Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

MESURES DE RISC

Autor: Clara-Agnès Pallarès

Directors: Drs Jordi Martí Pideraserra i Josep Vives
Realitzat a: Departament de
Probabilitat i estadística

Barcelona, June 29, 2017

Abstract

Risk valuation has been becoming increasingly important over the last decades. As the financial environment has been becoming more complex it has made necessary to count on new tools to survive in it. In these work we aim to study the most popular measures of risks in the financial word. We will see how the use of such measures can have a huge impact on the global economy and therefore in our daily life and how some of such measures have shape our economic environments more than it may seem at first sight. We are going to explore Value at Risk, the role that it has played in the last economic crisis, and the reasons why it has played such a role. Furthermore we aim to explore which properties should a good measure of risk have and we will also study the Expected shortfall, a measure that meets such properties, unike VaR, and it is likely to become over the years the new benchmark. With all of that we get to see how the mathematical work ends up having a huge influence in our society and how important can be the development of theoretical results that give to all the economic agents tools to have a better control of risks and its impact in the world we life.

Resum

La valoració de riscos ha anat guanyant cada cop més importancia en les darreres dècades. A la vegada que l'entorn financer s'ha anat fent més i més compex, s'ha fet necesari comptar amb noves eines per subsistir-hi. L'objectiu d'aquest treball és el d'estudiar les mesures de risc més populars en el món actual, l'impacte que aquestes han tingut en l'economía global, i per tant en les nostres vides i com algunes mesures de risc han arribat a tenir un impacte molt més potent en l'economia del que pot semblar a simple vistr.a Explorarem el Valor en risc, el

Agraïments

Vull agrair als meus tutors per l'ajuda i guía que m'han aportat al llarg del treball. En Josep Vives per ajudar-me a acotar l'àmbit d'estudi i sol·lucionar-me tots els dubtes que m'anaven sorgint setmana a setmana i a en Jordi Martí per ajudarme a entendre com enllaçar les teories matemàtiques estudiades amb la seva aplicació i efecte en el món real.

Contents

1 Introducció

Al llarg d'aquest treball utilitzarem el concepte d'inversió en un sentit ampli. Tot i que exemplificarem molts dels conceptes mitjançant el cas d'un inversor a la borsa, ens referirem també a qualsevol activitat empresarial que comporti riscos.

D'igual manera al parlar de l'inversor ens referirem no només a l'individu que gestiona una cartera d'inversions si no també a l'empresa que inverteix els seus recursos en la realització de la seva activitat empresarial per tal d'obtenir-ne un benefici.

Considerarem un model financer de mercat d'un sol pas, en el que invertim en el moment t=0 i la nostra inversió venç en t=T. Denotarem per X el guany descomptat del valor de la inversió en t=T.

Finalment suposarem que els inversors dels que parlem són inversors racionals, amb informació perfecte i amb aversió al risc. Podría donar-se el cas a la realitat d'un inversor que gaudís de l'assumpció de riscos. No serà pertinent per al nostre estudi.

2 El risc financer

Els inversors basen la seva activitat en les expectatives de que les seves inversions creixeran amb el temps, reportant-los un creixement en el seu nivell de riquesa.

Durant un període fixat de temps l'inversor racional busca maximitzar els retorns sobre les seves inversions, és a dir, incrementar el valor d'aquestes.

No obstant això els valors de la majoria d'actius depenen del comportament de molts factors de l'entorn que poden ser molt difícils de preveure, és a dir, el valor futur d'aquests és incert. Això ens porta a definir el concepte de risc.

Podem definir el risc com la possibilitat de perdre derivada, d'una situació d'incertesa. Basant-nos en aquesta definició podem entendre el risc financer com la possibilitat de pèrdua de valor d'una inversió, derivada de la impossibilitat de predir el futur.

També podem entendre-ho com la possibilitat d'obtenir rendiments per sota dels esperats.

Definim per altra banda el retorn esperat com el retorn mitjà entre tots els possibles resultats. El risc i el retorn en una inversió estan estretament relacionats.
Normalment un major retorn esperat passa per assumir un major nivell de risc. Observem que considerant un inversor racional que pot triar entre dues posicions de diferents nivells de risc amb el mateix retorn, no tindria sentit triar la inversió amb un risc més elevat si el retorn sobre aquesta no s'eleva també.

En resum, l'objectiu de l'inversor a l'hora de realitzar una inversió és el de maximitzar els retorns esperats minimitzant els nivells de riscs assumits. I a mesura que la inversió i l'entorn que l'envolta es van fent més i més complexos, la mesura del risc assumit i la gestió d'aquest, també augmenten en la seva complexitat.

Per això a mesura que augmenta la incertesa i complexitat de les decisions financeres, va guanyant importància comptar amb bones eines per fer una efectiva gestió del risc.

La gestió del risc: Es tracta del conjunt d'eines amb que compta un inversor per tal d'identificar, mesurar i controlar els riscos que assumeix en les seves inversions.

En els darrers anys és una activitat que ha anat guanyant cada cop més importància.

Podem classificar les polítiques de gestió del risc d'un inversor en:

Polítiques de gestió passiva.

Polítiques de gestió activa.

Quan parlem de polítiques de gestió passiva ens referim a la contractació d'assegurances que cobreixin els riscos que volem gestionar.

En quant a les polítiques de gestió activa dels riscos són aquelles que impliquen una distribució de les inversions de forma que el nivell de risc queda minimitzat. És pot basar tant en la diversificació com en la utilització de d'instruments financers que, ben utilitzats poden limitar el risc al qual ens exposem.

1) Diversificació dels riscos.

Es tracta de repartir les nostres inversions de tal manera que els riscos als quals es troben exposades no siguin els mateixos. És allò que es diu de "no posar tots els ous en la mateixa cistella". Per que aquesta sigui efectiva en la seva limitació del risc serà necessari que els actius en els quals invertim estiguin el més incorrelacionats possible.

Matemàticament entenem la correlació com la mesura de la relació o dependència existent entre els rendiments d'ambdós actius. Considerem l'exemple d'una cartera d'inversions formada per accions del Santander i Zara.

A priori podríem pensar que esta ben diversificada donat que la nostra inversió es troba en dos sectors prou diferents entre si. No obstant, si fem això no estem tenint en compte que ambdues es troben al mateix país i que una baixada forta de l'Ibex 35 pot provocar la caiguda de la cotització d'ambdues empreses. És a dir, es troben correlacionades ja que un percentatge elevat de la variació dels seus preus es troba afectat per la situació de l'economia espanyola.

En aquest cas la cartera estaria més ben diversificada i reduiria l'exposició al risc de país, incloent accions d'alguna empresa de fora d'Espanya, el creixement de la qual no es trobés molt relacionat amb creixement espanyol.

Per tant per utilitzar tal forma de control de riscos és requereix entendre bé les correlacions que es poden donar entre les diferents opcions d'inversió per tal de triar la combinació que faci més efectiu el control del risc.

2) Derivats financers: Els derivats financers són actius financers tals que l'evolució del seu preu depèn de l'evolució del preu d'un actiu subjacent. Són exemples de derivats financers les opcions financeres, els contractes de futurs i els swaps.

Aquests derivats es poden utilitzar fàcilment com a mecanismes de cobertura del risc assumit.

Veiem-ho amb un exemple:

Suposem que disposem de 100.000€ invertits en accions d'AMADEUS adquirides a un preu de 50€ per acció , tenim pensat recuperar la inversió en 10 mesos però no estem disposats a perdre més d'un 10 % del valor invertit.

En aquest cas podem utilitzar les opcions put per tal de limitar el risc de pèrdua.

La compra d'opcions put ens donarà l'opció de vendre les accions que tenim a un preu determinat en un moment futur del temps, mitjançant el pagament d'una prima.

De forma que, si al cap de 10 mesos el preu de les accions és trobés a 40€ per acció i les opcions put comprades ens donen dret a vendre per 46€, la nostra pèrdua serà de només 4€ per acció més la prima que haguem pagat per les opcions.

En tots aquests casos estem considerant la gestió del risc com un fet que afecta a l'inversor particular o a una empresa en concret. En un entorn econòmic tant globalitzat com el d'avui en dia i tant relacionat, veurem que l'existència i utilització de bones mesures de risc que ens permetin una correcta gestió per part d'algunes institucions clau poden ser vitals per a l'economia de tot el país i fins i tot per al bon funcionament d'aquesta a nivell internacional. Amb l'objectiu d'entendre aquestes relacions explicarem els elements principals que composen el sistema financer actual i algunes de les relacions entre aquests.

2.1 El sistema financer

Podem definir el sistema financer com el conjunt d'institucions, mitjans i mercats encarregats de canalitzar els excedents d'estalvi generat pels agents econòmics d'un país cap als agents demandants de crèdit. És a dir, gestiona l'estavi d'un país estimulant-ne el creixement de l'economia, generant rendiments per a l'estalviador a la vegada que financiació per al deutor.

Així, facilita els moviments de capitals a la vegada que otorga seguretat al sistema de pagaments.

Actius financers

Per fer aquesta tasca de canalització de l'estalvi s'utilitzen els actius financers. Sent aquests aquells títols o anotacions comptables que emeten les unitats econòmiques de despesa i que constitueixen un mitjà per mantenir la riquesa dels seus propietaris a la vegada que un passiu per a aquells que els generen.

Aquests, tot i no augmentar directament la riquesa real d'un país, si que hi tenen un gran efecte ja que permeten moure recursos cap a la seva economia real. Aquests actius estan caracteritzats per la seva liquiditat, rentabilitat i risc. Les accions d'empreses cotitzades en borsa en són un exemple.

Mercats financers

Anomenem mercats financers a aquells mecanismes a través dels quals es produeix l'intercanvi i es determinen els preus dels actius financers. No és necessari que es tracti d'un lloc físic, per exemple aquest intercanvis es poden realitzar telefònicament, electrònicament o per internet. Les seves funcions principals són:

1. Posar en contacte els diversos agents econòmics que intervenen en el mercat.
2. Fixació dels preus.
3. Proporcionar liquiditat pels actius.
4. Facilitar l'intermediació reduïnt temps i costos.

Òrgans reguladors

Tant per la complexitat del sistema financer com per la importància d'aquest en tot el sistema econòmic a nivell mundial, existeixen òrgans reguladors d'aquest. Els òrgans reguladors supervisen el compliment de les lleis així com el de les normes que ells mateixos emeten per tal d'assegurar el bon funcionament del sistema. Del conjunt d'aquestes normes se'n diu regulació financera.

Intermediaris financers

Es tracta del conjunt d'institucions especialitzades en la mediació entre els prestamistes i prestataris d'una economia, tals que transformen els actius financers primaris (les emissions de deute per part d'aquells agents que demanen financiació) en actius financers secundaris més adaptats a les necessitats dels agents amb excedents de recursos.
Aquesta transformació permet que, una empresa que necessiti financiació no hagi d'anar a buscar a un estalviador amb unes necessitats d'inversió coincidents amb les de financiació de l'empresa, cosa que podria dificultar molt l'intercanvi, si no que pugui obtenir aquesta financiació a través d'una entitat financera.
Un dipòsit plaç fix al banc pel qual una entitat bancaria paga un interès a l'estalviador a canvi de disposar dels diners durant un temps determinat, és un exemple d'actiu financer primari. Entre aquest intermediaris financers es destaquen especialment els bancs i les institucions financeres.

