

Treball final de grau
GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

**MODELITZACIÓ DE DADES
FINANCERES MITJANÇANT
MODELS GARCH**

Autor: Iván Marín Marín

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de
Probabilitats, Lògica i Estadística

Barcelona, 30 de juny de 2015

Abstract

The aim of this undergraduate thesis is to get into the world of volatility models and forecasting. It is also wanted to familiarize myself with the economic environment and vocabulary. To make that possible, a basic study about the ARCH/GARCH model family is done. The thesis could be divided in three sections. The first one, an introduction of previous models and concepts needed for the study. Secondly, the development of the ARCH theory, and finally, the practical study of the SP500 index where we use the knowledge acquired during previous chapters.

Resum

L'objectiu d'aquest treball final de grau és introduir-me dins del món dels models de volatilitat i la predicció. També sembla interessant familiaritzar-me amb l'ambient i el vocabulari econòmic. Per fer-ho possible, es duu a terme un estudi bàsic sobre la família de models ARCH/GARCH. El treball es podria dividir en tres parts diferenciades. La primera, una introducció als models i conceptes necessaris. La segona, el desenvolupament de la teoria dels models ARCH, i per últim, l'estudi pràctic de l'índex SP500 on s'usa el coneixement adquirit durant els capítols anteriors.

Agraïments

Vull agrair en primer lloc al meu tutor, el Dr. Josep Vives, que ha estat allà en tot moment, que m'ha atès quan he tingut algun dubte, que s'ha interessat en parlar amb companys i aconseguir-me material didàctic i dades quan aquestes no eren al meu abast. Gràcies per les hores que hem estat xerrant i m'has ajudat.

En segon lloc, vull agrair als meus pares tot el suport que m'han donat, ja que m'han aplanat el camí durant aquests mesos de treball i sempre han buscat no generar-me mals de caps perquè pogués estar concentrat.

Per últim, agrair als meus companys d'universitat que m'han ajudat amb dubtes diversos i que s'han llegit el meu treball i m'han donat grans consells.

Sense tots vosaltres no hagués estat possible.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Motivació	1
1.2	Objectius	1
1.3	Estructura de la memòria	1
1.4	Dades financeres	2
2	Sèries temporals	3
2.1	Conceptes bàsics	3
2.1.1	Estacionarietat	3
2.1.2	Soroll blanc	3
2.1.3	Gaussianitat	4
2.1.4	Terme de pertorbació	4
2.1.5	Asimetria i curtosi	4
2.2	Models més importants	5
2.2.1	Model AR(p)	5
2.2.2	Model MA(q)	5
2.2.3	Model ARMA(p,q)	5
2.2.4	Altres	6
2.2.5	Problemàtica d'aquests models	6
3	Introducció als Models Arch	8
3.1	Variables financeres	8
3.2	Definició del model	8
3.3	Propietats	9
3.4	Estimació del model	11
3.4.1	Estimació per MQO	11
3.4.2	Estimació per màxima versemblança	12
3.5	Contrast d'homoscedasticitat	14
3.5.1	Explicació del Contrast	14
3.5.2	Presa de decisió	15
4	Generalització dels models ARCH	16
4.1	Definició	16
4.2	Propietats	17

4.3	Estimació	17
4.3.1	Estimació per màxima versemblança	17
4.3.2	Convergència dels paràmetres	19
4.4	Contrast d'hipòtesi	19
4.4.1	Explicació del Contrast	20
4.4.2	Presca de decisió	20
4.4.3	Alternativa	20
5	Models Garch i altres variants	22
5.1	Definició del model	22
5.2	Propietats	22
5.3	Estimació del model	23
5.3.1	Mètode de màxima versemblança	23
5.4	Contrast d'homoscedasticitat	25
5.5	Altres variants del model Arch	25
5.5.1	EGARCH	25
5.5.2	TGARCH	26
5.5.3	GJR-GARCH	26
6	Ajust de dades financeres	27
6.1	S&P500	27
6.1.1	Estudi previ de les dades	27
6.1.2	Selecció i ajust del model	32
6.1.3	Estudi dels resultats	38
6.1.4	Conclusió	41
7	Conclusions del treball	42
	Referències	43

1 Introducció

1.1 Motivació

A partir de la greu crisi sorgida l'any 2007 i que va afectar a tot el món apareix Basilea III¹. Es tracta d'un conjunt de regulacions i mesures que han de complir el bancs i entitats financeres per tal poder continuar duent a terme les seves activitats. Gran part d'aquestes mesures tenen a veure amb el risc financer que adopten aquestes entitats. És per això que l'àmbit dels riscos ha sofert un gran auge des del començament de la crisi. La demanda de professionals amb titulacions i/o certificacions que acrediten el seu coneixement en aquest àmbit ha crescut molt. Sembla interessant doncs, endinsar-se en aquesta vessant de les finances. La volatilitat és una paraula que hem escoltat moltes vegades, però molta gent no té clar quin és el seu significat. A grans trets es tracta de la variabilitat del preu d'un producte financer en un interval de temps. La volatilitat està íntimament relacionada amb el risc. Quan major és la volatilitat d'un producte, major és el risc que té aquest. Per tant, l'estudi de la volatilitat és bàsic per a la determinació del risc. És per aquest motiu que hem escollit l'estudi de la família de models ARCH, usats per explicar i predir la volatilitat.

1.2 Objectius

Sempre que es duu a terme un treball cal fixar-se uns objectius previs a la realització d'aquest. Els objectius del nostre treball són els següents:

1. Familiaritzar-se amb els conceptes i el background econòmic.
2. Explicar de manera senzilla els trets característics i el procediment d'estimació dels models ARCH.
3. Conèixer el motiu de l'existència dels models ARCH.
4. Ajustar correctament un model de la família ARCH a unes dades reals.
5. Fer un estudi economètric d'algun índex bursàtil.
6. Estimar diversos models de la família ARCH per a unes mateixes dades i escollir el model òptim.

1.3 Estructura de la memòria

Aquesta memòria té dues parts diferenciades. Una primera part, que està dedicada als conceptes teòrics i una segona més pràctica. A la primera part estan inclosos els capítols del 2 al 5. El capítol 2 es tracta d'una introducció al món dels models economètrics. Es defineixen els conceptes bàsics i es mostren alguns dels models

¹http://www.ie.edu/IE/pdf/Informe_Basilea.pdf

més senzills i comuns de la literatura economètrica. Al capítol 3 comencem ja amb el tema principal d'aquest treball, els models ARCH. En aquest capítol explicarem el model ARCH més senzill, esbrinarem quines són les seves propietats i quin és el procés d'estimació que s'ha de dur a terme. Un cop familiaritzats amb els models ARCH passarem al capítol 4, on s'explica la generalització d'aquests. Abandonarem el model ARCH més senzill i explicarem el funcionament per a graus superiors. Per últim, al capítol 5, introduïm els models GARCH, pertanyents a aquesta família i que van suposar un gran avenç. Al final d'aquest, també mencionarem altres alternatives a aquests models, tot indicant quina és la seva estructura.

A la part 2 de la memòria, la part pràctica, intentarem agafar tots els conceptes apresos als capítols anterior i posar-los en pràctica tot intentant dur a terme l'ajust d'un model per explicar unes dades financeres.

1.4 Dades financeres

Per dur a terme aquest treball es imprescindible l'obtenció i manipulació de dades financeres. En aquest treball ens centrarem en dades referents als mercats financers, com poden ser preus d'accions, índexs de mercats, cotitzacions de monedes, preus d'opcions sobre accions, matèries primeres, etc. Actualment, i gràcies a les tecnologies, és possible accedir a gran quantitat d'aquestes dades de manera gratuïta i des de qualsevol part del món. De manera habitual, la informació que es proporciona és la següent:

Date, Open, High, Low, Close, Volume, Adj Close

i es refereixen a :

Data , Preu d'obertura, Preu més alt del dia, Preu més baix del dia,

Preu de tancament, Volum de negociació, Preu de tancament ajustat

Durant el transcurs d'aquesta memòria només ens interessarem pel preu de tancament i la data, de manera que ignorarem la resta de camps.

2 Sèries temporals

Una sèrie temporal és un conjunt de dades que depenen del temps. Habitualment es tracta de mesures o observacions numèriques d'algun fet o succés. Els temps d'observació poden ser discrets o continus. En el cas de ser discrets es tractarà d'observacions equiespaiades (mateix interval de temps entre observació i observació). Les dades d'una sèrie temporal poden ser univariants (valor escalar) o multivariants (vector).

L'estudi de les sèries temporals és important, ja que ens permet oferir una explicació d'alguns fets d'interès general, com poden ser el preu dels habitatges, la taxa de mortalitat, etc. Simplificant, es tracta d'explicar un succés mitjançant dades d'altres successos o del mateix succés però d'un període previ. A no ser que diguem el contrari, al llarg d'aquest treball utilitzarem sèries temporals univariants i a temps discret.

Aquest capítol servirà d'introducció per conèixer alguns conceptes previs i veure quina era la situació prèvia a l'aparició dels models ARCH.

2.1 Conceptes bàsics

2.1.1 Estacionarietat

L'estacionarietat d'una sèrie temporal és un concepte molt important. A grans trets ens indica si una sèrie temporal té el mateix comportament probabilístic al llarg del temps. És molt més senzill predir que passarà amb una sèrie temporal si el seu comportament és sempre el mateix.

Definició 2.1.1.1. *Una sèrie temporal $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ és estacionària en sentit dèbil si:*

- $E[X_t] = \mu, \forall t \in \mathbb{Z},$
- $Var[X_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z},$
- $Cov[X_t, X_s] = \lambda(k), \forall t, s \in \mathbb{Z}$ amb $k = |t - s|$

D'ara en endavant quan diguem que una sèrie és estacionària, si no es diu el contrari, ens referirem a estacionarietat en sentit dèbil.

Definició 2.1.1.2. *Una sèrie temporal és estacionària en sentit fort si: $\forall k \in \mathbb{Z}$ i $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ té la mateixa distribució que $(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$.*

2.1.2 Soroll blanc

Definició 2.1.2.1. *Direm que una sèrie temporal $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ és un soroll blanc si compleix les següents propietats²:*

²Existeixen definicions alternatives de soroll blanc més o menys restrictives.

- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$.
- $Var[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}$.
- $Cov[\varepsilon_s, \varepsilon_t] = 0, \text{ amb } s \neq t$.

2.1.3 Gaussianitat

Definició 2.1.3.1. Una sèrie temporal $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es diu que és gaussiana si el vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim N(\mu, \Sigma)$ on $\mu = (E(X_{t_1}), \dots, E(X_{t_n}))$ i Σ és la matriu de covariàncies.

Aquest fet té una important implicació en els sorolls blancs. Ja que si una sèrie temporal, a més de ser un soroll blanc, és gaussiana voldrà dir que les variables de la sèrie seran i.i.d $N(0, \sigma^2)$.

2.1.4 Terme de pertorbació

En models de sèries temporals és usual afegir un soroll blanc, denotat per ε_t i anomenat terme de pertorbació³. Aquesta variable té un caràcter aleatori dins de model i vindria a explicar els successos que no es poden controlar. Per exemple, fenòmens meteorològics, un atemptat, la mort d'un dirigent, qualsevol succés inesperat, etc. Aquesta variable també recull els fets que no queden explicats amb la resta de variables del model.

Definició 2.1.4.1. Donat un model de regressió lineal amb terme de pertorbació ε_t , direm que el model és homoscedàstic quan la variància del terme de pertorbació sigui constant. En cas contrari direm que el model és heteroscedàstic.

2.1.5 Asimetria i curtosi

Definició 2.1.5.1. La curtosi⁴ és una mesura del grau d'apuntament d'una distribució de probabilitat. Està definida com el moment de quart ordre normalitzat. La fórmula és la següent:

$$k := \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

on μ_i és el moment centrat d'ordre i . La curtosi d'una distribució normal és 3. A partir d'aquí, si $k < 3$ es diu que la distribució és platicúrtica, i si $k > 3$ es diu que és leptocúrtica.

Definició 2.1.5.2. El coeficient d'asimetria⁵ és una mesura del grau d'asimetria d'una distribució. La fórmula és:

$$s := \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

³també anomenat terme d'error

⁴<http://mathworld.wolfram.com/Kurtosis.html>

⁵<http://mathworld.wolfram.com/Skewness.html>

on μ_i és el moment centrat d'ordre i . Si la distribució té $s < 0$ es diu que té asimetria negativa, si en canvi té $s > 0$ es diu que l'asimetria és positiva.

