



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRADO DE MATEMÀTICAS

Trabajo final de grado

**CONTINUACIÓN DE ÓRBITAS
PERIÓDICAS CON MÉTODOS
ESPECTRALES APLICANDO LA
TEORÍA DE FLOQUET**

Autor: Jesús Medina García-Villaraco

Director: Dr. Alex Haro Provinciale

**Realizado en: Departamento de Matemáticas
Aplicadas**

Barcelona, 14 de enero de 2026

Abstract

Resumen: Este trabajo estudia la continuación de órbitas periódicas mediante un enfoque espectral que incorpora de manera explícita la teoría de Floquet. El objetivo principal consiste en construir un algoritmo capaz de corregir y continuar estas órbitas a partir de una formulación tipo Newton sobre una representación espectral de la trayectoria siguiendo el espíritu de los trabajos de Moore.

Como primer examen del método, se ha aplicado el algoritmo al oscilador de Van der Pol en dos dimensiones. Este sistema, por su comportamiento no lineal y la presencia de un ciclo límite conocido, permite valorar la eficacia del procedimiento sin introducir todavía la complejidad de modelos de mayor dimensión. Los resultados muestran que la combinación de técnicas espectrales y la información de Floquet proporciona correcciones precisas y facilita la continuación respecto a los parámetros del sistema. Aunque el estudio inicial se centra en este caso concreto, el método es adaptable a configuraciones más complejas y su implementación está descrita para trabajar en cualquier número de dimensiones.

Abstract: This work examines the continuation of periodic orbits through a spectral approach that explicitly incorporates Floquet theory. The main objective is to develop an algorithm capable of correcting and continuing such orbits by applying a Newton-type formulation on a spectral representation of the trajectory.

As an initial assessment of the method, the algorithm has been applied to the two-dimensional Van der Pol oscillator. Owing to its nonlinear behaviour and its well-known limit cycle, this system provides a convenient benchmark that allows evaluation of the procedure without yet introducing the complexity of higher-dimensional models. The results show that the combination of spectral techniques with Floquet information yields accurate corrections and facilitates continuation with respect to system parameters. Although the initial study focuses on this specific case, the method is adaptable to more complex configurations, and its implementation is described in a way that enables its application to systems of any dimension.

Agradecimientos

Doy las gracias a mi tutor Alex Haro por haber colaborado conmigo a lo largo de todo el proyecto y haberme dirigido con diligencia y buen humor. La realización del trabajo no habría sido posible sin su ayuda.

Agradezco también a mi familia por haberme apoyado en todo momento a pesar de todas las adversidades que he tenido que vivir a lo largo del año, y a mis amigos de Luciana, que siempre consiguen animarme aunque vivan en la otra punta de la península.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Convenciones matemáticas	2
2. Base Teórica	3
2.1. Órbitas periódicas: definiciones y resultados	3
2.2. Teoría de Floquet	5
2.2.1. Corolarios del teorema de Floquet:	8
2.2.2. Estabilidad de órbitas periódicas y exponentes de Floquet	9
2.2.3. Geometría del cambio de variable de Floquet	11
2.3. Ecuaciones de invariancia	12
2.4. Teoremas fundamentales de existencia de órbitas periódicas	13
3. Base Práctica: Esquema de Newton-Floquet	16
3.1. Algoritmos para $\Delta x, \delta\omega$	18
3.1.1. Modos de Fourier para ξ^L	20
3.1.2. Modos de Fourier para ξ^N	20
3.1.3. Fijar la fase: Modo ξ_0^L	20
3.2. Algoritmos para $\Delta P(\theta), \Delta\Lambda$	21
3.2.1. Ecuaciones de Sylvester: Conmutador, Vectorizado y Producto de Kronecker	23
3.2.2. Modos de Fourier para Q^{LL}	25
3.2.3. Modos de Fourier para Q^{NL}	26
3.2.4. Modos de Fourier para Q^{LN}	26
3.2.5. Modos de Fourier para Q^{NN}	27
3.2.6. Caso Λ_0 diagonal	28
3.3. Casos de Resonancia	28
3.4. Cálculo de condiciones iniciales	29
3.4.1. Integrador Runge-Kutta	29
3.4.2. Secciones de Poincaré: Cálculo de T_0	30

3.4.3.	Cálculo de $x_0(t), \phi(t)$ y M_0	31
3.4.4.	Cálculo de P_0	32
3.5.	Continuación a primer orden de parámetros	32
3.5.1.	Continuación de $x(\theta), \omega$	33
3.5.2.	Continuación de $P(\theta), \Lambda$	33
4.	Implementación del método de Newton-Floquet	35
4.1.	Resumen del algoritmo	35
4.2.	Implementación de la FFT	36
4.2.1.	La DFT: Notación, espacio físico y espectral	36
4.2.2.	Ventajas e inconvenientes del uso de FFT	37
4.2.3.	Integración de la FFT en el algoritmo de Newton	37
4.3.	Newton-Floquet para el caso 2D	38
4.3.1.	Oscilador de Van der Pol	39
4.3.2.	Tiempos de ejecución: RK78 vs Newton	47
4.4.	Conclusiones	50

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas dinámicos descritos con ecuaciones diferenciales se han establecido como uno de los ejes de la matemática aplicada, pues desde la época de Newton han sido objeto de estudio en el campo de la física al poder modelizar el movimiento. En particular, los problemas de cuerpos celestes son especialmente importantes, pues fueron los primeros problemas en ser planteados y tanto su importancia histórica como su utilidad moderna en misiones espaciales los hacen un tema interesante.

Es por ello que el trabajo se centrará en la obtención de soluciones periódicas estacionarias entorno a puntos de equilibrio. Para garantizar su existencia, describiremos el teorema de Hopf, el cual nos permite afirmar que si la dinámica del sistema lineal genera órbitas periódicas y se cumplen ciertos requisitos sobre el diferencial del campo, entonces existen órbitas periódicas estacionarias cercanas al punto fijo. De entre las técnicas que podemos utilizar para obtener dichas aproximaciones, recurriremos al uso de la teoría de Floquet para aprovechar la potencia computacional de los métodos espectrales.

La principal diferencia entre el uso Floquet y otros métodos es que, como veremos a lo largo del trabajo, aprovechamos la estructura periódica del sistema para evitar integrar el campo en cada etapa de continuación.

También veremos cómo las técnicas utilizadas pueden ser aplicadas a dimensiones superiores de manera natural y que pueden servir como alternativa para el cálculo de órbitas periódicas en contextos más generales. Siguiendo el espíritu de los trabajos Moore, este trabajo presentará una versión simplificada del problema general del cálculo de subespacios invariantes aplicando la teoría de Floquet.

En síntesis, la primera parte del proyecto será de carácter teórico, exponiendo el teorema del Centro de Lyapunov, el teorema de la Bifurcación de Hopf y la teoría de Floquet. La segunda parte será de carácter computacional, detallando algoritmos que apliquen la teoría anterior para la continuación de órbitas periódicas. Finalmente, dedicaremos una sección a exponer los resultados obtenidos.

1.1. Convenciones matemáticas

En esta pequeña sección aclararemos algunas convenciones que usaremos a lo largo de todo el documento:

- A lo largo de todo el escrito, trabajaremos sobre \mathbb{C} únicamente cuando sea necesario, en particular al calcular logaritmos matriciales y tratar con valores propios complejos. Cuando queramos exponer los resultados, los proyectaremos sobre \mathbb{R} .
- Asumiremos que los campos son C^∞ o al menos tan diferenciables como sea necesario.
- Para evitar confusión con la dependencia en las derivadas temporales, utilizaremos la notación punto para indicar derivadas en $t \in [0, T]$ y usaremos la notación con primas para indicar la derivada en $\theta \in [0, 1]$:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t), \quad x'(\theta) := \frac{dx}{d\theta}(\theta)$$

Cuando convivan derivadas respecto a más de una variable, como en el cálculo de variacionales, usaremos la derivada parcial:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}$$

- Usaremos e^x y $\exp(x)$ de manera indistinta para indicar la función exponencial.
- Por claridad, usaremos el mismo símbolo para una función y su discretización cuando no haya riesgo de confusión. También omitiremos subíndices en los esquemas iterativos.

Capítulo 2

Base Teórica

2.1. Órbitas periódicas: definiciones y resultados

Para comenzar este trabajo, daremos algunas definiciones y resultados necesarios para centrar el contenido teórico. Primero, necesitamos definir los conceptos más elementales sobre órbitas periódicas. Después, presentaremos la teoría de Floquet, que será el pináculo en el que fundamentaremos nuestro método numérico. Finalmente, daremos teoremas importantes que garantizan la existencia de órbitas periódicas.

Definición 2.1.1. *Consideremos el campo $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que describe la ecuación diferencial autónoma:*

$$\dot{x}(t) = X(x(t)).$$

Decimos que $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución periódica de periodo mínimo $T > 0$ si:

$$\dot{u}(t) = X(u(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$u(0) = u(T),$$

$$u(t) \neq u(0) \quad \forall t \in (0, T).$$

Observación 2.1.2. La primera condición es pedirle a la solución periódica que resuelva la ecuación diferencial. La segunda es para asegurar la periodicidad y el cierre de la solución. La tercera es para evitar el caso degenerado de los puntos fijos y para garantizar que el periodo sea mínimo.

Notemos que la imagen de una solución periódica describe un conjunto de puntos cerrado y acotado:

$$\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{u(t) : t \in [0, T]\}.$$

Esto se debe a que una solución periódica $u(t)$ satisface:

$$u(t) = u(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, es necesario concretar cómo fijamos el retrato de fase, ya que dada una solución periódica $u(t)$, existe una familia uniparamétrica infinita de soluciones periódicas que también resuelven la ecuación, definida mediante un desplazamiento de fase.

Efectivamente, dado que el sistema es autónomo, la ecuación diferencial es invariante

por traslaciones temporales. En particular, si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución periódica de periodo mínimo T , entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$ la función:

$$u_c(t) := u(t + c)$$

también es solución de la ecuación diferencial. Basta con ver que:

$$\dot{u}_c(t) = \dot{u}(t + c) = X(u(t + c)) = X(u_c(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además, $u_c(t)$ es periódica con el mismo periodo mínimo T , ya que:

$$u_c(t + T) = u(t + T + c) = u(t + c) = u_c(t).$$

Podemos concluir que, a partir de una única solución periódica $u(t)$ se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones periódicas

$$\{u_c(t) : c \in \mathbb{R}\},$$

todas ellas con la misma órbita geométrica γ , pero con distinta parametrización temporal. En particular, dos soluciones periódicas con desplazamientos temporales que difieran en un múltiplo entero del periodo definen la misma solución, es decir,

$$u_{c_1} = u_{c_2} \iff c_1 - c_2 \in T\mathbb{Z}.$$

También podemos concluir que el conjunto de soluciones periódicas asociadas a la órbita γ puede identificarse naturalmente con el cociente $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, que es difeomorfo a S^1 .

Una forma de solucionar el problema de fase es precisamente imponer una restricción de normalización para añadir una ecuación escalar más a la ecuación diferencial, escogiendo un único representante. Por ejemplo, podemos imponer lo siguiente:

- Tomemos fija una función $u_0(\theta)$ de periodo T (por ejemplo, una aproximación inicial de la solución periódica $u(t)$).
- Fijamos el retrato de fase buscando un valor de c que minimice la distancia L^2 entre $u(t + c)$ y $u_0(t)$:

$$d_2(c) := \int_0^T \|u(t + c) - u_0(t)\|_2^2 dt.$$

- La función $d_2(c)$ es una función T periódica y de clase C^1 respecto al parámetro c . Por tanto, es suficiente restringir el estudio al intervalo compacto $[0, T]$.
- Al ser $d_2(c)$ una función continua en un compacto, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de la menos un punto $c^* \in [0, T]$ tal que

$$d_2(c^*) = \min_{c \in [0, T]} d_2(c).$$

En particular, c^* es un punto crítico de d_2 que minimiza la distancia entre $u(t + c)$ y $u_0(t)$.

- Como $d_2(c)$ es C^1 , podemos derivar bajo el signo integral, aplicando la regla de Leibniz y obteniendo:

$$d_2'(c) = 2 \int_0^T \langle \dot{u}(t + c), u(t + c) - u_0(t) \rangle dt.$$

- Igualando a cero e integrando por partes, la condición anterior puede reescribirse como:

$$\int_0^T \langle \dot{u}_0(t), u(t+c) \rangle dt = 0. \quad (2.1.1)$$

Esta ecuación sirve para caracterizar los puntos críticos del funcional $d_2(c)$.

Esta condición, a nivel geométrico, equivale a imponer que la nueva órbita sea ortogonal, en el sentido L^2 , a la dirección tangente de la órbita inicial. Notemos pero que esta será una noción local, ya que nada asegura que el extremo sea absoluto en el intervalo $[0, T]$.

Esta ecuación adicional nos asegurará unicidad local del problema, ya que, de entre todas las soluciones equivalentes por traslación temporal, fijamos una representante única.

Por tanto, la motivación central del trabajo será encontrar soluciones periódicas $u(t)$ en $t \in [0, T]$ de problemas autónomos junto a una condición de fase como (2.1.1):

$$\dot{u}(t) = X(u(t)), \quad \int_0^T \langle \dot{u}_0(t), u(t) \rangle dt = 0. \quad (2.1.2)$$

Sin embargo, nos gustaría que la dinámica local que describen las ecuaciones anteriores fuese lo más sencilla posible, a fin de poder determinar $u(t)$. Una primera idea para simplificar la dinámica podría ser transformarlo en uno a coeficientes constantes. Es por ello que este estudio local nos lleva a querer comprender en profundidad la dinámica que describe la ecuación diferencial inducida por una solución periódica $u(t)$:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad \text{con } A(t) = DX(u(t)).$$

La manera natural de estudiar la dinámica del diferencial a lo largo de $u(t)$, como veremos, es aprovechar el uso de la teoría de Floquet para sistemas lineales periódicos. Con ella, reduciremos (2.1.2) a un problema a coeficientes constantes. Además, la propia estructura geométrica de las órbitas periódicas nos permitirá fijar la fase (2.1.1) de manera sencilla.

2.2. Teoría de Floquet

En esta sección, presentamos la teoría de Floquet y uno de sus teoremas. Esto nos servirá como base para construir todo nuestro algoritmo de continuación. Demos primero algunas definiciones conceptuales que aparecerán en la demostración del teorema y más adelante en la sección numérica:

Definición 2.2.1. *Dada una solución periódica $u(t)$ del problema autónomo en \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x}(t) = X(x(t)),$$

podemos definir el sistema matricial variacional asociado:

$$\dot{\phi}(t) = DX(u(t))\phi(t), \quad \phi(0) = I.$$

La solución $\phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de este sistema matricial se le llama matriz fundamental asociada al campo $X(u(t))$ a lo largo de la curva $u(t)$.

Definición 2.2.2. *Definimos la matriz de monodromía como $\phi^{-1}(0)\phi(T)$. Si $\phi(0) = I$, diremos que $\phi(T)$ es la matriz fundamental principal.*

Definición 2.2.3. Definimos formalmente la exponencial de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ evaluada en un tiempo t como la serie:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Definición 2.2.4. Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos un logaritmo matricial de A a toda matriz L que satisface la relación:

$$e^L = A.$$

Observación 2.2.5. Si A es descrita en su forma diagonal $A = PDP^{-1}$ (en caso que diagonalice) o en su forma de Jordan por bloques $A = PJP^{-1}$, se calcula un logaritmo de la matriz A como:

$$\log(A) = P \log(D) P^{-1}, \quad \log(A) = P \log(J) P^{-1}.$$

dónde se toma el logaritmo complejo a cada componente (o bloque) de la matriz diagonal (o de Jordan).

Observación 2.2.6. El logaritmo complejo es una función multivaluada. Por tanto, el logaritmo de una matriz no es único.

Observación 2.2.7. La matriz A debe ser invertible para poder definir un logaritmo matricial de A .

Definición 2.2.8. Definimos un logaritmo de la matriz de monodromía $\phi(T)$ a toda matriz constante $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que satisface la relación:

$$\phi(T) = e^{MT},$$

donde notemos que aquí e^{MT} denota la exponencial matricial.

Ahora, podemos presentar el teorema de Floquet, el cual nos dice que dado un sistema lineal periódico, existe un cambio de variable que nos lo transforma en un sistema a coeficientes constantes.

Teorema 2.2.9 (de Floquet). Consideremos la ecuación diferencial lineal periódica:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t), \quad z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

con $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz T -periódica. Entonces, existe una matriz $P(t)$ con $P(t+T) = P(t)$ tal que el cambio de coordenadas $y = P^{-1}(t)x$ transforma el sistema en uno lineal a coeficientes constantes (y generalmente complejos):

$$\dot{y}(t) = My(t).$$

Para demostrar este teorema necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.2.10. Sea $\phi(t)$ la solución fundamental del sistema anterior, es decir, una función ϕ que satisface:

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t).$$

Entonces, se cumple la identidad:

$$\psi(t) := \phi(t+T) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T),$$

donde notemos que $\phi^{-1}(0)\phi(T)$ es la matriz de monodromía.