Aquest sistema financer el podem dividir en tres subsistemes de gran importància tan a nivell nacional com internacional, són:

El sistema bancari, el sistema borsari i el sistema d'assegurances. Veurem que cadascun d'ells compta amb els seus propis òrgans reguladors i amb la seva pròpia regulació adaptada a les seves característiques.

El sistema bancari

L'European Banking Authority és la seva entitat reguladora a nivell Europeu, es tracta d'un organisme regulador amb seu a Londres fundat el 2011 amb l'objectiu de regular les activitats bancàries, millorar-ne la transparència i identificar debilitats en les estructures de capital dels bancs. A nivell nacional la Banca es troba regulada pel Banc d'Espanya i el document de regulació principal per a la banca a nivell internacional és el tractat de BASILEA III.

El sistema Bursàtil

La institució reguladora a nivell europeu es l'European Security Markets Authority, essent la CNMV (comissió nacional del mercat de valors) l'entitat reguladora a nivell nacional, encarregada de la supervisió i inspecció dels mercats de valors espanyols i de l'activitat dels agents que hi intervenen amb els objectius de vetllar per la transparència dels mercats de valors, la correcta formació de preus i la protecció dels inversors. La Directiva sobre Mercats d'instruments financers abreujada MIFID (Markets in Financial Instruments Directive) és la llei de la unió europea que harmonitza la regulació sobre els serveis d'inversió a nivell europeu, amb l'objectiu d'incrementar i la competició i protecció de l'inversor.

El sistema d'assegurances A espanya és un sector que es troba majoritàriament gestionat per l'estat. S'hi inclou el sistema de pensions i el de la seguretat social, així com l'atur. A nivell Europeu es troba regulat per l'European insurance ocupational plans authority, i a nivell nacional per la " DGS fondos de pensiones" essent el seu document regulador el "Solvéncia II".

En cada un dels diferents documents que regulen els aquests sistemes s'estableixen diferents classificacions del risc, segons els factors que el provoquen. Al final de l'apartat anterior hem comentat que una bona gestió del risc per part d'algunes institucions clau pot ser vital per al bon funcionament de l'activitat econòmica d'un país.

En particular en el cas dels subsistemes que acaben de comentar, si alguna de les seves institucions més importants arribés a una situació de fallida, els efectes col·laterals en l'economia real podríen ser devastadors. Un cas prou il·lustrador en el que s'han patit les conseqüències d'una gestió del risc insuficient ha sigut el del sistema bancari.

Com ja hem comentat els bancs són els principals encarregats d'injectar liquiditat en l'economia real canalitzant els dipòsits dels estalviadors cap a l'economia en forma de financiació per a consumidors i empreses. La seva activitat principal és doncs la de concedir crèdits i en aquesta, no només deixa els diners dels dipositats pels estalviadors sinó que té la capacitat de crear-ne (limitada per la quantitat de capital que realment té). D'aquesta forma injecta liquiditat en l'economia estimulant-la. Òbviament tot això implica l'assumpció de riscos per a l'entitat bancària i, a això s'hi ha de sumar el fet que les diverses entitats acostumen ha deixar-se diners entre elles, cosa que fa que el mal funcionament d'un banc pugui passar a afectar als altres.

Si el banc no ha identificat i i limitat bé els riscos assumits al concedir aquests crèdits i es donen es donen les circumstàncies que fan que aquests creditors no puguin tornar els préstecs, aquest banc es pot trobar en una situació de fallida.

Els efectes que això pot tenir sobre l'economia i tot el sistema poden ser devastadors. Si un banc entra en fallida el govern d'un país té dues opcions, rescatar-lo o no rescatar-lo. Posem pel cas que es deixa caure el banc. Ens trobaríem amb dos problemes principals:

1)En el cas espanyol tot i que existeix un fons de garantia pel qual l'estat cobreix els dipòsits fins a 100.000, depenent del tamany del banc aquesta operació pot sortir molt cara als contribuents, cosa que fa que en molts casos pugui ser més barat rescatar el banc que deixar-lo caure.

2) Com hem dit el banc deu diners a altres bancs, per tant la caiguda d'un banc gran pot tenir un efecte en cadena cap als altres bancs, afectant a la confiança entre els mateixos (gairebé un requisit per al bon funcionament del sistema) acabant per limitar el crèdit concedit a qualsevol banc del país en qüestió o susceptible de tenir relació amb els bancs del país portant a una

limitació del crèdit i, en conseqüència a la depressió de l'economia. Seria aquest el cas dels bancs anomenats "too big to fail".

Per tant en molts casos la opció menys dolenta és la de rescatar, costant molts diners al país que ho fa.

Afegint a tot això que la relació entre el retorn i el risc és positiva, cosa que constitueix un incentiu a l'assumpció de riscos, es fa absolutament necessari tenir mecanismes de control adients per evitar l'assumpció de riscos excessius per part d'aquestes institucions clau, donats els efectes devastadors que pot tenir la materialització d'aquests riscos.

I és aquí on cobra una gran importància el comptar amb mesures del risc eficaces per tal de mesurar adequadament el risc assumit.

3 Mesures de risc

Vista la importància de l'existència de bones mesures de risc i del seu paper en el sistema financer nacional i internacional anem a veure quins són els enfocs més utilitzats.

3.1 La variància

Es tracta d'una de les mesures de risc més utilitzades tot i que no per això la més encertada. Aquesta considera el risc com la incertesa en el valor futur d'alguna quantitat en qüestió. Aquesta incertesa s'entén com la dispersió al voltant d'un punt de referència que en el cas d'un actiu financer serà el rendiment esperat. I la amplitud d'aquesta dispersió és el que mesura al variància. Matemàticament :

$$Var(K) = E(K - \mu)^2 = E(K^2) - \mu^2$$

anomenant $\sqrt{Var(K)}$ la desviació estàndard,
i essent E(x) l'esperança matemàtica.

Aquesta mesura de risc té molts crítics, i es fàcil veure per què:

Si per exemple considerem dues inversions A i B. Tals que A té un retorn esperat d'entre 10 i 50 unitats monetàries mentre que el retorn esperat de B varia entre -5 i 5 unitats monetàries, tenim que:
var(A)>var(B) però no obstant està clar que la inversió A és millor en tots els escenaris que la B i per tant la variància no estaria mesurant correctament el risc de la inversió.

Si bé es cert que moltes vegades, sobretot en el sector borsari, els actius de més risc acostumen a presentar una variància més elevada, està clar que no és la variància el que fa que un actiu presenti un nivell de risc determinat.

El risc que interesa a l'inversor és el que mesura el risc de pèrdua. I per tant, es fa necessària una mesura de risc que ens proporcioni aquesta informació.

Una de les mesures més popularitzades que compleix aquest objectiu és el valor en risc.

3.2 Valor en risc

El valor en risc és una tècnica estadística utilitzada per mesurar i quantificar el nivell de risc financer en una firma o una cartera d'inversions durant un periode específic de temps. Proporciona una xifra que expressa la pèrdua potencial, donat un nivell de confiança i temps determinats, permetent al gestor del risc determinar si el risc assumit és o no acceptable.

Mesura el risc de la cartera en conjunt, es pot aplicar de forma universal i permet calcular els riscos per diferents tipus de carteres.

El valor del VaR expressa la pèrdua potencial donat un nivell de confiança determinat i un període de temps, permetent la valoració del risc representada en una única xifra per poder determinar si aquest és acceptable o no.

Aquesta mètrica és utilitzada principalment per bancs comercials i d'inversió per determinar la severitat i probabilitat de patir pèrdues potencials en les seves carteres institucionals.

El càlcul del VaR pot ser utilitzat per analitzar el risc de posicions específiques o carteres d'inversions així com per mesurar l'exposició al risc d'una empresa en concret.

3.3 L'ús del VaR en l'actualitat

Els bancs d'inversió utilitzen normalment el model del VaR per estudiar el risc total de l'empresa donada la probabilitat de que els diferents departaments d'inversió del banc exposin a la firma a actius molt correlacionats entre ells de forma no intencionada, amb l'augment de risc que això pot comportar.

Utilitzar el VaR per estudiar el risc global de l'empresa permet la determinació dels riscos acumulats provocats per la suma total de les posicions d'inversió preses pels diferents departaments d'una mateixa institució.

Amb la informació proporcionada pel VaR les institucions financeres poden determinar si tenen suficient capital a les reserves per cobrir les posibles pèrdues o si el risc global près és innacceptable i es requereix diversificar les inversions.

De fet el Bank of International Settlement (BIS) utilitza el VaR amb un nivell de confiança del 99% i t=10 dies per mesurar la adecuació del capital bancari al risc que el banc en questió assumeix. El considera adequat quan aquest capital iguala o supera la xifra del VaR multiplicada per 3.

Notem que en un ambient estacionari pel risc el Var al 99% de confiança a 2 setmanes s'espera que es superi bruscament cada 4 anys.

Per tant per l'objectiu predominant de protegir el valor de l'empresa no podem considerar el VaR com el nivell de capital necesari per cobrir el risc de l'empresa.

A més, a la pràctica la majoría de firmes utilitzen el VaR amb nivells de confiança inferiors al mencionat. És molt comú, per exemple, el VaR al 95% de confiança.

Per exemple JP Morgan el publica diàriament al 95%.

Bankers trust el publica diariament al 99%.

El VaR doncs, serveix per evaluacions relatives.

L'avantatge principal d'aquesta mesura de risc és la seva simplicitat de càlcul quan tenim suficient dades disponibles com per estimar una llei de probabilitat per el rendiment de la variable de la qual es calcula el risc.

No obstant, té dos inconvenients importants que comentarem al llarg del treball:

1. Pot determinar un risc superior en una posició diversificada que sense diversificar

2. No ens dona cap informació sobre l'impacte potencial d'events molt improbables. Els que s'anomenen típicament en el món financer com "Black swan".

De fet, aquest últim inconvenient ha jugat un paper important en l'última gran crisis mundial iniciada el 2008 desde la qual hem tingut diversos d'aquests escenaris. El Brèxit en seria un bon exemple.

3.4 Quartils

Donada una inversió amb un valor futur incert, el Valor en Risc determina la pèrdua màxima esperada del valor del seu guany descomptat X, en el $\gamma\%$ dels millors escenaris, donat un període de temps t determinat.

Per exemple, podem considera un inversor amb una cartera d'inversions en Borsa.

Sigui X el guany descomptat de la seva inversió. Tal inversor pot estar interessat en saber si el seu guany descomptat en la inversió té com a mínim un 95% de probabilitats de mantenirse per sobre d'un cert nivell, normalment negatiu.

És a dir, de saber el límit de les seves possibles pèrdues donat un marc temporal y un cert nivell de confiança.

