MATEMÁTICAS EMPRESARIALES II

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

MATERIAL DIDÁCTICO DE SOPORTE

González-Vila Puchades, Laura
Ortí Celma, Francesc J.
Sáez Madrid, José B.

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial de la Universitat de Barcelona

PRESENTACIÓN

Después de nuestro anterior trabajo, *Matemáticas Empresariales I. Material didáctico de soporte,* y viendo que los objetivos que nos llevaron a su elaboración (fomentar un aprendizaje activo por parte del alumno, promover su trabajo autónomo, dinamizar las clases, …) se han visto realizados, presentamos ahora **Matemáticas Empresariales II. Material didáctico de soporte**.

Pretendemos con ello extender los objetivos anteriormente propuestos a la asignatura Matemáticas Empresariales II de la actual Diplomatura en Ciencias Empresariales de la Universitat de Barcelona.

En este caso, y teniendo en cuenta las peculiaridades de la asignatura, que hacen que conste de dos partes completamente diferenciadas (la primera de ellas comprendiendo conceptos matemáticos que viene a complementar los estudiados en Matemáticas Empresariales I, siendo la segunda parte totalmente independiente y referida a la Introducción a la Matemática Financiera), hemos considerado conveniente separar el material didáctico en dos unidades independientes.

En cada una de esas dos unidades presentamos un resumen-guía de los conceptos más importantes recogidos en el plan docente de la citada asignatura. El material recoge de forma detallada los contenidos que se desarrollarán en las sesiones presenciales de la misma. Esto permitirá al alumno poder preparar con antelación las clases y disponer de forma bien estructurada de toda la información vista en las mismas.

Cada definición, cada ejemplo aclaratorio y cada ejercicio serán presentados en clase, paso a paso, con el uso de la herramienta *PowerPoint®*. Hemos pretendido que nuestro manual plasme en papel lo esencial de las diapositivas que se mostrarán pero que, además, sirva para ejercitarse en la resolución de ejercicios. Con tal fin los citados ejercicios están seguidos de un espacio en blanco, con algunas orientaciones para su resolución, para permitir que el alumno los trabaje sobre el propio manual.

Siguiendo la estructura del plan docente, el material se divide en tres temas, que, como se ha explicado, aparecerán en dos unidades separadas:

- El primero de ellos estudia las funciones reales de varias variables, ampliando las definiciones que se vieron para el caso de funciones reales de una variable. Así se estudian, entre otros, los conceptos de límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad.
- El segundo tema trata sobre la optimización de funciones de varias variables. En primer lugar se estudia el caso en que las variables de las que depende la función a optimizar pueden tomar cualquier valor del dominio: Optimización libre. Posteriormente, se analiza aquella situación en que las citadas variables deben cumplir alguna restricción expresada en términos de igualdad:

Optimización condicionada por ecuaciones. Ambos tipos de optimización se utilizan en la resolución de problemas económicos de minimización de costes o maximización de ingresos o beneficios.

- El último está dedicado a la Introducción a la Matemática Financiera. Tras el estudio de algunos conceptos fundamentales se pasa a analizar los regímenes financieros, como la expresión formal de los pactos que establecen los sujetos económicos que intervienen en la operación financiera. Por último, se estudian las rentas financieras, y en particular las rentas constantes, viendo dos de sus aplicaciones más características: Constitución de una capital mediante aportaciones periódicas y constantes y Amortización periódica y constante de un capital.

Queremos indicar al alumno que resulta conveniente que el presente manual se complemente con libros y otros materiales de consulta. A tal fin recogemos al final la bibliografía que, desde nuestro punto de vista, mejor puede ayudar al alumno a completar su formación.

No queremos finalizar este apartado sin agradecer a nuestros alumnos la buena acogida que mostraron hacia nuestro primer material. Sin duda ello nos ha motivado a la presentación del actual. Es nuestro reto ir cambiando curso a curso su contenido teórico y práctico para adaptarlos a los nuevos planes docentes que necesariamente surgirán con los grados.

LOS AUTORES

Enero de 2010

ÍNDICE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Introducción a la Matemática Financiera

1. Conceptos financieros básicos

2. Regímenes financieros

3. Rentas financieras

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Introducción a la Matemática Financiera

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Capital financiero

Aunque habitualmente se habla de capital haciendo referencia únicamente a una cantidad de dinero, financieramente hablando es necesario considerar que la valoración de un capital depende del momento en el tiempo que se considere. Así, resulta evidente que, 1.000€ de hace 5 años no tienen el mismo valor que 1.000€ actuales

Es decir, cualquier cantidad de dinero tiene un valor intrínseco derivado del número de unidades monetarias que representa, y otro valor como consecuencia del momento del tiempo en que esté situado

Este segundo valor es el que se conoce como **valor temporal del dinero**

Se define **capital financiero** como cualquier **cantidad monetaria** situada en un **instante temporal**

$$(C,T) \qquad C \geq 0,\ T \geq 0$$

C se denomina **CUANTÍA** y representa cualquier cantidad monetaria expresada en euros, dólares, libras, etc. Por defecto la expresaremos en euros

T se denomina **DIFERIMIENTO** y representa el instante temporal en que se sitúa la cuantía, expresado en años, meses, días, etc. Por defecto lo expresaremos en años

Ejemplo:

$\left(6.000, \frac{3}{12}\right)$ Representan 6.000€ situados dentro de 3 meses

Ejercicio: ¿Qué representan los siguientes capitales financieros?

$(2.500, 4)$ Representan 2.500€ situados dentro de 4 años

$\left(15.000, \frac{3}{4}\right)$ Representan 15.000€ situados dentro de 3 trimestres

$\left(827, \frac{142}{365}\right)$ Representan 827€ situados dentro de 142 días

Gráficamente, fijando un origen y la unidad de tiempo, representaremos los capitales financieros en un eje horizontal, situando las cuantías en la parte superior del eje y los instantes en la parte inferior del eje

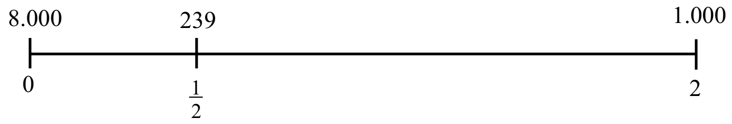
En esta zona representaremos las cuantías

En esta zona representaremos los instantes

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Representar gráficamente los siguientes capitales financieros

$$(1.000, 2) \qquad (8.000, 0) \qquad \left(239, \tfrac{1}{2}\right)$$



Ejercicio: Representar gráficamente los siguientes capitales financieros

$$\left(725, \tfrac{1}{4}\right) \qquad (6.500, 4) \qquad (5.400, 0) \qquad \left(12.850, \tfrac{5}{2}\right)$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Al conjunto de todos los capitales financieros lo representaremos por $\mathcal{F}$. Es decir:

$$\mathcal{F} = \{(C, T) \,/\, C \geq 0, T \geq 0\}$$

Ejercicio: ¿Cuáles de los siguientes elementos pertenecen a $\mathcal{F}$?

a) $8.300€$

b) $\left(34, \frac{11}{2}\right)$

c) $(2.300, -2)$

d) $\left(8 \cdot 10^6, 1\right)$

1.2 Operación financiera

Es el acuerdo para el **intercambio de cantidades monetarias**, entre personas (físicas o jurídicas), en **diferentes momentos de tiempo**

Ejercicio: Indicar cuáles de las siguientes situaciones puede considerarse como operación financiera.

a) Depositar en una Caja de Ahorros 5.000€ a cambio de que en 1 año nos devolverá 5.200€

b) Ir a un Banco y pedir cambio de 500€ en billetes de 10€

c) Ir a un concesionario de motos y comprar al contado una moto valorada en 3.000€

d) Concedernos el Banco un préstamo a devolver durante 3 años en cuotas mensuales para poder comprarnos la moto anterior

Toda operación financiera tiene 3 elementos:

1) Elemento personal:

Son las personas físicas o jurídicas que intervienen en la operación

SUJETO ACTIVO: Persona que posee las cuantías monetarias y decide cederlas durante un plazo a cambio del cobro de una retribución

SUJETO PASIVO: Persona que recibe las cuantías monetarias y se compromete a su devolución futura y al pago de la retribución

2) Elemento objetivo:

Son las cuantías monetarias que se van a intercambiar. Las cuantías que cede el sujeto activo se denominan PRESTACIÓN, mientras que las que retorna el sujeto pasivo se denominan CONTRAPRESTACIÓN

3) Elemento convencional:

Es el conjunto de acuerdos o pactos que realizan los sujetos para llevar a cabo el intercambio. Habitualmente se refleja en un contrato mercantil

Según el número de capitales financieros existentes, una operación financiera se puede clasificar en:

1) Elemental:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación tienen un único capital financiero

2) Parcialmente compleja:

Aquellas en que la prestación o la contraprestación tienen un único capital financiero, estando la otra formada por un conjunto de capitales financieros

3) Totalmente compleja:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un conjunto de capitales financieros

1.3 Equivalencia financiera

Dada una función $F\left(C, C', T, T'\right)$

se define **equivalencia financiera** entre dos capitales financieros (C,T) y (C',T') según la función F, y se representa por $\sim_F$, si y solamente si $F(C,C',T,T')=0$ y se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva, homogeneidad respecto a cuantías y positividad del interés

Es decir:

$$(C,T) \sim_F (C',T') \Leftrightarrow F\left(C, C', T, T'\right) = 0$$

y se cumplen las 5 propiedades siguientes:

1. REFLEXIVA

$$\forall (C,T) \in \mathcal{F} \qquad (C,T) \sim_F (C,T)$$

2. SIMÉTRICA

$$\forall (C,T),(C',T') \in \mathcal{F}$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \Rightarrow (C',T') \sim_F (C,T)$$

3. TRANSITIVA

$$\forall (C,T),(C',T'),(C'',T'') \in \mathcal{F}$$

$$\left.\begin{array}{l}(C,T) \sim_F (C',T') \\ (C',T') \sim_F (C'',T'')\end{array}\right\} \Rightarrow (C,T) \sim_F (C'',T'')$$

4. HOMOGENEIDAD RESPECTO A CUANTÍAS

$$\forall (C,T),(C',T') \in \mathcal{F} \quad \forall k \geq 0$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \Rightarrow (k \cdot C,T) \sim_F (k \cdot C',T')$$