Demostración (Lema 2.2.10): Para ver esta identidad, usemos que las funciones $\psi(t), \phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T)$ resuelven el problema de valores iniciales:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t), \quad z(0) = \phi(T).$$

Por un lado, para $t = 0$, es obvio que las dos funciones cumplen la condición inicial:

$$\phi(t+T)|_{t=0} = \phi(T), \quad \phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T)|_{t=0} = \phi(T).$$

Por otro lado, sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\dot{\phi}(t+T) = A(t+T)\phi(t+T) = A(t)\phi(t+T).$$

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T)) = \dot{\phi}(t)\phi^{-1}(0)\phi(T) = A(t)\phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T).$$

Por tanto, ambas funciones resuelven el mismo problema de Cauchy. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, podemos afirmar que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t+T) \equiv \phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T).$$

Esto demuestra que la matriz fundamental tras un periodo T actúa por multiplicación a la derecha de $\phi(t)$ por la matriz de monodromía. \square

Demostración (Teorema 2.2.9) Continuemos ahora con la demostración del teorema de Floquet. Para continuar, definamos un desplazamiento de la matriz fundamental $\phi(t)$ un periodo T entero:

$$\psi(t) := \phi(t+T).$$

Supongamos que podemos encontrar una matriz constante $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $e^{TM} = \phi(T)$. Esta condición equivale a encontrar la matriz de monodromía $\phi(T)$ y un logaritmo asociado M que cumpla:

$$M = \frac{1}{T} \log(\phi(T))$$

Recordemos que \log denota una determinación del logaritmo matricial sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$. El hecho de trabajar sobre \mathbb{C} nos garantiza que esta matriz existe, ya que toda matriz invertible sobre \mathbb{C} tiene una matriz logaritmo. En el caso de \mathbb{R} no siempre es posible. Suponiendo la existencia de M , podríamos definir la función:

$$P(t) = \phi(t)e^{-tM}.$$

Primero, notemos que P es T -periódica. Por el lema anterior y usando la definición de M :

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \phi(t+T)e^{-(t+T)M} = \phi(t)\phi(T)e^{-TM}e^{-tM} = \\ &= \phi(t)(e^{TM}e^{-TM})e^{-tM} = \phi(t)e^{-tM} = P(t). \end{aligned}$$

Notemos también que $P(t)$ es invertible y diferenciable por ser producto de matrices invertible y diferenciables. Derivando respecto a t deducimos:

$$\dot{P}(t) = \dot{\phi}(t)e^{-tM} - \phi(t)e^{-tM}M = A(t)P(t) - P(t)M. \quad (2.2.1)$$

Por definición, sabemos que $\phi(t) = P(t)e^{Mt}$. A esta forma de expresar la solución fundamental se la conoce como forma de Floquet, mientras que la función $P(t)$ define el cambio

de variable de Floquet, que cumple la relación $P(t)y(t) = x(t)$.

En términos de la ecuación original, deshaciendo el cambio y usando la igualdad (2.2.1), notemos que la nueva ecuación diferencial obtenida sigue siendo lineal, autónoma y, además, a coeficientes constantes. Efectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{P}y + P\dot{y} &= \dot{x} = Ax = APy \rightarrow \\ \dot{y} &= P^{-1}(AP - \dot{P})y = P^{-1}PM y = My.\end{aligned}$$

concluyendo la demostración del teorema. \square

2.2.1. Corolarios del teorema de Floquet:

Antes de continuar, queremos matizar algunos corolarios muy importantes que se deducen directamente de la demostración del teorema:

1. El teorema da una forma teórica de reducir el sistema a uno equivalente a coeficientes constantes. Como veremos a continuación, este hecho nos permite trabajar el problema desde la perspectiva de un sistema lineal.
2. La identidad (2.2.1):

$$A(t)P(t) - \dot{P}(t) - P(t)M = 0$$

nos será de extrema utilidad en secciones posteriores, ya que la usaremos como ecuación de invariancia.

3. Notemos que la matriz M está definida salvo determinación del logaritmo complejo.
4. Las matrices $P(t), M$ también están definidas salvo conjugación. Efectivamente, supongamos que hemos encontrado una pareja de matrices $P(t), M$ tales que se cumple la igualdad:

$$A(t)P(t) - \dot{P}(t) - P(t)M = 0.$$

Entonces, dada una matriz constante e invertible $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, las matrices $P_C = PC, M_C = C^{-1}MC$ también satisfacen la condición de invariancia. Sustituyendo en (2.2.1)

$$A(t)(P(t)C) - \dot{P}(t)C - (P(t)C)(C^{-1}MC) = 0$$

vemos que también se cumple la condición de invariancia.

5. En el estudio de órbitas periódicas, esta libertad de elección de $P(t), M$ nos servirá para dar forma a la matriz M de modo que podremos desacoplar la dirección tangente y normal de la órbita.
6. Si se quiere trabajar únicamente sobre los reales, hay que pedir ciertas restricciones sobre los valores propios de $\phi(T)$ o permitir trabajar doblando el periodo. Sin embargo, para los objetivos de este trabajo, nos limitaremos a trabajar en \mathbb{C} .

Por último, queremos recalcar algunos resultados que relacionan los valores propios de M con la estabilidad de una solución periódica.

Definición 2.2.11. Los exponentes de Floquet $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ son los valores propios del logaritmo de la matriz de monodromía M que satisface la igualdad $\phi(T) = e^{MT}$:

$$\mu_i \in \text{Spec}(M), \quad \phi(T) = e^{MT}.$$

Alternativamente, pueden definirse directamente a partir de los valores propios de la matriz de monodromía $\phi(T)$. Si $\rho_i \in \text{Spec}(\phi(T))$ son los valores propios de $\phi(T)$:

$$\mu_i = \frac{1}{T} \log(\rho_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Observación 2.2.12. Como el logaritmo complejo es una función multivaluada, los exponentes de Floquet quedan definidos módulo $2\pi i/T$ y no son únicos. Sin embargo, su parte real sí queda unívocamente determinada.

Para continuar, demosmos algunos resultados que aportan mucha riqueza al estudio de los exponentes de Floquet.

2.2.2. Estabilidad de órbitas periódicas y exponentes de Floquet

Como principal corolario práctico del teorema, los exponentes de Floquet nos sirven para determinar cualitativa y cuantitativamente la estabilidad de la órbita.

En efecto, recordemos que $P(t)$ nos permite describir el cambio de variable $y(t) = P^{-1}(t)x(t)$, llevándonos a resolver el sistema lineal a coeficientes constantes:

$$\dot{y} = My.$$

Supongamos para mayor simplicidad que M es diagonalizable. Si $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ son los exponentes de Floquet, entonces existe una base de vectores propios $\{v_i\}_{i=1}^n$ tal que la solución general de $y(t)$ puede escribirse como:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} v_i, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Volviendo a la variable original:

$$x(t) = P(t)y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} P(t)v_i.$$

Definimos las funciones T -periódicas:

$$p_i(t) := P(t)v_i,$$

ya que $P(t)$ es T -periódica. Entonces, la solución general del sistema se escribe como:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} p_i(t).$$

Recordemos que las partes reales de los exponentes de Floquet sí que son únicas. Por tanto, podemos concluir que el conjunto $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ determina la estabilidad de la órbita, ya que:

- $|\exp(\mu_i T)| = 1 \rightarrow e^{\mu_i t} p_i(t)$ es un modo neutro. Este se mantiene constante a lo largo del tiempo.
- $|\exp(\mu_i T)| < 1 \rightarrow e^{\mu_i t} p_i(t)$ es un modo estable, decae con el tiempo.
- $|\exp(\mu_i T)| > 1 \rightarrow e^{\mu_i t} p_i(t)$ modo inestable, crece exponencialmente con el tiempo.

Por último, exponemos un resultado estándar en el estudio de órbitas periódicas que nos será muy útil:

Proposición 2.2.13. *Toda solución T -periódica $u(t)$ de un sistema autónomo:*

$$\dot{x}(t) = X(x(t))$$

tiene asociada un exponente de Floquet igual a 0.

Demostración (2.2.13): Sea $\phi(t)$ la matriz fundamental del sistema variacional con

$$\phi(0) = I.$$

Recordemos que los exponentes de Floquet son los valores propios de la matriz de monodromía $\phi(T)$ y se definen como:

$$\mu_i = \frac{1}{T} \log \rho_i.$$

Notemos ahora que si derivamos la solución periódica $u(t)$ respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} u(t) = \dot{u}(t) = X(u(t)).$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{d}{dt} \dot{u}(t) = DX(u(t)) \dot{u}(t).$$

Esto nos dice que el vector $\dot{u}(t)$ es una solución no trivial del sistema variacional. Ahora, como $\dot{u}(t)$ es T -periódica:

$$\dot{u}(t+T) = \dot{u}(t).$$

Evaluando en $t = 0$, deducimos que $\dot{u}(T) = \dot{u}(0)$. Esto implica, por la definición de matriz fundamental, que:

$$\dot{u}(T) = \phi(T) \dot{u}(0).$$

Pero del paso anterior deducimos que:

$$\phi(T) \dot{u}(0) = \dot{u}(0).$$

Esto concluye que $\dot{u}(0) \neq 0$ es vector propio de $\phi(T)$ con valor propio $\rho = 1$. Por tanto, el exponente asociado será:

$$\mu = \frac{1}{T} \log(1) = 0.$$

□

Este resultado nos dará una visión más completa a la hora de entender la geometría de $P(t)$ y cómo estructuraremos el algoritmo de continuación.

2.2.3. Geometría del cambio de variable de Floquet

Ahora, trataremos de dar una intuición geométrica del cambio de variable de Floquet $P(t)$ para comprender qué función desempeña en el estudio de la dinámica.

Una forma de entender la geometría de $P(t)$ es pensarla como un marco que se mueve junto a la órbita y que cada vector propio de M se desplaza siguiéndola. Recordemos que, dado un sistema lineal periódico:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

una solución periódica $u(t)$ puede ser descrita (siempre que M , el logaritmo de la monodromía, sea diagonalizable), como:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} p_i(t).$$

Podemos entonces visualizar la órbita como un eje central y los vectores $p_i(t)$ como ejes que giran y se deforman siguiendo el comportamiento de μ_i . La dinámica transversal se convierte en una ecuación lineal autónoma mientras que la parte periódica queda absorbida por $P(t)$. Esta descomposición separa explícitamente la dinámica periódica de la parte exponencial responsable de la estabilidad.

Entonces, podemos distinguir tres comportamientos cualitativos dependiendo de los valores de μ_i :

1. Modo tangente de la órbita:

En el caso de las órbitas periódicas, hemos visto que siempre existe un exponente de Floquet $\mu_i = 0$ asociado a la dirección tangente. Este modo $p_i(t)$ se mantiene invariante a lo largo del tiempo.

2. Modos normales:

Los demás exponentes μ_i describen la evolución de perturbaciones en direcciones transversales (normales) a la órbita.

- Si $Re(\mu_i) > 0$ la perturbación crece en esa dirección y la órbita es inestable.
- Si $Re(\mu_i) < 0$ la perturbación decae en esa dirección y la órbita es estable.
- Si $Re(\mu_i) = 0$, la perturbación permanece constante, indicando otro modo neutro.

Esto nos muestra la riqueza de estudiar las órbitas periódicas desde esta perspectiva; cada exponente de Floquet describe la dinámica en una de las direcciones mediante la matriz $P(t)$. Además, nos da información sobre la estabilidad de la órbita bajo perturbaciones.

Dicho esto, dada una solución periódica $u(t)$ que satisface el problema autónomo:

$$\dot{u}(t) = X(u(t)), \quad \int_0^T \langle \dot{u}_0(t), u(t) \rangle dt = 0.$$

La manera natural de aplicar el teorema de Floquet es considerar el sistema variacional asociado a $u(t)$:

$$\dot{\phi}(t) = DX(u(t))\phi(t), \quad \phi(0) = I.$$

Como se trata de un sistema lineal periódico, el teorema de Floquet nos dice que, identificando $A(t) = DX(u(t))$, existen matrices $P(t), M$ tales que:

$$A(t)P(t) - \dot{P}(t) - P(t)M = 0.$$

Además, en las coordenadas $y(t) = P^{-1}(t)x(t)$, la dinámica del sistema será lineal. Por tanto, podemos concluir que el objetivo de nuestro algoritmo será obtener soluciones periódicas $u(t)$ que resuelvan las ecuaciones de invariancia (2.1.1), (2.1.2) y (2.2.1), dando lugar al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= X(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ A(t)P(t) - \dot{P}(t) - P(t)M &= 0, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

junto a las ecuaciones de normalización y fijar fase. Este será nuestro problema a resolver. Pasemos ahora a acabar de concretar el formato de las ecuaciones de invariancia con las que trabajaremos en la sección teórica.

2.3. Ecuaciones de invariancia

Hasta ahora, hemos dado conceptos generales de la teoría de Floquet y de soluciones periódicas parametrizadas en la variable temporal $t \in [0, T]$.

Sin embargo, esta parametrización hace que la velocidad a la que se recorre la solución periódica dependa explícitamente del periodo T , que será por lo general desconocido y variará en nuestros algoritmos de continuación.

Por ello, una simplificación natural es tratar de normalizar el tiempo en un intervalo constante. En este trabajo, optaremos por trabajar con funciones 1-periódicas. Veamos cómo cambian los resultados obtenidos después de la reparametrización.

Supongamos pues que contamos con una solución periódica $u(t)$ con $t \in [0, T]$ de (2.1.2). Entonces, parametrizamos la variable temporal mediante $\theta \in [0, 1]$ con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \theta = t/T, \quad \frac{d}{dt} &= \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{T} = \frac{d}{d\theta} \omega, \quad v(\theta) := u(T\theta). \\ v'(\theta) &:= \frac{d}{d\theta} v(\theta) = \frac{d}{d\theta} u(T\theta) = Tu'(\theta) = TX(u(\theta)). \end{aligned}$$

Corolario 2.3.1. *Consideremos el sistema de ecuaciones (2.2.2) descrito en la variable temporal $t \in [0, T]$. Tras aplicar el cambio de variable $\theta = t/T$, $u(T\theta) = v(\theta)$ e identificar $T = 1/\omega$, las ecuaciones de invariancia a resolver pasan a ser:*

$$\begin{aligned} v'(\theta)\omega - X(v(\theta)) &= 0, \quad \theta \in [0, 1] \\ DX(v(\theta))P(\theta) - P'(\theta)\omega - P(\theta)M &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

junto a la condición de normalización:

$$\int_0^1 \langle v'_0(\theta), v(\theta) \rangle d\theta = 0$$

A partir de aquí, el resto de las deducciones asumirán que trabajamos bajo el tiempo reescalado $\theta \in [0, 1]$. Estas ecuaciones de invariancia las recuperaremos cuando desarrollemos algoritmos de continuación mediante Newton (sección 3) y serán las que trabajaremos

a lo largo de toda la sección práctica.

Para finalizar esta sección, dejamos un cuadro explicativo que recoge todos los conceptos que hemos definido hasta ahora y que utilizaremos en las siguientes secciones:

Símbolo	Significado
$u(t)$	Solución periódica con periodo T
$v(\theta)$	Solución periódica reescalada de periodo 1
$\phi(t)$	Matriz fundamental del sistema variacional
$\phi(T)$	Matriz de monodromía (matriz de retorno)
M	Una determinación del logaritmo de la matriz de monodromía, $\phi(T) = \exp(MT)$
$P(\theta)$	Cambio de variable periódico de Floquet parametrizado
μ_i	Exponentes de Floquet
$p_i(t)$	Modo periódico asociado al exponente μ_i

Por último, dediquemos un apartado a enunciar resultados conocidos que garanticen la existencia de órbitas periódicas.

2.4. Teoremas fundamentales de existencia de órbitas periódicas

Enunciaremos dos teoremas fundamentales en el estudio de órbitas periódicas que nos servirán para garantizar la existencia de las familias de órbitas periódicas que buscaremos con nuestro algoritmo de continuación.

Comencemos con el teorema del Centro de Lyapunov. Este garantiza la existencia de órbitas periódicas en sistemas con integrales primeras entorno a puntos de equilibrio.

Teorema 2.4.1 (de Lyapunov, 1892). *Consideremos el sistema autónomo n -dimensional:*

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave que satisface:

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0.$$

Supongamos que el sistema admite una integral primera local de la forma

$$I(x) = \frac{1}{2}x^T Sx + o(|x|^2),$$

con S una matriz simétrica y no degenerada, es decir, $S = S^T$ y $\det(S) \neq 0$. Supongamos también que el espectro de A satisface:

$$\text{Spec}(A) = \{\pm i\beta, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}, \quad \beta \neq 0.$$

En particular, esto implica que el origen no es hiperbólico. Por último, asumamos que no existen resonancias enteras entre los valores propios, de forma que:

$$\frac{\lambda_j}{i\beta} \notin \mathbb{Z}, \quad j = 3, \dots, n.$$

2.4. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS¹⁴

Entonces, el sistema admite una familia uniparamétrica de soluciones periódicas que emergen del equilibrio en el origen, con períodos que tienden a

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

cuando la amplitud de la solución tiende a cero.