2.2 Models més importants

2.2.1 Model AR(p)

Definició 2.2.1.1. Una sèrie temporal $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ estacionària és autoregressiva d'ordre p si compleix:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

o equivalentment:

$$\Phi_p(L)X_t = \varepsilon_t$$

on $\Phi_p(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$ és el polinomi autoregressiu⁶ d'ordre p amb totes les arrels fora del cercle unitat, ϕ_j és una constant per tot $j \in \mathbb{Z}$ i $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ és un soroll blanc de variància σ^2 .

Interpretació: El valor actual (instant t) de la variable X està explicat pels p valors previs i pels fenòmens aleatoris succeïts en l'instant t .

2.2.2 Model MA(q)

Definició 2.2.2.1. Una sèrie $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ estacionària es diu que és una sèrie de mitjana mòbil d'ordre q si és de la forma:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

o equivalentment,

$$X_t = \Theta_q(L)\varepsilon_t$$

amb $\Theta_q(L) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$ polinomi de mitjanes mòbils, θ_j és una constant per tot $j \in \mathbb{Z}$ i $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ és un soroll blanc de variància σ^2 .

Interpretació: Té una forma similar a la del AR(p) però en lloc d'afegir retards de la variable endògena, els afegim del terme de pertorbació. El valor de la variable X en l'instant actual està explicat pels fenòmens aleatoris actuals i els dels q períodes anteriors. Aquest model està únicament explicat per fenòmens aleatoris.

2.2.3 Model ARMA(p,q)

Definició 2.2.3.1. Una sèrie estacionària $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ és una sèrie ARMA(p,q) si compleix la següent equació:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

⁶ L és l'operador Backwards: $L^k X_t = X_{t-k}$

o dit d'una altra manera,

$$\Phi_p(L)X_t = \Theta_q(L)\varepsilon_t$$

on $\Phi_p(L)$ i $\Theta_q(L)$ són els polinomis definits amb anterioritat, i $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ és un soroll blanc.

Interpretació: És una barreja entre els models AR i MA. El valor de la variable X en el període actual està explicat pels p períodes previs d'aquesta i pel terme de pertorbació actual i dels q períodes previs.

2.2.4 Altres

Hem vist tres dels models bàsics. Però en la literatura economètrica les possibilitats són infinites.

Models estacionals

En els tres models explicats hem usat variables de períodes anteriors per tal d'explicar el PGD⁷, i ho hem fet amb períodes consecutius. Però què passa si el valor actual no depèn del valor previ, sinó del de fa 3 períodes o 6? Per exemple, l'atur augmenta a l'hivern i disminueix a l'estiu. És possible establir una relació entre la variable en el moment actual i la variable en el mateix moment d'un període anterior. Aquest tipus de dades s'anomenen estacionals. Un exemple de model estacional seria:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \dots + \Phi_p X_{t-ps} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Phi_p(L^s)X_t = \varepsilon_t$$

on p denota el número de període estacionals, s és la distància entre períodes i Φ_p és el mateix polinomi que en l'apartat dels AR.

Sèries no estacionàries

No sempre les sèries que estudiarem són estacionàries, pel que no podrem aplicar els models explicats anteriorment. Però si això succeeix, podem modificar la nostra sèrie i transformar-la en una d'estacionària. Existeixen diverses transformacions, però una de les més importants és la diferenciació. L'operador diferència $\Delta = (1 - L)$ és un bon instrument per aconseguir una sèrie estacionària. Un exemple de model seria:

$$\Delta^d X_t = \varepsilon_t$$

on d és el número de vegades que hauríem de diferenciar les nostres dades per tal que siguin estacionàries. Un cop aconseguida l'estacionarietat, ja es podria usar qualsevol dels models abans explicats.

2.2.5 Problemàtica d'aquests models

Els models explicats al llarg d'aquest tema tenen unes hipòtesis bàsiques bastant estrictes al darrere. L'incompliment d'aquestes hipòtesis bàsiques porta a cometre

⁷Procés generador de dades

errors a l'hora de fer les estimacions dels models, de calcular la significació dels paràmetres i ens porten a obtenir dades errònies.

Una d'aquestes hipòtesis bàsiques afecta al terme de pertorbació. Es tracta de la següent:

- La variància del terme de pertorbació és constant (Homoscedasticitat).

L'incompliment d'aquesta hipòtesi implica que l'estimació dels paràmetres del nostre model és ineficient i l'estimació de la variància del terme de pertorbació serà esbiaixada.

S'ha demostrat que en la majoria de casos, les sèries temporals financeres tenen el terme de pertorbació heteroscedàstic. Per tant, els models d'aquest capítol no serien molt bona eina a l'hora de treballar amb dades financeres. A [1]⁸ es fa una reflexió sobre el motiu pel que són necessaris altres models.

⁸ pàgina 7

3 Introducció als Models Arch

El Juliol de l'any 1981 Robert F. Engle va presentar un article d'investigació titulat "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". En aquest article Engle va desenvolupar i presentar en societat els models ARCH. El text va ser desenvolupat mentre feia una estada a la London School of Economics. Fins al moment, els models econòmics convencionals tractaven la variància condicional com independent del temps. És aquí on Engle va fer un gran avenç, proposant un model en que la variància condicional depenia de la informació passada.

En aquest capítol introduïrem el model ARCH més senzill i explicarem pas a pas quines són les seves propietats i com s'estimen.

3.1 Variables financeres

Abans de començar amb la definició del model ARCH es fa necessària una breu explicació sobre el tractament de les dades financeres. Recordem en primer lloc que les dades que usarem són a temps discret, és a dir, $t \in \mathbb{Z}$. Definirem com P_t el preu d'un actiu financer en l'instant t . No és gaire usual utilitzar el preu d'un actiu a l'hora de treballar amb models econòmics. S'acostuma usar és una transformació d'aquests, el retorn de la inversió⁹:

$$\text{ROI} = \frac{\text{Valor de la inversió} - \text{Cost de la inversió}}{\text{Cost de la inversió}}$$

Indica el % que ha augmentat o disminuït el preu d'un actiu financer en un interval de temps. En el nostre cas, ens interessa un interval d'un període. Definirem el retorn com:

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

3.2 Definició del model

Considerem en primer lloc el següent model:

$$r_t = \varepsilon_t, \forall t,$$

on $\{\varepsilon_t\}_t$ és un soroll blanc amb les següents propietats:

- $E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1})^{10} = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$
- $V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1})$ no és independent del temps.

⁹El motiu és que els retorns són estacionaris en la gran majoria dels casos.

¹⁰ $\underline{\varepsilon}_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$ denota la informació passada.

Aquest model es tracta del model més senzill possible. La mitjana de la sèrie és 0, i no existeix cap variable explicativa. El model és tracta d'un soroll blanc, és a dir, el procés generador de dades és completament aleatori.

Donat que la variància condicional del terme de pertorbació no és independent en el temps, donem la següent formulació:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t, \quad (3.1)$$

on u_t és un soroll blanc gaussià, és a dir $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$. Un procés complint les condicions anteriors es tracta d'un model ARCH(1). Amb l'objectiu de clarificar més la relació entre aquestes propietats i donar una formulació més global donarem la següent definició (extreta de [2]¹¹):

Definició 3.2.0.1. *Siguin δ_t i Z_t dos processos independents amb $Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t$, $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ i δ_t i.i.d amb $P[\delta_t = 1] = P[\delta_t = -1] = \frac{1}{2}$. Direm que una sèrie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es tracta d'un ARCH(1) si es compleix:*

- $\varepsilon_t = \delta_t \sqrt{Z_t}$
- $\alpha_1 > 0$ i $\alpha_0 + u_t \geq 0$, per tal de garantir la positivitat de la sèrie.
- $|\alpha_1| < 1$ i $m_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ on $m_t = E[\varepsilon_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 m_{t-1}$, per tal que la esperança condicional sigui invariant.

Observació 1. Es pot comprobar que amb aquesta definició de ε_t és compleix (3.1) i que l'esperança condicionada és igual a zero:

- $E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}] = E[\delta_t \sqrt{Z_t} | \varepsilon_{t-1}] = E[\delta_t | \varepsilon_{t-1}] \cdot E[\sqrt{Z_t} | \varepsilon_{t-1}] = 0 \cdot E[\sqrt{Z_t} | \varepsilon_{t-1}] = 0$.
- $\varepsilon_t^2 = \delta_t^2 Z_t = Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t$.

3.3 Propietats

Un cop donades les bases del model ARCH(1) anem a veure algunes de les propietats més importants.

Proposició 3.3.0.1. *Sigui $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una sèrie complint les condicions d'un ARCH(1) es té que:*

1. $E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-k}] = 0, \forall k > 0$.
2. $Cov[(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+i}) | \varepsilon_{t-k}] = 0, \forall k > 0$.
3. $V[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-k}] = c \frac{1 - \alpha_1^k}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^k \varepsilon_{t-k}^2$.

¹¹ capítol 3, pàg. 30

Demostració. 1. $E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-k}] = E[E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}] | \varepsilon_{t-k}] = E[0 | \varepsilon_{t-k}] = 0$.

2. Usarem algunes propietats de l'esperança condicionada.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+i}) | \varepsilon_{t-k}] &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+i} | \varepsilon_{t-k}] = E[E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+i} | \varepsilon_{t+i-1}] | \varepsilon_{t-k}] = \\ &= E[\varepsilon_t E[\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_{t+i-1}] | \varepsilon_{t-k}] = E[\varepsilon_t \cdot 0 | \varepsilon_{t-k}] = 0 \end{aligned}$$

3. En primer lloc necessitem reformular el model definit a l'apartat anterior. Sigui $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t$, podem reescriure el model com:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2}^2 + u_t + u_{t-1} = \dots = \alpha_0 (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1^{k-1}) + \alpha_1^k \varepsilon_{t-k}^2 + u_t + \dots \\ &\quad \dots + \alpha_1^{k-1} u_{t-(k-1)}. \end{aligned}$$

Amb aquesta expressió ja podem passar a calcular l'esperança condicionada a l'informació ε_{t-k} :

$$E[\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-k}] = \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^j + \alpha_1^k \varepsilon_{t-k}^2 = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^k}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^k \varepsilon_{t-k}^2.$$

□

Proposició 3.3.0.2. *Sigui ε_t com a l'apartat anterior i tal que $\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t)$ on $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$. Si $3\alpha_1^2 < 1$ llavors:*

1. $E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$.
2. $E[\varepsilon_t^4] = \frac{3\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$.

Demostració. 1. Tenim que $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t \Rightarrow \varepsilon_t^2 (1 - \alpha_1 L) = \alpha_0 + u_t$.

Calculem les arrels del polinomi autoregressiu i obtenim que $L = \frac{1}{\alpha_1}$ i com que hem suposat que $3\alpha_1^2 < 1 \Rightarrow \alpha_1 < 1 \Rightarrow L > 1$. Per tant, la sèrie és estacionària i es compleix $E[\varepsilon_t] = ctant$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Per tant, $E[\varepsilon_t^2] = E[\varepsilon_{t-1}^2]$. Tenim doncs:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^2] &= E[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-1}^2] \Rightarrow (1 - \alpha_1) E[\varepsilon_t^2] = \alpha_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \end{aligned}$$

2. Utilitzarem que $\varepsilon_t = \delta_t \sqrt{Z_t}$ amb $Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$. Tenim doncs que $\varepsilon_t^4 = Z_t^2 \delta_t^4$. Llavors:

$$E[\varepsilon_t^4] = E[Z_t^2 \delta_t^4] = E[Z_t^2] E[\delta_t^4] = 3E[Z_t^2]$$

Calculem ara

$$E[Z_t^2] = E[(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2] = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^4] + 2\alpha_1 \alpha_0 E[\varepsilon_{t-1}^2] = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^4] + 2 \frac{\alpha_1 \alpha_0^2}{1 - \alpha_1}$$

tenim doncs

$$E[\varepsilon_t^4] = 3\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^4] + 6 \frac{\alpha_1 \alpha_0^2}{1 - \alpha_1}$$

Usant l'operador retard la igualtat ens queda

$$(1 - 3\alpha_1^2 L)E[\varepsilon_t^4] = 3\alpha_0^2 + 6 \frac{\alpha_1 \alpha_0^2}{1 - \alpha_1} = 3\alpha_0^2 \frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

Donat que el sistema es estacionari ja que $3\alpha_1^2 < 1$, obtenim

$$E[\varepsilon_t^4] = \frac{3\alpha_0^2}{1 - 3\alpha_1^2} \frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1}.$$

□

Observació 2. Utilitzant la proposició 3.3.0.2 és possible calcular la curtosi:

$$k = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{(E[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$$

Si observem és sempre més gran o igual que 3, ja que com abans hem dit estem en el cas $3\alpha_1^2 < 1$, i per tant $1 - 3\alpha_1^2 < 1 - \alpha_1^2$. Que la curtosi sigui més gran o igual a 3 (curtosi de la distribució normal) implica que la nostra sèrie és leptocurtica.

