Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

De medidas positivas a medidas vectoriales

Autor: Gerard Domènech i Gironell

Director: Dra. María Jesús Carro Rossell
Realizado en: Departamento de Matemática Aplicada y Análisis

Barcelona, 26 de junio de 2016

Abstract

We present a theoretical study of signed measures, complex measures and vector measures. The study is focused on the Radon-Nikodym Theorem and the Riesz representation Theorem (its various versions). Complex Radon measures over locally compact Hausdorff spaces are extensively treated. Regarding vector measures, we aim to provide a vision deep enough on Bochner integration to prove that vector extensions of the latter theorems are not generally true and to discuss when they are.

Resumen

Presentamos un estudio teórico de las medidas con signo, las medidas complejas y las medidas vectoriales. El estudio se centra en el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz (sus varias versiones). Las medidas complejas de Radon en espacios Hausdorff y localmente compactos se tratan extensamente. Por lo que a las medidas vectoriales respecta, pretendemos dar una visión suficiente profunda de la integral de Bochner para demostrar que las extensiones vectoriales de los teoremas anteriores no son ciertas en general y para discutir cuando lo son.

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar las gracias a la Dra. María Jesús Carro; le agradezco que me propusiera este trabajo y el número considerable de horas que me ha dedicado durante este curso.

También agradezco la ayuda (emocional o matemática) que durante este período me han prestado mis padres, mi abuela, mi novia y mis amigos.

Índice general

Introducción

Este trabajo nace de un interés personal hacia la Teoría de la Medida y el Análisis; interés nutrido en gran parte por las asignaturas del grado de Análisis Real y Anális Real y Funcional. Esta última asignatura, además de servir de trampolín motivacional, también es la que provee de una base teórica.

Desde un principio, y a sugerencia de la Dra. María Jesús Carro, la intención fue iniciarse en el estudio de las medidas vectoriales. Evidentemente, antes hizo falta trabajar generalizaciones más débiles del concepto clásico de medida como son las medidas con signo y las medidas complejas. Este primer estudio, que ocupó la mitad del curso, supone, de hecho, la continuación natural de la parte de Teoría de la Medida vista en la asignatura de Análisis Real y Funcional. En este primer tramo estudiamos resultados fundamentales de las medidas con signo y las medidas complejas como el Teorema de Radon-Nikodym y las distintas versiones del Teorema de representación de Riesz, llegando, por ejemplo, a identificar las medidas complejas de Radon sobre un espacio X localmente compacto y Hausdorff con $C_0(X)^*$. A continuación empezamos a estudiar las medidas vectoriales, con especial atención a la integración de funciones vectoriales y, finalmente, a la veracidad o falsedad de las extensiones vectoriales del Teorema de Radon-Nikodym y del Teorema de representación de Riesz.

La estructura de la memoria respecta, en general, el orden de estudio que acabamos de comentar. Con lo que la memoria consta de dos capítulos: el primero dedicado a las medidas con signo y a las medidas complejas, y el segundo a las medidas vectoriales. Ambos con el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz como leitmotiv.

Cabe mencionar que en la presente memoria no se plasma todo el trabajo realizado durante el curso, puesto que, al optar por utilizar como hilo argumental unificador el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz, temas como la diferenciación de integrales o las funciones de variación acotada se han visto excluidas de la memoria.

Capítulo 1

Medidas con signo y medidas complejas

En este capítulo vamos a estudiar un par de generalizaciones del concepto clásico de medida. Concretamente estudiaremos, en este orden, las medidas con signo y las medidas complejas.

Se ha seguido [1] mayormente, salvo en el Teorema de Radon-Nikodym, donde se ha complementado con [8] y aportaciones propias, en el apartado de Medidas de Radon, donde se han tomado [3] y [5] como referencia, y en el del Teorema de representación de Riesz, donde se ha optado por [9]. En la breve explicación de la integración respecto de una medida compleja se ha seguido [4].

1.1. Medidas con signo

Definición 1. Sea (X, Σ) un espacio medible. Una medida con signo es una función de conjunto $\mu : \Sigma \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ (o bien $\mu : \Sigma \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y que es σ-aditiva, es decir, tal que

$$\mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n),$$

con convergencia en la recta real.

Definición 2. Sea μ una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Diremos que un conjunto $E \in \Sigma$ es positivo si para todo $F \subseteq E$ se cumple $\mu(F) \geq 0$. De forma análoga, $E \in \Sigma$ es negativo si para todo $F \subseteq E$ se cumple $\mu(F) \leq 0$ y es nulo si para todo $F \subseteq E$ se cumple $\mu(F) = 0$.

Para establecer el primer teorema importante necesitamos un par de lemas previos:

Lema 1. *Si $E, F \in \Sigma$, $F \subseteq E$ y $|\mu(E)| < +\infty$, tenemos que $|\mu(F)| < +\infty$.*

Lema 2. *La diferencia de dos conjuntos positivos es un conjunto positivo y la unión numerable de conjuntos positivos también lo es.*

Demostración. Sean E y F dos conjuntos positivos. Entonces $E \setminus F \subseteq E$ y ya estamos. Sea ahora $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos positivos y $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Sea $D \subseteq E$ medible cualquiera. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$D_n = D \cap E_n \cap (X \setminus E_{n-1}) \cap \ldots \cap (X \setminus E_1),$$

de esta forma tenemos que D_n es subconjunto de E_n, con lo cual $\mu(En) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y ya estamos, puesto que es evidente que $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} D_n$ y, por consiguiente, que $\mu(D) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n) \geq 0$.

$\square$

Teorema 1. *Sea μ una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Existe una partición de X (descomposición de Hahn de X para μ) formada por un cojunto positivo, A, y un cojunto negativo, B.*

Si $\{A, B\}$ y $\{A', B'\}$ son dos descomposiciones de Hahn de X para μ, entonces para todo $E \in \Sigma$ se cumple que $\mu(E \cap A) = \mu(E \cap A')$ y $\mu(E \cap B) = \mu(E \cap B')$.

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que $\mu : \Sigma \longrightarrow (-\infty, +\infty]$. Notamos que $0 \in \{\mu(E) : E \text{ conjunto negativo}\}$, o sea que tiene sentido considerar

$$\alpha = \text{ínf}\{\mu(E) : E \text{ conjunto negativo}\},$$

con lo cual existe una sucesión de conjuntos negativos, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Ahora bien, por el lema anterior $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es un conjunto negativo y es claro que $\mu(B) \leq \mu(E_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $\mu(B) = \alpha$ y $\alpha > -\infty$.

Si probamos que $A = X \setminus B$ es un conjunto positivo ya tendremos una descomposición como la del enunciado. Argumentaremos por contrarecíproco. Supongamos que A no es positivo, esto es, que existe $E \subseteq A$ tal que $\mu(E) < 0$. Pero E no es un conjunto negativo, ya que si lo fuese $B \cup E$ sería negativo y $\mu(B \cup E) < \alpha$; o sea que existe $E_1 \subseteq E$ tal que $\mu(E_1) > 0$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ el primer entero positivo para el que existe $E_1 \subseteq E$ con $\mu(E_1) \geq 1/n_1$. Además, como $E_1 \subseteq E$ y E es negativo ($|\mu(E)| < +\infty$), el primer lema previo nos garantiza que $\mu(E_1) < +\infty$. Consideramos ahora $E \setminus E_1$, de esta forma $\mu(E \setminus E_1) \leq \mu(E) - 1/n_1 < 0$ y, siguiendo el mismo argumento que antes, elegimos el menor $n_2 \in \mathbb{N}$ para el exista $E_2 \subseteq E \setminus E_1$ tal que $\mu(E_2) \geq 1/n_2$.

Obtenemos por recurrencia una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ con n_k el mínimo para el que se tiene que existe un $E_k \subseteq E \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j)$ con $\mu(E_k) \geq 1/n_k$. Además, utilizando otra vez el primer lema previo, $\mu(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty$, con lo que $\text{lím}_k \mu(E_k) = 0$ y, en consecuencia, $\text{lím}_k 1/n_k = 0$. Ahora bien, todo $M \subseteq E \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$ tiene que cumplir $\mu(M) \leq 0$ por la minimalidad de los n_k y que $\text{lím}_k n_k = 0$. En conclusión, F es un conjunto negativo y llegamos a contradicción observando que

$$\mu(B \cup F) = \alpha + \mu(F) = \alpha + \mu(E) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k) < \alpha.$$

Consideremos ahora dos descomposiciones de Hahn $\{A, B\}$ y $\{A', B'\}$. Probemos que, efectivamente, $\mu(E \cap A) = \mu(E \cap A')$ para todo $E \in \Sigma$ (la otra comprobación es análoga). Como $E \cap (A \setminus A') \subseteq E \cap A$, tenemos que $\mu(E \cap (A \setminus A')) \geq 0$. Pero del mismo modo, $E \cap (A \setminus A') \subseteq E \cap B'$ implica que $\mu(E \cap (A \setminus A')) \leq 0$. De este modo obtenemos que $\mu(E \cap (A \setminus A')) = 0$ y, de forma totalmente análoga $\mu(E \cap (A' \setminus A)) = 0$. Así pues,

$$\mu(E \cap A) = \mu(E \cap (A \cup A')) = \mu(E \cap A').$$

□

El anterior teorema nos permite definir los siguientes conceptos.

Definición 3. Sea μ una medida con signo sobre un espacio medible (X, Σ) y sea $\{A, B\}$ una descomposición de Hahn cualquiera. Entonces definimos la variación superior de μ y la variacíon inferior de μ como $\mu^+(E) = \mu(E \cap A)$ y $\mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$, respectivamente. La descomposición de μ como $\mu = \mu^+ - \mu^-$ se conoce como descomposición de Jordan de μ. La medida $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ se llama variación total de μ.

Con las definiciones que acabamos de ver es evidente que para todo $E \in \Sigma$ se tiene que $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$. También es sencillo obtener la siguiente propiedad:

Proposición 1. *Si μ es una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ) se cumple*

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(E_n)|; E = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n, E_n \in \Sigma\}.$$

Demostración. Si $E = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$, se cumple que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu|(E_n) = |\mu|(E_n).$$

Por otra parte, si $\{A, B\}$ es una descomposición de Hahn de X para μ,

$$|\mu|(E) = |\mu(E \cap A)| + |\mu(E \cap B)|.$$

Con lo que, de hecho, el supremo se alcanza y, por lo tanto, si μ es finita también lo es $|\mu|$.

□

1.1.1. Teorema de Radon-Nikodym

Durante esta sección vamos a considerar (X, Σ, λ) un espacio de medida y μ una medida con signo sobre (X, Σ).

Definición 4. La medida con signo μ es absolutamente continua respecto de λ si $\mu(E)$ siempre que $\lambda(E)$. Lo notaremos: $\mu \ll \lambda$.

Para abordar la demostración del Teorema de Radon-Nikodym es conveniente enunciar antes un par de lemas (el segundo se desprende trivialmente de las definiciones que acabamos de ver).

Lema 3. *Sean λ y μ son dos medidas finitas tales que $\mu \ll \lambda$ y $\mu \neq 0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ y $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) > 0$ y A es un conjunto positivo para la medida con signo $\mu - \epsilon\lambda$.*

Lema 4. *Tenemos $\mu \ll \lambda$ si, y sólo si, $|\mu| \ll \lambda$, lo cual ocurre si, y sólo si, $\mu^+ \ll \lambda$ y $\mu^- \ll \lambda$.*

Para hacerlo más llevadero vamos a descomponer el Teorema de Radon-Nikodym en cuatro resultados, cada uno un poco más general que el anterior.

Teorema 2 (de Radon-Nikodym)**.** *Sea (X, Σ, λ) un espacio de medida finita y μ una medida finita sobre (X, Σ) tal que $\mu \ll \lambda$. Entonces existe una función medible finita y positiva f tal que para todo $E \in \Sigma$,*

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda.$$

Además, si dos funciones medibles cumplen esto, son iguales a.e.(λ).

Demostración. Vamos a ver la existencia de dicha f. Suponemos en primer lugar que μ es positiva y que ambas medidas son σ-finitas sobre (X, Σ). Consideramos el conjunto

$$\phi = \{f \in L^1(\lambda); f \geq 0, \int_E f d\lambda \leq \mu(E) \text{ para todo } E \in \Sigma\}.$$

Notamos que la función idénticamente 0 está en ϕ y, por lo tanto, que tiene sentido considerar $s = \sup_{f \in \phi} \int_X f d\lambda$ y, en particular, $s \geq 0$ y $s < +\infty$ al ser μ finita. Si existe, la f que buscamos tiene que estar en ϕ y alcanzar este s que hemos definido.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $s = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda$. Definimos $g_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mediante $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$, con lo cual es claro que g_n es medible y no negativa. Sea $E \in \Sigma$; considerando

$$A_i = E \cap \left(\bigcap_{k=1, k \neq 1}^{n} (f_i - f_k)^{-1}([0, +\infty]) \right)$$

para $i = 1, \ldots, n$ y escribiendo $E_1 = A_1$, $E_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, E_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_n$ queda claro que, en E, podemos escribir: $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{E_i}$. Así pues, g_n es integrable y tenemos

$$\int_E g_n d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \int_E f_i \chi_{E_i} d\lambda \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu(E).$$

Con lo que deducimos que $g_n \in \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f_0 = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $f_0 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n$ y que aplicando el Teorema de la convergencia monótona obtenemos

$$\int_X f_0 d\lambda = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n d\lambda.$$

Así pues $\int_X f_0 d\lambda \leq s$. Pero también tenemos que $f_n \leq g_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, o sea que,

$$s = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n d\lambda = \int_X f_0 d\lambda,$$

y obtenemos la igualdad $s = \int_X f_0 d\lambda$. Además $f_0 \in \phi$, ya que, otra vez por el Teorema de la convergencia monótona, $\int_E f_0 d\lambda = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E g_n d\lambda \leq \mu(E)$. Como $f_0 \in L^1(\lambda)$ podemos escoger un representate de su clase de equivalencia con valores finitos; le llamaremos f.

Sea $\mu_0(E) = \mu(E) - \int_E f d\lambda$. Es claro que μ_0 es una medida finita y que $\mu_0 \ll \lambda$. La intención es ver que $\mu_0(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$; supongamos lo contrario. De este modo, existe $\epsilon > 0$ y $A \in \Sigma$ tal que $\mu_0(A) > 0$ y A es un conjunto positivo para la medida con signo $\mu_0 - \epsilon\lambda$. Sea ahora $E \in \Sigma$ cualquiera, tenemos que $\mu_0(E \cap A) - \epsilon\lambda(A) \geq 0$, o en otras palabras,

$$\epsilon\lambda(E \cap A) \leq \mu_0(E \cap A) = \mu(E \cap A) - \int_{E \cap A} f d\lambda.$$

Consideramos ahora $g = f + \epsilon\chi_A$, claramente integrable y positiva. Comprobamos que $g \in \phi$:

$$\int_E g d\lambda = \int_{E \setminus A} f d\lambda + \int_{E \cap A} f d\lambda + \epsilon\lambda(E \cap A),$$

y utilizando lo que teníamos

$$\int_E g d\lambda \leq \int_{E \setminus A} f d\lambda + \mu(E \cap A) \leq \mu(E \setminus A) + \mu(E \cap A) = \mu(E).$$

Con lo que $g \in \phi$. Pero por otra parte $\int_X g d\lambda = \int_X f d\lambda + \epsilon\mu(A) > \alpha$ y entramos en contradicción con la condición de supremo de α. Así pues, $\mu_0(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$, es decir, $\mu(E) = \int_E f d\lambda$ para todo $E \in \Sigma$.

Probemos ahora la unicidad de f. Sea g otra función que cumple $\mu(E) = \int_E g d\lambda$, entonces g es positiva a.e.(λ) e integrable, con lo cual $\int_E (f - g) d\lambda = 0$ para todo $E \in \Sigma$ y, por lo tanto, $f = g$ a.e.

$\square$

Ya tenemos la primera versión del teorema. Extendámoslo ahora a medidas σ-finitas.

Teorema 3 (de Radon-Nikodym)**.** *Sea (X, Σ, λ) un espacio de medida σ-finita y μ una medida σ-finita sobre (X, Σ) tal que $\mu \ll \lambda$. Entonces existe una función medible positiva f tal que para todo $E \in \Sigma$,*

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda.$$

Además, si dos funciones medibles cumplen esto, son iguales a.e.(λ).

