; \quad V(S_0{+}\triangle S,t_0) \simeq V_{j+1,n}; \quad V(S_0{-}\triangle S,t_0) \simeq V_{j-1,n}; \quad V(S_0,t_0{+}\triangle t) \simeq V_{j,n+1.}$

Definim $\triangle S = h = \frac{S_{max}}{M}$ i $\triangle t = k = \frac{T}{N}$. És a dir, estem considerant $M{+}1$ possibles valors de l'actiu i $N+1$ instants de temps.

Llavors per a $n \in [0,N]$ i $j \in [0,M]$, el punt (j,n) correspon al preu del actiu $j\triangle S$ a l'instant $n\triangle T$. Denotem per $V_{j,n}$ el valor de l'opció en el punt (j,n).

Ara substituïm les equacións $(*)$ i $(**)$ i $(***)$ a l'equació de Black-Scholes original, i obtenim l´equació en diferències finites

$$\frac{V(S_0,t_0+\triangle t)-V(S_0,t_0)}{\triangle t}+rS\frac{V(S_0+\triangle S,t_0)-V(S_0-\triangle S,t_0)}{2\triangle S}+$$

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{V(S_0+\triangle S,t_0)-2V(S_0,t_0)+V(S_0-\triangle S,t_0)}{(\triangle S)^2}-rV(S_0,t_0)-ET=0,$$

on ET representa l'error del truncament, donat de la següent manera:

$$ET=\frac{\triangle t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S_0,\eta_1)+rS\frac{(\triangle S)^2}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(\xi_1,t_0)+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{(\triangle S)^2}{12}\frac{\partial^4 V}{\partial S^4}(\xi_2,t_0).$$

Tenint en compte que $S=j\triangle S=jh$, i introduint l'aproximació del error del truncament obtenim:

$$\frac{V_{j,n+1}-V_{j,n}}{k}+rjh\frac{V_{j+1,n}-V_{j-1,n}}{2h}+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 h^2\frac{V_{j+1,n}-2V_{j,n}+V_{j-1,n}}{h^2}-rV_{j,n}=0.$$

Multiplicant per $-k$ l' equació obtenim:

$$a_j V_{j-1,n}+b_j V_{j,n}+c_j V_{j+1,n}=V_{j,n+1} \qquad (i)$$

on,

$$a_j=\frac{k}{2}[rj-\sigma^2 j^2], \qquad j=2,3,......,M+1$$

$$b_j=1+k[\sigma^2 j^2+r], \qquad j=1,2,......,M+1$$

$$c_j=-\frac{k}{2}[rj+\sigma^2 j^2], \qquad j=1,2,.....M \qquad i\ n=1,......,N$$

Ara fem el mateix per la condició inicial de l'equació de Black-Scholes. La condició inicial és $V(T,S) = f(S) = max\{K - S, 0\}$. Per tant obtenim:

$$V_{j,n} = f(j\triangle S) = f(jh) = E - jh, \qquad amb \quad j = 1, 2, ...M + 1 \qquad (iv)$$

$$V_{0,n} = E, \qquad \text{amb} \qquad n = 0, 1, 2, ..., N \qquad (v)$$

$$V_{M+2,n} = 0, \qquad \text{amb} \quad n = 0, 1, 2, ..., N \qquad (vi)$$

L'equació (i) ve donada per valors $j = 2, 3, ..., M$, o sigui falten $j = 1$ i $j = M + 1$. Per a que el sistema tingui solució hem d'afegir dues equacions :

Per $\quad j = 1$,

$$b_1 V_{1,n} + c_1 V_{2,n} = V_{1,n+1} \qquad (ii),$$

i per $\quad j = M + 1$,

$$a_{M+1} V_{M,n} + b_{M+1} V_{M+1,n} = V_{M+1,n+1} \qquad (iii)$$

Per tant fent servir les equacions (i) i (ii) i (iii) obtenim la següent forma matricial:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & ... & .... & .... & .... \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & ... & .... & .... & .... \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & ... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & ... & .. & .. & ... & .... & .... \\ & & & & & & & a_M & b_M & c_M \\ ..... & .... & .... & .... & .... & ... & .. & ... & a_{M+1} & b_{M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,n} \\ V_{2.n} \\ V_{3,n} \\ ..... \\ V_{M,n} \\ V_{M+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1,n+1} \\ V_{2,n+1} \\ V_{3,n+1} \\ ..... \\ V_{M.n+1} \\ V_{M+1,n+1} \end{bmatrix}$$

El sistema és de la forma $AX = B$, on A és una matriu tridiagonal d'ordre $(M + 1) \times (M + 1)$.
X és un vector d'ordre $((M+1)\times 1)$ que representa incognites de la forma $V_{j,n},\ on\ j = 1, 2, .., M+1$.
B és un vector d'ordre $((M+1)\times 1)$ que representa dades de la forma $V_{j,n+1},\ on\ j = 1, 2, ..., M+1$.
Per resoldre el sistema fem servir la informació presentada a $(iv), (v)\ i\ (vi)$.