En aquest cas el Valor en Risc al 5% donaría resposta a aquesta pregunta. Prenent X com a una variable aleatòria, observem que el càlcul del VaR està intimament lligat a la la funció de distribució de la probabilitat acumulada de X.

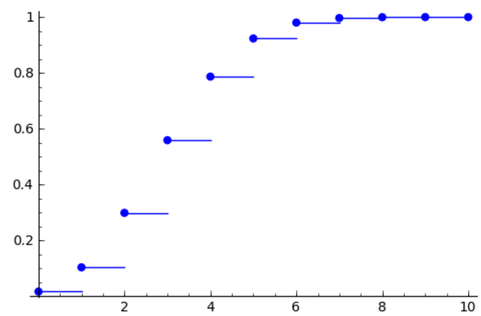
Això ens permetrà la utilització dels anomenats quartils per calcular-ne el valor. Els quartils són una mesura de posició d'una variable estadística. Donada una probabilitat podem expressar un resultat utilitzant-los.

Definició 3.1. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *un espai de probabilitat i* $\mathcal{X} : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ *una variable aleatòria.*
Definim la funció de distribució $\mathcal{F}_X : \mathcal{R} \longrightarrow [0,1]$ *com* $\mathcal{F}_X = P(X \leq x)$*, funció que és continua per la dreta i no decreixent.*

Definició 3.2. *Per* $\alpha \in (0,1)$ *definim:*
Quartil superior de X: $q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$.
Quartil inferior de X: $q_{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha \leq Fx(x)\}$.
Sent l'α-quartil d'X , qualsevol $q \in [q_{\alpha}\ (X),\ q^{\alpha}(X)]$.

Els quartils superior i inferior són diferents quan el gràfic de la funció de distribució F_X és plà, tal com podem veure el l'exemple següent:

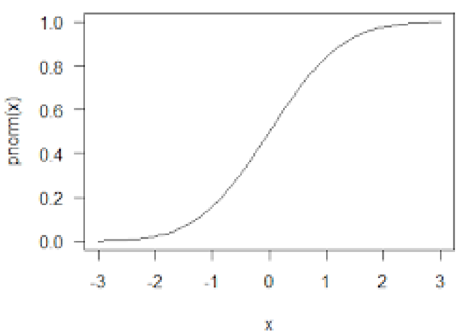
Exemple 1. *Si considerem la funció de distribució acumulada corresponent al gràfic:*



Els quantils superior i inferior seràn diferents sempre que considerem un α *tal que* $F^{-1}(\alpha)$ *es correspongui a un interval de* $\mathbb{R}$*. Per exemple* $q^{0.1}(X) = 2$ *mentre que* $q_{0.1}(X) = 1$ *ja que per* $x \in [1,2)$*,* $F(x) = 0.1$*.*

Altrament $\mathrm{q}_{\alpha} = \mathrm{q}^{\alpha}$.

Exemple 2. *Si F és contínua i estrictament creixent:*



En aquest cas $\forall\alpha$*,* $\exists F^{-1}(\alpha)$ *i* $q^{\alpha}(X) = F^{-1}(\alpha) = q_{\alpha}(X)$*.*

Ens serà útil comentar ara algunes propietats bàsiques dels quartils

Propietats

Siguin X, Y variables aleatòries:

i) $X \geqslant Y$ implica q$^\alpha$(X) $\geqslant$ q$^\alpha$(Y)

ii) Per tot $b \in \mathbb{R}$ q$^\alpha$(X+b)=q$^\alpha$(X)+b.

iii) Per b>0, q$^\alpha(bX) = bq^\alpha$(X).

iv) $q^\alpha(-X) = -q_{1-\alpha}(X)$.

Demostració. *i) $X \geq Y$ implica que si $x \geq X$ aleshores $x \geq Y$ i $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$. Aleshores tenim:*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(Y \leq x) = F_y(x).$$

Aquesta última inequació significa que

$$\{x; \alpha < F_X(x)\} \subset \{x; \alpha < F_Y(x)\},$$

que porta a

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} \geq \inf\{x : \alpha < F_Y(x)\} = q^\alpha(Y)$$

ii) Sent Y=X+b

$$F_Y(x{+}b) = P(X{+}b \leq x{+}b = F_X(x) = q^\alpha(X{+}b) = \inf\{x{+}b : \alpha < F_Y(x{+}b)\}$$

Com que b es un valor fixat:

$$\inf\{x : \alpha < F_Y(x + b)\} + b = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} + b = q^\alpha(X) + b.$$

iii) $F_bX(x) = P(bX \leq x) = P(X \leq x/b) = F_X(x/b)$, per tant podem observar que per $b > 0$:

$$q^\alpha(bX) = \inf\{x : \alpha < F_{bX}(x)\} = \inf\{x : \alpha < F_X(x/b)\} = \inf\{by : \alpha < F_X(y)\} = b\inf\{y : \alpha <$$

iv) Per demostrar iv) prèviament haurem de demostrar que la següent igualtat és certa però tot $b \in \mathbb{R}$ *:*

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Tenim que $P(X < x) \leq P(X \leq x)$ *i observem que*

$$b \leq P(X \leq x) \rightarrow b \geq P(X \geq x).$$

Cosa que significa que:

$$\{x : b \leq P(X < x)\} \subset x : b \leq P(X \leq x)\},$$

que implica

$$\inf\{x : b \leq P(X < x)\} \geq \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\}.$$

Si podem provar que la inequació estricta ens porta a una contradicció, aleshores haurem provat que la igualtat és certa.
Suposem que $\exists\ x^* \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < x^* < \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Aleshores $x^* \leq \inf\{x : b \leq P(X < x)\}$ *implica* $P(X < x^*) < b$*,*
i donat que $x \rightarrow P(X < x)$ *és continua per la dreta* $\exists \hat{x} \in \mathbb{R}$*, tal que:*

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < \hat{x} < x^*,$$

Pel qual

$$\hat{x} < \inf\{x : b \geq P(X < x)\} \longrightarrow P(X \leq \hat{x}) \geq b.$$

Però $\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} \geq \hat{x} \longrightarrow b > P(X < \hat{x})$*, arribant a una contradicció. Per tant:*

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : b \leq P(X < x)\},$$

és cert.

Utilitzem també la identitat:

$$F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x) = 1 - F_X(-x),$$

per veure que:

$q^{\alpha}(-X) = inf\{x : \alpha < F_{-X}(x)\} = -\sup\{-x : \alpha < F_{-X}(x)\} = -\sup\{-x : \alpha < 1 - P(X < -$

(donat que $y \longrightarrow P(X < y)$ és no decreixent)

$= -\inf\{y : 1-\alpha \leq P(X < y)\} = -\inf\{y : 1-\alpha \leq P(X \leq y)\} = -\inf\{: 1-\alpha \leq F_X(y)\} = -$

Lema 3.3. *Si $F_X(x)$ és continua i estrictament creixent:*

$q^{\alpha}(X)=F_x^{-1}(\alpha)$.

Demostració. *Tota funció contínua i estríctament creixent és invertible. Per tant F_X és invertible i la seva inversa $\alpha \longrightarrow F^{-1}(\alpha)$ és contínua. Aleshores $\alpha < F_X(x)$ equival a $F_X^{-1}(\alpha) < x$. Donant l'expressió següent:* $q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) < x\} = F_X^{-1}(\alpha)$.

Lema 3.4. *Sigui X una variable aleatòria. Si f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua per la dreta i no decreixent:*

$q^{\alpha}(f(X))=f(q^{\alpha}(X))$.

Demostració. $X_1 \leq x_2 \longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$, *aleshores*
$P(F(x_1) \leq F(x_2)) \leq P(x_1 \leq x_2)$ *tenim:*
$F_{f(X)}(f(q^{\alpha}(X))) = P(f(X) \leq f(q^{\alpha}(X))) \geq P(X \leq q^{\alpha}(X)) =$
$= Fx(q^{\alpha}(X)) \geq \alpha$,
veiem que $f(q^{\alpha}(X)) \geq q_{\alpha}(f(X))$.
Si veiem que $y > f(q^{\alpha}(X))$ *implica* $y \geq q^{\alpha}(f(X))$,
aleshores $f(q^{\alpha}(X))$ *és el* $\alpha -$ *quartil més gran per f(X).*
Per tot $y > f(q^{\alpha}(X))$.
Donat que f és contínua per la dreta i no decreixent, tenim que $f^{-1}(-\infty, y)$ *és un interval obert per la forma* $(-\infty, a)$, *per a algún* $a \in \mathbb{R}$.
Això ens dona:
$(-\infty, q^{\alpha}(X)] \subset \{x : f(x) \leq f(q^{\alpha}(X))\} \subset \{x : f(x) < y\} = (-\infty, a)$,
que significa que existeix un x^* *pel qual* $q^{\alpha}(X) < x^* < a$.
Donat que $q^{\alpha}(X) < x^*$:
$\alpha < F_X(x^*)$, *aleshores definint Y=f(X),*
$F_Y(y) = P(Y \leq y) \geq P(Y < y) = P(X < a) \geq P(X \leq x^*) = F_X(x^*) > \alpha$,
cosa que implica que $y \geq q^{\alpha}(Y) = q^{\alpha}(f(X)).\#$

3.5 Mesurant el risc de pèrdua

Podem passar a definir ara el Valor en risc.

Definició 3.5. *El Valor en Risc d'X amb un nivell de confiança (1-α) tal que $\alpha \in$ (0,1) es defineix com:*

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) = -\inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

També podem expressar el VaR en termes de pèrdues:

$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) = q_{\{}1-\alpha\}(-X) = \inf\{x : 1-\alpha \leq P(-X \geqslant x)\} = \inf(x : P(x < -X) \leq \alpha\ \}$.

Això significa que la probabilitat de que les pèrdues siguin superiors al VaR^{α} és com a màxim α, que vol dir que amb un nivell de confiança $(1-\alpha)$, no perdrem més que VaR^{α}.

3.6 Propietats del VaR

Siguin X, Y variables aleatòries.

i) X $\geq$ Y implica VaR$^{\alpha}$ $\leq$ VaR$^{\alpha}$(Y).

ii) Per tot a $\in \mathbb{R}, VaR^{\alpha}$(X+a) = VaR$^{\alpha}(X) - a$

iii) Per tot $a \geqslant 0, VaR^{\alpha}(aX) = aVaR^{\alpha}$(X).

Demostració. *Surt directe aplicant $VaR^{\alpha}(X) = q^{\alpha}(X)$ i utilitzant les propietats dels quantils.*

3.7 Càlcul del VaR^{α}

A continuació veiem com podem calcular el VaR segons si X és una variable aleatòria discreta o contínua.

