

Treball final de grau
GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

FILTRES DE KALMAN

Autor: **Eduard Ribas Fernández**

Director: Dr. Gerard Gómez Muntané
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2016

Abstract

Kalman Filters are optimal estimation algorithms that have numerous applications in science and technology. They are one of the main topics in Control Theory and Control Systems, and they are shown to be very useful when tracking dynamic systems. In this thesis we present the Least-Squares Method as a previous step to Kalman Filters, for which we discuss some of their versions, like the Linear Kalman Filter, the Extended Kalman Filter and nonlinear estimators. Then, some simple dynamical simulations are described in order to understand the implementation of a Kalman Filter. Finally, we conclude this work by introducing the basis of the problem of satellite Orbit Determination, one of the applications of Kalman Filtering.

Resum

Els Filtres de Kalman són uns algoritmes d'estimació optimal de gran utilitat en la ciència i la tecnologia. Són un dels temes principals de la Teoria de Control i el Control de Sistemes, i són molt utilitzats en problemes de seguiment de sistemes dinàmics. En aquest Treball de Final de Grau presentem el mètode dels Mínims Quadrats com a pas previ al desenvolupament dels Filtres de Kalman, pels quals en discutim diferents versions, com ara el Filtre de Kalman Lineal, el Filtre de Kalman Estès i estimació no-lineal. Seguidament, presentem un seguit de simulacions de sistemes dinàmics que, tot i ser simples, exemplifiquen l'ús i el potencial dels Filtres de Kalman. Finalment, conclouem el treball introduint les bases necessàries pel problema de Determinació d'Òrbites de satèl·lits, en el qual els Filtres de Kalman són de gran utilitat, però sense arribar a discutir-ne la solució.

Agraïments

Vull agrair el suport rebut per part del Dr. Gerard Gómez, l'ajuda i el consell del qual han estat essencials per a la realització d'aquest treball, que m'ha permès introduir-me en la teoria de modelització dinàmica i dels Filtres de Kalman.

També vull donar les gràcies als professors dels graus de Matemàtiques i Física, que m'han acompanyat, al llarg d'aquests darrers sis anys, a descobrir la precisió del raonament matemàtic, la bellesa de les principals branques de les Matemàtiques i els apassionants camps de la Física.

Per últim, vull expressar el meu profund agraïment a la meva família i els meus amics, que amb el seu suport incondicional al llarg de tots aquests anys, m'han permès gaudir d'una molt bona etapa d'estudiant.

Sumari

Introducció	1
1 Optimització, Modelització i Mínims Quadrats	5
1.1 Problemes d'optimització	5
1.2 Modelització de sistemes dinàmics	5
1.3 Mètode dels Mínims Quadrats	7
1.3.1 Definició del Mètode dels Mínims Quadrats	7
1.3.2 Ponderació d'errors	10
1.3.3 Errors de soroll	11
1.3.4 Errors sistemàtics	12
1.3.5 Informació a priori	13
2 Filtres de Kalman	15
2.1 Mètode dels Mínims Quadrats Seqüencial	15
2.2 Filtre de Kalman Lineal	16
2.2.1 Predicció: Actualització del temps	17
2.2.2 Correcció: Actualització de l'estat	18
2.3 Filtre de Kalman Estès	19
2.4 Mètode dels Mínims Quadrats o Filtres de Kalman	19
2.5 Modelització no-lineal: més enllà de LKF i EKF	20
3 Implementació	21
3.1 Plantejament del model	21
3.2 Estimació d'un valor constant	22
3.3 Estimació d'una trajectòria lineal	23
3.4 Estimació d'un tir parabòlic	24
4 Determinació d'Òrbites	27

4.1	Problema dels dos cossos	27
4.2	Problema de Determinació d'Òrbites	31
Conclusions		33
A Codi en Python		35
A.1	Filtres de Kalman	35
A.2	Valor constant	37
A.3	Trajectòria lineal	38
A.4	Tir parabòlic	39
A.5	Simulació d'una òrbita el·líptica plana	41
Referències		41

Introducció

Motivació i Objectiu

El coneixement matemàtic s'estructura en diferents branques segons el seu objecte d'estudi i les eines de què disposa: aritmètica, àlgebra, geometria, càlcul, anàlisi, etcètera. Si bé en els primers cursos universitaris aquestes branques romanen força diferenciades per a l'estudiant, amb el pas del temps i amb l'augment del coneixement, el treball transversal d'aquestes branques esdevé de gran utilitat.

La *modelització matemàtica* és un bon exemple d'aquesta transversalitat. El seu objectiu és representar, amb l'ajuda de models matemàtics, fenòmens diversos presents en la realitat, com per exemple fenòmens físics, evolucions de sistemes, dades socioeconòmiques o, fins i tot, decisions de l'ésser humà, per tal d'estudiar-ne el comportament i els factors que hi juguen un paper. Aquests models es basen en conceptes fonamentals de les Matemàtiques i esdevenen una eina molt potent per molts camps de la ciència.

Un cas concret de modelització matemàtica és l'estudi de *sistemes dinàmics*, és a dir, sistemes o conjunts d'entitats l'estat dels quals evoluciona amb el temps. Els sistemes dinàmics poden ser fenòmens físics com la cinemàtica de cossos o la dinàmica de fluids, però també processos industrials, evolucions de poblacions, etcètera.

Moltes vegades, les lleis que regeixen els sistemes dinàmics són desconegudes, ja sigui perquè se'n desconeix el comportament, o bé els paràmetres que l'ajusten a lleis conegudes. Estimar i modelitzar l'estat de sistemes dinàmics és la finalitat dels algoritmes coneguts com a *Filtres de Kalman*. Consisteixen en ajustar els paràmetres de la llei que modelitza el comportament del sistema amb l'ajuda de mesures experimentals de diferents orígens: posicions en l'espai, velocitats, temperatures, localització, etcètera.

Per fer-ho, els Filtres de Kalman es basen en moltes eines que ofereixen les Matemàtiques: l'Àlgebra i l'Anàlisi permeten plantejar i estudiar el model, les Probabilitats i l'Estadística ajuden en l'estudi de la bondat i precisió del model, i els Mètodes Numèrics i la Computació ofereixen una manera de sistematitzar el tractament de les dades i les estimacions.

L'avantatge dels Filtres de Kalman respecte altres mètodes d'ajust, com el *Mètode dels Mínims Quadrats*, és que permet modelitzar el sistema dinàmic en temps real, millorant l'estimació amb un flux continu de noves mesures, la qual

cosa fa que sigui el mètode ideal en sistemes de control de processos i de seguiment, com pot ser el problema de la Determinació d'Òrbites de satèl·lits en l'espai. Per tot plegat, els Filtres de Kalman són considerats un dels grans descobriments de les Matemàtiques aplicades a l'enginyeria.

L'objectiu d'aquest Treball de Final de Grau és, doncs, assolir una bona comprensió d'un camp desconegut per a l'estudiant, el Mètode dels Mínims Quadrats i els Filtres de Kalman, usant els diferents coneixements adquirits al llarg dels graus de Matemàtiques i Física, i amb l'objectiu d'introduir una de les seves aplicacions actuals: la Determinació de les Òrbites de satèl·lits a partir de diferents mesures de posició i temps.

A més, és una bona oportunitat per aprendre a treballar amb autonomia i a planificar el temps d'estudi, i per desenvolupar habilitats de cerca i comprensió d'informació, tot plegat amb el fi d'editar un text matemàtic complet.

Introducció històrica

El mètode del Filtre de Kalman fou formalment presentat per Rudolf Emil Kálmán (1930) l'any 1960 en el seu article *On the General Theory of Control Systems* [4] com una solució recursiva pel problema de filtratge de dades discretes. Encara que es tracti d'un mètode força recent, els seus inicis es remunten a segles enrere.

Galileu (1564-1642) al segle XVI, per exemple, ja reconeixia l'inevitable existència dels errors en les mesures físiques. Al llarg dels següents dos segles es va anar desenvolupant la teoria de les *Probabilitats* i l'*Estadística*, amb les contribucions de grans noms com Blaise Pascal (1622-1662), Pierre de Fermat (1601-1655), Jakob Bernoulli (1654-1705), Thomas Bayes (1702-1761), Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827) o Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

Fou aleshores Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui recollí tot aquest coneixement i formalitzà un mètode pel tractament de dades amb errors: el *Mètode dels Mínims Quadrats*. Aquest mètode suposà un punt d'inflexió en la història de la ciència: és el primer *mètode d'estimació optimal* i permet finalment establir un lligam profund entre les ciències teòriques i les aplicades, ja que relaciona les dades experimentals amb el paràmetres del models teòrics.

Gràcies a això, les Probabilitats i l'Estadística van anar guanyant importància entre les ciències. En són exemples els treballs de James Clerk Maxwell (1831-1922) sobre *mecànica estadística*, i d'Andrei Màrkov (1856-1922) amb les *cadenaes de Markov*.

Els grans avenços tecnològics de principis del segle XX contribuïren al desenvolupament de les *Teories de Processos i de Control*. La necessitat d'automatitzar el control de sistemes i màquines a partir de dades amb errors portaren a Norbert Wiener (1894-1964) a desenvolupar el *Filtre de Wiener-Kolmogorov*, un mètode per caracteritzar la component estadística de sistemes

dinàmics.

Finalment, Kalman recollí les idees de Wiener i les generalitzà pel tractament dels estats de sistemes dinàmics variants en el temps: això representà el naixement dels *Filtres de Kalman*, al voltant de l'any 1960.

En aquests darrers anys, l'enorme creixement del camp de la computació, la robòtica i la intel·ligència artificial han portat a un continu desenvolupament d'aquestes Teories de Control, millorant-ne el rendiment i fent-les viables en situacions cada cop més complexes.

Estructura de la memòria

Aquest treball comença amb una descripció del *Mètode dels Mínims Quadrats* al Capítol 1. La introducció als *Problemes d'optimització* [1] i a la notació de la *modelització de sistemes dinàmics* [2] serveix per contextualitzar aquest treball. Seguidament, es presenta una descripció acurada del *Mètode dels Mínims Quadrats* en la notació del problema de *Determinació d'Òrbites*, des del seu plantejament fins a successives millores i consideracions (basada en la descripció que es fa en [6]).

El Capítol 2 comença amb un tractament seqüencial del *Mètode dels Mínims Quadrats* que serveix de punt de partida pel desenvolupament dels *Filtres de Kalman*. En els successius apartats es formulen els algorismes del *Filtre de Kalman Lineal* i del *Filtre de Kalman Estés*, se'ls compara amb el *Mètode dels Mínims Quadrats* i es presenten mètodes més avançats com el *Filtre de Kalman Unscented* i la *modelització no-lineal*.

En el Capítol 3 s'implementen exemples senzills de *Filtres de Kalman*. Es proposen tres problemes diferents, es desenvolupa el model dinàmic que els representa i s'usa un algorisme de *Filtre de Kalman* per a fer una estimació de l'estat a partir de dades amb sorolls.