Demostración. Como λ y μ son σ-finitas, existen particiones $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de X tales que $\lambda(X_j) < +\infty$ y $\lambda(Y_j) < +\infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomando $E_{i,j} = X_i \cap Y_j$ es evidente que construimos una nueva partición de X tal que tanto λ como μ son finitas sobre cada conjunto. Definimos, para toda pareja (i, j), la aplicación $\lambda_{i,j} : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ mediante $\lambda_{i,j}(A) = \lambda(A \cap E_{i,j})$ para todo $A \in \Sigma$. Evidentemente, $\lambda_{i,j}$ es una medida finita para cualquier pareja (i, j). Análogamente construimos $\mu_{i,j} : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ mediante $\mu_{i,j}(A) = \mu(A \cap E_{i,j})$, que también es una medida finita para toda pareja (i, j).

De este modo, está claro que $\mu_{i,j} \ll \lambda_{i,j}$ para i, j cualquiera y podemos aplicar la primera versión del Teorema de Radon-Nikodym. Así obtenemos, para cada pareja (i, j) una función medible, finita y positiva $f_{i,j}$ tal que $\mu_{i,j}(A) = \int_A f_{i,j} d\lambda$ para todo $A \in \Sigma$. Además, es evidente que podemos considerar $f_{i,j}(x) = 0$ si $x \notin E_{i,j}$. Como los $E_{i,j}$ son disjuntos dos a dos y forman una partición de X podemos definir $f(x) = f_{i,j}(x)$ si $x \in E_{i,j}$; es decir, tal como hemos definido las $f_{i,j}$, $f = \sum_{i,j} f_{i,j}$ (es claro que f es positiva). Evidentemente queremos ver que esta es la f que buscamos, es decir, que $\mu(E) = \int_E f d\lambda$ para todo $E \in \Sigma$. Comprobémoslo.

$$\mu(E) = \sum_{i,j} \mu(E \cap E_{i,j}) = \sum_{i,j} \int_E f_{i,j} d\lambda_{i,j} = \sum_{i,j} \int_{E\cap E_{i,j}} f_{i,j} d\lambda,$$

donde la última igualdad es inmediata comprobándola para funciones simples. Retomando el hilo,

$$\mu(E) = \sum_{i,j} \int_{E\cap E_{i,j}} f_{i,j} d\lambda = \sum_{i,j} \int_E f \chi_{E_{i,j}} d\lambda = \int_E f d\lambda.$$

La última igualdad es consecuencia directa del Teorema de la convergencia monótona.

Nos falta por ver la unicidad a.e.(λ) de f. Sea g otra función que para todo $E \in \Sigma$ cumple $\mu(E) = \int_E g d\lambda$. Entonces, para todo $E \in \Sigma$ tenemos que

$$\int_E f d\lambda_{i,j} = \int_E g d\lambda_{i,j} = \mu(E \cap E_{i,j}).$$

Con lo cual $f = g$ a.e.($\lambda_{i,j}$) (por la unicidad vista en la versión anterior del teorema). Pero si ahora consideramos $C = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, tenemos que

$$\lambda(C) = \lambda\left(\bigcup_{i,j}(C \cap E_{i,j})\right) = \sum_{i,j} \lambda(C \cap E_{i,j}) = 0.$$

□

Y ya estamos casi preparados para encara la última versión del teorema. Para ello, pero, necesitamos probar previamente un lema.

Lema 5. *Sean f y g dos funciones medibles en (X, Σ, λ) tales que:*

- $\int_X (f+g)^+ d\lambda < +\infty$ *o* $\int_X (f+g)^- d\lambda < +\infty$.
- $\int_X (f^+ + g^+) d\lambda < +\infty$ *y* $\int_X (f^- + g^-) d\lambda < +\infty$.
- *Las integrales de f y g están bien definidas, en el sentido que si la parte positiva integra infinito la negativa no lo hace.*

Entonces para todo E medible $\int_E (f+g)\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda + \int g\, d\lambda$.

Demostración. Sea $f = h - g$ con h y g funciones medibles positivas. Entonces se tiene que $h - g = f^+ - f^-$ y, por lo tanto, que $h + f^- = f^+ + g$. Así pues, para todo E medible tenemos:

$$\int_E h\, d\lambda + \int_E f^-\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda + \int_E f^+\, d\lambda$$

y bajo las condiciones impuestas en el enunciado es claro que podemos escribir

$$\int_E h\, d\lambda - \int_E g\, d\lambda = \int_E f^+\, d\lambda - \int_E f^-\, d\lambda.$$

Visto esto, escribimos $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g-)$ donde $f^+ + g^+$ y $f^- + g^-$ juegan el papel que jugaban h y g respectivamente. Así pues, con lo visto anteriormente es inmediato que para todo $E \in \Sigma$

$$\int_E (f+g)\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda + \int g\, d\lambda.$$

□

Teorema 4. *Sea (X, Σ, λ) un espacio de medida σ-finita y μ una medida con signo σ-finita sobre (X, Σ) tal que $\mu \ll \lambda$. Entonces existe una función medible f tal que para todo $E \in \Sigma$,*

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda.$$

Además, si dos funciones medibles cumplen esto, son iguales a.e.(λ).

Si μ es finita, f es integrable y si μ es positiva, f también.

Demostración. Sea μ la medida con signo. Consideramos la descomposición de Jordan: $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Entonces, por la última versión del teorema que hemos visto, sabemos que existen funciones medibles positivas f_1 y f_2 tales que para todo E

medible: $\mu^+(E) = \int_E f_1\, d\lambda$ y $\mu^-(E) = \int_E f_2\, d\lambda$. Dado que tanto f_1 como f_2 son positivas está claro que la integral de ambas está bien definida. Por otra parte,

$$\int_E (f_1 - f_2)^-\, d\lambda = \int_{f_2 \geq f_1} (f_2 - f_1)\, d\lambda \leq \int_X f_2\, d\lambda < \infty.$$

Finalmente tan sólo hace falta comentar que como f_1 y f_2 son positivas $f_1^- = f_2^- = 0$ y, por tanto, estamos en las condiciones del lema que hemos enunciado. Aplicándolo se obtiene directamente el resultado.

□

Cabe comentar que este teorema tiene una extensión más, y es que la σ-finitud de μ no es necesaria. La demostración de este hecho se puede consultar en [9]. También en [9] se puede consultar una demostración alternativa de Von Neumann (para el caso de medidas finitas) que hace uso de algunas de las propiedades que tienen los funcionales lineales y continuos sobre $L^2(\lambda)$.

Seguimos el rumbo natural del estudio de las medidas con signo con otro resultado fundamental: el Teorema de descomposición de Lebesgue.

1.1.2. Descomposición de Lebesgue

Definición 5. Sea μ una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Diremos que μ está concentrada en $S \in \Sigma$ si $\mu(E) = \mu(E \cap S)$ para todo $E \in \Sigma$.

De la definición se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 2. *Una medida con signo μ sobre el espacio medible (X, Σ) está concentrada en $S \in \Sigma$ si, y sólo si, $|\mu|(S^c) = 0$.*

De esta forma queda muy claro que si $\{A, B\}$ es una descomposición de Hahn de X para μ, entonces μ^+ está concentrado en A y μ^- lo está en B.

Definición 6. Sean μ y ν medidas con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Diremos que μ y ν son singulares una respecto la otra, y los escribiremos $\mu \perp \nu$, si están concentradas sobre conjuntos disjuntos entre sí.

Obtenemos directamente de la definición la siguiente proposición (las demostraciones son triviales y no ocupan más de dos líneas).

Proposición 3. *Sea μ_1, μ_2 y ν medidas con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Entonces se cumple que:*

- *$\mu_1 \perp \nu$ si, y sólo si, $|\mu_1| \perp |\nu|$.*
- *Si $\mu_1 \perp \nu$ y $\mu_2 \perp \nu$, también $\mu_1 + \mu_2 \perp \nu$ (lo mismo ocurre con la continuidad absoluta).*

- *Si* $\mu \perp \nu$ *y* $\mu \ll |\nu|$, *tenemos que* $\mu = 0$.

Ahora ya podemos enunciar y demostrar el Teorema de descomposición de Lebesgue.

Teorema 5 (de descomposición de Lebesgue)**.** *Sea* (X, Σ, λ) *un espacio de medida* σ*-finito y* μ *una medida con signo* σ*-finita sobre* (X, Σ). *Entonces existe un único par de medidas con signo sobre* (X, Σ), μ_s *y* μ_a, *tales que* $\mu_a \ll \mu$, $\mu_s \perp \mu$ *y*

$$\mu = \mu_s + \mu_a.$$

Demostración. Consideramos primero que $|\mu|$ y λ son medidas finitas. También supondremos que μ es positiva.

Como $\mu \ll \lambda + \mu$, el Teorema de Radon-Nikodym nos garantiza la existencia de $f \in L^1(\lambda + \mu) \subseteq L^1(\mu) \cap L^1(\lambda)$ positiva tal que para todo $E \in \Sigma$

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda + \int_E f d\mu.$$

Si consideramos $E_n = \{x \in X : f(x) > 1 + 1/n\}$ tenemos que

$$\mu(E_n) \geq \int_{E_n} f d\mu \geq (1 + 1/n)\mu(E_n),$$

con lo que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq f \leq 1$ a.e. Sea $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Entonces

$$\mu(A) = \lambda(A) + \mu(A)$$

y por lo tanto $\lambda(A) = 0$ y λ está concentrada en $B = A^c$. Definimos ahora $\mu_s(E) = \mu(E \cap A)$, que hemos visto que cumple $\mu_s \perp \lambda$. Definiendo $\mu_a(E) = \mu(E \cap B)$ tenemos trivialmente que $\mu = \mu_a + \mu_s$. Y sólo nos queda comprobar que $\mu_a \ll \mu$ (y extender después el resultado).

Si $\lambda(E) = 0$, $\mu_a(E) = \mu(E \cap B) = \int_{E \cap B} f d\mu$, pero de este modo $\int_{E \cap B}(1-f)d\mu = 0$ y $f = 1$ a.e. en $E \cap B$, pero $f < 1$ en B, con lo cual $\mu_a(E) = \mu(E \cap B) = 0$.

Veamos la unicidad. Supongamos que tenemos dos descomposiciones de Lebesgue distintas:

$$\mu = \mu_a + \mu_s,$$
$$\mu = \mu_a' + \mu_s'.$$

Entonces, considerando $\nu = \mu_s - \mu_s' = \mu_a' - \mu_a$, se cumple que $\nu \perp \lambda$ y que $\nu \ll \lambda$. Con la proposición anterior es inmediato que $\mu_a = \mu_a'$ y que $\mu_s = \mu_s'$.

Finalmente sólo nos falta extender els resultado para λ σ-finita y μ con signo y σ-finita. Extendámoslo primero al caso en que λ es σ-finita y μ es una medida σ-finita. Hemos visto en la extensión análoga del Teorema de Radon-Nikodym que existe una partición $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de X con $\lambda(X_k) < +\infty$ y $\mu(X_k) < +\infty$. Entonces la extensión de la demostración es muy parecida a la ya citada; para cada $E \in \Sigma$ se define $\mu_k(E) = \mu(E \cap X_k)$ y considerando la descomposición de Lebesgue $\mu_k = \mu_{s,k} + \mu_{a,k}$ el resultado es inmediato: $\mu_a = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{a,k}$ y $\mu_s = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{s,k}$ (que es trivial que cumplen las propiedades que buscamos). Para acabar, si μ es una medida con signo, tomamos μ^+ y μ^-, que son medidas σ-finitas, y con lo visto anteriormente el resultado es directo.

□

1.1.3. Teorema de Representación de Riesz

Una aplicación directa de las medidas con signo y, en particular, del Teorema de Radon-Nikodym, es el conocido como Teorema de representación de Riesz, que nos describe, para $1 \leq p < +\infty$, el dual de los espacios $L^p(\mu)$.

Lema 6. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y g una función integrable tal que para una constante $M > 0$,*

$$\left| \int gsd\mu \right| \leq M\|s\|_p$$

para todas las funciones simples s. Entonces, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $g \in L^q(\mu)$.

Demostración. Consideremos primero $p > 1$. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples no negativas tal que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = |g|^q$ de forma creciente. Sea, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = (s_n)^{1/p}\text{sgn}g$. De este modo las γ_n son funciones simples y

$$\|\gamma_n\|_p = \left(\int s_n d\mu\right)^{1/p}.$$

Como $\gamma_n g \geq |\gamma_n||s_n|^{1/q} = |\gamma_n|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \gamma_n$, tenemos que

$$\int s_n d\mu \leq \int \gamma_n g d\mu \leq M\|\gamma\|_p \leq M\left(\int s_n d\mu\right)^{1/p},$$

con lo que $\int s_n d\mu \leq M^q$ y por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue deducimos que $g \in L^q(\mu)$.

Veamos ahora el caso $p = 1$. Tenemos que ver que g está acotada a.e.(μ). Consideremos $E = \{x \in \Omega : |g(x)| > M\}$ y supongamos $\mu(E) > 0$; sea entonces $f = \frac{1}{\mu(E)}\chi_E$. Claramente f es una función simple y $\|f\|_1 = 1$, pero entonces $\left|\int gsd\mu\right| > M\|s\|_p$ y entramos en contradicción con la hipótesis. Así pues $\mu(E) = 0$ y $g \in L^\infty(\mu)$.

□

Teorema 6 (de representación de Riesz)**.** *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y $1 \leq p < +\infty$. Entonces, si q cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para todo $F \in L^p(\mu)^*$ existe $g \in L^q(\mu)$ tal que para toda $f \in L^p(\mu)$ se cumple que*

$$F(f) = \int fgd\mu.$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que F cae en $\mathbb{R}$, puesto que si cae en $\mathbb{C}$, con los resultados que se verán en la siguiente sección (Medidas Complejas), el procedimiento es totalmente análogo. Consideremos primero que μ es finita. Entonces toda función medible acotada está en $L^p(\mu)$, con lo cual podemos definir $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $\lambda(E) = F(\chi_E)$. Veamos que así definida λ es una medida con signo. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos y $E = \biguplus_{n=1}^{+\infty} E_n$; al ser F lineal y continuo,

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\left|F(\chi_E) - \sum_{n=1}^{N} F(\chi_{E_n})\right| = \lim_{N\longrightarrow+\infty}\left|F\left(\chi_E - \sum_{n=1}^{N}\chi_{E_n}\right)\right|$$

$$\leq \lim_{N\longrightarrow+\infty}\|F\|\left\|\chi_E - \sum_{n=1}^{N}\chi_{E_n}\right\|_p = \lim_{N\longrightarrow+\infty}\|F\|\mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} E_n\right)^{1/p}$$

y como estamos considerando μ finita, deducimos que $\lambda(E) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda(E_n)$. Es claro, pues, que λ es una medida con signo. Además, si $\mu(E) = 0$, $\chi_E = 0$ en $L^p(\mu)$ y $\lambda(E) = 0$; es decir, $\lambda \ll \mu$. En estas condiciones, el Teorema de Radon-Nikodym nos asegura la existencia (y la unicidad) de $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$F(\chi_E) = \lambda(E) = \int_E g d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$. De la linealidad de F y de la integral se deduce inmediatamente que $F(s) = \int fgd\mu$ para toda s simple. Entonces, como $|F(s)| \leq \|F\|\|s\|_p$ para toda s simple, el lema anterior nos garantiza que $g \in L^q(\mu)$.

Sea ahora $\phi_g \in L^p(\mu)^*$ definida por $\phi_g(f) = \int fgd\mu$ (que está claramente bien definida por la desigualdad de Hölder). Entonces $\phi_g - F \in L^p(\mu)^*$ y $(\phi_g - F)(s) = 0$ para toda s simple. Ahora bien, como las funciones simples son densas en $L^p(\mu)$, $F = \phi_g$. Además, es claro que $\|F\| = \|g\|_q$. Y ya hemos visto el resultado para μ finita.