Nota 1. A la proposició 3.3.0.2 hem introduït la notació h_t que fins ara no havíem explicat. El terme h_t fa referència a la variància condicionada del terme de pertorbació. Es pot comprovar com el resultat és consistent amb les definicions usades anteriorment.

$$\begin{aligned} \text{Demostració. } \text{Var}[\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}] &= E[\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}] = E[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}] = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-1}^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

□

A partir d'ara, usarem aquesta notació a l'hora de definir la resta de models.

3.4 Estimació del model

A l'hora d'estimar el model podem escollir entre diverses alternatives, les més conegudes són les que exposarem a continuació.

3.4.1 Estimació per MQO

Partim de les següents dades:

$$r_t = \varepsilon_t \text{ amb } h_t = V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \text{ i } \mu_t = E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0$$

Anem a estimar ara els coeficients α_1 i α_0 . Tenim que el terme d'error és:

$$E_t = \varepsilon_t^2 - \hat{\varepsilon}_t^2 = \varepsilon_t^2 - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

L'estimació per MQO consisteix en minimitzar la suma dels termes d'error al quadrat. El sumatori dels termes d'error al quadrat és $S = \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$. Per tal de minimitzar S calculem les primeres derivades en funció dels paràmetres α_0 i α_1 :

$$\frac{dS}{d\hat{\alpha}_0} = 2 \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2)(-1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = T\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t-1}^2,$$

$$\frac{dS}{d\hat{\alpha}_1} = 2 \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2)(-\varepsilon_{t-1}^2) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 = \hat{\alpha}_0 \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t-1}^2 + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t-1}^4$$

Amb aquests resultats podem escriure el següent sistema:

$$W_1 \cdot W_2 = W_3 \cdot B \Rightarrow W_3^{-1} \cdot W_1 \cdot W_2 = B$$

on $B' = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 & \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix}$,

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_0^2 & \dots & \varepsilon_{T-1}^2 \end{pmatrix},$$

$$W_2' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_T^2 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t-1}^2 \\ \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t-1}^4 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Estimació per màxima versemblança

Partim de $r_t = \varepsilon_t$, $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ amb $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1 \geq 0$ i on suposem que $\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t)$. En aquest cas és té $\mu_t = 0$ i $h_t(\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ on $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$. Tenim doncs que

$$f(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}} \quad (3.2)$$

La funció de versemblança és:

$$l(\alpha; \varepsilon) = \prod_{t=1}^T f(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}}$$

i el seu logaritme és:

$$\mathcal{L}(\alpha; \varepsilon) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \quad (3.3)$$

Maximitzem la funció de versemblança respecte els paràmetres :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{h_t} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

Calculem ara la matriu hessiana:

$$H_{\alpha_0 \alpha_0} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t^3} (2\varepsilon_t^2 - h_t)$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha_0 \alpha_1} = H_{\alpha_1 \alpha_0} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{h_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{h_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{h_t^3} (2\varepsilon_t^2 - h_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha_1 \alpha_1} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^4}{h_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^4}{h_t^2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^4}{h_t^3} (2\varepsilon_t^2 - h_t) \end{aligned}$$

Arribat a aquest punt, hem de calcular la matriu d'informació. Tenim que $I(\alpha) = -E(H)$ amb $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$. Al estimar la matriu de la informació de Fisher, trobarem les estimacions de les variàncies dels paràmetres. Això ens permetrà estimar els paràmetres per intervals de confiança.

En el nostre cas, el càlcul de la informació de Fisher es simplifica si utilitzem la informació passada: $I(\alpha) = -E[H|\varepsilon_{t-1}]$. També tenim les següents propietats que ens facilitaran els càlculs: $E[\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}|\varepsilon_{t-1}] = 1$ i $E[\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}] = 0$.
 $I(\alpha)$:

$$\begin{aligned} -E\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0} \middle| \varepsilon_{t-1}\right] &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t^2} \\ -E\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} \middle| \varepsilon_{t-1}\right] &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{h_t^2} \\ -E\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} \middle| \varepsilon_{t-1}\right] &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^4}{h_t^2} \end{aligned}$$

Un cop calculada la informació de Fisher ja podem començar amb l'estimació de paràmetres. Es duu a terme mitjançant l'algorisme de Fisher-Scoring (veure [3]¹²), que es tracta d'un mètode iteratiu. L'algorisme és el següent:

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + [I(\alpha^{(k)})]^{-1}q^{(k)}, \quad k \geq 0$$

on

- $\alpha^{(k)}$ és el vector $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ en la iteració k -èssima.
- $q^{(k)}$ és el vector $\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \alpha}$ avaluat en $\alpha^{(k)}$.
- $I(\alpha^{(k)})$ és el valor de la matriu $I(\alpha)$ en $\alpha^{(k)}$.

Per tant, primer hauríem de donar uns valors inicials $\alpha^{(0)}$ i ja podríem començar amb el mètode iteratiu. Un cop arribat a la precisió desitjada tindriem:

1. L'estimació dels paràmetres: $\alpha^{(N)}$.
2. L'estimació de la matriu de variàncies: $I(\alpha^{(N)})$

Nota 2. *Un cop realitzada l'estimació dels paràmetres, podem calcular $\hat{h}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2$. L'arrel de \hat{h}_t serà la predicció de la volatilitat.*

3.5 Contrast d'homoscedasticitat

Fins ara, hem vist que és un model ARCH, quines són les seves propietats i com s'estima un model d'aquestes característiques. Però, com podem saber que les nostres dades són aptes per a l'estimació d'un model ARCH? Aquesta és una pregunta important, ja que com hem vist abans l'estimació dels paràmetres del model ARCH implica l'ús d'un mètode iteratiu, i el càlcul pot ser farragós. Per tant, és de gran ajuda realitzar un estudi previ per saber si és viable dur a terme aquest procés.

3.5.1 Explicació del Contrast

Si ens fixem en les propietats que hem esmenat a l'apartat 3.2 trobarem algunes indicacions. Hem definit la variància condicionada com $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$. Una de les maneres de veure si és possible estimar el model mitjançant un ARCH és fer el següent contrast d'hipòtesi:

$$H_0 : \alpha_1 = 0$$

$$H_A : \alpha_1 \neq 0$$

La hipòtesi nul·la suposa que la variància condicional segueix el següent PGD: $h_t = \alpha_0$. Per tant, és constant i no ens trobem en presència d'heteroscedasticitat

¹² Article 1, capítol 6.

(homoscedasticitat). Es compleixen les hipòtesis bàsiques dels models tradicionals. La hipòtesi nul·la suposa el cas contrari: la variància condicional és de la següent forma: $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$. Per tant, estem en presència d'heteroscedasticitat i té sentit estimar el nostre model segons un model ARCH.

Per tal de poder dur a terme el contrast es necessari calcular l'estadístic del test. Aquest es calcula mitjançant la fórmula del multiplicador de Lagrange usat en el test de Breusch-Pagan. Aquesta és:

$$\xi = \text{ARCH LM} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha} \right)' \left(-E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right] \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{H_0} \quad (3.4)$$

Passem a calcular-lo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha} \Big|_{H_0} \right)' &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_0} \Big|_{H_0} \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha_1} \Big|_{H_0} \right) = \left(\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0} - 1 \right) \quad \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{\alpha_0} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0} - 1 \right) \right) \\ -E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right] \Big|_{H_0} &= \begin{pmatrix} \frac{T}{2\alpha_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Realitzem el producte:

$$\text{ARCH LM} = \xi = W' \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_0}{T} & 0 \\ 0 & \frac{2}{T} \end{pmatrix} W$$

$$\text{on } W' = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha} \Big|_{H_0} \right)'$$

3.5.2 Presa de decisió

Un cop calculat l'estadístic de prova ja es pot procedir a la presa de decisió. L'estadístic de prova ARCH LM segueix una distribució chi quadrat amb un grau de llibertat $\xi \sim \chi_1^2$ al 95%.

1. Si $\xi < \text{valor de } \chi_1^2 \text{ a les taules} \Rightarrow \text{Acceptem } H_0$. És a dir, no hi ha presència d'heteroscedasticitat i per tant no ens serveix l'us d'un model ARCH.
2. Si $\xi > \text{valor de } \chi_1^2 \text{ a les taules} \Rightarrow \text{Rebutgem l'hipòtesi nul·la i podem aplicar un model ARCH a les nostres dades.}$

És equivalent mirar el valor a les taules a observar els p -valors¹³.

¹³ Criteri: si $p < 0.05$ rebutgem H_0 , en cas contrari l'acceptem.

4 Generalització dels models ARCH

En el capítol anterior hem agafat el model ARCH més bàsic (el de grau 1) i l'hem desenvolupat. En aquest capítol partirem d'unes dades similars i donarem una generalització dels models ARCH, és a dir desenvoluparem el model ARCH(q). Donat que el gros dels càlculs és bastant similar al de l'apartat anterior, en aquest capítol prescindirem d'alguns d'ells.

4.1 Definició

Fins ara hem treballat amb unes dades que complien la següent equació: $r_t = \varepsilon_t$. És a dir, la nostra sèrie era un soroll blanc. Però pot ser que l'esperança no sigui zero i sigui una constant, que estigui explicada per altres variables o per retards de la endògena. En aquest capítol suposarem que és d'aquesta manera:

$$r_t = x_t' b + \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z},$$

on $\{\varepsilon_t\}_t$ és un soroll blanc amb les següents propietats:

- $E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}] = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$
- $V[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}]$ no es independent del temps.

on x_t és el vector de variables explicatives (inclosa la constata) i b és el vector dels paràmetres.

Observació 3. Si definim $y_t := r_t - x_t' b$ tenim

$$y_t = \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$$

i y_t és un soroll blanc.

Definició 4.1.0.1. *Sigui r_t una sèrie estacionària, sigui x_t el vector de variables explicatives i b el vector dels paràmetres corresponents a aquestes. Direm que una sèrie ε_t es tracta d'un ARCH(q) si¹⁴:*

$$\begin{aligned} r_t | r_{t-1} &\sim N(x_t' b, h_t) \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \\ \varepsilon_t &= r_t - x_t' b \end{aligned}$$

¹⁴ es considera que $\varepsilon_{t-1} \subseteq r_{t-1}$.

4.2 Propietats

A continuació veurem les propietats més importants per nosaltres, la estacionarietat i la variància incondicional.

Proposició 4.2.0.1. *Un model ARCH(q) és estacionari si i només si $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$.*

Demostració. (Veure [3], Article 1, capítol 4) □

Proposició 4.2.0.2. *Si un procés ARCH(q) estacionari, la variància incondicional és:*

$$\text{Var}[\varepsilon_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j}$$

Demostració. $E[\varepsilon_t^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + u_t] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i E[\varepsilon_{t-i}^2]$

Podem reescriure el model com $(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i) E[\varepsilon_t^2] = \alpha_0$ i per ser estacionari, tenim que:

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j}$$

□

4.3 Estimació

Donat que en el cas que estem analitzant ara, hi ha presència de retards de l'endògena en la nostra regressió, l'estimació per MQO perd eficiència ja que els errors quadrats de les pertorbacions són més grans. Usarem doncs, el mètode de màxima versemblança (per més detalls veure [1]).

4.3.1 Estimació per màxima versemblança

Partim de les següents dades:

- $r_t | \underline{r_{t-1}} \sim N(\mu_t, h_t)$
- $\mu_t = x_t' b$
- $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \varepsilon_{t-q}^2$
- $\varepsilon_t = r_t - x_t' b$

amb $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Es dedueix doncs que $\varepsilon_t | \underline{\varepsilon_{t-1}} \sim N(0, h_t)$.

Observació 4. Si el procés $r_t | \underline{r_{t-1}}$ té mitjana $\mu_t = 0$ llavors $r_t = \varepsilon_t$ que és el cas que hem usat a 3.2.