Cas discret

Lema 3.6. *Sigui X una variable aleatòria discreta amb $P(X = x_i) = p_i$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, i $x_1 < \cdots < x_N$. Aleshores:*

$$VaR_{\alpha}(X) = -x_{k_{\alpha}}$$

On $k_{\alpha} \in \mathbb{N}$ és el nombre més gran tal que $\sum_{i=1}^{k_{\alpha}-1} p_i \leq \alpha$

Demostració. $VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) = -inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = -inf\{x : \alpha < P(X \leq x)\}$ *donat que* $X \in \{x_1, ..., x_N\}$
$=-min\{x_k : \alpha < P(X \leq x_k)\}$ *utilitzant* $P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i$
$=-min\{x_k : \alpha < \sum_{i=1}^{k} p_i\}$
i aplicant $min\{k : \alpha \leq \sum_{i=1}^{k} p_i\} = max\{k : \alpha \leq \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leqslant \alpha\}$
$=-max\{x_k : \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \alpha\} = -x_{k_{\alpha}}$. *Per la definició de k_{α} concloent la prova.*

Cas continu

Estudiarem ara el càlcul de VaR^{α}(X) per variables aleatòries que segueixen una distribució contínua.

Comentarem alguns resultats que ens poden ser útils.

Lema 3.7. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció no decreixent i contínua per la dreta. Aleshores,*

$$VaR_{\alpha}(f(X)) = -q^{\alpha}(f(X)) = -f(q^{\alpha}(X)),$$

Aplicant l'anterior lema podem calcular d'una forma directa i fàcil el VaR de variables que es puguin expressar com a funció contínua i no decreixent d'una variable aleatòria que segueixi una funció de distribució coneguda, contínua i invertible.

És a dir, sigui Z una variable aleatòria tal que la seva funció de distribució és contínua i invertible. Pel Lema 3.3 tenim que $VaR^{\alpha}(Z) = -F_Z^{-1}(\alpha)$ i aplicant el lema anterior $VaR^{\alpha}(X(Z)) = -X(q^{\alpha}(X))$.

No obstant això, a la pràctica la majoría de vegades necessitarem calcular el Valor en Risc de variables que no compleixen les condicions anteriors.

Per a aquests casos ens serà útil càlcular el VaR utilitzant les simulacions de Monte Carlo. Abans, presentarem alguns resultats auxiliars.

Definició 3.8. *Diem que una seqüència de variables aleatòries $X_1 \cdots X_n$, convergeix en probabilitat a una variable aleatòria X, i ho denotem com a:*
$X_n \xrightarrow{P} X$,
si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ *en cada punt contínu* x *de* F_X*, és a dir* $\forall x \in \mathcal{R}$, $\lim_{y\to x} F_X(y) = F_X(x)$.

Llei feble dels grans nombres Sigui $X_1, X_2, \ldots$ una seqüència infinita de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes tals que $\forall X_i$ $\mathbb{E}(X_i) = \mu > 0$ i la Variànça$(X_i) = \sigma^2$ aleshores la seva mitjana $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} X_i}{n}$ convergeix en probabilitat a μ.

Lema 3.9. *Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una seqüència de variables aleatòries idènticament distribuides, $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, amb la mateixa distribució que X. Sigui $x \in \mathbb{R}$ fixa. Si prenem una seqüència de variables aleatòries $F_N(x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definides com:*

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\{X_i \geqslant x\}},$$

Aleshores $F_N(x) \xrightarrow{P} F_x(x)$.

Demostració. *Considerem la seqüència d'infinites variables aleatòries $Y_1, \cdots, Y_N$ definides per $Y_i = 1_{\{X_i \leqslant x\}}$.*

Sigui $Y = 1_{\{X \leqslant x\}}$, per la llei feble dels grans nombres $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \longrightarrow \mathbb{E}(Y)$, aleshores $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \longrightarrow \mathbb{E}(1_{\{X \leq x\}}) = P(X \leq x) = F_X(x)$.

Si generem N simulacions $\hat{X_1}, ..., \hat{X_N}$ seguint la mateixa distribució que X i considerem:

$\hat{F_N}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{\{\hat{X}_i \leq x\}}$ Pel lema anterior 3.10 tenim que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F_N(x) = \lim_{N\to\infty} \hat{F_N}(x)$ (1)

Sigui Y_N la variable aleatòria definida per la distribució $P(Y_N = \hat{X}_i) = \frac{1}{N}$ $\forall i \in [1, ..., N]$. Notem que:

$$F_{Y_N} = \hat{F_X}.$$

Per (1) i prenent una N suficient gran, podem aproximar el $VaR^{\alpha}(X) \approx VaR^{\alpha}(Y_N)$ (2)

I donat que $\forall N$, Y_N és una variable discreta, podem calcular $VaR^{\alpha}(Y_N)$ utilitzant el Lema 3.6.

4 VaR en el model Black Scholes

El model Black Scholes és un model àmpliament utilitzat en l'àmbit financer per a la valoració d'opcions financeres.

Va guanyar popularitat el 1973 gràcies a la publicació de l'article "Theory of Rational Option Pricing" per part de Robert C. Merton a on feia referència a un model matemàtic desenvolupat per Fisher Black i Myron Scholes.

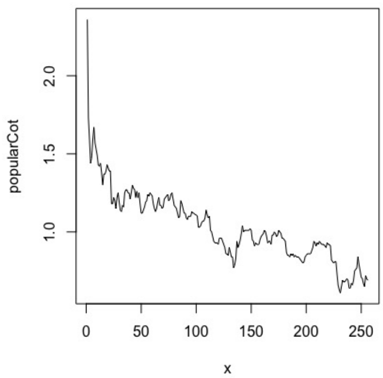
Les opcions financeres són derivats és a dir, productes financers el rendiment dels quals depèn del valor d'un altre actiu, anomenat actiu subjacent i caracteritzats per que es liquiden en una data futura.

En concret una opció financera dóna dret al seu comprador de comprar o vendre l'actiu subjacent a un preu determinat en una data futura a canvi d'una prima que es paga en el moment de contractació. Es poden classificar entre opcions Europees o Americanes depenent de si es poden exercir només al venciment (t=T) o si permeten la seva execució en qualsevol moment del temps entre la data de contractació i la de venciment.

Les opcións put són un dels instruments més utilitzats per reduir el risc de preu assumit en una cartera d'inversions. Ja que permet reduir el risc de variacions desfavorables del subjacent a la vegada que no anula les possibilitats de beneficiar-se de moviments favorables d'aquest.

Exemple 3. *Anem a veure com hauría resultat una cobertura amb puts d'una cartera d'accions de Banc Popular realitzada a 25/5/16.*

Suposem que tenim 1000 accions del banc Popular que cotitzen a 2,36 euros per acció i realitzem una cobertura amb 10 contractes d'opcions put Europees (on cada contracte dona el dret a vendre 100 accions en el moment de venciment T, a un preu K) amb data de venciment 24/6/16 i preu d'exercici K=2,36 euros. Per les quals paguem una prima P.



Com podem observar en el gràfic realitzat amb les cotitzacions diàries de l'acció del popular duant el període al qual ens referim, el dia 25/6/16 els preus de les accions habien baixat a 1,18 euros per acció.

Això significa que la nostra cartera hauría tingunt una pèrdua de valor de 1180 euros. No obstant al disposar dels puts, podríem exercirlos provocant un guany de $(2,36-1,80)*1000 = 820$ *euros.*

Per tant la pèrdua en la cartera provocada per la caiguda dels preus es veuría compensada, en part pels guanys dels puts, reduint aquesta a (1180-1180-P)= P.

Si a data de venciment del put el preu hagués estat per sobre de 2,36, per exemple 3, els puts tindríen un valor nul, perdent la prima invertida pero hauríem pogut beneficiarnos de la pujada de preus de l'acció.

En la realitat, no sempre podem escollir lliurement el preu d'exercici de les opcions, cosa que fa que la cobertura difícilment sigui perfecta. Això, ho comentarem més endavant.

En aquest apartat, ens disposem a analitzar com es calcula el VaR d'una cartera amb accions soles, amb accions i actius lliure de risc i amb puts, com varia aquest al afegir-hi puts i actius lliures de risc i donades les restriccions de preus d'exercici dels puts, com podem mínimitzar-lo segons la tria d'opcions que en fem.

Ho farem utilitzant el model Black-Scholes en el qual es considera una acció S(t) que no paga dividents i s'assumeix que els rendiments sobre l'acció en un període curt de temps segueixen una distribució normal.

Això implica que el preu de l'acció en qualsevol data futura segueix una distribució logarítmica normal.

Així tindrem que: $S(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}Z}$ on μ>0 representa la mitjana, σ>0 representa la volatilitat de l'acció i Z segueix una distribució normal estàndard N(0,1).

Considerem ara un actiu lliure de risc, sigui r la taxa d'interès lliure de risc podem modelar el preu d'aquest actiu en un moment t per:

$A(t) = A(0)e^{rt}$ Per simplificar els càlculs assumirem que A(0)=1.

En el cas de les opcions financeres considerem una opció put Europea amb venciment en T.

Sigui H(t) el valor de la opció put en el moment t amb un preu d'exercici K en T. El preu de compra de la opció és:

H(0)=P(r,T,K,S(0),σ)= $Ke^{-rT}N(-d_-) - S(0)N(-d_+)$, on

$d_+ = \frac{\log\frac{S(0)}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_- = \frac{\log\frac{S(0)}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ I N és la funció de distribució normal estàndar acumulada.

I el valor de la opció put al venciment:

$$H(T) = (K - S(T))^+$$

Lema 4.1. *Considerem S(T) i H(T):*

$$q^\alpha(S(T)) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)}$$

$$q^\alpha(-H(T)) = -(K - q^\alpha(S(T)))^+.$$

Demostració. *Podem expressar S(T) en funció de z:* $f(z) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z}$, *que és una funció creixent i en conseqüència podem aplicar el Lema 1.6 obtenint* $q^\alpha(f(Z)) = f(q^\alpha(Z))$ *i donat que Z segueix una distribució normal estàndar, aplicant el Lema 1.5 tenim* $q^\alpha(Z) = N^{-1}(\alpha)$.

Aleshores $f(N^{-1}(\alpha)) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)}$, *tal com volíem demostrar.*

Quant a la igualtat 1.15, com H(T) és pot expressar mitjançant la funció definida per $g(\gamma) = -(K - \gamma)^+$ *i aquesta és no decreixent podem aplicar novament el Lema 1.6 obtenint*

$$q^\alpha(-H(T)) = q^\alpha(g(S(T)) = g(q^\alpha(S(T)) = -(K - q^\alpha(S(T)))^+).$$

4.1 Risc per a diferents composicions de cartera

Anem a veure com podem calcular el VaR sobre el rendiment d'una cartera per a diverses composicions d'aquesta. En primer lloc considerem una cartera d'inversions que només contingui una acció. El guany descomptat d'aquesta és $X = e^{-rT}S(T) - S(0)$ i, utilitzant el Lema 3.7 :

$$VaR^\alpha(X) = S(0) - e^{-rT}q^\alpha(S(T)) = S(0) - e^{-rT}S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)} = S(0)(1 - e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}$$

Veiem que passa quan treballem amb una cartera que es composa tant d'accions com d'actius lliures de risc.

