

Treball final de grau
GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

KISSING NUMBER

Autor: Miquel Torres Serra

Director: Dr. Joan Carles Naranjo
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona, 27 de juny de 2016

Abstract

The *kissing number* problem is a classic problem related to the Kepler conjecture and which was already the subject of discussion between David Gregory and Isaac Newton. The problem asks for the value of $\kappa(n)$, *which is the maximal number of equal radius and nonoverlapping spheres in n -dimensional space that can touch a fixed sphere of the same radius?*

The answer is known for $n = 1, 2, 3, 4, 8, 24$, in this work we will study the proof of Oleg R. Musin in the three dimensional case and discuss his strategy in the four dimensional one.

Resum

El problema del *kissing number* és un problema clàssic relacionat amb la conjectura de Kepler i que ja va ser motiu de discussió entre David Gregory i Isaac Newton. El problema consisteix en saber el valor de $\kappa(n)$, *quantas esferes n -dimensionals, totes del mateix radi i sense superposicionar-se, podem tenir tocant una central fixada del mateix radi com a màxim?*

La resposta és sabuda per les dimensions 1, 2, 3, 4, 8, 24 i en aquest treball estudiarem la demostració de Oleg R. Musin per al cas de tres dimensions i comentarem la seva demostració per al cas de quatre dimensions.

Agraïments

En primer lloc, gràcies Joan Carles Naranjo per ajudar-me cada setmana a entendre un problema tant meravellós.

A na Paloma per estar sempre quan l'he necessitat i per ser una correctora i traductora tant esplèndida, gràcies.

A la meva família i els meus amics per animar-me sempre, gràcies.

Al meu germà Marc per recolçar-me, gràcies.

Per últim, als meus pares Pep i Catalina qui van apostar per la meva educació i em van brindar l'oportunitat d'estudiar durant tant de temps allunyat de casa, moltes gràcies.

*Si he pogut veure més lluny que els altres, només és perquè em trobo sobre les
espatlles de Gegants*

Sir Isaac Newton

A tots els que m'han portat a les seves espatlles, gràcies per brindar-me la vostra alçada.

Índex

1	Introducció	1
2	Història del kissing number	5
2.1	Biografies	5
2.2	De Newton a Musin	8
3	Kissing Number en tres dimensions	10
3.1	Mètode de Delsarte	10
3.2	Resultats previs	16
3.3	Demostració de $\kappa(3) = 12$ de Musin	21
3.4	Lema 3	24
3.5	Algunes funcions.	40
4	Kissing Number en quatre dimensions.	41
5	Conclusions	45

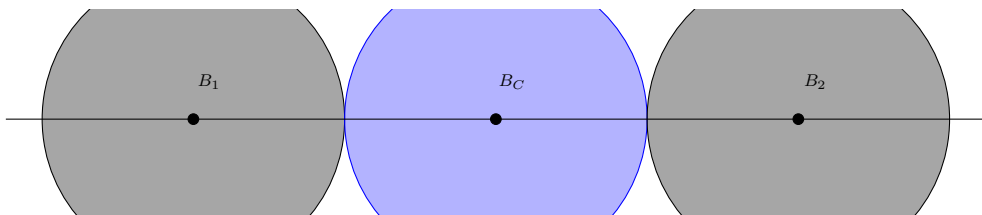
1 Introducció

El projecte

Quantes esferes del mateix tamany podem tenir tocant una esfera central fixa del mateix tamany que les altres?

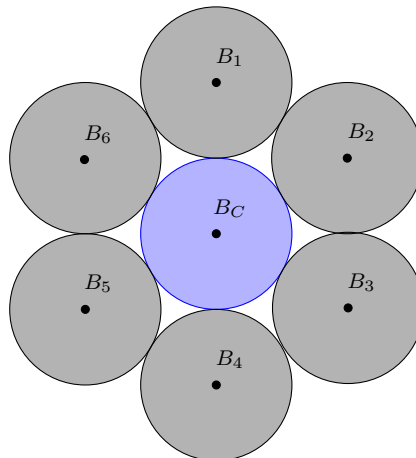
Depenent de en quina dimensió ho mirem tenim una resposta que pot ser clara o més enrevessada i en altres dimensions només podem donar-ne una aproximació.

En el cas $n = 1$ tenim una resposta clara:



només podem tenir una bola a l'esquerra de la central i una altra a la dreta, $\kappa(1) = 2$.

En el cas $n = 2$ tenim una altra resposta clara:



Al voltant de la bola central hi podem posar 6 boles formant una frontera que no permet afegir-ne cap altre. Per tant tenim una sola configuració, $\kappa(2) = 6$.

És en el cas $n = 3$ on comencem a tenir problemes, aquest va ser un motiu de discussió per Isaac Newton i David Gregory en el segle XVII. Una configuració, que ara sabem que és òptima, és la de l'icosaedre amb la bola central al centre de l'icosaedre i posant les altres al voltant de la central, cada una en un vèrtex, per tant $\kappa(3) \geq 12$.

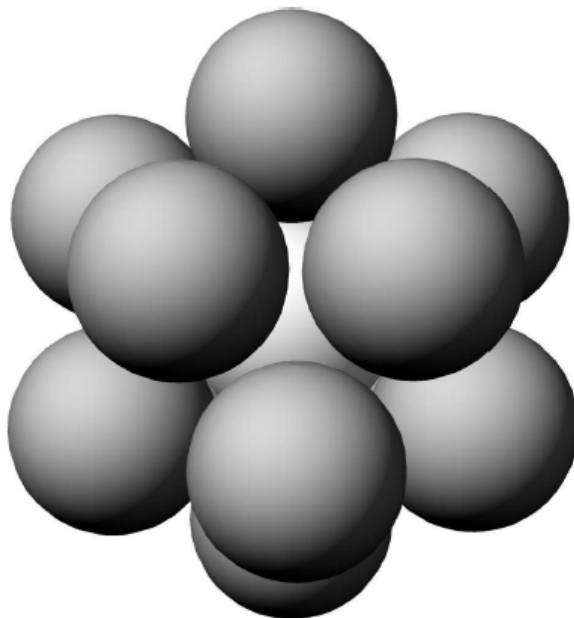


Figura extreta dels articles de Flores ^[2][3]

Com demostrarem, 12 és efectivament el nombre de boles que podem tenir al voltant de la central i per tant $\kappa(3) = 12$.

El que passa en aquest cas és que la resposta no és tan clara com en els anteriors casos perquè les boles no es toquen totes entre si. Això es deu a què la distància entre els centres de les boles del voltant amb la central és sempre menor a la dels centres de les boles del voltant, la qual cosa fa que hi hagi espais entre les boles i doni l'impressió de que és possible afegir una altra.

Alguns casos en què sabem la resposta són per $n = 4$, $n = 8$ i $n = 24$ els *kissing number* per als quals és de 24, 240, 196560 respectivament. Per altres dimensions només podem trobar aproximacions.

<i>Kissing Number</i>		
Dimensió (n)	Cota inferior	Cota superior
1	2	
2	6	
3	12	
4	24	
5	40	44
6	72	78
7	126	134
8	240	
9	306	364
10	500	554
15	2564	4866
16	4320	7355
20	17400	36764
24	196560	

Estructura de la Memòria

Començarem amb un breu repàs històric del problema de les 13 esferes, que és com es coneix el problema del *kissing number* per tres dimensions. Introduïrem breument els protagonistes que van tenir més rellevància i relació amb el problema des del punt de vista del treball.

Tot seguit recorrerem més de tres segles d'història i estudis, passant per grans personatges com Newton, Van Der Waerden, Sloane o Musin. A més de la seva relació amb el problema clàssic, la conjectura de Kepler.

Seguirem amb una breu introducció al mètode de Delsarte que serveix per acotar el *kissing number* en diverses dimensions, tot seguit introduïrem conceptes de trigonometria esfèrica i resultats particulars de polinomis de Legendre i geometria.

La part forta del treball arribarà de la mà de Musin i la seva demostració per 3 dimensions, especialment la demostració d'un dels lemes d'aquesta.

Finalitzarem amb un resum de la demostració per al cas de 4 dimensions.

2 Història del kissing number

2.1 Biografies

Isaac Newton

Va néixer a Anglaterra el 4 de gener de 1643, va ser una de les figures més reconegudes en el món de les matemàtiques i la física, a més d'una de les ments més prodigioses del segle XVII, i de tots els temps.

Les seves contribucions van des de camps com l'òptica en física fins a altres com el càlcul diferencial en matemàtiques.

En 1687 va publicar el llibre *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que va revolucionar el món de la física i el qual segueix sent un dels pilars d'aquesta ciència.

Es va formar a la Universitat de Cambridge, va arribar a ser el president de la Royal Society i fins i tot nomenat cavaller per la Reina Anna d'Anglaterra.

Va morir a Londres el 31 de març del 1727.

David Gregory

Se sap que va néixer l'any 1659, va ser un matemàtic i astrònom escocès a qui se'l relaciona moltes vegades amb Newton, ja que va fer diversos comentaris a la seva obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Va estudiar a l'actual Universitat de Aberdeen (la Marischal College) va ser professor a la Universitat d'Edimburg i membre de la Royal Society.

Al 1691 va cobrir el càrrec de Professor Sevillà d'astronomia en la Universitat de Oxford (en part gracies a la influència de Newton).

Finalment va morir al 10 d'octubre de 1708.

Entre Newton i Gregory discutirien un tema sobre estrelles que acabaria desenbocant en la discussió sobre el *kissing number* en 3 dimensions el 4 de maig de 1694.

Kurt Schütte

Nascut el 14 d'octubre de 1909 a Salzwedel va ser un matemàtic alemany. Va estudiar matemàtiques, física, química i filosofia a Berlín i a la Universitat de Göttingen, en aquesta darrera hi va fer el doctorat amb David Hilbert l'any 1933. Va ser l'últim doctorand de Hilbert (encara que va ser supervisat per Paul Bernay).

Entre el 1955 i el 1958 va ser professor adjunt a la Universitat de Marburg i al 1962 professor de la Universitat de Kiel. Des de 1966 fins a la seva jubilació al 1977 va ocupar la càtedra de Lògica Matemàtica a la Universitat Ludwig-Maximilian de Munic. De 1959 a 1960 va ser convidat per Kurt Gödel a l'Institute for Advanced Study.

També va ser professor visitant a la Escola Federal Politècnica de Zuric (1961-1962) i a la Universitat de l'Estat de Pennsylvania (1962-1963).

A mitjans dels anys 60, Salomon Feferman va portar a terme, independentment de Schütte, l'ordinal de Feferman-Schütte en la teoria de la demostració. En 1953 va solucionar amb Bartel Leendert van der Waerden el problema del *kissing number* en tres dimensions. Des de 1973, Schütte era membre de ple dret de l'Acadèmia de Ciències de Baviera i va ser membre de l'Acadèmia de Ciències d'Àustria.

Va morir el 18 d'agost del 1998 a Munic.

Bartel Leendert Van Der Waerden

Va néixer el 2 de febrer de 1903, va ser un matemàtic neerlandès i historiador de matemàtiques. Es va formar en les universitats d'Amsterdam i Göttingen, és en aquesta última on Emmy Noether el va influenciar fortament. Rep el doctorat per part de la Universitat d'Amsterdam per una tesi sobre geometria algebraica que va dirigir Hendrick de Vries i en el 1928 se li va concedir l'habilitació per part de la Universitat de Göttingen.

Seguidament va ensenyar a la Universitat de Groningen i la de Leipzig. Després de la segona guerra mundial va ser professor visitant a la Universitat de Johns Hopkins. En 1950 va passar a ser professor de la Universitat d'Amsterdam i finalment al 1951 va ser professor de la Universitat de Zuric.

Va fer contribucions als camps com l'àlgebra abstracta, geometria algebraica, topologia i teoria de nombres combinatòria. El Teorema de Van der Waerden (teorema de teoria de Ramsey), el nombre de Van der Waerden i el test de Van der Waerden (d'estadística) són alguns dels resultats que duen el seu nom.

Va morir el 12 de gener de 1996.

Entre ells dos van fer la primera demostració del problema del *kissing number* en 3 dimensions.

Oleg R. Musin

Es va llicenciar al 1976 en matemàtiques per la universitat estatal de Moscú (Moscow State University), en 1980 va rebre el doctorat en la mateixa universitat. Actualment és professor del departament de matemàtiques de la Universitat de Texas en Brownsville. Ha publicat més de 180 articles i 5 llibres (alguns d'ells coescrits) en matemàtica pura i aplicada, ciència computacional i anàlisi numèrica a més d'altres camps.



Reconegut per la seva demostració sobre el *kissing number* en 4 dimensions (2008) publicada a *Annals of Mathematics* i una nova demostració per al cas en 3 dimensions (2006), ambdues demostracions estan basades en el mètode de Delsarte i serveixen per trobar cotes superiors que resolen el problema. És aquestes demostracions les que estudiem en aquest treball.

2.2 De Newton a Musin

En anglès el terme *kiss* no s'utilitza només com a sinònim de besar o petó, en termes de billar es refereix a quan dues boles (o més) es toquen, en castellà *kissing number* es pot traduir com a *número de osculació* o com *nombre d'osculacions* en català. Però per aquest treball s'ha decidit deixar el nom original perquè així mantengui un poc l'essència que hi ha darrere del problema.