Per últim, el Capítol 4 sintetitza el *problema de dos cossos*, conegut també com a *problema de Kepler*, que tracta el moviment el·líptic de planetes o satèl·lits entorn a un altre cos. Després d'una deducció de les equacions que regeixen les trajectòries del problema, es presenten les dificultats d'implementar un *Filtre de Kalman* per estimar òrbites a partir de mesures experimentals. L'estudi d'aquest mètode es proposa com a continuació d'aquest treball.

En l'Annex s'adjunten els codis en Python de les simulacions del Capítols 3 i 4.

Capítol 1

Optimització, Modelització i Mínims Quadrats

1.1 Problemes d'optimització

En el camp de les Matemàtiques, els *problemes d'optimització* són aquells que demanen trobar una *solució òptima* \mathbf{x}^* d'entre l'*espai d'eleccions* \mathbf{X} , de manera que es minimitzi una certa funció de pèrdua o cost. Per cada possible *elecció* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, la *funció cost* $C(\mathbf{x})$ pren un valor escalar que representa com d'indesitjable és prendre aquesta elecció. Així doncs, un problema d'optimització consisteix en

$$\text{trobar } \mathbf{x}^* \text{ tal que } C(\mathbf{x}^*) \leq C(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

En general, considerem $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ com un vector de dimensió n , i segons la naturalesa d' \mathbf{X} distingim dos tipus de problemes d'optimització: *problemes discrets*, en els quals \mathbf{X} és un espai discret, i *problemes continus*, en els quals \mathbf{X} és un espai continu, ja sigui \mathbb{R}^n o un subconjunt determinat per equacions i desigualtats.

D'altra banda, diem que un problema és *lineal* si la funció cost $C(\mathbf{x})$ i les equacions i desigualtats que eventualment defineixen \mathbf{X} són lineals; en cas contrari, quan $C(\mathbf{x})$ o la definició \mathbf{X} són no-lineals, diem que es tracta d'un problema *no-lineal*.

1.2 Modelització de sistemes dinàmics

Entenem per *sistema* un conjunt de entitats físiques interrelacionades que defineixen un tot. Si les variables que defineixen el sistema canvien amb el temps, diem que es tracta d'un *sistema dinàmic*, i anomenem *procés* a la seva evolució temporal. Un conjunt de cossos sotmesos a l'acció de les forces gravitatòries és un exemple de sistema dinàmic.

Sovint, els sistemes dinàmics es regeixen per un conjunt d'equacions diferencials, la solució de les quals en defineix l'evolució temporal. L'objectiu de la

modelització matemàtica de sistemes dinàmics és resoldre el problema d'optimitzar els paràmetres d'aquestes equacions de manera que, donades diverses mesures del sistema, l'error comès en la predicció de l'evolució temporal a partir el model sigui el menor possible.

Per tal de fer-ne el tractament matemàtic, considerem els següents paràmetres:

- $\mathbf{x}(t)$: vector de l'estat real del sistema en l'instant t , i $\dot{\mathbf{x}}(t)$ és la seva *velocitat de variació*,
- $\mathbf{z}(t)$: vector de *mesures* obtingudes amb un sensor,
- $\mathbf{u}(t)$: vector de *control* del sistema, manipulable i mesurable,
- $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ i $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$: funcions que parametritzen, respectivament, el *comportament del sistema* i la *mesura del sensor*,
- $\boldsymbol{\delta}(t)$: *pertorbació dinàmica aleatòria* del sistema,
- $\boldsymbol{\epsilon}(t)$: *soroll aleatori de mesura* del sensor.

Podem expressar el *model d'un sistema dinàmic en temps continu* de la manera següent:

$$\begin{array}{l} \text{Model general, continu} \\ \text{i dependent del temps} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\delta}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\epsilon}(t) \end{array} \right.$$

En el cas de considerar un *model lineal*, les funcions \mathbf{f} i \mathbf{h} esdevenen matrius (\mathbf{F} i \mathbf{C} , \mathbf{H} i \mathbf{D} , respectivament). D'altra banda, els paràmetres (ja siguin matrius o funcions) poden no dependre del temps: tenim llavors un *model invariant en el temps*. Per últim, podem considerar un *model discret*: en tal cas, la dependència temporal pren la forma d'iteració, de manera que l'estat del sistema $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ i la mesura del sensor $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}(t_k)$ s'obtenen de l'estat i mesura anteriors. Tots aquests possibles models i la seva notació queden recollits en la taula següent:

Temps	Tipus	Continu	Discret
Variant	General	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\delta}(t)$ $\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$	$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \boldsymbol{\delta}_{k-1}$ $\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\epsilon}_k$
	Lineal	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$ $\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$	$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{C}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\delta}_{k-1}$ $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k$
Invariant	General	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\delta}(t)$ $\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$	$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \boldsymbol{\delta}_{k-1}$ $\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\epsilon}_k$
	Lineal	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$ $\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$	$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{C}\mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\delta}_{k-1}$ $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k$

Font: [2]

En els següents apartats es presenten el *Mètode dels Mínims Quadrats* i els *Filtres de Kalman*, dos mètodes que permeten ajustar els paràmetres de models dinàmics de sistemes de tipus discrets, pels quals es tenen mesures del seu estat en moments precisos. Pel primer mètode cal que totes les mesures del sistema siguin conegudes a priori, ja que fer una estimació de la trajectòria de l'estat consisteix en processar totes les dades. El segon, en canvi, millora l'estimació de la trajectòria de manera seqüencial, rebent un flux continu de noves mesures del sistema, la qual cosa permet fer estimacions en temps real.

Com que en el Capítol 4 introduïrem el problema de *Determinació d'Òrbites* de satèl·lits, farem aquest desenvolupament en termes d'òrbites i trajectòries, però els algorismes i resultats que n'obtidrem són fàcilment extrapolables a qualsevol tipus de problema (i així ho demostren les simulacions del Capítol 3).

1.3 Mètode dels Mínims Quadrats

En aquesta secció introduïm el *Mètode dels Mínims Quadrats* com a pas previ al desenvolupament dels *Filtres de Kalman*. Primerament, fem una introducció formal i senzilla del mètode, que tot seguit generalitzem, n'estudiem la precisió i discutim l'efecte d'errors en les dades segons sigui seu origen: de soroll o sistemàtic.

1.3.1 Definició del Mètode dels Mínims Quadrats

Siguin $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ la posició i la velocitat en funció del temps t del satèl·lit del qual es vol determinar l'òrbita, i siguin \mathbf{p} i \mathbf{q} paràmetres que modelitzen les forces del sistema i les mesures. Llavors, podem estimar simultàniament la trajectòria del satèl·lit i els paràmetres del model si considerem el vector

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

de dimensió m , descrit per una equació diferencial ordinària del tipus

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

i amb la condició inicial en t_0

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

Per últim, sigui

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

el vector de les mesures z_1, \dots, z_n preses als instants t_1, \dots, t_n (suposem $n \geq m$ per tal de poder determinar l'òrbita de manera única). Aleshores, cadascuna d'aquestes mesures es pot ajustar de la manera següent:

$$z_i(t_i) = g_i(t_i, \mathbf{x}(t_i)) + \rho_i = h_i(t_i, \mathbf{x}_0) + \rho_i,$$

i en forma matricial,

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\rho} \quad (1.1)$$

on g_i denota el valor modelitzat de l'observació i -èssima en funció de t_i i $\mathbf{x}(t_i)$, i h_i denota el mateix valor però en funció de la condició inicial \mathbf{x}_0 . Els valors ρ_i representen la diferència entre les observacions reals z_i i els valors estimats pel model, és a dir, són els errors d'ajust del model, i els considerarem distribuïts aleatòriament i amb mitjana nul·la.

El *Mètode dels Mínims Quadrats* consisteix en trobar un estat \mathbf{x}_0^* que minimitzi aquest error, o més precisament, que minimitzi la *funció de pèrdua*, que no és més que la suma dels quadrats dels errors:

$$J(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho} = (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0))^T (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)). \quad (1.2)$$

Com que la dependència en \mathbf{x}_0 de \mathbf{h} pot ser no lineal, minimitzar la funció de pèrdua pot ser difícil en termes computacionals. En canvi, si es coneix un valor aproximat \mathbf{x}_0^{appr} , podem obtenir una bona aproximació \mathbf{x}_0^* linealitzant el problema i trobant successius valors aproximats fins que el guany en iterar sigui menyspreable, és a dir, sigui menor que una tolerància ε preestablerta.

Per fer-ho, considerem el desenvolupament a primer ordre de l'equació (1.1):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \\ &\approx \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0^{appr}) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{appr}) \\ &= \Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

on

$$\Delta \mathbf{z}_0 = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0^{appr}) \quad , \quad \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{appr}$$

i

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^{appr}}$$

és el Jacobià, que podem suposar invertible. Si substituïm (1.3) en la funció de pèrdua (1.2), obtenim

$$J(\mathbf{x}_0) = (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)^T (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0).$$

Minimitzar aquesta expressió vol dir trobar $\Delta \mathbf{x}_0^*$ tal que n'anul·li les derivades parcials, això és,

$$\left. \frac{\partial (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)^T (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)}{\partial \Delta \mathbf{x}_0} \right|_{\Delta \mathbf{x}_0 = \Delta \mathbf{x}_0^*} = \mathbf{0}.$$

Usant la relació

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{c}} + \mathbf{b}^T \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{c}}$$

tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)^T (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)}{\partial \Delta \mathbf{x}_0} &= 2(\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)^T \frac{\partial (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)}{\partial \Delta \mathbf{x}_0} \\ &= -2(\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Avaluant $\Delta \mathbf{x}_0 = \Delta \mathbf{x}_0^*$ i igualant a 0,

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0^*)^T \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{H}^T (\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0^*) &= 0 \\ \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0^* &= 0 \\ \mathbf{H}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_0^* &= \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{z}, \end{aligned}$$

de manera que la solució del Mètode dels Mínims Quadrats pel cas lineal és

$$\Delta \mathbf{x}_0^* = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{z}) \quad (1.4)$$

o, equivalentment, la solució del sistema lineal

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \Delta \mathbf{x}_0^* = (\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{z}). \quad (1.5)$$

La figura 1.1 representa l'ajust d'una trajectòria estimada a partir d'una trajectòria de referència i diferents mesures.