En aquest apartat, al contrari que hem fet a 3.4.2, escriurem les derivades de manera vectorial. Siguin (3.2) i (3.3), les primeres derivades de la funció de versemblança són:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial b} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial b} + \sum_{t=1}^T \frac{x_t \varepsilon_t}{h_t} = \sum_{t=1}^T \frac{x_t \varepsilon_t}{h_t} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

Donat que $\frac{\partial \varepsilon_{t-j}^2}{\partial b} = \frac{\partial (r_{t-j} - x'_{t-j} b)^2}{\partial b} = 2(-x_{t-j})(r_{t-j} - x'_{t-j} b) = -2x_{t-j} \varepsilon_{t-j}$ tenim:

$$\frac{\partial h_t}{\partial b} = -2 \sum_{j=1}^q \alpha_j x_{t-j} \varepsilon_{t-j}$$

Calculem ara les segones derivades:

$$H_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha \alpha'} = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} + \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right]$$

$$H_{bb} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial b \partial b'} = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{x_t x'_t}{h_t} - \frac{2x_t \varepsilon_t}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial b'} - \frac{1}{2h_t^2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \frac{\partial h_t}{\partial b'} + \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \right) \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right]$$

$$H_{\alpha b} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha \partial b'} = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \left(2\varepsilon_t x_t + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b'} \right) + \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right]$$

Com que la dificultat i extensió de les fórmules comença a ser notable, introduïrem una nova notació de cara a simplificar algunes expressions. Donats els següents vectors:

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \\ b' &= (b_0, b_1, \dots, b_k) \\ z'_t &= (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2) \end{aligned}$$

podem escriure la variància condicional com: $h_t = z'_t \alpha$. La informació de Fisher tindrà la següent forma:

$$I_{\alpha\alpha} = -E[H_{\alpha\alpha} | \varepsilon_{t-1}] = \sum_{t=1}^T \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha'} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{z'_t z_t}{h_t^2}$$

$$I_{bb} = -E[H_{bb}|\underline{\varepsilon}_{t-1}] = \sum_{t=1}^T \left[\frac{x_t x_t'}{h_t} + \frac{2}{h_t^2} \sum_{j=1}^q \alpha_j^2 \varepsilon_{t-j}^2 x_{t-j} x_{t-j}' \right]$$

$$I_{\alpha b} = -E[H_{\alpha b}|\underline{\varepsilon}_{t-1}] = - \sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{h_t^2} z_t \sum_{j=1}^q \alpha_j x_{t-j} \varepsilon_{t-j} \right]$$

Un cop calculada la matriu d'informació, podem passar a realitzar el procés iteratiu. És el mateix que l'esmenat en l'apartat 3.4.2:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + [I(\theta^{(k)})]^{-1} q^{(k)}, \quad k \geq 0$$

on

- $\theta^{(k)}$ és el vector $\theta = (b, \alpha)$ en la iteració k -èsima.
- $q^{(k)}$ és el vector $\frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta}$ avaluat en $\theta^{(k)}$.
- $I(\theta^{(k)})$ és el valor de la matriu $I(\theta)$ en $\theta^{(k)}$.

Nota 3. Si un model ARCH complint les condicions de les definicions és simètric, es té que $I_{\alpha b} = 0$, i per tant, l'estimació dels paràmetres α i b es podria fer per separat amb el mateix algorisme. (veure pàg. 19 de[1] per més informació)

4.3.2 Convergència dels paràmetres

Un cop endinsats en l'estimació dels paràmetres, sembla interessant saber quan hem de parar de realitzar iteracions. El següent estadístic és útil a l'hora de saber quan s'assoleix convergència:

$$G = \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta'} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta}$$

Aquest estadístic es distribueix com una chi quadrat amb q graus de llibertat: $G \sim \chi_q^2$. Si aquest estadístic pren un valor inferior al de les taules, considerarem que s'ha assolit la convergència. En cas contrari, continuarem iterant el procés. S'ha de mirar aquest estadístic en cada pas de la iteració.

Observació 5. Veiem que aquest estadístic es tracta de $q^{(k)'} [I(\theta^{(k)})]^{-1} q^{(k)}$ que és la transformació en escalar del vector $[I(\theta^{(k)})]^{-1} q^{(k)}$ que sumem a $\theta^{(k)}$ per a obtenir la següent iteració. La idea és mesurar com de gran és la addició que estem realitzant i aturar-nos quan aquesta sigui tan petita que la podem obviar.

4.4 Contrast d'hipòtesi

El contrast d'hipòtesi d'un ARCH(q) no és més que una ampliació del que hem formulat a l'apartat 3.5.1.

4.4.1 Explicació del Contrast

Les hipòtesis del test d'homoscedasticitat són les següents:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0 \\ H_A &: \text{No } H_0 \end{aligned}$$

Si es rebutja la hipòtesi nul·la ens trobem al cas $h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j}$. En cas contrari tindríem que $h_t = \alpha_0$. Definim $h_t = z_t' \alpha$ on $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ i $z_t' = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2)$. Calculem l'estadístic del test usant (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha} \Big|_{H_0} &= \frac{1}{2\alpha_0} \sum_{t=1}^T z_t' \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0} - 1 \right), \\ -E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(b, \alpha; \varepsilon)}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right] \Big|_{H_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_0} \right)^2 z' z \end{aligned}$$

on $z = (z_1', \dots, z_T')$. Per tant, obtenim:

$$\text{ARCH LM} = \xi = \frac{1}{2} f^{0'} z (z' z)^{-1} z' f^0$$

amb $f^{0'} = \left(\frac{\varepsilon_1^2}{\alpha_0} - 1, \dots, \frac{\varepsilon_1^2}{\alpha_0} - 1 \right)$

4.4.2 Presa de decisió

Un cop calculat l'estadístic de prova ja es pot procedir a la presa de decisió. L'estadístic de prova ARCH LM segueix una distribució $\xi \sim \chi_q^2$ al 95%.

1. Si $\xi < \text{valor de } \chi_q^2$ a les taules \Rightarrow Acceptem $H_0 \Rightarrow h_t = \alpha_0$. És a dir, no hi ha presència d'heteroscedasticitat i per tant no ens serveix l'ús d'un model ARCH(q).
2. Si $\xi > \text{valor de } \chi_q^2$ a les taules \Rightarrow Rebutgem la hipòtesi nul·la $\Rightarrow h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}$ i podem aplicar un model ARCH(q) a les nostres dades.

4.4.3 Alternativa

Donat que a l'hora de realitzar aquest contrast ja hem assumit que la distribució era Normal, existeix una alternativa a l'hora de calcular l'estadístic de prova. Com a conseqüència de la normalitat, es té que $f^{0'} f^0 / T = 2$. Per a una mostra molt gran, tenim que l'estadístic es asimptòticament equivalent a (veure [3]¹⁵):

$$\xi = \frac{T f^{0'} z (z' z)^{-1} z' f^0}{f^{0'} f^0} = T \cdot R^2$$

¹⁵ Article 1, capítol 8.

on R^2 és el coeficient de determinació de la regressió ε_t^2 amb q -retards de l'endògena. Aquest estadístic també segueix una distribució $\xi \sim \chi_q^2$ al 95% i, per tant, el procediment de presa de decisió serà el mateix a l'explicat.

5 Models Garch i altres variants

Al febrer de 1986 va sorgir la versió final d'una publicació anomenada "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity" escrita per Tim Bollerslev. En aquesta publicació es presentava una variant dels models ARCH. En essència, es tractava d'una ampliació d'aquests. A aquest nou model se'l va anomenar, com el títol de l'article diu: GARCH ó Models generalitzats autoregressius condicionalment heteroscedàstics.

L'ampliació que es realitza en els models GARCH és la introducció de retards de la variància condicional. Això permet explicar la variància condicional en funció dels seus retards.

Una de les millores que va aportar el model GARCH respecte l'ARCH va ser la possibilitat d'especificar el model amb pocs paràmetres (valors de p i q petits), mentre que sovint per als models ARCH es necessiten valors grans a l'hora d'especificar el model (per exemple $p = 12$) per aconseguir bons ajustos.

5.1 Definició del model

Definició 5.1.0.1. Sigui $\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t)$. Sigui $z_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$ i $\omega' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$. Direm que ε_t es comporta com un model GARCH(p, q) si:

$$h_t = z_t \omega = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

on

$$p \geq 0, q > 0$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q,$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p.$$

Observació 6. La regressió GARCH(p, q) s'obté fent $\varepsilon_t = r_t - x_t' b$, com hem vist al tema anterior.

Observació 7. Si $p = 0$ es tracta d'un proces ARCH(q). I si $p = 0$ i $q = 0$ es tracta d'un soroll blanc

5.2 Propietats

Tal i com hem fet al capítol anterior, veurem quines són les condicions per a que el model sigui estacionari, i calcularem la seva variància incondicional i la curtosi d'un GARCH(1, 1).

Proposició 5.2.0.1. El model GARCH(p, q) definit es estacionari si i només si $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j > 1$

Demostració. (Veure [3], Article 3, capítol 2) □

Proposició 5.2.0.2. *Segui un model GARCH(1,1) tal que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, tenim que el coeficient de curtosi és:*

$$k = \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2}$$

Demostració. (Veure [3], Article 3, capítol 3) □

Proposició 5.2.0.3. *La variància incondicional d'un model GARCH(p,q) estacionari és:*

$$\text{Var}[\varepsilon_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)}$$

Demostració. (Veure [3], Article 3, capítol 2) □

5.3 Estimació del model

5.3.1 Mètode de màxima versemblança

Siguin z_t i ω i sigui $\theta \in \Theta$ tal que $\theta = (b', \omega')$ on Θ és un subespai compacte d'un espai euclídia tal que el procés ε_t té moment finit d'ordre 2. Partim de:

$$\begin{aligned} r_t | \underline{r}_{t-1} &\sim N(\mu_t, h_t) \text{ amb } \mu_t = x_t' b \\ \varepsilon_t &= r_t - x_t' b, \\ \varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1} &\sim N(0, h_t), \\ h_t &= z_t' \omega \end{aligned}$$

La funció de versemblança és com a (3.3). Si la derivem respecte als paràmetres que afecten a la variància obtenim:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

Calculem $\frac{\partial h_t}{\partial \omega}$:

$$\frac{h_t}{\partial \alpha_0} = 1 + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \alpha_0},$$

$$\frac{h_t}{\partial \alpha_i} = \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \alpha_i}, \text{ per } i = 1, \dots, q,$$

$$\frac{h_t}{\partial \beta_i} = h_{t-i} + \sum_{i=1}^p \gamma_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \beta_i}, \text{ per a } i = 1, \dots, p.$$

Per tant, obtenim:

$$\frac{\partial h_t}{\partial \omega} = z_t + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \omega}$$

Derivem ara respecte els paràmetres de la mitjana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial b} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) + \sum_{t=1}^T \frac{x_t \varepsilon_t}{h_t}$$

Calculem $\frac{\partial h_t}{\partial b}$:

$$\frac{\partial h_t}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i} x'_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial b}$$

Observació 8. Notem que les derivades $\frac{\partial h_t}{\partial b}$ i $\frac{\partial h_t}{\partial \omega}$ són iguals que les de l'ARCH excepte pels sumatoris recursius.

Calculem ara les segones derivades de la funció de versemblança:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \omega \partial \omega'} = \sum_{t=1}^T \left[\frac{\partial}{\partial \omega'} \left(\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) - \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \frac{\partial h_t}{\partial \omega'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial b \partial b'} = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{x_t x'_t}{h_t} - \frac{2x_t \varepsilon_t}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial b'} - \frac{1}{2h_t^2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \frac{\partial h_t}{\partial b'} + \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \right) \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \omega \partial b'} = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \left(2\varepsilon_t x_t + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b'} \right) + \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right]$$

Tenint en compte que

$$E \left[\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} | \varepsilon_{t-1} \right] = 1 \text{ i } E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}] = 0 ,$$

la matriu d'informació de Fisher seria com la del model ARCH(q) tenint en compte els termes recursius que han aparegut a $\frac{\partial h_t}{\partial b}$ i $\frac{\partial h_t}{\partial \omega}$ pel GARCH.

Nota 4. Tal i com hem indicat a la nota , si el model GARCH és simètric, tenim que $I_{\omega b} = 0$ i es poden estimar ambdós paràmetres per separat.