Sea ahora μ σ-finita. Sea $(E_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión creciente tal que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. De este modo, para cada $n \geq 1$ existe $g_n \in L^q(\mu)$, con $\|g_n\|_q \leq \|F\|$, nula fuera de E_n tal que $F(f) = \int fgd\mu$ para toda $f \in L^p(\mu)$ nula fuera de E_n. La unicidad de las g_n nos asegura que $g_n = g_m$ a.e.(μ) siempre que $n \leq m$, con lo que definiendo $g(x) = g_n(x)$ si $x \in E_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} E_i$ tenemos que $g = g_n$ a.e.(μ) en E_n para toda $n \geq 1$. De este modo, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}|g_n|^q = |g|^q$ de forma creciente a.e.(μ), con lo que por el Teorema de la convergencia monótona

$$\|g\|_q^q = \int |g|^q d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int |g_n|^q d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|g_n\|^q \leq \|F\|^q < +\infty,$$

y $g \in L^q(\mu)$. Sea ahora $f \in L^p(\mu)$. Considerando $f\chi_{E_n}$, es evidente que, puntualmente, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f\chi_{E_n} = f$. Como, por la desigualdad de Hölder, $|fg| \in L^1(\mu)$ y $|f_n g| \leq |fg|$, utilizando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\int fgd\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n gd\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n g_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} F(f_n) = F(f),$$

donde en el último paso hemos utilizado que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f$ en $L^p(\mu)$ también (trivial mediante el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue).

$\square$

Nota 1. *Acabamos de ver que el Teorema de Radon-Nikodym implica el de representación de Riesz. En el siguiento capítulo, Medidas Vectoriales, concretamente en la sección del Teorema de Radon-Nikodym, veremos que el Teorema de representación de Riesz, considerando $p = 1$, implica el Teorema de Radon-Nikodym.*

1.2. Medidas complejas

Definición 7. Una medida compleja sobre un espacio medible (X, Σ) es una función de conjunto $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Si $\operatorname{rec}(\mu) \subseteq \mathbb{R}$ diremos que μ es real (en otras palabras, una medida con signo finita).

Notamos que, pese a habernos referido a las medidas complejas como una generalización de las medidas con signo, son medidas finitas y, por lo tanto, no incluyen las medidas con signo que toman el valor $+\infty$ o el valor $-\infty$. De esta forma, si μ es una medida compleja sobre (X, Σ), $\mathcal{R}\mu$ y $\mathcal{I}\mu$ son medidas reales.

Hecho este inciso, seguimos con la descripción de las medidas complejas (descripción que nos llevará a otra versión del Teorema de Radon-Nikodym y al Teorema de descomposición polar).

Definición 8. Sea μ una medida compleja sobre el espacio medible (X, Σ). Entonces la variación total de μ se define para todo $E \in \Sigma$ como

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(E_n)|; E = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n, E_n \in \Sigma\};$$

donde tomamos el supremo sobre las particiones de E.

La Proposición 1 nos garantiza que la definición es coherente con la definición de variación total que teníamos para las medidas con signo. O sea, que en el caso de las medidas con signo finitas, ambas definiciones son equivalentes.

Proposición 4. *Si μ es una medida compleja sobre el espacio medible (X, Σ), $|\mu|$ es una medida finita.*

Demostración. Primero de todo, es claro que para todo $E \in \Sigma$

$$|\mu|(E) \leq |\mathcal{R}\mu|(E) + |\mathcal{I}\mu|(E),$$

con lo que es inmediato que $|\mu|$ es finita. Además es trivial que $|\mu|(\emptyset) = 0$.

Veamos la σ-aditividad. Si $E = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n = \biguplus_{j\in\mathbb{N}} F_j$, entonces tenemos que $F_j = \biguplus_{n\in\mathbb{N}}(E_n \cap A_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Así pues,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(F_j)| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_j \cap E_n) \right| \leq \sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |\mu(A_j \cap E_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E_n).$$

Así pues, ya tenemos que $|\mu|(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E)$ para todo $E \in \Sigma$. Veamos la desigualdad contraria. Sea otra vez $E = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y, dado $\epsilon > 0$, sea $E_n = \biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_{n,j}$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(A_{n,j})| \geq |\mu|(E_n) - \epsilon/2^n$. De esta forma $E = \biguplus_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A_{n,j}$ y

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E_n) - \epsilon \leq |\mu|(E).$$

Así pues, como la desigualdad es válida para cualquier $\epsilon > 0$, haciéndolo tender a 0 obtenemos la desigualdad que nos faltaba para probar la igualdad.

$\square$

Veamos a continuación la versión del Teorema de Radon-Nikodym para medidas complejas.

Teorema 7 (de Radon-Nikodym). *Sea (X, Σ, λ) un espacio de medida σ-finito y μ una medida compleja sobre (X, Σ) tal que $\mu \ll \lambda$. Entonces existe una función integrable f tal que para todo $E \in \Sigma$,*

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda.$$

Además, si dos funciones medibles cumplen esto, son iguales a.e.(λ)

Demostración. Consideramos $\mu = \mathcal{R}\mu + i\mathcal{I}\mu$, donde, como ya hemos comentado, $\mathcal{R}\mu$ y $\mathcal{I}\mu$ son medidas reales (es decir, medidas con signo finitas). Por otra parte, si $\mu \ll \lambda$, es evidente que también se cumple que $\mathcal{R}\mu \ll \lambda$ y que $\mathcal{I}\mu \ll \lambda$. Entonces podemos aplicar el Teorema de Radon-Nikodym a ambas medidas con signo y, al ser finitas, obtenemos f_1 y f_2 integrables tales que para todo $E \in \Sigma$

$$\mathcal{R}\mu(E) = \int_E f_1 d\lambda$$

y

$$\mathcal{I}\mu(E) = \int_E f_2 d\lambda.$$

De este modo, podemos escoger $f = f_1 + if_2$, que, dada la integrabilidad de ambas funciones, claramente cumple $\mu(E) = \int_E f d\lambda$ para todo $E \in \Sigma$. La unicidad a.e.(λ) viene dada por la unicidad ya conocida de f_1 y f_2.

$\square$

Nota 2. *Tanto en el caso de medidas con signo como en el de medidas complejas, la función f que provee la versión pertinente del Teorema de Radon-Nikodym es conocida como derivada de Radon-Nikodym de μ respecto $d\lambda$ (con la notación que hemos utilizado). Esto se puede notar de la siguiente forma: $f = d\mu/d\lambda$.*

A continuación queremos probar otro resultado fundamental: el Teorema de descomposición polar. Este resultado nos servirá, por ejemplo, para demostrar (lo haremos más adelante) que si X es un espacio Hausdorff y localmente compacto, $C_0(X)^*$ es isométricamente ismorfo a $M(X)$, dónde $M(X)$ denota el conjunto de medidas complejas de Radon sobre X.

Para demostrar el teorema haremos uso del siguiente lema.

Lema 7. *Sea (X, Σ, λ) un espacio de medida σ-finito. Si $f \in L^1(\lambda)$ y $F \subseteq \mathbb{C}$ es un cerrado tal que para todo $E \in \Sigma$ de medida finita y no nula*

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda \in F,$$

entonces $f(x) \in F$ a.e.(λ).

Demostración. El resultado que queremos probar es equivalente a ver que

$$\lambda(\{x \in X : f(x) \in \mathbb{C} \setminus F\}) = 0.$$

Al ser $\mathbb{C} \setminus F$ un abierto, se puede expresar como unión numerable de bolas, con lo cual es suficiente probar que si $B \subseteq \mathbb{C} \setminus F$ es una bola, entonces $\lambda(f^{-1}(B)) = 0$. Supongamos que no. De este modo habría una bola de radio $B \in X \setminus F$ ($r > 0$ va a denotar su radio y $c \in \mathbb{C}$ su centro) con

$$0 < \lambda(f^{-1}(B)) < +\infty$$

(la última desigualdad es consecuencia clara de la σ-finitud de λ). De este modo

$$\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f d\lambda - c \right| = \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B (f - c) d\lambda \right| \leq \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f - c| d\lambda \leq r,$$

lo cual es una contradicción de la hipótesis.

□

Teorema 8 (de descomposición polar). *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida compleja sobre el mismo. Entonces existe una única función medible h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ y tal que $d\mu = hd|\mu|$.*

Demostración. Considerando el espacio medible finito $(X, \Sigma, |\mu|)$ y que evidentemente $\mu \ll |\mu|$, podemos aplicar la versión del Teorema de Radon-Nikodym para medidas complejas y obtenemos una función medible $h \in L^1(|\mu|)$ tal que para todo $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) = \int_E f d|\mu|.$$

Hay que ver, pues, que $h(x) = 1$ a.e.(λ). La estrategia será ver que si $\epsilon < 1$, entonces $P(\epsilon) = \{x \in X : |h(x)| < \epsilon\}$ tiene medida nula y que $\lambda(\{x \in X : |h(x)| > 1\}) = 0$.

Veamos lo primero. Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición de $P(\epsilon)$, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(E_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_{E_n} hd|\mu| \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon|\mu|(E_n) = \epsilon|\mu|(P(\epsilon)),$$

con lo cual $|\mu|(P(\epsilon)) = 0$ para todo $\epsilon < 1$ y tenemos que $h(x) \geq 1$ a.e.$(|\mu|)$. Para ver lo segundo vamos utilizar el lema previo al teorema en el disco unidad, o sea tomando $F = \overline{B(0,1)}$. Está claro que para todo $E \in \Sigma$,

$$\left| \int_E hd|\mu| \right| = |\mu(E)| \leq |\mu|(E).$$

Con lo que si $|\mu|(E) > 0$, aplicando el lema tenemos de forma inmediata que $h(x) \in \overline{B(0,1)}$ a.e.$(|\mu|)$.

El Teorema de Radon-Nikodym nos garantiza la unicidad de h (de hecho h es la derivada de Radon-Nikodym de μ respecto de $|\mu|$).

□

De forma parecida a como hemos generalizado a las medidas complejas el Teorema de Radon-Nikodym, podemos hacer lo propio con el Teorema de descomposición de Lebesgue.

Teorema 9 (de descomposición de Lebesgue)**.** *Sea (X, Σ, λ) un espacio de medida σ-finito y μ una medida compleja sobre (X, Σ). Entonces existe un único par de medidas con signo sobre (X, Σ), μ_s y μ_a, tales que $\mu_a \ll \mu$, $\mu_s \perp \mu$ (ahora esto quiere decir $|\mu_s| \perp \mu$) y*

$$\mu = \mu_s + \mu_a.$$

Demostración. Podemos escribir $\mu = \mathcal{R}\mu + i\mathcal{I}\mu$. Entonces, por el Teorema de descomposición de Lebesgue que ya hemos visto, para medidas con signo, tenemos que existen $\mu_{s,\mathcal{R}}$, $\mu_{a,\mathcal{R}}$, $\mu_{s,\mathcal{I}}$ y $\mu_{a,\mathcal{I}}$ únicas y tales que $\mu_{s,\mathcal{R}} \perp \lambda$, $\mu_{a,\mathcal{R}} \ll \lambda$, $\mu_{s,\mathcal{I}} \perp \lambda$ y $\mu_{a,\mathcal{I}} \ll \lambda$.

Así pues, basta con tomar $\mu_s = \mu_{s,\mathcal{R}} + i\mu_{s,\mathcal{I}}$ y $\mu_a = \mu_{a,\mathcal{R}} + i\mu_{a,\mathcal{I}}$ (las comprobaciones tanto de la validez como de la unicidad de este par es trivial).

□

1.2.1. Integración respecto de una medida compleja

Definición 9. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida con signo sobre dicho espacio. Entonces, si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible y $\mu = \mu^+ - \mu^-$ es una descomposición de Lebesgue de μ, diremos que $f \in L^1(\mu)$ si $f \in L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-)$.

En estas condiciones, definimos

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-.$$

Definición 10. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida compleja sobre dicho espacio. Entonces, si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible y $\mu = \mathbb{R}\mu + i\mathbb{I}\mu$, diremos que $f \in L^1(\mu)$ si $f \in L^1(\mu_r) \cap L^1(\mu_i)$.

En estas condiciones, definimos

$$\int f d\mu = \int f d\mu_r + i \int f d\mu_i.$$

1.3. Medidas de Radon

Aquí pretendemos llegar a algunos resultados relacionados con la medida y la integración en espacios localmente compactos y Hausdorff (LHC). Es especialmente importante el Teorema de representación de Riesz (para espacios LHC), que nos lleva a relacionar teoría de la medida y análisis funcional y a nuevas herramientas de construcción de medidas.

Durante todo el capítulo, si no se especifica nada, X va a denotar un espacio LHC y $\mathcal{B}_X$ la σ-álgebra de los borelianos de X.

1.3.1. Funcionales lineales positivos sobre $C_c(X)$

Un funcional lineal sobre $C_c(X)$ (con imagen en $\mathbb{R}$) se considera positivo si $I(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$. La primera propiedad es inmediata:

Proposición 5. *Sea I un funcional lineal y positivo sobre $C_c(X)$. Para cada compacto K de X existe una constante C_K tal que $|I(f)| \leq C_K \|f\|_u$ para todo $f \in C_c(X, [0, 1])$ con soporte contenido en K, donde $\|f\|_u$ denota la norma del supremo.*

Demostración. Dado un compacto K, el Lema de Urysohn nos permite escoger una $\gamma \in C_c(X, [0, 1])$ con $\gamma = 1$ en K. Entonces, si el soporte de f está en K, tenemos que $|f| \leq \|f\|_u \gamma$. O sea que, escribiendo la dos desigualdades obtenidas al deshacernos del valor absoluto de f llegamos al resultado: $|I(f)| \leq |I(\gamma)| \|f\|_u$.

□

Es claro que $I(f) = \int f d\mu$ es un lineal positivo (con μ medida). Así pues, si tenemos una medida de Borel en X finita sobre los compactos, es claro que $C_c(X) \subset L^1(\mu)$, puesto que $|f|$ tiene el mismo soporte que f. De forma parecida a lo que se consigue con el Teorema de Radon-Nikodym, el primer Teorema de representación de Riesz nos asegura que, de hecho, todos los funcionales lineales positivos son de esta forma. Imponemos algunas condiciones sobre la medida μ para que, además, esta sea única para cada funcional.

Definición 11. Una medida μ sobre X se llama de Radon si es una medida de Borel (eso es, definida sobre los borelianos), exteriormente regular en todos los borelianos e interiormente regular en los abiertos y tal que la medida de todo compacto es finita.

Decimos que una medida μ es interiormente regular en E si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$$

y es exteriormente regular en E si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\}.$$

Antes de anunciar la primera versión del Teorema de respresentación de Riesz, un apunte de notación. Si U es abierto y $f \in C_c(X)$, notaremos $f \prec U$ si $0 \leq f \leq 1$ y el soporte de f está en U. Ahora ya sí:

Teorema 10 (de representación de Riesz, versión I). *Si I es un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$, entonces existe una única medida de Radon μ en X tal que $I(f) = \int f d\mu$ para todo $f \in C_c(X)$. Además, μ satisface:*

- $\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X), f \prec U\}$ *para todo $U \subset X$ abierto,*
- $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$ *para todo $K \subset X$ compacto.*

Demostración. Veamos primero la unicidad. Como μ es de Radon es exteriormente regular, con lo cual para ver que es única solamente hace falta comprobar que μ queda determinada por I en los abiertos. Como $I(f) = \int f d\mu$ para todo $f \in C_c(X)$, está claro que si $f \prec U$, entonces $I(f) \leq \mu(U)$. Además, si $K \subset U$ compacto, por el Lema de Urysohn puedo escoger $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ y $f = 1$ en K, con lo cual $\mu(K) \leq I(f)$. Así pues, para todo compacto $K \subset U$ hemos encontrado $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ que cumple $\mu(K) \leq I(f) \leq \mu(U)$. Pero como μ es medida de Radon es interiormente regular sobre los abiertos, lo que quiere decir que existe una sucesión de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en U tal que $\mu(U) = \lim_n \mu(K_n)$, pero para cada K_n podemos escoger $f_n \in C_c(X)$ con $f_n \prec U$ con $\mu(K_n) \leq I(f_n) \leq \mu(U)$. Aplicando el Lema de Sandwich, llegamos a que $\mu(U) = \lim_n I(f_n)$, o sea, a que, efectivamente, μ viene determinada por I sobre los abiertos y, por lo tanto, sobre todos los borelianos.