5. POSITIVIDAD DEL INTERÉS

$$\forall (C,T),(C',T') \in \mathcal{F}$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \text{ y } T > T' \Rightarrow C > C'$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \text{ y } T = T' \Rightarrow C = C'$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \text{ y } T < T' \Rightarrow C < C'$$

Ejemplo: Demostrar si la siguiente función F define una equivalencia financiera

$$F(C,C',T,T') = C - C' \cdot 2^{T-T'}$$

En este caso, dos capitales financieros son equivalentes según la función F, $(C,T) \sim_F (C',T')$ si $F(C,C',T,T') = 0$, es decir, si $C - C' \cdot 2^{T-T'} = 0$, y cumple las cinco propiedades siguientes:

1. REFLEXIVA

$$\forall (C,T) \in \mathcal{F} \qquad (C,T) \sim_F (C,T)$$

$$(C,T) \sim_F (C,T) \Leftrightarrow F(C,C,T,T) = 0 \Leftrightarrow C - C \cdot 2^{T-T} = 0$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. SIMÉTRICA

$$\forall (C,T),(C',T') \in \mathcal{F}$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \Rightarrow (C',T') \sim_F (C,T)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$C - C' \cdot 2^{T-T'} = 0 \qquad C' - C \cdot 2^{T'-T} = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$C = C' \cdot 2^{T-T'} \qquad C' = C \cdot 2^{T'-T}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$C' = \frac{C}{2^{T-T'}} \quad \Leftrightarrow C' = C \cdot 2^{-(T-T')}$$

3. TRANSITIVA

$$\forall (C,T),(C',T'),(C'',T'') \in \mathcal{F}$$

$$\left.\begin{array}{l}(C,T)\sim_F (C',T') \\ (C',T')\sim_F (C'',T'')\end{array}\right\} \Rightarrow (C,T)\sim_F (C'',T'')$$

$$C - C'\cdot 2^{T-T'} = 0$$

$$C' - C''\cdot 2^{T'-T''} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C' = C''\cdot 2^{T'-T''} \Rightarrow C - \left(C''\cdot 2^{T'-T''}\right)\cdot 2^{T-T'} = 0$$

$$\Uparrow$$

$$C - C''\cdot 2^{T'-T''+T-T'} = 0$$

$$\Uparrow$$

$$C - C''\cdot 2^{T-T''} = 0$$

$$\Uparrow$$

$$(C,T)\sim_F (C'',T'')$$

4. HOMOGENEIDAD RESPECTO A CUANTÍAS

$$\forall (C,T),(C',T') \in \mathcal{F} \quad \forall k \geq 0$$

$$(C,T)\sim_F (C',T') \Rightarrow (k\cdot C,T)\sim_F (k\cdot C',T')$$

$$\Updownarrow$$

$$C - C'\cdot 2^{T-T'} = 0$$

Multiplicamos ambos miembros por k

$$k\cdot\left(C - C'\cdot 2^{T-T'}\right) = k\cdot 0$$

$$k\cdot C - k\cdot C'\cdot 2^{T-T'} = 0$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. Conceptos financieros básicos

1.3 Equivalencia financiera

5. POSITIVIDAD DEL INTERÉS

$$\forall (C,T),(C',T') \in F$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \text{ y } T > T' \Rightarrow C > C'$$

$$\Updownarrow$$

$$C - C' \cdot 2^{T-T'} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C = C' \cdot 2^{T-T'}$$

$$T - T' > 0$$

$$2^{T-T'} > 1$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. Conceptos financieros básicos

1.3 Equivalencia financiera

5. POSITIVIDAD DEL INTERÉS

$$\forall (C,T),(C',T') \in F$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \text{ y } T = T' \Rightarrow C = C'$$

$$\Updownarrow$$

$$C - C' \cdot 2^{T-T'} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C = C' \cdot 2^{T-T'}$$

$$T - T' = 0$$

$$2^{T-T'} = 1$$

5. POSITIVIDAD DEL INTERÉS

$$\forall (C,T),(C',T') \in \mathcal{F}$$

$$(C,T) \sim_F (C',T') \text{ y } T < T' \Rightarrow C < C'$$

$$\Updownarrow$$

$$C - C' \cdot 2^{T-T'} = 0$$

$$T - T' < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C = C' \cdot 2^{T-T'}$$

$$2^{T-T'} < 1$$

CONCLUSIÓN: La función F define una equivalencia financiera

1.4 Factor financiero

Si dos capitales financieros (C,T) y (C',T') son equivalentes según la función $F(C,C',T,T')=0$, se define la función **factor financiero** f como:

$$f(T,T') = \frac{C'}{C}$$

En consecuencia, despejando:

$$C' = C \cdot f(T,T')$$

Podemos interpretar el factor financiero como aquel valor real por el que hay que multiplicar la cuantía C situada en el momento T, para obtener la cuantía C' situada en T'

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad f(T,T') \quad} & C' \\ T & \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv & T' \end{array}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Si dos capitales financieros (C,T) y (C',T') son equivalentes según la función $F(C,C',T,T') = C - C' \cdot 2^{T-T'} = 0$ encontrar el factor financiero asociado:

$$C = C' \cdot 2^{T-T'}$$

$$f(T,T') = \frac{C'}{C} = \frac{C'}{C' \cdot 2^{T-T'}} = \frac{1}{2^{T-T'}} = 2^{T'-T}$$

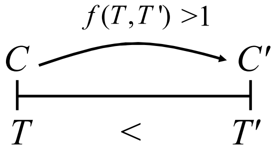
Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: A partir del ejemplo anterior, determinar el valor del factor financiero por el que se debe multiplicar la cuantía de 1.000€ situada en $T=2$ para obtener la cuantía del capital financiero equivalente situada en $T'=5$. ¿Cuál es el valor de dicha cuantía?

Todo factor financiero $f(T,T')$ cumple las 5 propiedades siguientes:

$$1)\quad \forall T,T' \geq 0 \qquad f\left(T,T'\right) > 0$$

$$2)\quad \forall T,T' \geq 0 \quad \begin{cases} T' > T \Leftrightarrow f(T,T') > 1 \\ T' = T \Leftrightarrow f(T,T') = 1 \\ T' < T \Leftrightarrow 0 < f(T,T') < 1 \end{cases}$$



Si el factor financiero es superior a 1 se denomina de **capitalización** o de **interés** y, entonces, la cuantía situada en T', que es C' es superior a la cuantía situada en T, es decir C

Si el factor financiero es inferior a 1 se denomina de **actualización** o de **descuento**

$$3)\quad \forall T,T' \geq 0 \qquad f\left(T,T'\right) = \frac{1}{f\left(T',T\right)}$$

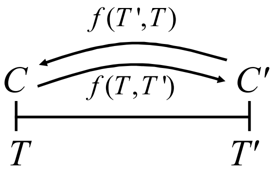
O también: $f\left(T,T'\right) \cdot f\left(T',T\right) = 1$ significa que

Si llevamos una cuantía C de T a T'

y a continuación

llevamos la cuantía obtenida de T' a T

Volveremos a obtener la misma cuantía inicial C



Propiedad de escindibilidad:

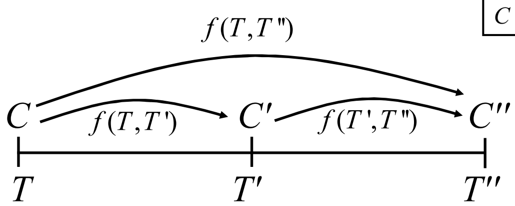
$4)\quad \forall T,T',T''\geq 0 \qquad f(T,T')\cdot f(T',T'')=f(T,T'')$ significa que

Si llevamos una cuantía C de T a T'

y a continuación

llevamos la cuantía C' obtenida, de T' a T''

Es igual a llevar la cuantía C de T a T'' directamente



Esta propiedad puede generalizarse para cualquier número de diferimientos

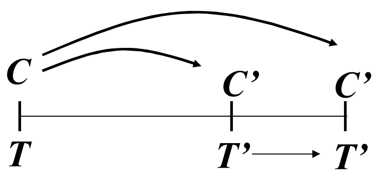
1. Conceptos financieros básicos
1.4 Factor financiero

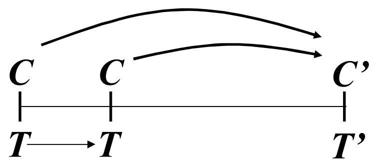
$5)\quad \forall T,T'\geq 0 \qquad f(T,T')$ es creciente respecto a T'

$f(T,T')$ es decreciente respecto a T

Si fijamos T

Si fijamos T'





A mayor T', mayor $f(T,T')$

A mayor T, menor $f(T,T')$

1.5 Suma financiera

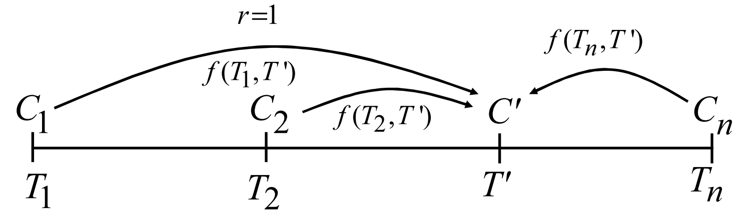
Es evidente que para sumar capitales financieros, hay que tener en cuenta la idea del valor temporal del dinero. Por ello, es necesario definir el concepto de suma financiera

Dado el conjunto de capitales financieros:

$\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\}$ y el factor financiero $f(T,T')$

Definimos **suma financiera** en T' según el factor financiero $f(T,T')$ como el capital financiero (C',T') donde:

$$C' = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot f(T_r,T')$$



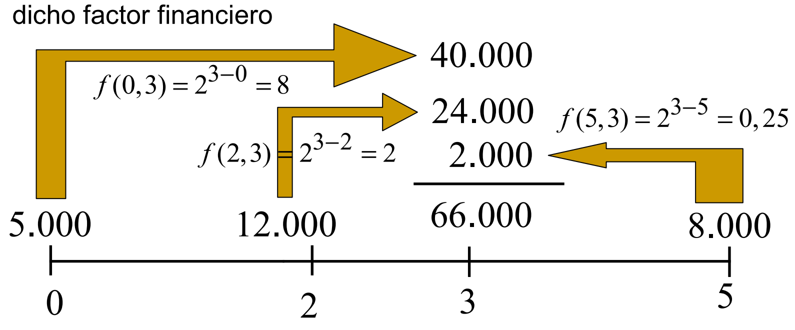
Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(5.000,0),(12.000,2),(8.000,5)\}$$

y el factor financiero $f(T,T') = 2^{T'-T}$

obtener la **suma financiera** de dichos capitales en T'=**3** según dicho factor financiero