Per tal d'estimar consistentment $\theta = (b', \omega')$ haurem d'usar un algoritme. Degut a que les parts recursives de les fórmules que hem a l'observació 8 compliquen el procés, no és viable usar l'algoritme de Scoring com hem fet per al cas dels ARCH. En comptes d'aquest, usarem el següent:

Sigui $\theta^{(k)}$ l'estimació del nostre paràmetre després de la iteració k -ésima. La següent iteració $\theta^{(k+1)}$ es calcula com:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \lambda_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta'} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \varepsilon)}{\partial \theta}$$

amb l'expressió avaluada en $\theta^{(k)}$ i λ_i és una variable escollida per maximitzar la funció de màxima versemblança. (Veure [1] per més detalls.)

Nota 5. *El criteri de convergència per al model GARCH és idèntic al usat pels models ARCH*

5.4 Contrast d'homoscedasticitat

De la mateixa manera que succeeix amb els ARCH, es interessant estudiar prèviament si les nostres dades segueixen un PGD GARCH, ja que són models amb certa dificultat a l'hora de ser estimats i convé assegurar-se que són adequats abans de començar amb els càlculs de l'estimació. Sigui $h_t = z_t' \omega$. Partim el vector z_t per tal d'agrupar els termes que ens interessin i obtenim $h_t = z_{1t}' \omega_1 + z_{2t}' \omega_2$ on $z_{1t}' = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2)$ i $z_{2t}' = (h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$ i ω_1, ω_2 els respectius paràmetres. Les hipòtesis són:

$$H_0 : \omega_2 = 0 \Rightarrow \text{ARCH}$$

$$H_A : \omega_2 \neq 0 \Rightarrow \text{GARCH}$$

Al contrari que en els contrastos realitzats anteriorment, en aquest les hipòtesis són un model ARCH contra un GARCH. El multiplicador de Lagrange és

$$\xi = \frac{1}{2} f_0' z (z' z)^{-1} z' f_0$$

on $f_0' = (\frac{\varepsilon_1^2}{h_1} - 1, \dots, \frac{\varepsilon_T^2}{h_T} - 1)'$, $z' = (h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \omega}, \dots, h_T \frac{\partial h_T}{\partial \omega})$ estan avaluats sota la hipòtesi nul·la. L'estadístic de prova segueix una distribució $\xi \sim \chi_p^2$ on p són el nombre d'elements de ω_2 .

5.5 Altres variants del model Arch

Arran de la invenció dels models ARCH, molts investigadors van començar a desenvolupar models a partir d'aquest. A continuació presentem alguns dels més importants. Partirem de la següent suposició, ja plantejada amb anterioritat: $r_t | r_{t-1} \sim N(0, h_t)$.

5.5.1 EGARCH

El model EGARCH o Exponential GARCH va ser proposat l'any 1991 per Nelson. Es tracta d'un model que capta millor la asimetria de la sèrie. Va ser ideat per

combatre les restriccions de no negativitat dels paràmetres que contenen els models ARCH i GARCH. El model EGARCH(p, q) és el següent¹⁶:

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\delta_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \ln(h_{t-j})$$

on $g(\delta_t) = \theta \delta_t + \lambda[|\delta_t| - E|\delta_t|]$ i $\delta_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$.

Tindrem que $E[\delta_t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ si $\delta \sim N(0, 1)$.

5.5.2 TGARCH

Els models TARCH són presentats l'any 1991 per Zakoian. Sorgeixen degut a algunes de les limitacions dels models GARCH. Aquest no són capaces de predir adequadament el fet que la variància condicional tendeix a ser superior per una disminució en el retorn que per un augment del mateix valor. El model TGARCH sorgeix poc després i és el següent¹⁷:

$$\sqrt{h_t} = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \lambda_i I_{t-i}) \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sqrt{h_{t-j}}$$

on $I_{t-i} = 0$ si $\varepsilon_{t-i} > 0$ i és igual a 1 en cas contrari.

5.5.3 GJR-GARCH

El model GJR-GARCH no és més que una modificació del model de Zakoian. El model és el següent¹⁸:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \lambda_i I_{t-i}) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

on I_{t-i} és com al TGARCH.

Existeixen infinitat de variants, però hem considerat que aquestes són les més interessants per al nostre treball.

¹⁶<http://vlab.stern.nyu.edu/doc/4?topic=mdls>

¹⁷http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/sfehtmlnode67.html

¹⁸<http://vlab.stern.nyu.edu/doc/3?topic=mdls>

6 Ajust de dades financeres

En aquest capítol aprofitarem els conceptes dels capítols anteriors i fent ús d'algunes eines estadístiques i econòmiques intentarem escollir quin es el model més adequat per ajustar sobre unes dades financeres. Per dur a terme les estimacions i anàlisis hem usat el software econòmic Gretl, i per fer les gràfiques hem usat l'Excel. Hem escollit Gretl per facilitat d'ús i perquè usa els procediments i algorismes explicats durant el treball.

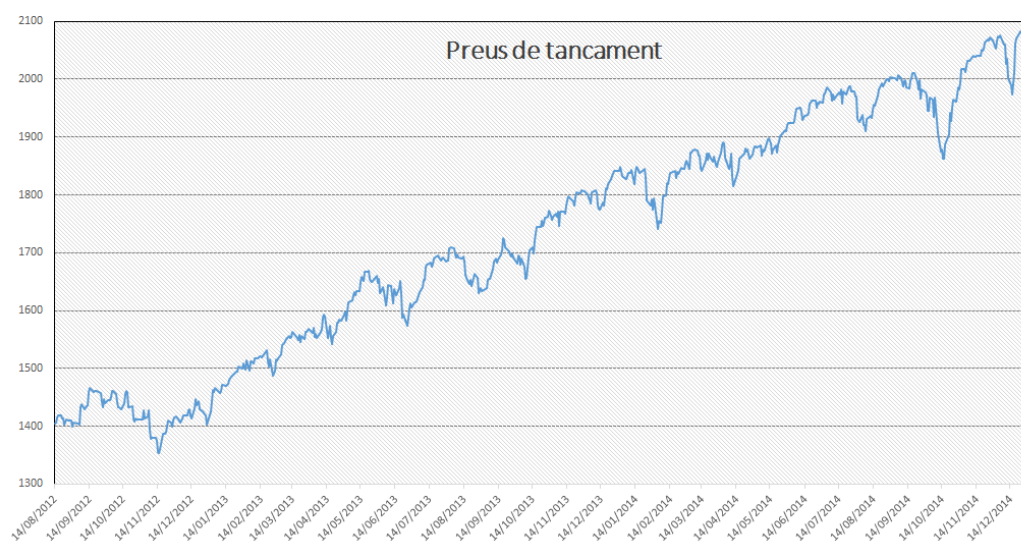
6.1 S&P500

L'índex S&P500 és un dels índex més importants del món. Es calcula usant les dades de les 500 empreses més importants de tot tipus d'indústries. El calcul es fa amb pesos, donant més importància a aquelles empreses que tenen un major valor de mercat. Aquestes 500 empreses han estat escollides per un comitè mitjançant el seu tamany, ingressos, liquiditat, etc.¹⁹ Donada la seva importància en el món bursàtil i el seu freqüent ús en el dia a dia, volem veure si som capaços de ajustar un model que expliqui la volatilitat d'aquest índex.

6.1.1 Estudi previ de les dades

Hem agafat una mostra de 600 valors corresponents al període que va del "2014-12-31" fins al "2012-08-14"²⁰. Observem en primer lloc la gràfica dels preus de tancament.

Figura 1: Sèrie de preus



¹⁹informació extreta de: <http://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>

²⁰dades obtingudes de Yahoo Finance

Veiem que la sèrie té un clar caràcter ascendent. Es poden observar algunes caigudes considerables seguides d'una recuperació de la mateixa magnitud pel que al final aquestes davallades no tenen afectació a la tendència de la sèrie. Veiem algunes dades de la nostra sèrie:

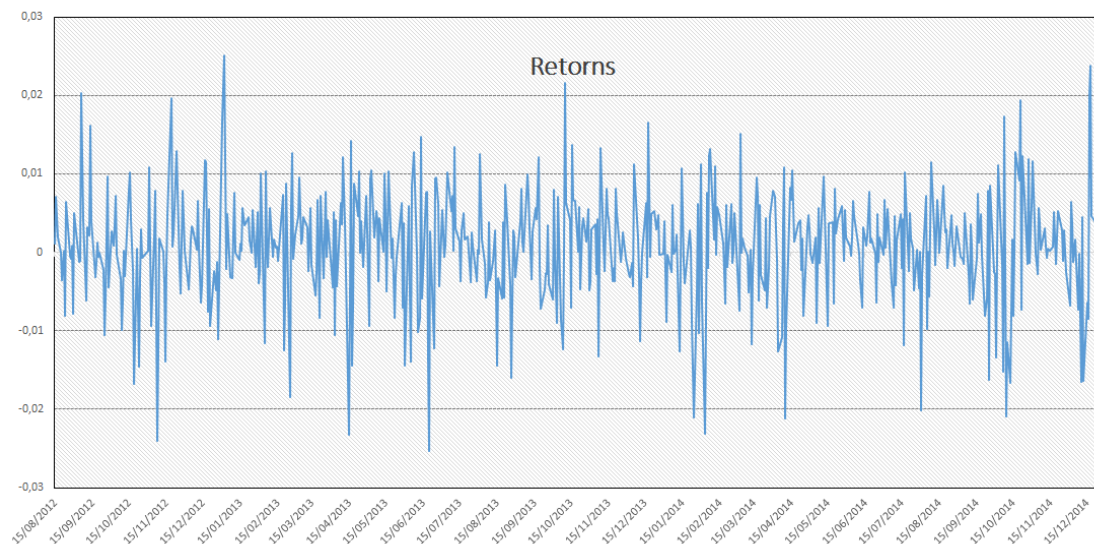
Taula 1: Dades sèries de preus

Summary Statistics, using the observations 2012/08/14–2014/12/31 for the variable Close (599 valid observations)			
Mean	Median	Minimum	Maximum
1729.60	1746.38	1353.33	2090.57
Std. Dev.	C.V.	Skewness	Ex. kurtosis
205.421	0.118768	−0.108949	−1.22461

De moment ens interessen només a nivell informatiu. En farem ús més endavant.

Anem a veure ara, la sèrie dels retorns:

Figura 2: Sèrie de retorns



Les característiques bàsiques de la sèrie dels retorns són:

Taula 2: Dades retorns

Summary Statistics, using the observations 2012/08/14–2014/12/31
for the variable `ld_Close` (598 valid observations)

Mean	Median	Minimum	Maximum
0.000640295	0.000725112	−0.0253284	0.0250861
Std. Dev.	C.V.	Skewness	Ex. kurtosis
0.00712981	11.1352	−0.331897	1.30100

A la taula 2 veiem que la mitjana és molt propera a zero. Es podria suposar que ho és, però hem de tindre en compte que estem treballant amb dades no superiors a 0.03. L'excés de curtosi és de 1.301, per tant la curtosi és 4.301. Donat que la curtosi de la distribució normal és 3, tenim que la nostra sèrie és leptocúrtica.