Suposem que en el moment t=0 comprem x accions d'una empresa i y actius lliures de risc. Sigui $V_{(x,y)}(t)$ el valor de la cartera al moment t, tenim:

$$V_{(x,y)}(t) = xS(t) + yA(t).$$

Utilitzem $X_{(x,y)}$ per denotar el guany descomptat:

$$X_{(x,y)} = e^{-rT}V_{(x,y)}(T) - V_{(x,y)}(0)$$

Lema 4.2. *Si $x \geq 0$ aleshores:*

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,y)}) = V_{(x,y)}(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) - y$$

Demostració. *Donat que $x \geqslant 0$, podem expressar $X_{(x,y)}$ com a una funció no decreixent de S(T):*

$X_{(x,y)} = f(S(T))$, *tal que:*

$$f(\lambda) = e^{-rT}(x\lambda + yA(T)) - V_{(x,y)}(0) = xe^{-rT}\lambda + y - V_{(x,y)}(0).$$

Aleshores aplicant el Lema 3.9:

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,y)}) = -q^{\alpha}(f(S(T)) = -f(q^{\alpha}(S(T)) = V_{(x,y)}(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) - y.$$

#

Veiem com varia la valoració del risc l'afegir-hi l'actiu lliure de risc. Triant $x \in (0,1)$ i $y = (1-x)S(0)$ tenim: $VaR^{\alpha}(X_{(x,y)} = V_{(x,y)}(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) - y = xS(0) + A(0)y - e^{-rT}q^{\alpha}(S(T))$

(Recordem que A(0)=1 i per tant A(0)y=y)

$=xS(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T))$ (per 1.16)

$=xVaR^{\alpha}(X) < VaR^{\alpha}(X)$. #

Cartera amb puts Europeus

Sigui $V_{(x,z)}(t) = xS(t) + zH(t)$, el guany descomptat s'expressa com:

$$X_{(x,z)} = e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0) = e^{-rT}(xS(T) + z(K - S(T))^{+}) - V_{(x,z)}(0).$$

Lema 4.3. *Si* $0 < z \leq x$ *aleshores*

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,y)}) = V_{(x,y)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}S(T)) + z(K - q^{\alpha}(S(T)))^{+}).$$

Demostració. $0 < z \leq x$ *implica que podem expressar* $X_{(x,z)}$ *com una funció no decreixent de S(T)*

$X_{(x,z)} = f(S(T))$ *on* $f(\lambda) = e^{-rT}(x\lambda + z(K - \lambda)^{+}) - V_{(x,z)}(0)$ *Utilitzant el Lema 3.9 obtenim*

$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = -f(q^{\alpha}(S(T))) = e^{-rT}(-xq^{\alpha}(S(T)) - z(K - q^{\alpha}(S(T)))^{+}) + V_{(x,z)}(0) = V_{(x,y)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}S(T)) + z(K - q^{\alpha}(S(T)))^{+}$.

En el món real però, no tenim completa llibertat per triar el preu d'execució de l'opció si no que hem de triar entre un conjunt d'opcions ofertades en el mercat.

Veiem com funciona el model considerant aquesta restricció. Suposem que podem invertir en n opcions put amb n preus d'execució $K_1, \ldots, K_n$ al venciment T. Denotarem $H_i(t)$ el rendiment de la opció put amb preu d'execució K_i. En concret tenim:

$H_i(0) = P(r, T, K_i, S(0), \sigma)$,

$H_i(T) = (K_i - S(T))^{+}$. Suposem que configurem una cartera amb x accions i z_i opcions put amb preus K_i per $i \in 1, ..., n$. Siguin z, 1, i H(t) per t=0, T vectors de $\mathbb{R}$ definits per:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_n(t) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Aleshores podem expressar el valor de la inversió en un moment t com:

$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + z^T H(t)$. Aleshores el guany descomptat és:

$X_{(x,z)} = e^{-rT} V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0)$.

Proposició Si $z_i \geq 0$, per tot $i = 1, \ldots, n$ i $\sum_{i=1}^{n} z_i = z^T 1 \leq x$, aleshores

$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)} = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}(S(T)) - z^T q^{\alpha}(-H(T)))$.

$$q^{\alpha}(-H(T)) = \begin{pmatrix} (K_1 - q^{\alpha}(S(T)))^+ \\ \vdots \\ (K_n - q^{\alpha}(S(T)))^+ \end{pmatrix} .(1.20) \tag{4.4}$$

Demostració. *Aplicant 1.17 podem derivar la formula 1.20 .*

Donat que $z^T 1 \leq x$, *la funció*

$\lambda \longrightarrow e^{-rT}(x\lambda + \sum_{i=1}^{n} z_i(K_i - \lambda) - V_{(x,z)}(0))$ *és no decreixent i utilitzant el Lema 1.6 veiem que es compleix:*

$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}(S(T)) + \sum_{i=1}^{n} z_i(K_i - q^{\alpha}(S(T)))^+)$

$\#$

Com ja hem vist abans un dels usos principals dels puts és el de cobertura d'una cartera. De forma que si el preu de les nostres accions baixa per sota del preu d'execució dels puts, podem compensar la pèrdua en el mercat d'accions amb els beneficis que obtindrem exercint les opcions. Pero ens trobem amb que depenent dels preu d'exercici dels puts triats la cobertura tindrà diferents costos i diferents nivells d'eficiència.

Suposem que tenim un capital per invertir V_0 . Amb aquest invertim x accions i ens disposem a investigar com minimitzar el $VaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ mitjançant una tria adequada de $z = (z_1, ..., z_n)$. Tenim doncs $c = V_0 - xS(0)$ per destinar a la compra de puts.

Donat que el nostre objectiu és de cobertura suposarem que no prenem posicions curtes en l'acció ni en els puts i que el nombre d'opcions no excedeix el nombre d'accions de la nostra cartera.

Qualsevol d'aquestes dues accions es correspondría a una estratègia d'especulació comportant l'assumpció d'alts nivells de risc.

Sota aquestes hipòtesis i utilitzant la proposició anterior veiem que podem formalitzar la minimització del $VaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ de la forma següent:

min $z^T q^{\alpha}(-H(T))$,

Complint-se: $z^T H(0) = c$,

$z^T 1 \leq x$,

$z_0, ..., z_n \geqslant 0$.

I el fet que H(0) i $q^{\alpha}(-H(T))$ siguin vectors fixes de $(R)^n$, fa que l'anterior enunciat sigui un problema típic de programació lineal que podem solucionar numèricament.

Per finalitzar anem a veure com calcular el VaR per carteres composades per diversos actius. En aquest cas ens serà útil utilitzar les simulacions de Monte Carlo, de les quals hem parlat abans.

Veiem com es faría:

Considerem n accions $S_1, ..., S_n$ tals que, segons el model Black Scholes n-dimensional, compleixen: $S(T) = S_j(0)exp((\mu_j - \frac{\sigma^2}{2})T + \sum_{l=1} nc_{jl}\sqrt{T}Z_l)$

On $Z_1, ...Z_n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuides seguint una distribució normal estàndar, $c_{jl} \in \mathbb{R}$ per $j, l \in \{1, ..., n\}$ fixats i

$$\sigma_i = \sqrt{c_{j1}^2 + ... + c_{jn}^2}$$

4.2 Inconvenients i exemples

A continuació comentarem els principals inconvenients que presenta el VaR en el seu ús com a mesura de risc.

Ho il·lustrarem amb alguns exemples utilitzant la següent notació:

V(0) = valor invertit en el moment 0,

V(T) = valor que rebem en el moment T,

X= {guany descomptat en el moment $T\} = e^{-rT}V(T) - V(0)$

r= taxa d'interés lliure de risc en interés compost.

En primer lloc, observem que el VaR^{α}(X) ens dona el valor de la pèrdua màxima produïda en el millor $(1-\alpha)\%$ dels escenaris, però no té en compte les pèrdues amb una probabilitat menor a $\alpha\%$ que poden ser molt grans.

Exemple 4. *Considerem ara que estem a càrrec del departament d'inverions d'un banc financer. Hem de decidir quina serà la nostra següent inversió, tenint en compte que el banc haurà de complir certs criteris dels organismes reguladors internacionals respecte al risc que asumeix, mesurat mitjançant el VaR.*

Podem triar entre una primera inversió tal que el seu guany descomptat és:

$$X = \begin{cases} \geq 0 \text{ € } \textit{amb probabilitat 0.95} \\ -100.000 \text{ € } \textit{amb probabilitat 0.025} \\ -200.000 \text{ € } \textit{amb probabilitat 0.025} \end{cases}$$

I una segona inversió Y tal que el seu guany descomptat és:

$$Y = \begin{cases} \geq 0 \text{ € } \textit{amb probabilitat 0.95} \\ -100.000 \text{ € } \textit{amb probabilitat 0.025} \\ -2.000.000 \text{ € } \textit{amb probabilitat 0.025} \end{cases}$$

Si calculem el VaR per a les dues inversions amb un nivell de confiança del 95%, obtenim: ,$VaR^{0,05}(X) = VaR^{0,05}(Y) = -100.000$ *e,* *És a dir tot i que amb la inversió Y existeix una pèrdua màxima de* 1.800.000 *e superior a la pèrdua màxima que es pot patir amb la inversió X el* $VaR^{0,05}$ *d'ambdúes inversions és el mateix.*

Això il·lustra un dels grans inconvenients del VaR que ja habiem anticipat abans. El VaR depèn només en la probabilitat de pèrdues per damunt del $\alpha -$ *quartil de* $F_X(x)$, *sense donar cap informació sobre si les pèrdues amb menor probabilitat estàn sempre una mica per sota del valor en risc calculat o si aquestes són molt més grans que aquest essent necessari tenir-les en compte.*

Degut a la situació inusual de l'economia mundial en la que estem i que hem estat vivint durant els últims anys, podem trobar diversos exemples recents del que estem parlant.

La victòria del Brèxit així com els impagaments hipotecaris que es van anar produint als inicis de la crisi i durant aquesta en són dos bons exemples.

A més, com hem vist en l'exemple anterior, aquest aspecte del VaR presenta un inconvenient important per diversos motius:

Per una banda el responsable de decidir les inversions del banc té incentius a triar una estratègia que entranyi un risc potencial elevat però poc probable de forma que no quedi reflexat al VaR. Per l'altra pot portar a realitzar cobertures del risc insuficients, atès a que la mesura dona una informació insuficient del risc assumit.

De fet, el 2007, el VaR era la mesura de risc per excelència en el món financer i els diferents bancs l'utilitzaven com a mesura del risc que assumíen amb les seves inversions, tant per decidir-ne la validesa com per determinar el capital que calía reservar per cobrir el risc.
Així quan els successos "altament improbables" van tenir lloc va resultar que aquests no seguíen una distribució normal, és a dir, que eren molt més extrems que el que podía indicar el VaR, de forma que les organitzacions que habien gestionat el risc confiant cegament en aquesta mesura obviament no estaven preparades i en van pagar les conseqüències.

Un exemple d'estratègia que entranyi riscos elevats i poc probables, a canvi d'un augment en els beneficis sería la venta de puts de baixa probabilitat realització.