És un problema amb història al darrere, ha passat per moltes mans i moltes ments al llarg dels anys. No només el cas per a les 3 dimensions (que és el darrer que podem visualitzar), sinó que també serveix per fer una analogia amb l'evolució del pensament matemàtic al llarg dels anys, és amb una de les persones que més ha contribuït al món de les matemàtiques on comencem a parlar d'aquest problema, amb Sir Isaac Newton.

Una de les primeres discussions sobre el problema és la que van tenir David Gregory i Isaac Newton el 4 de maig de 1694, no només va ser de les primeres, sinó que va ser la que va posar nom al problema ja que encara avui en dia es refereixen al problema com el problema de Newton-Gregory. David Gregory era un jove escocès que va intentar posar-se en contacte amb Newton diverses vegades i amb qui va acabar tenint prou contacte com per discutir problemes i fins i tot Newton el va recomenar per al treball de professor. En *The correspondance of Isaac Newton*^[6] podem veure que van mantenir nombrosa correspondència. En una de tantes discussions que tenien van començar a plantejar-se un problema sobre estrelles, de la mateixa magnitud i radi, i en un moment donat es van preguntar quantes podia haver tocant-se entre elles.

Com apunta Turnbull en el llibre *The correspondance of Isaac Newton*, Newton va suposar que al voltant de l'esfera central només hi cabien 12 més i així ho va escriure en una taula que es pot trobar en el mateix llibre. Mentres que Gregory insistia que a causa de la disposició d'un icosaedre quedava prou espai com per reordenar les 12 esferes, es podia fer entrar una 13a. Encara que en el recull de Turnbull no queda prou clar aquest raonament, es va trobar una llibreta no publicada de David Gregory que està a la *Christ Church* d'Oxford, on trobem unes notes seves sobre la discussió amb Newton juntament amb una taula com la de Newton. Però que al contrari d'ell, Gregory va treballar amb la hipòtesi de què són 13 les esferes al voltant de la central.^{[6][11]}

En 1874 el professor alemany Ernst Reinhold Eduard Hoppe va presentar una prova del teorema, però com més endavant es veuria tenia un error. Després de l'error de Hoppe, no va ser fins al 1953 que Schütte i Van Der Waerden van trobar una demostració del problema en tres dimensions, aquesta acabaria donant la raó a Newton. A partir d'aquest moment comencen a sortir diverses demostracions on destaquem la de John Leech, només 3 anys posterior i la qual ocupa, simplement, 2 pàgines, i la de Oleg R. Musin que es fa servir del mètode de Delsarte, el qual introduïm en el pròxim punt, variant-lo de certa forma semblant a com el variarà per fer la demostració en el cas de 4 dimensions.

L'any 1979 el rus Vladimir Levenshtein per una part, el britànic Neil Sloane i el polonès Andrew Odlyzko independentment per una altra part, van provar que $\kappa(8) = 240$ i $\kappa(24) = 196560$. Tots ells van emprar el mètode de Delsarte, un mètode que serveix per donar una cota superior (una vegada hem fixat una disposició per les esferes). El problema és que el mètode de Delsarte només funciona per als casos $n = 8$ i $n = 24$.

No és fins que arriba Musin que es resol el cas per $n = 4$, per arribar a aquest resultat presenta primer una demostració per al cas de tres dimensions, en aquesta aplica el mètode de Delsarte, però amb unes petites variacions i li permet trobar $\kappa(3) < 13$ en lloc de $\kappa(3) \leq 13$ com dóna el mètode clàssic de Delsarte. Les variacions que efectua al mètode per resoldre el cas de tres dimensions són les que li permeten trobar una bona cota per al cas de quatre dimensions i així trobar que $\kappa(4) = 24$.

Aquest problema té molt a veure amb un problema clàssic, la *Conjectura de Kepler*. El problema consisteix en trobar quina és la millor manera d'apilar esferes del mateix radi en una habitació i tenir la major densitat possible. El que afirma aquesta conjectura és que la millor manera d'apilar les esferes és amb la disposició *face-centered cubic*, i que dóna una densitat de 74.05%. Si en lloc de pensar com posar les esferes en una habitació, ho canviem a quantes caben en una esfera amb radi 3 vegades el radi d'aquestes tenim el problema del *kissing number*.

El problema va passar per les mans de grans matemàtics com Gauss qui va demostrar la conjectura si es col·loquen els centres de les esferes seguint un reticle regular. Descartar tots els reticles irregulars és un treball immens i no es va aconseguir res des de la demostració de Gauss, el mateix Hilbert el va incloure en els seus *23 problemes de Hilbert*, ocupant la posició 18a.

Encara que és una conjectura està molt prop de convertir-se en teorema, ja que si fa uns anys, en el 1992, s'havia reduït el problema a un nombre finit de casos per als quals es va crear un programa per buscar els errors. En 2014 l'equip dirigit per Thomas Hales va anunciar que el projecte *Flyspeck* (que consistia en trobar aquests errors) havia acabat. En gener del 2015 Hales i el seu equip van publicar *A formal proof of the Kepler conjecture*.

3 Kissing Number en tres dimensions

3.1 Mètode de Delsarte

El mètode de Delsarte és un mètode que serveix per trobar una cota superior per al *kissing number* $\kappa(n)$ i es basa en els polinomis de Gegenbauer.

Aquest mètode serveix per acotar superiorment $\kappa(n)$ per a qualsevol dimensió a partir d'un polinomi que compleix un seguit de propietats. La cota que dóna és una senzilla i funciona per saber el valor de $\kappa(n)$ per als casos $n = 8, 24$. Per a tots els altres casos ens dóna una cota superior que no resol el problema, encara que una petita modificació d'aquest mètode serveix per resoldre els casos $n = 3, 4$.

El problema en \mathbb{R}^n és el que hem descrit anteriorment, volem saber quantes esferes unitàries toquen la l'esfera central, aquesta també unitaria, i sabem que aquest nombre és finit. Suposem que són N esferes unitat les que toquen la esfera central en \mathbb{R}^n , això es pot reinterpretar com N punts de contacte sobre la esfera central que donen pas a una configuració de vectors unitaris $\chi_1, \dots, \chi_N \in \mathbb{R}^n$, els que podem escriure en base ortonormal com $\chi_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, aquests satisfan que per $i = j$, $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 1$ mentres que si $i \neq j$ llavors $\langle \chi_i, \chi_j \rangle \leq 1/2$ perquè com veurem més endavant al posar dos esferes tocant una fixada, l'angle que formen aquestes amb el centre és d'almenys 60° .

Escriuim aquests vectors com a columnes d'una matriu X :

$$X = (\chi_1, \dots, \chi_N) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^N \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^N \end{pmatrix}$$

Llavors definim la matriu $A = (\chi_{i,j}) := X^\perp X \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la qual podem escriure com:

$$A = X^\perp X = \begin{pmatrix} \langle \chi_1, \chi_1 \rangle & \langle \chi_1, \chi_2 \rangle & \cdots & \langle \chi_1, \chi_N \rangle \\ \langle \chi_2, \chi_1 \rangle & \langle \chi_2, \chi_2 \rangle & \cdots & \langle \chi_2, \chi_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \chi_N, \chi_1 \rangle & \langle \chi_N, \chi_2 \rangle & \cdots & \langle \chi_N, \chi_N \rangle \end{pmatrix}$$

i tal que compleix un seguit de propietats:

- (i) La seva diagonal està formada per uns, és a dir $\chi_{i,i} = 1$.
- (ii) Qualsevol terme que no sigui de la diagonal és com a molt $1/2$, és a dir $\chi_{i,j} \leq 1/2$ quan $i \neq j$.
- (iii) Rang menor o igual a n .

(iv) És definida semipositiva.

Hem descrit la matriu de tal forma que les dues primeres propietats són directes. Tenim doncs les matrius $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times N}$ i $X^\perp \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Anem a explicar les propietats restants.

Propietat (iii) La matriu A la podem veure com la matriu d'una aplicació de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^N , o d'altra manera com la composició de dues aplicacions: primer una aplicació de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^n amb X^\perp com a matriu d'aquesta i la segona una aplicació de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^N amb X com a matriu. Així doncs el rang de X^\perp és com a molt la dimensió de la imatge de l'aplicació, és a dir, $rg(X^\perp) \leq n$ i per tant $rg(X) \leq n$.

En resum, $\mathbb{R}^N \xrightarrow{A} \mathbb{R}^N$ es pot veure com:

$$\mathbb{R}^N \xrightarrow{X^\perp} \mathbb{R}^n \xrightarrow{X} \mathbb{R}^N$$

com la dimensió de la imatge de la aplicació que va de \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^n és com a molt n , llavors tenim que $rg(X^\perp) = \dim(\text{Im}(X^\perp)) \leq n$, per tant $rg(X) = rg(X^\perp)$. Ja hem dit que l'aplicació que té a A com a matriu és la composició de les aplicacions que tenen X, X^\perp com a matriu per tant tenim que $\dim(\text{Im}(A)) = rg(A) \leq n$.

Propietat (iv) Diem que una matriu $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ és definida semipositiva si per qualsevol vector $u \in \mathbb{R}^N$ es compleix que $u^\perp M u \geq 0$. En el nostre cas volem veure que $A = X^\perp X$ és definida semipositiva, aplicant propietats de matrius transposades i definint $u' = X u \in \mathbb{R}^n$ tenim el que volem:

$$u^\perp A u = u^\perp X^\perp X u = (u^\perp X^\perp)(X u) = (X u)^\perp X u = (u')^\perp u' = \|u'\|^2 \geq 0$$

Delsarte proposa prendre funcions $f \in \mathbb{K}[t]_d = \{\text{polinomis de grau } \leq d\}$, tals que aplicades a les entrades de la matriu A compleixen les propietats (i), (iii) i (iv). És a dir que la matriu $(f(\langle \chi_i, \chi_j \rangle))$, té uns a la diagonal, és de rang menor o igual a n i també és definida semipositiva.

Prenem les funcions f com a polinomis, que es poden escriure com a combinació lineal de polinomis de Gegenbauer.

Per explicar els polinomis de Gegenbauer primer considerem el producte escalar entre dues funcions $g(t), h(t)$ com:

$$\langle g(t), h(t) \rangle = \int_{-1}^{+1} g(t)h(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt$$

El que Gegenbauer proposa és que una vegada hem fixat n , que és la dimensió en la que treballem, construir una base ortogonal de polinomis a partir d'aquest producte escalar i de la base $(1, t, \dots, t^d)$ utilitzant Gram-Schmidt. Per cada n trobem una base ortogonal respecte el producte escalar $\langle g(t), h(t) \rangle$. Fixant els dos primers (casos $d = 0$ i $d = 1$) anem trobant per tot n la resta de polinomis:

$$G_0^{(n)}(t) = 1, \quad G_1^{(n)}(t) = t, \quad G_2^{(n)}(t) = \frac{nt^2 - 1}{n - 1}, \dots$$

En particular compleixen que $G_d^{(n)}(1) = 1$, per qualsevol d .

Casos particulars bastant coneguts: per $n = 3$ els polinomis de Legendre (que utilitzarem en la demostració de Musin) i per $n = 4$ els polinomis de Chebichev.

Lema 1 - Teorema d'addició. Existeix una versió més general (que es pot consultar en algunes referències ^{[10][15]}) per als polinomis de Gegenbauer, però el que ens interessa és el teorema per al cas $n = 3$, és a dir, pels polinomis de Legendre. Admetrem aquest teorema sense demostració.

Sigui $P_k^m(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_k(t)$. Definim $c_{m,k} = 2 \frac{(k-m)!}{(k+m)!}$ per $k > 0$ i $k \geq m \geq 1$, i $c_{0,0} = 1$.

Llavors, es compleix el següent teorema:

$$\begin{aligned} & P_k(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\varphi)) = \\ & = P_k(\cos(\theta_1))P_k(\cos(\theta_2)) + 2 \sum_{m=1}^k \frac{(k-m)!}{(k+m)!} P_k^m(\cos(\theta_1))P_k^m(\cos(\theta_2))\cos(m\varphi) = \\ & = \sum_{m=0}^k c_{m,k} P_k^m(\cos(\theta_1))P_k^m(\cos(\theta_2))\cos(m\varphi) \end{aligned}$$

Lema 2 - Positivitat. Sigui la matriu definida semipositiva de rang n , amb la diagonal formada per uns: $(\chi_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Llavors la matriu $(G_k^{(n)}(\chi_{i,j}))$ també és definida semipositiva. Admetem aquest teorema sense demostració (que es pot consultar a ^[10]).

Conseqüència. La suma de totes les components de la matriu és no negativa, anem a veure-ho:

$$(G_k^{(n)}(\chi_{i,j})) = \begin{pmatrix} G_k^{(n)}(\langle \chi_1, \chi_1 \rangle) & G_k^{(n)}(\langle \chi_1, \chi_2 \rangle) & \cdots & G_k^{(n)}(\langle \chi_1, \chi_N \rangle) \\ G_k^{(n)}(\langle \chi_2, \chi_1 \rangle) & G_k^{(n)}(\langle \chi_2, \chi_2 \rangle) & \cdots & G_k^{(n)}(\langle \chi_2, \chi_N \rangle) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k^{(n)}(\langle \chi_N, \chi_1 \rangle) & G_k^{(n)}(\langle \chi_N, \chi_2 \rangle) & \cdots & G_k^{(n)}(\langle \chi_N, \chi_N \rangle) \end{pmatrix}$$

Sabem que és definida semipositiva i per tant si prenem qualsevol vector $u \in \mathbb{R}^N$ es compleix que $u^\perp(G_k^{(n)}(\chi_{i,j}))u \geq 0$. Si prenem el vector $u = (1, 1, \dots, 1)$ format tan sols per uns, llavors tenim que

$$\begin{aligned} & (1, 1, \dots, 1)(G_k^{(n)}(\chi_{i,j})) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ & = (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} G_k^{(n)}(\langle \chi_1, \chi_1 \rangle) & G_k^{(n)}(\langle \chi_1, \chi_2 \rangle) & \cdots & G_k^{(n)}(\langle \chi_1, \chi_N \rangle) \\ G_k^{(n)}(\langle \chi_2, \chi_1 \rangle) & G_k^{(n)}(\langle \chi_2, \chi_2 \rangle) & \cdots & G_k^{(n)}(\langle \chi_2, \chi_N \rangle) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k^{(n)}(\langle \chi_N, \chi_1 \rangle) & G_k^{(n)}(\langle \chi_N, \chi_2 \rangle) & \cdots & G_k^{(n)}(\langle \chi_N, \chi_N \rangle) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{i,j=1}^N G_k^{(n)}(\langle \chi_i, \chi_j \rangle) \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema - Delsarte, Goethals i Seidel. Fixem la dimensió on anem a treballar (n) i el grau que volem (d). Considerem una combinació de polinomis de Gegenbauer amb n i d fixades i amb coeficients no negatius $c_k \geq 0$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^d c_k G_k^{(n)}(t)$$

Suposem a més que $c_0 > 0$. Si a més es compleix que $f(t) \leq 0$ per $t \in [-1, 1/2]$, llavors el *kissing number* per \mathbb{R}^n està acotat superiorment de la següent manera:

$$\kappa(n) \leq \frac{f(1)}{c_0}$$

Fixem-nos que no importa com de gran agafem el polinomi perquè mentres compleixi les propietats donades, el *kissing number* està acotat superiorment per $\frac{f(1)}{c_0}$ així que si prenem $f_m = m \cdot f(t)$, llavors els coeficients també estaran multiplicats per m , és a dir per $0 \leq k \leq d$ es té que $c_{m,k} = m \cdot c_k$ i per tant $\frac{f_m(1)}{c_{m,k}} = \frac{m \cdot f(1)}{m \cdot c_0} \frac{f(1)}{c_0}$.

Demostració. Primer apliquem que podem escriure $f(\chi_{ij})$ com a combinació lineal de polinomis de Gegenbauer:

$$\sum_{i,j=1}^N f(\chi_{ij}) = \sum_{k=0}^d c_k \sum_{i,j=1}^N G_k^{(n)}(\chi_{ij})$$

seguim amb la suma de $\sum_{i,j=1}^N G_0^{(n)}(\chi_{ij})$ que és no negativa i pel segon lema podem acotar de la forma:

$$\sum_{k=0}^d c_k \sum_{i,j=1}^N G_k^{(n)}(\chi_{ij}) \geq c_0 \sum_{i,j=1}^N G_0^{(n)}(\chi_{ij})$$

Finalment, com per qualsevol valor de t es compleix que $G_0^{(n)}(t) = 1$ tenim que $c_0 \sum_{i,j=1}^N G_0^{(n)}(\chi_{ij}) = c_0 N^2$, amb tot això arribem a la que

$$\sum_{i,j=1}^N f(\chi_{ij}) = \sum_{k=0}^d c_k \sum_{i,j=1}^N G_k^{(n)}(\chi_{ij}) \geq c_0 \sum_{i,j=1}^N G_0^{(n)}(\chi_{ij}) = c_0 N^2$$

Per una altra part sabem que els termes no diagonals de $(f(\chi_{ij}))$ són negatius en l'interval que hem pres perquè $\chi_{ij} < 1/2$, llavors veiem que el sumatori està acotat superiorment de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^N f(\chi_{ij}) = Nf(1) + \sum_{i \neq j} f(\chi_{ij}) \leq Nf(1)$$

Així doncs tenim que $c_0 N^2 \leq f(1)N$ i per tant tenim la cota superior per al *kissing number* $N \leq f(1)/c_0$.

□

Per tenir una idea de com agafar el polinomi amb el que podem fer el mètode de Delsarte el que es té en compte és la disposició que tenen les esferes. En els casos $n = 8$ i $n = 24$ tenim unes configuracions especials que són les millors candidates a ser el reticle adequat i per tant agafem uns polinomis que s'adeqüin a aquests reticles.

En aquests casos tenim els reticles E_8 en el primer cas (el qual ens dona $\kappa(8) \geq 240$) i el reticle de *Leech* (que ens dona $\kappa(24) \geq 196560$) en el segon cas, sobre aquests reticles prenem els següents polinomis:

$$f_8(t) = (t - \frac{1}{2})t^2(t + \frac{1}{2})^2(t + 1), \quad f_{24}(t) = (t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{4})^2 t^2 (t - \frac{1}{4})^2 (t + \frac{1}{2})^2 (t + 1)$$

que és zero en punts que interessa (aquests punts depenen de com agafem la candidata a reticle). Al aplicar el mètode es sap que el *kissing number* en aquests casos és $\kappa(8) = 240$ i $\kappa(24) = 196560$.

En dimensió 3 sabem que podem posar les esferes en forma del icosaedre. Amb aquesta disposició si emprem el mètode de Delsarte no pot trobar una cota superior millor a la de $\kappa(3) \leq 13$. Per dimensió 4 tenim una configuració sobre la que treballem, reticle D_4 , però ens dóna molt pocs productes escalars entre diferents punts $(\pm\frac{1}{2}, 0, -1)$ i per tant segons el mètode de Delsarte prendriem el polinomi $f_4(t) = (t - \frac{1}{2})t^2(t + \frac{1}{2})^2(t + 1)$ que ens dóna una cota superior bastant allunyada del que volem $\kappa(4) \leq \frac{f_4(1)}{c_0} = 28.8$, com a molt la millor funció que podem trobar ens diu que $\kappa(4) \leq 25$ i per tant no tenim una bona cota superior.

Per solucionar aquests problemes el que fa **Oleg R. Musin** és modificar el mètode de Delsarte afeblint les restriccions del mètode original i permetent trobar una altra funció. El que passarà és que en lloc de buscar simplement una cota haurem d'estudiar un conjunt finit de possibilitats que ens donaran diverses cotes superiors. Una vegada tenim diverses cotes volem trobar-ne una que ens digui que $\kappa(n) \leq N$ i que com tendrem $N \leq \kappa(n)$ per la configuració triada tindrem una cota superior com volíem encara que no en serà una de tan senzilla com $f(1)/c_0$.

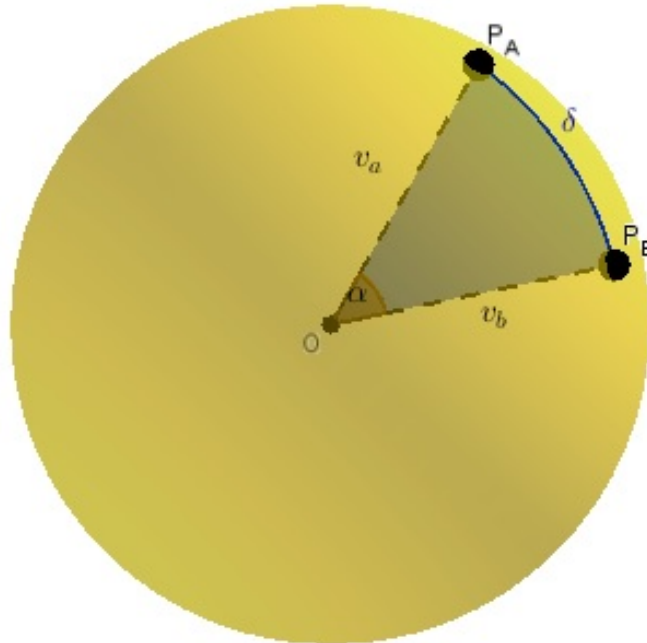
3.2 Resultats previs

Trigonometria esfèrica

D'ara endavant treballarem amb trigonometria sobre l'esfera i usarem resultats que són convenientes esmentar. La trigonometria esfèrica és el conjunt de resultats i relacions que trobem al treballar amb vectors i angles sobre l'esfera de centre O i radi R . En tot moment estarem fent hipòtesis i treballant sobre punts de l'esfera, la distància d'aquests punts al centre és el radi R .

Punts sobre l'esfera. Direm que el punt P_A sobre l'esfera ve donat per l'intersecció de l'esfera amb el vector v_a (que passa pel centre O), així doncs $v_a = (\overrightarrow{OP_A})$ que serà de mòdul R .

Distància entre dos punts. Donats dos punts P_A, P_B on $v_a = (\overrightarrow{OP_A}), v_b = (\overrightarrow{OP_B})$ denotem α a l'angle que formen els dos punts amb el centre de l'esfera, $\alpha = \angle P_A O P_B$. La distància que hi ha entre ells com $\delta = \text{dist}(P_A, P_B)$ és la longitud de l'arc de la circumferència que passa per P_A i P_B . Com pels dos punts, i sobre l'esfera, hi passa una circumferència els punts ens la parteixen en dos arcs dels quals agafem el de menys longitud.



Una vegada definits P_A, P_B, α i δ és complex que:

$$\delta = \cos^{-1}(v_a \cdot v_b) = \cos^{-1}(|v_a||v_b|\cos(\alpha)) = R\alpha$$

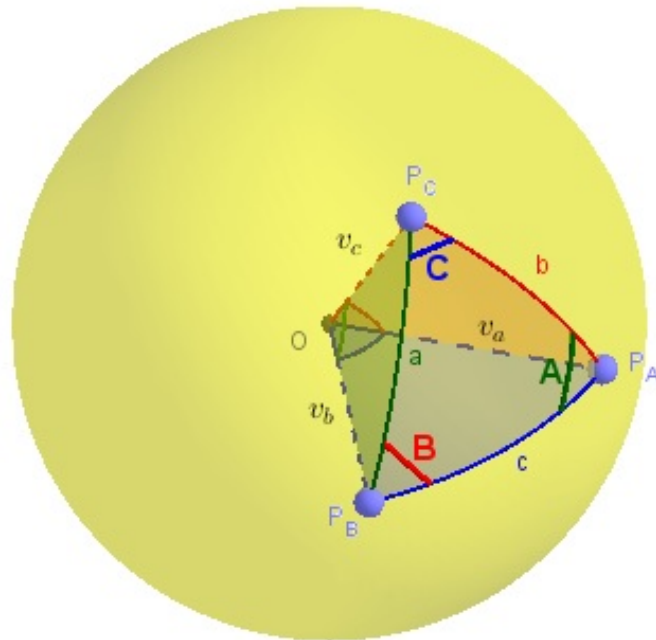
Distància en la esfera unitat. Com treballarem en tot moment amb la esfera unitat (per simplificar la notació), com que es compleix la igualtat $|v_a| = |v_b| = 1$ llavors tenim que:

$$\delta = \cos^{-1}(\cos(\alpha)) = \alpha$$

Així doncs tenim que la distància entre els dos punts en radiants és α i la seva distància real és $\delta = R\alpha = \alpha$, per tant en aquest cas quan parlem de distància entre dos punts ho notarem amb graus (l'angle que formen els dos punts amb el centre) per comoditat, encara que és un abús de notació també usem graus per expressar l'angle entre tres punts que es defineix a continuació.

Angle format per tres punts. Així com la distància entre dos punts és l'angle que formen aquests amb el centre (en la esfera unitat), l'angle que formen tres punts $A = \angle P_C P_A P_B$ és l'angle diedre entre els plans $P_A O P_B$ i $P_A O P_C$ que es forma en P_A .

Triangle esfèric. Ara ja podem definir el triangle esfèric que formen els punts P_A, P_B, P_C , que té com a costats els angles que formen el parell de punts amb el centre ($a = \angle P_B O P_C, b = \angle P_A O P_C, c = \angle P_A O P_B$) i com a angles el que hem descrit anteriorment ($A = \angle P_C P_A P_B, B = \angle P_A P_B P_C, C = \angle P_B P_C P_A$).



Teorema del cosinus. Sigui el triangle esfèric de costats a, b, c i angles A, B, C (com l'anterior A angle format en P_A , B angle format en P_B i C angle format en P_C), llavors és compleix que per qualsevols a, b, c, A, B, C i per qualsevol radi les igualtats següents són certes:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

Demostració. Anem a fer la demostració sobre la esfera unitaria ja que per els altres casos prenem igualment vectors unitaris per fer la demostració. Anem a calcular la primera igualtat ja que les altres es fan idènticament.

Podem considerar A com l'angle díedre entre els plans AOB i AOC , i per tant el podem calcular fent el producte escalar dels vectors normals d'aquests plans. Com hem suposat que $R = 1$, llavors el vector normal ve donat pel producte vectorial dels vectors unitaris v_a, v_b en el primer cas i v_a, v_c en el segon. Així doncs deduïm que:

$$(v_a \times v_b) \cdot (v_a \times v_c) = (|v_a||v_b|\sin(c)) (|v_a||v_c|\sin(b)) \cos(A) = \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

Per una altra part, usant una identitat vectorial tenim que:

$$\begin{aligned} (v_a \times v_b) \cdot (v_a \times v_c) &= v_a \cdot [v_b \times (v_a \times v_c)] = \\ &= v_a \cdot [v_a(v_b \cdot v_c) - v_c(v_a \cdot v_b)] = (v_b \times v_c) - (v_a \times v_c)(v_a \times v_b) = \\ &= \cos(a) - \cos(b)\cos(c) \end{aligned}$$

Així doncs tenim que efectivament

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

Excés esfèric. L'excés esfèric és la diferència entre la suma dels angles d'un triangle i 180° , $E = A + B + C - 108$.

Aquest excés ens dona alguna relació interessant com per exemple, donat el triangle $\Delta = ABC$ sobre l'esfera de radi R es compleix que $R^2 E = \text{Àrea}(\Delta)$.

Com la suma dels angles pot ser de més de 180° és un cas de geometria no euclidiana i un cas curiós que es pot donar és el d'un triangle amb tots els angles rectes.

Polinomis de Legendre

Com ja hem dit, la demostració per a $n = 3$ és una variació del mètode de Delsarte per la qual cosa els polinomis de Legendre són una part fonamental d'aquesta. Hem dit que els polinomis de Legendre, $P_k(t)$, són un cas particular dels polinomis de Gegenbauer. Una altra manera de definir-los és com les solucions de les equacions diferencials de Legendre definides com:

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{d}{dt} P_n(t) \right] + n(n+1)P_n(t) = 0$$

També els podem definir de forma recursiva com els polinomis de Gegenbauer. Partint de $P_0 = 1$ i $P_1 = t$ els definim de la següent forma:

$$P_2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \dots, P_k = \frac{2k-1}{k}tP_{k-1} - \frac{k-1}{k}P_{k-2}$$

Es sap que en aquest cas es poden definir dins una fórmula tancada anomenada la Formula de Rodrigues, per $k \in \mathbb{Z}$ es té que el polinomi de Legendre de grau k és:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k$$

Un resultat important per a la demostració dels següents lemes es el *Teorema de l'addició* per polinomis de Legendre que hem enunciat abans i que ens permet escriure la següent igualtat:

$$P_k(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\varphi)) = \sum_{m=0}^k c_{m,k} P_k^m(\cos(\theta_1)) P_k^m(\cos(\theta_2)) \cos(m\varphi)$$

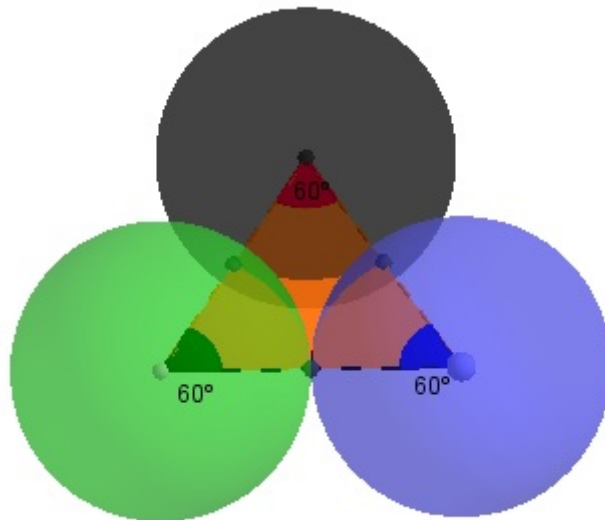
on recordem que hem agafat $P_k^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_k(t)$, i que quan $k > 0$ i $k \geq m \geq 1$ llavors $c_{m,k} = 2 \frac{(k-m)!}{(k+m)!}$ mentre que per $k = m = 0$ es té que $c_{0,0} = 1$

Distància mínima

El que volem fer és posar tantes esferes unitat com poguem tocant una central, també unitat.

Una manera de veure el problema és, com hem dit, pensar-lo com a punts sobre l'esfera unitat i el punt central, on els punts sobre l'esfera central representen el punt de contacte de la central amb una del voltant.

El cas més bàsic seria el de posar 2 esferes al voltant de la central, o el que és el mateix: 3 esferes tocant-se entre elles.



El cas en les 3 dimensions és el mateix, ja que si tenim 3 esferes tocant-se entre elles podem tallar pel pla que passa pel centre de l'esfera central i pels punts de contacte d'aquesta amb les del rededor i tenim el dibuix anterior.

El grau mínim que puguin formar aquests tres punts; centre de la central i punts de contacte amb les esferes del voltant, és de 60° perquè d'altra banda les esferes es superposicionarien i això no pot ser.

Així doncs, la distància mínima entre dos punts sobre l'esfera unitat és de 60° .

3.3 Demostració de $\kappa(3) = 12$ de Musin

Lema 1. Sigui X un conjunt finit de punts de l'esfera S^2 en R^3 , $X = x_1, x_2, \dots, x_n$. Definim la distància entre dos punts, x_i, x_j , com l'angle que formen els dos punts amb el centre de l'esfera. Com treballem sobre l'esfera unitat aquesta distància en radianats coincideix amb l'angle que formen amb el centre, l'anomenarem $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$.

Aquesta distància és amb radianats, però per comoditat de notació es pren la llicència d'escriure-ho en graus, per exemple $\frac{\pi}{2} \text{rad} = 90^\circ$.

Definida aquesta distància, es compleix la següent propietat de positivitat pels polinomis de Legendre:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k(\cos(\phi_{i,j})) \geq 0$$

Demostració. Prenent els punts x_i en coordenades esfèriques, és a dir $x_i = (\theta_i, \varphi_i)$ i donada la llei del cosinus:

$$\cos(\phi_{i,j}) = \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sin(\theta_i)\sin(\theta_j)\cos(\varphi_{i,j}), \text{ on } \varphi_{i,j} = \varphi_i - \varphi_j$$

juntament amb el que hem introduït en l'apartat anterior, es pot reescriure la desigualtat del lema. Primer apliquem el *Teorema d'addició*, recordem que $P_k^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_k(t)$ i per tant tenim que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k(\cos(\phi_{i,j})) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^k c_{m,k} P_k^m(\cos(\theta_i)) P_k^m(\cos(\theta_j)) \cos(m\varphi_{i,j})$$

sigui $u_{m,i} = P_k^m(\cos(\theta_i))$ llavors es compleix que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^k c_{m,k} P_k^m(\cos(\theta_i)) P_k^m(\cos(\theta_j)) \cos(m\varphi_{i,j}) = \sum_{m=0}^k c_{m,k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{m,i} u_{m,j} \cos(m\varphi_{i,j})$$

Així doncs arribem a l'igualtat següent:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k(\cos(\phi_{i,j})) = \sum_{m=0}^k c_{m,k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{m,i} u_{m,j} \cos(m\varphi_{i,j})$$

Anteriorment hem definit $c_{m,k}$ com $c_{m,k} = 2 \frac{(k-m)!}{(k+m)!}$ exceptuant el cas $k = m = 0$ en què es té $c_{0,0} = 1$ en qualsevol cas, sempre són positius i per tant és suficient veure que $\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^n u_i u_j \cos(m\varphi_{i,j}) \geq 0$$

Per això prenem els vectors $v_i = (\cos(m\varphi_i), \sin(m\varphi_i)) \in \mathbb{R}^2$, on $i \in \{1, \dots, n\}$. Si definim $v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, llavors es compleix que:

$$\sum_{j=1}^n u_i u_j \cos(m\varphi_{i,j}) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \geq 0$$

llavors es té que efectivament,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k(\cos(\phi_{i,j})) = \sum_{m=0}^k c_{m,k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{m,i} u_{m,j} \cos(m\varphi_{i,j}) \geq 0$$

□

A partir d'aquest moment es treballa amb un polinomi de novè grau que compleix les hipòtesis del mètode de Delsarte modificat per Musin que es donen més endavant però no compleix totes les hipòtesis del mètode de Delsarte, aquest polinomi no és negatiu en l'interval $[-1, -t_0]$. A més, aquest polinomi es pot expressar en funció de polinomis de Legendre.

$$f(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200}$$

Lema 2. Prenent un conjunt com el del *Lema 1*, $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{S}^2$, es compleix que

$$S(X) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) \geq n^2$$

Demostració. Com es pot reescriure f en forma de polinomis de Legendre

$$f = \sum_{k=0}^9 c_k P_k = P_0 + \frac{8}{5}P_1 + \frac{87}{25}P_2 + \frac{33}{20}P_3 + \frac{49}{25}P_4 + \frac{1}{10}P_5 + \frac{8}{25}P_9$$

tenim una suma de polinomis de Legendre amb coeficients c_k , en què per $k = 0$, $c_0 = 1$ i com que la resta dels coeficients són no negatius ($c_k \geq 0$), aplicant el resultat del primer lema tenim que

$$S(X) = \sum_{k=0}^9 c_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k(\cos(\varphi_{i,j})) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_0 P_0 = n^2$$

□

Lema 3. Sigui $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un subconjunt de \mathbb{S}^2 amb distància sobre l'esfera, $\phi_{i,j}$, entre dos punts x_i, x_j que és com a mínim de 60° (recordem que aquesta és la distància sobre l'esfera i per tant és una distància en radianys que ens prenem la llicència d'escriure-la en graus). Aleshores

$$S(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) < 13n$$

Demostració. Com la demostració d'aquest lema ocupa una bona part del treball i concentra tota la dificultat tècnica es decideix deixar-la per a la següent secció per fer més entenedor el resultat $\kappa(3) = 12$.

Teorema. $\kappa(3) = 12$. On $\kappa(3)$ és el *kissing number* per 3 dimensions.

Demostració. Suposem que X són els punts de contacte de les esferes que envolten la central, així doncs el problema principal es transforma en quants de punts x_i de \mathbb{S}^2 hi han. Així si $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{S}^2$ llavors $\kappa(3) = n$. A partir dels lemes 2 i 3 es dedueix $n^2 \leq S(X) < 13n$ per tant $n < 13 \rightarrow n \leq 12$. D'altra banda sabem que podem posar 12 esferes al voltant d'una central col·locant-les com els vèrtexs d'un icosaèdre regular i per tant sabem que $\kappa(3) \geq 12$, recordem la figura de la introducció que té una esfera en cada vèrtex del icosaedre següent

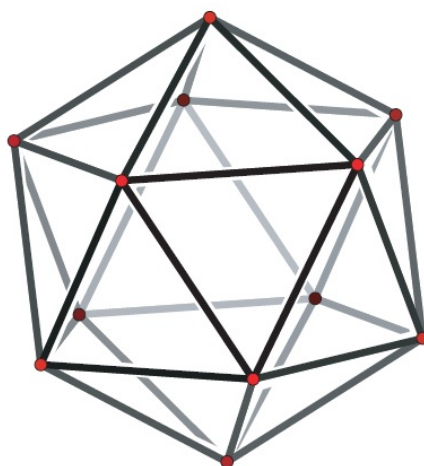


Figura extreta del article de Pfender i Ziegler ^[10]

per tot l'anterior, sabem que efectivament $n = \kappa(3) = 12$.

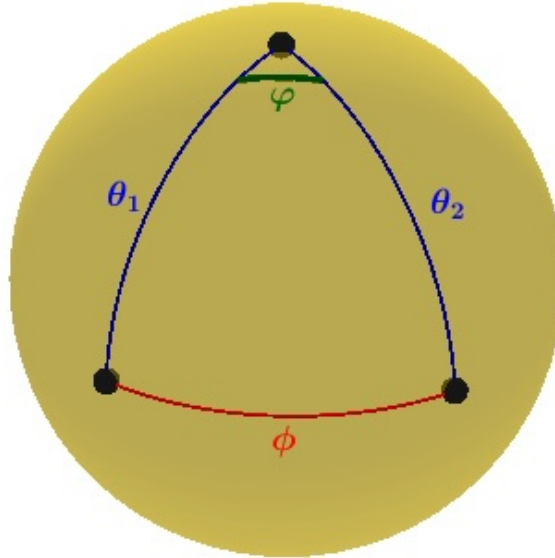
□

3.4 Lema 3

Es primordial el resultat de trigonometria esfèrica, la *lei del cosinus*:

$$\cos(\phi) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\varphi)$$

per a triangles esfèrics ABC amb costats θ_1, θ_2, ϕ i angle $= \varphi$.



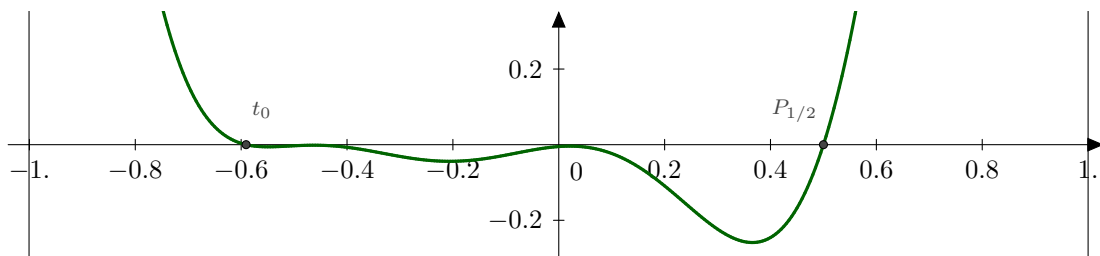
La demostració està dividida en 8 passos:

1. En el primer pas definirem la funció $f(t)$ i el conjunt $J(i)$ amb els quals podrem acotar $S_i(X)$
2. Donat un punt $x_i \in \mathbb{S}^2$ definirem el seu antipodal, $e_0 = -x_i$, i els punts $y_j \in \mathbb{S}^2$ que compleixen un seguit de condicions que donarem més avant. Sigui $Y = \{e_0, y_1, \dots, y_m\}$ un conjunt de punts sobre l'esfera definirem una funció $H(Y)$ a partir de la funció $f(t)$, aquesta funció és la que ens ajudarà a trobar la cota superior per $S_i(X)$
3. En aquest apartat calcularem que donat el casquet esfèric de centre e_0 i radi $\theta_0 = \arccos(t_0)$, tenim com a màxim 4 punts que compleixen les condicions donades en el segon punt. Per tant $Y = \{e_0, \dots, y_m\}$ amb $y \leq 4$
4. Calcularem les cotes superiors pels casos $m = 0$ i $m = 1$, és a dir trobar cotes superiors per $H(e_0)$ i $H(e_0, y_1)$

5. En aquest pas buscarem els pitjors casos per a cada $m = 2, 3, 4$, és a dir quines distribucions de punts ens donaran la cota superior més gran en cada cas. Arribarem a la conclusió que la pitjor distribució en cada cas serà la figura regular (arc de circumferència de 60° , triangle equilàter esfèric amb costats de 60° i rombe esfèric equilaterral d'arestes de 60°) amb e_0 sempre en el seu interior
6. Mitjançant una funció $F_1(\psi)$ trobarem la cota superior pel cas $m = 2$
7. Trobarem la cota superior pel cas $m = 4$
8. Calcular les possibles cotes pel cas $m = 3$

Pas un. Es pot veure que el polinomi que s'ha agafat és tal que compleix les propietats següents:

- (i) $f(t)$ és una funció monòtona decreixent en l'interval $[-1, -t_0]$;
 - (ii) $f(t) < 0$ per $t \in (-t_0, 1/2)$, i $f(t) \geq 0$ en cas contrari;
- i $f(-t_0) = 0$ amb $t_0 \approx 0.5907$.

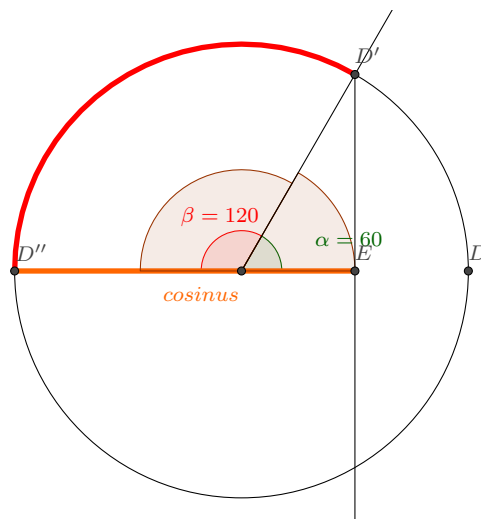


Si sigui $S_i(X) = \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j}))$ es té doncs que $S(x) = \sum_{i=1}^n S_i(X)$, per tant si per $i = 1, 2, \dots, n$ es compleix que $S_i(X) < 13$, llavors $S(X) < 13n$.

Pel que fa a la distància recordem algunes característiques:

(a) Si es busca la distància d'un punt a ell mateix, aquesta és clarament nul·la, $\phi_{i,i} = 0$. En aquest cas es té que $f(\cos(\phi_{i,i})) = f(1)$.

(b) Ja hem vist que tenim en compte en tot moment que $\phi_{i,j} \geq 60^\circ, i \neq j$, així doncs $\cos(\phi_{i,j}) \leq 1/2$,



Per tant $\cos(\phi_{i,j}) \in [-1, 1/2]$.

Aquests resultats, junt amb (ii) donen com a resultat que $f(\cos(\phi_{i,j})) \leq 0$ quan $\cos(\phi_{i,j}) \in [-t_0, 1/2]$ i positiva en la resta de l'interval definit.

Ara començarem a veure les conseqüències de les variacions amb el mètode de Delsarte. Si amb l'original només teníem una cota era degut a què la funció no podia ser positiva en $[-1, \frac{1}{2}]$, però ara treballem amb una funció que si és positiva en un tros d'aquest interval i això implica que haurem de contemplar diversos casos.

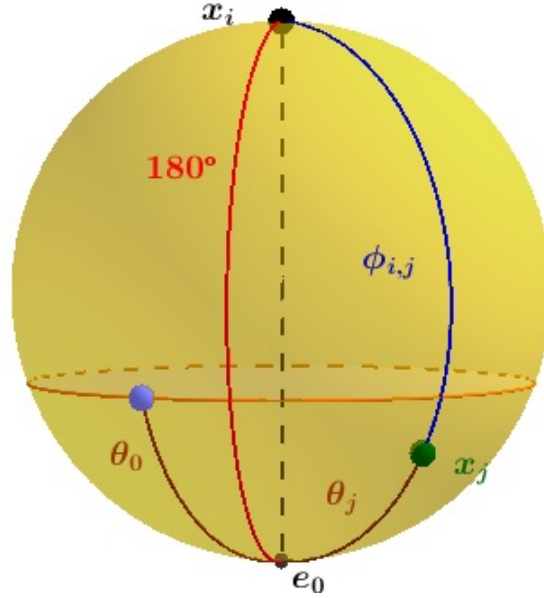
Ara definim el conjunt $J(i) := \{j : \cos(\phi_{i,j}) \in [-1, -t_0]\}$ o el que és el mateix, allà on $f(\cos(\phi_{i,j})) \geq 0$.

Notem que $f(\cos(\phi_{i,j}))$ també podria ser positiva en $1/2 < \cos(\phi_{i,j}) \leq 0$, però com hem dit en els resultats previs sabem que la distància entre dos punts és major o igual a 60° i es compleix doncs que $\cos(\phi_{i,j}) \leq 1/2$, per tant definim el conjunt $J(i)$ com abans.

Així doncs podem acotar $S_i(X)$ ja que no hi haurà j tals que $\cos(\phi_{i,j}) > 1/2$ i per tant si $j \notin J(i)$ llavors $f(\cos(\phi_{i,j})) < 0$. Així doncs es complirà que:

$$S_i(X) \leq T_i(X) := f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(\cos(\phi_{i,j})) \quad (1)$$

Anomenem ara $\theta_0 = \arccos(t_0) \approx 53.794^\circ$. Com $\arccos(-1) = 180^\circ$ i $j \in J(i)$ si i només si, $\phi_{i,j} \in [-1, -t_0]$ es té que $j \in J(i) \leftrightarrow \phi_{i,j} > 180^\circ - \theta_0$, si definim $\theta_j = 180^\circ - \phi_{i,j}$ llavors es compleix que $\theta_j < \theta_0$. Aquestes deduccions es veuen reflexades en la següent imatge.



En resum, per tot punt $x_{i,j}$ amb $j \in J(i)$ està dins l'àrea definida per l'esfera sobre l'esfera amb centre el punt antipodal de x_i , diem-li $e_0 = -x_i$ i el radi θ_0 .

Pas dos. A partir d'ara considerem el següent conjunt de punts de \mathbb{S}^2 : e_0, y_1, \dots, y_m tals que:

$$\phi_{i,j} := \text{dist}(y_i, y_j) \geq 60^\circ, \quad \forall i \neq j, \quad \theta_i := \text{dist}(e_0, y_i) < \theta_0 ; 1 \leq i \leq m \quad (2)$$

Suposem un conjunt de punts no buit $Y = \{e_0, y_1, \dots, y_m\} \neq \emptyset$ que satisfà les condicions de (2). Definim ara la següent funció:

$$H(Y) = H(e_0, y_1, \dots, y_m) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2)) + \dots + f(-\cos(\theta_m))$$

El que volem fer és trobar una cota superior per qualsevol nombre de punts que poguem tenir en l'àrea definida sobre l'esfera pel punt e_0 i el radi θ_0 . El que farem primer en el pròxim punt és buscar quants punts podem tenir com a màxim en aquesta àrea i la resta de l'apartat consisteix en trobar una cota superior de $H(Y) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + \dots + f(-\cos(\theta_m))$ per a cada m possible.

Així doncs, sigui $m = |J(i)|$, es compleix que:

$$\begin{aligned} T_i(X) &= f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(\cos(\phi_{i,j})) = f(1) + \sum_{i=1}^{i=m} f(\cos(\phi_{i,j})) = f(1) + \sum_{i=1}^{i=m} f(\cos(180 - \theta_j)) = \\ &= f(1) + \sum_{i=1}^{i=m} f(-\cos(\theta_i)) = H(e_0, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

Així doncs, provant que per a cada m possible es compleix que $H(Y) < 13$ n'hi ha prou, perquè llavors $S_i(X) \leq T_i(X) \leq H(Y) < 13$.

Pas tres. Ara volem trobar el nombre màxim de punts que hi han en el casquet de centre e_0 i radi θ_0 sobre l'esfera. Anem a veure que $m \leq 4$ en aquest punt.

Signi $Y = \{e_0, y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbb{S}^2$ un conjunt de punts que satisfan les condicions de (2). Es pren e_0 com el pol nord i es prenen els punts en coordenades esfèriques, $y_i = (\theta_i, \varphi_i)$. Definits així els punts podem reescriure la llei del cosinus com:

$$\cos(\phi_{i,j}) = \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sin(\theta_i)\sin(\theta_j)\cos(\varphi_i - \varphi_j)$$

Es té que $\theta_i > 0$ i que $m \geq 2$ perquè en cas contrari, és a dir $m=1$, $y_i = e_0$ i.e. $\theta_j = \phi_{i,j} \geq 60^\circ > \theta_0$ la qual cosa contradia el que hem suposat al primer punt i com hem pres els punts en el segon punt. Així doncs tenim que com $\phi_{i,j} > 60^\circ$ llavors $\cos(\phi_{i,j}) \leq 1/2$ per la qual cosa tenim que:

$$\begin{aligned} 1/2 &\geq \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sin(\theta_i)\sin(\theta_j)\cos(\varphi_i - \varphi_j) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \cos(\varphi_i - \varphi_j) \leq \frac{1/2 - \cos(\theta_i)\cos(\theta_j)}{\sin(\theta_i)\sin(\theta_j)} \quad (3) \end{aligned}$$

Definim ara la funció $Q(\alpha, \beta)$ com

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1/2 - \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

i té com a derivada respecte α

$$Q'(\alpha, \beta) = \frac{\partial Q(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{2\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{2\sin^2(\alpha)\sin(\beta)}$$

En aquest cas s'estan prenent $0 < \alpha, \beta \leq \theta_0 < 60^\circ$ i per tant tenim que $1 \geq \cos(\alpha), \cos(\beta) > 1/2$ per la qual cosa

$$2\cos(\beta) - \cos(\alpha) > 0 \longrightarrow \frac{2\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{2\sin^2(\alpha)\sin(\beta)} = Q'(\alpha, \beta) > 0$$

Com aquesta funció és creixent tenim que si $\theta_0 \geq \alpha$ llavors $Q(\theta_0, \beta) \geq Q(\alpha, \beta)$. També tenim que

$$Q(\theta_0, \beta) = \frac{1/2 - \cos(\theta_0)\cos(\beta)}{\sin(\theta_0)\sin(\beta)} = \frac{1/2 - \cos(\beta)\cos(\theta_0)}{\sin(\beta)\sin(\theta_0)} = Q(\beta, \theta_0)$$

En resum, com $\alpha, \beta \leq \theta_0$ tenim que $Q(\alpha, \beta) \leq Q(\theta_0, \beta) = Q(\beta, \theta_0) \leq Q(\theta_0, \theta_0)$ per tant podem acotar aquesta funció per qualssevol $(\alpha, \beta) = (\cos(\theta_i), \cos(\theta_j))$ que compleixen $\cos(\theta_i), \cos(\theta_j) \leq \cos(\theta_0)$:

$$\frac{1/2 - \cos(\theta_i)\cos(\theta_j)}{\sin(\theta_i)\sin(\theta_j)} \leq \frac{1/2 - \cos(\theta_0)\cos(\theta_0)}{\sin(\theta_0)\sin(\theta_0)} = \frac{1/2 - \cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)} = \frac{1/2 - t_0^2}{1 - t_0^2}$$

Aquest resultat juntament amb (3) implica que:

$$\cos(\varphi_i - \varphi_j) \leq \frac{1/2 - t_0^2}{1 - t_0^2} \longrightarrow |\varphi_i - \varphi_j| \geq \arccos\left(\frac{1/2 - t_0^2}{1 - t_0^2}\right) \approx 76.582^\circ > 72^\circ$$

Com $360/72 = 5$, es tindrà que en el casquet de punts en tindrem $360/76.582 < 360/72 = 5$, així doncs $m \leq 4$, és a dir no podem tenir més de 4 punts (que estan a distància angular mínima major a 72°).

Pas quatre. En el segon punt hem reduït el problema a veure que $H(Y) = H(e_0, y_1, \dots, y_m) < 13$, per m possible i en el tercer punt hem vist que com a molt hi poden haver 4 boles, per tant es redueix a veure que $H(y_0, y_1, \dots, y_m) = H(e_0, y_1, \dots, y_m) < 13$ pels diferents $m = 0, 1, 2, 3, 4$.

Cas $m = 0$:

$$H(Y) = f(1) = 10.11 < 13$$

Cas $m = 1$:

Sabem que $f(t)$ és monòtonament decreixent en $[-1, -t_0)$ i que $-t_0 = -\cos(\theta_0)$ a més

$$0 < \theta_i < \theta_0 \rightarrow \cos(\theta_0) < \cos(\theta_i) < \cos(0) = 1 \rightarrow -1 < -\cos(\theta_i) < -\cos(\theta_0)$$

Per la qual cosa, $f(-\cos(\theta_i)) < f(-1)$, així doncs tenim que

$$H(Y) = H(e_0, y_1) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) = 12.88 < 13$$

Pas cinc. Ara estudiarem els casos $m=2,3,4$; per això buscarem el pitjor cas per a cada conjunt de punts. Suposem que tenim una col·lecció de punts de l'esfera $Y = \{e_0, y_1, \dots, y_m\}$ complint les condicions de (2). En el tercer punt hem vist que $y_i \neq e_0$ si $i > 0$, això es segueix complint.

El que tampoc podem fer amb aquesta col·lecció de punts es variar-la de tal forma que canviem y_i per x_i , amb aquest darrer més prop de e_0 perquè com hem vist abans $f(-\cos(\theta_i))$ és decreixent i si x_i està més a prop de e_0 llavors el nou conjunt de punts, diguem X , donarà una cota major que l'altre, $H(Y) < H(X)$, amb la qual cosa contradiu que $H(Y)$ és suprem.

Tendrem doncs que sense pèrdua de generalitat podem suggerir les configuracions següents:

1. *Cas $m=2$.* El conjunt $Y = \{e_0, y_1, y_2\}$ formen l'arc de circumferència $arc(y_1, y_2)$ de distància 60° amb $e_0 \in arc(y_1, y_2)$
2. *Cas $m=3$.* El conjunt $Y = \{e_0, y_1, y_2, y_3\}$ formen el triangle equilàter esfèric $\Delta_3 = y_1y_2y_3$, d'arestes de 60° i amb e_0 al seu interior.
3. *Cas $m=4$.* El conjunt $Y = \{e_0, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ formen un rombe esfèric equilatèral d'arestes de 60° i amb $e_0 \in \Delta_4 = y_1y_2y_3y_4$, $\Delta_4 = convY$ és un quadrilàter convex.

Demostració.

Cas m=2. El conjunt $\{e_0, y_1, y_2\}$ forma l'arc de circumferència $arc(y_1, y_2)$ tal que $e_0 \in arc(y_1, y_2)$ i $dist(y_1, y_2) = 60^\circ$.

Si l'arc no passés per e_0 , llavors podriem prendre altres punts fins a formar un arc que hi passés, és a dir, estariem canviant la disposició dels punts apropant-los a e_0 , però ja hem dit que això no pot ser.

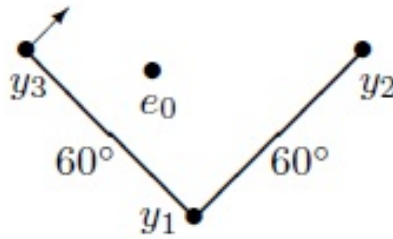
Per una altra part si $dist(y_1, y_2) > 60^\circ$, podem apropar y_1 a y_2 escurçant la distància, la qual cosa fa que agafem nous punts més propers a e_0 , la qual cosa ens torna a donar una contradicció.

Cas m=3. En aquest cas tindrem un triangle esfèric regular (triangle equilàter esfèric) amb cada arista de 60° , $\Delta_3 = y_1y_2y_3$ i el qual tindrà e_0 en el seu interior.

Sabem que $e_0 \in \Delta_3$, pel mateix que abans; si no està en l'interior vol dir que podem moure el triangle cap al punt de tal forma que els nous punts que estem agafant s'apropen a e_0 i arribem a contradicció.

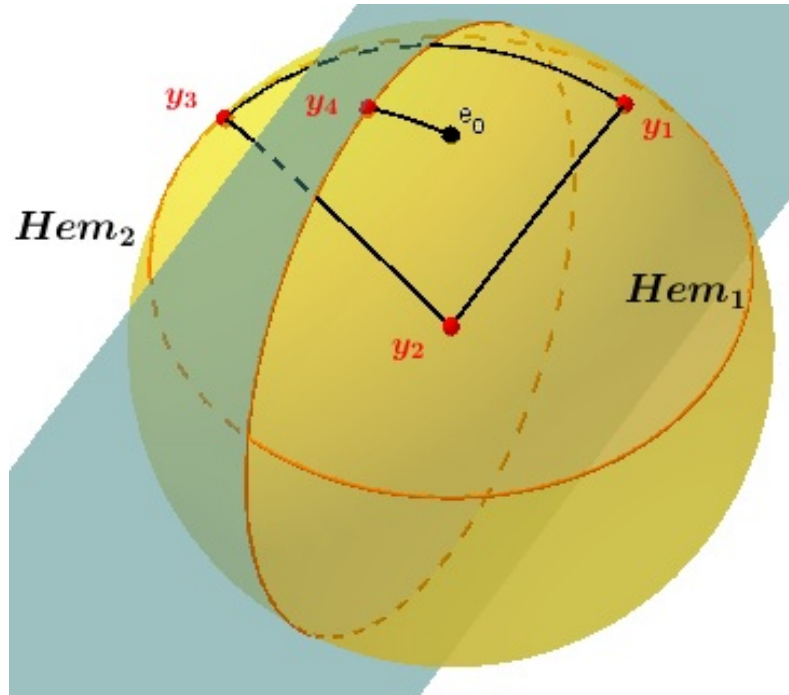
És un triangle regular amb arestes de 60° , suposem que $dist(y_1, y_i) > 60^\circ$ per $i = 2, 3$, això vol dir que podem reduir aquestes distàncies si apropem y_1 a e_0 , i tornem a arribar a contradicció. Per tant al menys els dos costats són $dist(y_1, y_2) = dist(y_1, y_3) = 60^\circ$.

També passarà que $dist(y_2, y_3) = 60^\circ$ ja que si suposem que e_0 està ara en el triangle podem fer dues coses, o bé moure'l si està sobre y_2y_3 , o en cas contrari rotar y_2y_3 sobre y_3 en direcció a e_0 , acurçant així $dist(y_2, y_3)$. En qualsevol dels casos estam arribant a una contradicció i per tant $dist(y_2, y_3)$ ha de ser exactament 60° . El cas de la rotació l'ilustra Musin mateix en la seva publicació [4]:



Cas m=4. Tindrem un rombe esfèric equilaterral amb arestes de 60° i amb $e_0 \in \Delta_4 = y_1y_2y_3y_4$. Tindrem que $\Delta_4 = convY$ és un quadrilàter convex.

Suposem que no és cert i que $y_4 \in y_1y_2y_3$, prenem ara l'arc e_0y_4 que estarà dins del triangle $y_1y_2y_3$ i prenem l'arc de circumferència que passa per y_4 i que és ortogonal a aquest arc. Aquest arc de circumferència parteix el triangle en dos parts, i a més parteix l'èsguera en dos hemisferis que nombrarem Hem_1 i Hem_2 .



Si $e_0 \in Hem_1$ llavors al menys un dels tres punts que formen aquest triangle estarà en l'altre hemisferi, per exemple $y_3 \in Hem_2$ tenim doncs que y_4 és el punt que dóna la circumfència que separa els dos hemisferis i aquesta és ortogonal a l'arc e_0y_4 , per qualsevol punt x que estigui en un hemisferi contrari al que conté e_0 es complirà que $\angle e_0y_4x > 90^\circ$ i en particular $\angle e_0y_4y_3 > 90^\circ$ i per la llei del cosinus tenim que $dist(y_3, e_0) > dist(y_3, y_4)$ i per tant $\theta_3 = dist(y_3, e_0) > dist(y_3, y_4) \geq 60^\circ > \theta_0$ però en tot moment estem prenent que $\theta_i < \theta_0!!!$

Per tant, efectivament tenim que $\Delta_4 = convY$ és un quadrilàter convex.

Prenent el punt y_i i seguint els mateixos raonaments que en $m = 3$ tenim que al menys per dos vèrtexs y_j, y_k , $dist(y_i, y_j) = dist(y_i, y_k) = 60^\circ$. Les dues diagonals de Δ_4 no poden ser de 60° perquè si això passés, al menys una de les altres distàncies seria menor a 60° , però això no pot ser. Per tant tenim un rombe equilàter esfèric amb costats de 60° i diagonals diferents i majors a 60° .

□

El que hem fet en aquest punt és justificar perquè treballem amb figures regulars per trobar les cotes de $H(Y)$.

Pas sis. Cota per a $m = 2$. Definirem una funció per a trobar el màxim de $f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2))$, per això definirem una funció que jugui amb la distància de l'arc entre dos punts, ψ , i com θ_i és la distància de e_0 a y_i , varia respecte la distància al punt e_0 .

Definim aquesta funció com $F_1(\psi)$, amb $60^\circ < \psi < 2\theta_0$ com:

$$F_1(\psi) = \max_{\psi/2 \leq \theta \leq \theta_0} \left\{ \tilde{F}_1(\theta, \psi) \right\}, \quad \tilde{F}_1(\theta, \psi) = f(-\cos(\theta)) + f(-\cos(\psi - \theta))$$

Si prenem $dist(y_i, y_j) = \psi$, la funció $\tilde{F}_1(\theta, \psi)$ el que està fent, com hem dit, és donar un cas en què e_0 està en l'arc a una distància θ d'un punt i a $\psi - \theta$ de l'altre, i $F_1(\psi)$ recorre els diversos casos que hi pot haver per trobar el que doni la distància màxima, per tant

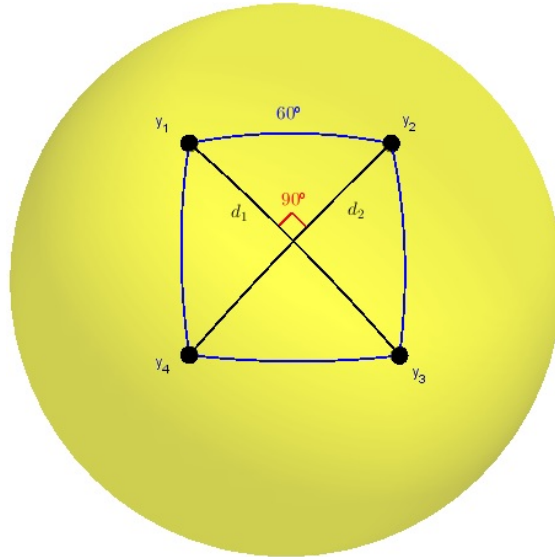
$$f(-\cos(\theta_i)) + f(-\cos(\theta_j)) \leq F_1(\psi) \quad (4)$$

Amb la disposició de punts que hem raonat en el punt anterior el que tindrem serà un arc de 60° per la qual cosa:

$$H(e_0, y_1, y_2) \leq f(1) + F_1(60^\circ) \approx 12.8749 < 13$$

Pas set. Cota per a $m = 4$. Recordem que encara que la distància entre punts és en radianats estem prenent-la en notació de graus per comoditat.

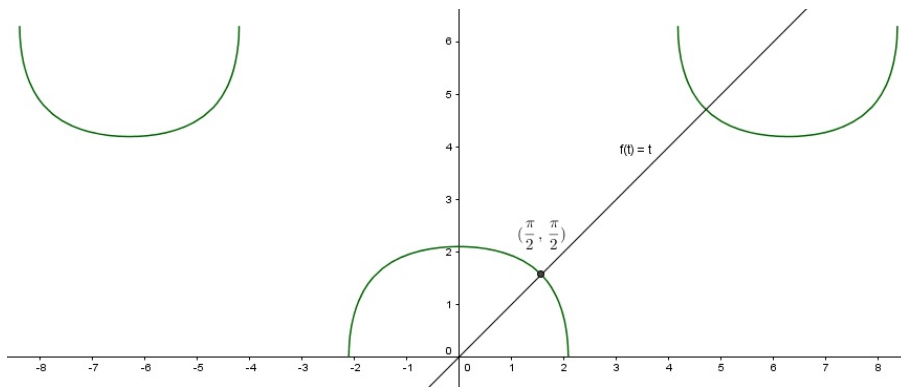
Siguin $d_1 = \text{dist}(y_1, y_3)$, $d_2 = \text{dist}(y_2, y_4)$ les dues diagonals del rombe esfèric $\Delta_4 = y_1 y_2 y_3 y_4$, compleixen que $d_1 = y_1 y_3$, $d_2 = y_2 y_4$ són ortogonals. A partir de la llei del cosinus per triangles esfèrics tenim que:



$$\cos(60^\circ) = \cos\left(\frac{d_1}{2}\right)\cos\left(\frac{d_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{d_1}{2}\right)\sin\left(\frac{d_2}{2}\right)\cos(90^\circ) = \cos\left(\frac{d_1}{2}\right)\cos\left(\frac{d_2}{2}\right)$$

Per tant tenim que $\cos\left(\frac{d_1}{2}\right)\cos\left(\frac{d_2}{2}\right) = \frac{1}{2}$ i gràcies a aquesta igualtat podem definir la següent funció:

$$\rho(t) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$$



Aïllant d_1 de $\cos(\frac{d_1}{2})\cos(\frac{d_2}{2}) = \frac{1}{2}$ tenim que $d_1 = 2 \arccos(\frac{1}{2\cos(\frac{d_2}{2})})$, i a l'inversa, per tant:

$$\rho(d_1) = d_2, \quad \rho(d_2) = d_1$$

D'altra banda:

$$\rho(90^\circ) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\frac{90}{2})}\right) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2(45^\circ) = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \rho(\rho(t)) &= 2 \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\arccos(1/(2\cos(t/2)))}\right) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2(1/(2\cos(t/2)))}\right) = \\ &= 2 \arccos\left(\frac{1}{1/\cos(t/2)}\right) = 2 \arccos(\cos(\frac{t}{2})) = t \end{aligned}$$

Així doncs tenim les igualtats:

$$\rho(d_1) = d_2, \quad \rho(d_2) = d_1, \quad \rho(90^\circ) = 90^\circ, \quad \rho(\rho(t)) = t$$

Si suposem que $d_1 \leq d_2$, i a més tenim que $\theta_i \leq \theta_0$, clarament com tots els punts estan en el casquet, $d_2 \leq 2\theta_0$. Com hem suposat que $d_1 \leq d_2 = \rho(d_1)$, deduïm que la funció $\rho(t)$ varia l'ordre de la desigualtat, de forma que si $\theta > 90^\circ$, llavors $\rho(\theta) < 90^\circ$ i a l'inversa tot deixant invariant només $\rho(90^\circ) = 90^\circ$.

$$d_2 \leq 2\theta_0 \rightarrow \rho(2\theta_0) \leq \rho(d_2) = d_1$$

Així doncs tenim la cadena:

$$\rho(2\theta_0) \leq d_1 = \rho(d_2) \leq 90^\circ = \frac{\pi}{2} \leq d_2 \rho(d_1) \leq 2\theta_0$$

Diferenciarem ara dos casos diferents:

- 1) $\rho(2\theta_0) \leq d_1 < 77^\circ$
- 2) $77^\circ \leq d_1 \leq 90$

Donarem cotes usant la funció del punt anterior, $F_1(\psi)$ sobre les diagonals seguint el mateix raonament perquè e_0 estarà sobre les diagonals.

Primer cas, $\rho(2\theta_0) \leq d_1 < 77^\circ$. $F_1(\psi)$ és una funció monòtona decreixent respecte ψ , si tenim en compte el que hem fet en el sisè punt tenim que:

$$f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_3)) \leq F_1(d_1) \leq F_1(\rho(2\theta_0)), \quad \text{perquè } \rho(2\theta_0) \leq d_1$$

$$f(-\cos(\theta_2)) + f(-\cos(\theta_4)) \leq F_1(d_2) = F_1(\rho(d_1)) < F_1(\rho(77^\circ)), \quad \text{perquè } d_1 < 77^\circ$$

Així doncs:

$$H(Y) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2)) + f(-\cos(\theta_3)) + f(-\cos(\theta_4)) <$$

$$< f(1) + F_1(\rho(2\theta_0)) + F_1(\rho(77^\circ)) \approx 12.9171 < 13$$

Segon cas, $77^\circ \leq d_1 \leq 90$. Amb els mateixos raonaments que el primer cas obtenim que:

$$H(Y) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2)) + f(-\cos(\theta_3)) + f(-\cos(\theta_4)) <$$

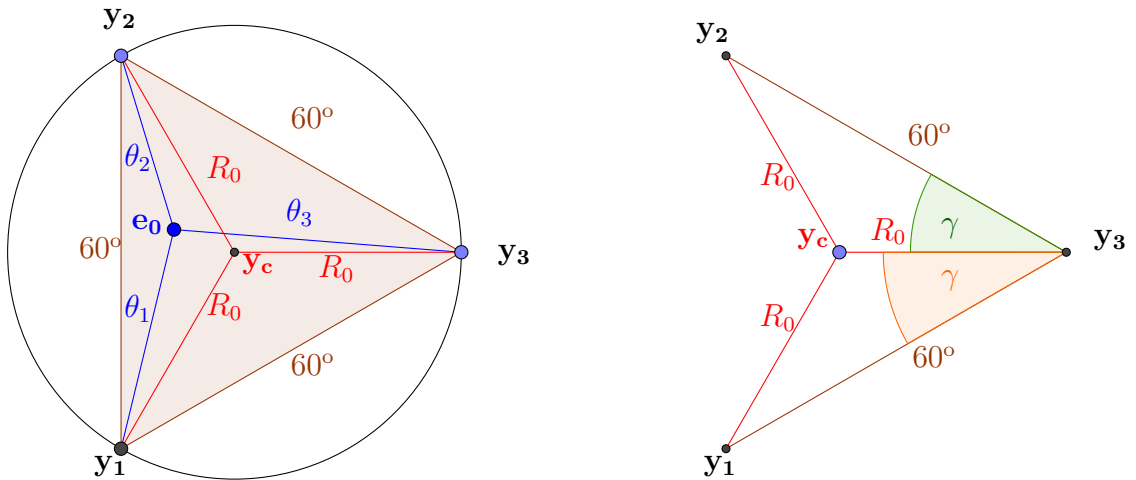
$$< f(1) + F_1(77^\circ) + F_1(\rho(90^\circ)) = f(1) + F_1(77^\circ) + F_1(90^\circ) \approx 12.9182 < 13$$

Sigui quin sigui el cas acabam de veure que $H(e_0, y_1, y_2, y_3) < 13$.

Pas vuit. Hem deixat el cas $m = 3$ pel final perquè si en l'anterior punt hem distingit dos casos, ara en distingirem més.

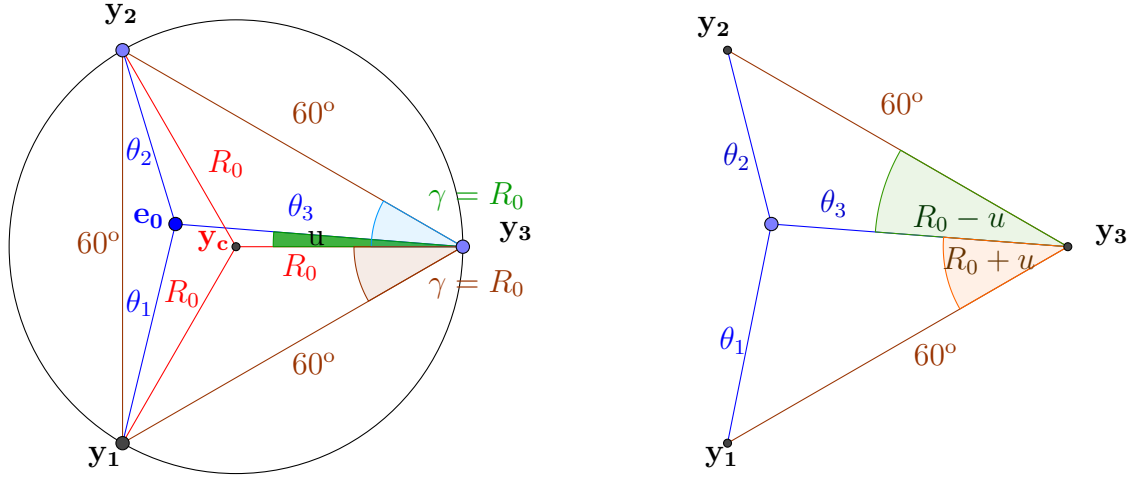
Recordem que Δ_3 és un triangle regular, i per tant $H(Y) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2)) + f(-\cos(\theta_3))$ serà una funció simètrica respecte els valors dels θ_i que prenguem, així doncs per comoditat prenem $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_0$.

Treballarem a més amb la suposició $R_0 \leq \theta_3 \leq \theta_0$ on $R_0 = \arccos(\sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 35.2644^\circ$ és el que val el radi del cercle amb centre el circumcentre i que conté el triangle equilàter Δ_3 . Sigui y_c el centre de Δ_3 tenim que $\angle y_1 y_3 y_c = \angle y_2 y_3 y_c = \gamma$, ara farem servir la llei del cosinus sobre el triangle $y_1 y_3 y_c$, (surt el mateix amb l'altre), per trobar el valor de γ :



$$\begin{aligned} \cos(R_0) &= \cos(60^\circ)\cos(R_0) + \sin(60^\circ)\sin(R_0)\cos(\gamma) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\gamma) \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos(\gamma) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos(\gamma) \rightarrow \\ &\rightarrow \gamma = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = R_0 \end{aligned}$$

Denotem ara l'angle $y_0y_3y_c$ per u , llavors a partir dels triangles $y_1e_0y_3$ i $y_2e_0y_3$ i la llei del cosinus tenim:



$$\cos(\theta_1) = \cos(60^\circ)\cos(\theta_3) + \sin(60^\circ)\sin(\theta_3)\cos(R_0 - u) = \frac{\cos(\theta_3)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta_3)\cos(R_0 - u)$$

$$\cos(\theta_2) = \cos(60^\circ)\cos(\theta_3) + \sin(60^\circ)\sin(\theta_3)\cos(R_0 + u) = \frac{\cos(\theta_3)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta_3)\cos(R_0 + u)$$

Prenem la segona equació, i recordem que $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_0 < 60^\circ$, i per tant $\cos(\theta_3) \leq \cos(\theta_2)$.

$$\begin{aligned} \cos(\theta_3) &\leq \frac{\cos(\theta_3)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta_3)\cos(R_0 + u) \rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(\theta_3)\cos(R_0 + u) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(\theta_3)\cos(R_0 + u) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{tg}(\theta_3)\cos(R_0 + u) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\operatorname{cotg}(\theta_3)}{\sqrt{3}} \leq \cos(R_0 + u) \rightarrow R_0 + u \leq \arccos\left(\frac{\operatorname{cotg}(\theta_3)}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Així doncs tenim que $0 \leq u \leq u_0 = \arccos\left(\frac{\operatorname{cotg}(\theta_3)}{\sqrt{3}}\right)$. Notem que si $u = u_0$ llavors es té que $\theta_2 = \theta_3$, en el cas que tinguem $u = 0$ llavors el que tindrem serà $\theta_1 = \theta_3$ i finalment, el cas $0 < u < u_0$ és el que ens dona $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_0$.

Per $\theta_3 = \psi$ fixat, tenim que $H(e_0, y_1, y_2)$ és un polinomi (de grau 9) sobre $s = \cos(u)$.

De forma similar als punts anteriors, denotem com $F_2(\psi)$, serà la funció que maximitzi $f(\cos(\theta_1)) + f(\cos(\theta_2))$ i on anem jugant amb e_0 de tal forma que treiem el màxim de $F_2(\psi)$ en $[\cos(u_0), 1]$.

Ara prenem el següent subconjunt

$$\{\psi_1, \dots, \psi_6\} = \{R_0, 38^\circ, 41^\circ, 44^\circ, 48^\circ, \theta_0\}$$

Prenem aquest subconjunt perquè estudiarem la funció per trams i si la analitzem als extrems no en treiem res en clar, així que partim l'interval d'estudi en diversos trossos prou petits per tal que es pugui analitzar d'una forma clara.

Tenim que per una part $F_2(\psi)$ és una funció creixent en $[R_0, \theta_0]$ mentres que (com ja hem vist abans) $f(-\cos(\psi))$ és decreixent respecte ψ .

Així doncs, per $\theta_3 \in [\psi_i, \psi_{i+1}]$, tenim que $H(y_1, y_2) < F_2(\psi_{i+1})$ mentres que $f(-\cos(\theta_3)) < f(-\cos(\psi_i))$, amb tot això és clar que:

$$H(Y) = H(y_1, y_2) + f(-\cos(\theta_3)) < F_2(\psi_{i+1}) + f(-\cos(\psi_i)) = \omega_i$$

Mirant cas per cas observem que

$$\{\omega_1, \dots, \omega_5\} = \{12.9425, 12.9648, 12.9508, 12.9606, 12.9519\}$$

així doncs, $H(Y) \leq \max_{i \in \{1, \dots, 5\}} \{\omega_i\} < 13$.

Aquí acaba la demostració, ja que hem vist que $H(Y) < 13$, per tots els m possibles. Per tant $T_i(x) < 13$ amb la qual cosa tenim que $S_i(x) < 13$. Es compleix doncs que $S(x) < 13n$.

□

3.5 Algunes funcions.

f(t)

Funció que compleix les condicions del mètode de Delsarte modificat i que serveix per, mitjançant ella, trobar una cota superior.

$$f(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200}$$

H(Y)

Donat un conjunt de punts no buit de l'esfera $Y = \{e_0, y_1, \dots, y_m\}$ tals que $dist(y_i, y_j) \geq 60^\circ$ si $i \neq j$ i que $\theta_i = dist(e_0, y_i) < \theta_0$ per $1 \leq i \leq m$. Llavors definim la funció $H(Y)$ com:

$$H(Y) = H(e_0, y_1, \dots, y_m) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2)) + \dots + f(-\cos(\theta_m))$$

Aquesta funció ens servirà per trobar cotes superiors per als possibles conjunts de punts que es poden tenir en un casquet format pel centre e_0 i el radi θ_0 .

Funció F

• $F_1(\psi)$. Donat el valor $\psi < \theta_0$, aquesta funció ens permet maximitzar $H(Y)$ en el cas que tinguem $Y = \{e_0, y_1, y_2\}$.

$$F_1(\psi) = \max_{\psi/2 \leq \theta \leq \theta_0} \{f(-\cos(\theta)) + f(-\cos(\psi - \theta))\}$$

• $F_2(\psi)$. Donat el valor $\psi < \theta_0$, aquesta funció ens permet maximitzar la suma $f(\cos(\theta_i)) + f(\cos(\theta_j))$, donats dos punts del conjunt $Y = \{e_0, y_1, y_2, y_3\}$.

Una vegada s'ha fixat $\psi = \theta_l < \theta_0$ on $l \neq i, j$, movem el punt e_0 mantenint sempre el valor de θ_l amb la finalitat de trobar el valor màxim de $f(\cos(\theta_i)) + f(\cos(\theta_j))$.

4 Kissing Number en quatre dimensions.

Fins ara hem treballat en \mathbb{R}^3 i encara que hi han diverses demostracions per $n = 3$ ens hem centrat en la demostració feta per Musin, això és perquè ens serveix per entendre el cas $n = 4$. Per aquest cas, el mètode de Delsarte no ens pot donar una cota superior adequada i no va ser fins que Musin va relaxar les condicions sobre la funció amb la que treballarem, que aquest mètode es va poder adaptar als casos $n = 3$ i $n = 4$.

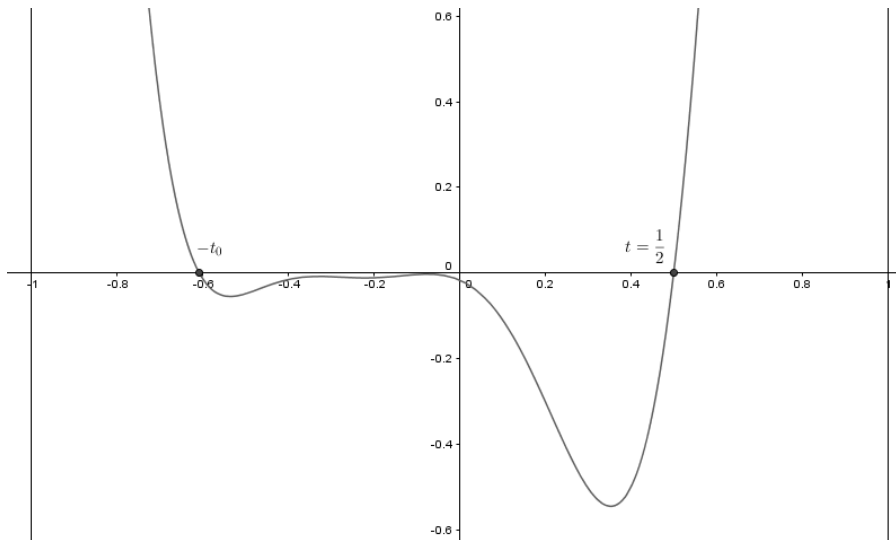
Definim la següent funció:

$$f_4(t) = \frac{1344}{25}t^9 - \frac{2688}{25}t^7 + \frac{1764}{25}t^5 + \frac{2048}{125}t^4 - \frac{1229}{125}t^3 - \frac{516}{125}t^2 - \frac{217}{500}t - \frac{2}{125}$$

i les noves condicions generals que Musin fa complir als polinomis per aconseguir la cota són:

- $f(t)$ és una funció monòtona decreixent en $[-1, -t_0]$
- $f(t) \leq 0$ per $t \in [-t_0, z]$ amb $0 \leq z < t_0$

si imposem $z = \frac{1}{2}$ trobem el polinomi $f_4(t)$ que hem donat.



Definim la distància angular entre dos punts $x_i, x_j \in \mathbb{S}^3$ com $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$, es compleix a més que $\langle x_i, x_j \rangle = x_i \cdot x_j = \cos(\phi_{i,j})$.

Si per $n = 3$ treballem amb els polinomis de Legendre ara treballem amb els polinomis de Chebichev, $U_k(t)$, imposant que $U_k(1) = 1$ i sigui $t = \cos(\phi)$ tenim que:

$$G_k^{(4)} = U_k(t) = \frac{\sin((k+1)\phi)}{(k+1)\sin(\phi)}$$

Per tant tenim els polinomis

$$U_0(t) = 1, U_1(t) = t, U_2(t) = \frac{4t^2 - 1}{3}, \dots, U_9(t) = \frac{256t^9 - 512t^7 + 336t^5 - 80t^3 + 5t}{5}$$

amb els què podem reescriure el polinomi $f_4(t)$ de la següent forma:

$$f_4(t) = U_0(t) + 2U_1(t) + \frac{153}{25}U_2(t) + \frac{871}{250}U_3(t) + \frac{128}{25}U_4(t) + \frac{21}{20}U_9(t)$$

Lema 1. Sigui $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ un conjunt de punts de l'esfera \mathbb{S}^3 en \mathbb{R}^4 , llavors es compleix que

$$S(X) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_4(x_i \cdot x_j) \geq M^2$$

Demostració. Recordem que els polinomis de Chebichev són un cas particular dels polinomis de Gegenbauer i com hem vist en l'apartat dedicat al mètode de Delsarte, la suma d'aquest tipus de polinomis és no negativa, així doncs es compleix que per qualsevol valor de k :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M U_k(t_{i,j}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G_k^{(n)}(t_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^M G_k^{(n)}(\langle x_i, x_j \rangle) \geq 0$$

Per tant tenim que

$$S(X) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_4(x_i \cdot x_j) = \sum_{k=1}^9 c_k \sum_{i,j=1}^M U_k(x_i \cdot x_j) \geq \sum_{i,j=1}^M c_0 U_0(x_i \cdot x_j) = M^2$$

□

Lema 2. Sigui $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ un conjunt de punts de l'esfera \mathbb{S}^3 en \mathbb{R}^4 , tals que $\text{dist}(x_i, x_j) \geq \frac{\pi}{3}$, llavors es compleix que

$$S(X) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_4(x_i \cdot x_j) \leq 25M$$

Teorema. El *kissing number* per el cas de 4 dimensions és

$$\kappa(4) = 24$$

Demostració. Sigui X una conjunt de punts amb separació angular de $\frac{\pi}{3}$ com a mínim, i sigui $M = \kappa(4)$, es compleix que $M \geq 24$ per una part, i per l'altra tenim que compleixen les condicions dels dos lemes i que per tant:

$$M^2 \leq S(X) \leq 25M \longrightarrow M \leq 24$$

Així doncs tenim que $M = \kappa(4) = 24$.

□

Com en el cas anterior, la part complicada és la demostració del segon lema encara que segueix unes pautes molt semblants. Com en el cas de tres dimensions el que volem es acotar la suma $S(X)$, recordem que en el mètode de Delsarte clàssic tenim una sola cota, però en aquest cas tornarem a diferenciar casos. Per a cada cas buscarem la pitjor situació possible i al treballar amb la més extrema trobarem un màxim per cada cas.

Prenem un punt $x_0 \in \mathbb{S}^3$ i definim una família de punts sobre l'esfera \mathbb{S}^3 , $X = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ tals que $x_i \cdot x_j \leq \cos(\psi)$ quan $i \neq j$ i $f(x_0 \cdot x_1) > 0$ per $1 \leq i \leq m$.

Com en la demostració per a $n = 3$ definim el conjunt $J(i) = \{j; f(x_i \cdot x_j) > 0, j \neq i\}$ i així poder acotar la suma com:

$$\sum_{i=1}^M S_i(X) = \sum_{j=1}^M f_4(x_i \cdot x_j) \leq H(X_m) = H(x_0, \dots, x_m) = f_4(1) + \sum_{j \in J(i)} f_4(x_i \cdot x_j)$$

Com $S(X) = \sum_{i=1}^M S_i(X)$ es suficient veure que $S_i(X) < 25$:

$$S(X) < \sum_{i=1}^M S_i(X) < \sum_{i=1}^M 25 = 25M$$

Idea de la demostració.

El que torna a fer Musin a partir d'aquest moment és buscar quines distribucions de punts podem tenir i estudiar cada cas. Agafem $y_0 \in \mathbb{S}^3$ i el seu punt antipodal $e_0 = -y_0$, definim $\theta_0 = \arccos(t_0)$ com en la demostració anterior volem estudiar quants de punts hi poden haver en el casquet de centre e_0 i radi θ_0 .

El cas en què tenim més punts és per $m = 6$ i per tant tenim que anar a buscar els pitjors casos pels conjunts $Y_i = \{y_0, \dots, y_i\}$ amb $i = 0, 1, \dots, 6$ formats pels punts que hi han dins del casquet.

Per a la funció $f_4(t)$ tenim que $z = \cos(\psi) = 1/2$ i les següents cotes:

- **Cas m=0.** $S(X) \leq H(Y_0) = f(1) = 18.774$
- **Cas m=1.** $S(X) \leq H(Y_1) = 24.48$
- **Cas m=2.** $S(X) \leq H(Y_2) \approx 24.8644$
- **Cas m=3.** $S(X) \leq H(Y_3) \approx 24.8345$
- **Cas m=4.** $S(X) \leq H(Y_4) \approx 24.818$
- **Cas m=5.** $S(X) \leq H(Y_5) \approx 24.6856$
- **Cas m=6.** $S(X) \leq H(Y_6) \approx 24.7762$

Així doncs queda clar que $S(X) < 25$ i per tant $S(X) = \kappa(4) = 24$.

Cal comentar que hem treballat amb la funció que hem descrit però que Musin treballa amb polinomis generals i arriba a un teorema per trobar les cotes per a tot tipus de polinomi, sempre i quan compleixin les condicions que ell fixa. Aquest teorema així com els passos que segueix per arribar-hi i les funcions que defineix es poden trobar al seu article publicat al *Annals of Mathematics*^[5].

5 Conclusions

Aquest treball m'ha servit per posar en perspectiva el temps en matemàtiques, perquè parlem d'un problema que ja va pensar ni més ni menys que Newton i que es va trigar més de dos segles en resoldre, i això només per al cas de tres dimensions. I pel cas de quatre dimensions no tenim una prova fins aquest mateix segle!

Crida molt l'atenció que tinguem mètodes per resoldre el problema en dimensions 8 i 24, però que per a casos més bàsics no funcionin, fins que arriba Oleg R. Musin i variant aquest mètode ja ens dóna respostes per als casos 3 i 4, com que el mètode variat fa que tinguem que observar diversos casos em fa pensar dues coses:

- Seria possible trobar cotes òptimes per resoldre el problema en altres dimensions variant encara més el mètode de Delsarte? Si és així, tornariem a tenir diversos casos que investigar?
- Si tornem a tenir diversos casos, serà un programa el que investigui aquests casos i que doni, com amb la conjectura de Kepler, una prova?

En resum, el tema m'ha ajudat no només en posar en perspectiva algunes qüestions sinó que també m'ha servit per recordar-me que no sempre hi ha una solució possible i que trobar una solució per un problema resolt ens pot ensenyar el camí per resoldre'n un de diferent.

Referències

- [1] B. Casselman: *The Difficulties of Kissing in Three Dimensions*, Notices Amer. Math. Soc., 51(2004), 884-884.
- [2] G. J. Flores: El problema de las 13 esferas. Parte I. *Revista de educación matemática (UNC)*, vol. 25, n. 2, 2010.
- [3] G. J. Flores: El problema de las 13 esferas. Parte II. *Revista de educación matemática (UNC)*, vol. 25, n. 3, 2010.
- [4] O. R. Musin: The kissing problem in three dimensions. cite as:
arXiv:math/0410324v3 [math.MG] 1 Mar 2006, 2016.
- [5] O. R. Musin: The kissing number in four dimensions. *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989, cite as:
arXiv:math/0309430v3 [math.MG] 4 Oct 2006, 2016.
- [6] I. Newton: *The correspondance of Isaac Newton*, H. W. Turnbull (ed.), Oxford, 1961.
- [7] J.J. O'Connor, E. F. Robertson: *Pàgina web: MacTutor*, Bartel Leendert van der Waerden, consultada a 29 de Maig de 2016,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_der_Waerden.html
- [8] J.J. O'Connor, E. F. Robertson: *Pàgina web: MacTutor*, David Gregory, consultada a 29 de Maig de 2016,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory_David.html
- [9] J.J. O'Connor, E. F. Robertson: *Pàgina web: MacTutor*, Sir Isaac Newton, consultada a 29 de Maig de 2016,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html>
- [10] F. Pfender, G. M. Ziegler: Kissing Numbers, Sphere Packings, and Some Unexpected Proofs. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 51, n. 8, 2004.
- [11] G. G. Szpiro: *Newton and the kissing problem*.
- [12] *Pàgina web: The_Biography.com*, Isaac Newton, publicat per AE Television Networks consultada a 29 de Maig de 2016,
<http://www.biography.com/people/isaac-newton-9422656>
- [13] *University of Texas, Brownsville's website*, Oleg Musin, consultada a 29 de Maig de 2016,
<http://www.utb.edu/vpaa/csmt/math/Pages/Musin.aspx>
- [14] *Pàgina web: Wikipedia*, Kurt Schütte, consultada a 29 de Maig de 2016,
https://de.wikipedia.org/wiki/Kurt_Schütte
<http://plus.maths.org/issue23/features/kissing/> , consultat a dia 29 de Maig de 2016.

- [15] Weisstein, Eric W : *Spherical Harmonic Addition Theorem*. From MathWorld-A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonicAdditionTheorem.html>,
consultat a dia 29 de Maig de 2016.
- [16] Weisstein, Eric W : *Spherical Trigonometry*. From MathWorld-A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/SphericalTrigonometry.html>,
consultat a dia 2 de Juny de 2016.