7 Analisi de la fórmula de Black-Scholes

Estudiem la formula següent:

$$C(S,t) = SN(a_1) - Ke^{-r(T-t)}N(a_2) \qquad (i)$$

on,

$$a_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \qquad (ii)$$

$$a_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (iii)$$

1. Estudiem el comportament de C quan $S = 0$

$$C(0,t) = 0 \qquad t \in [0,T)$$

Veiem que en aquest cas tenim problemes quan calculem a_1i a_2, ja que ens queda $\ln 0$, per tant hem de veure el comportament del limit quan $S \to 0$,

$$S \to 0 \implies a_1, a_2 \to -\infty \implies N(a_1), N(a_2) \to 0$$

Aleshores

$$\lim_{S \to 0} C(S,t) = 0$$

2. Ara estudiem el comportament de C quan $S \to +\infty$

$$S \to +\infty \Rightarrow a_1, a_2 \to +\infty \Rightarrow N(a_1), N(a_2) \to 1$$

$$\implies C(S,t) \backsim S - Ke^{-r(T-t)} \backsim S$$

Comprovem que compleixen totes les equacions que modelen el Call europeu

Derivem l'equació (i) respecte S, aleshores:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(a_1) + S\frac{\partial}{\partial S}N(a_1) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}N(a_2) =$$

$$= N(a_1) + SN'(a_1)\frac{\partial a_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}N'(a_2)\frac{\partial a_2}{\partial S}$$

A partir de (ii) i (iii) obtenim:

$$\frac{\partial a_1}{\partial S} = \frac{\partial a_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

$\implies$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(a_1) + \frac{SN'(a_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(a_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

I afirmem que

$$SN'(a_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(a_2)=0$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{N'(a_1)}{N'(a_2)} = \frac{K}{S}e^{-r(T-t)} \quad ?$$

Ara ho comprovem.

Notem que,

$$N'(a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}a_1^2} \qquad N'(a_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}a_2^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{N'(a_1)}{N'(a_2)} = e^{-\frac{1}{2}(a_1^2-a_2^2)}$$

també tenim que

$$a_1 - a_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} =$$

$$= \sigma\sqrt{T-t}$$

i tenim

$$a_1 + a_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} =$$

$$= 2\frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}} + 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t}$$

Per tant, com que

$$a_1^2 - a_2^2 = (a_1+a_2)(a_1-a_2) = (\sigma\sqrt{T-t})(2\frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}} + 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t}) =$$

$$= 2\ln(\frac{S}{K}) + 2r(T-t)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{N'(a_1)}{N'(a_2)} = e^{-\frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2)} = e^{-\frac{1}{2}(2\ln(\frac{S}{K}) + 2r(T-t))} = \frac{K}{S}e^{-r(T-t)}$$

I per tant ens queda que:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(a_1)$$

Per un Put europeu

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-a_1) - SN(-a_2)$$

i fent una analisi anàloga a la del Call, obtenim

$$\frac{\partial P}{\partial S} = N(a_1) - 1$$

8 Programa en llenguatge C per calcular el Call i el Put

Hem vist en els apartats anteriors que el Call i el Put ens queden en funció de la funció de distribució normal "$N(0,1)$", i sabem que $N(x) = \frac{1}{2}(1 + erf(\sqrt{x}))$, on erf és la funció error, per tant per fer el programa si el nostre compilador reconeix la funció "erf" no cal programar-ho, pero en cas contrari ho hauriem de programar. Per tant el nostre programa és el següent:

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
double erf(double x) {
 // constants
 double a1 = 0.254829592;
 double a2 = -0.284496736;
 double a3 = 1.421413741;
 double a4 = -1.453152027;
 double a5 = 1.061405429;
 double p = 0.3275911;

 // guardar el signe de x

 int sign = 1;

 if (x < 0)
   sign = -1;
 x = fabs(x);
 //

 double t = 1.0/(1.0 + p*x);
```

```
  double y = 1.0 - (((((a5*t + a4)*t) + a3)*t + a2)*t + a1)*t*exp(-x*x);
  return sign*y;
}
int main(void){
  double N1,N2,S,K,aux1,aux2,t,T,r,P,C,v,a1,a2,a3;

  printf("Introdueix el preu del actiu S:\n");
  scanf(" %lf",&S);
  printf(" Introdueix el strike K:\n");
  scanf(" %lf",&K);
  printf(" Introdueix la taxa d´interès anual r:\n");
  scanf(" %lf",&r);
  printf(" Introdueix la date inicial en anys t:\n");
  scanf(" %lf",&t);
  printf(" Introdueix la date de venciment en anys T:\n");
  scanf(" %lf",&T);
  printf(" Introdueix la volatilitat v:\n");
  scanf(" %lf",&v);
  a1=log(S/K)+((r+v*v/2)*(T-t));
  a2=v*sqrt(T-t);
  a3=log(S/K)+((r-v*v/2)*(T-t));
  aux1=a1/a2;
  aux2=a3/a2;
  N1=(1+erf(aux1/(sqrt(2.))))/2;
  N2=(1+erf(aux2/(sqrt(2.))))/2;

  C=(S*N1)-(K*N2*exp(-r*(T-t)));
  P=C+(K*exp(-r*(T-t)))-S;
  printf( "El Call és \n" );
  printf(" %25.16lf\n" ,C );
  printf( "El Put és \n" );
  printf(" %25.16lf\n" ,P );
  return (0);
}
```

9 Conclusió

Podem destacar com a conclusió la importancia de l'equació de Black-Scholes en el món finacer grácies a la seva facilitat d'aplicació i també podem destacar que permet als inversors l'oportunitat de protegir-se i continuar invertint els seus fons. En el nostre treball hem deduit l'equació de Black-Scholes de tres maneres diferents, i l'hem resolt utilitzant diferents mètodes analitics i numèrics. Per a fer-ho hem necessitat coneixements matemàtics sobre processos estocastics, anàlisi de Fourier, equaciones amb derivades parcials, equacions diferencials i modelització. Aixo ens demostra la importancia de les matemàtiques en l'àmbit financer i altres àmbits.

Referències

[1] Paul Wilmott, Sam Howison, Jefe Dewynne: “The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction”, Cambridge,1995

[2] John C. Hull: “Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones”. Quarta edició, University of Toronto, 2002