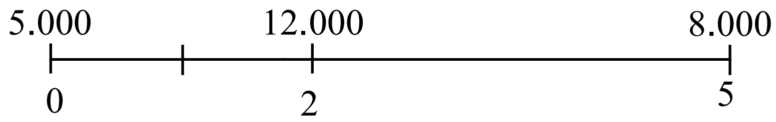


Ejercicio: Dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(5.000,0),(12.000,2),(8.000,5)\}$$

y el factor financiero $f(T,T')=2^{T'-T}$

obtener la **suma financiera** de dichos capitales en $\boldsymbol{T'=1}$ según dicho factor financiero



1. Conceptos financieros básicos
1.5 Suma financiera

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

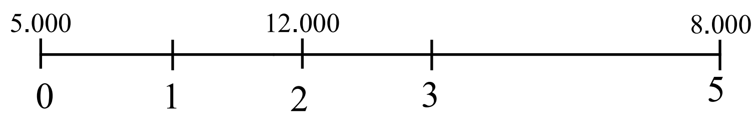
Propiedad

Las sumas financieras de un conjunto de capitales financieros calculadas en dos diferimientos distintos son capitales financieros equivalentes

Ejercicio: Comprobar que las sumas financieras del conjunto de capitales financieros $\{(5.000,0),(12.000,2),(8.000,5)\}$ son equivalentes en los diferimientos $T'=1$ y $T'=3$ según el factor financiero $f(T,T')=2^{T'-T}$

La **suma financiera** de dichos capitales en $\boldsymbol{T'=1}$ es

La **suma financiera** de dichos capitales en $\boldsymbol{T'=3}$ es



Equivalencia financiera entre conjuntos de capitales financieros

Diremos que dos conjuntos de capitales financieros son equivalentes, según un factor financiero dado, si sus respectivas sumas financieras en un diferimiento T son iguales

Conjuntos de capitales financieros

Suma financiera en T

$$\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\} \longrightarrow (C,T)$$

¿Son equivalentes según $f(T,T')$?

Sí, si $C' = C$

$$\{(C'_1,T'_1),(C'_2,T'_2),\ldots,(C'_n,T'_n)\} \longrightarrow (C',T)$$

Suma financiera en T

1.6 Precios financieros

Dada la equivalencia financiera

$$(C,T) \sim_F (C',T') \quad \text{con} \quad T' > T$$

Se definen los tres precios financieros siguientes:

Precio total: Es el beneficio total de la operación en términos monetarios

$$\Delta C = C' - C$$

Ejemplo: Dada la equivalencia financiera

$$(1.000, 0) \sim_F (1.120, 2)$$

calcular el precio total:

$$\Delta C = 1.120 - 1.000 = 120€$$

Esto significa que por los 1.000€ iniciales, el sujeto activo recibe al final una retribución de 120€

Precio unitario o Interés efectivo: Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C' - C}{C}$$

Ejemplo: Dada la equivalencia financiera

$$(1.000, 0) \sim_F (1.120, 2)$$

calcular el precio unitario:

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C' - C}{C} = \frac{1.120 - 1.000}{1.000} = \frac{120}{1.000} = 0,12 \equiv 12\%$$

Esto significa que por cada 100€ iniciales, el sujeto activo recibe al final una retribución de 12€

Precio unitario y medio o Interés nominal: Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria y por año

$$i = \frac{I}{T' - T} = \frac{C' - C}{C \cdot (T' - T)}$$

Ejemplo: Dada la equivalencia financiera

$$(1.000, 0) \sim_F (1.120, 2)$$

calcular el precio unitario y medio:

$$i = \frac{I}{T' - T} = \frac{C' - C}{C \cdot (T' - T)} = \frac{1.120 - 1.000}{1.000 \cdot (2 - 0)} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \equiv 6\%$$

Esto significa que por cada 100€ iniciales y por cada año, el sujeto activo recibe al final una retribución de 6€

Ejercicio: Dada la equivalencia financiera

$$(8.000,1) \sim_F (9.560,4)$$

Calcular el precio total:

Calcular el precio unitario:

Calcular el precio unitario y medio:

Tema 3. Introducción a la Matemática Financiera

2.1 Concepto y clasificación

Régimen financiero es la expresión formal del conjunto de características, pactos o acuerdos, que establecen los sujetos de una operación financiera

Clasificación de los regímenes financieros

1) Según el grado de adaptación al modelo teórico:

- **R.F. PRÁCTICOS**: Responden a pactos que se realizan en el mercado financiero y determinan expresiones formales que **no** cumplen todas las propiedades de la equivalencia financiera. Por ello, sólo se acostumbran a utilizar en operaciones a corto plazo
- **R.F. RACIONALES**: Responden a pactos que se realizan en el mercado financiero y determinan expresiones formales que cumplen todas las propiedades de la equivalencia financiera

2) Según el sujeto económico en que se centra la atención al analizar la operación financiera:

- **R.F. de INTERÉS o CAPITALIZACIÓN**: Son aquellos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto activo
- **R.F. de DESCUENTO o ACTUALIZACIÓN**: Son aquellos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto pasivo

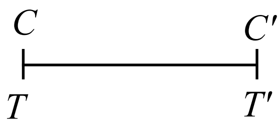
Como consecuencia de estas clasificaciones desarrollaremos los siguientes regímenes financieros:

R.F. prácticos
- R.F. interés simple vencido
- R.F. descuento comercial
- R.F. descuento matemático
- R.F. interés simple anticipado

R.F. racionales
- R.F. interés compuesto a tanto constante
- R.F. interés compuesto a tanto variable

2.2 R.F. interés simple vencido

En el R.F. de interés simple vencido, los sujetos de la operación financiera



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El precio total de la operación, ΔC, es proporcional a la cuantía inicial, C, y al plazo de la operación, $T'-T = t$, mediante un tanto de proporcionalidad $i>0$ (en tanto por uno)

$$\Delta C = C \cdot i \cdot \left(T' - T\right) = C \cdot i \cdot t$$

2) Dicho precio total se recibe al final de la operación T' junto con la cuantía inicial, obteniéndose en total C'

$$C' = C + \Delta C$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, tendremos su expresión formal:

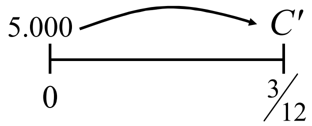
$$C' = C + \Delta C = C + \underbrace{C \cdot i \cdot \left(T' - T\right)}_{\Delta C} = C \cdot \left(1 + i \cdot \left(T' - T\right)\right)$$

O bien: $\boxed{C' = C \cdot \left(1 + i \cdot t\right)}$

Su factor financiero empírico asociado sería:

$$f^{*}(T,T') = \frac{C'}{C} = 1 + i \cdot (T' - T)$$

Ejemplo: Un cliente abre en una Caja de Ahorros una cuenta corriente con 5.000€ en régimen financiero de interés simple vencido al 2% anual. Calcular los intereses que obtendrá al cabo de 3 meses y el capital final



Los intereses (o precio total) en R.F. de interés simple vencido serán:

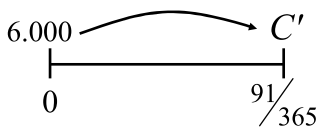
$$\Delta C = C \cdot i \cdot t = 5.000 \cdot 0,02 \cdot \frac{3}{12} = 25€$$

El capital final al cabo de los 3 meses será:

$$C' = C + \Delta C = 5.000 + 25 = 5.025€$$

O bien: $$C' = C \cdot (1 + i \cdot t) = 5.000 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{3}{12}\right) = 5.025€$$

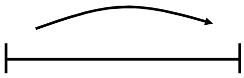
Ejercicio: Calcular el capital final que se obtendrá al colocar 6.000€ en un plazo fijo con vencimiento dentro de 91 días a un interés simple vencido del 1,75% anual



Los intereses serán:

El capital final será:

Ejercicio: En un anuncio de prensa le ofrecen una inversión en R.F. de interés simple vencido según la cual, colocando hoy un capital de 50.000€ recibirá al cabo de 9 meses 51.687,50€. Calcule el tipo de interés nominal al que resulta dicha inversión.



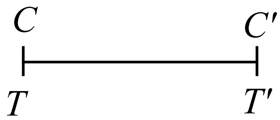
Vamos a sustituir todos los datos que conocemos en la expresión formal del R.F. de interés simple vencido:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Despejamos i:

2.3 R.F. descuento comercial

En el R.F. de descuento comercial, los sujetos de la operación financiera



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) Se anticipa una cuantía disponible en el futuro a un momento anterior. El precio total de la operación, ΔC **,** es proporcional a la cuantía final, ***C',*** también llamada **valor nominal**, y al plazo de la operación, ***T'-T* = *t***, mediante un tanto de proporcionalidad expresado en tanto por uno $\boldsymbol{d > 0}$ (denominado **tasa de descuento**)

$$\Delta C = C' \cdot d \cdot (T' - T) = C' \cdot d \cdot t$$

2) Dicho precio total se paga al inicio de la operación ***T*** deduciéndose de la cuantía final, recibiéndose la cuantía ***C,*** también llamada **líquido o efectivo**

$$C = C' - \Delta C$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, tendremos su expresión formal:

$$C = C' - \Delta C = C' - \underbrace{C' \cdot d \cdot (T' - T)}_{\Delta C} = C' \cdot \left(1 - d \cdot (T' - T)\right)$$

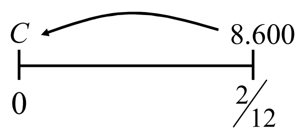
En este R.F. al instante *T'* también se le denomina **vencimiento**

O bien: $\boxed{C = C' \cdot (1 - d \cdot t)}$

Su factor financiero empírico asociado sería:

$$f^*(T, T') = \frac{C'}{C} = [1 - d \cdot (T' - T)]^{-1}$$

Ejemplo: Una empresa tiene un efecto comercial de valor nominal 8.600€ con vencimiento dentro de 2 meses. Si la empresa lo lleva a una entidad financiera que hoy se lo descuenta en R.F. de descuento comercial a una tasa del 7% anual, calcular el valor líquido o efectivo percibido por la empresa



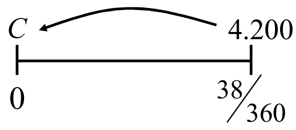
El valor líquido o efectivo ***C*** que hoy percibirá la empresa será:

$$C = C' \cdot (1 - d \cdot t) = 8.600 \cdot \left(1 - 0{,}07 \cdot \frac{2}{12}\right) = 8.499{,}67€$$