Per tal de poder modelitzar la sèrie mitjançant models de la família ARCH, ens interessa que la sèrie dels retorns tingui un comportament de soroll blanc. La FAC²¹ i la FAP²² s'usen de manera habitual per a detectar soroll blancs, ja que indica si hi ha correlació entre els diferents períodes:

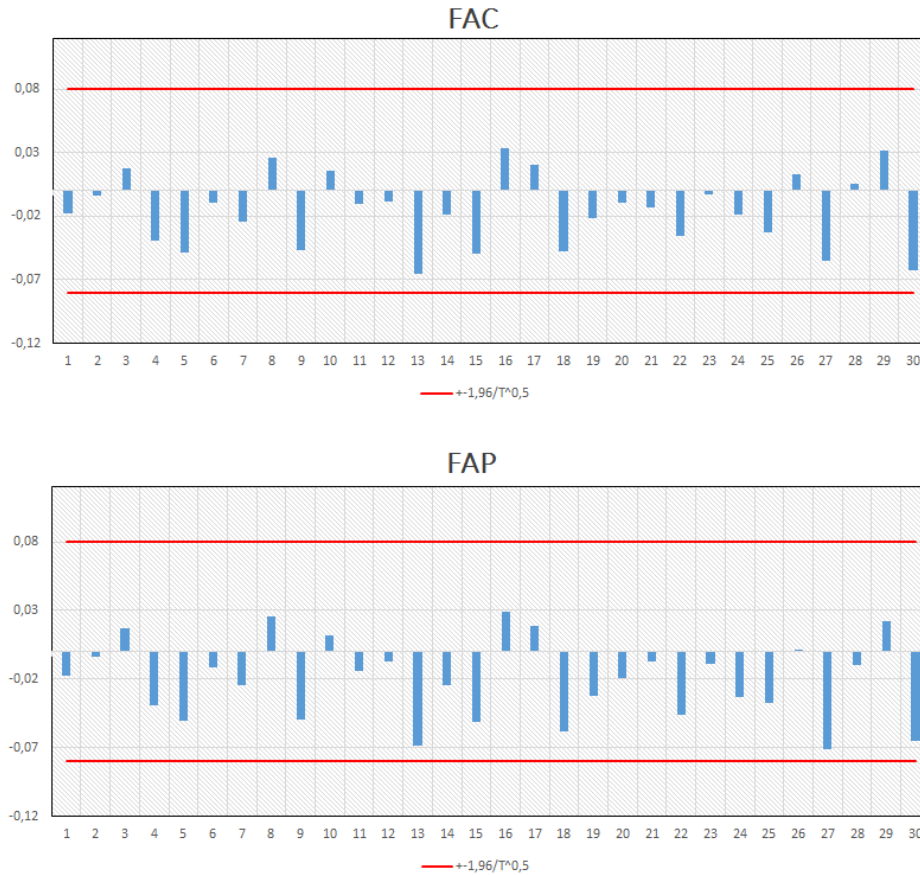
Les nostres funcions FAC i FAP (Figura 6.1.1) tenen els valors entre les franques vermelles. Aquest és un bon indicador, ja que vol dir que la correlació no és significativa, i per tant suposem que no hi ha. La sospita es que es tracta d'un soroll blanc. Es poden dur a termes contrastats per tindre més seguretat sobre aquest fet, però nosaltres estem bastant segurs de que ho és. Ens trobem doncs, en el cas $r_t = \varepsilon_t$.²³

²¹funció d'autocorrelació

²²funció d'autocorrelació parcial

²³ encara no es pot assegurar si existeix terme constatat

Figura 3: funció d'autocorrelació i funció d'autocorrelació parcial



Vista la hipòtesi de soroll blanc, ens interessa veure ara, si la sèrie dels retorns segueix una distribució normal. Aquesta és la suposició que hem fet a la part teòrica per tal d'estimar els nostres paràmetres. Com hem vist a la taula 2, la curtosi dels retorns és 4.301 que difereix bastant de la d'una distribució normal. Aquest fet ens fa pensar que els retorns no seguiran una distribució normal. Utilitzarem els següents contrastes de normalitat per assegurar-nos:

Taula 3: Contrasts de normalitat

Contraste de Doornik-Hansen = 30,4962, con valor p 2,38693e-007
W de Shapiro-Wilk = 0,979757, con valor p 2,33092e-007
Contraste de Lilliefors = 0,0589075, con valor p = 0
Contraste de Jarque-Bera = 53,1527, con valor p 2,87101e-012

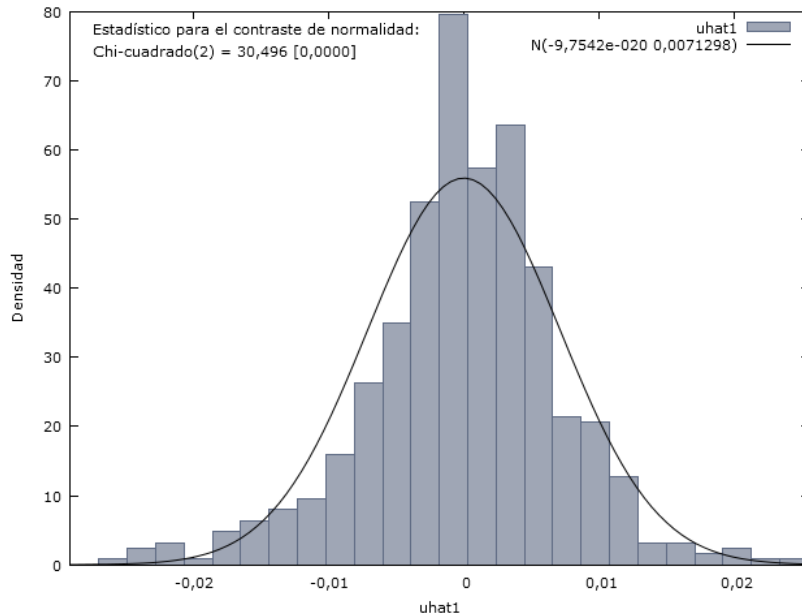
Les hipòtesis dels test de Normalitat són:

$$H_0 : \varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma)$$

$$H_A : \varepsilon_t \not\sim N(\mu, \sigma)$$

Donat que els p-valors dels nostres tests són clarament inferiors a 0.05 rebutgem la hipòtesi nul·la. Per tant, tenim que la sèrie de retorns no segueix una distribució normal.

Figura 4: Histograma de la sèrie de retorns



Aquest fet pot semblar un gran problema, ja que no és compleix la suposició que hem fet a l'hora de realitzar les estimacions per MV²⁴. Tot i això, podem procedir a estimar els models ARCH mitjançant màxima versemblança. La raó és que els estimadors per màxima versemblança continuen sent consistents tot i que la nostra distribució no sigui normal. A més, aquests estimadors són asimptòticament normals. (Veure [2]²⁵)

A continuació durem a terme el contrast ARCH-LM per veure si es viable l'estimació d'un model ARCH amb les nostres dades. Procedim de la següent manera: Començarem fent un test per a un ARCH(1) i anirem pujant de grau fins a trobar el paràmetre que no és significatiu. Adjuntem el test per a un ARCH(3), ja que és on ha sortit el primer paràmetre no significatiu:

²⁴ Màxima versemblança

²⁵ pàgina 44

Taula 4: Test ARCH-LM per a un ARCH(3)

Test for ARCH of order 3				
	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
α_0	3,69307e-05	4,89116e-06	7,551	1,65e-013
α_1	0,124201	0,0410598	3,025	0,0026
α_2	0,0848851	0,0412267	2,059	0,0399
α_3	0,0668581	0,0410606	1,628	0,1040

Null hypothesis: no ARCH effect is present
 Test statistic: LM = 20,0248
 with p-value = P(Chi-square(3) > 20,0248) = 0,000167743

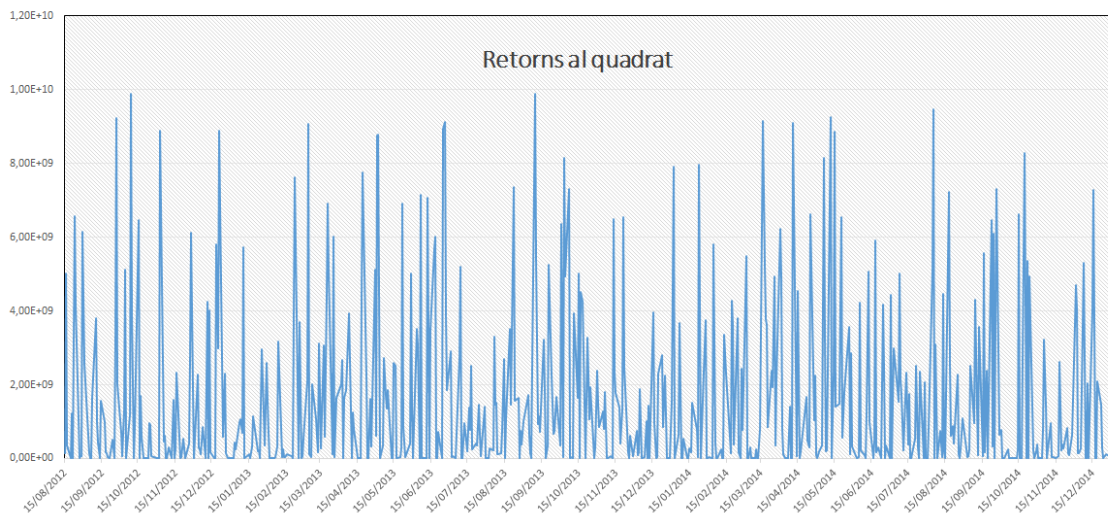
S'observa que el paràmetre α_3 no és significatiu. Tot i això, el p -valor del test per l'ARCH(3) és molt inferior a 0.05. Per tant, el model sí que resultaria significatiu. Concloem doncs, que podem procedir a l'estimació d'un model ARCH.

6.1.2 Selecció i ajust del model

En aquest apartat procedirem a debatre quin model és el més adequat per les nostres dades. Ho farem ajustant uns quants i comparant-los.

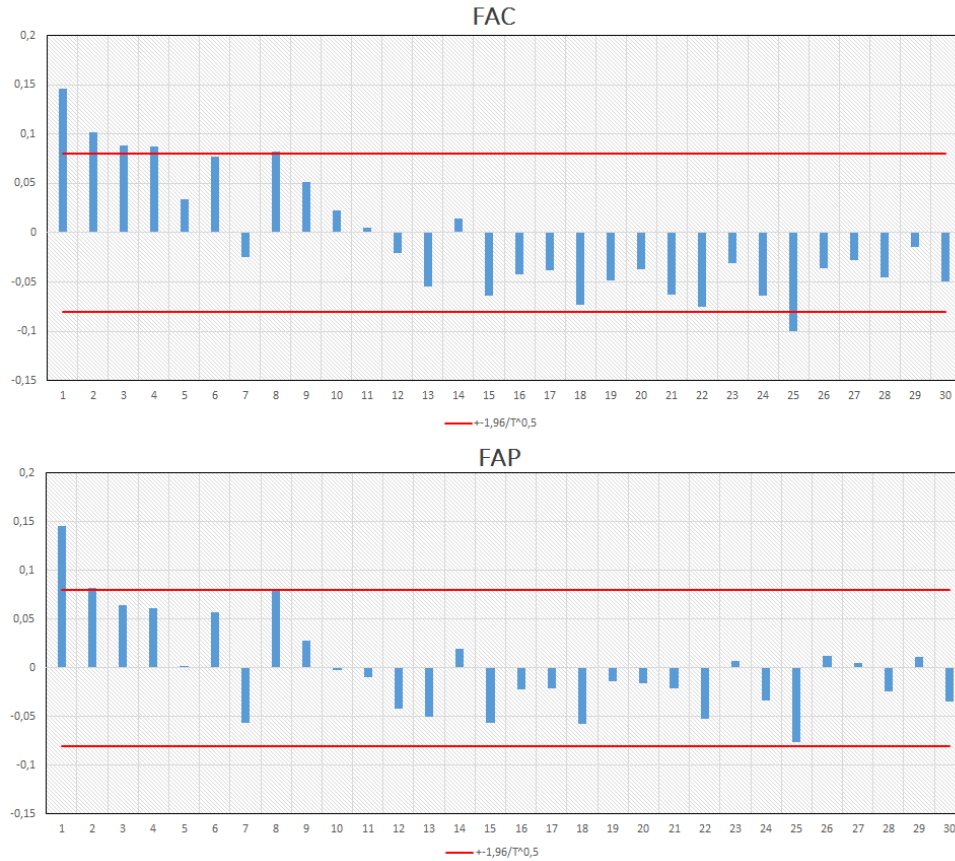
Una de les característiques de les sèries que són condicionalment heteroscedàstiques és que tot i que la sèrie ε_t es tracti d'un soroll blanc (correlacions no significatives), ε_t^2 no ho és, com es pot intuir a (3.1). Adjuntem a continuació la gràfica dels retorns al quadrat:

Figura 5: Sèrie de retorns quadrats



Mitjançant la FAC i la FAP de ε_t^2 es pot intuir quin és el grau del model ARCH. Es fa de la mateixa manera que amb un model autorregresiu.

Figura 6: FAC i FAP de la sèrie de retorns quadrats



Si ens fixem en la FAC veiem que el primer coeficient es clarament significatiu. El segon també. El tercer i el quart es troben just a sobre de la línia i el cinquè ja no ho és. Es pot dir que la FAC decreix ràpidament, la qual cosa denota estacionarietat. La FAP té el primer coeficient clarament significatiu, el segon es troba sobre la franja i la resta ja no ho són, excepte la correlació de nivell vuit, en que poden sorgir dubtes.

Donat que la FAP ens indica el nombre de paràmetres significatius d'un model autorregresiu²⁶, fem la següent interpretació: Els dos primers termes del model autorregresiu són significatius, la resta no ho són. Hauríem de dur a terme, doncs, l'estimació d'un model ARCH(2), tot i que al test ARCH-LM hem vist que un ARCH(3) també era correcte.

Durem a terme l'estimació d'aquests dos models i escollirem entre els dos usant els criteris d'Akaike i BIC.

²⁶només en el cas que la FAC decreixi ràpidament

Taula 5: Estimació model ARCH(2)

Model 1: ARCH, using observations 2012/08/15–2014/12/31 ($T = 598$)
 Dependent variable: Id_Close
 Standard errors based on Hessian

	Coefficient	Std. Error	z	p-value
const	0.000759816	0.000270434	2.8096	0.0050
α_0	3.59768e-005	3.38222e-006	10.6370	0.0000
α_1	0.198866	0.0678771	2.9298	0.0034
α_2	0.106226	0.0514454	2.0648	0.0389
Mean dependent var	0.000640	S.D. dependent var	0.007130	
Log-likelihood	2122.061	Akaike criterion	-4234.122	
Schwarz criterion	-4212.154	Hannan-Quinn	-4225.569	
Unconditional error variance = 5.17721e-005				

Taula 6: Estimació model ARCH(3)

Model 2: ARCH, using observations 2012/08/15–2014/12/31 ($T = 598$)
 Dependent variable: Id_Close
 Standard errors based on Hessian

	Coefficient	Std. Error	z	p-value
const	0.000784322	0.000263749	2.9737	0.0029
α_0	2.89870e-005	3.36996e-006	8.6016	0.0000
α_1	0.164444	0.0588613	2.7938	0.0052
α_2	0.113189	0.0522868	2.1648	0.0304
α_3	0.181156	0.0648480	2.7936	0.0052
Mean dependent var	0.000640	S.D. dependent var	0.007130	
Log-likelihood	2128.505	Akaike criterion	-4245.010	
Schwarz criterion	-4218.649	Hannan-Quinn	-4234.747	
Unconditional error variance = 5.35595e-005				

A les taules 5 i 6 observem el següent: els errors estàndards dels paràmetres α_0, α_1 són lleugerament més petits al model ARCH(3), el del paràmetre α_2 ho és en el model ARCH(2). Si mirem els criteris de decisió veiem que els del model ARCH(3) són més petits sempre. Sembla que el model ARCH(3) s'aproxima lleugerament millor a les nostres dades. Com que la millora d'un model al altre no és gaire gran,

també podríem escollir el model ARCH(2) i d'aquesta manera estalviar-nos l'estimació d'un paràmetre. En el nostre cas usarem el model ARCH(3).

Ja hem escollit el model més adequat dels ARCH. Procedirem ara a estimar algun dels altres models que s'han explicat a la part teòrica del treball. Donat que ja hem fet l'estudi previ de les dades, i el contrast ARCH LM ha estat positiu, prescindirem d'aquestes passes i passarem directament a l'estimació dels models. Després d'unes quantes proves s'ha decidit estimar els següents models: un GARCH(1, 1), i un model GJR(1, 1). El nostre interès es troba en escollir quin dels tres models s'ajusta millor a les nostres dades. Per fer-ho, farem una taula comparativa amb diferents estadístics que ens ajudaran en el procés de decisió.

Taula 7: Estimació paràmetres

		ARCH(3)	GARCH(1,1)	GJR(1,1)
		Normal	Normal	Normal
constant	estimació	0.000784322	0.000780823	0.000528751
	s.e	0.000263749	0.000263154	0.000260775
	p-valor	0.0029	0.0030	0.0426
α_0	estimació	2.89870e-05	9.77224e-06	5.76520e-06
	s.e	3.36996e-06	3.11767e-06	1.52426e-06
	p-valor	7.86e-018	0.0017	0.0002
α_1	estimació	0.164444	0.177980	0.0777490
	s.e	0.0588613	0.0485829	0.0304320
	p-valor	0.0052	0.0002	0.0106
α_2	estimació	0.113189		
	s.e	0.0522868		
	p-valor	0.0304		
α_3	estimació	0.181156		
	s.e	0.0648480		
	p-valor	0.0052		
β_1	estimació		0.637137	0.739429
	s.e		0.0842585	0.0442788
	p-valor		3.98e-014	1.32e-062
γ_1	estimació			1.01024
	s.e			0.315363
	p-valor			0.0014

A la taula 7 s'observa que tots els p -valors són inferiors a 0.05, el que implica que tots els paràmetres dels models són significatius. Els s.e²⁷ no semblen gaire petits comparats amb les estimacions donades. Com tots els paràmetres són significatius i els s.e són bastants similars en percentatge, no podem obtenir cap dada que ens permeti escollir un model o un altre mitjançant aquesta taula. Per prendre una

²⁷standard errors: errors estàndards

decisió construïm la taula dels criteris d'informació. Aquests criteris són molt usats a l'hora d'escollir entre un model i un altre. Es tracta de seleccionar el model que minimitza el valor de la informació.

Taula 8: Criteris d'informació

	ARCH(3)	GARCH(1,1)	GJR(1,1)
Akaike	-4245.010	-4245.604	-4272.71311
Hannan Quinn	-4234.747	-4237.051	-4264.16015
BIC	-4218.649	-4223.636	-4250.74516
SEQ	9,36e+11	9,69e+11	9,99e+11

Si mirem la taula 8, on es troben els criteris d'informació, veiem que els valors del model GJR(1, 1) són clarament inferiors als del model ARCH(3) i als del model GARCH(1, 1). En quant a la suma d'errors quadrats, tots tres models tenen valors molt similars. Per tant, el model a seleccionar seria el model GJR(1, 1). Observem que els criteris dels models ARCH(3) i GARCH(1, 1) són molt propers.

Per recolzar més la nostra decisió podem observar com s'ajusten els diferents models a les nostres dades. Donada la sèrie dels retorns, anem a graficar els intervals de confiança per cadascun dels nostres models a sobre del gràfic dels retorns per observar el nivell d'ajust. Utilitzarem un interval de confiança d'aproximadament el 95%²⁸. L'interval de confiança al 95 d'una distribució normal $N(\mu, \sigma^2)$ és $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$. Aplicat al nostre cas tenim:

$$\left(\mu - 2\sqrt{h_t}, \mu + 2\sqrt{h_t}\right)$$

Adjuntem les gràfiques dels tres models:

²⁸més exactament del 95.45%.

Figura 7: Intervals de confiança per l'ARCH(3)

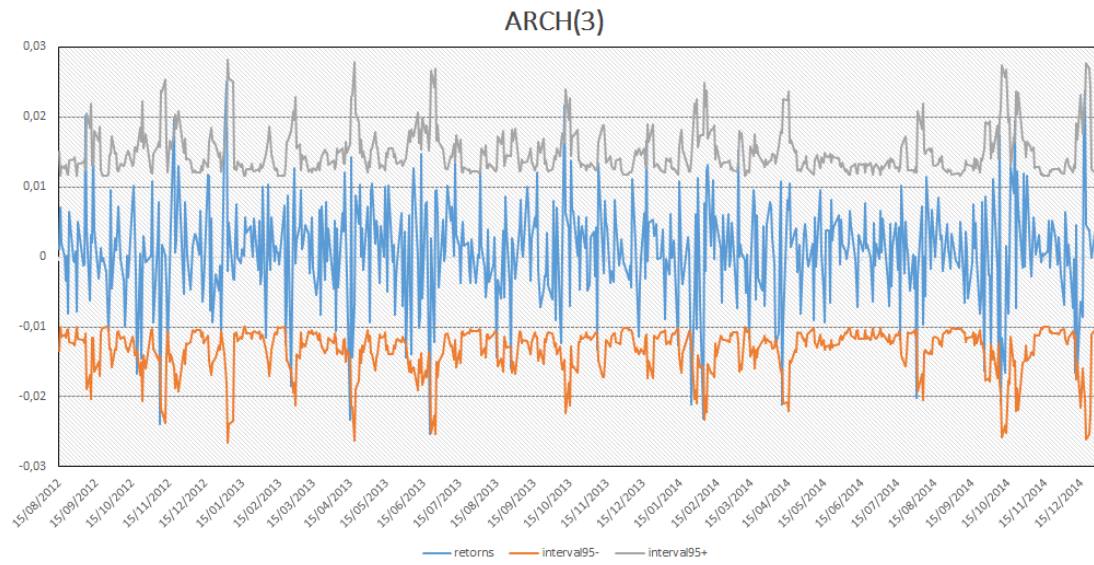


Figura 8: Intervals de confiança pel GARCH(1,1)

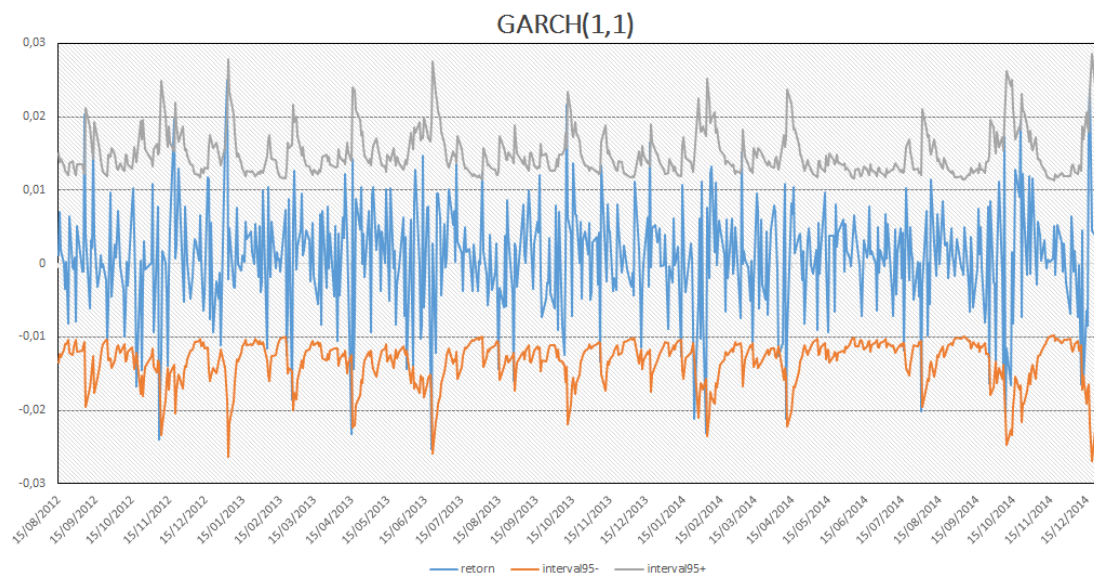
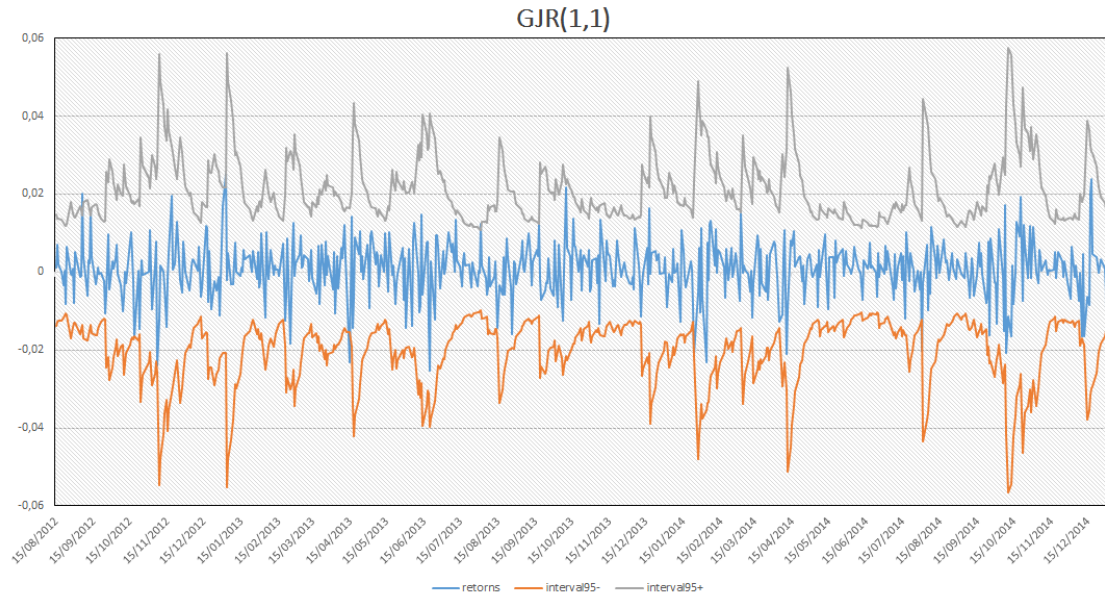


Figura 9: Intervalos de confianza pel GJR(1,1)



Si observem les gràfiques del model ARCH i del GARCH, no veiem gran diferència. L'estructura es bastant similar. Els criteris d'informació que hem vist eren molt propers. Aquest pot ser un dels motius pels quals ho eren. En els dos gràfics s'observa com els intervals tenen un suport entre el 0.01 i el 0.012 i d'aquí no baixen. Els intervals son bastant rígids i no fluctuen de la mateixa manera en que ho fa la sèrie dels retorns. L'interval de confiança es creuat de manera habitual en els valors extrems.