Veiem ara el segon problema important té el VaR:

Exemple 5. *Considerem dues inversions independents X_1 i X_2, amb guanys:*

$$X_i = \begin{cases} \textit{0} & \textit{amb probabilitat p} \\ \textit{1} & \textit{amb probabilitat 1-p} \end{cases}$$

Considerant una cartera composada amb una composició del 50% de l'actiu X_1 i del 50% de l'actiu X_2 aleshores el nostre guany serà:

$$\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2} = \begin{cases} 0 & \textit{amb probabilitat } p^2 \\ \frac{1}{2} & \textit{amb probabilitat } 2p(1-p) \\ 1 & \textit{amb probabilitat } (1-p)^2 \end{cases}$$

Si $\alpha \in (p^2, p^2 + 2p(1-p))$ aleshores $F_{\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{2}}(\frac{1}{2}) = p^2 + 2p(1-p) > \alpha$ mentre que $F_{\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{2}}(0) < \alpha$ i $VaR^\alpha(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}) = \frac{1}{2}$.
Observem que donat que $p < 1$ $p^2 < p$ i $p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2 > p$, podem trobar $\alpha \in (p, p^2 + 2p(1-p))$ pel qual es compleix:
$VaR^\alpha(X_1) = VaR^\alpha(X_2) = 0$
Aleshores per $\alpha \in (p, p^2 + 2p(1-p))$,

$$VaR^\alpha(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}) > VaR^\alpha(\frac{X_1}{2}) + VaR^\alpha(\frac{X_2}{2}).$$

Resultat que contradiu el principi de que la diversificació redueix el risc, mostrant així una altra mancança del VaR com a mesura de risc.

5 Estimació de la funció de distribució

Durant la secció anterior hem estudiat en profunditat el VaR, les seves característiques i el seu ús en el món financer actual.

Per fer-ho ens hem basat sempre en l'utilització de distribució de probabilitats de la Variable de la qual volem analitzar el nivell de risc.

Pero determinar la distribució de probabilitat d'una variable no es tant senzill a la pràctica. De fet, només en podem fer suposicions amb l'esperança de que aquesta s'ajusti el màxim possible al comportament real de la variable.

Per fer això s'utilitzen diversos mètodes. En comentarem els més utilitzats.

1. La simulació històrica:

Es basa en l'utilització de dades històriques de la variable de la qual ens interesa calcular el VaR per tal de realitzar un model de la seva distribució de probabilitats, amb l'esperança de que aquestes dades siguin prou rellevants per explicar el comportament en un futur proper de la variable.

Bàsicament si volem calcular el VaR a t dies d'una inversió, amb un cert nivell de confiança $(1-\alpha)$, sigui X la variable aleatòria que representa el seu rendiment, utilitzarem dades històriques el mes rellevants possibles(normalment properes en el temps) per calcular els resultats passats d'aquesta variable, es a dir, els rendiments passats de l'actiu en que hem invertit. Sigui n el nombre de dades utilitzades i r_i cada un dels resultats tenim $(r_1, ..., r_n)$ representant els rendiments obtinguts en el passat.

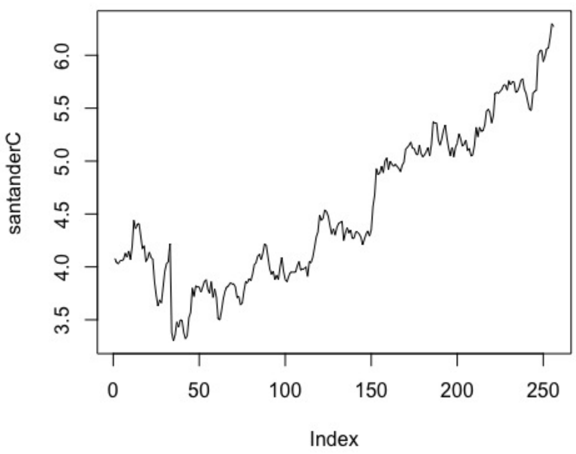
Aleshores construïm la funció de distribució d' X assumint que $P(X = r_i) = \frac{1}{n}$. I a partir d'aquesta ja podem calcular el $VaR^{\alpha}(X)$ utilitzant l'expressió del seu càlcul per a variables aleatòries discretes.

Exemple 6. *Suposem que tenim una cartera formada per 1000 accions del Banc Santander el dia 8/5/17 en el qual la cotització és de 6,27 euros per a acció.*

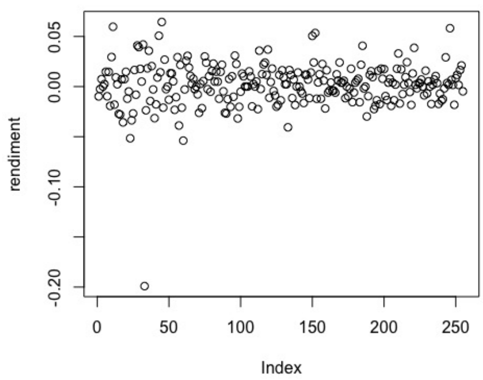
Volem calcular el VaR a un dia amb un nivell de confiança del 99% i 95%, és a dir volem saber quina és la nostra probabilitat de pèrdua màxima en el 99% i 95% dels millors escenaris.

1. En primer lloc identifiquem les variables del mercat que afecten al valor de l'acció. Per simplicitat considerarem com a la única variable explicativa els preus històrics de l'acció del Santander amb una relació directa sobre el preu futur d'aquest.

2.Disposem dels preus al tancament de la sessió de l'acció corresponents als 256 dies de cotització anteriors a la data d'avui.

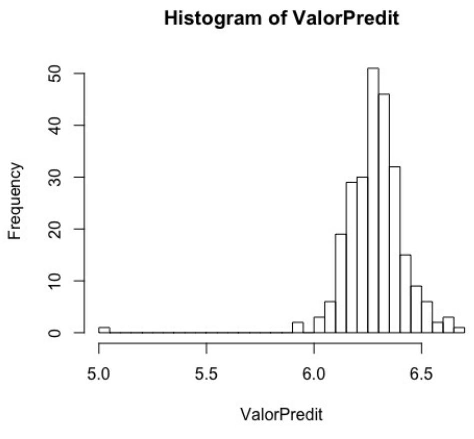


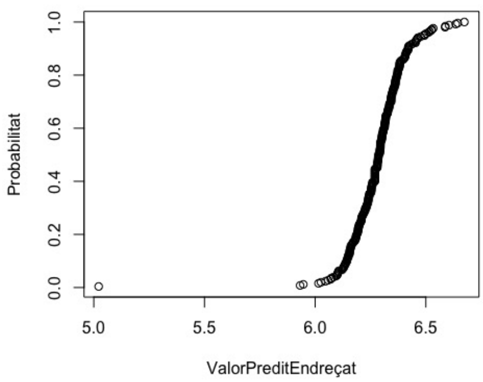
I amb aquestes dades calculem els rendiments a 1 dia de l'acció durant aquest període:



3) Apliquem aquestes rendibilitats al valor de l'acció a dia d'avui. Multiplicant la dada de l'última cotització del santander per $1 + r_i$ *obtenim 255 simulacions sobre el valor de l'acció en un dia.* $X_i = 6.27 * (1 + r_i)$

I, considerant que cada un d'ells té la mateixa possibilitat d'ocurrència si endrecem les dades obtingudes podem generar-ne una funció de distribució discreta de la qual en podem calcular l'histograma i la funció de distribució acumulada:





4)Per finalment obtenirne el VaR corresponent al primer i cinquè percentil de la distribució obtenint:

$$VaR^{0,01}(X) = 5,983612$$
$$VaR^{0,05}(X) = 6,101743$$

També podrem obtenir el Valor en Risc sobre el preu de l'acció calculant el VaR de la funció de distribució generada pels rendiments per desprès aplicar-los a l'últim valor de la cotització del qual disposem. És a dir sigui R la variabe aleatòria que representa els valors que pot pendre el rendiment de l'acció:

$$VaR^{0,01}(R) = -4,567595\% \longrightarrow VaR^{0,01}(X) = 6,27*(1-0,04567595) = 5,983612\%$$

$$VaR^{0,05}(R) = -2,683522 \longrightarrow VaR^{0,01}(X) = 6,27*(1-0,02683522) = 5,983612\%$$

Observem que tot hi haber-hi una pèrdua del 19% quedant un preu de 3.38 el dia 24, aquesta no es té en compte ni tan sols quan calculem el VaR amb un 99% de confiança.

2. Mètode de construcció de models:

Per portar a terme aquest mètode sense excessives complicacions es fan dos supòsits de base:

a) Els canvis en els valors de la cartera depenen linealment dels canvis percentuals de les variables del mercat.

b) Aquests canvis percentuals segueixen una distribució Normal multivariada.
Aleshores la distribució de les variacions dels preus segueixen una Normal.

A més a més quan s'utilitza aquest mètode, les volatilitats i les correlacions s'actualitzen diàriament.

Exemple 7. *Continuant amb el nostre exemple del Santander, suposem que la variació del valor de l'acció segueix $N(\mu, \sigma)$ amb:*

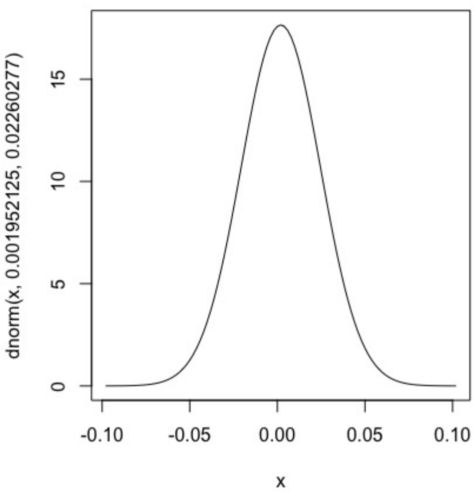
$$E(X) = 0,001952125 = \mu(i)\sigma = 0,02260277$$

Aleshores el VaR al 95% *s'obté calculant:*

$q^{0,05}(R) = N^{-1}(0,05) = -1,644854 \rightarrow VaR(R) = 0,001952125 - 1,644854 \cdot 0,02260277 = -0,035$

I el VaR al 99%*:*

$q^{0.01}(R) = N^{-1}(0,01) = -2,326348 \rightarrow VaR(R) = 0,001952125 - 2,326348 * 0,02260277 = -0,050$



3. Aplicació del mètode de Monte-Carlo a l'equació que modela l'evolució en el preu de els accions com a un moviment Brownià:

$$S(T) = S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}Z}.$$

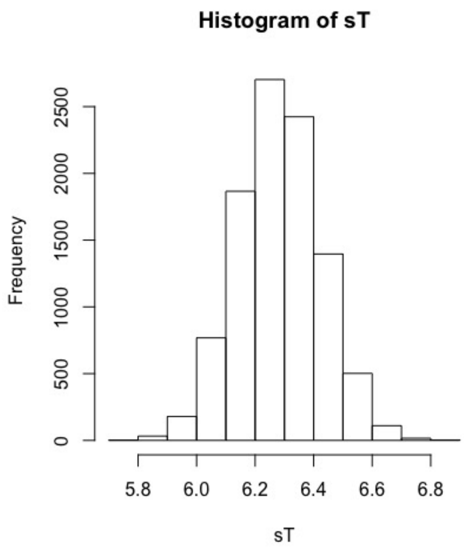
Realitzem n simulacions per a Z que apliquem a S(T) per obtenir n valors possibles per al moment T=1.