NOTA: A veces, las entidades cobran una comisión sobre el valor nominal del efecto. En tal caso, para obtener el valor líquido o efectivo debería restarse también la comisión

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

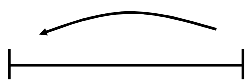
Ejercicio: Calcular el líquido que se obtendrá al descontar al 4,25% de descuento comercial, una letra de cambio de nominal 4.200€ y vencimiento dentro de 38 días



El valor líquido o efectivo C que hoy percibirá la empresa será:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Obtener el valor nominal de un efecto que vence dentro de 4 meses si al descontarlo en R.F. de descuento comercial al 8% anual con una comisión del 0,4% sobre el nominal, se ha percibido una cuantía de 11.632€



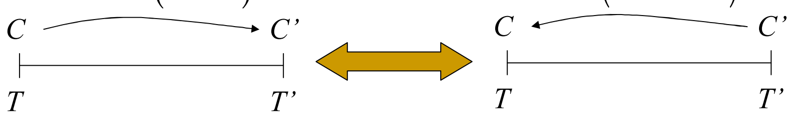
Planteamos la expresión formal del R.F. de descuento simple comercial y le restamos la comisión:

Despejamos C':

2.4 R.F. descuento matemático

A partir del R.F. de interés simple vencido, si en lugar de centrarnos en el sujeto activo lo hacemos en el sujeto pasivo obtenemos un régimen financiero de descuento con las mismas características, idéntico matemáticamente pero distinto conceptualmente

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot t) \qquad\qquad C = C' \cdot \left(1 + d^M \cdot t\right)^{-1}$$



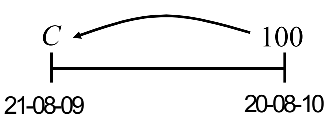
R.F. interés simple vencido

R.F. descuento matemático

Este régimen financiero se utiliza para la valoración de las Letras del Tesoro con vencimiento inferior a un año natural

Ejemplo: En la página web del Tesoro Público, www.tesoro.es, encontramos la siguiente información sobre una subasta de Letras del Tesoro a 12 meses:

Valor subastado	**Letras a 12 meses Vto. 20-08-10**
Fecha de liquidación	**21-ago-09**
Precio medio	**99,164%**
Tipo de interés medio	**0,834%**



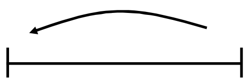
Calcular el tipo de interés medio (interés nominal) de esta subasta de Letras (usar base de cálculo 360):

$$100 = 99{,}164 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{364}{360}\right) \qquad i = \frac{100 - 99{,}164}{99{,}164 \cdot \frac{364}{360}} = 0{,}8338\%$$

2.4 R.F. descuento matemático

Ejercicio: En la página web del Tesoro Público, www.tesoro.es, encontramos la siguiente información sobre una subasta de Letras del Tesoro a 6 meses:

Valor subastado	**Letras a 6 meses Vto. 19-03-10**
Fecha de liquidación	**11-sep-09**
Precio medio	
Tipo de interés medio	**0,429%**



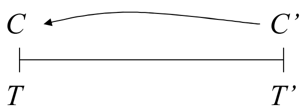
Calcular el precio medio de adquisición de una Letra del Tesoro en esta subasta (el valor nominal de una Letra es de 1.000€):

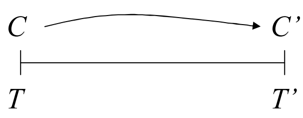
2.5 R.F. interés simple anticipado

A partir del R.F. de descuento comercial, si en lugar de centrarnos en el sujeto pasivo lo hacemos en el sujeto activo obtenemos un régimen financiero de interés con las mismas características, idéntico matemáticamente pero distinto conceptualmente

$$C = C' \cdot (1 - d \cdot t)$$

$$C' = C \cdot \left(1 - i^{A} \cdot t\right)^{-1}$$





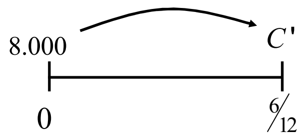
R.F. descuento comercial

R.F. interés simple anticipado

Este régimen financiero se utiliza, por ejemplo, en las operaciones de depósito con retribución en especie

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 8.000€ durante 6 meses al 3% anual de interés simple anticipado



El capital final será:

$$C' = 8.000 \cdot \left(1 - 0,03 \cdot \frac{6}{12}\right)^{-1} = \frac{8.000}{1 - 0,03 \cdot \frac{6}{12}} = 8.121,83€$$

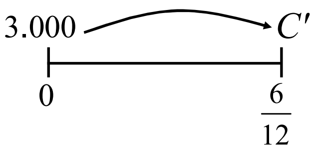
2. Regímenes financieros
2.5 R.F. interés simple anticipado

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Una empresa necesita hacer frente a un desembolso imprevisto de 3.000€ y no dispone de liquidez. Para obtener esa cuantía, acude a una entidad financiera que le ofrece un préstamo a devolver al cabo de 6 meses con un pago anticipado del 7,5% nominal en concepto de intereses

Pero, ¿de cuánto será el préstamo que deberá solicitar la empresa, para disponer hoy de los 3.000€?

Aplicando la expresión del interés simple anticipado:



$$C' = 3.000 \cdot \left(1 - 0,075 \cdot \frac{6}{12}\right)^{-1} = 3.116,88€$$

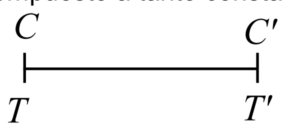
Observar que, en el momento de conceder el préstamo, la entidad percibe unos intereses anticipados de:

$$3.116,88 \cdot 0,075 \cdot \frac{6}{12} = 116,88€$$

y, por tanto, la cantidad neta que recibe la empresa son los 3.000€ (3.116,88-116,88) que necesita

2.6 R.F. interés compuesto a tanto constante

En el R.F. de interés compuesto a tanto constante, los sujetos de la operación financiera



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El plazo de la operación, $T'-T = t$, se fracciona en periodos de duración p (expresado en años), calculándose el precio en cada uno de dichos periodos mediante un tanto de proporcionalidad $i>0$ (expresado en tanto por uno) aplicado a la cuantía al inicio del periodo y a la duración del mismo p. Dicho precio se acumula a la citada cuantía

De este modo la cuantía acumulada al final de un periodo coincide con la cuantía inicial del siguiente

2) El precio total de la operación **sólo** se recibe al final del plazo de la misma, en T'

Al fraccionar el plazo de la operación $T'-T=t$ en periodos de duración p puede que el número de periodos sea entero o no

1) Supongamos que hay un número exacto de periodos, n, con $t=n\cdot p$

$$C \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow \ \dots \ \rightarrow C'$$

$$T \qquad T+p \qquad T+2p \qquad T+3p \qquad \dots \qquad T'$$

En este caso, el valor de las cuantías acumuladas en la operación al final de cada periodo serían:

En $T+p \Rightarrow C_1 = C\cdot(1+i\cdot p)$

En $T+2p \Rightarrow C_2 = C_1\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^2$

En $T+3p \Rightarrow C_3 = C_2\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^2\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^3$

. . .

En $T' = T+np \Rightarrow C' = C\cdot(1+i\cdot p)^n = C\cdot(1+i\cdot p)^{\frac{t}{p}} = C\cdot(1+i\cdot p)^{\frac{T'-T}{p}}$

2. Regímenes financieros

2.6 R.F. interés compuesto a tanto constante

En el R.F. de interés compuesto no basta con dar información sobre cuál es el tanto de interés anual aplicable en la operación. Además es preciso conocer el periodo de capitalización. Como p es el **periodo de capitalización** de los intereses (expresado en años), se define $m=\frac{1}{p}$ como la **frecuencia de capitalización** de los intereses, es decir, el número de periodos que hay en un año

Así, pueden encontrarse expresiones como:

$$i\% \begin{Bmatrix} \text{nominal} \\ \text{anual} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{capitalizable} \\ \text{acumulable} \\ \text{pagadero} \\ \text{periodificable, ...} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{anualmente} \\ \text{semestralmente} \\ \text{trimestralmente} \\ \text{mensualmente, ...} \end{Bmatrix}$$

En general, este tanto de interés que va acompañado de la información del periodo de capitalización se denomina **tanto de interés nominal** y se representa por i_m

Con esta notación, la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante también se podría expresar como:

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^n = C \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot (T' - T)}$$

El cociente entre el interés nominal y la frecuencia de capitalización se denomina **tanto de interés efectivo** y se representa por I_m:

$$\boxed{I_m = \frac{i_m}{m}}$$

Este tanto representa el interés que se cobra (o paga) por unidad monetaria en cada periodo de capitalización. En este caso, se enuncia:

$$I\%(\text{efectivo}) \left\{ \begin{array}{c} \text{anual} \\ \text{semestral} \\ \text{trimestral} \\ \text{mensual, ...} \end{array} \right\}$$

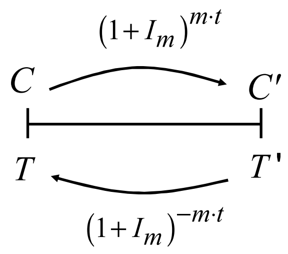
Por tanto, la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante también se podría expresar en términos del interés efectivo de frecuencia m como:

$$\boxed{C' = C \cdot (1 + I_m)^n = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t} = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot (T' - T)}}$$

La expresión del factor financiero de este régimen es:

$$f(T, T') = \frac{C'}{C} = (1 + I_m)^{m \cdot (T' - T)}$$

Además de para **capitalizar**, la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante se puede utilizar también para **actualizar** capitales



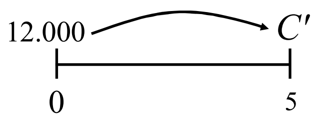
$$C' = C\cdot(1+I_m)^{m\cdot t}$$

Capitalización

$$C = C'\cdot(1+I_m)^{-m\cdot t}$$

Actualización

Ejemplo: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 12.000 € durante 5 años en una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable trimestralmente



$C = 12.000$

$t = 5$

$$\left.\begin{array}{l} i_m = 0{,}03 \\ m = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por tanto,} \quad i_4 = 0{,}03 \qquad I_4 = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$$

$$C' = 12.000\cdot\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{4\cdot 5} = 12.000\cdot(1+0{,}0075)^{4\cdot 5} = 13.934{,}21€$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Una persona desea tener un capital de 8.000 € dentro de 2 años y medio para comprarse una moto. Calcular el capital que debe ingresar hoy en una cuenta que ofrece el 2% de interés anual capitalizable mensualmente para cumplir el objetivo