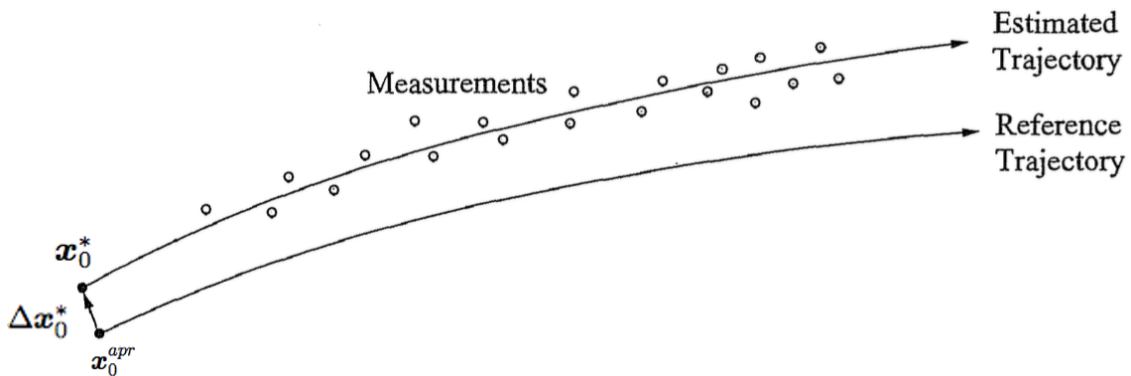


Figura 1.1: El Mètode dels Mínims Quadrats consisteix en estimar els paràmetres d'una trajectòria d'estat, partint d'una trajectòria de referència, de manera que es minimitzi l'error de d'ajust respecte les mesures del sistema. (Font: [6])

Per extrapolar al cas no lineal, notem que després d'una iteració tenim $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^{apr} + \Delta \mathbf{x}_0$. Aleshores, prenent \mathbf{x}_0 com a nou valor aproximat \mathbf{x}_0^{apr} i actualitzant el Jacobià

$$\mathbf{H}^j = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^j}$$

podem repetir la iteració successivament,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0^{j+1} &= \mathbf{x}_0^j + \Delta \mathbf{x}_0^j \\ &= \mathbf{x}_0^j + (\mathbf{H}^{jT} \mathbf{H}^j)^{-1} (\mathbf{H}^{jT} \Delta \mathbf{z}^j) \\ &= \mathbf{x}_0^j + (\mathbf{H}^{jT} \mathbf{H}^j)^{-1} \mathbf{H}^{jT} (\mathbf{z}^j - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0^j)),\end{aligned}\tag{1.6}$$

fins a arribar a un punt en que la iteració suposi un decrement de la funció de pèrdua (1.2) menor que la tolerància ε .

1.3.2 Ponderació d'errors

En el plantejament anterior no es té en compte que les observacions z_i poden provenir d'origens diferents i tenir, per tant, precisions diferents. Fàcilment es poden generalitzar els resultats anteriors, tot i que a la pràctica, poques vegades és necessari.

Prenem l'equació (1.3) i normalitzem l'error d'ajust del model ρ_i amb l'error mitjà de mesura (d'origen sistemàtic i de soroll) σ_i , és a dir:

$$\hat{\rho}_i := \frac{\rho_i}{\sigma_i} = \frac{1}{\sigma} (z_i - h_i(\mathbf{x}_0))\tag{1.7}$$

Aleshores, de manera anàloga a l'equació (1.4), s'obté:

$$\Delta \mathbf{x}_0^* = (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}})^{-1} (\hat{\mathbf{H}}^T \Delta \hat{\mathbf{z}}),\tag{1.8}$$

on

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{S} \mathbf{H} \quad , \quad \Delta \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{z},$$

i \mathbf{S} és la matriu diagonal quadrada d'inversos dels errors de mesura:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Finalment, es poden evidenciar els pesos en (1.8) tot considerant la *matriu de pesos*

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^2 = \text{diag}(\sigma_1^{-2}, \dots, \sigma_n^{-2}),$$

de manera que tenim:

$$\Delta \mathbf{x}_0^* = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{z}),\tag{1.9}$$

Seguidament, discutim el tractament d'aquests errors segons quin sigui el seu origen.

1.3.3 Errors de soroll

Un tractament estadístic dels errors de mesura ens permet estimar quin és el seu efecte. Per fer-ho, denotem per ϵ els errors de mesura, que considerem només deguts a soroll. Aleshores, de manera similar a (1.1), tenim

$$z = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) + \epsilon, \quad (1.10)$$

i linealitzant com en (1.3),

$$\Delta z = \mathbf{H}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{apr}) + \epsilon. \quad (1.11)$$

Com ja hem discutit anteriorment, la solució a aquest sistema ve donada per la iteració següent:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^* &= \mathbf{x}_0^{apr} + (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \Delta z) \\ &= \mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \epsilon). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Observem que la solució pel Mètode dels Mínims Quadrats \mathbf{x}_0^* difereix del valor real \mathbf{x}_0 degut a la presència de l'error ϵ . Podem tenir una mesura de la precisió del mètode fent suposicions estadístiques sobre aquest error. Així doncs, suposem que ϵ és una variable aleatòria amb *valor esperat*

$$E(\epsilon) = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

i *variància*

$$Var(\epsilon) = E[(\epsilon - E(\epsilon))^2] = E(\epsilon \epsilon^T) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2), \quad (1.14)$$

és a dir, que les components de ϵ són incorrelacionades, i.e., $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ si $i \neq j$, i que la *desviació estàndard* de la component i -èssima és $\sqrt{E(\epsilon_i^2)} = \sigma_i$.

El primer resultat de fer aquestes suposicions és que el valor esperat de la solució dels Mínims Quadrats \mathbf{x}_0^* coincideix amb el valor real:

$$E(\mathbf{x}_0^*) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} E(\epsilon)) = \mathbf{x}_0. \quad (1.15)$$

D'altra banda, usant (1.12), la variància de la solució \mathbf{x}_0^* ens permet definir un interval de confiança per aquesta solució. Tenim

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{x}_0^*) &= E\left[(\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0)^T\right] \\ &= E\left[\left((\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \epsilon)\right) \left((\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \epsilon)\right)^T\right] \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W}) E(\epsilon \epsilon^T) (\mathbf{W} \mathbf{H}) (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

on hem usat que \mathbf{W} és, per la seva definició, la matriu inversa de $E(\epsilon \epsilon^T)$. Aleshores, cada element k -èssim de la diagonal de la variància és la desviació estàndard de la component k -èssima de \mathbf{x}_0^* ,

$$\sigma(x_0^*_k) = \sqrt{Var(x_0^*_k)},$$

mentre que els elements de fora de la diagonal expressen la correlació en els errors entre les diferents components de \mathbf{x}_0^* .

Notem que aquesta desviació estàndard s'ha d'entendre en el sentit que, en el cas de repetir el mètode per determinar la mateixa trajectòria però amb uns errors aleatoris diferents, aleshores la solució estimada caurà dins de l'interval amb la confiança donada. Si la variable error es distribueix seguint una normal, aleshores la desviació és menor que σ amb una confiança del 67%, i és menor que 3σ al 99,7%.

1.3.4 Errors sistemàtics

L'efecte dels errors de mesura deguts a soroll es dissipa en augmentar el nombre de mesures de què disposem, de manera que la variància (1.16) pot ser una bona mesura de la precisió que pot assolir el model. En canvi, la presència d'errors sistemàtics, independents del nombre de mesures disponibles, suposen una cota en la precisió. Per tant, el tractament d'aquests errors passa per intentar modelitzar-ne l'efecte i fer-ne un tractament estadístic com en la secció anterior.

Així doncs, generalitzem (1.10) afegint al model \mathbf{h} el vector de paràmetres \mathbf{c} , que representa el desconeixement dels errors sistemàtics de mesura i de la contribució de forces no considerades anteriorment:

$$z = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}) + \epsilon. \quad (1.17)$$

Suposant que aquests paràmetres prenen valors petits i tenen valor esperat nul, podem linealitzar (1.17):

$$\Delta z = \mathbf{H}_x(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{apr}) + \mathbf{H}_c \mathbf{c} + \epsilon. \quad (1.18)$$

on \mathbf{H}_x i \mathbf{H}_c representen respectivament les derivades parcials de \mathbf{h} respecte \mathbf{x}_0 i \mathbf{c} . La solució d'aquesta equació és:

$$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}_x^T \mathbf{W} \mathbf{H}_x)^{-1} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W} (\mathbf{H}_c \mathbf{c} + \epsilon). \quad (1.19)$$

Si ara suposem que \mathbf{c} és una variable aleatòria amb valor esperat nul ($E(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$), variància \mathbf{C} i incorrelacionada amb ϵ ($E(\mathbf{c}\epsilon^T) = \mathbf{0}$), tenim:

$$E(\mathbf{x}_0^*) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}_x^T \mathbf{W} \mathbf{H}_x)^{-1} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W} (\mathbf{H}_c E(\mathbf{c}) + E(\epsilon)) = \mathbf{x}_0 \quad (1.20)$$

i, si $\mathbf{P} = (\mathbf{H}_x^T \mathbf{W} \mathbf{H}_x)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^C = Var(\mathbf{x}_0^*) &= E \left[(\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0) (\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0)^T \right] \\ &= E \left[(\mathbf{P} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W} (\mathbf{H}_c \mathbf{c} + \epsilon)) (\mathbf{P} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W} (\mathbf{H}_c \mathbf{c} + \epsilon))^T \right] \\ &= (\mathbf{P} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W}) (\mathbf{H}_c \mathbf{C} \mathbf{H}_c^T + E(\epsilon \epsilon^T)) (\mathbf{P} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W})^T \\ &= \mathbf{P} + (\mathbf{P} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W}) (\mathbf{H}_c \mathbf{C} \mathbf{H}_c^T) (\mathbf{P} \mathbf{H}_x^T \mathbf{W})^T. \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.3.5 Informació a priori

Disposar d'una certa informació a priori sobre la precisió de l'estat aproximat \mathbf{x}_0^{apr} permet refinar encara més el Mètode dels Mínims Quadrats. Aquesta informació es pot obtenir per un cert coneixement de l'estat del sistema, o també com a resultat d'una estimació anterior. Aquest segon cas permet fer un tractament seqüencial del mètode que, tal com es detalla en el Capítol 2, és la base dels *Filtres de Kalman*.

Així doncs, considerem que aquesta precisió és donada per $\Delta\mathbf{x}_0^{apr}$ i una matriu de variància a priori \mathbf{P}_0^{apr} (la inversa de la qual es coneix com a *matriu d'informació*). Aleshores, podem trobar la solució pel Mètode dels Mínims Quadrats seguint un procediment similar al dels apartats anteriors:

$$\Delta\mathbf{x}_0^* = ((\mathbf{P}_0^{apr})^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} ((\mathbf{P}_0^{apr})^{-1} \Delta\mathbf{x}_0^{apr} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{W} \Delta\mathbf{z}), \quad (1.22)$$

i la seva matriu de variància és donada per:

$$(\text{Var}(\mathbf{x}_0^*))^{-1} = (\mathbf{P}_0^{apr})^{-1} + (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}) \quad (1.23)$$

Capítol 2

Filtres de Kalman

El Mètode dels Mínims Quadrats descrit al Capítol 1 admet un plantejament en forma d'estimació seqüencial que és el pas previ a la descripció dels *Filtres de Kalman*. Aquest mètode seqüencial arriba al mateix resultat que si es consideren totes les mesures des de l'inici, però permet anar fent estimacions a mesura que les dades es van obtenint.