Finalment endrecem aquests valors de menor a major i n'obtenim una funció de distribució discreta, el VaR de la qual podem calcular fàcilment.

L'avantatge d'aquest mètode és la facilitat per generar grans quantitats de dades.

Exemple 8. *Continuant amb les dades de la cotització del Banc Santander que hem utilitzat en els exemples anteriors, sigui S(0)=6,27 , S(T) els possibles valors de l'acció a T=1 i utilitzant les* μ *i* σ *calculades.*

1) realitzem 10.000 *simulacions de la variable Z que suposem que segueix una llei normal estàndard.*
2) Apliquem els 10.000 *valors obtinguts per* Z_i *a l'equació Browniana del preu de les accions, per a obtenir* 10.000 *simulacions de S(1). Així obtenim la funció de distribució discreta per als valors de S(1) amb el següent histograma:*



I ja podem trobar fàcilment el Valor en Risc per al nivell de confiança $1-\alpha$ desitjat.

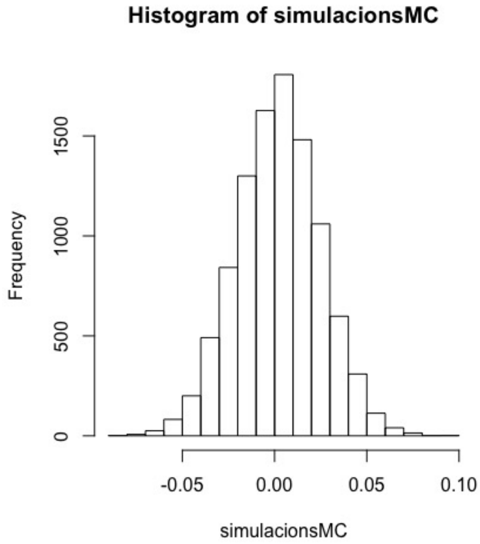
4.Aplicació del mètode Monte Carlo sota el supòsit de que els rendiments diàris de l'acció es comporten seguint una normal

En aquest cas simplement hauríem de calcular la mitjana i la variància dels rendiments diaris de la variable que volem estudiar i generar n simulacions Z_i amb $i \in \{1, ..., n\}$ tals que segueixin una distribució normal amb la mitjana i variància calculades.

Sigui $1 - \alpha$ el nivell de confiança amb el qual volem calcular el Var, calcularem per cada simulació Z_i el $q^\alpha(Z_i)$ corresponent.

Finalment el VaR del rendiment segons aquest mètode serà el valor mitjà dels VaRs calculats per cada simulació. Obtenint que amb una probabilitat de $(1 - \alpha)\%$ els rendiments diàris de la nostra cartera no seràn inferiors a $\frac{\sum_i^n q^\alpha(Z_i)}{n}$. I el VaR sobre el valor de la nostra cartera serà el resultat d'aplicar aquest resultat a la cotització actual.

Exemple 9. *Utilitzant la mitjana i la desviació típica de les dades anteriors, suposem que la seva variació en un futur proper seguirà una normal amb mitjana μ i desviació típica σ. Generem 10000 variables aleatòries seguint* *aquesta distribució. Obtenint suficients variables com per a calcular una funció de densitat discreta d'histograma:*



I ara ja podem calcular el VaR basant-nos en les dades simulades

$$VaR^{0,01}(X) = 5,948273$$
$$VaR^{0,05}(X) = 6,045498$$

Horitzó temporal
Com ja hem vist, un dels paràmetres dels quals depèn el VaR^{α} és el temps, mesurat en dies al qual el volem calcular.

Sota el supòsit que els canvis en la variable de la cartera en els dies successius al dia del càlcul del VaR tenen distribucions normals idèntiques i independents amb una mitjana de zero , es compleix:

VaR a N díes=(Var a 1 dia) $*\sqrt{N}$

Tot i que que si no es compleix aquest supòsit la fòrmula no es exactament certa, s'acostuma a utilitzar com a una aproximació.

6 Mesures coherents de risc

Com ja hem vist el VaR com a mesura de risc té diversos inconvenients, els quals s'han fet més patents des de la crisi de 2007/2008 fent que molts professionals s'hagin començat a questionar la conveniència de continuar utilitzant-lo.

Ja al 1999 Artzner, Delbaen, Eber i Heat, catedràtics de la universitat d'Estrasburg, van publicar un article advertint dels defectes del VaR com a mesura de risc i passant a proposar 4 axiomes basats en les propietats algebraiques que hauría de complir una mesura de risc per ser coherent.

En aquest apartat veurem les propietats que ha de complir una mesura per ser considerada coherent, veurem com el VaR no entra dintre d'aquesta categoria i presentarem una de les mesures coherents de risc alternatives al VaR que més popularitat està guanyant últimament.

Definició 6.1. *Mesura* **coherent de risc** : *Diem que una funció real* ρ*:* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de variables aleatòries reals, que modelen el guany descomptat d'una inversió, és una mesura de risc coherent si compleix:*

i) $X \leq Y$ *implica* $\rho(X) \geq \rho(Y)$ *(monotonia) ;*

ii) $\rho(X+m) = \rho(X) - m$ *(invariant pel cash) ;*

iii) $\forall \lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ *(homgèneament positiva) ;*

iv) sub-additiu: $\forall\ X,\ Y$,

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Aquestes propietats corresponen a les condicions intuitives d'una mesura de risc:

(i) Quan el guany descomptat d'una inversió X és sempre inferior o igual al guany descomptat d'una inversió Y, la quantitat que es pot pèrdre amb la inversió X serà sempre més gran o igual a la quantitat que es pot pèrdre en la inversió Y.

(ii) Si afegim una actiu lliure de risc, és a dir una variable no aleatòria amb un valor conegut m a la nostra cartera d'inversions, el valor d'aquesta en un escenari de risc disminueix exactament en m unitats monetàries.

(iii) Quan una inversió és multiplica per un nombre λ aleshores el risc de pèrdua queda multiplicat per aquest nombre.

(iv) El risc d'una cartera constituïda per dues inversions és com a molt tan gran com la suma dels riscos idividuals.

Observem que ii) implica que $\rho(X+\rho(X))=0$, per tant ρ és la quantitat mínima que s'hauría d'afegir a una cartera d'inversions per tal d'assegurar que la posició final elimina el risc, segons la mesura ρ.

És a dir,

$$\rho = inf\{m \in (R) : \rho(X+m) \leq 0\}$$

En general diem que una posició és acceptable si

$$\rho(X) \leq 0.$$

6.1 Pèrdua esperada

A continuació anem a explorar l'adaptació més coneguda del VaR, coneguda com l'AVaR (Average value at risc) o la pèrdua esperada.

Veurem que aquesta mesura si que compleix amb les propietats de coherència, en veurem expresions equivalents i estudiarem com funciona en el model de Black-Scholes amb l'ús de les tècniques de cobertura utilitzant puts Europeus.

Si el VaR responía a la pregunta "En el millor $\gamma\%$ dels escenaris, quina és la maxima pèrdua esperada?" "l'Expected shortfall" o Pèrdua esperada respon a "en el pitjor $\alpha\%$ dels escenaris, quina és la nostra pèrdua esperada?"

Definició 6.2. *La pèrdua esperada d'X ve donat per:*

$$AVaR^{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(X)d\beta = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)d\beta$$

Utilitzant les propietats dels quartils enunciades abans observem que compleix:

$$AVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)d\beta = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q_{1-\beta}(-X)d\beta.$$

Hi ha dos fets que ja fan presenten una certa avantatge de l'AvaR en front el VaR com a mesura de risc.

1 Donat que la funció de distribució F_X d'X és no decreixent, pot tenir com a molt un nombre comptable de discontinuïtats, cosa que fa que l'AVaR no depengui de si es tria el quartil superior o inferior, a diferència del que si passava amb el VaR.

2 Donat que

$$\beta \leq \alpha \longrightarrow q^{\beta}(X) \leq q^{\alpha}(X)$$

podem veure clarament com l'AVaR domina el VaR:

$$AVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0 \alpha q^{\beta}(X)d\beta \geq -\frac{1}{\alpha}\int_0 \alpha q^{\alpha}(X)d\beta = -q^{\alpha}(X) = VaR^{\alpha}(X)$$

6.2 Propietats

Per qualsevol parell de carteres X, Y, es compleix:

i) $AVaR^{\alpha}(X) \geq AVaR^{\alpha}(Y)$

ii) $AVaR^{\alpha}(X+m) = AVaR^{\alpha}(X) - m$

iii) Per $\lambda \geq 0, AVaR^{\alpha}(\lambda X) = \lambda AVaR^{\alpha}(X)$

Per definició amb l'AVaR ja queda solucionat el primer gran problema del VaR que sorgia de no tenir en compte els escenaris amb una possibilitat d'ocurrència menor a α, donat que l'AVaR té en compte tota la cua de la distribució.

Ens queda veure que l'AVaR també soluciona el segon gran problema del VaR, que pot assignar un risc superior a una posició diversificada que sense diversificar.

Teorema: Sub-additivitat del AVaR

$\forall X, Y \ AVaR^{\alpha}(X+Y) \leq AVaR^{\alpha}(X) + AVaR^{\alpha}(Y)$

Haurem de veure alguns resultats més, per tal de poder demostrar aquesta propietat.

6.3 Quantils i representacions de l'AVaR

Lema 6.3. *Sigui $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatòria. Suposem que U és una variable aleatòria uniformement distribuida en l'interval (0,1).*
Aleshores la variable aleatòria Y definida per $Y(x) = q^{U(x)}(X)$, té la mateixa distribució que X.

Utilitzant el lema anterior podem veure una descripció alternativa de l'AVaR que ens serà útil per demostrar la seva sub-additivitat.

Proposició Per qualsevol $\alpha \in (0,1)$

$$AVaR^{\alpha}(X) = -\tfrac{1}{\alpha}[(E)(X\mathbf{1}_{X<q^{\alpha}(X)}) + q^{\alpha}(X)(\alpha - P(X < q^{\alpha}(X))].$$

Demostració. *Sigui $x^- = -min\{x, 0\}$, per ser $f(x) = x^-$ una funció no decreixent, pel Lema 1.6 tenim que $\forall Y$ i $\forall \beta \in (0,1)$,*

$q^{\beta}(-Y^-) = q^{\beta}(f(Y)) = f(q^{\beta}(Y)) = -(q^{\beta}(Y))^-$.