Para demostrar el teorema anterior, se puede utilizar un resultado más general llamado teorema de bifurcación de Hopf.

Teorema 2.4.2 (de Hopf, 1942). *Consideremos el sistema autónomo dependiente de un parámetro:*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde F es de clase C^2 respecto a x y μ . Supongamos que

$$F(0, \mu) = 0$$

para μ en un entorno de 0. También asumamos que, para $\mu = 0$, el jacobiano $D_x F(0, 0)$ posee un par de valores propios puramente imaginarios:

$$\text{Spec}(D_x F(0, 0)) = \{\pm i\beta, \lambda_3, \dots, \lambda_n\},$$

y que ningún otro valor propio es un múltiplo entero de $i\beta$:

$$\frac{\lambda_j}{i\beta} \notin \mathbb{Z}, \quad \forall j = 3, \dots, n.$$

Sea

$$\lambda(\mu) = a(\mu) + ib(\mu)$$

la continuación suave del valor propio $i\beta$ y supongamos que se cumple la condición de transversalidad

$$a'(0) \neq 0.$$

Entonces, existe ε_0 tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe una familia uniparamétrica de soluciones periódicas no constantes, parametrizada por su amplitud ε , junto con funciones diferenciables $\mu = \mu(\varepsilon)$ y $T = T(\varepsilon)$ con $\mu(0) = 0$ y $T(0) = 2\pi/\beta$, que bifurcan del equilibrio en el origen y colapsan hacia él cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Consultar [3] para ver una demostración detallada sobre los dos teoremas. Veamos ahora un ejemplo sencillo que los ilustre:

Ejemplo 2.4.3. Consideremos el sistema autónomo genérico 2D siguiente, dependiente del parámetro μ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio para todo $\mu \in \mathbb{R}$. El diferencial del campo cumple:

$$DF((0, 0); \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

2.4. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS 15

Por tanto, sus valores propios son $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$. Pasando a coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

Derivando e imponiendo la ecuación del sistema original, se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Al ser un sistema con simetría rotacional, $\dot{\theta} = 1$. Entonces, distinguimos por casos:

- Si $\mu < 0$:
 $\dot{r} < 0$ para $r > 0$, así que el origen se trata de un foco estable.
- Si $\mu = 0$:
 $\dot{r} = -r^3$ y sus valores propios son $\pm i$. La solución explícita de $\dot{r} = -r^3$ es:

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}}.$$

Por tanto, todas las soluciones tienden lentamente a $r(t) \rightarrow 0$ y el origen es un equilibrio estable no hiperbólico (degenerado).

- Si $\mu > 0$:
El origen $r = 0$ es un foco inestable y aparece un ciclo límite estable de radio $\varepsilon = \sqrt{\mu}$. Esta bifurcación se conoce como un Hopf supercrítico en $\mu = 0$.

Veamos que este sistema se encuentra cumpliendo las hipótesis del teorema de la bifurcación de Hopf.

1. El origen es un punto fijo $\forall \mu \in \mathbb{R}$.
2. Para $\mu = 0$, los valores propios de la linealización son $\pm i$.
3. La parte real de los valores propios es $\alpha(\mu) = \mu$. Por tanto, la derivada de la parte real respecto al parámetro es $\frac{d}{d\mu} \Re(\mu) = 1 \neq 0$.
4. En dimensión 2, la condición de no resonancia es directa (no hay más valores propios).

Entonces, por el Teorema de la Bifurcación de Hopf, existe una familia suave de soluciones periódicas $x(t, \varepsilon)$ que bifurcan en el equilibrio cuando $\mu = 0$. En este caso, el ciclo límite estable tiene periodo exactamente $T = 2\pi$ y la solución explícita es:

$$\varepsilon(\mu) = \sqrt{\mu}, \quad \mu > 0.$$

Capítulo 3

Base Práctica: Esquema de Newton-Floquet

En esta sección refinamos el método de Newton convencional mediante la teoría de Floquet. El objetivo del algoritmo será resolver las ecuaciones de invariancia: (2.3.1):

$$\begin{aligned}x'(\theta)\omega - X(x(\theta)) &= 0, \quad \theta \in [0, 1], \\ \int_0^1 \langle x'_0(\theta), x(\theta) \rangle d\theta &= 0, \\ DX(x(\theta))P(\theta) - P'(\theta)\omega - P(\theta)M &= 0.\end{aligned}$$

Nuestras incógnitas serán:

- La órbita $x(\theta)$.
- La frecuencia ω .
- El cambio de variable de Floquet $P(\theta)$.
- El logaritmo de la monodromía M . Para diferenciarla de la M teórica, la llamaremos Λ a lo largo del esquema de Newton.

El algoritmo se dividirá en dos correcciones acopladas: primero se corregirá la órbita y la frecuencia, y posteriormente el marco de Floquet.

Nos encontramos en el ámbito de la continuación numérica, así que partiremos de que originalmente conocemos solo aproximaciones iniciales de la solución. Por tanto, podemos definir de manera natural una función de error $E_I(\theta)$ asociada al sistema autónomo:

$$E_1(\theta) := X(x(\theta)) - x'(\theta)\omega,$$

junto a una función de error en la condición de Floquet $E_F(\theta)$:

$$E_F(\theta) := A(\theta)P(\theta) - P'(\theta)\omega - P(\theta)\Lambda, \quad A(\theta) = DX(x(\theta)).$$

Nuestro algoritmo debe reducir en cada etapa el error que cometen nuestras aproximaciones. Para ello, buscaremos calcular incrementos en las variables de la forma:

1. $x_{n+1}(\theta) = x_n(\theta) + \Delta x_n(\theta)$.
2. $\omega_{n+1} = \omega_n + \delta\omega_n$.
3. $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + \Delta\Lambda_n$.
4. $P_{n+1}(\theta) = P_n(\theta) + \Delta P_n(\theta)$.

En las secciones siguientes veremos cómo determinar estos incrementos utilizando métodos espectrales.

Antes de deducir las ecuaciones, recordemos algunos hechos relevantes relacionados con la teoría de Floquet que nos permiten simplificar todavía más el problema.

Primero, recordemos que las matrices P, Λ están definidas salvo conjugación por una matriz invertible C , de modo que las asignaciones:

$$P \rightarrow PC, \quad \Lambda \rightarrow C^{-1}\Lambda C,$$

también satisfacen la ecuación de invariancia:

$$DX(x(\theta))P(\theta) - P'(\theta)\omega - P(\theta)\Lambda = 0.$$

Además, recordemos que por construcción un logaritmo de la matriz de monodromía cuenta con un valor propio 0. Como hipótesis de trabajo, asumiremos que este valor propio 0 es único. Esto lo podemos aprovechar para dar forma a la matriz Λ . Concretamente, sabemos que debe existir una matriz $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que:

$$C^{-1}\Lambda C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array} \right),$$

dónde Λ_0 es una matriz $(n-1) \times (n-1)$ constante. Trabajando bajo esta conjugación de P y Λ , la dinámica tangente correspondiente al exponente nulo queda aislada como un bloque 1×1 . Esto nos induce de manera natural a descomponer las columnas del marco móvil $P(\theta)$:

$$P(\theta) = (L(\theta), N(\theta)).$$

Aquí $L(\theta)$ es la primera columna de P y representa la corrección en la dirección tangente y $N(\theta)$ son $n-1$ columnas que representan las correcciones normales.

Notemos que, por la estructura de Λ por bloques, $L(\theta)$ coincide con la dirección tangente del vector propio asociado al exponente 0. Esto nos permite fijar la primera columna de $P(\theta)$ simplemente como

$$L(\theta) = x'(\theta).$$

Esta elección elimina la indeterminación asociada a la conjugación de Floquet y fija de manera natural el modo correspondiente al exponente nulo. Esto nos reduce el problema a determinar únicamente corrección en la dirección normal $N(\theta)$ de $P(\theta)$.

Veamos qué fórmulas se deducen de imponer las ecuaciones de invariancia de Floquet trabajando con Λ conjugada por bloques.

Primero, derivando E_I respecto a θ :

$$DX(x(\theta))x'(\theta) - x''(\theta)\omega = E_I'(\theta),$$

obtenemos una fórmula que describe el error en la ecuación de invariancia restringida al vector tangente.

Por otro lado, las columnas correspondientes a $N(\theta)$ quedan determinadas por la ecuación:

$$E_F(\theta) = DX(x(\theta))P(\theta) - \omega P'(\theta) - P(\theta) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array} \right).$$

Efectivamente, dividiendo el error de Floquet $E_F(\theta)$ por columnas, da lugar a dos ecuaciones:

$$E_F(\theta) = (E_T(\theta), E_N(\theta)),$$

donde $E_T(\theta) = E_I'(\theta)$ corresponde al error tangente que ya hemos calculado y $E_N(\theta)$ corresponde al error normal de $N(\theta)$:

$$E_T(\theta) := DX(x(\theta))x'(\theta) - x''(\theta)\omega,$$

$$E_N(\theta) := DX(x(\theta))N(\theta) - N'(\theta)\omega - N(\theta)\Lambda_0.$$

Resumiendo, el esquema de Newton se reduce a minimizar las funciones de error:

- (Error inicial) $E_I(\theta) := X(x(\theta)) - x'(\theta)\omega$.
- (Error tangencial) $E_T(\theta) := E_I'(\theta) = DX(x(\theta))x'(\theta) - x''(\theta)\omega$.
- (Error normal) $E_N(\theta) := DX(x(\theta))N(\theta) - N'(\theta)\omega - N(\theta)\Lambda_0$.
- (Error de Floquet) $E_F(\theta) := (E_T(\theta), E_N(\theta))$.

Pasemos ahora a la deducción de las perturbaciones de cada variable.

3.1. Algoritmos para $\Delta x, \delta\omega$

En el primer paso del esquema iterativo de Newton-Floquet, corregiremos $x(\theta)$ y ω . Para ello, trabajaremos en la base adaptada a $P(\theta)$, calculando una perturbación Δx de la órbita que dependa de $P(\theta)$. Supongamos en que nos encontramos en el paso m -ésimo del algoritmo de Newton. Entonces, definimos una primera etapa de corrección como:

- $\omega_{m+1} = \omega_m + \delta\omega_m$.
- $x_{m+1}(\theta) = x_m(\theta) + \Delta x_m(\theta)$, con

$$\Delta x_m(\theta) = P_m(\theta)\xi_m(\theta) = L_m(\theta)\xi_m^L(\theta) + N_m(\theta)\xi_m^N(\theta).$$

Conceptualmente, buscaremos que ξ y $\delta\omega$ sean perturbaciones pequeñas, del orden de $E_I(\theta)$, que corrijan la dinámica minimizando el error en la ecuación diferencial. Veamos qué ecuaciones deducimos de substituir en la ecuación exacta $X(x(\theta)) - x'(\theta)\omega = 0$. Omitiendo dependencia en θ y los subíndices para mayor claridad:

$$X(x + \Delta x) - \frac{d}{d\theta}(x + \Delta x)(\omega + \delta\omega) = 0.$$

Desarrollando hasta primer orden el término $X(x + \Delta x)$:

$$(x'(\theta) + \Delta x'(\theta))(\omega + \delta\omega) - (X(x) + DX(x)\Delta x) = 0.$$

Multiplicando y despreciando términos cuadráticamente pequeños:

$$x'(\theta)\omega + \Delta x'(\theta)\omega + x'(\theta)\delta\omega - X(x(\theta)) - DX(x(\theta))\Delta x(\theta) = 0.$$

Notemos que aquí aparece de manera natural la definición de $E_I(\theta)$:

$$\Delta x'(\theta)\omega + x'(\theta)\delta\omega - DX(x(\theta))\Delta x(\theta) = X(x(\theta)) - x'(\theta)\omega = E_I(\theta). \quad (3.1.1)$$

Si ahora suponemos que $\Delta x = P(\theta)\xi(\theta)$:

$$(P'(\theta)\xi(\theta) + P(\theta)\xi'(\theta))\omega + \delta\omega x'(\theta) - DX(x(\theta))P(\theta)\xi(\theta) = E_I(\theta),$$

$$P'(\theta)\xi(\theta)\omega + P(\theta)\xi'(\theta)\omega + \delta\omega x'(\theta) - DX(x(\theta))P(\theta)\xi(\theta) = E_I(\theta),$$

$$\left(P'(\theta)\omega - DX(x(\theta))P(\theta)\right)\xi(\theta) + P(\theta)\xi'(\theta)\omega + \delta\omega x'(\theta) = E_I(\theta).$$

Como que $P'(\theta)\omega - DX(x(\theta))P(\theta) = -(P(\theta)\Lambda + E_F(\theta))$:

$$-\left(P(\theta)\Lambda + E_F(\theta)\right)\xi(\theta) + P(\theta)\xi'(\theta)\omega + x'(\theta)\delta\omega = E_I(\theta).$$

Despreciando términos cuadráticamente pequeños, obtenemos:

$$-P(\theta)\Lambda\xi(\theta) + P(\theta)\xi'(\theta)\omega + x'(\theta)\delta\omega = E_I(\theta).$$

Multiplicando por la inversa de $P(\theta)$, concluimos finalmente con la expresión a primer orden:

$$P^{-1}(\theta)E_I(\theta) = -\Lambda\xi(\theta) + \xi'(\theta)\omega + P^{-1}(\theta)x'(\theta)\delta\omega.$$

Esta será la ecuación sobre la que aplicaremos el estudio espectral de Fourier. Dado que contamos con una aproximación de $P(\theta)$ y de $E_I(\theta)$, podemos definir la cantidad conocida:

$$\eta(\theta) := P^{-1}(\theta)E_I(\theta).$$

Entonces:

$$\eta(\theta) = -\Lambda\xi(\theta) + \xi'(\theta)\omega + P^{-1}(\theta)x'(\theta)\delta\omega.$$

Expresando Λ por bloques:

$$\eta(\theta) = -\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array}\right)\xi(\theta) + P^{-1}(\theta)x'(\theta)\delta\omega + \xi'(\theta)\omega.$$

Gracias a trabajar con los modos tangente y normal desacoplados, podemos dividir en parte tangencial y normal el vector $\xi = (\xi^L, \xi^N)^T$. Usando que $P(\theta)^{-1}x'(\theta) = e_1$ por construcción, obtenemos dos ecuaciones en términos de $\eta = (\eta^L, \eta^N)^T$:

- (Parte Tangencial): $\eta^L(\theta) := \delta\omega + (\xi^L(\theta))'\omega.$
- (Parte Normal): $\eta^N(\theta) := -\Lambda_0\xi^N(\theta) + (\xi^N(\theta))'\omega.$

Al conocer explícitamente $\eta(\theta)$, podemos desarrollar por Fourier en θ ambas ecuaciones y resolver modo a modo para $\xi(\theta)$.

3.1.1. Modos de Fourier para ξ^L

Desarrollando los modos de Fourier sobre la ecuación:

$$\eta^L(\theta) = \delta\omega + (\xi^L(\theta))'\omega,$$

obtenemos las ecuaciones:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k^L e^{2\pi i k \theta} = \delta\omega + \sum_{k \neq 0} 2\pi i k \omega \hat{\xi}_k^L e^{2\pi i k \theta}.$$

Igualando coeficientes, distinguimos:

- Para $k = 0$, el sistema no nos permite determinar $\hat{\xi}_0^L$. Sin embargo, nos determina la corrección $\delta\omega$:

$$\delta\omega = \hat{\eta}_0^L \rightarrow \delta\omega = \int_0^1 \eta^L(\theta) d\theta.$$

Notemos que esta corrección impone que $\xi^L(\theta)$ sea 1-periódica.

- Para $k \neq 0$:

$$\hat{\xi}_k^L = \frac{1}{2\pi i k \omega} \hat{\eta}_k^L.$$

La indeterminación de $\hat{\xi}_0^L$ refleja la libertad de elección al fijar la fase. La determinaremos más adelante.

3.1.2. Modos de Fourier para ξ^N

Al igual que en el caso anterior, desarrollando por Fourier la ecuación:

$$\eta^N(\theta) = -\Lambda_0 \xi^N(\theta) + (\xi^N(\theta))'\omega,$$

obtenemos los modos de Fourier:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k^N e^{2\pi i k \theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\xi}_k^N (-\Lambda_0 + 2\pi i k \omega I_{n-1}) e^{2\pi i k \theta}.$$

Igualando coeficientes, deducimos:

$$\hat{\xi}_k^N = (-\Lambda_0 + 2\pi i k \omega I_{n-1})^{-1} \hat{\eta}_k^N.$$

Notemos que se requiere que la matriz $(-\Lambda_0 + 2\pi i k \omega I_{n-1})$ sea invertible (consultar sección 3.3).