2.1 Mètode dels Mínims Quadrats Seqüencial

Per començar, considerem que les mesures del sistema poden ser dividides en subconjunts estadísticament independents, i ens plantegem com canvia l'estimació amb el fet d'anar afegint a cada iteració un d'aquests subconjunts.

Després d'una iteració, o per condicions inicials donades, tenim a priori una estimació $\mathbf{x}_0^- = \mathbf{x}_0^{ref} + \Delta\mathbf{x}_0^-$ amb variància \mathbf{P}_0^- . Aleshores, per processar el conjunt de dades \mathbf{z} tenim l'equació obtinguda en (1.22),

$$\Delta\mathbf{x}_0^+ = \mathbf{P}_0^+ \left((\mathbf{P}_0^-)^{-1} \Delta\mathbf{x}_0^- + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \Delta\mathbf{z} \right), \quad (2.1)$$

i variància a posteriori donada per (1.23),

$$\mathbf{P}_0^+ = \left((\mathbf{P}_0^-)^{-1} + (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}) \right)^{-1} \quad (2.2)$$

Aïllat $(\mathbf{P}_0^-)^{-1}$ i substituint en (2.1),

$$\Delta\mathbf{x}_0^+ = \Delta\mathbf{x}_0^- + \mathbf{P}_0^+ \mathbf{H}^T \mathbf{W} (\Delta\mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta\mathbf{x}_0^-). \quad (2.3)$$

La matriu $\mathbf{K} = \mathbf{P}_0^+ \mathbf{H}^T \mathbf{W}$ rep el nom de *Guany de Kalman*, ja que representa la millora en l'estimació $\Delta\mathbf{x}_0^-$ deguda a les noves dades \mathbf{z} , o més concretament, pondera el factor

$$\boldsymbol{\rho} = \Delta\mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta\mathbf{x}_0^- = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0^{ref}) - \mathbf{H} \Delta\mathbf{x}_0^-. \quad (2.4)$$

Tot i que aquest plantejament és formalment correcte, el càlcul de la variància (2.2) requereix la inversió d'una matriu a cada iteració de l'algoritme. Per evitar aquest càlcul, es pot reescriure \mathbf{K} de manera que, per iteracions on el conjunt de dades afegides sigui de dimensió petita, sigui més eficient.

Primer,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0^- &= \mathbf{P}_0^+ (\mathbf{P}_0^+)^{-1} \mathbf{P}_0^- \\
 &= \mathbf{P}_0^+ \left((\mathbf{P}_0^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \right) \mathbf{P}_0^- \\
 &= \mathbf{P}_0^+ + \mathbf{P}_0^+ \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{P}_0^- \\
 &= \mathbf{P}_0^+ + \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}_0^-
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

de manera que

$$\mathbf{P}_0^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{P}_0^- \tag{2.6}$$

A més, amb la relació

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T &= \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{H}^T \mathbf{W} (\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T) &= \left((\mathbf{P}_0^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \right) \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left((\mathbf{P}_0^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} &= \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T (\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T)^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

tenim

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{P}_0^+ \mathbf{H}^T \mathbf{W} \\
 &= \left((\mathbf{P}_0^-)^{-1} + (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}) \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \\
 &= \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T (\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{P}_0^- \mathbf{H}^T)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tenint en compte aquestes consideracions, el Mètode dels Mínims Quadrats Seqüencial comença amb un estat de referència \mathbf{x}_0^0 i la seva matriu de variància \mathbf{P}_0^0 , i per cada conjunt de mesures \mathbf{z}_i , $i = 1, \dots, N$ (que considerem, per conveniència, de dimensió petita i estadísticament independents) la iteració es calcula segons

<p><i>Mínims Quadrats Seqüencial</i></p> $ \begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \mathbf{P}_0^{i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{W}_i^{-1} + \mathbf{H}_i \mathbf{P}_0^{i-1} \mathbf{H}_i^T)^{-1} \\ \mathbf{x}_0^i &= \mathbf{x}_0^{i-1} + \mathbf{K}_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_0^0) - \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_0^{i-1} - \mathbf{x}_0^0)) \\ \mathbf{P}_0^i &= (\mathbf{1} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_0^{i-1} \end{aligned} $	(2.9)
--	-------

2.2 Filtre de Kalman Lineal

El Mètode dels Mínims Quadrats Seqüencial dóna un algoritme per a processar mesures del sistema de forma iterativa i seqüencial, però no té en compte la variació

temporal entre els diferents conjunts de mesures. Si tenim les mesures dividides en conjunts z_i , de manera que per cada conjunt les dades es corresponen al mateix instant t_i , el *Filtre de Kalman Lineal* (LKF) consisteix a fer-ne el tractament en dos passos:

1. **Predicció o actualització del temps:** actualitza l'estat de referència i la variància respecte la iteració anterior, tenint en compte l'evolució temporal pròpia del sistema donada per les seves equacions, per tal d'obtenir una predicció de l'estat (requadre (2.14)).
2. **Correcció o actualització de l'estat:** usa l'estat de referència actualitzat per tractar les noves dades i obtenir una correcció de l'estimació de l'estat del sistema (requadre (2.16)).

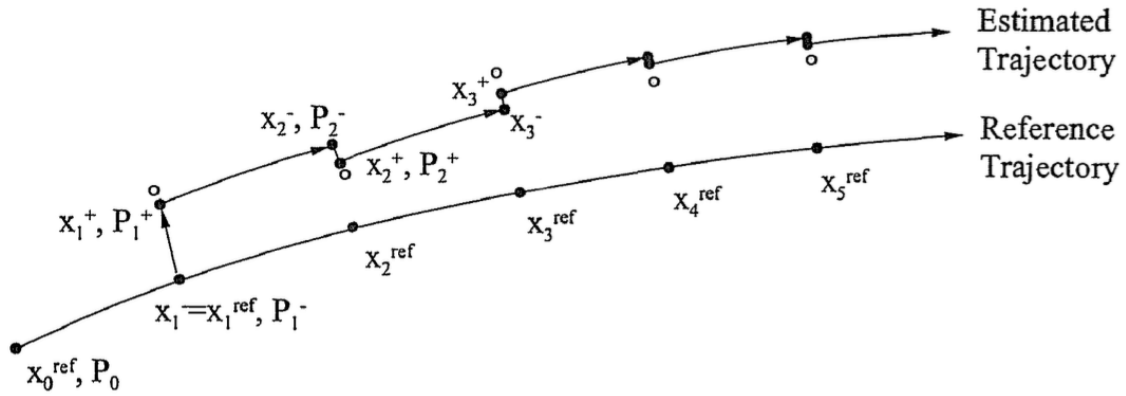


Figura 2.1: Donades una trajectòria de referència (que segueix els punts x_i^{ref}) i unes mesures del sistema z_i (representades pels punts \circ), cada iteració del Filtre de Kalman Lineal prediu un nou estat x_i^-, P_i^- propagant temporalment x_{i-1}^+, P_{i-1}^+ , i el corregeix considerant la nova mesura z_i de manera que s'obté l'estimació x_i^+, P_i^+ . (Font: [6])

La figura 2.1 mostra un exemple de determinació de trajectòria amb els dos passos i les diferents iteracions. En els següents apartats es presenta la descripció matemàtica d'aquests passos i se n'obtenen les expressions algorítmiques.

2.2.1 Predicció: Actualització del temps

Per processar les dades z_i , considerem l'estat de referència x_i^{ref} propagat a t_i respecte l'estat de referència inicial x_0^{ref} o, el que és el mateix, propagat respecte x_{i-1}^{ref} a t_{i-1} :

$$x_i^{ref} = x \left(t_i; x(t_0) = x_0^{ref} \right) = x \left(t_i; x(t_{i-1}) = x_{i-1}^{ref} \right). \quad (2.10)$$

Per realitzar la primera iteració, cal resoldre la integració numèrica de condició inicial x_0^{ref} , mentre que les següents s'obtenen propagant temporalment aquest estat.

Considerem, també, la matriu d'evolució del sistema entre t_{i-1} i t_i , donada per les equacions diferencials que defineixen el sistema:

$$\Phi_i = \Phi(t_i, t_{i-1}) = \frac{\partial \mathbf{x}_i^{ref}}{\partial \mathbf{x}_{i-1}^{ref}} = \Phi(t_i, t_0) \Phi(t_{i-1}, t_0)^{-1}. \quad (2.11)$$

Amb aquestes definicions propaguem temporalment l'estat \mathbf{x}_{i-1}^+ i la variància \mathbf{P}_{i-1}^+ , que són les estimacions a posteriori de la iteració t_{i-1} , per obtenir un nou estat aproximat, a priori, per la iteració t_i :

$$\mathbf{x}_i^- = \mathbf{x}_i^{ref} + \Phi_i \left(\mathbf{x}_{i-1}^+ - \mathbf{x}_{i-1}^{ref} \right) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i^- &= E \left[(\mathbf{x}_i^- - E(\mathbf{x}_i^-)) (\mathbf{x}_i^- - E(\mathbf{x}_i^-))^T \right] \\ &= E \left[\Phi_i (\mathbf{x}_{i-1}^+ - E(\mathbf{x}_{i-1}^+)) (\mathbf{x}_{i-1}^+ - E(\mathbf{x}_{i-1}^+))^T \Phi_i^T \right] \\ &= \Phi_i \mathbf{P}_{i-1}^+ \Phi_i^T. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En conclusió, aquest primer pas consisteix en:

LKF 1: Predicció

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^- &= \mathbf{x}_i^{ref} + \Phi_i \left(\mathbf{x}_{i-1}^+ - \mathbf{x}_{i-1}^{ref} \right) \\ \mathbf{P}_i^- &= \Phi_i \mathbf{P}_{i-1}^+ \Phi_i^T \end{aligned} \quad (2.14)$$

i la primera iteració comença amb un estat $\mathbf{x}_0^+ = \mathbf{x}_0^{ref}$ i una variància $\mathbf{P}_0^+ = \mathbf{P}_0^{ref}$ donats.

2.2.2 Correcció: Actualització de l'estat

La deducció d'aquest pas és anàloga a la feta pel Mètode dels Mínims Quadrats Seqüencial, però amb la diferència que el sistema es modelitza amb la matriu \mathbf{g}_i enlloc de \mathbf{h}_i ,

$$\mathbf{g}_i(t_i, \mathbf{x}(t_i)) = \mathbf{h}_i(t_i, \mathbf{x}(t_0)),$$

ja que per a cada iteració t_i usem els estats a priori \mathbf{x}_i^{ref} i \mathbf{x}_i^- . En conseqüència, el Jacobià que cal considerar és:

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{x}_i^{ref}}. \quad (2.15)$$

Així doncs, tenim:

LKF 2: Correcció

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \mathbf{P}_i^- \mathbf{G}_i^T (\mathbf{W}_i^{-1} + \mathbf{G}_i \mathbf{P}_i^- \mathbf{G}_i^T)^{-1} \\ \mathbf{x}_i^+ &= \mathbf{x}_i^- + \mathbf{K}_i \left(\mathbf{z}_i - \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i^{ref}) - \mathbf{G}_i (\mathbf{x}_i^- - \mathbf{x}_i^{ref}) \right) \\ \mathbf{P}_i^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{G}_i) \mathbf{P}_i^- \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.3 Filtre de Kalman Estès

Per obtenir una bona estimació amb el Filtre de Kalman Lineal cal que l'estat de referència i l'estat estimat no difereixin gaire. En canvi, el *Filtre de Kalman Estès* (EKF) permet suavitzar aquesta condició, ja que considera com a estat de referència de cada iteració, \mathbf{x}_{i-1}^{ref} , el mateix estat estimat \mathbf{x}_{i-1}^+ .