Nos falta probar la existencia de μ. Definimos

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X), f \prec U\}$$

para todo U abierto y $\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\}$ para $E \subset X$ arbitrario. Es evident que si U y V son abiertos con $U \subset V$ se tiene que $\mu(U) \leq \mu(V)$, puesto que si $f \in C_c(X)$ es tal que $f \prec U$, entonces también $f \prec V$; con lo cual, $\mu(U) = \mu^*(U)$ para todo U abierto.

Para ver que μ así definida es la que buscamos vamos a probar que:

I) μ^* es medida exterior.

II) Todo abierto es μ^*-medible.

III) $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$ para todo $K \subset X$ compacto.

IV) $I(f) = \int f d\mu$ para todo $f \in C_c(X)$. De (i) y (ii), mediante Carathéodory, se obtiene directamente que todo boreliano es μ^*-medible. De (iii) se extrae de forma trivial que μ es finita sobre los compactos (solamente hace falta tener presente Urysohn) y, también fácilmente, que μ es interiormente regular en los abiertos. Sea U un abierto y $a < \mu(U)$, escogemos $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ y $I(f) > a$; sea K el soporte de f. Entonces si $g \in C_c(X)$ y $g \geq \chi_K$, $g \geq f$ y $I(g) \geq I(f) > a$. Así pues, $\mu(K) > a$ y μ es interiormente regular en los abiertos.

Vamos, pues, a demostrar estos cuatro puntos.

I) Basta con ver que si $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de abiertos y U es su unión, entonces $\mu(U) \leq \sum_j \mu(U_j)$, puesto que así tendremos que

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\,\{\sum_j \mu(U_j) : U_j \text{ abierto, } E \subset \bigcup_j U_j\},$$

y esto, por Carathéodory, define una medida exterior. Veámoslo pues. Sea $U = \bigcup_j U_j$ y $f \prec U$ con K su soporte. Com K es compacto tenemos que K está en una unión finita de U_j's, con lo que, por el Teorema de partición de la unidad, existen funciones $g_1, ..., g_n \in C_c(X)$ tales que $g_j \in U_j$ y $\sum_{j=1}^n g_j = 1$ en K. Entonces $f = \sum_j fg_j$ y $fg_j \prec U_j$, o sea que

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} I(fg_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$$

y como esto lo tenemos para cualquier $f \in C_c(X)$ con $f \prec U$, obtenemos que $\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(U_j)$ y ya estamos.

II) Hay que ver que si U es abierto, entonces para $E \subset X$ cualquiera con $\mu^*(E) finito$ (sino es evidente) tenemos que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c)$. Veámoslo primero para E abierto, entonces jugando con la definición de $\mu^*(E)$ veremos que es fácil generalizar. Si E es abierto entonces $E \cap U$ también lo es y, por tanto, para $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ con $f \prec E \cap U$ tal que $I(f) > \mu(E \cap U) - \epsilon$. También es abierto $E \backslash \text{sop}(f)$ es abierto, con lo que como antes existe una $g \in C_c(X)$ con $g \prec E \backslash \text{sop}(f)$ tal que $I(g) > \mu(E \backslash \text{sop}(f)) - \epsilon$. Ahora bien, claramente $f + g \prec E$ o sea que

$$\mu(E) \geq I(f) + I(g) > \mu(E \cap U) + \mu(E \setminus \text{sop}(f)) - 2\epsilon;$$

pero como $\text{sop}(f) \subset U$,

$$\mu(E) > \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U) - 2\epsilon.$$

Así, haciendo tender ϵ a 0 obtenemos el resultado deseado. Finalmente, si $\mu^*(E)$ es finito (ahora ya con E cualquiera) podemos encontrar un abierto V tal que $E \subset V$ y $\mu(V) < \mu^*(E) - \epsilon$, con lo que

$$\mu^*(E) + \epsilon > \mu(V) \geq \mu(V \cap U) + \mu(V \cap U^c)$$

y como $E \subset V$, $\mu^*(E) + \epsilon > \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c)$. Haciendo tender ϵ a 0, obtenemos el resultado.

III) Si K es compacto, $f \in C_c(X)$ y $f \geq \chi_K$, sea $U_\epsilon = \{x : f(x) > 1-\epsilon\}$. Entonces U_ϵ es abierto y si $g \prec U_\epsilon$ tenemos que $g \leq (1-\epsilon)^{-1}f$ y, en consecuencia, $I(g) \leq (1-\epsilon)^{-1}I(f)$. Por lo tanto, como $K \subset U_\epsilon$ tenemos que

$$\mu(K) \leq \mu(U_\epsilon) \leq (1-\epsilon)^{-1}f,$$

y haciendo tender ϵ a 0, vemos que $\mu(K) \leq I(f)$. Por otra parte, para culaquier abierto U que contenga K, por el Lema de Urysohn tenemos que existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \geq \chi_K$ y $f \prec U$, con lo que $I(f) \leq \mu(U)$. Como μ es exteriormente regular ya estamos.

IV) Basta demostrarlo para $f \in C_c(X, [0,1])$, porque $C_c(X, [0,1])$ genera (linealmente hablando) $C_c(X)$; es decir, si tenemos $f \in C_c(X)$ con f no nula en todo punto, sino trivialmente $f \in C_c(X, [0,1])$, cogiendo $\frac{f}{\|f\|_u}$ vemos que la podemos recuperar. Dado $N \in \mathbb{N}$, para $1 \leq j \leq N$ sea $K_j = \{x : f(x) \geq N^{-1}j\}$ y sea $K_0 = \text{sop}(f)$. Definimos también:

$$f_j = min\{max\{f - N^{-1}(j-1), 0\}, N^{-1}\}.$$

Así tenemos $f_1, ..., f_N \in C_c(X)$, $\sum_1^N f_j = f$ y $N^{-1}\chi_{K_j} \leq f_j \leq N^{-1}\chi_{K_{j-1}}$, con lo que $N^{-1}\mu(K_j) \leq \int f_j d\mu \leq N^{-1}\mu(K_{j-1})$. Además, si U es un abierto que contiene K_{j-1}, $I(f_j) \leq N^{-1}\mu(U)$ y, por tanto, utilizando la regularidad exterior y que $\mu(K_j) = \text{ínf}\{I(f) : f \in C_c(X), f \geq \chi_{K_j}\}$,

$$N^{-1}\mu(K_j) \leq I(f_j) \leq N^{-1}\mu(K_{j-1}).$$

Pero como hemos comentado ya, se tiene que $\sum_1^N f_j = f$ y, en consecuencia:

$$N^{-1}\sum_1^N \mu(K_j) \leq \int f d\mu \leq N^{-1}\sum_0^{N-1} \mu(K_j),$$

$$N^{-1}\sum_1^N \mu(K_j) \leq I(f) \leq N^{-1}\sum_0^{N-1} \mu(K_j).$$

Por lo tanto,

$$|I(f) - \int f d\mu| \leq N^{-1}(\mu(K_0) - \mu(K_N)) \leq N^{-1}\mu(\text{sop}(f)),$$

y al ser $\mu(\text{sop}(f)) < +\infty$ ya estamos.

□

1.3.2. Regularidad y teoremas de aproximación

Proposición 6. *Si μ es una medida de Radon en X, entonces μ es interiormente regular en todos los subconjuntos σ-finitos.*

Demostración. Sea $E \subset X$ cualquiera con $\mu(E) < +\infty$. Dado $\epsilon > 0$, podemos escoger un abierto U tal que $E \subset U$ y $\mu(U) < \mu(E) + \epsilon$ y un compacto $F \subset U$ tal que $\mu(F) > \mu(U) - \epsilon$. Como $\mu(U \setminus E) < \epsilon$ podemos escoger un abierto V tal que $U \setminus E \subset U$ y $\mu(V) < \epsilon$. Sea $K = F \setminus V$, que claramente es compacto al ser cerrado de un compacto, $K \subset E$ y $\mu(K) = \mu(F) - \mu(F \cap V) > \mu(E) - \epsilon - \mu(V) > \mu(E) - 2\epsilon$. Por lo tanto, μ es interiormente regular en E. Si E es σ-finito pero tiene medida infinita, entonces existe una unión creciente de E_j con $\mu(E_j) < +\infty$ y $\mu(E_j) \to +\infty$. Por lo tanto para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un E_j con $\mu(E_j) > N$ y, en consecuencia, por lo visto antes, existe un compacto $K \subset E_j$ con $\mu(K) > N$ y μ es interiormente regular en E.

□

Corolario 1. *Toda medida de Radon μ σ-finita en X es regular. Si X es σ-compacto, entonces toda medida de Radon μ es regular.*

Proposición 7. *Sea μ una medida de Radon σ-finita en X y E un boreliano de X. Entonces se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existen U abierto y F cerrado tales que $F \subset E \subset U$ y $\mu(U \setminus F) < \epsilon$.*

Demostración. Como μ es σ-finita en X, podemos escribir $E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$ con E_j's disjuntos dos a dos y de medida finita. Para cada E_j consideramos U_j tal que $E_j \subset U_j$ y $\mu(U_j) < \mu(E_j) + \epsilon 2^{-j-1}$ y tomamos el abierto $U = \bigcup_{j=1}^{+\infty} U_j$. Así, dado que $U \setminus E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty}(U_j \setminus E_j)$, es claro que $\mu(U \setminus E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(U_j \setminus E_j) < \epsilon/2$. Haciendo exactamente lo mismo con E^c llegamos a un abierto V que contiene E^c y tal que $\mu(V \setminus E^c) < \epsilon/2$; evidentemente tomamos el cerrado $F = V^c$ y ya estamos:

$$\mu(U \setminus F) = \mu(U \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \epsilon.$$

□

Teorema 11. *Sea X un espacio LHC tal que todo abierto es σ-compacto. Entonces toda medida de Borel en X finita sobre compactos es regular y, por lo tanto, de Radon.*

Demostración. Si μ es de Borel y finita sobre les compactos, entonces $C_c(X) \subset L^1(\mu)$ y la aplicación $I(f) = \int f d\mu$ es un funcional lineal y positivo esobre $C_c(X)$. Sea ν la medida de Radon asociada a este funcional (sabemos por el Teorema de representación de Riesz que existe y que, como medida de Radon, es única). Si U es un abierto de X por hipótesis lo podemos escribir como $U = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j$ con K_j's compactos. Escogemos por el Lema de Urysohn $f_1 \in C_c(X)$ tal que $f_1 \prec U$ y $f_1 = 1$ en K_1. Inductivamente, para $n > 1$ escogemos $f_n \in C_c(X)$ con $f_n \prec U$ y $f_n = 1$ en $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$ y en $\bigcup_{j=1}^{n-1} \operatorname{sop}(f_j)$ (ya que queremos una sucesión creciente para aplicar el Teorema de la convergencia monótona). Así obtenemos una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente a χ_U, y por lo tanto, aplicando el Teorema de la convergencia monótona obtenemos que

$$\mu(U) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\nu = \nu(U).$$

Sea ahora E un boreliano cualquiera y veamos que ν es regular. Como μ es claramente σ-finita en X al ser X abierto y, por tanto, σ-compacto, hemos visto que podemos escoger un abierto V y un cerrado F con $F \subset E \subset V$ tales que $\nu(V \setminus F) < \epsilon$. Pero $V \setminus F$ es abierto y $\nu(V \setminus F) = \mu(V \setminus F)$, con lo que $\mu(V) \leq \mu(E) + \epsilon$ y μ es exteriormente regular. Además $\mu(F) \geq \mu(E) - \epsilon$ y F es σ-compacto al serlo X, con lo que existen K_j's compactos y crecientes tales que $\mu(K_j) \to \mu(F)$, o sea que μ es interiormente regular. Así pues μ es regular y, como teníamos que era finita sobre compactos por hipótesis, μ es de Radon (e igual a ν por unicidad).

□

Para seguir y demostrar el Teorema de Lusin necesitamos algunos resultados previos, como el Teorema de Egoroff. Dediquemos pues un momento a hablar de las sucesiones Cauchy en medida y convergentes en medida.

Definición 12. Una sucesión de funciones medibles y a valores complejos es Cauchy en medida si $\forall \epsilon > 0$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \longrightarrow 0$$

cuando $n, m \longrightarrow \infty$. Se dice que es convergente en medida a f si $\forall \epsilon > 0$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

En general, una sucesión que converge en medida también lo hace en el sentido Cauchy. Vamos a ver que el recíproco es cierto (de hecho veremos más que esto).

Lema 8. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en medida existe una subsucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall j \in \mathbb{N}$*

$$\mu(\{x : |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \geq 2^{-j}\}) < 2^{-j}.$$

Demostración. Como la sucesión es de Cauchy, para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos escoger $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_j$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-j}\}) < 2^{-j}.$$

Inductivamente arreglamos los n_j's para que $n_j < n_{j+1}$. Finalmente ponemos $g_j = f_{n_j}$ y obtenemos trivialmente una subsucesión que cumple el enunciado.

□

Lema 9. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en medida existe una subsucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a.e. a una función medible.*

Demostración. Sea $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la subsucesión del lema anterior. Entonces si escribimos $E_j = \{x : |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \geq 2^{-j}\}$ tenemos $\mu(E_j) < 2^{-j}$, con lo que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j) < +\infty$ y, por el Lema de Borel-Cantelli, $\mu(\limsup E_j) = 0$. Además, $\forall x \notin \limsup E_j$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq k$ se tiene que $|g_{j+1}(x) - g_j(x)| < 2^{-j}$. Con lo que, en $(\limsup E_j)^c$, $\{g_j\}_j$ converge puntualmente (tenemos convergencia Cauchy puntual). Ponemos $f = 0$ en $\limsup E_j$ y ya estamos.

□

Lema 10. *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es Cauchy en medida converge en medida a* f *si alguna subsucesión lo hace.*

Demostración. Esto es trivial, puesto que dado $\epsilon > 0$,

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)|\} \geq \epsilon) \leq \mu(\{x : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \epsilon\})$$
$$\leq \mu(\{x : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \epsilon/2\}) + \mu(x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \epsilon/2\}).$$

Y con el primer sumando fijamos N y con el segundo $n_k > N$.

□

Teorema 12. *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy en medida. Entonces existe* f *medible tal que* $f_n \longrightarrow f$ *en medida (es la misma* f *a la que converge a.e. una subsucesión de* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*).*

Demostración. Para verlo solamente hace falta ver que una subsucesión converge en medida a f. Sea $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la subsucesión construida en lemas anteriores y f la función a la que converge a.e. Sea, como antes, $E_j = \{x : |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \geq 2^{-j-1}\}$ y $F_k = \bigcup_{j=k}^{+\infty} E_j$, con lo que $\limsup E_j = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$. Entonces, si $x \notin F_k$, $\forall i, j \geq k$ con $i \geq j$ se tiene que

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq 2^{1-j}.$$

Ahora bien,

$$|g_j(x) - f(x)| \leq |g_j(x) - g_i(x)| + |g_i(x) - f(x)|$$

y, si $x \notin F_k$ se tiene $x \notin \limsup E_j$ y, por lo tanto, para todo $x \notin F_k$ podemos escoger $i \geq j$ tal que $|g_i(x) - f(x)|$ sea arbitrariamente pequeño. En particular, para $j \geq k$, si $x \notin F_k$: $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{2-j}$. Pero sabemos que $\mu(F_k) \longrightarrow 0$ (esto ya lo hemos justificado en lemas previos mediante el Lema de Borel-Cantelli) y, en conclusión, $g_j \longrightarrow f$ en medida (ya habíamos comentado que esta f era medible). Esto último es inmediato dado que para $\epsilon > 0$, queremos ver que $\mu(\{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \longrightarrow 0$, pero evidentemente podemos escoger n tal que $\forall k \geq n$, $2^{2-k} < \epsilon$, con lo que

$$\mu(\{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu(F_k) \text{ para todo } k \geq n.$$

□

Proposición 8. *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en medida a* f *y* g*, entonces* f=g *a.e.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(\{x : |f(x)-g(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu(\{x : |f(x)-f_n(x)| \geq \epsilon/2\})+\mu(\{x : |f_n(x)-g(x)| \geq \epsilon/2\}),$$

y, por lo tanto, $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe A_n nulo tal que $|f(x) - g(x)| < 1/n$ si $x \notin A_n$ y, poniendo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\mu(A) = 0$, con lo que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A^c$ y ya estamos.