3.1.3. Fijar la fase: Modo ξ_0^L

Para solucionar el problema de fijar la fase, recordemos la condición geométrica que debe cumplir $x(\theta)$. Sustituyendo en la ecuación exacta:

$$\int_0^1 \langle x'_0(\theta), x(\theta) + \Delta x(\theta) \rangle d\theta = 0,$$

con la definición de $\Delta x(\theta) = P(\theta)\xi(\theta)$, usando que $P(\theta) = (x'(\theta), N(\theta))$ y que $\xi = (\xi^L, \xi^N)$, la ecuación anterior se traduce en:

$$\int_0^1 \langle x'_0(\theta), x'(\theta)(\hat{\xi}_0^L + \hat{\xi}^L) + N(\theta)\hat{\xi}^N(\theta) \rangle d\theta = - \int_0^1 \langle x'_0(\theta), x(\theta) \rangle d\theta.$$

Para que se dé la condición geométrica (2.1.1), hemos de imponer necesariamente que:

$$\int_0^1 \langle x'_0(\theta), x(\theta) \rangle d\theta = 0$$

Aislando $\hat{\xi}_0^L$ de la ecuación integral resultante, concluimos que:

$$\hat{\xi}_0^L = \frac{- \int_0^1 \langle x'_0(\theta), x(\theta) \rangle d\theta - \int_0^1 \langle x'_0(\theta), x'(\theta)\hat{\xi}^L + N(\theta)\hat{\xi}^N(\theta) \rangle d\theta}{\int_0^1 \langle x'_0(\theta), x'(\theta) \rangle d\theta}.$$

Notemos que se requiere la condición geométrica de que

$$\int_0^1 \langle x'_0(\theta), x'(\theta) \rangle d\theta \neq 0$$

para que el modo sea resoluble. Incluso, si se quiere simplificar más el cálculo, puede imponerse directamente que $\xi_0^L = 0$.

Una vez determinadas las correcciones en ω y $x(\theta)$, podemos hacer una corrección en la ecuación de invariancia $E_I(\theta) = 0$. Pasemos ahora a las correcciones de P, Λ .

3.2. Algoritmos para $\Delta P(\theta), \Delta\Lambda$

Supongamos que ya hemos corregido $x(\theta), \omega$. Seguidamente, pasemos a deducir las ecuaciones para calcular las correcciones de Λ y $P(\theta)$. Recordemos que $E_F(\theta)$ viene definido por la ecuación de invariancia:

$$E_F(\theta) = DX(x(\theta))P(\theta) - P'(\theta)\omega - P(\theta)\Lambda. \quad (3.2.1)$$

Para determinar las correcciones, también asumiremos que la perturbación en $P(\theta)$ está adaptada a la base de P . Supongamos que no encontramos en el paso m -ésimo del método de Newton. Definimos el esquema:

- $P_{m+1}(\theta) = P_m(\theta) + P_m(\theta)Q_m(\theta)$.
- $\Lambda_{m+1} = \Lambda_m + \Delta\Lambda_m$.

Debemos determinar cómo calcular la matriz $Q(\theta)$ y $\Delta\Lambda$. También asumiremos nuevamente que son magnitudes del orden del error $E_F(\theta)$.

Sustituyendo en la ecuación exacta $E_F(\theta) = 0$ con el nuevo esquema, obtenemos:

$$\begin{aligned} DX(x(\theta)) \left(P(\theta) + P(\theta)Q(\theta) \right) - \left(P'(\theta) + P'(\theta)Q(\theta) + P(\theta)Q'(\theta) \right) \omega \\ - (P(\theta) + P(\theta)Q(\theta)) \cdot (\Lambda + \Delta\Lambda) = 0. \end{aligned}$$

Usando la identidad $P'(\theta)\omega + E_F(\theta) = A(\theta)P(\theta) - P(\theta)\Lambda$ e ignorando términos cuadráticamente pequeños, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(DX(x(\theta))P(\theta) - P'(\theta)\omega - P(\theta)\Lambda \right) + \left(DX(x(\theta))P(\theta) - P'(\theta)\omega \right) Q(\theta) \\ & - P(\theta)Q'(\theta)\omega - P(\theta)\Delta\Lambda - P(\theta)Q(\theta)\Lambda = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo con las expresiones mencionadas:

$$E_F(\theta) + \left(P(\theta)\Lambda + E_F(\theta) \right) Q(\theta) - P(\theta)Q'(\theta)\omega - P(\theta)\Delta\Lambda - P(\theta)Q(\theta)\Lambda = 0.$$

Ignorando términos cuadráticamente pequeños, deducimos la ecuación:

$$P^{-1}(\theta)E_F(\theta) = Q'(\theta)\omega - \Lambda Q(\theta) + Q(\theta)\Lambda + \Delta\Lambda. \quad (3.2.2)$$

Esta será la igualdad en la que aplicaremos el estudio espectral de Fourier. Como en la sección anterior, podemos definir la función:

$$\eta_F(\theta) := P^{-1}(\theta)E_F(\theta) = Q'(\theta)\omega + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Delta\Lambda_0 \end{array} \right) + Q(\theta) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array} \right) Q(\theta).$$

Aprovechando el desacople de la matriz Λ , podemos dividir la matriz Q y η por bloques, imitando la estructura de Λ . Ponemos:

$$Q(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} Q^{LL}(\theta) & Q^{LN}(\theta) \\ \hline Q^{NL}(\theta) & Q^{NN}(\theta) \end{array} \right), \quad \eta_F(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} \eta^{LL}(\theta) & \eta^{LN}(\theta) \\ \hline \eta^{NL}(\theta) & \eta^{NN}(\theta) \end{array} \right).$$

Entonces, tenemos:

- Q_{11} es una matriz 1×1 .
- Q_{12} es una matriz $1 \times (n-1)$ y corresponde a la corrección tangencial de P .
- Q_{21} es una matriz $(n-1) \times 1$.
- Q_{22} es una matriz $(n-1) \times (n-1)$ y corresponde a la corrección normal de P .

Expresando por bloques la matriz Q y η , se deduce:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} \eta^{LL}(\theta) & \eta^{LN}(\theta) \\ \hline \eta^{NL}(\theta) & \eta^{NN}(\theta) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} (Q^{LL}(\theta))' & (Q^{LN}(\theta))' \\ \hline (Q^{NL}(\theta))' & (Q^{NN}(\theta))' \end{array} \right) \omega + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Delta\Lambda_0 \end{array} \right) \\ & + \left(\begin{array}{c|c} Q^{LL}(\theta) & Q^{LN}(\theta) \\ \hline Q^{NL}(\theta) & Q^{NN}(\theta) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} Q^{LL}(\theta) & Q^{LN}(\theta) \\ \hline Q^{NL}(\theta) & Q^{NN}(\theta) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Igualando por bloques, obtenemos:

- $\eta^{LL}(\theta) = (Q^{LL}(\theta))'\omega.$
- $\eta^{LN}(\theta) = (Q^{LN}(\theta))'\omega + Q^{LN}(\theta)\Lambda_0.$
- $\eta^{NL}(\theta) = (Q^{NL}(\theta))'\omega - \Lambda_0 Q^{NL}(\theta).$

$$\blacksquare \eta^{NN}(\theta) = (Q^{NN}(\theta))'\omega + \Delta\Lambda_0 + Q^{NN}(\theta)\Lambda_0 - \Lambda_0 Q^{NN}(\theta).$$

Antes de continuar, mencionar algunos matrices importantes:

- Las correcciones $Q^{LL}(\theta), Q^{NL}(\theta)$ corresponden a correcciones en el modo tangente de la órbita. Recordemos que, al tener desacopladas las direcciones tangente y normal, hemos podido imponer que $L(\theta) = x'(\theta)$. Por tanto, estos modos deberían decrecer cuadráticamente respecto al error E_I .
- Para un esquema iterativo Newton-Floquet como el nuestro, pueden despreciarse.
- Por tanto, puede suponerse que $Q^{LL} = Q^{NL} = 0$ y trabajar solo con las direcciones normales.

Sin embargo, para poder continuar con la resolución de las ecuaciones para $Q^{LN}(\theta), Q^{NN}(\theta)$ necesitamos dar algunas nociones técnicas primero.

3.2.1. Ecuaciones de Sylvester: Conmutador, Vectorizado y Producto de Kronecker

Las ecuaciones que tendremos que resolver para los modos de Fourier requieren de la resolución de ecuaciones tipo Sylvester. Demos su definición y algunos conceptos importantes relacionados:

Definición 3.2.1. Una ecuación de Sylvester (sobre \mathbb{C}) es una ecuación matricial del tipo:

$$AX - XB = C,$$

donde $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, necesitamos definir el operador adjunto:

Definición 3.2.2. Definimos el operador conmutador de una matriz $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y lo indicamos con $ad_C : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ como:

$$ad_C(X) := [X, C] = XC - CX.$$

Observación 3.2.3. Notemos que la ecuación $[X, B] = C$ es un caso particular de ecuación de Sylvester con $A = B$.

Definición 3.2.4. Sea $A = \{a_{i,j}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ una matriz con coeficientes complejos. Definimos el operador $Vec(A) : \mathbb{C}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{C}^{nm}$ como:

$$Vec(A) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \dots \\ a_{n,1} \\ a_{1,2} \\ \dots \\ a_{1,m} \\ \dots \\ a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Es decir, $Vec(A)$ consiste en el vector generado apilando las columnas de A en un solo vector. Se puede demostrar fácilmente que $Vec(\cdot)$ establece un isomorfismo de $\mathbb{C}^{n \times m}$ a \mathbb{C}^{nm} . En particular, es un operador lineal.

Ejemplo 3.2.5. Pongamos un ejemplo sencillo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Vec(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.6. Definimos el producto de Kronecker $\otimes : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^{(np) \times (mq)}$ como:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

Es decir, el producto de cada elemento a_{ij} de A por la matriz B y después se encajan los bloques en la matriz producto.

Ejemplo 3.2.7. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 \cdot I_2 & 2 \cdot I_2 \\ 3 \cdot I_2 & 4 \cdot I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dadas estas definiciones, se pueden deducir las siguientes propiedades sobre \otimes :

Proposición 3.2.8. *El producto de Kronecker:*

1. *Es bilineal y asociativo.*
2. *No es conmutativo, aunque $A \otimes B$ y $B \otimes A$ son equivalentes módulo permutación, es decir, existen σ_1, σ_2 permutaciones tales que $A \otimes B = \sigma_1(B \otimes A)\sigma_2$*
3. *Producto mixto: $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, en caso que los productos estén bien definidos.*
4. *Inversa: $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, en caso de que A, B sean invertibles.*
5. *Transpuesta: $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.*

Una vez definidos el producto de Kronecker y el vectorizado, es conveniente matizar su utilidad a la hora de resolver ecuaciones matriciales.

Proposición 3.2.9. *Se cumple la identidad matricial:*

$$Vec(AXB) = (B^T \otimes A)Vec(X).$$

Usando todas las propiedades mencionadas, vamos a demostrar el siguiente lema que utilizaremos más adelante:

Lema 3.2.10. *Dadas dos matrices complejas X, B , se cumple:*

$$\text{Vec}([X, B]) = (B^T \otimes I - I \otimes B^T)\text{Vec}(X). \quad (3.2.3)$$

Demostración (Lema 3.2.10): Recordemos que $[X, B] = XB - BX$. Utilizaremos la proposición (3.2.9) al caso particular en que $A = I$ o $B = I$. Por un lado:

$$\text{Vec}([X, B]) = \text{Vec}(XB - BX) = \text{Vec}(XB) - \text{Vec}(BX).$$

Entonces:

$$\text{Vec}([X, B]) = (B^T \otimes I)\text{Vec}(X) - (I \otimes B)\text{Vec}(X) = (B^T \otimes I - I \otimes B)\text{Vec}(X). \quad \square$$

Por último, demos algunos resultados sobre los valores propios al aplicar \otimes . Estos resultados serán necesarios para saber cuándo es invertible una matriz que involucre el operador \otimes .

Proposición 3.2.11. *Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Si $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ son los valores propios de A y $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ los de B , entonces los valores propios de $A \otimes B$ son exactamente:*

$$\text{Spec}(A \otimes B) = \{\alpha_i \beta_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Observación 3.2.12. Las matrices $I \otimes A$ y $B^T \otimes I$ conmutan. Efectivamente, usando la propiedad el producto mixto, tenemos que por un lado:

$$(I \otimes A)(B^T \otimes I) = (IB^T) \otimes (AI) = B^T \otimes A.$$

Por otro lado:

$$(B^T \otimes I)(I \otimes A) = (B^T I) \otimes (IA) = B^T \otimes A.$$

Proposición 3.2.13. *Dadas dos matrices A, B que conmutan y son diagonalizables (o, más en general, que comparten una base común de vectores propios), se cumple:*

$$\text{Spec}(A - B) = \{\alpha - \beta : \alpha \in \text{Spec}(A), \beta \in \text{Spec}(B)\}.$$

En particular, como corolario de esta proposición, podemos deducir que:

$$\text{Spec}(I \otimes A - B^T \otimes I) = \{\alpha_i - \beta_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Con todos estos resultados, ya nos encontramos en condiciones de abordar el cálculo de modos de Fourier para la matriz Q . La primera parte se centrará en los modos de Q , que tienen una importancia menor en nuestro trabajo.

3.2.2. Modos de Fourier para Q^{LL}

Desarrollando por Fourier las funciones Q^{LL}, η^{LL} en θ , deducimos:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k^{LL} e^{2\pi i k \theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{Q}_k^{LL} (2\pi i k \omega) e^{2\pi i k \theta}.$$

Igualando modo a modo, obtenemos:

$$\hat{\eta}_k^{LL} = (2\pi i k \omega) \hat{Q}_k^{LL}.$$

Para $k = 0$, vemos que la ecuación no es resoluble para Q_0^{LL} . Tenemos dos opciones para solucionarlo:

- Asumimos que este error es menospreciabile respecto al esquema de Newton. Pueden servir como test para comprobar cálculos.
- Usar este coeficiente para formalizar alguna cantidad relacionada con la dirección tangente (promediar el módulo del vector tangente, multiplicar la órbita por alguna función periódica,...). O, simplemente, tomar $Q_0^{LL} = 0$.

Para los fines prácticos del trabajo, tomaremos $Q^{LL}(\theta) = 0$ si inicialmente hemos fijado correctamente $L(\theta) = x'(\theta)$.

En caso que se quisiera formalizar el valor de Q_0^{LL} , tenemos que para $k \neq 0$ los modos son simplemente:

$$\hat{Q}_k^{LL} = \frac{\hat{\eta}_k^{LL}}{2\pi ik\omega}.$$

3.2.3. Modos de Fourier para Q^{NL}

Desarrollando por Fourier las funciones Q^{NL}, η^{NL} en θ , deducimos:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k^{NL} e^{2\pi ik\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi ik\omega I_{n-1} - \Lambda_0) \hat{Q}_k^{NL} e^{2\pi ik\theta}.$$

Igualando modo a modo, deducimos:

$$\hat{\eta}_k^{NL} = (2\pi ik\omega I_{n-1} - \Lambda_0) \hat{Q}_k^{NL}.$$

Por tanto:

$$\hat{Q}_k^{NL} = (2\pi ik\omega I_{n-1} - \Lambda_0)^{-1} \hat{\eta}_k^{NL}.$$

Como podemos observar será necesaria la condición de que la matriz $2\pi ik\omega I_{n-1} - \Lambda_0$ sea invertible (consultar sección 3.3).

Volvemos a recalcar que esta corrección decae cuadráticamente con $E_I(\theta)$. Por tanto, también podemos fijarla como $Q^{NL}(\theta) = 0$.

Si se quiere formalizar su uso, se puede usar como método alternativo para fijar $L(\theta) = x'(\theta)$, ya que Q^{NL} corrige la dirección tangente de P , pero esta alternativa requiere un estudio más fino que no exploraremos en este trabajo.

Continuemos ahora con las ecuaciones para Q^{LN}, Q^{NN} , que corresponden a las correcciones normales de $N(\theta)$. Estas correcciones son las más relevantes del esquema iterativo, ya que corrigen las direcciones que corresponden a modos transversales.

3.2.4. Modos de Fourier para Q^{LN}

Desarrollando por Fourier las funciones Q^{LN}, η^{LN} en θ , deducimos:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k^{LN} e^{2\pi ik\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi ik\omega \hat{Q}_k^{LN} + \hat{Q}_k^{LN} \Lambda_0) e^{2\pi ik\theta}.$$

Igualando modo a modo, obtenemos:

$$\hat{\eta}_k^{LN} = 2\pi ik\omega \hat{Q}_k^{LN} + \hat{Q}_k^{LN} \Lambda_0.$$

Notemos que la estructura de la ecuación no es lineal por columnas. Transponiendo la ecuación:

$$(\hat{\eta}_k^{LN})^T = 2\pi i k \omega (\hat{Q}_k^{LN})^T + \Lambda_0^T (\hat{Q}_k^{LN})^T = (2\pi i k \omega I_{n-1} + \Lambda_0^T) (\hat{Q}_k^{LN})^T,$$

concluimos que:

$$(\hat{Q}_k^{LN})^T = (2\pi i k \omega I_{n-1} + \Lambda_0^T)^{-1} (\hat{\eta}_k^{LN})^T.$$

Notemos que será necesario que la matriz $2\pi i k I_{n-1} + \Lambda_0^T$ sea invertible (ver sección 3.3).