D'una banda, això suposa una millora en el rendiment del filtre, ja que evita errors causats per components no-lineals del model i convergeix més ràpidament. Per contra, presenta un inconvenient: a diferència del LKF, pel qual només cal resoldre una integració numèrica (la donada en (2.10), i que es pot interpolar per les successives iteracions), l'EKF requereix resoldre el problema de condicions inicials per a cada canvi de trajectòria de referència, a l'inici de cada iteració, la qual cosa suposa un augment de l'esforç computacional.

Començant amb unes condicions inicials aproximades $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^{appr}$ i $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^{appr}$, el Filtre de Kalman Estès actualitza, per a cada iteració, l'estat de referència (com en (2.10)) i la matriu de variància, i corregeix aquesta estimació tenint en compte les mesures \mathbf{z}_i :

$$\begin{array}{l}
 \text{EKF 1: Predicció} \\
 \mathbf{x}_i^- = \mathbf{x}(t_i; \mathbf{x}(t_{i-1}) = \mathbf{x}_{i-1}^+) \\
 \mathbf{P}_i^- = \mathbf{\Phi}_i \mathbf{P}_{i-1}^+ \mathbf{\Phi}_i^T \\
 \\
 \text{EKF 2: Correcció} \\
 \mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^- \mathbf{G}_i^T (\mathbf{W}_i^{-1} + \mathbf{G}_i \mathbf{P}_i^- \mathbf{G}_i^T)^{-1} \\
 \mathbf{x}_i^+ = \mathbf{x}_i^- + \mathbf{K}_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i^-)) \\
 \mathbf{P}_i^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_i \mathbf{G}_i) \mathbf{P}_i^-
 \end{array} \tag{2.17}$$

En a figura 2.2 s'exemplifiquen les iteracions del Filtre de Kalman Estès.

2.4 Mètode dels Mínims Quadrats o Filtres de Kalman

Després de presentar el Mètode dels Mínims Quadrats i els Filtres de Kalman, ens podem preguntar quin és el més adequat per a cada situació.

Com ja s'ha comentat anteriorment, i s'ha fet evident en el seu desenvolupament, els Filtres de Kalman permeten una estimació de l'estat del sistema en temps real, amb el seguit d'avantatges que això comporta: permeten disposar sempre d'una estimació actual del sistema (assolible també amb la versió seqüencial del Mínims Quadrats), no requereixen de l'emmagatzematge de mesures de temps anteriors i tenen un bon rendiment en el tractament de models amb errors de soroll i amb certes components no-lineals [6].

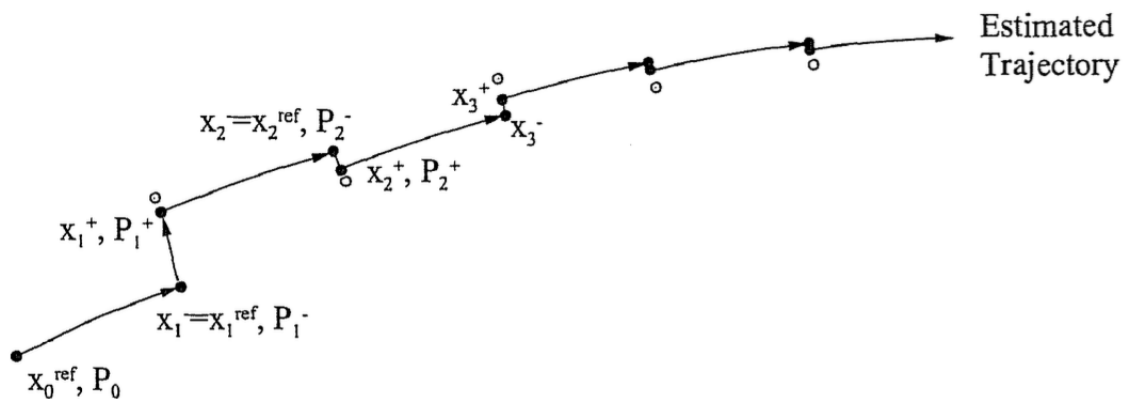


Figura 2.2: El Filtre de Kalman està utilitzat amb un estat de referència per a la iteració i -èsima l'estat anteriorment predit, x_{i-1}^+ , la qual cosa fa que sigui menys sensible a components no-lineals del model. (Font: [6])

Per altra banda, el Mètode dels Mínims Quadrats permet una millor anàlisi de les mesures disponibles. Com que es disposa de totes les dades des del començament, es poden detectar i evitar fàcilment dades atípiques i errònies (el que es coneix com a "outliers"). A més, com que no es requereix una estimació instantània, es poden realitzar càlculs més acurats [6].

2.5 Modelització no-lineal: més enllà de LKF i EKF

Els mètodes descrits anteriorment assumeixen un comportament lineal del model i de les mesures del sistema dinàmic o, si més no, en bona aproximació. És el cas, per exemple, del Filtre de Kalman Estès, que permet tractar models que presenten un grau baix de no-linealitat.

Una millora d'aquest mètode en aquest sentit és el *Filtre de Kalman "unscented"* (UKF, literalment, "inodor"), desenvolupat per Jeffrey Uhlmann al final del segle XX, i que consisteix en una transformació "unscented" de les matrius de transició d'estat i de variància, mitjançant tècniques de mostreig i ponderació de pertorbacions [2].

Tanmateix, un tractament de sistemes purament no-lineals esdevé un problema de gran complexitat. Actualment s'hi segueix treballant, tot i que degut a les seves nombroses utilitats en els camps de l'economia, d'estudis de mercat i amb fins militars, roman al marge de les publicacions científiques. Potser el mètode més conegut és el *Filtre de Beneš*, que es correspon amb el Filtre de Kalman quan el model és lineal [2].

Capítol 3

Implementació

Per completar la descripció teòrica dels Filtres de Kalman i veure'n la seva utilització i el seu potencial, en aquest capítol simulem la implementació d'un Filtre de Kalman Estès per alguns exemples senzills.

El llenguatge de programació aquí utilitzat és el *Python*. Si bé no es tracta del llenguatge més eficient, la seva facilitat d'ús i els paquets de tractament matemàtic dels que disposa, com ara *NumPy*, el fan de gran utilitat per a una fàcil introducció als mètodes dels Filtres de Kalman.

Els codis utilitzats per a cadascuna de les següents simulacions es troben a l'Annex. Per un accés més directe, també estan allotjats a la plataforma GitHub: <https://github.com/kterf/FiltresKalman>.

Aquests exemples estan basats en diferents fonts web, [7] i [8], amb la complementació dels codis adjunts en CD-ROM amb les fonts bibliogràfiques [2] i [6], en *MATLAB* i *C++* respectivament.

3.1 Plantejament del model

El primer pas per implementar un Filtre de Kalman es definir quin model es vol ajustar al sistema dinàmic a estudiar. En el nostre cas, la notació del model lineal que considerem per fer les simulacions és la següent:

$$\begin{array}{l} \textit{Predicció} \\ \mathbf{x}_i^- = \mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1}^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{P}_i^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{i-1}^+\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ \\ \textit{Correcció} \\ \mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}_i^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\ \mathbf{x}_i^+ = \mathbf{x}_i^- + \mathbf{K}_i (z_i - \mathbf{H}\mathbf{x}_i^-) \\ \mathbf{P}_i^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}) \mathbf{P}_i^- \end{array} \tag{3.1}$$

on:

- \mathbf{x}_i^\pm i \mathbf{P}_i^\pm : són el vector estat (posició i velocitat, $(x_i, \dot{x}_i, y_i, \dot{y}_i, \dots)$) i la variància del sistema. El subíndex i indica la iteració, i el $-$ o $+$ si es tracta d'un valor a estimat priori o corregit a posteriori.
- \mathbf{A} i \mathbf{B} : són les matrius de transició i de control. \mathbf{u} és el vector de control.
- \mathbf{H} : és la matriu de mesura, que transforma les estimacions a mesures i viceversa. En aquests exemples, sempre la considerarem la identitat.
- \mathbf{Q} i \mathbf{R} : són les matrius que capturen els errors de modelització del procés i els errors de mesura, respectivament. En aquests exemples, sempre considerarem $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, ja que el model és perfectament conegut.
- \mathbf{K}_i : és la matriu de Guany de Kalman.
- \mathbf{z}_i : és el vector de mesures.

En els següents apartats es discuteixen diferents exemples i s'especifica els valors d'aquests vectors i matrius.

3.2 Estimació d'un valor constant

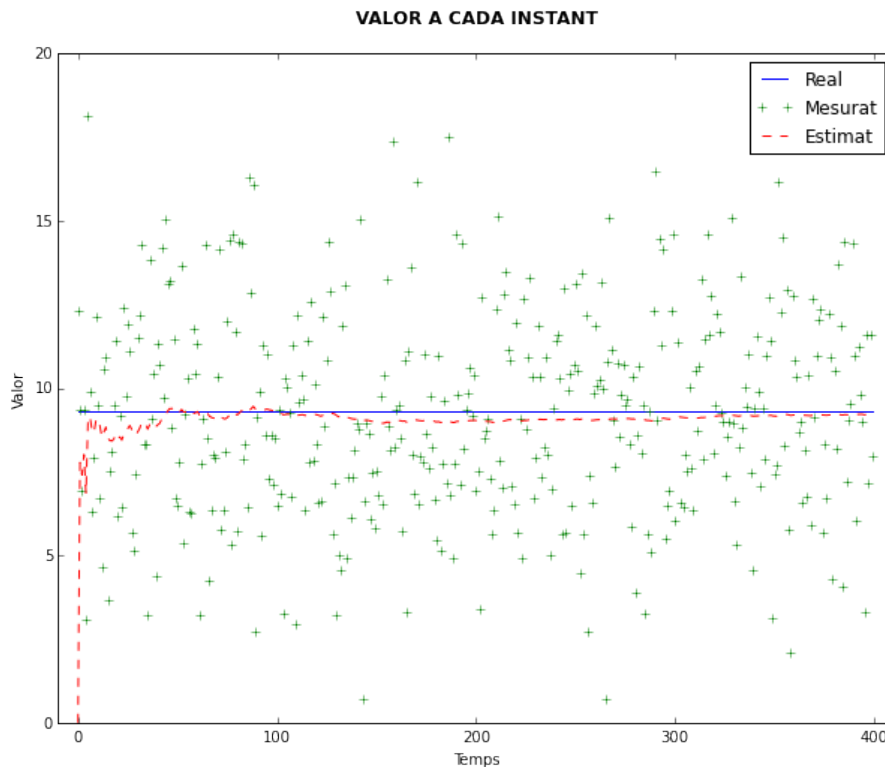


Figura 3.1: Estimació d'un valor de potencial constant.