$C' =$

$t =$

$i \;=\qquad \Rightarrow I \;=$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Calcular el precio que hoy tiene un activo financiero de valor nominal 1.000€ que vence dentro de 2 años, valorando a un tipo de interés del 4,25% anual

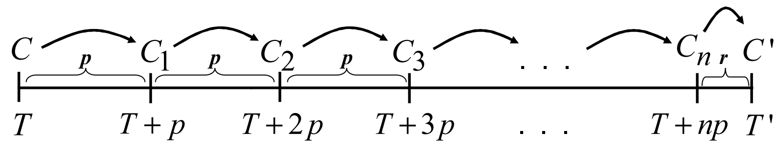
$C' =$

$t =$

$i \;=\qquad \Rightarrow I \;=$

$C =$

Si al fraccionar el plazo, el número de periodos no es entero:
2) Existen $\boldsymbol{n}$ periodos y un residuo de duración, $\boldsymbol{r}$, con $\mathbf{0} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{p}$ y, por tanto, $t = n \cdot p + r$



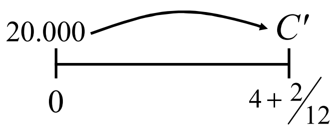
En este caso, a partir de la cuantía acumulada hasta el instante $T + n \cdot p$ que es $C_n = C \cdot (1 + I_m)^n$ se usan dos convenios dependiendo de si el residuo se valora a interés simple o interés compuesto:

Convenio lineal: $C' = C \cdot (1 + I_m)^n \cdot (1 + i \cdot r)$

Convenio exponencial:

$$C' = C \cdot (1 + I_m)^n \cdot (1 + I_m)^{\frac{r}{p}} = C \cdot (1 + I_m)^{\frac{t}{p}} = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

Ejemplo: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 20.000€ durante 4 años y 2 meses en una cuenta que rinde un interés nominal del 2,75% pagadero semestralmente



$$i_2 = 0{,}0275$$

$$I_2 = \frac{0{,}0275}{2} = 0{,}01375$$

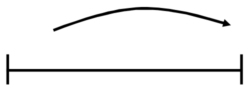
Según el convenio lineal:

$$C' = 20.000 \cdot (1 + 0{,}01375)^{2 \cdot 4} \cdot \left(1 + 0{,}0275 \cdot \frac{2}{12}\right) = 22.411{,}09€$$

Según el convenio exponencial:

$$C' = 20.000 \cdot (1 + 0{,}01375)^{2 \cdot \left(4 + \frac{2}{12}\right)} = 22.410{,}62€$$

Ejercicio: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 10.000€ durante 3 años y 4 meses en una cuenta que rinde un interés anual del 2,20%



Según el convenio lineal:

Según el convenio exponencial:

2.7 Interés efectivo anual y TAE

Supongamos que en R.F. de interés compuesto tenemos una operación financiera de duración t años en la que, invirtiendo una cuantía inicial C al tanto efectivo de frecuencia m, I_m, se obtiene una cuantía final igual a C'. Es decir:

$$C' = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

Supongamos ahora que en R.F. de interés compuesto existe otra operación financiera de duración t años en la que, invirtiendo una cuantía inicial C al tanto efectivo de frecuencia k, I_k, se obtiene una cuantía final también igual a C'. Es decir:

$$C' = C \cdot (1 + I_k)^{k \cdot t}$$

Podríamos preguntarnos, ¿existe alguna relación entre I_m e I_k?

Si igualamos ambas expresiones obtendremos la relación existente entre tantos efectivos de interés de diferentes frecuencias en R.F. de interés compuesto, también denominados **tantos efectivos equivalentes**:

$$\boxed{(1+I_m)^m = (1+I_k)^k}$$

Esto significa que **toda cuantía monetaria** valorada a cualquiera de los dos tantos efectivos generará el mismo capital final con independencia del **plazo temporal** de la operación

Por ello se dice que son **equivalentes**

Ejemplo: Calcular el tanto efectivo de interés semestral equivalente al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente

$$i_{12} = 0,04 \Rightarrow I_{12} = \frac{0,04}{12} \Rightarrow I_{12} = 0,00\widehat{3}$$

$$(1+I_2)^2 = (1+I_{12})^{12} \Rightarrow (1+I_2)^2 = \left(1+0,00\widehat{3}\right)^{12} = 1,0407415$$

$$I_2 = \sqrt{1,0407415} - 1 = 0,02017 \equiv 2,017\%$$

Esto significa que cualquier cuantía monetaria invertida al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente generará el mismo capital final que si se invirtiera al 2,017% efectivo semestral cualquiera que sea el plazo de la operación

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo de interés bimensual equivalente al 5% de interés anual pagadero trimestralmente

2. Regímenes financieros
2.7 Interés efectivo anual y TAE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Uno de los tantos efectivos de interés más utilizados en el mercado es el de frecuencia anual, es decir, el **tanto efectivo anual, I_1**
Utilizando la metodología anterior, podemos conocer el tanto efectivo anual equivalente a cualquier interés efectivo o nominal

$$\boxed{I_1 = (1 + I_m)^m - 1}$$

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo anual equivalente al 2% de interés efectivo cuatrimestral

También se puede obtener el **tanto efectivo anual,** I_1**,** de cualquier operación a partir de la fórmula del R.F. de interés compuesto, una vez conocidas las cuantías inicial, final y el plazo de la operación

Ejemplo: Obtener el interés efectivo anual de una operación por la que invirtiendo hoy 8.300€ se obtienen al cabo de 6 años y 3 meses 9.250€

$$8.300 \longrightarrow 9.250$$

$$0 \qquad\qquad 6+3/12$$

$$8.300 \cdot (1+I_1)^{6+\frac{3}{12}} = 9.250€$$

$$I_1 = \sqrt[6+\frac{3}{12}]{\frac{9.250}{8.300}} - 1 = 0{,}01749 \equiv 1{,}749\%$$

Ejercicio: Obtener el interés efectivo anual de un plan de pensiones que al cabo de 9 años nos garantiza el capital invertido más un 30%

Desde el año 1990 el Banco de España obliga a que se publique la **TAE** de cualquier operación financiera. La TAE es el tanto efectivo anual de una operación una vez que se han tenido en cuenta en la misma los gastos y comisiones financieras que indica el Banco de España. Por tanto, si una operación no tuviera comisiones ni gastos financieros, la TAE sería igual que el tanto efectivo anual

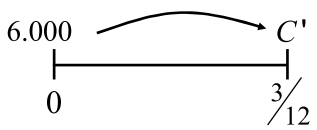
Ejemplo: Un banco concede hoy un préstamo de 6.000€ a devolver dentro de 3 meses a un interés del 8% nominal acumulable mensualmente. Si el Banco cobra una comisión de apertura de 100€, se pide:

a) Calcular la cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses

b) Calcular el tanto efectivo anual del préstamo

c) Calcular la TAE de esta operación de préstamo

a) La cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses será:



$$i_{12} = 0{,}08$$

$$I_{12} = \frac{0{,}08}{12} = 0{,}00\widehat{6}$$

$$C' = 6.000 \cdot \left(1 + 0{,}00\widehat{6}\right)^{3} = 6.120{,}80€$$

b) El tanto efectivo anual del préstamo es:

$$I_1 = \left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{12} - 1 = 0{,}0830 \equiv 8{,}30\%$$

c) La TAE de esta operación de préstamo es:

$$6.000\text{-}100 \longrightarrow 6.120{,}80$$

$$0 \qquad\qquad\qquad {}^{3}\!/_{12}$$

$$6.120{,}80 = 5.900 \cdot \left(1+TAE\right)^{3/12} \Rightarrow TAE = 0{,}15831 \equiv 15{,}831\%$$

Ejercicio: Una cuenta de ahorro ha mantenido un saldo constante de 1.527€ durante 1 año. Dicha cuenta abona un interés anual del 1,25% y tiene una comisión de mantenimiento de 10€ que se liquidan a final de año. Calcular:

a) La cuantía acumulada en la cuenta al cabo de un año antes de pagar la comisión y después de haberla pagado
b) El tipo de interés efectivo anual de la cuenta
c) La TAE de la cuenta

a) La cuantía acumulada en la cuenta al año, antes de pagar la comisión será:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

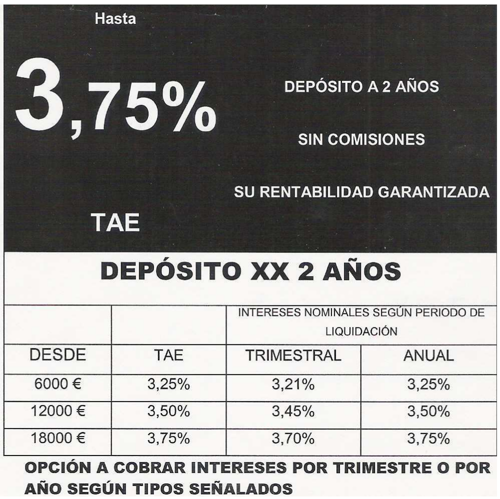
La cuantía después de haber pagado la comisión será:

b) El tanto efectivo anual es del

c) Para calcular la TAE debe considerarse la comisión de mantenimiento. Luego:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: A partir de los tipos de interés nominal que aparecen en el anuncio adjunto, verificar si cada TAE está bien calculada



		INTERESES NOMINALES SEGÚN PERIODO DE LIQUIDACIÓN	
DESDE	TAE	TRIMESTRAL	ANUAL
6000 €	3,25%	3,21%	3,25%
12000 €	3,50%	3,45%	3,50%
18000 €	3,75%	3,70%	3,75%

OPCIÓN A COBRAR INTERESES POR TRIMESTRE O POR AÑO SEGÚN TIPOS SEÑALADOS

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

$i \;\; = 0,0321 \Rightarrow I \;\; =$

$i \;\; = 0,0345 \Rightarrow I \;\; =$

$i \;\; = 0,0370 \Rightarrow I \;\; =$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

DEPÓSITO A 1 MES 8% T.A.E.

Ejercicio: Comprobar si el interés nominal del 7,72% que se paga a un mes equivale a una TAE del 8%, e interpretar este concepto

$i \;\; = 0,0772 \qquad I \;\; =$

Disfrute del Nuevo Depósito a 1 mes 8% T.A.E.* para su próximo ingreso. Sólo tiene que realizar un nuevo ingreso en su cuenta NARANJA, con dinero procedente de cualquier otra entidad, **y se beneficiará automáticamente de nuestro Depósito a un mes 8% T.A.E.*** para todo lo que ingrese hasta 25.000€.