□

Teorema 13 (de Egoroff). *Si μ es una medida finita sobre X y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a.e. a f, entonces $\forall\epsilon > 0$ existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \epsilon$ y $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en E^c.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_n \longrightarrow f$ en todo X (sino cogemos $E' = E \cup A$ con A dono no converge). Para $k, n \in \mathbb{N}$,

$$E_n(k) = \bigcup_{m\geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq 1/k\}.$$

Entonces, fijada k, $E_n(k)$ decrece con n. Como $f_n \longrightarrow f$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n(k) = \emptyset$ y, como $\mu(X) < \infty$, $\mu(E_n(k)) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow +\infty$. Dado $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ cogemos n_k tal que $\mu(E_{n_k}(k)) < \epsilon 2^{-k}$ y esccribimos $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_{n_k}(k)$, con lo que $\mu(E) < \epsilon$ y $\forall x \notin E$, $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ $\forall n \geq n_k$. Entonces, dado $\delta > 0$ existe k_0 tal que $\delta > 1/k_0$ y obtenemos n_{k_0}. Es decir, si $x \notin E$, $|f_n(x) - f(x)| < 1/k_0 < \delta$ $\forall n \geq n_{k_0}$; por lo tanto $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en E^c.

□

Ahora ya podemos volver a donde estábamos y deducir de lo que hemos visto algunos resultados de aproximación en espacios con medidas de Radon.

Proposición 9. *Si μ es una medida de Radon en X, entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sabemos (es muy sencillo de demostrar utilizando el Teorema de la convergencia dominada) que las funciones simples son densas en $L^p(\mu)$, con lo que solamente hace falta ver que para todo boreliano E de medida finita, χ_E se puede aproximar en $L^p(\mu)$ por elementos de $C_c(X)$. Dado $\epsilon > 0$, podemos escoger un compacto $K \subset E$ y un abierto $E \subset U$ tal que $\mu(U \setminus K) < \epsilon$. Entonces, por el Lema de Urysohn existe $f \in C_c(X)$ tal que $\chi_k \leq f \leq \chi_U$, o sea que

$$\|\chi_E - f\|_p \leq \mu(U \setminus K)^{1/p} < \epsilon^{1/p}.$$

□

Teorema 14 (de Lusin). *Sea μ una medida de Radon en X y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible tal que, si $E = \{x : f(x) \neq 0\}$, se tiene $\mu(E) < +\infty$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in C_c(X)$ tal que $\mu(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon$. Si f está acotada, φ se puede escoger tal que $\|\varphi\|_u \leq \|f\|_u$.*

Demostración. Suponemos primero que f es acotada. Entonces, como $\mu(E) < +\infty$, es claro que $f \in L^1(\mu)$ y, por la proposición anterior, existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c(X)$ que converge a f en $L^1(\mu)$ y, por tanto, converge a f en medida. Como hemos visto en el Teorema 3, existe una subsucesión de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f a.e. (denotaremos igualmente a esta subsucesión por $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para no complicar la notación). Sea $\epsilon > 0$. El Teorema de Egoroff nos garantiza la existencia de un $A \subset E$ tal que $\mu(E \setminus A) < \epsilon/3$ y tal que $g_n \longrightarrow f$ uniformemente en A. Sabemos, al ser μ de Radon, que existen un B compacto con $B \subset A$ y un U abierto con $E \subset U$ tales que $\mu(U \setminus E) < \epsilon/3$ y $\mu(A \setminus B) < \epsilon/3$ (μ es interiormente y exteriormente regular sobre los conjuntos σ-finitos).

Ahora bien, $g_n \longrightarrow f$ uniformemente en B, con lo cual, al ser B compacto, $f|_B$ es continua. Aplicando ahora el Teorema de extensión de Tietze, tenemos que existe una $g \in C_c(X)$ tal que $g = f$ en B y $\mathrm{sop}(g) \subset U$. Entonces $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset U \setminus B$, y, con lo visto al principio, tenemos que $\mu(U \setminus B) < \epsilon$. Comprobamos ahora que, si f acotada, se puede escoger φ como dice el enunciado. Sea $\beta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\beta(z) = \begin{cases} z & si \quad |z| \leq \|f\|_u \\ \\ \|f\|_u sgn(z) & si \quad |z| > \|f\|_u \end{cases}$$

Así es claro que β es continua y que $\varphi = \beta \circ g$ cumple $\varphi \in C_c(X)$ y $\|\varphi\|_u \leq \|f\|_u$ y $\varphi = f$ donde teníamos $g = f$.

Si f no está acotada, consideramos $A_n = \{x \in E : |f(x)| \leq n\}$. Entonces A_n crece claramente hacia E con n, con lo que, para un N suficientemente grande, se tiene que $\mu(E \setminus A_N) < \epsilon/2$. Pero en A_N f está acotada, con lo que podemos aplicar el razonamiento anterior y encontramos $\varphi \in C_c(X)$ tal que

$$\mu(x \in X : \varphi(x) \neq f\chi_{A_n}(x)) < \epsilon/2,$$

y por lo tanto

$$\mu(\varphi(x) \neq f(x)) < \epsilon.$$

□

1.3.3. El dual de $C_0(X)$

Definición 13. $C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ se desvanece en } \infty\}$, donde "$f$ se desvanece en ∞" quiere decir que para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto.

Proposición 10. *Si X es un espacio LHC, $C_0(X)$ es la clausura de $C_c(X)$ en la métrica uniforme (podemos llamarlo "clausura uniforme" en un abuso de lenguaje).*

Demostración. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_c(X)$ que converge a $f \in C(X)$ uniformemente, para cada $\epsilon > 0$ existe n tal que $\|f_n - f\|_u < \epsilon$. Entonces $|f(x)| < \epsilon$ si $x \notin \mathrm{sop}(f_n)$, con lo que $f \in C_0(X)$. De forma parecida, si $f \in C_0(X)$, consideramos los compactos $K_n = \{x : |f(x)| \geq n^{-1}\}$. Entonces, por el Lema de Urysohn, existen $g_n \in C_c(X)$ con $0 \leq g_n \leq 1$ y $g_n = 1$ en K_n. Si consideramos ahora $f_n = g_n f$ ya estamos, puesto que $f_n \in C_c(X)$ y $\|f_n - f\|_u \leq n^{-1}$, con lo que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente.

□

Así pues, si μ es una medida de Radon sobre X, el funcional $I(f) = \int f d\mu$ se extiende continuamente a $C_0(X)$ si, y sólo si, es acotado con la norma uniforme. Fijándonos en que $\mu(X) = \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1\}$ y que $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$, esto sucede exactamente cuando μ es finita; entonces $\mu(X) = \|I\|$. Y por lo tanto, hemos identificado los funcionales lineales positivos de $C_0(X)$ con la integración respecto de medidas de Radon finitas. Pero lo que queremos es dar una descripción global de $C_0(X)^*$. Para ello veamos el siguiente resultado.

Lema 11. *Si $I \in C_0(X,\mathbb{R})^*$, entonces existen funcionales lineals positivos $I^+ \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ y $I^- \in C_0(X,\mathbb{R})^*$ tales que $I = I^+ - I^-$.*

Demostración. Sea $I \in C_0(X,[0,+\infty))$. Definimos

$$I^+(f) = \sup\{I(g) : g \in C_0(X,\mathbb{R}), 0 \leq g \leq f\}.$$

De esta forma, y como se tiene $|I(g)| \leq \|I\|\|g\|_u \leq \|I\|\|f\|_u$ al ser $0 \leq g \leq f$, es inmediato que $0 \leq I^+(f) \leq \|I\|\|f\|_u$. Además I^+ es claramentre trivial (para ver la suma se demuestran sin dificultad ambas desigualdades con la definición de I^+). Ahora, si $f \in C_0(X,\mathbb{R})$, es eviente que $f^+, f^- \in C_0(X,[0,+\infty))$ y definimos $I^+(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-)$. Demostrar la linealidad es fácil y, sobre todo, totalmente análogo a la demostracı'on que se hace para ver la linealidad de la integral. Además

$$|I^+(f)| \leq \text{máx}\{I^+(f), I^-(f)\} \leq \|I\|(\|f^+\|_u, \|f^-\|_u) = \|I\|\|f\|_u,$$

con lo que $\|I^+\| \leq \|I\|$. Finalmente, definimos $I^- = I - I^+$ y, con la definición de I^+ es trivial que I^- es positiva.

□

Ahora bien, todo $I \in C_0(X)^*$ está únicamente determinado por su restricción J a $C_0(X,\mathbb{R})$ y tenemos $J = J_1 + iJ_2$ con J_1, J_2 funcionales lineales reales. Por lo tanto, con lo que hemos visto: para todo $I \in C_0(X)^*$ existen medidas de Radon finitas $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tales que, tomando $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, $I(f) = \int f d\mu$.

Definición 14. Una medida de Radon signada es una medida signada de Borel cuyas variaciones positiva y negativa son medidas de Radon. De forma parecida, una medida compleja de Radon es una medida compleja de Borel cuyas parte real e imaginaria son medidas signadas de Radon. $M(X)$ representa el espacio de las medidas complejas de Radon y, para $\mu \in M(X)$ definimos $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Proposición 11. *Si μ es una medida de Borel compleja, entonces $\mu \in M(X)$ si, y sólo si, $|\mu|$ es de Radon. Además, $M(X)$ es un espacio vectorial y $\|\mu\|$ es una norma.*

Demostración. Con lo que hemos trabajado en el apartado de regularidad es evidente que toda medida ν finita de Borel (positiva) es de Radon si, y sólo si, para todo boreliano E y todo $\epsilon > 0$ existen U abierto y K compacto tales que $\nu(U \setminus K) < \epsilon$. Con lo que, teniendo en cuenta que $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu 4)$, si hacemos $|\mu|(U \setminus K) < \epsilon$ entonces $\mu_j(U \setminus K) < \epsilon$ para todo j; y si hacemos $\mu_j(U_j \setminus K_j) < \epsilon/4$ para todo j

entonces tomando $U = \bigcap_{j=1}^4 U_j$ y $K = \bigcup_{j=1}^4 K_j$ es inmediato que $|\mu|(U \setminus K) < \epsilon$. La misma caracterización de las medidas de Radon como medidas finitas de Borel (positivas) sirve para demostrar trivialmente que $M(X)$ es cerrado bajo la suma y el producto por un escalar. Que $\|\mu\|$ es norma tampoco reviste ninguna dificultad.

□

Ya ya estamos preparados para demostrar el teorema fundamental que nos describe $C_0(X)^*$.

Teorema 15 (segundo de representación de Riesz). *Sea X un espacio LHC y, para toda $\mu \in M(X)$ y $f \in C_0(X)$ sea $I_\mu = \int f d\mu$. Entonces la aplicación que nos lleva μ a I_μ es un ismorfismo isométrico de $M(X)$ hacia $C_0(X)^*$.*

Demostración. Ya hemos visto que todo $I \in C_0(X)^*$ es de la forma I_μ. Por otro lado, si $\mu \in M(X)$, se tiene por la desigualdad de Hardy-Littlewood que

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|_u \|\mu\|.$$

Por lo tanto, $I_\mu \in C_0(X)^*$ y $\|I_\mu\| \leq \|\mu\|$. Además, si $h = d\mu/d|\mu|$ (derivada de Radon-Nikodym), entonces por el Teorema de descomposición polar tenemos que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$, con lo que por el Teorema de Lusin, para todo $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ tal que $\|f\|_u \leq 1$ y $\mu(x \in X : f(x) = \overline{h}(x)) < \epsilon/2$. Entonces,

$$\|\mu\| = \int |h|^2 d|\mu| = \int \overline{h} d\mu \leq |\int f d\mu| + |\int (f - \overline{h}) d\mu|$$

$$\leq |\int f d\mu| + 2|\mu|(E) < |\int f d\mu| + \epsilon$$

y ya estamos.

□

Capítulo 2

Medidas vectoriales

Como ya hemos comentado, el leitmotiv de este trabajo son el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema representación de Riesz. Evidentemente, antes de entrar en estas cuestiones deberemos definir el concepto de medida vectorial y analizar algunas propiedades básicas. También tendremos que trabajar la integración de funciones a valores en espacios de Banach, lo cual nos llevará un poco más de trabajo. Finalmente, discutiremos si son ciertos o no los teoremas de Radon-Nikodym y Riesz en esta nueva generalización del concepto de medida y, si no lo son en general, intentaremos ver en qué casos sí se cumplen.

Se ha seguido [2] en general. En el apartado de la integración de Bochner se ha complementado con [7] y para la base de análisis funcional se ha utilizado [10].

2.1. Propiedades básicas

Definición 15. Sean (Ω, Σ) un espacio medible y X un espacio de Banach. Entonces una función $F : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial si dada una familia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ de conjuntos disjuntos dos a dos,

$$F(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_n) = \sum_{i=1}^{+\infty} F(E_n)$$

en la norma de X.

Nota 3. *La definición que acabamos de dar de medida vectorial puede suavizarse mucho. Para empezar no hace falta que, como función, parta de una σ-álgebra, con una álgebra basta. Tampoco es necesario que sea σ-aditiva; puede definirse siendo solamente finitamente aditiva. Ahora bien, como lo que nos interesa es trabajar los teoremas de Radon-Nikodym y de Riesz, es decir, la obtención de medidas vectoriales mediante la integración y veremos que la integración tiene lugar en espacios medibles y es σ-aditiva, no hace falta entrar en tales sutilezas.*

Tanto en las medidas con signo como en las complejas hemos definido lo que entendíamos por variación total de la medida. Hagamos lo propio.

Definición 16. Sea $F : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial ((Ω, Σ) es un espacio medible y X un espacio de Banach). Entonces, la variación total de F (o simplemente variación de F) se define como la aplicación $|F| : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que para todo $E \in \Sigma$,

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|,$$

donde el supremo se toma sobre las particiones finitas de E en elementos de Σ.

Si $|F| : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ decimos que la medida vectorial F es de variación total finita (o simplemente de variación finita).

De la propia definición de variación total se deduce sin ningún problema el siguiente resultado.

Proposición 12. *Si F es una medida vectorial y $|F|$ es su variación total, entonces $|F|$ es monótona y finitamente aditiva.*

Antes de proseguir es conveniente ver algún ejemplo de medida vectorial.

Ejemplo 1. Vamos a ver un ejemplo de medida vectorial de variación total finita.

Sea $T : L^1([0,1]) \longrightarrow X$, con X un espacio de Banach, un funcional lineal y continuo y sea $F(E) = T(\chi_E)$ para todo $E \subseteq [0,1]$ medible Lebesgue. De esta forma, es evidente que F es finitamente aditiva. También es claro que si $E \subseteq [0,1]$ es un conjunto medible Lebesgue y λ denota la medida de Lebesgue, tenemos que $\|F(E)\| \leq \|T\|\lambda(E)$.

Comprobemos la σ-aditividad. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos medibles Lebesgue disjuntos dos a dos; entonces

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left\| F(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{m} F(E_n) \right\| = \lim_{m \longrightarrow +\infty} \left\| F(\bigcup_{n=m+1}^{+\infty} E_n) \right\| \leq$$

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \lambda(\bigcup_{n=m+1}^{+\infty} (E_n)) \|T\| < +\infty,$$

donde en el último paso hemos utilizado que λ es σ-aditiva.

Falta por ver que F es de variación total finita. Para todo $E \subseteq [0,1]$ medible Lebesgue, como tenemos que $\|F(E)\| \leq \|T\|\lambda(E)$, es evidente que

$$|F|(E) \leq \|T\|\lambda(E) < +\infty,$$

y ya estamos.

Nota 4. *Si F es una medida vectorial, como $|F|$ es monótona, para ver que F es de variación total acotada basta con ver que $|F|(X) < +\infty$.*

Hemos visto que la variación total de una medida vectorial es finitamente aditiva. Veamos un resultado referente a la σ-aditividad.

Proposición 13. *Si F es una medida vectorial de variación total acotada, entonces su variación es σ-aditiva.*

Demostración. Sea $F : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial de variación acotada y sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Sea π una partición finita de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, entonces

$$\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \sum_{A\in\pi} \|F(A \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)\| = \sum_{A\in\pi} \|\sum_{n=1}^{+\infty} F(A\cap E_n)\| \leq \sum_{A\in\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \|F(A\cap E_n)\|$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{A\in\pi} \|F(A\cap E_n)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |F|(E_n).$$

Ahora bien, como esto es así para cualquier partición finita π, tomando el supremo entre ellas tenemos que $|F|(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |F|(E_n)$. Nos falta ver la desigualdad contraria.

Sabemos que $|F|$ es finitamente aditiva y monótona en Σ, con lo cual para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} |F|(E_k) = |F|(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \leq |F|(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n),$$

y obtenemos las desigualdad que nos faltaba y por consiguiente que, como queríamos ver: $|F|(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} |F|(E_n)$.

□

2.1.1. Integración con respecto una medida vectorial

A lo largo del trabajo no utilizaremos la integración con respecto una medida vectorial; de hecho lo que nos interesa terminar discutiendo es la obtención de medidas vectoriales a partir de la integración de funciones a valores en espacios de Banach (más tarde veremos detalladamente este tipo de integrales). A pesar de esto, como tema fundamental en la teoría de cualquier tipo de medida, es conveniente dar una visión general sobre la integración con respecto una medida vectorial.

Para hablar de la integración con respecto una medida vectorial se pueden considerar medidas de variación total acotada, pero esto supone limitar bastante la construcción. Con un esfuerzo no muy mayor se puede construir una integral bastante más general. Para ello vamos a definir un nuevo concepto.

Definición 17. Sea $F : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial. La semi-variación de F es la función $\|F\| : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ que para cada $E \in \Sigma$ se define como

$$\|F\|(E) = \sup\{|x^* F|(E) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

Si $\|F\|(\Omega) \leq +\infty$, entonces F diremos que es una medida vectorial de semi-variación acotada.

Verificaciones inmediatas prueban el siguiente resultado.

Proposición 14. *Si F es una medida vectorial, entonces:*

- *Su semi-variación, $\|F\|$, es monótona y σ-finita.*
- *$\|F\|(E) \leq |F|(E)$ para todo $E \in \Sigma$.*

La siguiente proposición nos proporcionará la clave para definir la integral contra una medida vectorial.

Proposición 15. *Sea $F : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial. Entonces se cumplen:*

I) *Si $E \in \Sigma$,*
$$\|F\|(E) = \sup\{\| \sum_{A_n \in \pi} \epsilon_n F(A_n)\|\},$$
dono el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de E y sobre las colecciones finitas $\{\epsilon_n\}_n$ con $|\epsilon_k| \leq 1$.

II) *Si $E \in \mathcal{F}$,*
$$\sup\{\|F(H)\| : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\} \leq \|F\|E \leq 4 \sup\{\|F(H)\| : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}.$$

Demostración. Demostremos primero I). Sea $\pi = \{E_1, ..., E_m\}$ una partición de E y $\epsilon_1, ..., \epsilon_m$ escalares tales que $|\epsilon_k| \leq 1$ para todo $1 \leq k \leq m$. Entonces

$$\|\sum_{n=1}^{m} \epsilon_n F(E_n)\| = \sup\{|x^*(\sum_{n=1}^{m} \epsilon_n F(E_n))| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$$
$$\leq \sup\{\sum_{n=1}^{m} |\epsilon_n x^* F(E_n)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$$
$$\leq \sup\{\sum_{n=1}^{m} |x^* F(E_n)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \leq \|F\|(E).$$

Demostremos la desigualdad contraria. Sea $\pi = \{E_1, ..., E_m\}$ una partición de E otra vez y $x^* \in X^*$ with $\|x^*\| \leq 1$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{m} |x^* F(E_n)| = \sum_{n=1}^{m} sgn(x^* F(E_n)) x^* F(E_n)$$
$$\leq \|\sum_{n=1}^{m} sgn(x^* F(E_n)) F(E_n)\|,$$

y ya estamos. Con lo que I) queda demostrado.

Demostremos ahora II). Si $E \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$\sup\{\|F(H)\| : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\} = \sup\{\sup\{|x^* F(H)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} : H \subset E, H \in \mathcal{F}\}$$

$$\leq \|F\|(E).$$

La desigualdad contraria es fácil de comprobar si, tomando una partición finita π y considerando $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq 1$, separamos $x^*F(A_n)$ en sus sus términos positivos y sus términos negativos y estudiamos las dos sumas resultantes (estamos considerando X un espacio de Banach sobre los reales, si lo es sobre los complejos es análoga separando primero x^*F en su parte real y su parte imaginaria). Así demostramos II).

□

Ahora ya podemos tratar correctamente la integración contra medidas vectoriales. En concreto pediremos a las medidas que sean de semi-variación acotada. Al principi de la sección hemos comentado que se podía hacer sin definir la semi-variación, solamente con la variación total, y esto es porque, como hemos visto, $\|F\|(\Omega) \leq |F|(\Omega)$. Pero, en vistas de la Proposición 15.b. con la semi-variación basta para acotar la norma de los valores que toma la medida. De hecho, el último resultado, nos muestra que una medida vectorial F es de semi-variación acotada si, y sólo si, su recorrido está acotado en X. Por este motivo a las medidas de semi-variación acotada se les acostumbra a llamar solamente medidas acotadas.

Vamos, pues a definir la integral de una función medible y acotada respecto una medida vectorial acotada (de semi-variación acotada). Sea (Ω, Σ) un espacio medible y $F : \Omega \longrightarrow X$ una medida vectoria acotada. Si f es una medida simple a valores escalares, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ con $\alpha_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $E_1, ..., E_n$ conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces definimos $T_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(E_i)$. Es claro que así definimos una aplicación lineal.

Si consideramos el espacio de las funciones simples sobre Σ con la norma del supremo, no es complicado ver que T_F es un funcional lineal y continuo.

Proposición 16. *El funcional lineal $T_F : S(X) \longrightarrow X$ (dónde $S(X)$ denota el espacio de las funciones simples sobre X) que acabamos de definir es lineal y continuo.*

Demostración. La linealidad, com ya hemos comentado, es trivial. Veamos la continuidad. Sea f iuna función simple y $\beta = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\})$. Entonces tenemos que

$$\|T(f)\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(E_i)\| = \beta \|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i/\beta) F(E_i)\| \leq \beta \|F\|(\Omega).$$

Con lo cual $\|T_F\| \leq \|F\|(\omega)$ y T_F es un funcional lineal y continuo.

□

Ahora, utilizando la proposición 15.a., es claro que, de hecho, $\|T_F\| = \|F\|(\Omega)$. Como T_F es lineal y continuo, tine una única extensión al espacio de funciones sobre Ω a valores escalaras que son límite uniforme de funciones simples; o sea, al espacio de funciones medibles acotadas. Denotaremos este espacio por $B(\mathcal{F})$. Ahora ya tenemos la base necesaria para definir una integral.

Definición 18. Sea (X, Σ) uns espacio medible y $F : \Omega \longrightarrow X$ una medida vectorial de semi-variación acotada. Si $f \in B(\mathcal{F})$, definimos

$$\int f dF = T_F(f).$$

2.2. Integración de funciones vectoriales

En esta sección vamos a estudiar la integración de funciones a valores en espacios de Banach respecto a medidas finitas. Durante toda la sección (Ω, Σ, μ) va a ser un espacio de medida completo con μ finita y X un espacio de Banach. En general, el estudio puede extenderse para medidas σ-finitas y espacios de medida no completos, pero el objetivo no es contruir una teoría de integración lo más general posible, sino poder más tarde discutir si se puede, o no, generalizar a las medidas vectoriales el Teorema de Radon-Nikodym. De todos modos, las generalizaciones para medidas σ-finitas no distan tanto de las que hemos visto en el caso de las medidas con signo y complejas.

2.2.1. Funciones medibles

Primero de todo vamos a definir qué entendemos por función medible en el contexto de funciones a valores en espacios de Banach. De hecho, vamos a ver que existen dos tipos de medibilidad (que enseguida relacionaremos).

Definición 19. Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se llama simple si es de la forma:

$$f = \sum_{i=1}^{N} x_i \chi_{E_i}$$

con $x_1, ..., x_N \in X$ y $E_1, ..., E_N \in \Sigma$.

Es trivial que en la definición anterior se pueden considerar $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y la definición no varía. Es una suposición que nos puede ahorrar trabajo en alguna demostraciones.

Ahora ya podemos definir los dos tipos de medibilidad.

Definición 20. Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ-medible si existe una sucesión $\{s_n\}_n$ de funciones simples tal que $\lim_n \|f - s_n\| = 0$ a.e.(μ).

Definición 21. Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es débilmente μ-medible si para todo $x^* \in X^*$ $x^* f$ es μ-medible. Si $\Gamma \subseteq X^*$ y $x^* f$ es μ-medible para todo $x^* \in \Gamma$, decimos que f es Γ-medible.

Primero de todo, es evidente que si f es μ-medible entonces, como todo $x^* \in X^*$ es continuo, también es débilmente μ-medible. También es interesante establecer algún tipo de relación con la medibilidad que conocíamos de las funciones complejas, i.e, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Es bastante fácil ver que toda función compleja medible según la teoría de la medida clásica también lo es (μ-medible) con la definición que acabamos de dar, puesto que es aproximable por funciones simples (que en el caso complejo coinciden con las funciones simples que hemos definido aquí). En la otra dirección, si una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es μ-medible, como es límite a.e. de funciones medibles es medible (estamos en un espacio de medida completo), y entonces f también es medible en el sentido clásico. En el caso de las funciones complejas también es evidente que μ-medible y débilmente μ-medible son equivalentes.

La siguiente proposición es evidente.

Proposición 17. *La μ-medibilidad y la μ-medibilidad débil se conservan bajo suma, producto por escalar y límite a.e.*

Veamos ahora un resultado que relaciona los dos tipos de medibilidad que hemos definido.

Teorema 16 (de medibilidad de Pettis)**.** *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función, entonces f es μ-medible si, y sólo si,*

I) *existe un conjunto $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable (f es mu-esencialmente separablemente valuada), y*

II) *f es débilmente mu-medible.*

Demostración. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ μ-medible. Ya hemos comentado que es claro que f es débilmente μ-medible, puesto que si $\{s_n\}_n$ son funciones simples que tienden a.e. a f, entonces si $x^* \in X^*$, $\{x^* s_n\}_n$ son funciones simples que tinede a $x^* f$ a.e.

Veamos ahora que f es μ-esencialmente separablemente valuada. Sabemos que existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_n$ con $\lim_n \|f - s_n\| = 0$ a.e. Sea E el conjunto de medida nula donde esto no se cumple; queremos ver que $f(\Omega \setminus E)$ es separable. Cogiendo como sucesión los coeficientes de las funciones simples obtenemos el resultado inmediatamente: si $\omega \in \Omega \setminus E$, $\lim_n \|f(\omega) - s_n(\omega)\| = 0$, con lo que existe una subsucesión de la sucesión que hemos construido que tiende a $f(\omega)$.

Nos falta demostrar la otra dirección. Sea E tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable. Sea $\{x_n\}_n$ un subconjunto numerable denso de $f(\Omega \setminus E)$. El Teorema de Hahn-Banach nos permite escoger una sucesión $\{x_n^*\}_n$ de X^* tal que $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$ y $\|x_n^*\| = 1$ para todo n. Sea $\omega \in \Omega \setminus E$, escogemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\lim_k x_{n_k} = f(\omega)$. Entonces es claro que para todo n_k tenemos $|x_{n_k}^*(f(\omega))| \leq \|f(\omega)\|$. Además para todo $\epsilon > 0$ existe k suficientemente grande tal que

$$\|f(\omega)\| \leq \|x_{n_k}\| + \epsilon = x_{n_k}^*(x_{n_k}) + \epsilon = x_{n_k}^*(x_{n_k} - f(\omega)) + x_{n_k}^*(f(\omega)) + \epsilon,$$

con lo que $\|f(\omega)\| \leq x_{n_k}^*(f(\omega)) + 2\epsilon$. Así pues, $\|f(\omega)\| = \sup_n \{x_n^*(f(\omega))\}$ si $\omega \in \Omega \setminus E$. Tenemos com hipótesis que f es débilmente μ-medible, o sea que todas las x_n^* son μ-medibles y, como hemos argumentado anteriormente, medibles en el sentido clásico. Por lo tanto tenemos que $\|f\|$ es a.e. el supremo de funciones medibles y es medible.

Es totalmente anàlogo ver que si definimos $f_n(\omega) = \|f(\omega) - x_n\|$, es medible para todo n. Así pues $E_n = \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) < \epsilon\}$ es un conjunto medible para todo n. Ahora definimos $g : \Omega \longrightarrow X$ como

$$g(\omega) = \begin{cases} x_n & \text{si} \quad x \leq \omega \in E_n \setminus \cup_{m<n} E_m \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Es evidente por construcción que $\|g - f\| < \epsilon$ a.e. Haciendo $\epsilon = 1/n$ (para los números naturales) construimos una sucesión de funciones numerablemente valuadas g_n tales que $\|g_n - f\| < 1/n$ a.e. para todo n. Cada g_n es de la forma $g_n = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{n,m} \chi_{E_{n,m}}$ con $E_{n,i} \cap E_{n,j} = \emptyset$ si $i \neq j$. En consecuencia, como μ es una medida finita,

$$\mu(\cup_{i=1}^{+\infty} E_{n,i}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_{n,i}) < +\infty,$$

con lo cual para todo $\delta > 0$ existe M tal que $\sum_{i=M+1}^{\infty} \mu(E_{n,i}) < \delta$. Para cada n escogemos pues $h_n = \sum_{i=1}^{M(n)} x_{n,m} \chi_{E_{n,m}}$ con $M(n)$ tal que $\sum_{i=M+1}^{\infty} \mu(E_{n,i}) < 1/n$. Queremos ver que así $\lim_n \|h_n - f\| = 0$ a.e. Sea

$$A = \{\omega : \lim_n \|h_n(\omega) - f(\omega)\| \neq 0\}$$

$$= \{\omega \in E : \lim_n \|h_n(\omega) - f(\omega)\| \neq 0\} \cup \{\omega \in E^c : \lim_n \|h_n(\omega) - f(\omega)\| \neq 0\}.$$

Pero si $\omega \in E^c$, entonces $\|g_n(\omega) - f(\omega)\| < 1/n$ para todo n.

Si $\lim_n \|h_n(\omega) - f(\omega)\| \neq 0$ quiere decir que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un $K(N) > N$ tal que $\|h_n(\omega) - f(\omega)\| > \epsilon$. Pero esto quiere decir que a partir de un K suficientemente grande ω està en infinitas colas de las g_n que hemos construido. Así pues A está en un conjunto de medida nula y, al ser la medida completa, $\mu(A) = 0$ y ya estamos.

□

De la demostración del teorema anterior se desprenden trivialmente los siguientes resultados.

Corolario 2. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ-medible si, y sólo si, es el límite a.e.(μ) de una sucesión de funciones μ-medibles con recorrido numerable.*

Corolario 3. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ μ-esencialmente separablemente valuada es μ-medible si, y sólo si, existe un conjunto normador $\Gamma \subseteq X^*$ tal que x^*f es μ-medible para todo $x^* \in \Gamma$.*

Un conjunto $\Gamma \subseteq X^*$ es normador si para todo $x \in X$ se cumple que

$$\|x\| = \sup \left\{ \frac{|x^*x|}{\|x^*\|} : x^* \in \Gamma \right\}.$$

2.2.2. La integral de Bochner

En esta sección vamos a trabajar la integral Bochner, que es la integral de funciones vectoriales que más manejaremos des de este momento hasta el final del trabajo. De las dos integrales de funciones vectoriales que veremos es la más parecida a la integral de Lebesgue.

Para construir la integral de Bochner utilizaremos un argumento de aproximación mediante funciones simples e integrales de funciones simples, con lo que en primer lugar debemos definir la integral para funciones simples y, evidentemente, decir qué entendemos por función Bochner-integrable.

Definición 22. Sea $s = \sum_{i=1}^{N} x_i \chi_{E_i}$ una función simple, $s : \Omega \longrightarrow X$. Entonces definimos la integral Bochner de s como

$$\int_{\Omega} s d\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(E_i).$$

Proposición 18. *Si $s_1, s_2 : \Omega \longrightarrow X$ son dos funciones simple y k un elemento del cuerpo, entonces tenemos que:*

- ks_1 *es una función simple y* $\int_{\Omega} ks_1 d\mu = k \int_{\Omega} s_1 d\mu$.
- $s_1 + s_2$ *es una función simple y* $\int_{\Omega}(s_1 + s_2) d\mu = \int_{\Omega} s_1 d\mu + \int_{\Omega} s_2 d\mu$.
- $\left\| \int_{\Omega} s_1 d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|s_1\| d\mu$.

Demostración. Los dos primeros resultados son inmediatos a partir delas definiciones de función simple y de su integral. El tercero es consecuencia directa de la desigualdad trinagular.

□

Definición 23. Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es Bochner-integrable si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

- $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f - s_n\| = 0$ a.e.(μ).
- $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega} \|f - s_n\| d\mu = 0$.

La intención ahora es, evidentemente, definir la integral de Bochner de una función f Bochner-integrable como $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega} s_n d\mu$, donde $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones simples de la definición de la integrabilidad Bochner. Para ello debemos ver que el límite existe y que no depende de la sucesión escogida.

Proposición 19. *Sea f Bochner-integrable y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples como la de la Definición 23. Entonces existe* $\lim_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} s_n d\mu$.

Además, si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión de funciones simples como la de la Definición 23, entonces $\lim_{n \in \mathbb{N}} s_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} t_n$.

Demostración. Como las integrales toman valores en un espacio de Banach es suficiente ver que la sucesión $(\int_\Omega s_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Comprobémoslo (sea $n < m$).

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega s_m d\mu - \int_\Omega s_n d\mu\right\| &= \left\|\int_\Omega (s_m - s_n) d\mu\right\| \leq \int_\Omega \|(s_m - s_n)\| d\mu \\ &\leq \int_\Omega \|s_m - f\| d\mu + \int_\Omega \|f - s_n\| d\mu \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

cuando $n, m \longrightarrow +\infty$. Con lo que $(\int_\Omega s_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, existe $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega s_n d\mu$.

Para ver que si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otrasucesión de funciones simples como la de la Definición 23, entonces $\lim_{n\in\mathbb{N}} s_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} t_n$ basta con considerar la sucesión de funciones simples fruto de alternar $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dicha sucesión es trivialmente de Cauchy y, por lo tanto, convergente, lo cual implica que todas sus subsucesiones convergen al mismo límite. En particular $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

De este modo, ya podem definir la integral de Bochner de una función integrable Bochner.

Definición 24. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función Bochner-integrable. Entonces, su integral de Bochner es

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega s_n d\mu,$$

donde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es como en la Definición 21.

Caractericemos las funciones Bochner-integrables de una forma más familiar.

Teorema 17 (de Bochner)**.** *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Entonces f es Bochner-integrable si, y sólo si, $\|f\| \in L^1(\mu)$.*

Demostración. Sea f Bochner-integrable y sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones simples de la definición. Como $\|f\| = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|$ a.e.(μ) y $\|s_n\|$ son funciones simples, $\|f\|$ es μ-medible. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\int_\Omega \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - s_n\| d\mu + \int_\Omega \|s_n\| d\mu.$$

Ahora bien, la segunda integral es finita para todo $n \in \mathbb{N}$ y la primera lo es para n suficientemente grande, puesto que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \|f - s_n| d\mu = 0$, con lo cual $\int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty$ y $\|f\| \in L^1(\mu)$.

Supongamos ahora que $\|f\| \in L^1(\mu)$ y sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples que converge a f a.e.(μ). Definimos una nueva sucesión de funciones simples $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n(\omega) = \begin{cases} s_n(\omega) \qquad si \qquad \|s_n(\omega)\| \leq 2\|f(\omega)\| \\ 0 \qquad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De este modo claramente $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|t_n - f\| = 0$ a.e.(μ) y $\|t_n - f\|$ es medible. Además, tal como hemos definido las t_n,

$$\|t_n - f\| \leq \|t_n\| + \|f\| \leq 3\|f\|.$$

Así pues, aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos finalmente que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \|t_n - f\| d\mu = 0,$$

con lo cual f es Bochner-integrable.

$\square$

Nota 5. *El Teorema de Bochner, en particular, nos asegura que en funciones reales y complejas, la integrabilidad en el sentido Bochner es idéntica a la que ya conocíamos. De la definición de integral de Bochner se deduce trivialmente que además, si la función es integrable, ambas integrales coinciden. Es decir, que en funciones reales o complejas, la integral de Bochner es la integral habitual.*

Veamos ahora la versión vectorial de uno de les teoremas fundamentales de la teoría de integración clásica.

Teorema 18 (de la convergencia dominada)**.** *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Bochner-integrables $f_n : \Omega \longrightarrow X$ y sea f μ-medible tal que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f$ a.e.(μ). Entonces, si existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $\|f_n\| \leq g$ a.e.(μ) para todo $n \in \mathbb{N}$, f es Bochner-integrable y*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Demostración. Por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue $\|f\|$ es integrable y, por lo tanto, f es Bochner-integrable. Además podemos mayorar

$$\|f - f_n\| \leq \|f\| + g \;\; a.e.(\mu).$$

Así pues podemos aplicar nuevamente el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y otenemos

$$\overline{\lim_{n \longrightarrow +\infty}} \left\| \int_\Omega (f - f_n) d\mu \right\| \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0.$$

(La primera desigualdad que hemos utilizado la vamos a demostrar en el siguiente teorema.)

$\square$

Teorema 19. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función Bochner-integrable. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

I*)* $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} \int_E f d\mu = 0.$

II*)* $\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| d\mu$ *para todo* $E \in \Sigma$.

III) *Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ es una familia de elementos disjuntos dos a dos y consideramos $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, entonces*

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{E_i} f d\mu.$$

IV) *Si definimos $F(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$, entonces F es de variación total acotada y, de hecho,*

$$|F|(E) = \int_E \|f\| d\mu.$$

Demostración.

I) Puesto que $\lim_{\mu(E)\longrightarrow+\infty} \|f\| d\mu = 0$ al ser $\|f\| \in L^1(\mu)$, la prueba es consecuencia inmediata del segundo apartado del teorema.

II) Ya hemos abordado que la demostración para funciones simples. Como existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $\int_E f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E s_n d\mu$, entonces

$$\left\|\int_E f d\mu\right\| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left\|\int_E s_n d\mu\right\| \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E \|s_n\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu.$$

La última igualdad proviene del hecho que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede escogerse tal que $\|s_n\| \leq 2\|f\|$ (lo hemos visto en la demostración del Teorema de Bochner).

III) Primero de todo notemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} \int_{E_i} f d\mu\right\| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{E_i} \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty;$$

con lo que $\sum_{i=1}^{+\infty} \int_{E_i} f d\mu$ es absolutamente convergente. Veamos que su límite es $\int_E f d\mu$. Por la aditividad de la integral de Bochner tenemos que

$$\left\|\int_E f d\mu - \sum_{i=1}^{m} f d\mu\right\| = \left\|\int_{\bigcup_{i=m+1}^{+\infty} E_i} f d\mu\right\|,$$

pero $\mu(\bigcup_{i=m+1}^{+\infty} E_i) = 0$ y utilizando el primer apartado ya estamos.

IV) Sea $E \in \Sigma$ un conjunto medible cualquiera y π una partición finita de E. Entonces,

$$\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \sum_{A\in\pi} \left\|\int_A f d\mu\right\| \leq \sum_{A\in\pi} \int_A \|f\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu,$$

y, por lo tanto, $|F|(E) \leq \int_E \|f\| d\mu$ y F es de variación total acotada.

Veamos ahora la desigualdad contraria. Como f es Bochner-integable podemos escoger una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_n \longrightarrow f$ a.e.(μ), con $\|s_n\| \leq 2\|f\|$ y tal que

$$\lim_{n\longrightarrow+infty} \int_\Omega \|f - s_n\| d\mu = 0.$$

Entonces dado $\epsilon > 0$ podemos escoger $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_\Omega \|f - s_{n_0}\| d\mu < \epsilon$ (escribiremos $f_{n_0} = \sum_{i=1}^N x_i \chi_{A_i}$). Además, si $E \in \Sigma$, la partición de E dada por $\pi_0 = \{E \cap A_i\}_{i=1}^n$ cumple que

$$\sum_{A\in\pi_0} \left\| \int_A s_{n_0} d\mu \right\| = \int_E \|s_{n_0}\| d\mu.$$

Ahora refinamos la partición π_0 y obtenemos una partición π tal que

$$\left| |F|(E) - \sum_{A\in\pi} \left\| \int_A f d\mu \right\| \right| < \epsilon.$$

Y solamente nos falta constatar que

$$\sum_{A\in\pi} \left| \left\| \int_A f d\mu \right\| - \left\| \int_A s_{n_0} d\mu \right\| \right| \leq \sum_{A\in\pi} \left\| \int_A (f - s_{n_0}) d\mu \right\| \leq \sum_{A\in\pi} \int_A \|f - s_{n_0}\| d\mu < \epsilon.$$

De este modo, tenemos que

$$\left| |F|(E) - \int_E \|s_{n_0}\| d\mu \right| = \left| |F|(E) - \sum_{A\in\pi} \int_A \|s_{n_0}\| d\mu \right| < 2\epsilon,$$

y, por lo tanto, podemos construir una subsucesión $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$|F|(E) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \int_E \|s_{n_k}\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu,$$

donde la última igualdad es consecuencia del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

□

Corolario 4. *Sean dos funciones f y g Bochner-integrables tales que para todo $E \in \Sigma$,*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Entonces f=g a.e.(μ).

Demostración. Sea $F(E) = \int_E (f - g) d\mu$. Entonces $F(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$, con lo cual $|F|(\Omega) = 0$. Pero en el teorema anterior hemos visto que

$$0 = |F|(\Omega) = \int_\Omega \|f - g\| d\mu,$$

o sea que $\|f - g\| = 0$ a.e.(μ) y, por lo tanto, $f = g$ a.e.(μ).

□

Es importante notar que teorema anteior nos dice que si f es una función Bochner-integrable, entonces definiendo $F(E) = \int_E f d\mu$ obtenemos una medida vectorial de variación total acotada. El corolario nos garantiza la unicidad de esa f, es decir, que dada una medida vectorial F de variación total acotada como mucho hay una f Bochner-integrable que cumple que $F(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.

En medidas con signo y medidas complejas el Teorema de Radon-Nikodym nos garantiza que, de hecho, para cada medida existe una f integrable (recordamos que estamos en un espacio de medida finita) tal que $F(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. En medidas vectoriales esto no es así en general. Dedicaremos las últimas páginas del trabajo a ver bajo qué condiciones ocurre.

Teorema 20 (de Hille)**.** *Sea T un funcional lineal y cerrado (grafo cerrado) con dominio en X y valores en otro espacio de Banach Y. Si tanto f como Tf son Bochner-integrables, entonces para todo $E \in \Sigma$ se cumple que*

$$T\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E T f d\mu.$$

Demostración. Sea $E \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$. Podemos escoger $h_\epsilon = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \chi_{E_i}$ con $x_i \in X$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $E_i \subseteq E$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\|f(\omega) - h_\epsilon(\omega)\| : \omega \in E \setminus N_1\} < \epsilon/2$$

para algún $N_1 \in \Sigma$ con $\mu(N_1) = 0$. Análogamente podemos escoger $g_\epsilon = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} y_{i,j}\chi_{E_{i,j}}$ con $y_{i,j} \in Y$ y donde los conjuntos de la familia $\{E_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ son disjuntos dos a dos y cumplen $E_i = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_{i,j}$ tal que

$$\sup\{\|Tf(\omega) - g_\epsilon(\omega)\| : \omega \in E \setminus N_2\} < \epsilon/$$

para algún $N_2 \in \Sigma$ con $\mu(N_2) = 0$. Ahora, para cada pareja $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ escogemos $\omega_{i,j} \in E_{i,j}$ y definimos $\phi = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(\omega_{i,j})\chi_{E_{i,j}}$. De este modo, si $\omega \notin N_1 \cup N_2$,

$$\|f(\omega) - \phi(\omega)\| < \epsilon;$$

$$\|Tf(\omega) - T\phi(\omega)\| < \epsilon.$$

Además es evidente que $\int_\Omega \|f - \phi\| d\mu < \epsilon\mu(\Omega)$ y $\int_\Omega \|Tf - T\phi\| d\mu < \epsilon\mu(\Omega)$. Además también tenemos que

$$\int_E \phi d\mu = \lim_{n,m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\omega_{i,j})\mu(E_{i,j})$$

y que

$$\int_E T\phi d\mu = \lim_{n,m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Tf(\omega_{i,j})\mu(E_{i,j}).$$

Así pues, como T es cerrado, $\int_E \phi d\mu \in \mathcal{D}(T)$ y $T\left(\int_E \phi d\mu\right) = \int_E T\phi d\mu$.

Escogemos una sucesión $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i\longrightarrow+\infty}\epsilon_i = 0$ y $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones que obtenemos con el procedimiento anterior; entonces, por el Teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{i\longrightarrow+\infty}\int_E \phi_i d\mu = \int_E f d\mu$$

y

$$\lim_{i\longrightarrow+\infty}\int_E T\phi_i d\mu = \int_E T f d\mu.$$

Y ya estamos, puesto que T cerrado y para todo $i\in\mathbb{N}$, $T\left(\int_E \phi_i d\mu\right) = \int_E T\phi_i d\mu$, con lo cual es inmediato que $T\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E T f d\mu$.

□

Corolario 5. *Sea f y g μ-medibles. Si para todo $x^*\in X^*$, $x^*f = x^*g$ a.e.(μ), entonces $f = g$ a.e.(μ).*

Demostración. Escogemos una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Sigma$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ y tanto f como g están acotadas en cada E_n. De este modo, $\int_E f\chi_{E_n} d\mu$ y $\int_E g\chi_{E_n} d\mu$ existen para todo $E\in\Sigma$. Pero como $x^*f = x^*g$ a.e.(μ), entonces estas integrales coinciden para todo $n\in\mathbb{N}$.

Así pues, el corolario nos asegura que $f\chi_{E_n} = g\chi_{E_n}$ a.e.(μ) para todo $n\in\mathbb{N}$. Con lo cual $f = g$ a.e.(μ).

□

2.2.3. Integral de Dunford (Pettis)

Otra forma de integración de funciones vectoriales es la integral de Dunford (ya veremos en qué condiciones llamada de Pettis). También veremos que la integral de Pettis y la de Bochner, de existir ambas, coinciden.

Para definir las integrales de Dunford y Pettis necesitamos un lema previo.

Lema 12 (de Dunford)**.** *Sea f una función débilmente μ-medible tal que $x^*f\in L^1(\mu)$ para todo $x^*\in X^*$. Entonces para todo $E\in\Sigma$ existe $x_E^{**}\in X^{**}$ tal que*

$$x_E^{**}(x^*) = \int_E x^*(f) d\mu.$$

Demostración. Sea $E\in\Sigma$. Definimos el funcional lineal $T : X^*\longrightarrow L^1(\mu)$ mediante $T(x^*) = x^* f_{\chi_E}$. Veamos en primer lugar que T es cerrado.

Si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n^* = x^*$ y $\lim_{n\longrightarrow+\infty} T(x_n^*) = g$ en $L^1(\mu)$, entonces existe una subsucesión $(T_{x_{n_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $g = \lim_{j\longrightarrow+\infty} T(x_{n_j})$ a.e.(μ). Pero, puntualmente, es evidente que $\lim_{n\longrightarrow} T(x_n*) = T(x^*)$ (reiteramos que puntualmente en Ω, no estamos hablando de la continuidad de T). Así pues, tenemos que $T(x^*) = g$ a.e.(μ) y T es cerrado. Además, el Teorema del grafo cerrado de Banach nos garantiza la continuidad de T, que nos permite escribir

$$\left|\int_E x^* f d\mu\right| \leq \int_E |x^* f| d\mu = \|T(x^*)\| \leq \|T\|\|x^*\|.$$

Con lo que $x_E^{**} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $x_E^{**}(x^*) = \int_E x^* f d\mu$ describe un funcional lineal y continuo en X^*. En otras palabras, $x_E^{**} \in X^{**}$. Tal como lo hemos definido es evidente que x_E^{**} cumples las propiedades deseadas.

□

Definición 25. Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función débilmente μ-medible tal que $x^* f \in L^1(\mu)$ para todo $x^* \in X^*$, la llamaremos Dunford-integrable. La integral de Dunford de f sobre $E \in \Sigma$ viene dada por el elemento $x_E^{**} \in X^{**}$ tal que para todo $x^* \in X^*$,

$$x_E^{**}(x^*) = \int_E x^* f d\mu.$$

Si, además, para todo $E \in \Sigma$ se tiene que $x_E^{**} \in X$, diremos que f es Pettis-integrable y x_E^{**} denotará la integral de Pettis de f sobre E.

Aunque, como hemos comentado, la integral de Pettis no vaya a centrar nuestra atención en este trabajo, vale la pena enunciar al menos el siguiente resultado (sin el cual quizá carecería de todo interés).

Teorema 21. *Si f es Pettis-integrable, entonces su integral de Pettis es una medida vectorial σ-aditiva sobre Σ absolutamente continua respecto μ.*

Nota 6. *Es evidente que si una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es tanto Bochner-integrable como Pettis-integrable entonces ambas integrales coinciden. Es una aplicación inmediata del Teorema de Hille.*

2.3. El Teorema de Radon-Nikodym y representabilidad

Hemos visto que la integral de Bochner es una generalización para funciones vectoriales de la integral habitual de funciones reales y complejas respecto de una medida. También hemos constatado que la integral de Bochner de una función Bochner-integrable genera una medida vectorial de variación total acotada. Es natural, pues, preguntarse si se pueden generalizar dos resultados fundamentales que hemos visto para medidas con signo y medidas complejas: el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz (para $L^1(\mu)$). Veamos como quedaría la extensión para medidas vectoriales de ambos teoremas:

Hipótesis 1 (Extensión del Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sea $\{\Omega, \Sigma, \mu\}$ un espacio de medida finita y X un espacio de Banach. Entonces, si $G : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial de variación acotada, existe una única función Bochner-integrable $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que*

$$G(E) = \int_E f d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$.

Hipótesis 2 (Extensión del Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea* $\{\Omega, \Sigma, \mu\}$ *un espacio de medida finita y* X *un espacio de Banach. Entonces, si* $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ *es un operador lineal y continuo, existe una única función* $g : \Omega \longrightarrow X$ *tal que* $g \in L^\infty(\mu)$ *y que*

$$T(f) = \int_E fgd\mu$$

para toda $f \in L^1(\mu)$.

Pues bien, ambas extensiones, sin añadir condiciones al espacio X, son falsas. Veamos dos ejemplos sencillos que nos lo muestran con claridad.

Ejemplo 2 (Una medida vectorial sin derivada de Radon-Nikodym)**.** Sea $\Omega = [0, 1]$ y μ la medida de Lebesgue sobre Σ, la σ-álgebra de los subconjuntos medibles Lebesgue de $[0, 1]$. Definimos $G : \Sigma \longrightarrow c_0$ mediante

$$G(E) = \left(\int_E \sin(2^n \pi t) d\mu(t) \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

que está claramente bien definida por el Lema de Riemann-Lebesgue. Además,

$$\|G(E)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_E sin(2^n \pi t) d\mu(t) \right| \leq \mu(E),$$

con lo que G es absolutamente continua respecto de μ, σ-aditiva y de variación total acotada. En definitiva, G es una medida vectorial de variación total acotada.

Supongamos que existe $g : \Omega \longrightarrow c_0$ Bochner-integrable y tal que $G(E) = \int_E gd\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Si escribimos $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y l_n es la evaluación a la coordenada n-ésima, para todo $E \in \Sigma$

$$l_n(G(E)) = \int_E l_n g d\mu = \int_E g_n d\mu,$$

donde en la primera igualdad hemos utilizado el Teorema de Hille. De este modo, $g_n(t) = sin(2^n \pi t)$ a.e.(μ). Pero si consideramos $E_n = \{t \in [0, 1] : |g_n(t)| \geq 1/\sqrt{2}\}$, $\mu(E_n) = 1/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual

$$\mu(\overline{\text{lím}}_{n \longrightarrow +\infty} E_n) \geq \overline{\text{lím}}_{n \longrightarrow +\infty} \mu(E_n) = 1/3.$$

Así pues, $\mu\{x \in [0, 1] : g(t) \in c_0\} \leq 2/3$ y g no toma valores a.e.(μ) en c_0. Concluimos, pues, que la medida vectorial G no tiene ninguna derivada de Radon-Nikodym respecto a μ.

Ejemplo 3 (Un operador lineal y continuo no representable Riesz)**.** Sea (Ω, Σ, μ) como en el ejemplo anterior. Definimos el operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow c_0$ mediante

$$T(f) = \left(\int f(t) \sin(2^n \pi t) d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

bien definido por el Lema de Riemann-Lebesgue. Además T es claramente lineal y, como

$$\|Tf\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int f(t)\sin(2^n\pi t)d\mu \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f(t)|d\mu = \|f\|_1,$$

también acotado.

Supongamos que existe $g \in L^\infty(\mu, c_0)$ tal que

$$T(f) = \int fgd\mu$$

para toda $f \in L^1(\mu)$. Pero si G denota la medida vectorial del ejemplo anterior, entonces para todo $E \in \Sigma$ tenemos que $G(E) = T(\chi_E) = \int_E gd\mu$ y ya hemos visto que no existe tal g.

Con lo que queda claro que las dos extensiones son falsas y cuando trabajamos con medidas vectoriales, tanto el Teorema de Radon-Nokodym como el Teorema de representación de Riesz, pasan a ser propiedades.

Definición 26. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de (Ω, Σ, μ) si para toda medida vectorial $G : \Sigma \longrightarrow X$ absolutamente continua respecto de μ existe $g \in L^1(\mu, X))$ (i.e. Bochner-integrable) tal que

$$G(E) = \int_E gd\mu$$

para todo $E \in \Sigma$.

Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de cualquier espacio de medida finita, diremos simplemente que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Definición 27. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Un operador lineal y acotado $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ es representable Riesz (o solamente representable)si existe $g \in L^\infty(\mu, X))$ tal que

$$T(f) = \int fgd\mu$$

par toda $f \in L^1(\mu)$.

Veamos ahora que, pese a ser falsas las extensiones a medidas y funciones vectoriales de ambos teoremas, si una se cumple la otra también; es decir, si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de (Ω, Σ, μ) entonces todo operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ lineal y acotado es representable y viceversa.

Para ello necesitaremos un lema previo.

Lema 13. *Sea $T : L^1(\mu)$ un operador lineal y acotado. Sea $G(E) = T(\chi_E)$ para todo $E \in \Sigma$. Entonces T es representable si, y sólo si, existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que para todo $E \in \Sigma$*

$$G(E) = \int_E gd\mu.$$

En este caso, $g \in L^\infty(\mu, X)$ *y*

$$T(f) = \int fgd\mu$$

para toda $f \in L^1(\mu)$. *Además* $\|g\|_\infty = \|T\|$.

Demostración. Si T es representable existe $g \in L^\infty(\mu, X)$ tal que $T(f) = \int fgd\mu$ para toda $f \in L^1(\mu)$. Con lo que, si $E \in \Sigma$,

$$G(E) = T(\chi_E) = \int_E gd\mu.$$

Como estamos en un espacio de medida finita, evidentemente $g \in L^1(\mu, X)$.

Probemos ahora la implicación contraria. Sea $G(E) = T(\chi_E) = \int_E gd\mu$ para alguna $g \in L^1(\mu, X)$ y todo $E \in \Sigma$. Como para $E \in \Sigma$,

$$\|G(E)\| = \|T(\chi_E)\| \leq \|T\|\|\chi_E\|_1 = \|T\|\mu(E),$$

tenemos que $|G|(E) \leq \|T\|\mu(E)$ para todo $E \in \Sigma$. Pero $|G|(E) = \int_E \|g\|d\mu$, con lo cual $\|g\| \leq \|T\|$ a.e.(μ) y, por lo tanto, $g \in L^\infty(\mu, X)$. La linealidad de la integral nos asegura que para toda s simple, $T(s) = \int sgd\mu$. Hay que ver que si $f \in L^1(\mu)$, $T(f) = \int fgd\mu$. Pero sabemos que en tal caso existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = f$ y $|s_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f - s_n\|_1 = 0$ (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). Así pues,

$$T(f) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} T(s_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int s_n gd\mu = \int fgd\mu,$$

donde en el último paso, como $\|s_n g\| \leq |f|\|g\|_\infty$ a.e.(μ), hemos aplicado el Teorema de la convergencia dominada.

Hemos visto que en estas condiciones $\|g\|_\infty = \|T\|$. Veamos la desigualdad contraria. Sea $f \in L^1(\mu)$, entonces

$$\|T(f)\| = \left\|\int fgd\mu\right\| \leq \int |f|\|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty\|f\|_1;$$

y, por lo tanto, $\|T\| \leq \|g\|_\infty$ y tenemos la igualdad.

□

Teorema 22. *Sea* X *un espacio de Banach y* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita. Entonces* X *tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de* (Ω, Σ, μ) *si, y sólo si, todo* $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ *lineal y continuo es representable.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de (Ω, Σ, μ). Sea T : ‘$1(\mu) \longrightarrow X$ un operador lineal y continuo; definimos $G(E) = T(\chi_E)$ para todo $E \in \Sigma$. Como $\|G(E)\| \leq \|T\|\mu(E)$, G es σ-aditiva, absolutamente continua respecto de μ y de variación total acotada. De este modo, como estamos suponiendo que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de (Ω, Σ, μ), existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que

$$G(E) = \int_E g d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$. El lema anterior nos garantiza inmediatamente que T es representable.

Consideremos ahora que todo operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ lineal y acotado es representable. Sea $G : \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial absolutamente continua respecto de μ y de variación total acotada. Entonces es evidente que $|G|$ también es absolutamente continua respecto de μ y podemos aplicar el Teorema de Radon-Nikodym para encontrar $h \in L^1(\mu)$ finita y no negativa tal que $|G|(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Considerando $E_n = \{\omega \in \Omega : n-1 \leq h(\omega) < n\}$ para $n \geq 1$ obtenemos una familia de conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \Sigma$ tal que $\Omega = \biguplus_{n=1}^{+\infty} E_n$ y tal que, para $E \subseteq E_n$,

$$(n-1)\mu(E) \leq |G|(E) \leq n\mu(E).$$

Fijemos n y para $f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple, definamos

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G(E_n \cap A_i) = \int_{E_n} f dG.$$

Entonces tenemos que

$$\|T_n(f)\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G(E_n \cap A_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| |G|(E_n \cap A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| n\mu(E_n \cap A_i) \leq n\|f\|_1,$$

con lo que T_n se extiende a un operador lineal y continuo de $L^1(\mu)$ a X. Así pues, y denotando ya T_n como dicha extensión, T_n es representable y existe $g_n \in L^\infty(\mu, X)$ tal que, para toda $f \in L^1(\mu)$,

$$T_n(f) = \int f g_n d\mu.$$

Así pues, si $E \in \Sigma$, $G(E_n \cap E) = T_n(\chi_E) = \int_E g_n d\mu$. Haciendo esto para todo $n \geq 1$, obtenemos una sucesión $(g_n)_{n\geq 1} \subseteq L^\infty(\mu, X)$ tal que, para todo $E \in \Sigma$, $G(E \cap E_n) = \int_E g_n d\mu$.

Definimos $g : \Omega \longrightarrow X$ mediante $g(\omega) = g_n(\omega)$ si $\omega \in E_n$ (como la familia $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una partición de Ω, g está bien definida). Entonces, por la σ-aditividad de G tenemos que

$$G(E) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} G\left(E \cap \biguplus_{n=1}^{m} E_n\right) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} \int_{E \cap \biguplus_{n=1}^{m} E_n} g d\mu$$

y, además, como G es de variación total acotada $\|g\| \in L^1(\mu)$ y, por lo tanto, $g \in L^1(\mu, X)$. Terminamos la demostración haciendo uso del Teorema de la convergencia dominada:

$$G(E) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} \int_{E \cap \biguplus_{n=1}^{m} E_n} g d\mu = \int_E g d\mu.$$

□

Para terminar, trazamos el camino que lleva a un resultado fundamental: todo espacio de banach reflexivo tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Teorema 23 (de Dunford-Pettis)**.** *Los espacios duales separables tienen la propiedad de Radon-Nikodym.*

Teorema 24. *Un espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodym si la tienen todos sus subespacios (lineales) cerrados separables. Además, si un espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodym, también la tienen sus subespacios (lineales) cerrados.*

Corolario 6 (de Phillips)**.** *Si un espacio de Banach es reflexivo entonces tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Conclusiones

La continuación natural del trabajo consiste en el estudio de las hipótesis que hace falta imponer al espacio de Banach X para que se puedan extender vectorialmente el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz (hemos probado que si uno se puede extender el otro también). Esta línea de estudio, que se antoja particularmente interesante, requiere, pero, conocimientos previos considerables de operadores lineales y continuos débilmente compactos, que es algo que no se trata durante el grado. Así pues, para demostrar resultados como el Teorema de Dunford-Pettis y el Corolario de Phillips, con los que hemos acabado el capítulo de Medidas Vectoriales, se necesitan técnicas de Análisis Funcional que no he tenido tiempo de dominar.

Durante el desarollo del trabajo han surgido ciertas dificultades. La más notable ha sido, sin duda, el escaso número de fuentes de información (a nivel de estudiantes de grado) acerca de las medidas vectoriales. A parte de [2], casi no hay libros dedicados al tema (existe uno de N. Dinculeanu titulado también "Vector Measures", pero es bastante más antiguo y su tratamiento hace casi imposible utilizarlo para complementar [2]). Fomentado por esto, además, casi toda información encontrada vía Internet o en libros no tan especializados remite invariablemente a [2], con lo que si uno tiene dudas sobre alguna demostración, no tiene nada fácil resolverlas de otra forma que no sea con papel y bolígrafo. Asimismo, como [2] va destinado a un público considerablemente instruido, en el proceso de estudio me surgieron dudas; dudas que en algunos casos se tradujeron en horas de garabatos y desesperación. La Dra. María Jesús Carro evitó en más de una ocasión que estas horas de desesperación se convirtieran en días de desesperación.

Dicho esto, y aunque se antoja fácil (y un poco tópico) decirlo ahora, creo que son precisamente estas dificultades las que me han hecho madurar. Durante el grado uno se acostumbra a, en general, recibir la información muy procesada y a disponer además de un listado de libros con los que complementarla. Pasar de este a punto a tener delante una demostración que no entiendes y que no puedes complementar con ninguna otra fuente es una contraposición tan necesaria como positiva. A mí, al menos, me ha exigido y me ha hecho crecer; y esto es bueno.

Bibliografía

[1] Cerdà, J.: *Análisis Real*, Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 1996.

[2] Diestel, J.; Uhl, J. J.; *Vector Measures*, Mathematical surveys; 15, American Mathematical Society, Providence, 1977.

[3] Driver, B. K.; *Real Analysis Lectures Notes*, apuntes, University of California, San Diego, 2003.

[4] Folland, G. B.: *A Guide to Advanced Real Analysis*, Dolciani Mathematical Expositions; 37, MAA Guides; 2, The Mathematical Association of America (Incorporated), USA, New York, 2009.

[5] Folland, G. B.: *Real analysis: modern techniques and their application*, Pure and applied mathematics (John Wiley and Sons), Wiley, New York, 1984.

[6] Halmos, P.; *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1974.

[7] Kreuter, M.: *Sobolev Space of Vector-valued Functions*, trabajo de fin de grado, Ulm University, 2015.

[8] Pérez, M. A.: *The Radon-Nikodym Theorem*, apuntes, Université du Québec à Montréal, 2010.

[9] Royden, H. L.: *Real Analysis*, Macmillan, New York, 1963.

[10] Rudin, W.: *Análisis Real y Complejo*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill, London, 1970.