En aquest primer exemple es planteja un problema clàssic senzill: estimar un valor constant en el temps a partir de mesures amb soroll. Aquest podria ser el cas d'un cert potencial en un circuit elèctric.

Així doncs, considerem el valor constant $V_0 = 9.324V$ i n'embrutem les mesures temporals seguint una distribució normal $\mathcal{N}(V_0, 3)$.

Els paràmetres que considerem per modelitzar aquest problema són les següents matrius quadrades i vectors de dimensió 2:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} = \mathbb{I}_2 & \mathbf{B} = \mathbf{0} & \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H} = \mathbb{I}_2 & \mathbf{Q} = \mathbf{0} & \mathbf{R} = 0.2 \cdot \mathbb{I}_2 \end{array}$$

La funció `ValorConstant` de l'annex A.2 implementa aquesta simulació i crida les funcions del Filtre de Kalman de A.1 per a sistemes en una dimensió, considerant intervals de temps de $0.1s$ i un total de 400 iteracions.

Els resultats d'aquesta simulació es mostren en el gràfic 3.1. Veiem que, tot i la gran dispersió de les mesures, el valor estimat s'acosta ràpidament al valor real. En les darreres iteracions, els valors estimats són de l'ordre de $9.21V$.

3.3 Estimació d'una trajectòria lineal

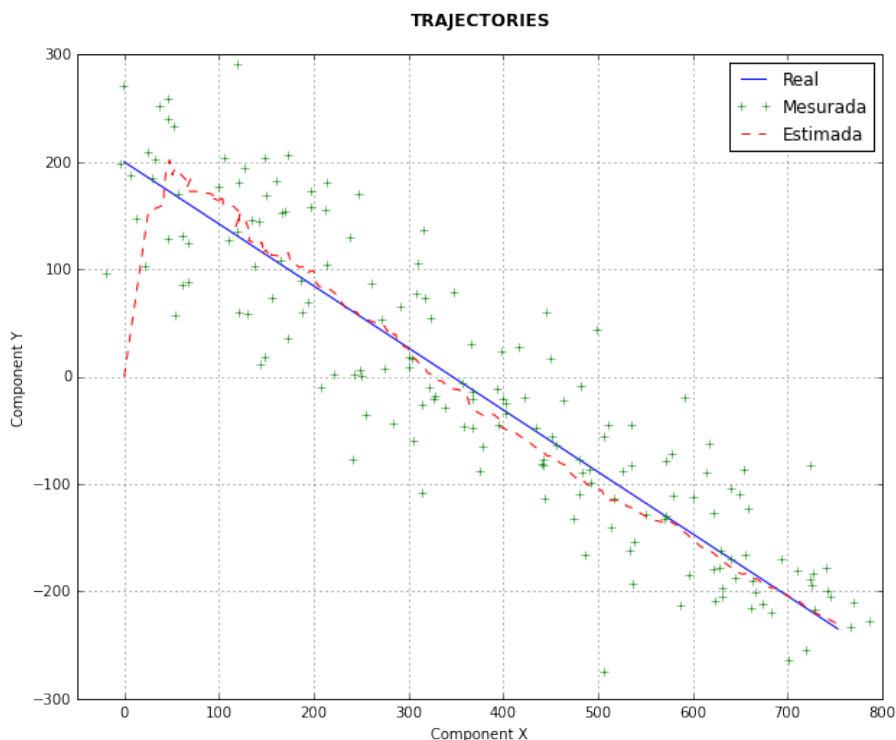


Figura 3.2: Estimació d'una trajectòria lineal.

El següent pas és considerar el problema d'estimar una trajectòria lineal en dues dimensions. A partir de les equacions del moviment rectilini uniforme, i donades

una posició i una velocitat inicial, la funció `TrajectoriaLineal` (A.3) simula la trajectòria real i les mesures amb soroll seguint $\mathcal{N}(x(t), 50)$ (on $x(t)$ és la posició real a cada instant) i implementa les matrius del model (de dimensió 4):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H} = \mathbb{I}_4 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R} = 0.5 \cdot \mathbb{I}_4$$

Després, crida les funcions del Filtre de Kalman (A.1) per a sistemes en dues dimensions, considerant intervals de temps de $\Delta t = 0.1s$ i 175 iteracions.

El gràfic 3.2 recull els resultats d'aquesta simulació. La posició real al darrer instant és $(753.44, -235.00)$, mentre que el valor estimat pel filtre és $(759.01, -241.90)$.

3.4 Estimació d'un tir parabòlic

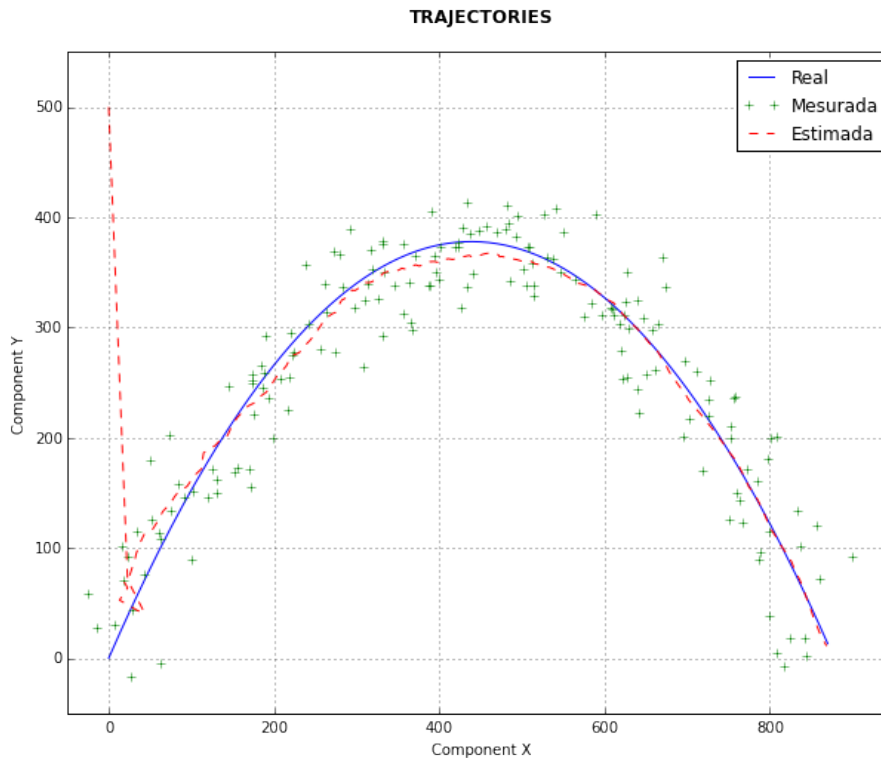


Figura 3.3: Estimació de la trajectòria d'un tir parabòlic.

L'últim exemple s'acosta més al problema de determinació d'òrbites. En aquest cas, tractem de determinar la trajectòria d'un tir parabòlic. A diferència del problema d'òrbites, però, la força gravitatòria és constant al llarg de la trajectòria,

la qual cosa fa que es pugui considerar la seva contribució amb la matriu i el vector de control (només en les components de la posició i la velocitat en la direcció Y).

Així doncs, els paràmetres que considerem, tenint en compte les equacions pel moviment rectilini uniformement accelerat, són:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot \Delta t^2 \\ -9.81 \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbb{I}_4 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R} = 0.4 \cdot \mathbb{I}_4$$

En el gràfic 3.3 es representen els resultats obtinguts en simular aquest problema amb la funció `TirParabolic` (A.4). Veiem que s'ha pogut obtenir un molt bon ajustament tot i el soroll. En concret, al final de la trajectòria la posició real és (870.00, 13.31), i l'estimada (865.54, 12.41).

Capítol 4

Determinació d'Òrbites

Una de les nombroses aplicacions dels Filtres de Kalman és la Determinació d'Òrbites de satèl·lits i el seu seguiment. En aquest capítol repassem el marc teòric rere aquest tipus de sistemes dinàmics i introduïm el problema de la Determinació d'Òrbites a partir de mesures fetes des de la Terra.

4.1 Problema dels dos cossos

Kepler enuncià a principis del segle XVII les tres famoses lleis que porten el seu nom, i que descriuen el moviment dels planetes al voltant del Sol:

- 1a:** La trajectòria dels planetes al voltant del Sol segueix una òrbita el·líptica que té el Sol en un dels seus focus.
- 2a:** La velocitat dels planetes és tal que el radi vector que els uneix amb el Sol escombra àrees iguals en temps iguals.
- 3a:** El quadrat del període orbital és directament proporcional al cub de la distància mitjana amb el Sol.

Aquestes lleis, que de fet descriuen el moviment de qualsevol cos girant al voltant d'un altre cos degut a forces gravitatòries, es poden deduir a partir de la *Llei de la Gravitació Universal* de Newton.

Si considerem, per exemple, un satèl·lit orbitant al voltant de la Terra, la Llei de Newton ens permet escriure:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}\mathbf{r}, \quad (4.1)$$

on $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ és la *constant gravitacional*, $M_{\oplus} \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$ és la massa de la Terra i \mathbf{r} és el vector de posició del satèl·lit respecte el centre de la Terra, de mòdul r .

La primera observació és que, atès que la força que actua sobre el satèl·lit és central, el seu moviment queda confinat a una trajectòria plana. Matemàticament, això vol dir que:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0,$$

però

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

de manera que

$$\mathbf{h} := \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{constant}.$$

El vector \mathbf{h} és un moment angular. Per tant, si considerem un interval de temps Δt , pel qual podem assumir un moviment lineal, podem calcular l'àrea escombrada pel radi vector durant aquest interval:

$$\Delta A = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\Delta t| = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|\Delta t = \text{constant}, \quad (4.2)$$

la qual cosa no és més que la 2a llei de Kepler. La principal conseqüència d'aquest resultat és que el moviment dels satèl·lits no és uniforme, sinó que la seva velocitat va canviant segons la distància a la Terra.