Recuerde que tiene como plazo límite hasta el próximo 7 de febrero de 2008.

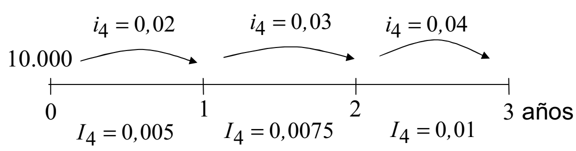
* Válida para personas físicas mayores de edad. Oferta exclusiva para el titular de la comunicación y no acumulable con otras promociones. Tipo de interés nominal anual 7,72%.

2.8 R.F. Interés compuesto a tanto variable

A lo largo del plazo de una operación, el tipo de interés puede ir variando. Llamando $I_m^{(s)}$ al tanto efectivo de cada uno de los n periodos, y considerando que las cuantías devengadas se vayan acumulando al capital, obtendremos el R.F. de interés compuesto a tanto variable:

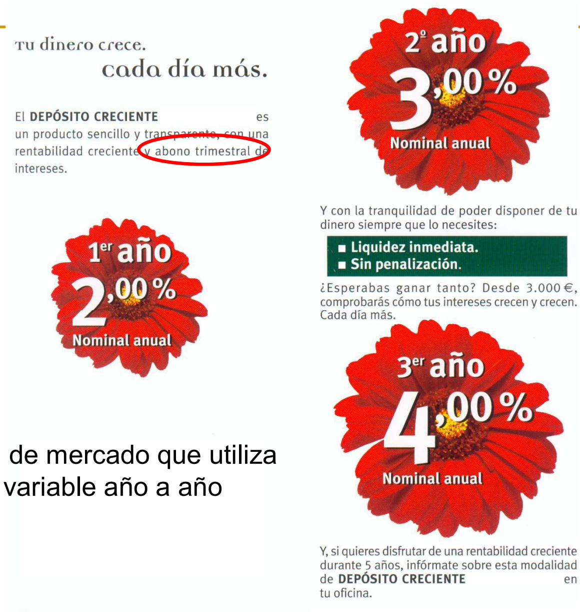
$$C' = C \cdot \prod_{s=1}^{n} \left[1 + I_m^{(s)}\right]$$

Ejemplo: Un depósito de 10.000€ durante 3 años ha ofrecido un interés acumulable trimestralmente y variable cada año. Si los tipos de interés nominales son del 2%, 3% y 4% respectivamente, ¿cuál será la cuantía final acumulada del denominado *Depósito Creciente*?



Cuantía acumulada a los tres años:

$$C' = 10.000 \cdot (1 + 0{,}005)^4 \cdot (1 + 0{,}0075)^4 \cdot (1 + 0{,}01)^4 = 10.937{,}80€$$

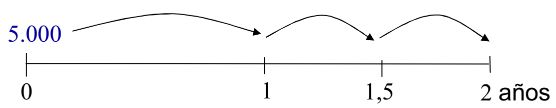


Caso real de mercado que utiliza el interés variable año a año

2. Regímenes financieros

2.8 R.F. Interés compuesto a tanto variable

Ejercicio: Calcular la cuantía final que se obtendrá al invertir 5.000€ en un depósito a 2 años que rinde un 4% anual acumulable semestralmente el primer año, un 4,5% anual acumulable trimestralmente durante el primer semestre del segundo año y un 5% anual acumulable mensualmente durante el segundo semestre del segundo año



Cuantía acumulada a los tres años:

2.9 Suma financiera versus Suma aritmética

En el apartado 1.5 ya definimos el concepto de suma financiera de un conjunto de capitales en un instante T según un factor financiero

En adelante, y salvo que se indique lo contrario, utilizaremos el factor financiero correspondiente al R.F. de interés compuesto

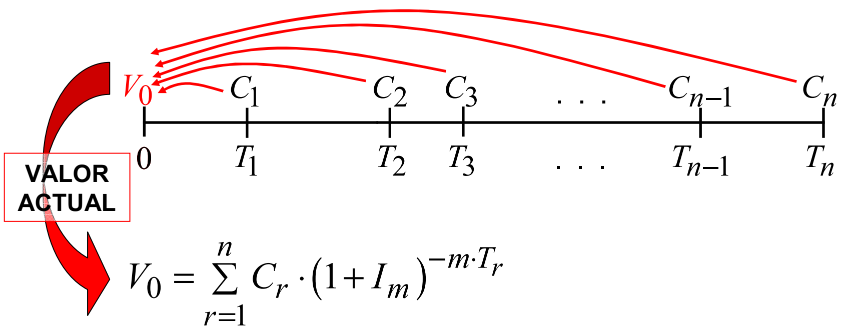
Además, cuando realicemos la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un origen considerado, que generalmente se expresa en $\boldsymbol{T=0}$, a la cuantía resultante la denominaremos **VALOR ACTUAL,** y se representará por $\boldsymbol{V_0}$

Análogamente, cuando realicemos la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un instante final, que generalmente se expresa en $\boldsymbol{T=T_n}$, a la cuantía resultante la denominaremos **VALOR FINAL,** y se representará por $\boldsymbol{V_n}$

Es decir, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Suma financiera de capitales en $\boldsymbol{T=0}$

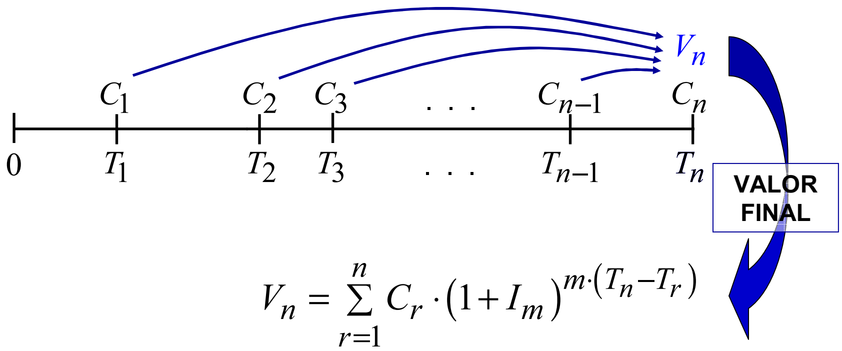


$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_r}$$

Análogamente, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Suma financiera de capitales en $\boldsymbol{T=T_n}$



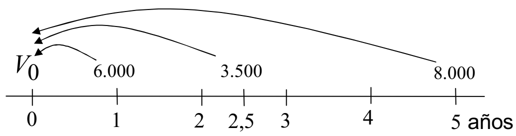
$$V_n = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T_n - T_r)}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Regímenes financieros

2.9 Suma financiera versus Suma aritmética

Ejemplo: Calcular el valor actual de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:

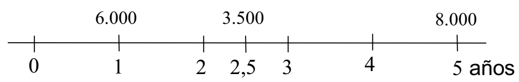


$$V_0 = 6.000 \cdot (1+0,05)^{-1} + 3.500 \cdot (1+0,05)^{-2,5} + 8.000 \cdot (1+0,05)^{-5}$$

$$V_0 = 15.080,59€$$

Esta cuantía representaría el valor actual de dichos pagos futuros, es decir, lo que habría que abonar hoy para cancelar la deuda al tipo de interés considerado

Ejercicio: Calcular el valor final (en el instante $T=5$) de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:



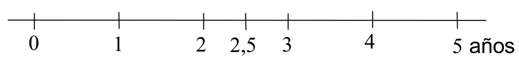
Esta cuantía representaría el valor final de dichos pagos futuros, es decir, lo que habría que abonar dentro de 5 años para cancelar la deuda si no se realizasen los pagos previstos

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Regímenes financieros

2.9 Suma financiera versus Suma aritmética

Ejercicio: Demostrar que la cuantía del valor actual y la del valor final obtenidas en los ejemplos anteriores son equivalentes si se valoran a un interés del 5% anual:



CONCLUSIÓN: Una vez se ha obtenido el valor actual (o el valor final) de un conjunto de capitales, podemos conocer su suma financiera en cualquier diferimiento

En finanzas es muy importante no confundir la suma financiera con la suma aritmética de capitales

Ejemplo: Supongamos que usted puede comprar un coche a plazos y le ofrecen dos opciones:

a) Pagar dentro de 6 meses 5.000€, dentro de 2 años 6.000€ y dentro de 3 años 9.000€

b) Pagar dentro de 6 meses 9.000€, dentro de 1 año 7.000€ y dentro de 3 años 3.000€

¿Qué opción le interesa más como comprador si el tipo de interés de la operación fuese de un 6% anual?

En términos de suma aritmética parece mejor la opción b) pues si sumamos sus cuantías obtenemos:

$$9.000 + 7.000 + 3.000 = 19.000€$$

Por el contrario, con la opción a) la suma de sus cuantías es:

$$5.000 + 6.000 + 9.000 = 20.000€$$

En términos de suma financiera, lo que debemos hacer es calcular el valor actual (o el valor final o en cualquier otro diferimiento) de los capitales de ambas opciones a un interés del 6% anual y ver cuál es menor

El valor actual de la opción a) sería:

$$V_0 = 5.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 6.000 \cdot (1+0,06)^{-2} + 9.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.752,98€$$

El valor actual de la opción b) sería:

$$V_0 = 9.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 7.000 \cdot (1+0,06)^{-1} + 3.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.864,20€$$

En consecuencia, **al tipo de interés considerado**, le interesaría más realizar los pagos según la opción a)

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Introducción a la Matemática Financiera

1. Conceptos financieros básicos

2. Regímenes financieros

3. Rentas financieras

1. Concepto de renta financiera
2. Clasificación de las rentas financieras
3. Valoración de rentas financieras
4. Rentas financieras constantes
5. Aplicaciones de las rentas financieras constantes

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3.1 Concepto de renta financiera

Un conjunto de capitales financieros

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

es una **renta financiera** si:

$$\forall r > 1, \quad T_r - T_{r-1} = P \quad \text{constante,}$$

donde:

P es el periodo de renta

$M = \frac{1}{P}$ es la frecuencia de renta

n el número de términos de la renta

C_r el término o cuantía de la renta correspondiente al periodo r

3.2 Clasificación de las rentas financieras

1) Según el número de términos:
- **Renta temporal**: Cuando n es finito
- **Renta perpetua**: Cuando n tiende a infinito