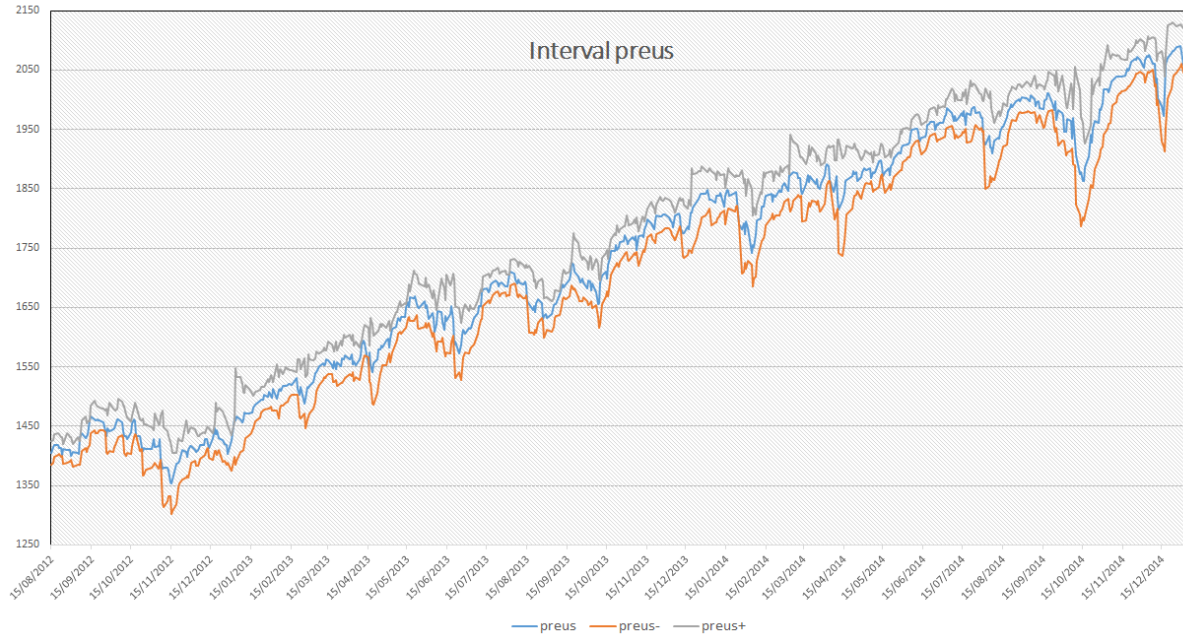
En canvi, si observem la gràfica dels intervals de confiança del model GJR(1, 1) es pot observar una gran diferència respecte als models anteriors. Aquest model acompanya molt més el moviment dels retorns. Puja i baixa de manera agressiva. Aquests intervals poden semblar que estan més allunyats de les nostres dades reals que els altres dos, però això no té per que ser pitjor. Busquem un model que es comporti de manera similar a com ho fan les nostres dades, i obtenim un interval del 95% que pretenem contingui les nostres dades pràcticament sempre. Aquí és on s'observa la gran diferencia entre el model GJR i els altres dos. Mentre que pel GJR els valors extrems pràcticament no creuen el nostre interval de confiança, per els altres dos models veiem que constantment els valors extrems es troben sobre el nostre interval o el traspassen.

Amb el conjunt de dades recopilades, i després dels estudis realitzats, considerem que el model GJR s'ajusta millor a les nostres dades.

6.1.3 Estudi dels resultats

Per veure com es comporta el model que hem escollit, procedim a graficar la nostra sèrie de preus i els seus intervals de confiança usant el model GJR.

Figura 10: Intervals de confiança per la sèrie de preus



Visualment el model GJR(1,1) s'ajusta satisfactoriament a la sèrie de preus. Anem a veure unes quantes dades sobre sobre el nostre ajust.

Taula 9: Creuaments de l'interval

	nº creuaments	%
creuen l'interval superior	4	0,66889632
creuen l'interval inferior	3	0,50167224
creuen l'interval	7	1,17056856

A la taula 9 podem veure que només 7 valors de la mostra de 598²⁹ que hem usat superen algun dels intervals de confiança. Aquesta xifra està repartida entre l'interval superior i l'inferior, 4 i 3 respectivament. El percentatge en que es creua algun dels intervals és del 1,17% que està molt bé, ja que és inferior al 5% que podríem haver esperat usant un interval de confiança del 95%.

A continuació revisem algunes dades de les distàncies entre el nostre interval de confiança i els preus reals:

²⁹s'han eliminat 2 valors arrel dels càlculs

Taula 10: Distàncies a intervals

	max	%	min	%	mitjana	% mitjana
distància sup.	106,274	5,156	0,034	0,002	34,538	2,007
distància inf.	141,419	7,543	1,251	0,072	36,863	2,145
distància	141,419	7,543	0,034	0,002	35,701	2,076

Hi ha valors molt allunyats del preu real: 141.419 per a l'interval inferior i 106,274 per a l'interval superior. Aquestes distàncies representen un 5.1% i un 7.5% del preu real. La mitjana de les distàncies³⁰ és aproximadament 35, i la mitjana del percentatges està entorn a un 2% del preu mitjà real. Aquesta dada no sembla dolenta, tenint en compte que estem tractant amb intervals de confiança i el propòsit d'aquests es contindre la gran majoria dels valors dins l'interval.

Tot i aquestes dades, si ens fixem en la gràfica dels preus, ens donem compte que quan la funció de preus és descendent, la funció es troba molt més propera a l'interval inferior que al superior. De manera equivalent passa quan la funció de preus és ascendent. Aquesta podria ser una possible explicació del motiu pel que tenim valors extrems tant grans a la taula anterior. Convindria doncs, fer un estudi on es comparin els preus amb l'interval corresponent en funció de si la gràfica és ascendent o descendent. Ho fem mitjançant la següent taula:

Taula 11: Distàncies a intervals corregides

	max	%	min	%	mitjana	mitjana %
distància sup.	92,810	4,942	0,034	0,002	26,877	1,555
distància inf.	82,907	4,349	1,251	0,072	26,647	1,557
distància	92,810	4,943	0,034	0,002	26,778	1,556

Observem una notable reducció, en les distàncies màximes. Hem passat d'una distància màxima de 141,4 a una de 92,8 el que suposa una reducció d'un 2,5% aproximadament respecte al preu real. La distància mitjana passa de 35,7 a 26,7 i la mitjana dels percentatges sofreix una reducció d'un 0,5%. Aquestes dades milloren enormement les de la taula 10.

³⁰ s'han usat distàncies en valor absolut

6.1.4 Conclusió

Arribats a aquest punt, és el moment de realitzar una valoració del nostre ajust sobre la mostra de l'índex S&P500.

Hem realitzat uns estudis previs de les dades per veure d'on partíem. Algunes dades ens feien suposar que no es complirien totes les suposicions fetes durant la part teòrica. Tot i això, l'estimació ha pogut ser duta a terme. A l'hora de fer l'estudi dels retorns hem vist que la sèrie es tractava d'un soroll blanc, $r_t = \varepsilon_t$, la qual cosa ens ha facilitat l'estudi posterior. Si no hagués estat així, les nostres dades haurien estat de la forma $r_t = x_t' b + \varepsilon_t$ i haguéssim hagut d'estimar un model ARMA previ a l'estimació dels models ARCH. Un cop realitzat aquest model ARMA, l'estudi s'hagués dut a terme de manera idèntica.

A l'hora de decidir escollir el model GJR per davant dels altres dos models, hem donat més importància a les dades que ens proporcionaven els criteris d'informació que a l'estudi visual de les gràfiques. Tot i la llunyania en alguns punts del nostre interval, pensem que compleix de manera correcte el seu objectiu.

Per últim hem ajustat el nostre interval de confiança a la sèrie de preus. El resultat visual és satisfactori, segueix la tendència de la sèrie a la perfecció. L'estudi numèric és bastant bó. Tot i això, ens deixa alguns dubtes, ja que la diferència màxima del S&P500 entre dos dies consecutius és de 48.3, bastant allunyat dels 97.6 de diferència entre dos dies consecutius del nostre interval. Convendria doncs, cercar una manera per evitar aquestes diferències extremes (poc habituals). També ens agradaria seguir aprofundint sobre la possibilitat de trobar un interval que s'ajusti en forma igual de bé, però on es redueixin les distàncies amb els preus reals.

Concloem que el model que hem estimat és bo, però es podrien fer certes millores. En el punt on hem deixat l'estudi tenim diverses possibilitats. Tenim un model que estima la volatilitat de manera correcte. Podem aplicar aquestes estimacions per predir futurs valors. Algunes de les possibilitats són:

- Usar la volatilitat predita juntament amb la fórmula de Black-Scholes per predir els preus futurs d'opcions financeres. (Veure [3], Article 15)
- Calcular el VAR³¹, per portar un control del risc financer d'un conjunt d'operativa.
- Es poden crear estratègies d'inversió amb portfolios. (Veure [2], capítol 7)

³¹ Value at risk.

7 Conclusions del treball

Durant la realització d'aquest treball s'han abordat els models ARCH³², que possiblement són dels més importants a l'hora de predir la volatilitat, juntament amb els models EWMA i els models de volatilitat estocàstica. S'ha començat posant de manifest quina és la limitació principal dels models convencionals. Un cop introduïts els conceptes necessaris, hem anat pas a pas descrivint les propietats bàsiques del model i deixant clara quina és la idea que hi ha al darrere. Hem profunditzat en el model donant les claus per dur a terme l'estimació, i s'ha explicat pas a pas quin és el mètode per realitzar-la. Per últim, s'ha dut a terme un estudi de dades financeres, on s'han mostrat diverses eines d'utilitat a l'hora de modelitzar sèries temporals. En aquest estudi, s'ha arribat a un punt on hem aconseguit un model que aproxima força bé les nostres dades. S'ha deixat l'estudi en un punt clau, donant diverses idees sobre quin pot ser el camí a seguir a partir d'aquí. Tenim doncs, les eines per continuar aprofundint en el món de la volatilitat.

Un a un, s'han anat assolint tots els objectius, des de conèixer una mica millor el món econòmic a realitzar un estudi complet sobre unes dades, tot escollint el millor model. Qualsevol lector d'aquest treball hauria de ser capaç d'entendre el funcionament dels models GARCH, així com agafar unes dades financeres i estimar un model dels presentats, en cas de ser viable. Cal remarcar que l'ús de la bibliografia citada és enormement recomanat.

Creiem que el present treball ha estat molt productiu per a nosaltres i confiem en que ho serà per qualsevol persona amb interès pel tema.

³² models ARCH i variants

Referències

- [1] A. Novales and M. Gracia-Díez, “Guía para la estimación de modelos ARCH,” *Estadística Española*, vol. 35, 1993.
- [2] C. Gouriéroux, *ARCH models and financial applications*, 1997.
- [3] R. F. Engle, *Arch : Selected Readings*. Oxford University Press, 1995.
- [4] F. Utzet, “Sèries temporals,” p. 143, 2001.
- [5] Investopedia, “S&P500.” [Online]. Available: <http://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>
- [6] IE, “Basilea y los Retos de la Banca.” [Online]. Available: http://www.ie.edu/IE/pdf/Informe_Basilea.pdf
- [7] Various, “Volatility Models.” [Online]. Available: <http://vlab.stern.nyu.edu/doc?topic=mdls>
- [8] E. W. Weisstein, “Kurtosis. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.” [Online]. Available: <http://mathworld.wolfram.com/Kurtosis.html>
- [9] —, “Skewness. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.” [Online]. Available: <http://mathworld.wolfram.com/Skewness.htm>
- [10] M. Corcuera, “Modelización Estocástica,” 2013, notas de curso.
- [11] A. N. Shiryaev, *Essentials of stochastic finance*, 1999.
- [12] P. Cizek, W. Härdle, and R. Weron, “Extensions of the GARCH Model.” [Online]. Available: http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/sfehtmlnode67.html