D'altra banda, podem considerar el següent producte:

$$\mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}(\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})) = -GM_{\oplus} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (4.3)$$

Integrant aquesta expressió, multiplicant pel vector \mathbf{r} i reanomenant els paràmetres, s'obté l'equació de la secció cònica el·líptica:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (4.4)$$

on $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ és l'*excentricitat de l'el·lipse* (a n'és *semieix major* i b el *semieix menor*) i $p = \frac{h^2}{GM_{\oplus}}$ (on $h = |\mathbf{h}|$). La relació entre aquestes magnituds i les coordenades polars (r, θ) queda recollida en la imatge 4.1

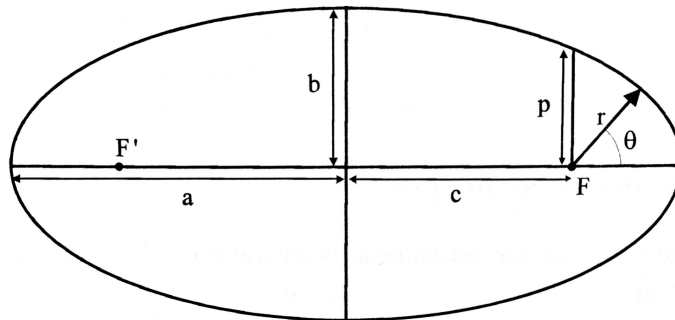


Figura 4.1: Principals paràmetres d'una òrbita el·líptica. (Font: [5])

Per últim, amb l'equació (4.2) i usant que l'àrea d'una el·lipse ve donada per $A = \pi ab$, es pot acabar deduint el període de la rotació:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}} a^3 \quad (4.5)$$

que és la relació que preveu la 3a llei de Kepler.

El plantejament seguit fins aquest punt permet descriure geomètricament les trajectòries el·líptiques de les òrbites, però no en té en compte la dependència temporal. Per fer-ho, es considera l'*anomia excèntrica*, denotada per E , que és l'angle de la posició del satèl·lit respecte el centre de l'el·lipse. El gràfic 4.2 mostra les relacions que queden definides en les equacions següents:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta =: a(\cos(E) - e) \\ y &= r \sin \theta =: b \sin(E) \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \quad (4.6)$$

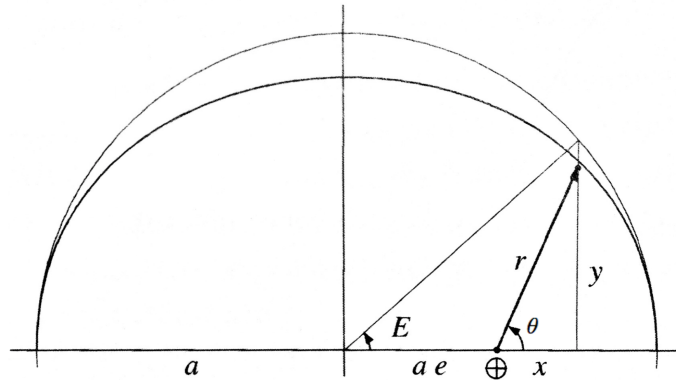


Figura 4.2: Principals paràmetres d'una òrbita el·líptica. (Font: [6])

Aleshores, si considerem les derivades de x i y respecte d' E ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin(E) \dot{E} \\ \dot{y} &= b \cos(E) \dot{E} \end{aligned}$$

tenim que pel vector \mathbf{h} :

$$\mathbf{h} = x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \dot{E} (1 - e \cos(E))$$

Substituint $h = \sqrt{GM_{\oplus} a(1 - e^2)}$ i definint el *moviment mitjà* $n = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a^3}}$, obtenim l'equació diferencial per l'anomia excèntrica:

$$(1 - e \cos E) \dot{E} = n$$

La integració d'aquesta equació dona lloc al que es coneix com a *Equació de Kepler*:

$$E(t) - e \sin E(t) = n(t - t_p) \quad (4.7)$$

on t_p és el temps de pas pel perigeu, això és, quan $E = 0$. Es coneix com a *anomia mitjana* el terme $M = n(t - t_p)$.

L'Equació de Kepler 4.7 és transcendent, és a dir, no es pot resoldre de manera analítica. Tanmateix, per un temps donat, es pot aproximar l'anomia excèntrica buscant l'arrel de la funció

$$f(E) = E - e \sin E - M,$$

per exemple amb el mètode de Newton. En aquest cas, començant amb un valor E_0 aproximat (igual a M per excentricitats e petites, o igual a π per excentricitats més grans), s'itera per obtenir successives millores E_i fins que la diferència entre estimacions successives sigui inferior a una tolerància preestablerta:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E)}{f'(E)} = E_i - \frac{E - e \sin E - M}{1 - e \cos E_i} \quad (4.8)$$

A tall d'exemple, en l'annex A.5 s'adjunta la funció `anomiaExcentrica`, que implementa aquest mètode. La funció `SimulacioOrbita` simula la trajectòria d'una òrbita plana de paràmetres $e = 0.6$, $a = 1$, $T = 60$ i $t_p = 0$, per l'acció d'uns cos que es troba en l'origen de coordenades. El gràfic resultant és el que es mostra en la figura 4.3. S'observa que, si bé els punts són a intervals de temps fixats, la distància recorreguda en un interval de temps no és sempre la mateixa.

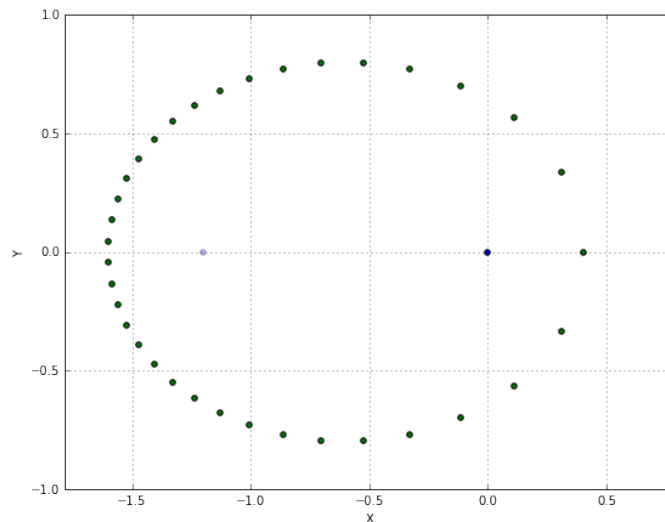


Figura 4.3: Simulació d'una òrbita el·líptica plana a partir de l'equació.

4.2 Plantejament del problema de Determinació d'Òrbites

L'Equació de Kepler, que descriu el moviment de satèl·lits, és una equació transcendent (4.7), de manera que la implementació d'un Filtre de Kalman per determinar els paràmetres d'una òrbita a partir de mesures experimentals requereix un tractament matemàtic previ. Una manera de treballar-hi, per exemple, és usar mètodes variacionals i restringir-se a aproximacions de primer ordre.

D'altra banda, les mesures que s'obtenen de les posicions de satèl·lits són en l'espai tridimensional, de manera que cal tenir en compte les transformacions i rotacions entre els diversos sistemes de coordenades que hi intervenen.

Finalment, per determinar una òrbita en l'espai calen un total de sis *elements orbitals*: tres mesures angulars, i, Ω, ω , per la posició de l'òrbita en l'espai (representades en la figura 4.4); dos paràmetres per la forma de l'òrbita, a, e , i un per la posició relativa del satèl·lit sobre l'òrbita, t_0 .

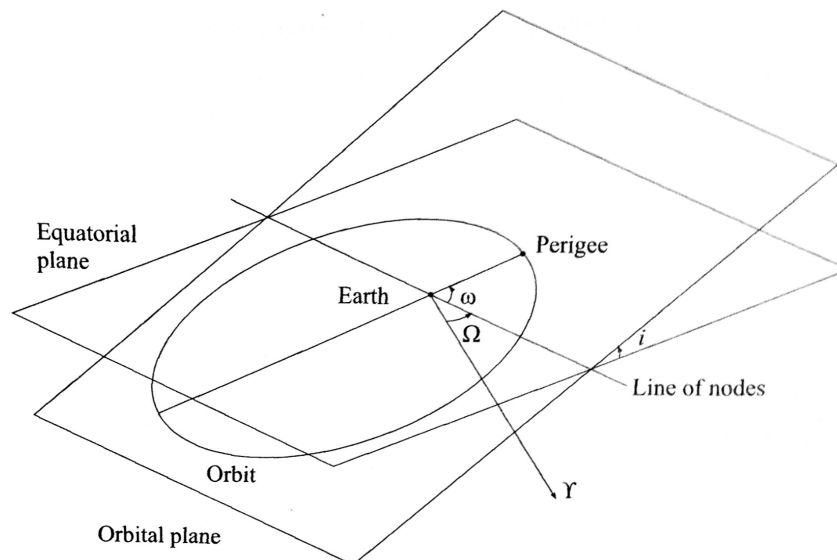


Figura 4.4: Esquema dels elements orbitals i, Ω, ω . (Font: [6])

En conclusió, si bé és cert que els Filtres de Kalman es poden utilitzar per a estimar l'òrbita d'una satèl·lit del qual se'n tenen mesures de la posició, no es tracta d'un problema trivial. Amb les successives iteracions, i tenint en compte les transformacions de rotació que cal fer a les mesures per tal d'adequar-se a l'equació del moviment, es poden estimar els sis elements orbitals necessaris per a que l'òrbita quedi determinada. L'estudi en detall d'aquest mètode queda com a possible continuació d'aquest Treball de Final de Grau.

Conclusions

Aquesta memòria recull els coneixements que s'han anat adquirint en el transcurs d'aquest Treball de Final de Grau.

D'una banda, s'ha fet una aproximació a les Teories de Modelització de Sistemes Dinàmics i de Control, començant per un desenvolupament formal del Mètode dels Mínims Quadrats i descrivint amb detall la deducció dels Filtres de Kalman Lineal i Estès. Amb tot plegat, s'ha aconseguit una idea general del seu funcionament i de la seva utilitat.

Les simulacions de sistemes dinàmics fetes a continuació, tot i ser senzilles, han permès una millor comprensió dels algorismes dels Filtres de Kalman, veient que l'aspecte més important, i a la vegada el més difícil de solucionar, és la determinació del model que s'ajusta al sistema dinàmic.

Aquesta és la principal dificultat que s'ha trobat a l'hora d'abordar el problema de la Determinació d'Òrbites de Satèl·lits. Després d'una introducció teòrica al problema de Kepler, s'ha vist que les equacions amb les que cal treballar no són tan assequibles com les de les simulacions. Així doncs, seguir amb aquest problema podria ser una continuació d'aquest Treball.

Per altra banda, també es podria seguir treballant en versions més avançades del Filtre de Kalman i en problemes d'estimació no-lineal.

Apèndix A

Codi en Python

A.1 Filtres de Kalman

Aquí s'inclouen totes les funcions utilitzades per l'estimació amb un Filtre de Kalman de sistemes en una o dues dimensions.

```
import numpy as np
import random
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab

def KF_iteracio(x_act, P_act, A, B, u, Q, H, R, z, I):
    """ computa una iteracio (predicció i correcció)
    del Filtre de Kalman """

    # PREDICCIÓ
    x_est = A * x_act + B * u
    P_est = (A * P_act) * np.transpose(A) + Q

    # CORRECCIÓ
    K = P_est * np.transpose(H) * np.linalg.inv(R + H*P_est*np.transpose(H))
    x_act = x_est + K * (z - H*x_est)
    P_act = (I-K*H)*P_est

    return x_act, P_act

def FiltreKalman1D(interval_temps, num_iteracions, estat_inicial,
                  velocitat_real, A, B, u, Q, H, R, posicio_mesurada, I):
    """ realitza les iteracions del Filtre de Kalman per
    sistemes d'una dimensió """

    posicio_estimada = []
    posicio_estimada.append(estat_inicial)
    x_act = np.matrix([[estat_inicial],
                       [velocitat_real[0] [0]]])
    P_act = I
```

```

# iteracions
for t in range(1,num_iteracions):
    z = np.matrix([[posicio_mesurada[t][0]],
                   [velocitat_real[t][0]]])
    x_act, P_act = KF_iteracio(x_act, P_act, A, B, u, Q, H, R, z, I)
    posicio_estimada.append(x_act[0,0])

return posicio_estimada

def FiltreKalman2D(interval_temps, num_iteracions, estat_inicial,
                   velocitat_real, A, B, u, Q, H, R, posicio_mesurada, I):
    """ realitza les iteracions del Filtre de Kalman per
    sistemes de dues dimensions """

    posicio_estimada = []
    posicio_estimada.append(estat_inicial)
    x_act = np.matrix([[estat_inicial[0]],
                       [velocitat_real[0][0]],
                       [estat_inicial[1]],
                       [velocitat_real[0][1]]])
    P_act = I

    # iteracions
    for t in range(1,num_iteracions):
        z = np.matrix([[posicio_mesurada[t][0]],
                       [velocitat_real[t][0]],
                       [posicio_mesurada[t][1]],
                       [velocitat_real[t][1]]])
        x_act, P_act = KF_iteracio(x_act, P_act, A, B, u, Q, H, R, z, I)
        posicio_estimada.append([x_act[0,0], x_act[2,0]])

    return posicio_estimada

def KF_grafic_1D(vector_real, vector_mesures,
                 vector_estimacions, limits):
    """ mostra el gràfics de trajectòria real, mesurada i estimada
    per sistemes d'una dimensió """

    plt.rcParams['figure.figsize'] = (10, 8)
    plt.close()
    plt.plot(vector_real, 'b-', label='Real')
    plt.plot(vector_mesures, 'g+', label='Mesurat')
    plt.plot(vector_estimacions, 'r--', label='Estimat')
    plt.legend()
    plt.axis(limits)
    plt.title('VALOR A CADA INSTANT\n', fontweight='bold')
    plt.xlabel('Temps')
    plt.ylabel('Valor')
    plt.show()

def KF_grafic_2D(vector_real, vector_mesures,
                 vector_estimacions, limits):
    """ mostra el gràfics de trajectòria real, mesurada i estimada
    per sistemes de dues dimensions """

```

```

x_real, y_real = zip(*vector_real)
x_mesura, y_mesura = zip(*vector_mesures)
x_estimada, y_estimada = zip(*vector_estimacions)

plt.rcParams['figure.figsize'] = (10, 8)
plt.close()
plt.plot(x_real, y_real, 'b-', label='Real')
plt.plot(x_mesura, y_mesura, 'g+', label='Mesurada')
plt.plot(x_estimada, y_estimada, 'r--', label='Estimada')
pylab.legend()
plt.axis(limits)
pylab.title('TRAJECTORIES\n', fontweight='bold')
pylab.xlabel('Component X')
pylab.ylabel('Component Y')
plt.grid()
plt.show()

return

```

A.2 Valor constant

Funció que defineix el problema unidimensional d'estimar un valor constant (apartat 3.2) i crida funcions de A.1 per fer-ne una estimació.

```

def ValorConstant():

    # parametres generals
    interval_temps = 0.1
    num_iteracions = 400

    # parametres sistema dinamic
    valor_constant = 9.324
    sigma_soroll = 3

    # estat inicial
    posicio_real = []
    velocitat_real = []
    posicio_mesurada = []
    estat_inicial = 0

    # simulacio de trajectoria i mesures
    posicio_real.append([valor_constant])
    velocitat_real.append([0])
    posicio_mesurada.append(
        [random.gauss(posicio_real[0][0],sigma_soroll)])
    for i in range(1,num_iteracions):
        velocitat_real.append([velocitat_real[i-1][0]])
        posicio_real.append([posicio_real[i-1][0] ])
        posicio_mesurada.append(
            [random.gauss(posicio_real[i][0],sigma_soroll)])

    # matrius del model
    A = np.eye(2)

```



```

    posicio_real.append([posicio_real[i-1][0]
                        +velocitat_real[i][0]*interval_temps,
                        posicio_real[i-1][1]
                        +velocitat_real[i][1]*interval_temps] )
    posicio_mesurada.append([random.gauss(posicio_real[i][0],
                                          sigma_soroll),
                             random.gauss(posicio_real[i][1],
                                          sigma_soroll)])

# matrius del model
A = np.matrix([[1,interval_temps,0,0],
               [0,1,0,0],
               [0,0,1,interval_temps],
               [0,0,0,1]])
B = np.zeros(4)
u = np.matrix([[0],[0],[0],[0]])
Q = np.zeros(4)
H = np.eye(4)
R = np.eye(4)*0.5
I = np.eye(4)

# FILTRE DE KALMAN
posicio_estimada = FiltreKalman2D(
    interval_temps, num_iteracions, estat_inicial,
    velocitat_real, A, B, u, Q, H, R, posicio_mesurada, I)

# GRÀFICS
limits = [ -50 , 800 , -300 , 300 ]
KF_grafic_2D(posicio_real, posicio_mesurada, posicio_estimada, limits)

print posicio_real[-1], posicio_estimada[-1]

return

```

A.4 Tir parabòlic

Funció que defineix el problema en dues dimensions d'estimar una trajectòria de tir parabòlic (apartat 3.4), i que crida funcions de A.1 per fer-ne una estimació.

```

def TirParabolic():

    # parametres generals
    interval_temps = 0.1
    num_iteracions = 175

    # parametres sistema dinamic
    angle = 60
    velocitat_sortida = 100
    gravetat = -9.81
    sigma_soroll = 30

    # estat inicial
    posicio_real = []

```

```

velocitat_real = []
posicio_mesurada = []
estat_inicial = [0,500]

# simulacio de trajectoria i mesures
posicio_real.append([0,0])
velocitat_real.append([velocitat_sortida*math.cos(angle*math.pi/180),
                       velocitat_sortida*math.sin(angle*math.pi/180)])
posicio_mesurada.append([random.gauss(posicio_real[0][0],sigma_soroll),
                        random.gauss(posicio_real[0][1],sigma_soroll)])
for i in range(1,num_iteracions):
    velocitat_real.append([velocitat_real[i-1][0],
                          velocitat_real[i-1][1]+gravetat*interval_temps])
    posicio_real.append([posicio_real[i-1][0]+
                        velocitat_real[i][0]*interval_temps,
                        posicio_real[i-1][1]+
                        velocitat_real[i][1]*interval_temps])
    posicio_mesurada.append([random.gauss(posicio_real[i][0],sigma_soroll),
                            random.gauss(posicio_real[i][1],sigma_soroll)])

# matrius del model
A = np.matrix([[1,interval_temps,0,0],
               [0,1,0,0],
               [0,0,1,interval_temps],
               [0,0,0,1]])
B = np.matrix([[0,0,0,0],
               [0,0,0,0],
               [0,0,1,0],
               [0,0,0,1]])
u = np.matrix([[0],
               [0],
               [0.5*gravetat*interval_temps*interval_temps],
               [gravetat*interval_temps]])
Q = np.zeros(4)
H = np.eye(4)
R = np.eye(4)*0.4
I = np.eye(4)

# FILTRE DE KALMAN
posicio_estimada = FiltreKalman2D(
    interval_temps, num_iteracions, estat_inicial,
    velocitat_real, A, B, u, Q, H, R, posicio_mesurada, I)

# GRÀFICS
limits = [ -50 , 950 , -50 , 550 ]
KF_grafic_2D(posicio_real, posicio_mesurada, posicio_estimada, limits)

print posicio_real[-1], posicio_estimada[-1]

return

```


A.5 Simulació d'una òrbita el·líptica plana

Implementació del Mètode de Newton per a la simulació d'una òrbita plana (apartat 4.1).

```

import math
import matplotlib.pyplot as plt

def anomaliaExcentrica(e,n,t_p,t):
    M = n*(t - t_p)
    E_0 = M
    tol = 1e-1
    improve = True
    while improve:
        E_i = E_0 - (E_0-e*math.sin(E_0)-M) / (1-e*math.cos(E_0))
        if math.fabs(E_i - E_0) < tol:
            improve = False
        E_0 = E_i
    return E_i

def SimulacioOrbita():
    num_punts = 15
    e = 0.6
    a = 1.
    b = a * math.sqrt(1-e*e)
    T = 60.
    step = T / num_punts
    n = 2*math.pi / T
    t_p = 0

    x = []
    y = []

    for t in range(0,num_punts):
        E = anomaliaExcentrica(e,n,t_p,t*step)
        x.append( a*(math.cos(E) - e))
        y.append( b*math.sin(E) )

    plt.rcParams['figure.figsize'] = (9, 7)
    plt.close()
    plt.scatter(x, y, c='g', alpha = 1)
    plt.scatter(0, 0, c='b', alpha = 1)
    plt.scatter(-2*e*a, 0, c='b', alpha = 0.3)
    plt.axis('equal')
    plt.xlabel("X")
    plt.ylabel("Y")
    plt.grid()
    plt.show()

    return

```


Bibliografia

- [1] D. P. Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena Scientific, Belmont (Massachusetts), 1999.
- [2] M. S. Grewal and A. P. Andrews. *Kalman filtering theory and practice using MATLAB*. Wiley, Hoboken, N.J., 2008.
- [3] O. Julià de Ferran and D. Márquez. *Un primer curs d'Estadística*. Publicacions i Edicions Universitat de Barcelona, 2011, Barcelona.
- [4] R. E. Kalman. *On the General Theory of Control Systems*. 1960.
- [5] V. J. Martínez. *Astronomia fonamental*. Publicacions de la Universitat de València, Valencia, 2008.
- [6] O. Montenbruck and E. Gill. *Satellite orbits: models, methods and applications*. Springer, Berlin, 2000.
- [7] A. D. Straw. *Kalman Filtering - SciPy example*. URL: <http://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/KalmanFiltering.html> (Darrera consulta: 16.06.2016).
- [8] G. Welch and G. Bishop. *An Introduction to the Kalman Filter*. University of North Carolina, Department of Computer Science, Chapel Hill, 2006. URL: <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/kalmanIntro.html> (Darrera consulta: 16.06.2016).