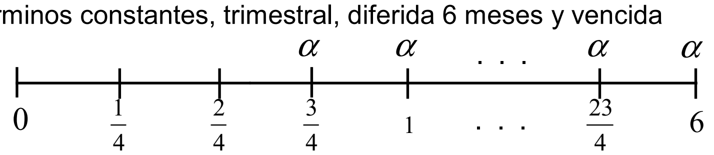
2) Según las cuantías (o términos):
- **Renta constante**: Cuando $\forall r, \quad C_r = \alpha$ constante
- **Renta variable**: Cuando C_r NO constante

3) Según el origen considerado:
- **Renta inmediata**: El origen considerado es igual al origen de la renta
- **Renta diferida**: El origen considerado es anterior al origen de la renta

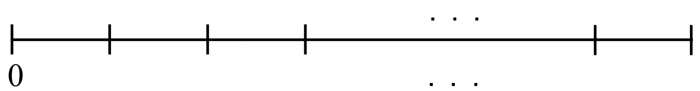
4) Según el periodo de la renta:
- **Renta mensual**: Cuando M=12
- **Renta trimestral**: Cuando M=4
- **Renta anual**: Cuando M=1, …

5) Según el vencimiento de la cuantía dentro de cada periodo:
- **Renta vencida** o **postpagable**: Cuando el término se sitúa al final
- **Renta anticipada** o **prepagable**: Cuando el término se sitúa al inicio

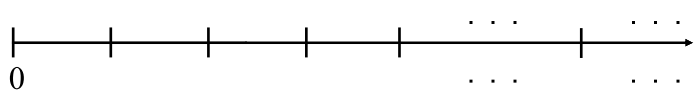
Ejemplo: Representar gráficamente una renta temporal de 22 términos constantes, trimestral, diferida 6 meses y vencida



Ejercicio: Representar gráficamente una renta temporal de 60 términos variables, mensual, inmediata y vencida



Ejercicio: Representar gráficamente una renta perpetua, constante, mensual, diferida 3 meses y anticipada



3.3 Valoración de las rentas financieras

Nos vamos a centrar en la valoración de las rentas en el origen considerado (Valor actual) y al final del último periodo (Valor final), aunque se podría valorar en cualquier diferimiento

A la hora de valorar rentas, hay que tener muy presente que el tipo de interés efectivo que aparecerá en las fórmulas ha de tener la misma frecuencia que la que tenga la renta; es decir, M

En el caso de que el tipo de interés efectivo de la operación tuviera una frecuencia diferente, por ejemplo k, debería transformarse este tanto efectivo I_k en I_M, a partir de la expresión ya conocida:

$$(1+I_k)^k = (1+I_M)^M$$

Es decir:

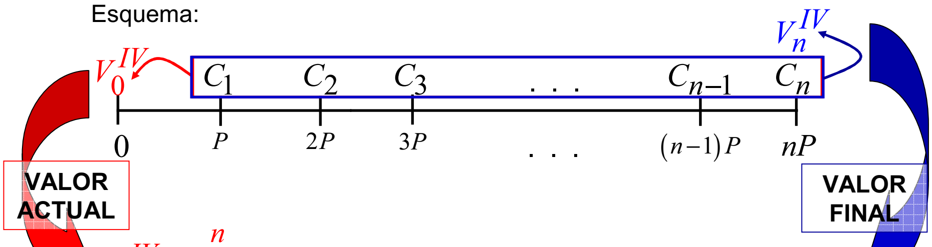
$$I_M = (1+I_k)^{k/M} - 1$$

Vamos a valorar la renta que nos servirá de referencia fundamental para poder valorar el resto de tipos de rentas

Valoración de la renta variable, de periodo P, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(C_r, r \cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema:



$$V_0^{IV} = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_M)^{-r}$$

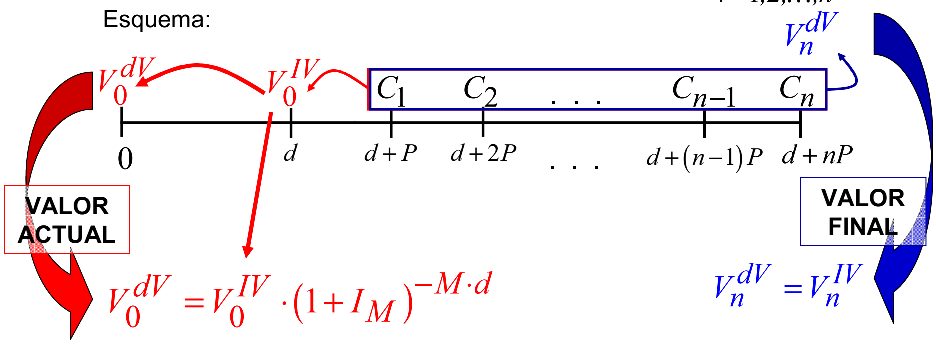
$$V_n^{IV} = V_0^{IV} \cdot (1+I_M)^n$$

Conocidos el valor actual V_0^{IV} y final V_n^{IV} de la renta temporal inmediata y vencida, veamos gráficamente cómo obtendríamos la valoración del resto de rentas financieras:

Valoración de la renta variable, de periodo *P*, temporal, diferida *d* años y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_r, d+r\cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema:



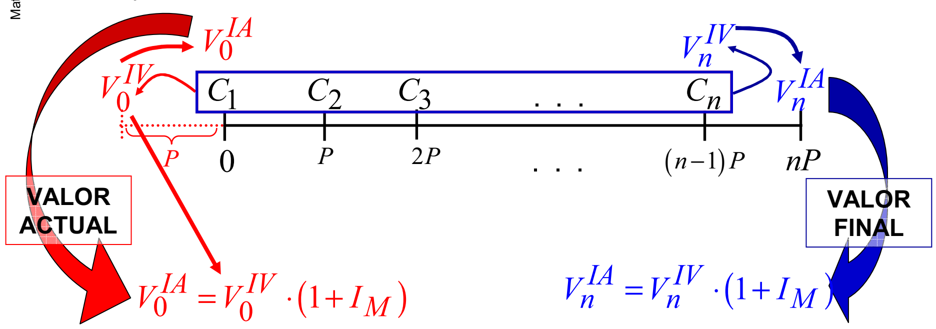
3. Rentas financieras
3.3 Valoración de las rentas financieras

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Valoración de la renta variable, de periodo *P*, temporal, inmediata y anticipada

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_r, (r-1)\cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

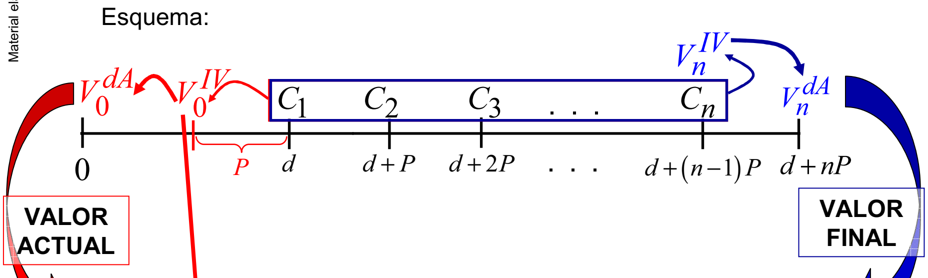
Esquema:



Valoración de la renta variable, de periodo P, temporal, diferida d años y anticipada

Estructura de los capitales financieros: $\{(C_r, d + r \cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema:



$$V_0^{dA} = V_0^{IV} \cdot (1+I_M)^{-M \cdot d + 1} \qquad V_n^{dA} = V_n^{IV} \cdot (1+I_M)$$

En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual

Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0^{IV} = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot (1+I_M)^{-r}$$

Y posteriormente, se trasladará dicha cuantía al instante que nos interese mediante el correspondiente factor

NOTA IMPORTANTE:
En adelante obtendremos el valor actual (o final) de la renta inmediata y vencida. Para valorar el resto de rentas capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida al instante que nos interese
Con independencia del tipo de renta que se valore, al valor actual lo representaremos por V_0 y al valor final por V_n

3.4 Rentas financieras constantes

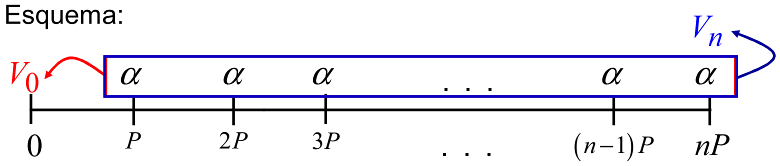
Una renta financiera es constante si y sólo si todas las cuantías son iguales, es decir, si:

$$\forall r, \quad C_r = \alpha \quad \text{constante}$$

Valoración de la renta de periodo P, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{(\alpha, r \cdot P)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema:



Cálculo del **valor actual**:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} \alpha \cdot (1+I_M)^{-r} = \alpha \cdot \sum_{r=1}^{n} (1+I_M)^{-r} = \alpha \cdot \left[(1+I_M)^{-1} + \ldots + (1+I_M)^{-n}\right]$$

Se trata de la suma de términos que varían en progresión geométrica:

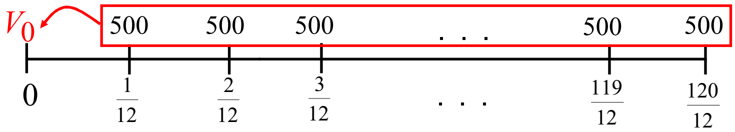
$$\text{Suma} = \frac{\text{Primer término - Último término} \cdot \text{Razón}}{\text{1 - Razón}}$$

$$V_0 = \alpha \cdot \frac{(1+I_M)^{-1} - (1+I_M)^{-n} \cdot (1+I_M)^{-1}}{1-(1+I_M)^{-1}} = \alpha \cdot \frac{(1+I_M)^{-1} \cdot \left[1-(1+I_M)^{-n}\right]}{(1+I_M)^{-1} \cdot \left[(1+I_M)-1\right]}$$

Simplificando:

$$\boxed{V_0 = \alpha \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M} = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_M}}$$

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta inmediata y vencida de 500€ mensuales durante 10 años a un interés del 6% anual capitalizable semestralmente