3.2.5. Modos de Fourier para Q^{NN}

Por último, desarrollando por Fourier las funciones Q^{NN}, η^{NN} en θ , deducimos:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}_k^{NN} e^{2\pi i k \theta} = \Delta \Lambda_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2\pi i k \omega \hat{Q}_k^{NN} + \hat{Q}_k^{NN} \Lambda_0 - \Lambda_0 \hat{Q}_k^{NN} \right) e^{2\pi i k \theta}.$$

Igualando modo a modo, deducimos:

$$\hat{\eta}_k^{NN} = \Delta \Lambda_0 + 2\pi i k \omega \hat{Q}_k^{NN} + \hat{Q}_k^{NN} \Lambda_0 - \Lambda_0 \hat{Q}_k^{NN}.$$

Entonces:

- Para $k = 0$:

$$\hat{\eta}_0^{NN} = \Delta \Lambda_0 + \hat{Q}_0^{NN} \Lambda_0 - \Lambda_0 \hat{Q}_0^{NN}.$$

Podemos tomar sencillamente $\hat{Q}_0^{NN} = 0$, de modo que $\hat{\eta}_0^{NN} = \Delta \Lambda_0$.

- Luego, para $k \neq 0$:

$$\hat{\eta}_k^{NN} = 2\pi i k \omega \hat{Q}_k^{NN} + \hat{Q}_k^{NN} \Lambda_0 - \Lambda_0 \hat{Q}_k^{NN}.$$

En este caso, volvemos a encontrarnos con una ecuación lineal en \hat{Q}_k^{NN} . Notemos que podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\hat{\eta}_k^{NN} = 2\pi i k \omega \hat{Q}_k^{NN} + [\hat{Q}_k^{NN}, \Lambda_0].$$

Usando que el operador $Vec(\cdot)$ es lineal y la identidad (3.2.10), obtenemos:

$$(2\pi i k \omega I_{(n-1)^2} + \Lambda_0^T \otimes I_{n-1} - I_{n-1} \otimes \Lambda_0) Vec(\hat{Q}_k^{NN}) = Vec(\hat{\eta}_k^{NN}).$$

Notemos que ahora el sistema ha pasado a tener una estructura lineal. A cambio, aumentamos las dimensiones del problema. El sistema obtenido es compatible determinado siempre que la matriz $M_k = (2\pi i k \omega I_{(n-1)^2} + \Lambda_0^T \otimes I_{n-1} - I_{n-1} \otimes \Lambda_0)$ sea invertible.

Equivalentemente, la matriz M_k es invertible si no tiene ningún valor propio 0. Como hemos visto en (3.2.13) es suficiente con que para toda pareja de valores propios distintos λ_i, λ_j de Λ_0 se cumpla que $2\pi i k \omega \neq \lambda_i - \lambda_j, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

3.2.6. Caso Λ_0 diagonal

Por último, veamos como se simplifica el problema suponiendo que hemos diagonalizado completamente Λ_0 . En el caso diagonal, escribimos los coeficientes de $\Delta\Lambda_0$ y Λ_0 δ_i de la siguiente forma:

$$\Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \Delta\Lambda_0 = \text{diag}(\delta_2, \dots, \delta_n).$$

Para el cálculo de Q^{LL} , Q^{NL} , Q^{LN} , los sistemas a resolver se vuelven diagonales y su implementación es directa. Para el caso Q^{NN} , que es el más costoso a nivel computacional, las ecuaciones a resolver son:

$$\hat{\eta}_{i,j,k}^{NN} = 2\pi ik\omega \hat{Q}_{i,j,k}^{NN} + \hat{Q}_{i,j,k}^{NN} \lambda_j - \lambda_i \hat{Q}_{i,j,k}^{NN}.$$

Entonces:

- Si $k = 0$:
 - Si $i = j$, $\hat{\eta}_{i,i,0}^{NN} = \delta_i$.
 - Si $i \neq j$, $\hat{Q}_{i,j,0}^{NN} = \frac{\hat{\eta}_{i,j,k}^{NN}}{\lambda_j - \lambda_i}$.
- Si $k \neq 0$:

$$\hat{Q}_{i,j,k}^{NN} = \frac{\hat{\eta}_{i,j,k}^{NN}}{2\pi ik\omega + \lambda_j - \lambda_i}.$$

Como en el caso anterior, vuelve a ser necesaria la condición de no resonancia $2\pi ik\omega + \lambda_j - \lambda_i \neq 0$ y que $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$ (consultar 3.3).

Comentarios Finales Con esto, acabamos de describir el algoritmo completo de Newton-Floquet que utilizaremos en la sección práctica del trabajo. Notar, sin embargo, que quedan conceptos importantes sobre el método por matizar:

- Conceptos relacionados con la robustez del algoritmo: Convergencia del método, cotas del error, condicionamiento del problema o calidad de la condición inicial. Aunque se trate en esencia de un método de Newton, la ecuación de invariancia de Floquet es muy sensible a perturbaciones, haciendo que la continuación numérica sea delicada. Para ver una ampliación detallada de estos temas, recomiendo consultar los trabajos de Moore [2].
- El método funciona tanto para sistemas Hamiltonianos como no Hamiltonianos, pero se necesita un trato especial en caso de tener que lidiar con una integral primera.

Antes de finalizar el apartado teórico, dedicaremos una sección a discutir los numerosos casos de resonancia que pueden aparecer naturalmente cuando se quiere aplicar el algoritmo de Newton-Floquet.

3.3. Casos de Resonancia

A lo largo de la sección (3) hemos observado situaciones en se pueden generar problemas de condicionamiento al aplicación el algoritmo de Newton-Floquet. Si $\{\lambda_i\}_{i=2}^n$ son los valores propios de Λ_0 en un paso de Newton, se pueden resumir todas las condiciones en:

1. $\lambda_i \neq 2\pi ik\omega, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$
2. $\lambda_i - \lambda_j \neq 2\pi ik\omega, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

En particular, el primer punto nos dice que Λ_0 no puede tener otros valores propios 0. Esto se traduce en que Λ solo puede tener un exponente de Floquet 0 asociado a la dirección tangente. Esto coincide con nuestra hipótesis de trabajo.

En estos casos de resonancia, el algoritmo descrito anteriormente deja de ser válido, ya que perdemos la regularidad numérica de los modos de Fourier.

A nivel geométrico, una resonancia ocurre cuando la frecuencia asociada a un modo del sistema linealizado coincide con un múltiplo entero de la frecuencia fundamental de la órbita periódica. En estos casos, pueden aparecer bifurcaciones o inestabilidades paramétricas, en las cuales pequeñas perturbaciones del periodo o los parámetros del sistema producen crecimientos exponenciales en algunas direcciones.

Observación 3.3.1. Notemos algunos hechos relevantes:

- En el caso 2D, no se dan resonancias excepto en casos muy degenerados; Los valores propios del sistema, en caso de ser complejos, serían conjugados. Al tener un valor propio 1, el otro valor propio es real y determina la estabilidad del ciclo límite u órbita periódica.

En caso de darse una resonancia, podemos seguir varias líneas de estudio:

- Perturbar ligeramente el periodo T para alejarnos de esos valores críticos y explorar valores cercanos.
- Añadir parámetros nuevos al sistema.
- Reducir modos de Fourier, suavizar sus coeficientes o aplicar técnicas más refinadas como pseudoinversa (consultar Haro).

Pasemos a dar algoritmos para calcular las condiciones iniciales necesarias para aplicar el algoritmo de Floquet. Daremos métodos para calcular las aproximaciones iniciales de la órbita $x_0(t)$, una frecuencia inicial ω_0 , la matriz de monodromía M y el cambio de variable $P_0(t)$.

3.4. Cálculo de condiciones iniciales

En esta sección mostremos algoritmos para calcular las condiciones: ω_0 , una órbita inicial $x_0(t)$, la matriz de monodromía M , la solución fundamental del sistema variacional asociado $\phi(t)$ y finalmente $P(t)$. De manera natural, las encontraremos en el tiempo físico y posteriormente las reparametrizaremos en θ .

3.4.1. Integrador Runge-Kutta

Para obtener las condiciones iniciales, usaremos el algoritmo RK78 (Runge-Kutta con paso adaptativo 7-8). Este algoritmo permite encontrar discretizaciones de la solución de

ecuaciones diferenciales.

Explicamos brevemente en qué consiste, usando como ejemplo un algoritmo similar, el RK4. En nuestro caso, consideremos el sistema:

$$\dot{x}(t) = X(x(t)).$$

Sea $u(t)$ una solución periódica del sistema y consideremos el sistema variacional asociado:

$$\dot{\phi}(t) = DX(u(t))\phi(t), \quad \phi(0) = I.$$

Queremos determinar la matriz $\phi(t)$ y $u(t)$. Fijamos un paso h y dividimos el intervalo $[0, T]$ en N puntos equidistantes de forma que $t_0 = 0, t_N = T$ (por ejemplo, $h = \frac{T}{N}$). Los algoritmos RK definen esquemas iterativos mediante aproximaciones de Taylor de ordenes altos. En el caso del RK4, el esquema iterativo es el siguiente (indicando con $\phi_n = \phi(t_n)$):

- $K_1 := DX(t_n)\phi(t_n)$.
- $K_2 = DX(t_n + \frac{h}{2})(\phi_n + \frac{h}{2}K_1)$.
- $K_3 = DX(t_n + \frac{h}{2})(\phi_n + \frac{h}{2}K_2)$.
- $K_4 = DX(t_n + h)(\phi_n + hK_3)$
- $\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$.

En cada paso del algoritmo, se calculan los coeficientes K_i y, el último paso calcula mediante un desarrollo de Taylor el siguiente valor de ϕ . Para el caso de RK4, el error es de un orden de magnitud de $O(h^4)$.

En la parte práctica, usaremos RK78, que es una versión más refinada del algoritmo anterior: utiliza más puntos intermedios para promediar el nuevo valor de ϕ (con un error del orden de $O(h^8)$) y, además, utiliza un paso h adaptativo (varia en cada iteración para mejorar la precisión, comparando dos errores de magnitudes distintas). Adjuntamos una rutina en C del RK78 lista para implementar en el anexo A1.

3.4.2. Secciones de Poincaré: Cálculo de T_0

Para obtener una aproximación del tiempo de retorno T_0 y su correspondiente frecuencia ω_0 , utilizaremos el cálculo de puntos fijos en secciones de Poincaré. Nuestro procedimiento será el siguiente:

- Definimos la ecuación del flujo:

$$\Phi(t; x_0),$$

que representa la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = X(x(t))$$

fijada una condición inicial $(0, x_0)$.

- Definimos una sección de Poincaré

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\},$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- Definimos su aplicación de Poincaré asociada $P(x_0)$. Buscamos un tiempo de retorno τ y una condición inicial x_0 tal que:

$$g(\Phi(\tau; x_0)) = 0.$$

- Integrando numéricamente fijada una condición inicial, buscaremos encontrar dos tiempos consecutivos t_n, t_{n+1} tales que la órbita cruce la sección de Poincaré. Es decir, buscamos tiempos t_n, t_{n+1} tales que:

$$g(\Phi(t_n; x_0)) \cdot g(\Phi(t_{n+1}; x_0)) < 0.$$

El tiempo de retorno se encontrará en $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$.

- Para refinarlo, aplicaremos un método de Newton sobre la variable temporal:

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{g(\Phi(\tau_n; x_0))}{Dg(\Phi(\tau_n; x_0)) \cdot X(\Phi(\tau_n; x_0))}.$$

Notemos que en cada iteración del método de Newton, será necesario integrar el campo nuevamente.

Con este procedimiento, obtendremos un tiempo de retorno $\tau \approx T$ y lo utilizaremos como nuestra aproximación inicial del periodo del sistema. Notemos que es necesario partir de una condición inicial x_0 adecuada. Pasemos ahora a calcular el resto de condiciones iniciales.

3.4.3. Cálculo de $x_0(t)$, $\phi(t)$ y M_0

Supongamos que conocemos una aproximación del periodo T_0 obtenida en la sección anterior mediante una sección de Poincaré. Ahora, para calcular aproximaciones de $x_0(t)$, $\phi(t)$ y de M_0 , simplemente podemos aplicar RK usando el tiempo de retorno T_0 .

Supongamos que partimos de una condición inicial $x_0(0)$ cercana a la solución periódica. Si integramos el sistema:

$$\dot{\phi}(t) = DX(u(t))\phi(t),$$

hasta $t_N = T$, obtendremos que $e^{TM} \approx \phi_N$. Además, el algoritmo calcula en cada iteración la matriz $\phi(t_i)$ y las predicciones de los puntos $x_0(t_i)$. Por tanto, basta con aplicar RK78 una vez, guardando una malla de puntos equiespaciados en $[0, T_0]$ de la matriz variacional junto a la órbita.

Para encontrar el valor de M_0 será necesario calcular:

$$M_0 = \frac{1}{T_0} \log(\phi(T_0)).$$

3.4.4. Cálculo de P_0

Una vez calculada M_0 recordemos la matriz $P_0(t)$ satisface

$$P_0(t) = \phi(t)e^{-M_0 t}.$$

Ya hemos calculado la matriz M_0 y $\phi(t)$ aplicando RK78, así que solo necesitamos concretar cómo calcular la exponencial $\exp(-M_0 t)$.

Una forma directa aunque poco eficiente de calcular la exponencial sería fijar un valor $N > 0$ y calcular un número finito de iterados siguiendo la definición formal por series:

$$e^{-tM_0} \approx \sum_{k=0}^N \frac{M_0^k}{k!} (-t)^k.$$

Sin embargo, genera problemas numéricos si A está mal condicionada.

Entonces, podemos optar por diagonalizar la matriz A . Este es el método más convencional. Si la dimensión de la matriz es pequeña, como el primer ejemplo que veremos, podemos diagonalizar directamente M , haciendo que el cálculo de potencias sea directo. Si la matriz no fuese diagonalizable se tendrá que utilizar fórmulas para las formas de Jordan.

Con esto, el algoritmo de Newton queda explicado en su totalidad y puede implementarse tal y como se ha explicado en el texto. Ahora, pasemos a dedicar una sección a la etapa de continuación. Veremos como aproximar a primer orden las variables del esquema de Newton a fin de poder optimizar las etapas de continuación después de haber refinado con Newton una órbita particular.

3.5. Continuación a primer orden de parámetros

En un problema de continuación numérica, conviene establecer un criterio robusto para determinar el incremento de parámetros en cada etapa de continuación.

A lo largo de esta sección, asumiremos que el campo que estudiamos depende explícitamente del parámetro μ . Por tanto, escribiremos $(x_\mu, \omega_\mu, P_\mu, \Lambda_\mu)$ para indicar la solución del esquema de Newton para un valor particular de μ . Entonces, las ecuaciones de invariancia a resolver son:

$$X_\mu(x_\mu(\theta)) - \frac{d}{d\theta}(x_\mu(\theta))\omega_\mu = 0, \quad (3.5.1)$$

$$DX_\mu(x_\mu(\theta))P_\mu(\theta) - \frac{d}{d\theta}P_\mu(\theta)\omega_\mu - P_\mu(\theta)\Lambda_\mu = 0. \quad (3.5.2)$$

Una opción sencilla y directa de implementar continuación para un primer estudio del campo es añadir un control de paso adaptativo. La idea es sencilla:

- En cada etapa de continuación, guardar una copia de la órbita inicial.
- Comprobar si para el paso actual $\delta\mu$ hay convergencia.
- Si hay convergencia, se puede mantener el $\delta\mu$ actual o incluso aumentarlo.

- Si no hay convergencia, reducir el paso $\delta\mu$, recuperar la órbita inicial del paso anterior y repetir el primer punto.

En general, determinar qué criterios utilizar para aumentar/reducir $\delta\mu$ puede ser complicado. Por esto, una alternativa más refinada a plantear es calcular una aproximación a primer orden de $(x_\mu, \omega_\mu, P_\mu, \Lambda_\mu)$ utilizando derivadas respecto a parámetros:

1. $x_{\mu+\delta\mu}(\theta) = x_\mu(\theta) + \frac{d}{d\mu}x_\mu(\theta)\delta\mu + O(\delta\mu^2)$.
2. $\omega_{\mu+\delta\mu}(\theta) = \omega_\mu + \frac{d}{d\mu}\omega_\mu\delta\mu + O(\delta\mu^2)$.
3. $P_{\mu+\delta\mu}(\theta) = P_\mu(\theta) + \frac{d}{d\mu}P_\mu(\theta)\delta\mu + O(\delta\mu^2)$.
4. $\Lambda_{\mu+\delta\mu} = \Lambda_\mu + \frac{d}{d\mu}\Lambda_\mu\delta\mu + O(\delta\mu^2)$.

El problema radicará en calcular las derivadas respecto a μ pero, como veremos, no necesitaremos técnicas nuevas para resolver las ecuaciones que se obtienen.

Supongamos que, fijado un valor del parámetro μ , tenemos una solución $(x_\mu(\theta), \omega_\mu, P_\mu(\theta), \Lambda_\mu)$ de las ecuaciones de invariancia (3.5.1), (3.5.2).

3.5.1. Continuación de $x(\theta), \omega$

Derivando implícitamente respecto al parámetro μ en (3.5.1) y reordenando, obtenemos la ecuación:

$$\partial_\mu x'(\theta)\omega_\mu - x'(\theta)(\partial_\mu\omega) - DX_\mu(x(\theta))\partial_\mu x(\theta) = \partial_\mu X_\mu(x(\theta)).$$

Notemos que esta ecuación tiene la misma estructura exacta que la vista en (3.1.1), a excepción de que el término independiente pasa de ser $E_I(\theta)$ a ser $\partial_\mu X_\mu(x(\theta))$. Su resolución es idéntica a la vista en la sección 3.1:

Asumiendo que $\partial_\mu x(\theta) = P_\mu(\theta)\xi_\mu(\theta)$, se obtiene que las ecuaciones a resolver para $\xi_\mu(\theta), \partial_\mu\omega_\mu$ son:

$$\zeta(\theta) := P_\mu^{-1}(\theta)\partial_\mu X_\mu(\theta) = -\Lambda_\mu\xi_\mu(\theta) + \xi'_\mu(\theta)\omega_\mu + P_\mu^{-1}(\theta)x'_\mu(\theta)\partial_\mu\omega.$$

Notemos que ζ es conocida, ya que solo se requiere calcular el campo derivado respecto a parámetros. La resolución mediante modos de Fourier es la misma que la vista en las secciones 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3.

3.5.2. Continuación de $P(\theta), \Lambda$

Análogamente, derivando (3.5.2) respecto a μ , obtenemos:

$$\begin{aligned} D_\mu(DX_\mu(x_\mu(\theta))P_\mu(\theta) + DX_\mu(x_\mu(\theta))\partial_\mu P_\mu(\theta) - P'(\theta)\partial_\mu\omega_\mu - \partial_\mu P'(\theta)\omega_\mu \\ - \partial_\mu P(\theta)\Lambda_\mu - P_\mu(\theta)\partial_\mu\Lambda_\mu = 0. \end{aligned}$$

Ahora, podemos buscar que $\partial_\mu P(\theta)$ esté adaptada a la base $P_\mu(\theta)$:

$$\partial_\mu P(\theta) = P_\mu(\theta)Q_\mu(\theta).$$

Substituyendo en la ecuación paramétrica (3.5.2), desarrollando derivadas y agrupando términos conocidos, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\zeta_F(\theta) = Q'_\mu \omega_\mu + \partial_\mu \Lambda_\mu + Q_\mu \Lambda_\mu - \Lambda_\mu Q_\mu,$$

con

$$\zeta_F(\theta) := P_\mu^{-1}(\theta) \left(\partial_\mu \omega_\mu P'_\mu(\theta) - D_\mu D X_\mu(x_\mu(\theta)) P_\mu(\theta) - D^2 X_\mu(x_\mu(\theta)) [\partial_\mu x_\mu(\theta)] P_\mu(\theta) \right)$$

Notemos como la ecuación obtenida es idéntica a (3.2.2), solo que cambia el término independiente. Sin embargo, todos los cálculos involucrados son cantidades calculables conocida la expresión analítica de X_μ . Por último, su resolución mediante modos de Fourier es la misma que la vista en las secciones 3.2.2, 3.2.4, 3.2.3 y 3.2.5.

Con estos cálculos, podemos aproximar a primer orden de las predicciones, obteniendo una etapa de continuación mucho más eficiente. Además, la implementación es directa siguiendo la teoría ya expuesta.

Con esto cerramos la base práctica del trabajo. Se ha presentado un algoritmo de Newton consistente, aplicando la teoría de Floquet al cálculo de órbitas periódicas. También se han dado algoritmos para calcular condiciones iniciales, se han explicado sus posibles limitaciones y se ha dado un algoritmo para refinar la continuación a primer orden de las variables.

En las siguientes secciones, daremos ejemplos de aplicaciones descrito a orbitas sencillas.

Capítulo 4

Implementación del método de Newton-Floquet

4.1. Resumen del algoritmo

Para asentar conceptos, daremos un diagrama de flujo del algoritmo en pseudocódigo para facilitar la comprensión general del problema. Para calcular las condiciones iniciales, necesitamos, para un valor de los siguientes parámetros:

1. Una aproximación de la frecuencia ω_0 .
2. Una aproximación de la parametrización de la órbita $x_0(\theta)$ para la ecuación $E_I(\theta) = 0$.
3. Una aproximación de la solución fundamental $\phi(\theta)$ del problema:

$$\phi'(\theta) = TD X(x(\theta))\phi(\theta), \quad \phi(0) = I \quad T = \frac{1}{\omega}.$$

4. Una aproximación Λ_0 de $\phi(1)$, la matriz de monodromía.
5. Una aproximación del cambio de variable de Floquet

$$P_0(\theta) = \phi(\theta)e^{-\Lambda_0\theta}.$$

Supongamos que tenemos una aproximación inicial de todas las variables descritas anteriormente. Con ello, podemos calcular aproximaciones $(x_0(\theta), \omega_0, P_0(\theta), \Lambda_0)$ de la solución de las ecuaciones de invariancia (2.3.1). Entonces, el diagrama de flujo del algoritmo sería el siguiente:

Listing 4.1: Algoritmo de Newton-Floquet

```
1 /*
2   Input:
3   1. x0(theta), malla inicial cercana.
4   2. w0, valor inicial de la frecuencia
5   3. P0 = Phi(theta) * exp(-M0*theta)
6   4. Lambda0 = w0 * log(Phi(T))
7 */
```

```

8  /* Comenzamos el esquema iterativo */
9  while (no_convergencia) {
10     Calcular_EI_EF();
11     /* Normas de error en las ecuaciones del sistema */
12     if (EI < tolEI && EF < toLEF) break;
13     /* 3.1 Refinamos la órbita y frecuencia */
14     Corregir_x_w();
15     Calcular_EI_EF();
16     if (EI < tolEI && EF < toLEF) break;
17     /* 3.2 Corregimos P y M */
18     Corregir_P_M();
19     Calcular_EI_EF();
20 }
21 /*
22  Output:
23  (x1,w1,P1,Lambda1) solución de EI=0, EF=0.
24 */
25 /* Si ha habido convergencia, aumentamos parámetros */
26 mu_new = mu_old + delta_mu;

```

Listing 4.1: Algoritmo de Newton-Floquet

4.2. Implementación de la FFT

Dedicaremos esta sección a explicar qué es la Transformada Discreta de Fourier (DFT), la Transformada Rápida de Fourier (FFT), el papel que juega en el algoritmo numérico implementado, sus principales ventajas y limitaciones y finalmente su integración natural en el método de Newton.

4.2.1. La DFT: Notación, espacio físico y espectral

Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica de periodo 1, donde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ denota el toro unidimensional. En el contexto numérico, f estará discretizada en una malla de N puntos equiespaciados en el intervalo $[0, 1)$,

$$\theta_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

dando lugar a una representación de la función en lo que llamaremos el *espacio físico*:

$$f_j = f(\theta_j), \quad j = 0, \dots, N-1.$$

La Transformada Discreta de Fourier (DFT) asocia a la secuencia $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ una secuencia de coeficientes complejos $\{\hat{f}_k\}_{k=0}^{N-1}$, definidos por

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i k j / N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Estos coeficientes constituyen la representación de la función en el *espacio de Fourier* o *espacio espectral*, donde cada índice k corresponde a un único modo armónico discreto.

La transformada inversa (IDFT) permite recuperar la función en el *espacio físico* a partir de sus coeficientes espectrales:

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k j / N} \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Si tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, estas expresiones discretas convergen a las expansiones clásicas en series de Fourier de f siempre que está sea suficientemente regular (que f se L^2 , suave o analítica, por ejemplo).

El cálculo directo de la DFT expuesto anteriormente tiene un coste computacional $O(N^2)$, lo que resulta poco eficiente para valores grandes de N .

Las diferentes versiones de la FFT permiten calcular la DFT de forma eficiente, reduciendo el coste a $O(N \log N)$.

De entre todas las versiones de la FFT, optaremos por una versión de Cooley-Tukey (ver Anexo B.1.), la cual tiene por requisito que el número de nodos N sea potencia de dos. Esta mejora en el algoritmo es fundamental y posiblemente se trate de uno de los mejores algoritmos de los que dispone el campo de la matemática aplicada moderna.

4.2.2. Ventajas e inconvenientes del uso de FFT

El uso de FFT presenta varias ventajas relevantes en el contexto de este trabajo:

- Permite tratar de forma natural funciones periódicas suaves.
- El cálculo de derivadas se facilita mucho en el espacio de Fourier. En efecto, si \hat{f}_k son los coeficientes de Fourier de f , entonces los coeficientes de su derivada vienen dados por

$$\widehat{f}'_k = 2\pi i k \hat{f}_k.$$

Esto reduce significativamente el coste computacional y aumenta la precisión numérica frente a métodos basados en diferencias finitas.

No obstante, también presenta algunas limitaciones:

- Requiere que las funciones sean suficientemente regulares para garantizar convergencia.
- En nuestro caso, impone restricciones sobre el número de nodos N , que debe ser potencia de dos para poder aplicar la FFT de Cooley-Tukey.
- Introduce de forma natural aritmética compleja, incluso cuando el sistema dinámico original es real.

4.2.3. Integración de la FFT en el algoritmo de Newton

En el algoritmo implementado, la FFT se utiliza para manipular funciones periódicas dependientes de la fase θ , como la solución periódica $x(\theta)$, el cambio de variable de Floquet $P(\theta)$ y los errores $E_I(\theta)$, $E_F(\theta)$ asociados a las ecuaciones de invariancia y de Floquet.

La estrategia que seguiremos para tratar con estas funciones será la siguiente:

1. Las funciones periódicas se discretizan en N nodos equiespaciados del intervalo $[0, 1]$, con N potencia de 2.
2. Se aplica la FFT para transformar dichas funciones al espacio de Fourier.
3. Las derivadas respecto a θ se calculan multiplicando cada coeficiente de Fourier por el factor correspondiente, evitando aproximaciones numéricas por diferencias finitas. Esto reduce el error en las derivadas a prácticamente cero.
4. Las ecuaciones lineales que aparecen en cada iteración del método de Newton se resuelven modo a modo en el espacio espectral, siguiendo las fórmulas vistas en 3.1 y 3.2.
5. Finalmente, se aplica la transformada inversa (IFFT) para recuperar las correcciones ξ, Q en el espacio físico.

Este enfoque permite integrar de manera natural la FFT dentro del esquema iterativo de Newton, mejorando tanto la precisión como la eficiencia del algoritmo. Añadimos en el anexo B1 todas las rutinas relacionadas con la FFT que se han usado en la parte práctica del trabajo.

Aunque el sistema dinámico considerado es real, el uso de Fourier introduce coeficientes complejos de forma inevitable. Por ejemplo, las perturbaciones ξ, Q con las que se trabaja en el algoritmo son complejas por construcción.

En la implementación, se trabaja con estas cantidades complejas en el espacio de Fourier y, al aplicar la IFFT y volver al espacio físico, se proyectan sobre \mathbb{R} .

Dicho esto, pasemos a detallar cómo se adapta el algoritmo visto en el capítulo anterior a sistemas periódicos del plano.

4.3. Newton-Floquet para el caso 2D

Veamos ahora algunas peculiaridades del método que hemos descrito para el caso 2D y sus ventajas:

- La matriz Λ , una vez conjugada, tiene una estructura de la forma $\Lambda = \text{diag}(0, \Lambda_0)$, con $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (excluimos el caso con dos exponentes de Floquet nulos). Es decir, la matriz Λ solo tiene dos valores propios, uno nulo asociado a la dirección tangente de la órbita y otro distinto de 0 que describe la dinámica del ciclo límite: si $\Lambda_0 > 0$, se trata de un ciclo límite repulsor, y si $\Lambda_0 < 0$, de uno atractor.
- Dado que Λ_0 es un escalar en el método de Newton, las ecuaciones para ξ, Q son especialmente sencillas, ya que sus modos de Fourier normales se calculan de forma directa. Para ξ :

1. Cálculo de $\xi^L(\theta)$:

$$\delta\omega = \hat{\eta}_0^L, \quad \hat{\xi}_k^L = \frac{\hat{\eta}_k^L}{2\pi i k \omega}, \quad k \neq 0.$$

$\hat{\xi}_0^L$ se obtiene fijando la fase como en la sección 3.1.3 o bien tomándolo directamente como $\hat{\xi}_0^L = 0$

2. Cálculo de $\xi^N(\theta)$:

$$\hat{\xi}_k^N = \frac{\hat{\eta}_k^N}{(2\pi ik\omega - \Lambda_0)}$$

Luego, para Q :

1. Cálculo de Q^{LL} :

$$\hat{Q}_0^{LL} = 0, \quad \hat{Q}_k^{LL} = \frac{\hat{\eta}_k^{LL}}{2\pi ik}, \quad k \neq 0.$$

2. Cálculo de Q^{LN}

$$\hat{Q}_k^{LN} = \frac{\hat{\eta}_k^{LN}}{(2\pi ik + \Lambda_0)}.$$

3. Cálculo de Q^{NL}

$$\hat{Q}_k^{NL} = \frac{\hat{\eta}_k^{NL}}{(2\pi ik - \Lambda_0)}.$$

4. Cálculo de Q^{NN} :

$$Q_0^{NN} = 0, \quad \Delta\Lambda_0 = \hat{\eta}_0^{NN}, \quad 2\pi ik\hat{Q}_k^{NN} = \hat{\eta}_k^{NN}.$$

Al ser Λ_0 un escalar, las ecuaciones se simplifican notablemente, ya que no es necesario invertir ninguna matriz y el operador $[X, \Lambda_0] \equiv 0$. Por tanto, el caso 2D se simplifica tanto a nivel computacional como teórico.

Veamos un ejemplo sencillo en el plano que ejemplifique cómo funciona el algoritmo.

4.3.1. Oscilador de Van der Pol

Comencemos estudiando un sistema no lineal de segundo orden conocido como el oscilador de Van der Pol, descrito por la ecuación diferencial:

$$\ddot{x}(t) = \mu(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) - x(t),$$

en el que la variable espacial x depende del tiempo t y μ es un parámetro escalar. El sistema puede reducirse fácilmente a uno de primer orden añadiendo la ecuación $\dot{x} = y$. En este caso, deducimos:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \dot{x} = y \\ f_2(x, y) = \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases}$$

Como único punto fijo tenemos $(x, y) = (0, 0)$ y el diferencial del campo en este punto cumple:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son $\lambda_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ y, en consecuencia:

- Si $\mu = 0$, el origen se trata de un centro no hiperbólico (de hecho, es un caso particular del oscilador armónico).

- Si $0 < \mu < 2$ o $\mu > 2$, se trata de un nodo repulsor.
- Si $\mu = 2$, se trata de un nodo degenerado.

En este ejemplo, no veremos un caso natural de la bifurcación de Hopf, ya que aquí el estudio del origen no cumple sus hipótesis.

Como ya hemos comentado, para $\mu = 0$ todas las órbitas son periódicas al tratarse de un caso del oscilador armónico. Luego, para $\mu > 0$, todas las órbitas periódicas colapsan y aparece un único ciclo límite estable cerca de la circunferencia de radio 2. Trataremos de determinar ese ciclo límite con nuestro algoritmo.

Este ejemplo también nos servirá para ilustrar cómo proceder en el estudio de campos en el plano. Seguiremos el procedimiento descrito en la sección 3.4 para obtener las condiciones iniciales y tomaremos valores de $\mu > 0$ con μ pequeño, cercano a 0.

Cálculo de T_0

Siguiendo el procedimiento descrito en 3.4, procedemos como sigue:

1. Definimos la ecuación del flujo:

$$\Phi(t; (x_0, y_0)) = (x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))),$$

que representa la solución de la EDO fijada una condición inicial (x_0, y_0) .

2. Definimos una sección de Poincaré horizontal:

$$\Sigma = \{(x, y) : y = 0, x > 0\}.$$

En nuestro caso, tomamos como función para definir la sección $g(x, y) = y$, ya que en $y = 0$ el campo es vertical y nos simplificará su estudio. Buscamos hallar un tiempo de retorno $\tau > 0$ tal que:

$$g(\Phi(\tau; (x_0, 0))) = 0.$$

3. Tomamos una condición inicial en la sección de Poincaré de la forma $(x_0, 0)$ (en este ejemplo, $x_0 = 2$ es un buen valor inicial).
4. Definimos la aplicación de Poincaré asociada

$$P(x_0) : x_0 \rightarrow \Phi(\tau(x_0), (x_0, 0)).$$

5. Integramos numéricamente el campo con RK78 hasta encontrar dos tiempos consecutivos t_n, t_{n+1} tales que la ecuación de flujo corte la sección de Poincaré en dirección de $y > 0$ a $y < 0$. En nuestro caso, sobre Σ el campo es vertical:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Por tanto, la sección se cruza verticalmente de $y > 0$ a $y < 0$, así que buscamos la primera pareja de tiempos consecutivos t_n, t_{n+1} que cumpla:

$$g(\Phi(t_n; (x_0, 0))) > 0 \quad \text{y} \quad g(\Phi(t_{n+1}; (x_0, 0))) < 0.$$

El tiempo de retorno τ se encontrará contenido en $[t_n, t_{n+1}]$.

6. Para refinar el tiempo de retorno, el método de Newton adaptado a esta sección queda:

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{g(\Phi(\tau_n; (x_0, 0)))}{f_2(\Phi(\tau_n; (x_0, 0)))}.$$

Como tiempo inicial, se puede tomar cualquier tiempo $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Una vez obtenido el tiempo de retorno $\tau = T_0$.

Cálculo de x_0

Una vez calculado el tiempo de retorno τ de la órbita, queremos calcular la solución de $P(\tau(x_0), x_0) - x_0 = 0$. Por tanto, buscamos un punto fijo de la aplicación de Poincaré, que nos dará de forma natural un punto del ciclo límite que buscamos. Al igual que con el periodo, planteemos el esquema iterativo de Newton (omitiendo dependencia en μ):

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{P(\bar{x}_n) - \bar{x}}{P'(\bar{x}_n) - 1}.$$

Para el cálculo, necesitamos el valor de x_0 que cumpla $g(\Phi(\tau; (x_0, 0))) = y(\tau(x_0); (x_0, 0)) = 0$. Ahora bien, para calcular $P'(x_0)$, requerimos el cálculo de la ecuación variacional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0) &= \frac{\partial x}{\partial t}(\tau(x_0); (x_0, 0)) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_0}(x_0) + \frac{\partial x}{\partial x_0}(\tau(x_0); (x_0, 0)). \\ P'(x_0) &= \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0) = f_1(P(x_0), 0) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_0}(x_0) + \frac{\partial x}{\partial x_0}(\tau(x_0); (x_0, 0)). \end{aligned}$$

Recordemos que la matriz fundamental $\phi(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ era la solución del sistema variacional:

$$\dot{\phi}(t) = DX(\Phi(t))\phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

La primera columna de ϕ es el vector $(\partial x / \partial x_0, \partial y / \partial x_0)^T$ que es exactamente el que nos interesa para calcular las derivadas respecto a condiciones iniciales. En el tiempo de retorno τ , denotamos:

$$\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$$

Notemos que al derivar la condición del tiempo de retorno $y(\tau(x_0), x_0, 0) = 0$,

$$\frac{\partial y}{\partial x_0}(\tau; x_0) + \frac{\partial y}{\partial t}(\tau; x_0) \frac{\partial \tau}{\partial x_0} = 0.$$

Como $\partial y / \partial x_0 = \phi_{21}(\tau)$ y $\frac{\partial y}{\partial t}(\tau; x_0) = f_2(P(x_0), 0)$ se obtiene (si $f_2(P(x_0), 0) \neq 0$):

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_0}(x_0) = -\frac{\phi_{21}(\tau)}{f_2(P(x_0), 0)}.$$

Finalmente:

$$\frac{\partial P}{\partial x_0} = f_1(P(x_0), 0) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x_0}(\tau; x_0) = -f_1(P(x_0), 0) \cdot \frac{\phi_{21}}{f_2(P(x_0), 0)} + \phi_{11}.$$

Concluyendo con:

$$P'(x_0) = \phi_{11}(\tau) - \frac{f_1(P(x_0), 0)}{f_2(P(x_0), 0)} \phi_{21}(\tau).$$

Al tratarse de un ciclo límite estable, el punto inicial x_0 para encontrar la solución de $P(x_0) - x_0 = 0$ se puede buscar iterando el mapa directamente. En caso de que fuese inestable, se puede integrar el mapa hacia atrás. Esto facilita mucho encontrar las condiciones iniciales.

Resultados Newton

Usando los programas de los anexos A1 y A2, podemos implementar un algoritmo de integración numérica que calcule algunas órbitas para ver el retrato de fase para distintos valores de μ . Para estos resultados, se ha utilizado precisión *double*.

Parámetros RK78 Los parámetros relevantes para el RK78 son:

1. Número de nodos N . Recordar que N debe ser potencia de 2 para poder aplicar la FFT.
2. Paso adaptativo inicial, mínimo y máximo: $h, hmin, hmax$.
3. Tolerancia del integrador: tol .

Es importante imponer que $hmax \leq \frac{1}{N}$ durante la continuación numérica, ya que si no es posible que el integrador salte alguno de los nodos de Fourier al hacer la discretización. A lo largo de toda la sección, usaremos los parámetros $N = 512$, $hmin = 10^{-10}$, $hmax = 10^{-3}$ y $tol = 10^{-12}$. Los resultados siguientes han sido obtenidos con integración numérica y nos servirán como una primera aproximación al problema:

Cuadro 4.1: Resultados con integración numérica (RK78)

μ	T	x_0	$ P(x_0) - x_0 $	$P'(x_0)$
0,1	6,287 111 153	2,000 103 979	$1,776\ 356\ 839 \times 10^{-15}$	$5,330\ 692\ 592 \times 10^{-1}$
0,25	6,307 688 112	2,000 643 749	$1,016\ 964\ 290 \times 10^{-13}$	$2,053\ 443\ 654 \times 10^{-1}$
0,5	6,380 675 590	2,002 487 930	$4,218\ 847\ 493 \times 10^{-14}$	$3,917\ 692\ 025 \times 10^{-2}$
0,75	6,500 366 440	2,005 277 295	$4,440\ 892\ 098 \times 10^{-16}$	$6,458\ 991\ 396 \times 10^{-3}$
1	6,663 285 751	2,008 619 860	$6,221\ 689\ 830 \times 10^{-13}$	$8,596\ 950\ 635 \times 10^{-4}$
2	7,629 873 929	2,019 891 384	$3,130\ 828\ 929 \times 10^{-13}$	$1,273\ 853\ 020 \times 10^{-8}$
5	11,612 224 703	2,021 508 061	$4,440\ 892\ 098 \times 10^{-15}$	$8,357\ 089\ 976 \times 10^{-14}$

Como podemos observar, el punto fijo de $P(x_0) = x_0$ es aproximadamente $x_0 \approx 2$ y el periodo T toma valores cercanos a 2π para μ cercano a 0. Esto coincide con la teoría, pues se puede demostrar, usando el método de Poincaré-Lindstedt (ver Drazin, 1992) que, para valores pequeños de μ :

$$T(\mu) = \frac{2\pi}{1 - \mu^2/16 + 17\mu^4/3072 + O(\mu^6)}.$$

En particular, si $\mu \approx 0$, se tiene que $T \approx 2\pi$. Además, se puede ver (consultar Zonneveld, J.A. (1966)) que la amplitud $A(\mu)$ del ciclo límite satisface:

$$A(\mu) = 2 + \frac{\alpha}{3}\mu^{-4/3} - \frac{16}{27}\mu^{-2} \ln \mu + O(\mu^{-2}), \quad \alpha \approx 2,338.$$

Por tanto, para $\mu > 0$, cabe esperar que $A \approx 2$, como se puede ver en la tabla.

Por último, la columna con los valores de $P'(x_0)$ coinciden con el valor propio no trivial de $\phi(T)$. Como se puede observar, para todos los valores de la tabla, el ciclo límite es estable. Sin embargo, cuando μ aumenta, se ve claramente que $\|P'(x_0)\| \rightarrow 0$, indicando una fuerte contracción transversal hacia el ciclo límite. Este comportamiento de $P'(x_0)$ refleja el régimen de relajación característico del oscilador de Van der Pol. Además, explicita que el problema está mal condicionado para valores de μ grandes, ya que las escalas de $P'(x_0)$ son muy distintas. Esto justificará en parte las limitaciones del algoritmo de continuación para este problema concreto.

Todo esto concuerda con lo esperado e indica que la integración numérica está bien implementada.

También adjuntamos imágenes de algunas de las órbitas que se han calculado al iterar RK78:

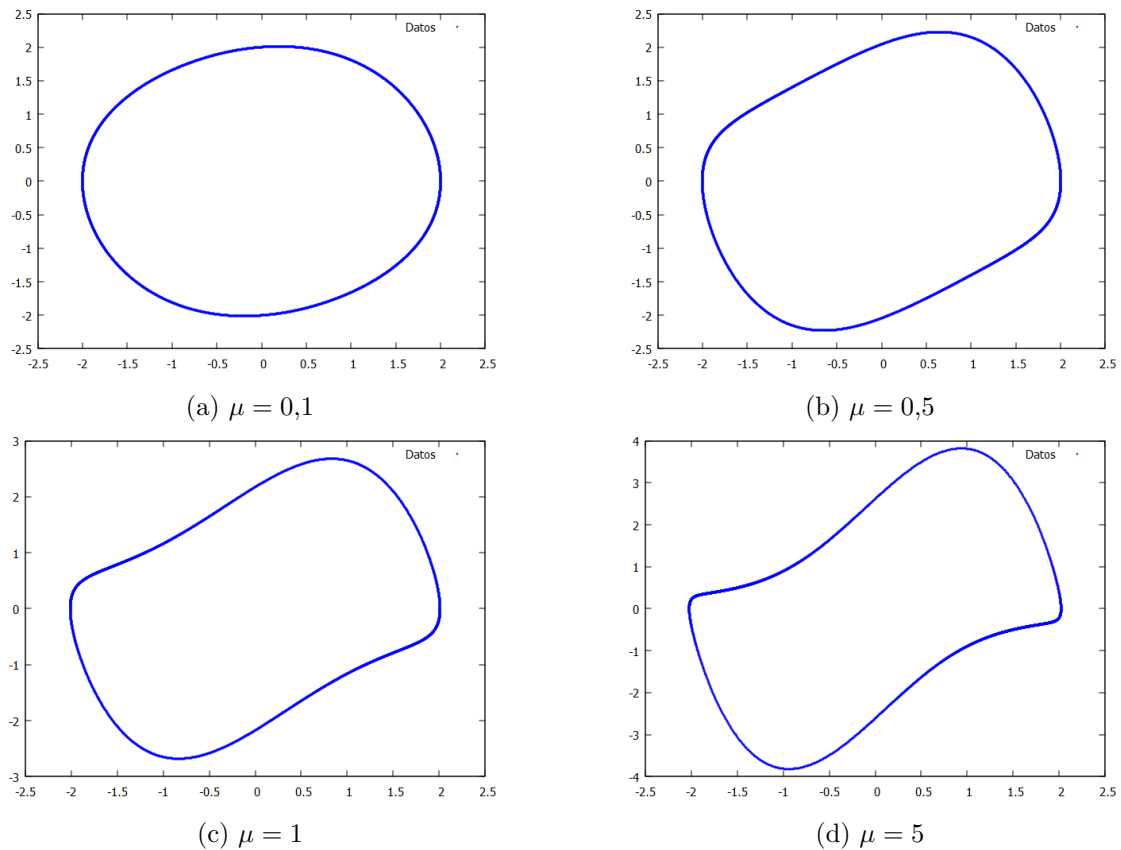


Figura 4.1: Ciclo límite del oscilador de Van der Pol para distintos valores de μ .

Ahora, mediante una implementación del algoritmo como la de los anexos B2 y B3, hemos obtenido los siguientes resultados de continuación con el método de Floquet:

Convergencia de Newton Veamos primero que el algoritmo converge hacia la solución para un μ fijado. Por pantalla, el programa adjunto imprime muchos resultados relevantes, pero nosotros nos centraremos en el error E_I y E_F .

Fijando $N = 512$, $\mu = 0,1$ y los mismos parámetros para el RK78, obtenemos la siguiente tabla de resultados. Usamos como forma de calcular el error E_I el promedio de la norma $\|E_I(\theta)\|_2$ y para E_F usamos el promedio de la norma de Frobenius $\|E_F(\theta)\|_F$:

$$Error E_I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|E_I(\theta_i)\|_2, \quad Error E_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|E_F(\theta_i)\|_F.$$

Como criterio de parada, pedimos que el error en E_I y en E_F sea menor que 10^{-7} . Esta tolerancia va asociada a la precisión del integrador.

Cuadro 4.2: Tablas de errores de continuación con orbita inicial cercana

Etapa 1	E_I	E_F	$\delta\omega$	$\Delta\Lambda_0$
Inicial	$2,539\,99 \times 10^{-7}$	$8,558\,41 \times 10^{-8}$	-	-
Corregir x, ω	$6,225\,96 \times 10^{-8}$	$3,364\,60 \times 10^{-7}$	$3,164\,57 \times 10^{-9}$	-
Corregir P, Λ_0	$6,225\,96 \times 10^{-8}$	$1,713\,53 \times 10^{-8}$	-	$2,992\,42 \times 10^{-9}$
Etapa 2	E_I	E_F	$\delta\omega$	$\Delta\Lambda_0$
Inicial	$6,225\,96 \times 10^{-8}$	$1,713\,53 \times 10^{-8}$	-	-
Corregir x, ω	$6,293\,72 \times 10^{-8}$	$1,713\,60 \times 10^{-8}$	$6,734\,89 \times 10^{-17}$	-
Corregir P, Λ_0	$6,293\,72 \times 10^{-8}$	$1,736\,17 \times 10^{-8}$	-	$1,595\,55 \times 10^{-14}$

Se puede observar cómo las aproximaciones iniciales ya son bastante cercanas a la tolerancia exigida para este ejemplo. En la etapa 1, se observa refinamiento en el error E_I al corregir la órbita y $\delta\omega$ tiene un orden de magnitud similar. Del mismo modo, aunque E_F crece al corregir la órbita, al corregir P y Λ vuelve a bajar. El orden de $\Delta\Lambda$ también es consistente. Luego en la etapa 2 los errores E_I, E_F se estabilizan y los incrementos $\delta\omega, \Delta\Lambda$ son cero utilizando precisión *double*, confirmando que el Newton ha convergido.

Para comprobar que el algoritmo converge hacia la solución incluso con condiciones iniciales menos exactas, probemos a perturbar las variables y veamos si el algoritmo corrige la órbita. Partiendo de los datos de la órbita anterior, sumamos una perturbación de 10^{-3} a $x(\theta)$ y $P(\theta)$ en cada punto de la malla y también en ω, Λ_0 . Entonces, obtenemos lo siguiente:

Cuadro 4.3: Tabla de errores de continuación con ruido numérico

Etapa 1	E_I	E_F	$\delta\omega$	$\Delta\Lambda_0$
Inicial	$1,262\,32 \times 10^{-2}$	$8,048\,90 \times 10^{-2}$	-	-
Corregir x, ω	$9,479\,97 \times 10^{-6}$	$2,127\,95 \times 10^{-3}$	$9,999\,01 \times 10^{-4}$	-
Corregir P, Λ_0	$9,479\,97 \times 10^{-6}$	$9,773\,90 \times 10^{-4}$	-	$2,574\,67 \times 10^{-7}$
Etapa 2	E_I	E_F	$\delta\omega$	$\Delta\Lambda_0$
Inicial	$9,479\,97 \times 10^{-6}$	$9,773\,90 \times 10^{-4}$	-	-
Corregir x, ω	$6,290\,67 \times 10^{-8}$	$9,780\,72 \times 10^{-4}$	$1,014\,09 \times 10^{-7}$	-
Corregir P, Λ_0	$6,290\,67 \times 10^{-8}$	$9,198\,66 \times 10^{-8}$	-	$1,000\,26 \times 10^{-3}$

Aquí podemos observar cómo las correcciones son mucho más pronunciadas en cada iteración. Los errores iniciales son grandes, del orden de la perturbación. Al iterar, ya en la primera etapa, vemos como disminuyen ambos errores en un orden de magnitud de 10^{-4} o más, que coincide con el orden cuadrático esperado de corrección del esquema de Newton. También vemos como la corrección en $\delta\omega$ es del orden de la perturbación, mientras que $\Delta\Lambda$ es más pequeña. En la segunda etapa, los errores se estabilizan y vemos como la corrección en $\Delta\Lambda$ ahora es del orden de la perturbación mientras que $\delta\omega$ pasa a ser del orden del error. Todo esto nos indica que el Newton corrige de manera adecuada una órbita cercana al ciclo límite.

Resultados Continuación

Por último, veamos cómo funciona el algoritmo en un esquema sencillo de continuación numérica, tratando de evitar integrar el campo.

Mantendremos los mismos parámetros del RK78, integraremos el campo una única vez para obtener la semilla de la continuación, tomaremos como valor inicial de μ 0.1 y un paso de continuación de $\delta\mu = 10^{-2}$ constante. Estos son los resultados obtenidos para distintos parámetros de continuación μ .

Cuadro 4.4: Resultados continuación numérica

μ	T	x_0	$P'(x_0)$
0,1	6,287 111 272	2,000 103 979	$5,330 692 592 \times 10^{-1}$
0,25	6,307 688 315	2,000 617 928	$2,053 443 654 \times 10^{-1}$
0,5	6,380 675 801	2,002 477 760	$3,917 692 026 \times 10^{-2}$
0,75	6,500 367 702	2,005 276 787	$6,458 991 365 \times 10^{-3}$

Los parámetros T y $P'(x_0)$ representan respectivamente el periodo y el exponente de Floquet no nulo obtenido mediante continuación numérica. Por otro lado, hace falta hacer una aclaración sobre cómo hemos tomado x_0 . Al no trabajar con una sección de Poincaré durante la continuación, la condición de normalización (2.1.1) no garantiza que haya un punto de la malla que pase por Σ . Por ello, x_0 ha sido tomado como el punto más cercano a la sección, es decir, el punto (x_0, y_0) de la malla que satisface:

$$x_0 > 0, \quad y_0 = \min_{i \in \mathbb{N}} |y_i|$$

Dicho esto, podemos observar algunos detalles relevantes sobre los resultados. Si identificamos con $T_R, P'(x_0)_R$ los parámetros obtenidos con RK y con $T_F, P'(x_0)_F$ los obtenidos con el algoritmo de Floquet, vemos que:

$$|T_R - T_F| \leq 10^{-7}, \quad |P'(x_0)_R - P'(x_0)_F| \leq 10^{-10}$$

Esto nos indica que el Newton aproxima de forma muy similar los valores de Λ al caso del RK78, pero lo hace peor, aunque satisfactoriamente, con el periodo T .

Por otro lado, las diferencias entre los valores de x_0 parecen ser mayores, del orden de 10^{-5} . Como ya hemos comentado, debemos destacar que x_0 depende fuertemente de la

condición de normalización y de la parametrización temporal, por lo que pequeñas desviaciones acumuladas en la continuación pueden producir de manera natural diferencias apreciables entre estos resultados y los del RK78, ya que la condición (2.1.1) no garantiza que la malla de puntos esté sobre la sección Σ . Si se quiere solucionar, se puede ajustar el valor de $\hat{\xi}_0^L$ para hacer coincidir la malla con Σ , aunque no sea necesario para el algoritmo.

Esto, sin embargo, no afecta a la validez global de la órbita. Para corroborarlo, podemos usar que, a pesar de la diferencia entre los valores de x_0 , las matrices $P(\theta)$, $x(\theta)$ se mantienen periódicas y, además, el error $E_I(\theta)$ sigue cumpliendo la tolerancia impuesta a lo largo de la continuación.

El algoritmo avanza de manera natural hasta $\mu = 0,99$ donde colapsa por no satisfacer las tolerancias de los errores E_I, E_F . La causa del colapso en la continuación parece clara observando los resultados de la última etapa. Para $\mu = 0,99$, los errores iniciales en cada etapa del método de Newton son:

Cuadro 4.5: Tabla errores continuación para $\mu = 0,99$

Etapa	E_I	E_F	Etapa	E_I	E_F
1	$1,218\ 27 \times 10^{-2}$	$2,641\ 84 \times 10^{-1}$	4	$6,619\ 51 \times 10^{-8}$	$5,366\ 76 \times 10^{-7}$
2	$1,289\ 51 \times 10^{-4}$	$2,858\ 19 \times 10^{-3}$	5	$4,852\ 34 \times 10^{-8}$	$1,293\ 89 \times 10^{-7}$
3	$1,850\ 46 \times 10^{-6}$	$1,731\ 65 \times 10^{-5}$	10	$9,264\ 23 \times 10^{-8}$	$2,0727 \times 10^{-7}$

Dado que los errores iniciales son tan altos, aunque el algoritmo refine la órbita en las etapas 1-5, la aproximación inicial se encuentra lejos de la cuenca de atracción de la solución de las ecuaciones de invariancia. Por ello, el error global crece ligeramente hasta estabilizarse entorno al orden de 10^{-7} .

Para comprobar como definitivamente el algoritmo ha convergido, podemos estudiar el comportamiento de los coeficientes de Fourier. La siguiente tabla muestra las medias de los valores absolutos de los coeficientes de ξ, Q a lo largo de la malla en cada etapa del algoritmo:

Cuadro 4.6: Tabla con medias coeficientes ξ, Q

Etapa	ξ^L	ξ^N	Q_{11}	Q_{12}	Q_{21}	Q_{22}
1	$2,746 \times 10^{-4}$	$2,658 \times 10^{-3}$	$6,704 \times 10^{-3}$	$1,473 \times 10^{-3}$	$5,207 \times 10^{-2}$	$4,437 \times 10^{-3}$
2	$1,806 \times 10^{-6}$	$1,164 \times 10^{-5}$	$6,313 \times 10^{-5}$	$1,288 \times 10^{-5}$	$5,577 \times 10^{-4}$	$5,477 \times 10^{-5}$
3	$2,814 \times 10^{-10}$	$2,802 \times 10^{-9}$	$5,365 \times 10^{-7}$	$1,708 \times 10^{-7}$	$9,067 \times 10^{-6}$	$5,422 \times 10^{-7}$
4	$1,457 \times 10^{-12}$	$1,045 \times 10^{-11}$	$1,648 \times 10^{-8}$	$5,275 \times 10^{-9}$	$2,781 \times 10^{-7}$	$1,696 \times 10^{-8}$
5	$1,635 \times 10^{-12}$	$1,182 \times 10^{-11}$	$5,021 \times 10^{-10}$	$1,607 \times 10^{-10}$	$8,471 \times 10^{-9}$	$5,167 \times 10^{-10}$
10	$2,096 \times 10^{-12}$	$1,540 \times 10^{-11}$	$2,125 \times 10^{-12}$	$5,835 \times 10^{-13}$	$2,024 \times 10^{-11}$	$2,433 \times 10^{-12}$

Como cabe esperar, los coeficientes de ξ, Q comienzan con medias relativamente grandes, cercanas al orden del error. Durante las primeras iteraciones, decrecen hasta estabilizarse entorno a magnitudes del orden de 10^{-11} , menores a la tolerancia de error de la

continuación. A partir de las siguientes iteraciones, los coeficientes se quedan estancados, confirmando que el método ha convergido.

Siguiendo exactamente el mismo esquema de continuación pero para $\mu < 0$, comenzando en $\mu = -0,1$ y con el mismo paso de continuación pero en negativo, se obtienen resultados similares a los ya expuestos. Por último, mostramos las órbitas de ambas continuaciones:

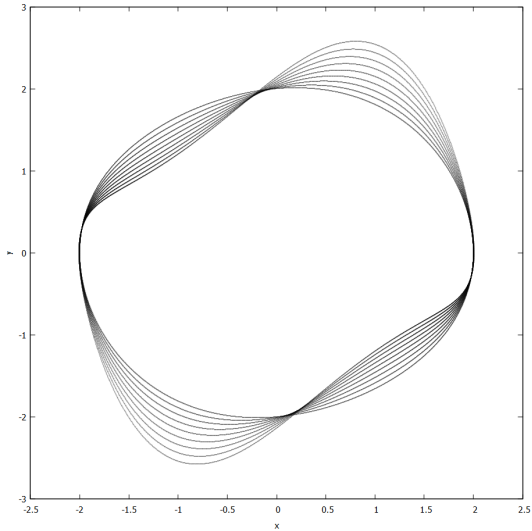


Figura 4.2: Órbita obtenida para $\mu > 0$.

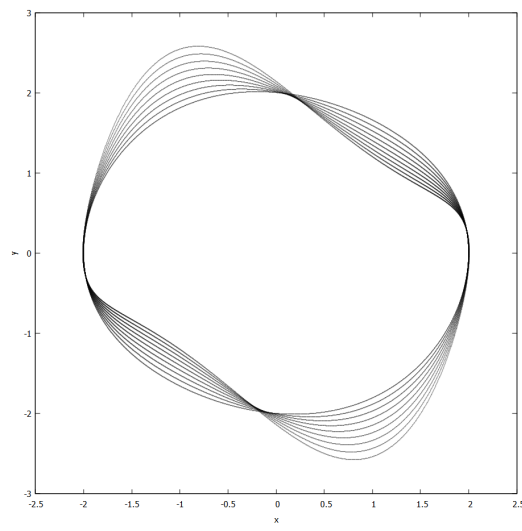


Figura 4.3: Órbita obtenida para $\mu < 0$.

Mejoras en la implementación: Obviamente, el método descrito en esta sección no es el más eficiente, ni siquiera con los métodos descritos en este trabajo. Entre las diversas formas de mejorar la continuación numérica, destacamos:

1. Aumentar los nodos N de la discretización. Este cambio mejora la estabilidad numérica del método de Fourier, haciendo que la representación espectral sea más suave y facilitando la continuación numérica.
2. Implementar la continuación a primer orden vista en la sección (3.5). Con ello, las aproximaciones de $(x(\theta), \omega, P(\theta), \Lambda)$ a primer orden reducirán el incremento en los errores E_I, E_F provocado por $\delta\mu$.

4.3.2. Tiempos de ejecución: RK78 vs Newton

Para acabar la sección de resultados, queremos dedicar un apartado a mostrar la diferencia en el coste computacional del método de Newton-Floquet en contraposición al integrador RK78, así como sus pros y sus contras a la hora de implementarlos en algoritmos de continuación numérica.

Primero, debemos hacer explícito el criterio con el que compararemos los tiempos de ejecución, ya que la información con la que cuenta cada algoritmo no es simétrica. Por un lado, el algoritmo RK78 debe encontrar el ciclo límite. Para ello, debemos integrar el campo varias veces para evitar la fase de valores transitorios. En cambio, el Newton-Floquet parte de una aproximación buena de base, así que no sería justo compararlos directamente.

Por ello, compararemos únicamente el tiempo de ejecución necesario para, dada una condición inicial cercana, refinarla hasta conseguir tener la solución de las ecuaciones de invariancia.

También es necesario notar que el único algoritmo que depende a nivel computacional de N es el Newton-Floquet, mientras que μ afecta al coste computacional de ambos sistemas. Por ello, fijaremos como valor de referencia $N = 512$ y tomaremos distintos valores de μ .

Para obtener los tiempos de ejecución de RK78, calcularemos el promedio de los tiempos en 100 iteraciones del algoritmo. Para el caso del Newton, iteraremos 100 veces la continuación numérica empezando desde $\mu = 0,1$ y calcularemos los tiempos promedio para cada valor de μ . Con esto aclarado, se obtiene la siguiente tabla de tiempos:

Cuadro 4.7: Tiempos de ejecución para distintos valores de μ

μ	Tiempo RK78 (s)	Tiempo Floquet (s)
0.1	$7,149\ 92 \times 10^{-2}$	$3,462\ 16 \times 10^{-3}$
0.2	$8,465\ 33 \times 10^{-2}$	$7,280\ 62 \times 10^{-3}$
0.3	$8,472\ 00 \times 10^{-2}$	$7,328\ 94 \times 10^{-3}$
0.4	$8,348\ 18 \times 10^{-2}$	$7,200\ 94 \times 10^{-3}$
0.5	$1,087\ 59 \times 10^{-1}$	$7,070\ 76 \times 10^{-3}$
0.6	$1,012\ 42 \times 10^{-1}$	$7,037\ 68 \times 10^{-3}$
0.7	$1,181\ 68 \times 10^{-1}$	$6,996\ 01 \times 10^{-3}$
0.8	$1,350\ 36 \times 10^{-1}$	$7,001\ 62 \times 10^{-3}$
0.9	$1,355\ 58 \times 10^{-1}$	$9,128\ 99 \times 10^{-3}$

La tabla anterior muestra los tiempos en refinar una solución mediante el método RK78 y el método de Newton-Floquet para distintos valores del parámetro μ , considerando $N = 512$ puntos a lo largo de la órbita.

Se observa que los tiempos asociados a RK78 se encuentran en el rango de 7×10^{-2} a $1,35 \times 10^{-1}$ s, mientras que los cálculos de Floquet son significativamente más rápidos, del orden de 10^{-3} s. Esto evidencia que la integración temporal del RK78 es considerablemente más costosa que la resolución por modos de Fourier de 3.

Además, los tiempos de RK78 muestran un incremento con μ a partir de $\mu = 0,5$, lo que puede atribuirse a cambios en la dinámica del campo de Van der Pol que requieren pasos más pequeños para mantener la tolerancia de integración. En contraste, los tiempos de Floquet se mantienen prácticamente constantes, indicando que el coste computacional del método es robusto al incrementar μ .

Veamos ahora cómo aumenta el coste computacional del algoritmo de Newton-Floquet al variar el valor de N .

Primero, facilitamos una tabla con los tiempos de ejecución promediados de 100 iteracio-

nes del algoritmo de continuación para distintos valores de μ . Estos tiempos representan el tiempo que se tarda en corregir la órbita para cada valor de μ :

Cuadro 4.8: Tiempos de ejecución (s) para distintos valores de N y μ

N	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$
128	$6,3447 \times 10^{-4}$	$1,50711 \times 10^{-3}$	$1,51616 \times 10^{-3}$	$1,48096 \times 10^{-3}$	$1,43704 \times 10^{-3}$
256	$1,73572 \times 10^{-3}$	$3,44997 \times 10^{-3}$	$3,33231 \times 10^{-3}$	$3,38472 \times 10^{-3}$	$3,41130 \times 10^{-3}$
512	$3,37688 \times 10^{-3}$	$7,24133 \times 10^{-3}$	$7,10062 \times 10^{-3}$	$7,30812 \times 10^{-3}$	$7,31525 \times 10^{-3}$
1024	$6,27596 \times 10^{-3}$	$1,46097 \times 10^{-2}$	$1,498691 \times 10^{-2}$	$1,472544 \times 10^{-2}$	$1,543586 \times 10^{-2}$
2048	$1,366305 \times 10^{-2}$	$4,224125 \times 10^{-2}$	$3,71528 \times 10^{-2}$	$3,696065 \times 10^{-2}$	$3,774355 \times 10^{-2}$
4096	$2,823145 \times 10^{-2}$	$8,70444 \times 10^{-2}$	$8,537855 \times 10^{-2}$	$8,35760 \times 10^{-2}$	$7,80506 \times 10^{-2}$

Como es bien sabido, el costo computacional de la FFT es $O(N \log N)$. Por tanto, esperamos que, si doblamos el número de nodos N y llamamos $T(N)$ al tiempo de cómputo fijado un valor de N , se cumpla la relación:

$$\frac{T(2N)}{T(N)} = \frac{2N \log(2N)}{N \log(N)} = 2 \frac{\log(2N)}{\log(N)}.$$

Como $N = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, esto equivale a que, para cada potencia de dos:

$$2 \frac{\log(2N)}{\log(N)} = 2 \cdot \frac{m+1}{m} \approx 2.$$

Comprobemos que los datos anteriores se ajustan a esta relación:

Cuadro 4.9: Cocientes incrementales de tiempos de cómputo y valores teóricos para FFT

N	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$
128 \rightarrow 256	2,735	2,290	2,197	2,285	2,375
256 \rightarrow 512	1,946	2,098	2,131	2,160	2,145
512 \rightarrow 1024	1,858	2,017	2,111	2,016	2,110
1024 \rightarrow 2048	2,176	2,890	2,478	2,511	2,445
2048 \rightarrow 4096	2,066	2,061	2,300	2,261	2,065
Teórico	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00

Se puede observar como claramente los costos computacionales en cada cambio de nodos, salvo algunos casos particulares, siguen una tendencia a tener un costo aproximadamente cercano a 2 al doblar el número de nodos, como cabría esperar.

A niveles prácticos, toda esta comparación confirma que, para estudios paramétricos de soluciones periódicas mediante Floquet, la integración de la órbita constituye el principal cuello de botella computacional, mientras que la evaluación de las ecuaciones de invariancia de Floquet se resuelven de forma muy eficiente gracias a la implementación de la FFT.

4.4. Conclusiones

En esta sección final, haremos una recopilación de las conclusiones que hemos obtenido a lo largo del proyecto y sus consecuencias teóricas y prácticas. El objetivo inicial de este escrito era reunir las ideas de los trabajos de Moore en un único proyecto autoconclusivo, que sirviese a modo de resumen y explorase el caso más sencillo del estudio de superficies invariantes: las órbitas periódicas.

En la primera parte del escrito, hemos establecido las bases teóricas con las que trabajaríamos, enunciando la teoría de Floquet junto a algunas nociones importantes de órbitas periódicas. Estos resultados son ampliamente conocidos en el ámbito de los sistemas dinámicos periódicos y constituyen una base sólida bajo la cual trabajar.

Con ello, en la sección práctica hemos desarrollado formalmente un algoritmo de continuación basado en Newton y la resolución de ecuaciones de invariancia, aplicable a sistemas con soluciones periódicas. Hemos visto cómo solucionarlo mediante el uso de modos de Fourier y sus posibles limitaciones técnicas.

Por último, hemos mostrado cómo implementarlo a nivel computacional, junto con un ejemplo sencillo 2D. Además, hemos observado que tanto el algoritmo de Newton como la continuación numérica funcionan, obteniendo resultados satisfactorios.

En conclusión, podemos afirmar que este trabajo sirve para consolidar las ideas vistas en los trabajos de Moore, demostrando que las ideas generales del estudio de superficies invariantes en más de una dimensión mediante el uso de la teoría de Floquet tienen una forma natural de aplicarse al caso de las órbitas periódicas.

Bibliografía

- [1] Alex Haro, Marc Canadell, Jordi-Lluís Figueras, Alejandro Luque, and Josep-Maria Mondelo. The parameterization method for invariant manifolds. *Applied Mathematical Sciences*, 195, 2016.
- [2] Gerald Moore. Floquet theory as a computational tool. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(6):2522–2568, 2005.
- [3] Dieter S. Schmidt. Hopf’s bifurcation theorem and the center theorem of liapunov with resonance cases. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 63:354–370, April 1978.