Simplifiquem la notació considerant $q^{\alpha}(X) = q^{\alpha}$

$AVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)d\beta =$

$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}(q^{\beta}(X) - q^{\alpha})d\beta - q^{\alpha} =$

$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{1}(q^{\beta}(X) - q^{\alpha})d\beta - q^{\alpha}$

(per $\beta \leq \alpha, q^{\beta} \leq q^{\alpha}$)

$= -\frac{1}{\alpha}\int 0^1 - (q^{\beta}(X - q^{\alpha}))^- d\beta - q^{\alpha}$

(utilitzant la Proposició 1.4)

$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^1 q^{\beta}(-(X - q^{\alpha})^-)d\beta - q^{\alpha}$ *(utilitzant 8.3)*

$= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(-(X - q^{\alpha})^-) - q^{\alpha}$ *(per 8.1)*

$=-\frac{1}{\alpha}\int_{\{X<q^\alpha\}}(X-q^\alpha)dP-q^\alpha$

$=-\frac{1}{\alpha}[\int_{\{X<q^\alpha\}}XdP-\int_{\{X<q^\alpha\}}q^\alpha dP+\alpha q^\alpha]$

$=-\frac{1}{\alpha}[\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X<q^\alpha\}}+q^\alpha(\alpha-P(X<q^\alpha))].\#$

Utilitzant ara l'equivalència anterior podem veure com calcular l'AVaR per a variables aleatòries discretes.

Corol·lari Sigui X una variable aleatòria discreta amb $P(X=x_i)=p_i$, $p_1+...+p_N=1$ i $x_1<x_2<\cdots<x_N$. Aleshores:

$AVaR^\alpha(X)=-\frac{1}{\alpha}[\sum_{i=1}^{k_\alpha-q}p_ix_i+x_{k_\alpha}(\alpha-\sum_{i=1}^{k_\alpha-1}p_i)]$,

on $k_\alpha\in\mathbb{N}$ és el valor més gran tal que $\sum_{i=1}^{k_\alpha-1}p_i\leq\alpha$.

Demostració. *Pel Lema 1.13,* $q^\alpha(X)=-VaR(X)=x_{k_\alpha}$ *, aleshores:*

$P(X<q^\alpha(X))=\sum_{i=1}^{k_\alpha-1}p_i$,

$\mathbb{E}(X1_{X<q^\alpha(X)})=\sum_{i=1}^{k_\alpha-1}p_ix_i$,

per tant es compleix:

$$AVaR^\alpha(X)=-\frac{1}{\alpha}[\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}})+q^\alpha(X)(\alpha-P(X<q^\alpha(X))]=-\frac{1}{\alpha}[\sum_{i=1}^{k_\alpha-q}p_ix_i+x_{k_\alpha}(\alpha-\sum_{i=1}^{k_\alpha-1}p_i)],$$

Corol·lari Si X és una variable aleatòria amb funció de distribució F_X estrictament creixent i contínua, aleshores:

$$AVaR^\alpha(X)=-\mathbb{E}(X|X\leq q^\alpha(X)).$$

Demostració. *Com* F_X *és contínua,* $\forall q\in\mathbb{R}$

Aleshores: $P(X<q^\alpha(X))=P(X\leq q^\alpha(X))-P(X=q^\alpha(X))=P(X\leq q^\alpha(X))=F_X(q_\alpha(X))=\alpha$

i substituïnt en 8.2 obtenim

$AVaR^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}[E(X1_{X<q^\alpha(X)}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X))] = -\frac{1}{\alpha}E(1X_{X\leq q^\alpha(X)}) = -\frac{1}{P(X\leq q^\alpha(X))}E(X1_{\{X\leq q^\alpha(X)\}}) = -E(X|X \leq q^\alpha(X))$. Tal com volíem demostrar. #

Però per distribucions generals hem de permetre la possibilitat de que F_X tingui un salt a α. El lema següent ens serà util per a aquests casos:

Lema 6.4. *Per $\alpha \in (0,1)$, sigui $q^\alpha = q^\alpha(X)$ i*

$$\mathbf{1}_X^\alpha = \begin{cases} 1_{\{X<q^\alpha\}} & si\ P(X = q^\alpha) = 0, \\ 1_{\{X<q^\alpha\}} + k1_{\{X=q^\alpha\}} & si\ P(X = q^\alpha) > 0, \end{cases}$$

$$on\ \frac{\alpha - P(X<q^\alpha)}{P(X=q^\alpha}$$

Aleshores $\mathbb{E}(1_X^\alpha) = \alpha$,

I per tot $\omega \in \Omega$, es compleix $1_X^\alpha(\omega) \in [0,1]$.

Demostració. *Per $\mathbb{E}(1_X^\alpha) = \alpha$, observem que si $P(X = q^\alpha) = 0$ aleshores $\mathbb{E}(1_X^\alpha) = P(X < q^\alpha) = P(X \leq q^\alpha) = \alpha$. Mentre que si $P(X > q^\alpha) > 0$, aleshores*

$$P(X > q^\alpha) + \alpha - P(X < q^\alpha) = \alpha.$$

Ara, per demostrar que $\forall\omega \in \Omega$ es compleix $1_X^\alpha(\omega) \in [0,1]$, observem que:

$$P(X = q^\alpha) = 0$$

i aleshores $\mathbf{1}_X^\alpha = \mathbf{1}_{\{X<q^\alpha\}} \in \{0,1\}$. *Si* $P(X = q^\alpha) > 0$ *i* $\omega \notin \{X = q^\alpha\}$ *tenim:*

$$\mathbf{1}_X^\alpha(\omega) = \mathbf{1}_{\{X<q^\alpha\}}(\omega) \in \{0,1\}.$$

L'únic cas no trivial es dona quan $P(X = q^\alpha) > 0$ *i* $\omega \in \{X = q^\alpha\}$. *En aquest cas, sigui* $F_X(x_-) = lim_{y\to x}F_X(y)$,

$$P(X = q^\alpha) = F_X(q^\alpha) - F_X(q^\alpha_-),$$

Aleshores per $\omega \in \{X = q^\alpha\}$,

$$\mathbf{1}_X^\alpha(\omega) = \frac{\alpha - F_X(q^\alpha_-)}{F_X(q^\alpha) - F_X(q^\alpha_-)}.$$

I utilitzant la definició del quantil superior $q^\alpha = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$, *podem veure que* $\forall q < q^\alpha$ *tenim* $\alpha \geq F_X(q)$, *aleshores*

$$\alpha \geq F_X(q^\alpha_-).$$

Per tot $q > q^\alpha$, $\alpha < F_X(q)$, *i donat que* F_X *és contínua per la dreta tenim:*

$$\alpha \leq F_X(q^\alpha).$$

Quedant demostrat que $\alpha \in [F_X(q^\alpha_-), F_X(q^\alpha)]$, *cosa que implica:*

$$\mathbf{1}_X^\alpha(\omega) = \frac{\alpha - F_X(q^\alpha_-)}{F_X(q^\alpha) - F_X(q^\alpha_-)} \in [0,1].$$

#

Ara, i gràcies a la definició que hem fet de $\mathbf{1}_X^\alpha$ podem expressar l'$AVaR^\alpha$ com una esperança.

Proposició $\forall\alpha \in (0,1)$, $AVaR^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_X^\alpha)$.

Demostració.

$$P(X = q^\alpha) = 0 \longrightarrow P(X < q^\alpha) = P(X \leq q^\alpha) = \alpha,$$

de forma que
$AVaR^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X\boldsymbol{1}_{\{X<q^\alpha\}}) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X\boldsymbol{1}^\alpha_X)$.
Si $P(X = q^\alpha) > 0$, *aleshores utilitzant el fet que*
$\int_{\{X=q^\alpha\}} XdP = \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha dP = q^\alpha P(X = q^\alpha)$,
calculem

$$\mathbb{E}(X\boldsymbol{1}^\alpha_X)+X\frac{\alpha - P(X < q^\alpha)}{P(X = q^\alpha)}\boldsymbol{1}_{\{X=q^\alpha\}}) = \mathbb{E}(X\boldsymbol{1}^\alpha_X)+\int_{\{X=q^\alpha\}} X\frac{\alpha - P(X < q^\alpha)}{P(X = q^\alpha)}dP = \mathbb{E}(X\boldsymbol{1}^\alpha_X)+\frac{\alpha -}{P}$$

. #

Donat que la variable aleatòria definida per $Z(\omega) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{1}^\alpha_X(\omega)$ és integrable, està acotada per $\frac{1}{\alpha}$ i $E(Z) = 1$ podem definir una nova mesura de probabilitat, que denotarem per Q^α_X, com :

$$Q^\alpha_X(A) = \int_A XdP.$$

De fet Z compleix les condicions per ser anomenada una derivada de Radon-Nikodym, que normalment es presenta com :

$$Z = \frac{dQ^\alpha_X}{dP}.$$

I utilitzant aquesta mesura podem simplificar enormement l'expressió de l'$AVaR^\alpha$:

$$AVaR^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X\mathbf{1}^\alpha_X) = -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega X\mathbf{1}^\alpha_X dP = -\int_\Omega X\frac{dQ^\alpha_X}{dP}dP = -\mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X).$$

Com Q es absolutament contínua respecte P (que denotem per Q«P): $P(A) = 0 \to P(Q) = 0$.

I pel teorema de Radon-Nikodym, per tota Q absolutament continua respecte P, existeix una derivada Radon-Nikodym. És a dir:

$Q(A) = \int_A \frac{dQ}{dP}dP$

Finalment amb l'ús del següent teorema podrem provar la subadditivitat de l'$AVaR^\alpha(X)$.

Teorema Per $\alpha \in (0,1)$ sigui $P_\alpha\{$ Q: Q és una mesura de probabilitat, Q« P, $\frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha}\}$. Aleshores $sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in P_\alpha\} = AVaR^\alpha(X)$.

Corol·lari L'AVaR és sub-additiu: $AVaR^\alpha(X+Y) \leq AVaR^\alpha(X)+AVaR^\alpha(Y)$.

Demostració. *Utiltizem el fet de que dues funcions $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ on U és un conjunt arbitrari, compleixen:*

$$sup_{x\in U}\{f(x) + g(x)\} \leq sup_{x\in U}\{f(x)\} + sup_{x\in U}\{g(x)\}.$$

Aleshores amb X i Y fixats, podem aplicar la desigualtat anterior, considerant: $U = \mathcal{P}_\alpha$, $f(Q) = -\mathbb{E}_Q(X)$ i $g(Q) = -\mathbb{E}_Q(Y)$ per obtenir:

$AVaR^\alpha(X+Y) = sup\{-\mathbb{E}_Q(X+Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} = sup\{\mathbb{E}_Q(-X)+\mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \leq sup\{\mathbb{E}_Q(-$

tal com volíem demostrar. #

References

[1] Maciej j. Capinski Ekkehard Kopp

[2] Philippe Artzner, Universite Louis Pasteur, Strasbourg ´ Freddy Delbaen, Eidgenossische Technische Hochschule, Z ¨ urich ¨ Jean-Marc Eber, Societ´ e G´ en´ erale, Paris ´ David Heath, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania *1999*,

[3] INTRODUCCION A LOS MERCADOS DE FUTUROS Y OPCIONES (6ª ED.)

[4] Uwe Schöning: *Logic for Computer Scientists*, Birkhäuser, 1989.

[5] L.Sterling, E. Saphiro: *The Art of Prolog*, MIT Press, 1994.