Puesto que la renta es mensual, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo mensual:

$$\left.\begin{array}{l} i_2 = 0{,}06 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{0{,}06}{2} = 0{,}03 \\ (1+0{,}03)^2 = (1+I_{12})^{12} \\ I_{12} = (1+0{,}03)^{2/12} - 1 = 0{,}0049386 \end{array}\right\}$$

$$V_0 = 500 \cdot \frac{1-(1+0{,}0049386)^{-120}}{0{,}0049386}$$

$$V_0 = 45.187{,}12€$$

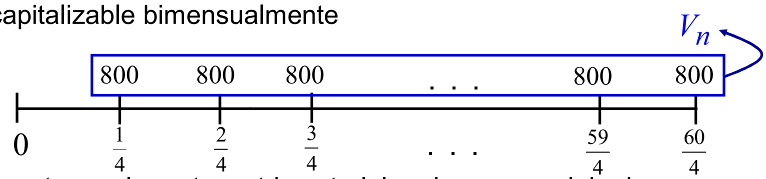
Cálculo del **valor final**:

Partiendo de la expresión del valor actual, tendremos:

$$V_n = V_0 \cdot (1+I_M)^n = \alpha \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M} \cdot (1+I_M)^n$$

$$\boxed{V_n = \alpha \cdot \frac{(1+I_M)^n - 1}{I_M} = \alpha \cdot s_{\overline{n}|I_M}}$$

Ejemplo: Calcular el valor final de una renta inmediata y vencida de 800€ trimestrales durante 15 años a un interés del 5% anual capitalizable bimensualmente



Puesto que la renta es trimestral, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo trimestral:

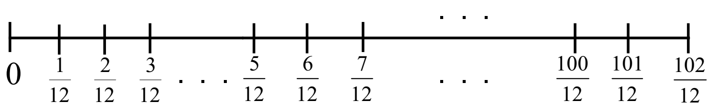
$$i_6 = 0{,}05 \Leftrightarrow I_6 = \frac{0{,}05}{6} = 0{,}008\widehat{3} \qquad \left(1+0{,}008\widehat{3}\right)^6 = \left(1+I_4\right)^4$$

$$I_4 = \left(1+0{,}008\widehat{3}\right)^{6/4} - 1 = 0{,}012526$$

$$V_n = 800 \cdot \frac{\left(1+0{,}012526\right)^{60} - 1}{0{,}012526} \qquad V_n = 70.920{,}05€$$

3. Rentas financieras
3.4 Rentas financieras constantes

Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta anticipada de 350€ mensuales pagadera durante 8 años y diferida 6 meses a un interés del 4% anual liquidable mensualmente

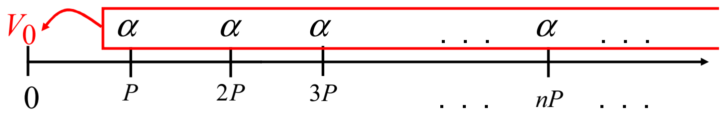


El tanto efectivo mensual es:

Valoración de la renta de periodo P, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(\alpha, r\cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema:



Cálculo del **valor actual**:

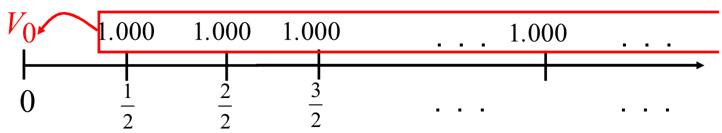
$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha\cdot(1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \alpha\cdot(1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \alpha\cdot\frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$$

Por tanto: $\boxed{V_0 = \frac{\alpha}{I_M} = \alpha\cdot a_{\overline{\infty}|I_M}}$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Rentas financieras
3.4 Rentas financieras constantes

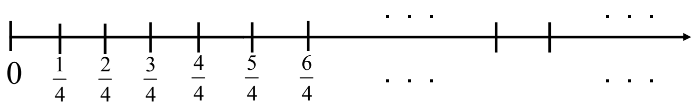
Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta inmediata, vencida y perpetua de 1.000€ semestrales a un interés del 8% anual capitalizable mensualmente



Buscamos el tanto efectivo semestral:

$$\left.\begin{array}{l} i_{12} = 0{,}08 \Leftrightarrow I_{12} = \frac{0{,}08}{12} = 0{,}00\widehat{6} \\ \left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{12} = (1+I_2)^2 \\ I_2 = \left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{12/2} - 1 = 0{,}0406726 \end{array}\right\} \quad V_0 = \frac{1.000}{0{,}0406726} = 24.586{,}56€$$

Ejercicio: Calcular el valor actual de una renta diferida 1 año, vencida y perpetua de 675€ trimestrales a un interés del 3% anual pagadero semestralmente



El tanto efectivo trimestral es:

3.5 Aplicaciones de las rentas financieras constantes

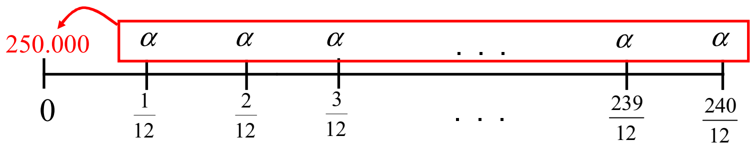
Existen bastantes aplicaciones financieras de las rentas constantes. Ahora veremos dos:

- **Amortización periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cuota constante que debe pagarse periódicamente por la concesión de un préstamo
  En este caso se trata de despejar α en la fórmula del valor actual de la renta correspondiente

- **Reconstrucción periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cantidad constante que debe aportarse periódicamente a una cuenta para alcanzar una cantidad determinada

  En este caso se trata de despejar α en la fórmula del valor final de la renta correspondiente

Ejemplo: Una persona solicita un préstamo hipotecario de 250.000€ a devolver en cuotas mensuales inmediatas y vencidas durante 20 años a un interés del 3% nominal pagadero mensualmente. Calcular el importe de la cuota mensual constante que amortiza el préstamo



El tanto efectivo mensual será:

$$i_{12}=0{,}03$$

$$I_{12}=\frac{0{,}03}{12}=0{,}0025$$

La mensualidad será:

$$250.000=\alpha\cdot\frac{1-(1+0{,}0025)^{-240}}{0{,}0025}$$

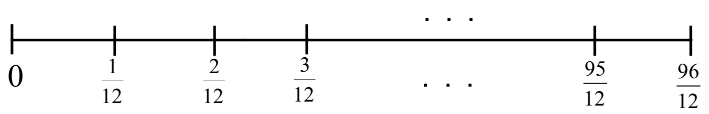
$$\alpha=1.386{,}49€$$

3. Rentas financieras
3.5 Aplicaciones de las rentas financieras constantes

El préstamo del ejemplo anterior, en el mercado financiero, se conoce con el nombre de **préstamo amortizable por el sistema francés**. La cuota del préstamo se compone de intereses y amortización de capital. La parte de intereses de cada periodo depende del capital pendiente y la parte de amortización de capital es la diferencia. Es decir, el cuadro de amortización se construiría:

Periodo	Cuota total	Intereses	Amortización	Capital pendiente
0				250.000,00
1	1.386,49			
2	1.386,49			
3	1.386,49			
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
240	1.386,49			

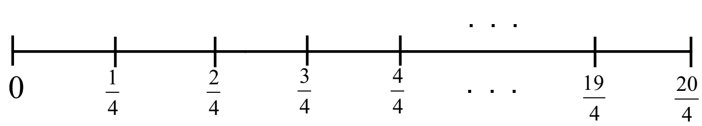
Ejercicio: Una entidad financiera ha concedido un préstamo de 30.000€ a devolver en cuotas constantes, mensuales, inmediatas y vencidas durante 8 años a un interés del 2% trimestral. Calcular el importe de la cuota mensual constante que cancela el préstamo



El tanto efectivo mensual será:

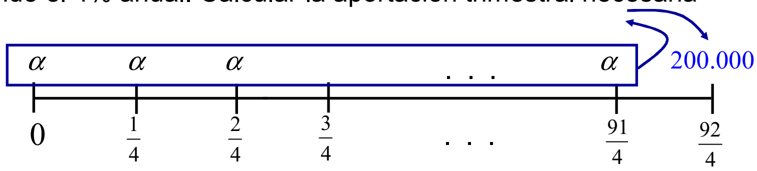
La cuota mensual será:

Ejercicio: Para comprar un coche valorado en 20.600€, una persona paga al contado 5.000€ y por el resto solicita un préstamo a devolver en 5 años en cuotas constantes, trimestrales y vencidas al 8% anual pagadero trimestralmente. Si durante los 6 primeros meses (de los 5 años en total) no debe pagar ninguna cantidad de dinero, calcule el importe de la cuota que amortiza el préstamo



El tanto efectivo trimestral será:

Ejemplo: Una persona querría obtener el día de su jubilación, dentro de 23 años, una cantidad de 200.000€. Para ello realizará desde hoy aportaciones constantes, trimestrales y anticipadas en un plan que rinde el 4% anual. Calcular la aportación trimestral necesaria



El tanto efectivo trimestral será: $I_1 = 0,04$

$$(1+0,04)^1 = (1+I_4)^4 \qquad I_4 = (1+0,04)^{1/4} - 1 = 0,0098534$$

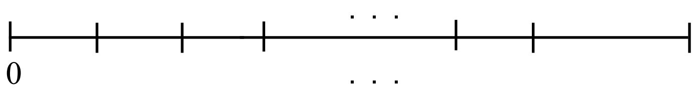
$$\underbrace{\alpha \cdot \frac{(1+0,0098534)^{92}-1}{0,0098534}}_{\text{Valor en } T=\frac{91}{4}} \cdot (1+0,0098534) = 200.000$$

$$\alpha = 1.332,31€$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

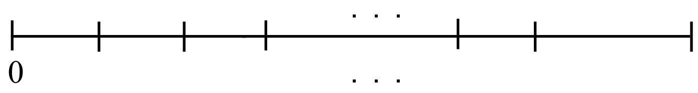
3. Rentas financieras
3.5 Aplicaciones de las rentas financieras constantes

Ejercicio: Una persona abre una cuenta vivienda con 3.000€. Además, realiza aportaciones constantes, mensuales y vencidas sólo durante 3 años, con el objetivo de alcanzar 25.000€ al cabo de 4 años. Si el tipo de interés que remunera la cuenta es del 0,60% trimestral, calcule la cuantía que debe aportar mensualmente a la cuenta



El tanto efectivo trimestral será:

Esquema:



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

BIBLIOGRAFÍA DE REFERENCIA

MATEMÁTICAS EMPRESARIALES
P. Alegre, L. González, F. Ortí, G. Rodríguez, J. Sáez, T. Sancho
Ed. AC, Madrid, 2005

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez