Lliçó inaugural
del curs acadèmic
2015-2016

Facultat de Matemàtiques

Caminant agafats de la mà de Karl Weierstrass

Josep Pla i Carrera

Professor emèrit del Departament
de Probabilitat, Lògica i Estadística

Universitat
de Barcelona

Caminant agafats de la mà de Karl Weierstrass

Lliçó inaugural
del curs acadèmic
2015-2016
Facultat de Matemàtiques

Caminant agafats de la mà de Karl Weierstrass

Alguns conceptes d'anàlisi matemàtica

Josep Pla i Carrera

Professor emèrit del Departament
de Probabilitat, Lògica i Estadística

Barcelona, 16 de setembre de 2015

Universitat de Barcelona

Publicacions i Edicions

Adolf Florensa, s/n, 08028 Barcelona, tel.: 934 035 430, fax: 934 035 531,
comercial.edicions@ub.edu, www.publicacions.ub.edu

Dipòsit legal: B-20.556-2015

Sumari

Un matemàtic que no té una mica de poeta no és certament un autèntic matemàtic.[1]

L'objectiu final que cal tenir sempre al cap és arribar a comprendre correctament els fonaments de la ciència; però, per assolir qualsevol progrés en ciència, és imprescindible estudiar-ne problemes concrets.[2]

L'única cosa que hi ha són les sèries de potències.[3]

KARL WEIERSTRASS

Justificació

M'ha semblat que fóra bo —en aquesta lliçó inaugural del curs 2015-2016 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona (UB)—[4] oferir una presentació, alhora històrica i metodològica, de com intervingueren les aportacions de Weierstrass en la consolidació dels conceptes i resultats que els estudiants d'un grau reglat de matemàtiques troben en els cursos d'anàlisi real [i complexa].

Em fixaré en una desena d'ítems —vuit d'anàlisi real i dos d'anàlisi complexa—.[5] Són: 1) el teorema de Bolzano-Weierstrass; 2) el teorema del

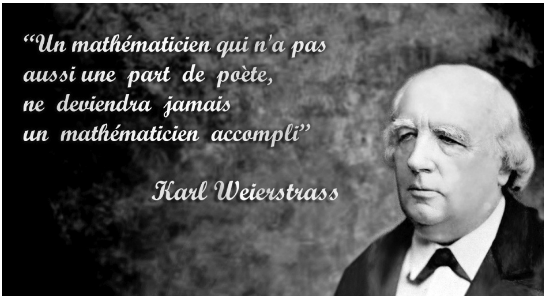
1. «Es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein». Vegeu la carta a Sofia Kowalewskaia del 27 d'agost de 1883, citada a [Mitt02, p. 149, o bé l'article de 1923, p. 191].

2. Citat a [Dura03, p. 105].

3. Citat a [Bell37, edició castellana, p. 458], on llegim textualment: «Weierstrass solia exclamar: "L'única cosa que hi ha són les sèries de potències"».

4. Una síntesi del text la vaig exposar a la FME de la UPC dins l'Any Karl Weierstrass (25-03-2015) juntament amb la delicada exposició descriptiva de la Maria Rosa Massa i Esteve sobre la vida i l'obra de Weierstrass, i l'excel·lent exposició acadèmica sobre la funció $\wp$ de Weierstrass de Jordi Guàrdia i Rúbies. Vegeu *http://upcommons.upc.edu/video/handle/2099.2/3826*.

5. M'ha semblat idoni introduir aquestes dues qüestions perquè, a grans trets, l'obra de Weierstrass es pot considerar doble: la que fa referència a la fonamentació de l'anàlisi —de la qual mai no va publicar res— però que constitueix el nucli de la memòria, i la que publicà en les revistes científiques de l'època —recopilades, sense tenir en compte les cartes, en cinc



Karl Weierstrass[6]

valor mitjà; 3) el teorema de Weierstrass; 4) el teorema de Heine-Borel;[7] 5) i 6) la convergència uniforme i el criteri M de Weierstrass; 7) l'existència de funcions contínues arreu i no derivables enlloc; 8) el teorema de Weierstrass d'aproximació de funcions usant polinomis i la generalització de Stone;[8] 9) els teoremes de Casorati-Weierstrass i de Picard, i 10) una presentació de la funció $\wp$ de Weierstrass.[9]

Però abans d'endinsar-me en el tema vull agrair a l'equip deganal i, en particular, a la degana Carme Cascante, que enguany m'hagi distingit deixant-me llegir aquesta lliçó inaugural, probablement la darrera que faré a la Facultat. I ho faig molt sincerament. Em permet de retrobar-me, un cop més, amb els col·legues, companys i amics i també amb els alumnes dels quals estic cada cop més allunyat. Alhora, *m'ha permès reaprendre nocions i teoremes oblidats i, sincerament, he après moltíssim i he gaudit d'allò més*.

Per tot això, la presentació que faré vol ser un diàleg entre mestre i deixeble i remetré als teoremes més notables dels textos amb què jo els

---

volums— que tracten d'una manera molt important d'anàlisi complexa i de funcions el·líptiques.

6. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass. Ostenfeld (Westfàlia, Prússia), 31 d'octubre de 1815 – Berlín (Brandburg, Prússia), 19 de febrer de 1897.

Usaré *Weierstrass* en lloc de *Weierstraß*, d'acord amb l'*Enciclopèdia catalana*. Vegeu *http://www.enciclopedia.cat/EC-GEC-0071947.xml*.

7. Els quatre ítems es veuen el primer curs: els ítems 1 i 2, el primer quadrimestre, i el 3 i el 4, el segon.

8. Són temes de segon curs, segon semestre.

9. Són dos resultats que no s'acostumen a veure en el curs reglat d'anàlisi complexa.

vaig estudiar —i, en algunes ocasions, aprendre—[10] i a aquells en els quals els estudien i, de ben segur, els aprenen avui en dia els estudiants de les facultats de matemàtiques.

Introducció


Niels Henrik Abel[11]

En començar el segle XIX, els matemàtics tenien plantejats alguns problemes que caldria resoldre en el decurs del segle, si volien disposar d'una matemàtica basada en el nombre real, els conceptes de *funció* i de *successió* i *sèrie* —lligats als conceptes de *continuïtat* i *continuïtat uniforme*; de *derivabilitat*; d'*integració*; de *convergència puntual* i *funcional*, amb èmfasi en la convergència uniforme; d'*aproximació* i d'introducció de funcions noves amb propietats peculiars, etc.—, i tot ben fonamentat amb un cert rigor lògic. Aquest procés és el que, a la historiografia de la matemàtica, es coneix com *aritmetització de l'anàlisi*.[12]

Aquesta preocupació la palesa el matemàtic noruec Abel quan diu:

> En el curs de monsieur Cauchy [*Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique*] que suara he esmentat hi llegim el teorema següent: «Si els termes de la sèrie $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ són funcions d'una única quantitat variable, en tots la mateixa, i, a més, són funcions contínues respecte de la variable en l'entorn d'un cert valor particular (de la variable) en el qual la sèrie convergeix, aleshores el valor de la suma s de la sèrie, en aquest entorn particular de la variable, també és una funció contínua.» Però a mi em sembla que aquest teorema admet excepcions. Per exemple, la sèrie $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots$ és discontínua per a cada valor de x, $(2m+1)\pi$, on m és un enter. I n'hi ha d'altres amb propietats anàlogues.[13]

10. Són els llibres: [Teix68], [Apos60], [Cart61]; [Orte90].
11. Niels Henrik Abel. Finnøy (Noruega), 5 d'agost de 1802 – Froland (Noruega), 6 d'abril de 1829.
12. Vegeu, per exemple, [Boye68, capítol xxv].
13. Vegeu [Abel26, p. 336]. Una part de l'article, en anglès, es troba a [Birk73, p. 69-70].

Richard Dedekind[14]

Semblantment, un quart de segle més tard, l'any 1858 —quan a Dedekind, aleshores professor de l'École Polythecnique de Zuric, se li encarrega un curs sobre els elements del càlcul diferencial— s'adona que l'apropament geomètric tradicional de la idea de límit, encara que té un valor pedagògic important en un curs introductori, no és acceptable quan el que es pretén és fonamentar «científícament» la qüestió.[15]

> Em vaig preocupar per les consideracions d'aquest opuscle per primera vegada la tardor de l'any 1858. Com a professor de l'Escola Politècnica de Zuric em vaig veure obligat, per primera vegada a la vida, a donar un curs sobre els elements del càlcul diferencial i em vaig adonar, com no me n'havia adonat mai abans, de la manca d'una base veritablement científica per a l'aritmètica. En el moment d'haver de tractar el concepte d'aproximació d'una quantitat variable a un valor límit fix i sobretot en el moment d'haver de demostrar la proposició que estableix que *qualsevol quantitat [variable] que creix constantment, però que no depassa totes les fites possibles, s'ha d'apropar a un valor límit*, em veia abocat a recórrer a l'evidència geomètrica. Fins i tot ara mateix sostinc que, des d'un punt de vista didàctic, l'ús de la intuïció geomètrica resulta extraordinàriament útil en tota primera presentació del càlcul diferencial —i àdhuc indispensable— si no es vol perdre molt de temps. Ningú no pot negar, emperò, que aquesta mena d'introducció al càlcul diferencial no pot pretendre que se la consideri científica (*Wissenschaftlichkeit*). Aquest sentiment d'insatisfacció em va resultar tan aclaparador que em vaig proposar amb fermesa meditar-hi fins a aconseguir una fonamentació purament aritmètica i completament rigorosa dels principis de l'anàlisi infinitesimal. Es diu sovint que *el càlcul diferencial maneja magnituds contínues*, *i*, *no obstant això*, *encara ningú no ha donat mai una explicació d'aquesta continuïtat*; fins i tot la presentació més rigorosa del càlcul diferencial basa les demostracions, no en la continuïtat, sinó que apel·la, més o menys conscientment, a conceptes

14. Julius Wilhelm Richard Dedekind. Brunsvic (Baixa Saxònia, Alemanya), 6 d'octubre de 1831 – Brunsvic (Baixa Saxònia, Alemanya), 12 de febrer de 1916.
15. Vegeu la nota 54 i, en particular, [Pla93, p. 222].

geomètrics o suggerits per la geometria, o a proposicions que mai no s'han establert d'una manera purament aritmètica.[16]

Quin és, però, el problema que, en el segle XIX,[17] comporta l'estudi al qual es refereix Dedekind?

Una primera resposta la podem donar plagiant Hairer-Wanner:

—Realment, què és una derivada? Resposta: és un límit.
—Realment, què és una integral? Resposta: és un límit.
—Realment, què és una sèrie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$? Resposta: és un límit. Això porta a haver-se de preguntar:
—Què és un límit? Resposta: és un nombre.
I aleshores, per fi, cal encara fer la pregunta:
—Però, què és un nombre?[18]

Alguns resultats d'anàlisi real

1. Teoremes de Bolzano-Weierstrass i del valor mitjà

1.1. Bernhard Bolzano i l'inici del problema

Un dels problemes importants de finals del segle XVIII i de principis del segle XIX era el que actualment coneixem com a *teorema fonamental de l'àlgebra* que, bàsicament, podem sintetitzar així: *a*) «Tot polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ té almenys una arrel complexa (i també la conjugada)» o, més humilment, *a′*) «Tot polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, de grau senar, té almenys una arrel real».

16. Vegeu [Dede72, p. 14-15]. Els èmfasis són meus.
17. Per no retrocedir en el temps excessivament —i, com sempre, arribar a Grècia—, posaré l'accent en les aportacions de l'anàlisi matemàtica del segle XIX i deixaré a la teva curiositat, estimat lector!, la recerca dels antecedents. Pots consultar, per exemple, [Boye49], [Baro69], [Edwa79], [Jahn03].
18. Vegeu [Hair96, p. 170-171].

Bernhard Bolzano[19]

Bolzano observa que les demostracions —en concret, la de Laplace i la primera de Gauss—[20] necessiten el resultat de *a′* per poder establir el resultat *a*.[21]

Cal, doncs, establir aquest resultat amb rigor, i Bolzano hi dedica el treball de 1817.[22] Fa una presentació genètica del problema —i de les solucions «errònies» que se li han atribuït— per tal de conduirnos, a poc a poc i d'una forma raonable i raonada, a l'autèntica solució. Tant de bo hi hagués més autors amb aquesta manera d'entendre l'exposició de les idees i dels resultats —sobretot quan són iniciàtics— que volen comunicar![23]

Diu:

> En el mètode demostratiu *més usual*, hom es basa en una veritat manllevada a la geometria: *a saber*, *que tota línia contínua amb curvatura simple les ordenades de la qual són primer positives*, *i després negatives (o a la inversa)*, *talla necessàriament l'eix de les abscisses en algun indret situat entre aquestes dues ordenades*. No hi ha res a objectar ni a la *precisió* ni a l'*evidència* d'aquest teorema geomètric. Però, alhora, és ben manifest que es cau en una falta intolerable contra el *mètode adequat* que consisteix a pretendre demostrar les veritats de les matemàtiques *pures* (o generals) (és a dir, de l'aritmètica, de l'àlgebra o de l'anàlisi) amb consideracions que pertanyen a una part *aplicada*[24] (o especial), és a dir, la *geometria*.

---

19. Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano. Praga (Bohèmia, actual República Txeca), 5 d'octubre de 1781 – Praga (Bohèmia, actual República Txeca), 18 de desembre de 1848.

20. Vegeu [Pla92] i [Pla05].

21. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 164-165; edició francesa, p. 142].

22. El lector interessat en l'obra matemàtica de Bolzano la trobarà, en anglès, a [Russ04], i una anàlisi força completa, a [Rusn94]. Vegeu també [Bolz30].

El text de 1817, que analitzem aquí —que, sense cap mena de dubte, és un d'aquells treballs que, insistint en la idea que tantes vegades he defensat (la necessitat de llegir els clàssics), aconsellaria a tot matemàtic—, es troba també a [Bolz17].

23. Seria molt interessant fer una traducció, al català, anotada, d'aquest treball i el lligam amb altres treballs de Bolzano. Vegeu [Russ04].

24. És, si més no, curiosa aquesta distinció entre matemàtica pura —l'aritmetització de la matemàtica— i aplicada —la geometrització de la matemàtica—.

> Amb el temps, no heu sentit ni reconegut la incongruència de μεταβασις ἐις ἀλλο γενος?[25] No l'hem evitat en centenars d'ocasions —quan coneixíem la manera de fer-ho— i no s'ha considerat aquesta eliminació tot un èxit? I si insistim en la voluntat de ser coherents, no ens hem d'esforçar per ser-ho també en aquesta ocasió? —En efecte, en la ciència, les demostracions mai no han de ser simples procediments de *fabricació d'evidències* (*Gewissmachungen*), sinó que, abans que cap altra cosa, han de ser els *fonaments* (*Begründungen*); cal exposar el fonament objectiu que posseeix la veritat que es vol demostrar [...].[26]

Aleshores, després d'analitzar els intents fallits, mostra allò que cal fer per establir els fonaments i, posteriorment, fa la demostració correcta del teorema. Calen tres passos: 1) una definició; 2) un resultat que, de fet, és previ, malgrat que ell el vincula a la definició anterior, finalment 3) la demostració del teorema.

Definició 1.1 (Definició de *continuïtat* de Bolzano). *La funció* f(x) *varia* segons la llei de continuïtat *per a tots els valors de* x *situats a l'interior o a l'exterior de dos extrems*[27] *quan*, *si* x *és un valor arbitrari d'aquests extrems*, *podem aconseguir que la diferència* f(x + ω) − f(x) *sigui més petita que una quantitat arbitrària donada per endavant*, *quan* ω *s'agafa tan petit com calgui.*[28]

---

25. «No podem passar d'un indret a un altre». Una frase anàloga, la trobem al llibre dels *Analítics segons*, 75 a 39 [Barn75, p. 131]: «No és possible, doncs, demostrar res passant d'un gènere a un altre, és a dir, no podem provar cap qüestió geomètrica amb recursos aritmètics».

Vull indicar, tanmateix, que aquest «aforisme», al peu de la lletra, és fals: hi ha problemes geomètrics —la quadratura del cercle, la resolució amb regle i compàs, etc.— que s'han resolt en un altre indret. Pensem, més complexos, el teorema darrer de Fermat, el problema dels quatre colors, la llei dels nombres primers, etc. Constitueix una de les grans riqueses de la matemàtica, que anomeno «els corrents subterranis».

26. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 160; edició francesa, p. 137].

27. Fixem-nos en l'ambigüitat entre si la definició és puntual o bé val en un cert interval. Vegeu, a la pàgina 48, la definició de *continuïtat* de Heine. A més, Bolzano pensa també en funcions com ara $x + \sqrt{(1-x)(2-x)}$ que «és contínua solament per als valors de $x < +1$ o $x > +2$, però no per als valors de x entre $+1$ i $+2$» [Bolz17, edició anglesa, p. 162, nota 12; edició francesa, p. 139, nota].

28. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 162; edició francesa, p. 139].

Aquestes són les funcions susceptibles de complir el que imposa el teorema. Però per poder-ne fer una demostració correcta li cal un teorema auxiliar.

Teorema 1.2 (Teorema de Bolzano). *Si no* tots els valors en general *d'una quantitat* i *satisfan una propietat* M *que val, però, per a tots els* i < u *per a algun valor* u,[29] *aleshores existeix un valor maximal* U *per al qual podem afirmar que* M *val per a tot* i < U.[30]

De fet, Bolzano afirma l'existència del *suprem* $U := \sup \mathcal{M}(u)$, on $\mathcal{M}(u)$ és el conjunt:

$$\mathcal{M}(u) = \Big\{ u \in \mathbb{R} : \big(\forall i < u\, M(i)\big) \wedge \big(\exists j\, \neg M(j)\big) \Big\}.^{31}$$

Vegeu que es tracta d'un antecedent del teorema:

Teorema. *Tot conjunt de nombres reals fitat superiorment té un suprem.*

Aleshores pot demostrar el teorema següent —més general que el que ha enunciat a la introducció—:

Teorema 1.3 (Teorema del valor mitjà). *Siguin* f(x) *i* φ(x) *dues funcions contínues de* x *—o simplement contínues per a tot* x *entre* α *i* β*—. Si, a més, satisfan*

Cal entendre-ho així: «Per a tots els valors $\omega > 0$ inferiors a cert valor $\omega_0 > 0$ tan petit com calgui; o sigui, per a tot w, $0 < w < w_0$». Imposa, de fet, la condició restrictiva: «La propietat "$f(x+\omega) - f(x)$ és més petit que una quantitat donada per endavant" val per a tot $0 < \omega < \omega_0$». Això queda ben palès quan, més endavant, diu: «Si $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, aleshores, per *la llei de continuïtat*, $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, quan prenem i suficientment petit» [Bolz17, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 144]. A més, cal entendre, «en valor absolut»; és a dir, per a la funció $\big|f(x) - \varphi(x)\big|$. L'expressió *valor absolut*, la trobem a [Bolz17, § 15, edició anglesa, p. 177; edició francesa, p. 159] i també a *Funktionenlehre* dins [Bolz30, p. 14].

29. Anomenem-la hipòtesi restrictiva H_u.

30. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 144].

31. Tal com està enunciada la hipòtesi H_u, és obvi que aquest objecte que falseja M és més gran que cada un dels u del conjunt $\mathcal{M}(u)$.

la propietat $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ *i* $f(\beta) > \varphi(\beta)$, *aleshores sempre existeix un valor* γ *entre* α *i* β *per al qual* $f(\gamma) = \varphi(\gamma)$.[32]

Demostració. Bolzano n'analitza la plausibilitat.[33]

Si suposem que $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, aleshores, per la llei de continuïtat, tenim igualment $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, sempre que i sigui prou petit. Per tant, la *propietat de ser més petit*[34] pertany a la funció de i representada per la funció $f(\alpha + i)$ per a tots els valors de i que són més petits que un cert valor.[35] Però aquesta propietat no val per a *tots* els valors de i sense cap restricció ja que no val, per exemple, per a $i = \beta - \alpha$, ja que [per hipòtesi] $f(\beta) > \varphi(\beta)$.

Apliquem el teorema 2.2 i obtenim un valor maximal U.

Per al valor maximal U dels i, no pot ser que $f(\alpha + U) < \varphi(\alpha + U)$ ja que, si ho fos, per la llei de continuïtat, tindríem també $f(\alpha + U + \omega) < \varphi(\alpha + U + \omega)$, sempre que ω sigui prou petit. Per tant, no seria veritat que U és el més gran dels valors per als quals hom pot afirmar que tots els valors i inferiors a U satisfan $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, ja que $i := U + \omega$ seria un valor més gran que U per al qual això també seria veritat.

Però encara molt menys podem tenir que $f(\alpha + U) > \varphi(\alpha + U)$, ja que, aleshores, tindríem també $f(\alpha + U - \omega) > \varphi(\alpha + U - \omega)$ prenent ω prou petit. I, per tant, no seria veritat que $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$ per a tots els valors de $i < U$.

Cal, doncs, que $f(\alpha + U) = \varphi(\alpha + U)$, com volíem. □

Corol·lari 1.4. *Sigui* $f(x)$ *una funció contínua en* $[a, b]$.

a) *Si* $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$, *existeix un* γ *entre* α *i* β *per al qual* $f(\gamma) = \eta$.

b) *Si* $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$, *existeix un* γ *entre* α *i* β *per al qual* $f(\gamma) = 0$.

32. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 143-144].

33. Diu: «Això constitueix un breu resum del mètode adoptat» [Bolz17, § 15, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 143-144]. Més endavant, [Bolz17, § 15, edició anglesa, p. 177-179; edició francesa, p. 159-162], n'ofereix la demostració detallada i acurada.

34. Les cursives es troben a l'original.

35. Amb aquesta precisió, queda aclarit el caràcter puntual de la continuïtat.

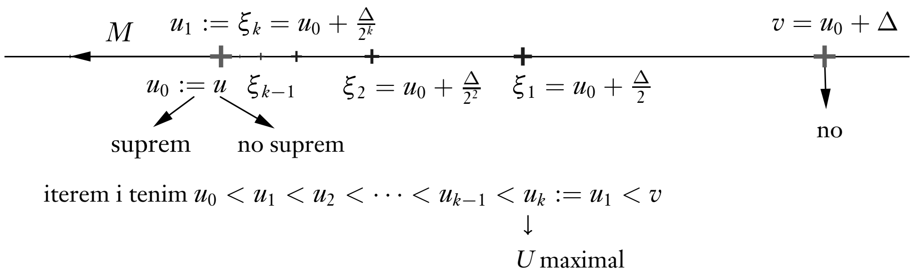
Demostració. El teorema anterior s'aplica als casos: *a)* $\varphi(x) = \eta$, i *b)* $\eta = 0$. □

Només cal, doncs, demostrar el teorema 1.2. Aquí és on Bolzano usa la dimidiació, una metodologia que ja havien usat els grecs en l'exhaustió.[36]

Demostració del teorema 1.2. Atès que la propietat M val per a tots els x que *són més petits* que $u_0 := u$, però no val per a tots els u, en general, existeix un cert valor $v_0 := u_0 + \delta$, amb $\delta > 0$, per al qual podem afirmar que M no val pas per a tot els $x < v_0$.[37]

a) Si u_0 és el darrer valor amb aquesta propietat —M val per a tots els $x < u_0$—, ja hem acabat.

b) Si u_0 no és el darrer valor amb aquesta propietat, aleshores, per a un cert $k_1 > 0, u_1 := u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1}}$ fa el paper de u_0, ja que, si no fos així, per a tot $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$, cap dels valors $u_0 + \frac{\delta}{2^k}$ no la compliria i, per tant, u_0 seria l'element maximal buscat, i hem suposat que no ho és. I podem considerar que l'exponent k_1 és el primer dels exponents k per als quals això és així.



Gràfica del raonament de Bolzano

Fixem-nos amb quina habilitat —en fer que «tots els x» esdevinguin «tots els i»— Bolzano maneja ja el que, en paraules de Weierstrass, serà un «entorn d'un punt» de $\mathbb{R}$. Vegeu la pàgina 53.

36. Vegeu [Jahn03, p. 18-19] o [Pla15].

37. Bolzano l'anomena $V = u + D$, amb $D > 0$, però he preferit usar la notació subindexada perquè n'hem de fabricar molts altres, de punts.

Considerem la parella u_1, v_1, definida per $u_1 := u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1}}$, amb $k_1 > 0$, i

$$v_1 := u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1-1}} = u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1}} + \frac{\delta}{2^{k_1}} = u_1 + \frac{\delta}{2^{k_1}} = u_1 + \delta_1,$$

en substitució de la parella inicial u_0, v_0.

Aleshores distingim els dos casos:

- El procés s'atura per a un valor

$$u_r := u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1}} + \frac{\delta}{2^{k_1+k_2}} + \frac{\delta}{2^{k_1+k_2+k_3}} + \cdots + \frac{\delta}{2^{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_r}},$$

  que és el valor buscat perquè ens trobem en el cas *a*).

- El procés no s'atura i s'obté una sèrie (creixent de nombres) el terme general de la qual és

$$u_r := u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1}} + \frac{\delta}{2^{k_1+k_2}} + \frac{\delta}{2^{k_1+k_2+k_3}} + \cdots + \frac{\delta}{2^{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_r}}.$$

  El «criteri de comparació» amb la sèrie geomètrica de raó $\frac{1}{2}$ —Bolzano l'accepta sense haver-ne establert cap prova—[38] determina un valor U al qual el terme general de la sèrie s'apropa tant com vulguem.

c) Hem de veure que U és el valor suprem que buscàvem.

- És clar que un valor $U_1 > U$ —és a dir, de la forma $U_1 = U + \epsilon$, amb ϵ petit— no val perquè hi ha sempre un cert v_s amb $U < v_s < U_1$, i,

38. Vegeu [Bolz17, § 9, traducció anglesa, p. 173, traducció francesa, p. 152].

Bolzano fa una anàlisi succinta del comportament de les sèries numèriques i de les sèries de funcions: vegeu [Bolz17, § 1 a § 11, traducció anglesa, p. 169-173, traducció francesa, p. 147-153].

per construcció, aquest v_s no compleix la propietat «M és vàlid per a tot $x < v_s$».

- Però tampoc un $U_2 < U$ —és a dir, de la forma $U_2 = U - \epsilon$, amb ϵ petit— no val perquè sempre podrem trobar un u_s amb $U_2 < u_s < U$ i u_s satisfà la hipòtesi H_{u_s} i, de retruc, H_{U_2} també i això no és possible. $\square$

Fixem-nos que Bolzano fa dues coses:

1. Prova que el conjunt fitat superiorment

$$\mathcal{U} := \{u : \text{val la hipòtesi restrictiva } H_u\}$$

   té un suprem.

2. Per trobar el suprem cerca el *punt d'acumulació* d'una certa successió creixent de punts de $\mathcal{U}$ fitada superiorment.

I dues suposicions:

1. Els termes de la sèrie, creixent i fitada [superiorment], tenen un punt d'acumulació.
2. Una sèrie els termes de la qual estan majorats pels termes d'una sèrie convergent és convergent.

Com indicava a la nota 38, Bolzano fa un estudi —molt succint— de la convergència de les sèries que, segons ell, queda garantida per comparació amb la sèrie de potències de terme general $S_r := \sum_{k=0}^{r} a\, e^k$, amb $e < \pm 1$,[39] de la qual sap que és convergent i que convergeix a $\frac{a}{1-e}$. S'adona aleshores que aquesta classe de sèries satisfà el criteri de Cauchy:

> Podem aconseguir que la «perllongació» del terme S_r de s termes —és a dir, allò que cal afegir a S_r per aconseguir S_{r+s}, en concret, l'expressió

39. Significa, de fet, $|e| < 1$.

$a\, e^{r+1} + \cdots + a\, e^{r+s}$— sigui més petita que qualsevol valor que hàgim donat per endavant per petit que sigui sempre que r sigui prou gran, amb independència de la grandària de s.[40]

I aleshores, ho estableix com una condició general per a qualsevol sèrie convergent produïda pels termes d'una successió $\big(F_n(x)\big)_{n\geq 1}$:

> La convergència de la sèrie $S(x) := \sum_{k=1}^{r} F_r(x)$ implica que la perllongació $F_{r+1}(x) + \cdots + F_{r+s}(x)$ sigui tan petita com vulguem quan r és prou gran.[41]

I aleshores estableix i demostra(?) el teorema següent:

Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy). *Si en la sèrie de termes*

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{x}), \mathrm{F}_2(\mathrm{x}), \ldots, \mathrm{F}_\mathrm{n}(\mathrm{x}), \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{n+r}}(\mathrm{x}), \ldots,$$

la diferència entre el terme n-*èsim* $\mathrm{F}_\mathrm{n}(\mathrm{x})$ *i quasevol terme ulterior* $\mathrm{F}_{\mathrm{n+r}}(\mathrm{x})$, *per allunyat que estigui del terme* n-*èsim*, *esdevé més petit que una quantitat donada per endavant*, *quan* n *s'agafa prou gran*, *aleshores existeix sempre un valor constant*, *i només un*, *al qual s'apropen sempre els termes de la sèrie i s'hi apropen tant com es desitgi sempre que perllonguem la sèrie prou lluny.*[42]

Tenim, doncs, establert per primera vegada, encara que sigui informalment, el criteri de Cauchy de la convergència d'una successió (i, de retruc, d'una sèrie). I dic *informalment*, perquè, de fet, aquest teorema introdueix la noció de *límit*. La demostració de Cauchy l'únic que fa és establir la *possibilitat* —m'agrada més dir la *plausibilitat*— del límit, però en cap cas n'estableix l'*existència*. Li manca una *teoria dels nombres reals*.[43]

Com diu Bourbaki:

40. Vegeu [Bolz17, § 5, traducció anglesa, p. 170, traducció francesa, p. 149].

41. Vegeu [Bolz17, § 5, traducció anglesa, p. 170, traducció francesa, p. 149].

42. Vegeu [Bolz17, § 7, traducció anglesa, p. 171-172, traducció francesa, p. 150-151].

43. Cal indicar tanmateix que intentà establir-la pels volts de 1830-1831 en la *théorie des grandeurs* [Rych61].

> Enunciant amb tota claredat (abans de Cauchy) el «criteri de Cauchy», [Bolzano] mira de justificar-lo amb un raonament que, en absència d'una definició del nombre real, no és res més —i no pot ser altra cosa— que un cercle viciós; però, un cop s'admet, el treball és totalment correcte i molt notable [...].[44]

1.2. Intervé Karl Weierstrass: la construcció dels reals

Encara que ningú no dubta que el rigor s'imposà sota el mestratge i la influència de Weierstrass —amb autors com ara ell mateix, Heinrich Heine, Georg Cantor, Hermann Amadeus Schwarz, etc.—, i, malgrat les aportacions de Pierre Dugac[45] i d'Umberto Bottazzini,[46] entre d'altres, és difícil seguir els passos que féu Karl Weierstrass en anàlisi real bàsica perquè la majoria dels cursos que impartí es conserven en forma de manuscrit o gràcies als apunts que en prengueren alguns dels assistents.[47]

Tanmateix, no hi ha cap mena de dubte que l'«aritmetització de l'anàlisi» anà creixent amb les aportacions matemàtiques de l'insigne matemàtic alemany. Pel manuscrit de Schwarz del curs de 1861, sabem que aleshores Weierstrass encara no havia desenvolupat una teoria del nombre real, si bé n'albirava ja la necessitat. Enuncia el teorema del valor mitjà,[48] però la demostració que n'ofereix —que depèn del que estableix el teorema, esmentat a la pàgina 16, que no demostra— té llacunes i palesa, a més, que desconeixia el treball de Bolzano de 1817.[49]

---

44. Vegeu [Bour60, edició castellana, p. 212].
45. Vegeu [Duga73] i [Duga03, p. 118-152].
46. Vegeu [Bott90, p. 229-247] i [Bott03].
47. En els apèndixs I al IV de l'article de Pierre Dugac [Duga73, p. 96-135] es recullen ítems importants dels quatre apunts presos pels deixebles Adolf Hurwitz, Hermann Amadeus Schwarz, Georg Hettner i Georg August Thieme, i també d'altres textos relatius a Weierstrass.
48. Vegeu [Weie61, p. 3-4].
49. Vegeu [Duga03, p. 125-126].

Això no obstant, el 1875, Weierstrass escriu:

> Com més i més reflexiono sobre els principis de la teoria de funcions —i ho faig sense parar— més pregona esdevé la convicció que els fonaments damunt els quals cal bastir-la els constitueixen les veritats de l'Àlgebra; en conseqüència, no fem el camí adequat quan en lloc de seguir les petges algèbriques, senzilles i elementals, ens endinsem en el «transcendent», [...] aquelles formes de pensar [...] amb l'ús de les quals Riemann ha trobat moltes de les propietats més importants de les funcions algèbriques.[50]

No hi ha, doncs, cap mena de dubte que foren Weierstrass i la seva influència els qui van instaurar definitivament aquest criteri de fonamentació de l'ànalisi —d'«aritmetització de l'anàlisi», com ja he dit abans—, quelcom que sintetitzen les encertades paraules de Boyer:

> En la mesura que, a Weierstrass, se li feia cada cop més evident que la intuïció no és fiable, buscava les bases de la seva anàlisi tan rigoroses i precises formalment com fos possible. No presentà, però, la recerca sobre els fonaments de l'anàlisi —com féu Cauchy— en tractats, ni tampoc en cap sèrie d'articles. Els punts de vista que sostenia ens són coneguts, més aviat, per l'obra dels alumnes que assistien a les seves lliçons.[51]
>
> Per tal d'assegurar-ne l'exactitud lògica, desitjava establir el càlcul sobre el concepte de *nombre* solament i així separar-lo totalment de la geometria. Per aconseguir-ho li calia establir una definició precisa de *nombre irracional* totalment independent de la idea de *límit*, atès que aquest concepte pressuposa l'anterior.[52]

Com constaten les opinions d'Abel i de Dedekind que he esmentat abans, aquesta opinió la compartien altres matemàtics de l'època i portà a la recerca de la naturalesa aritmeticoalgèbrica dels nombres reals. El problema estava madur —i la necessitat de resoldre'l era molt gran—. Per això no ens ha d'estranyar que, simultàniament —el mateix any 1872—, el resolguessin diversos matemàtics. D'una banda, Georg Cantor, Eduard

---

50. Vegeu [Weie95, volum 2, p. 235].
51. Vegeu, per exemple, [Merz04, volum 2, p. 703].
52. Vegeu [Boye49, edició de 1959, p. 285].

Heine i Charles Méray usaren una «idea audaç»: «Es declara que la pròpia successió de Cauchy "és" el nombre real».[53] Aquesta solució contrasta amb la de Richard Dedekind, aparentment d'intuïció més geomètrica: «Un "nombre real" s'identifica amb una "talladura"».[54]

Weierstrass també ho aconseguí i ho presentà en el curs de 1874 i, «en l'essencial, ho exposà durant una vintena d'anys sense modificar-ne la concepció»,[55] si bé mai no en féu la construcció ni completa ni acurada.[56] I, malgrat tot, pel que fa a aquesta qüestió, disposem de les notes de classe que prengueren els seus deixebles: Ernst Kossak (1872), Adolf Hurwitz (1880), Salvatore Pincherle (1880) i Victor van Dantscher (1908).[57]

La presentació que ofereixo a continuació es basa essencialment en la reconstrucció de J. Christopher Tweddle.[58]

La idea intuïtiva de *nombre real*. La idea intuïtiva de *nombre real* —que pot ser útil per construir-los— és, aparentment, fàcil. Un nombre racional admet una expressió decimal *exacta* —amb un nombre finit de xifres decimals— o *periòdica* —pura o mixta—. Podem, doncs, per generalització,[59] acceptar com a nombre real qualsevol expressió infinita de la forma

$$a' a_0\, a_1\, \cdots\, a_n\, \cdots, \text{ on cada } 0 \leq a_i \leq 9. \tag{1}$$

Aquesta idea té, però, força dificultats:

1. Quin és el significat d'aquesta expressió?

---

53. És clar que cal «identificar» les successions de Cauchy que defineixen un «mateix» nombre real; és a dir, cal establir una relació d'equivalència ben definida. Vegeu, respectivament, [Cant72], [Hein72] i [Mera72].
54. Aquí cada talladura dóna directament un nombre de forma individual. Vegeu [Dede72] i, per a una exposició detallada de l'obra de Dedekind, [Pla93] i en particular [Pla93, p. 224-237].

Hi ha, però, qui ha dit que la construcció és incorrecta. Vegeu [Weyl19].

55. Vegeu [Duga03, p. 134].
56. Vegeu [Twed11, p. 1].
57. Vegeu, respectivament, [Koss72], [Weie74], [Pinc80] i [Dant08].
58. Vegeu [Twed11].
59. No em canso mai de recordar que el procediment de creació per generalització és una eina molt potent en la creació matemàtica.

2. Què justifica que la puguem acceptar com a nombre?[60]

L'únic que ho pot justificar és: «L'expressió (1) és el límit de la successió de nombres racionals

$$a,\ a'a_0,\ a'a_0\,a_1,\ldots,\ a'a_0\,a_1\cdots a_n,\ldots \text{ amb } 0 \leq a_i \leq 9». \tag{2}$$

Però, aleshores, hem de respondre les preguntes:

Aquests límits existeixen?

I, si no disposem de l'univers dels nombres reals, on existeixen?[61]

I, fins i tot, acceptant-los com a existents,

Com sabem que disposem de tots els nombres que calen?

No és pas aquest el camí que cal seguir. És ben bé l'oposat. Cal construir $\mathbb{R}$ i, un cop construït, demostrar que una manera de representar els objectes $\alpha \in \mathbb{R}$ és la que hem indicat i que la representació, a més, els individua.[62]

---

60. Una possibilitat fóra admetre, «formalment», la totalitat d'objectes de la forma (1), però les dificultats matemàtiques que sorgirien serien exactament les mateixes.

61. Fixem-nos que la successió (2) no és altra cosa que la successió de les sumes parcials de la sèrie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$. Però aquesta successió té límit si, i només si, la sèrie és convergent. Ara bé, la convergència de la sèrie depèn precisament de l'existència del seu límit i solament podrem saber que aquest límit existeix quan hàgim construït adequadament l'univers dels nombres reals, que és precisament l'indret on hem de cercar el límit.

62. Un dels problemes que presenta l'anàlisi matemàtica és precisament la convergència de les sèries i de les successions, com indicà Abel:

> És un error basar qualsevol mena de raonament en les sèries divergents. Són fatals i és vergonyós que hi hagi algú que hi basi les demostracions [...]. Són la causa de tants i tants maldecaps i paradoxes. El nombre de teoremes, relatius a les sèries infinites, que podem acceptar com a fonamentats amb rigor és molt limitat. Sovint apliquem les operacions de l'anàlisi a les sèries infinites com si fossin finites, fet que no em sembla pas acceptable si no va acompanyat d'una demostració particular [Abel26, p. 311-312].

També Cauchy adverteix d'aquest perill al començament del *Cours d'Analyse*. Pensem que, des de feia un segle i mig, els matemàtics usaven les sèries per definir funcions, però ho feien sense tenir cura del domini de convergència. Així, per exemple, Euler basa moltes demostracions en sèries divergents. Fins i tot el concepte que tenia de la convergència era ben curiós, com podem veure a [Pla07, edició electrònica, p. 20-27].

El camí descrit és, d'alguna manera, el camí que havia seguit Cauchy: definir el nombre real pel desenvolupament en decimals. Però aquest mètode —com he indicat suara— té una *petició de principi*.

La construcció acadèmica dels nombres reals. El primer matemàtic que posà de manifest el problema i donà una construcció acurada dels nombres reals fou el matemàtic francès Charles Méray. Segons ell, la petició de principi radicava en el fet d'usar el límit d'una successió de racionals per definir el nombre real, ja que l'existència, o no-existència, del límit depèn de l'existència prèvia, o no-existència, d'un nombre que sigui precisament el límit. És a dir, el nombre real ha d'estar ben definit abans de poder-lo usar com a límit i, per tant, el límit no pot servir per a definir-lo.

Bernhard Bolzano i Augustin Cauchy havien usat les successions que «convergeixen en elles mateixes».[63] La seva posició consistia a afirmar que aquestes successions «convergeixen de forma externa» cap a un nombre real s, que és el límit de la successió.

Méray objecta aquesta actitud i planteja una solució que, en essència, coincideix amb la que donarà també Cantor. La idea de Méray, la podem resumir dient que, per a ell, les successions racionals fonamentals o bé convergeixen cap a límits racionals —amb existència prèvia— que d'alguna manera determinen les successions, o bé convergeixen cap a «nombres ficticis». La qüestió rau a saber si aquests «límits ficticis» tenen les propietats aritmètiques que calen i si, a més, es poden ordenar adequadament. La qüestió, doncs, és sempre la mateixa. S'han d'introduir objectes ficticis, precisant-ne però la naturalesa. Aquests objectes ficticis han de fer el paper de nombres reals i, per tant, han de ser els límits de les successions de racionals. Han d'estar ben determinats, se n'han d'establir les operacions algèbriques i l'ordre, i s'han de demostrar les propietats bàsiques necessàries perquè quedi caracteritzat el domini dels nombres reals.

Aquesta construcció és la que s'ha consolidat com l'acadèmica en els *curricula* de l'assignatura Anàlisi 1, quan es creu convenient, des d'un punt

63. Són les successions de racionals que avui anomenem *successions de Cauchy* o *fonamentals*. Són successions $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ en què, si m és prou gran i p és arbitrari, aleshores $|s_{m+p} - s_m| < \epsilon$, on $\epsilon > 0$.

de vista formatiu, que cal donar una «construcció» dels nombres reals[64] i no simplement la presentació formalista de Hilbert.[65]

La construcció dels nombres reals de Richard Dedekind. No m'hi estendré gens perquè, com ja he indicat abans, podeu trobar-la explicitada —seguint el treball de Dedekind— a l'article, prou detallat, que vaig dedicar a la matemàtica de Dedekind.[66]

La construcció dels nombres reals de Karl Weierstrass. La solució més simple a aquesta qüestió és potser la que va adoptar el matemàtic alemany Karl Weierstrass.[67]

Dóna, com a evident, l'existència del conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals i aleshores estableix la definició d'*igualtat*: dos nombres naturals són iguals si, i només si, estan constituïts pel mateix nombre d'unitats. Aquesta «correspondència», que designem per $a = b$, satisfà: «si $a = b$ i $b = c$, aleshores $a = c$».

Weierstrass pensa els nombres reals com la suma d'una sèrie de potències convergent. Per exemple, considerem el desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció e^x: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, que és convergent per a tot x de l'interval $|x| < \infty$. Si fem $x = 1$, obtenim el nombre real $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ El podríem escriure en la forma $\left[1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots\right]$ que suggereix el concepte d'*agregat* (vegeu la definició 1.7).[68]

Per tal de definir els nombres reals positius, introdueix la noció de *parts exactes* o *alíquotes* de la unitat.

Definició 1.6. $\frac{1}{\mathrm{n}}$ *és l'*n*-èsima part exacta o alíquota de la unitat si, i només si,* $\mathrm{n}\frac{1}{\mathrm{n}} = 1$.

64. Vegeu [Teix68, p. 61-73] i [Orte90, p. 50-57].
65. Vegeu [Hilb00], presentada a [Orte90, p. 28, 29, 42-43].
66. Vegeu la nota 54.
67. El lector interessat en una presentació succinta pot consultar [Duga73, p. 65-70], un article excel·lent sobre l'anàlisi en l'obra de Weierstrass, o més detallat [Twed11] que, com ja he dit, és el que he seguit en aquesta presentació.
68. El nom d'*agregat* es deu a Dugac.

Definició 1.7. *Un agregat* $\mathrm{a} := [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}, \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}, \ldots]$ *és una col·lecció finita*[69] *o numerable de parts exactes de la unitat.*[70]

Quan la col·lecció de parts exactes de la unitat de l'agregat a *és finita diem que* a *és un agregat finit.*

Ara la dificultat rau a establir una definició correcta d'*igualtat d'agregats* —de fet, cal establir una relació d'equivalència.

Weierstrass utilitza les «transformacions elementals». Són les úniques a les quals és possible sotmetre els nombres que constitueixen els agregats:

T1. n elements de la forma $\frac{1}{n}$ es poden substituir per la unitat.

I k parts exactes de la unitat de la forma $\frac{1}{k\ell}$ es poden substituir per $\frac{1}{\ell}$.

T2. Qualsevol nombre es pot substituir per les seves parts exactes (per exemple, el nombre 1 es pot substituir per $p\frac{1}{p}$).

És clar que qualsevol nombre racional de $\mathbb{Q}_+$ és susceptible de ser representat per un *agregat finit*.[71]

Ara cal que els ordenem.

Definició 1.8. *Diem que l'agregat* $\overline{\mathrm{a}}$ *és un transformat finitari de l'agregat* a, *si* $\overline{\mathrm{a}}$ *s'obté aplicant a* a *un nombre finit de transformacions.*

Definició 1.9. *Siguin* a *i* b *dos agregats. Diem que* $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ *si, i solament si, cada subagregat propi, finit,* s_a *de* a, *admet un transformat finitari* $\overline{\mathrm{s}}_\mathrm{a}$ *que, al seu torn,*

69. A partir d'un índex n, els termes a_{n+1} no hi són: són nuls.

70. Uso la paraula *col·lecció* perquè els elements hi poden ser repetits. Per abreujar, escriurem, si escau, $\left[\ldots, \frac{k}{n}, \ldots\right]$ en lloc de $\left[\ldots, \frac{1}{n}, \overset{k)}{\ldots}, \frac{1}{n}, \ldots\right]$. En una presentació més formal, podríem suposar, d'antuvi, que, en cada agregat, hi ha totes les fraccions de la unitat $\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots, k, \ldots$, cada una amb la seva multiplicitat acceptant la multiplicitat 0: $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_r}{r}, \frac{a_{r+1}}{r+1}, \ldots\right]$, on eventualment els a_j poden ser nuls. Per una qüestió d'elegància, els suposarem sempre ordenats d'acord amb l'ordre creixent dels denominadors.

71. El nombre racional $\frac{p}{q}, q \neq 0$, —amb el benentès que p pot ser més gran, igual o més petit que q— el podem representar amb l'agregat $\left[\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \overset{p)}{\ldots}, \frac{1}{q}\right]$, però aquesta és solament una de les infinites representacions possibles del nombre $\frac{p}{q}$.

és un subagregat propi $\mathrm{s_b}$ *de* b *(o d'un transformat finitari* $\overline{\mathrm{b}}$ *de* b*); és a dir, cada part exacta de la unitat de* $\overline{\mathrm{s}}_\mathrm{a}$ *es troba en* b *(respectivament, en* $\overline{\mathrm{b}}$*).*[72]

Teorema 1.10. *La relació* $\leq$ *és reflexiva i transitiva.*

Demostració. Reflexiva. Per a tot agregat $a, a \leq a$. N'hi ha prou a agafar el mateix subagregat de a.

Transitiva. Siguin a, b i c tres agregats que satisfan $a \leq b$ i $b \leq c$. Com que $a \leq b$, cada subagregat s_a, finit i propi de a o d'un transformat finitari $\overline{a}$, admet un transformat finitari $\overline{s}_a$ que, al seu torn, és un subagregat s_b, propi, de b (o d'un transformat finitari $\overline{b}$ de b). Ara, atès que $b \leq c$, tot subagregat propi i finit s_b de b (o de $\overline{b}$) admet un transformat finitari $\overline{s}_b$ que, al seu torn, és un subagregat propi de en c (o d'un transformat finitari $\overline{c}$ de c). En particular, doncs, cada subagregat s_a de a admet un transformat $\overline{s}_a$ de b (o $\overline{b}$) que admet un transformat $\overline{\overline{s}}_a$ de c (o $\overline{c}$). □

Definició 1.11. *Siguin* a *i* b *dos agregats. Diem que* $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}$ *si, i només si,* $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ *i* $\mathrm{b} \leq \mathrm{a}$.

Òbviament, la relació $\equiv$ és una relació d'equivalència en la classe dels agregats. Aleshores, usem lletres gregues (α, β, etc.) per a designar les classes d'equivalència.

Quan $a \equiv b$, amb $a \in \alpha$ i $b \in \beta$, escriurem simplement $\alpha = \beta$.

Definició 1.12. *Un agregat* a *té valor finit si, i només si, existeix un agregat finit* b *i* $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$.[73]

Exemple. $e := \left[2, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots\right] < [3]$.[74]

Lema 1.13. *Si un agregat* a *d'una classe d'equivalència* α *té valor finit, tots els agregats de* α *tenen valor finit.*

72. Solament ens fixem en subagregats «finits» de l'agregat a, que, eventualment, pot ser finit.

73. Són, de fet, els agregats fitats superiorment per un racional.

74. És un exercici. Vegeu més avall un exemple.

Demostració. Tot agregat $a' \in \alpha$ satisfà $a' \equiv a$, i a té valor finit. Per tant, $a' \leq a \leq b$, on b és un agregat finit. $\square$

Definició 1.14. *Un nombre real positiu* ρ *és una classe d'equivalència que conté un agregat de valor finit.*

Definició 1.15. *Un nombre real positiu* ρ *és racional si, i només si, hi ha un agregat finit* $\mathrm{a} \in \rho$.

Definició 1.16. *Diem que l'agregat* a *té la «forma decimal estàndard» si, i només si,* $\mathrm{a} := \left[\mathrm{a}_0, \frac{\mathrm{a}_1}{10}, \frac{\mathrm{a}_2}{10^2}, \frac{\mathrm{a}_3}{10^3}, \dots\right]$, *on* $\mathrm{a}_0 \in \mathbb{N}$, *i* $\mathrm{a}_\mathrm{k} \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $\mathrm{k} = 1, 2, 3, \dots$, *i, per a cada* n, *hi ha un* $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ *amb* $\mathrm{a}_\mathrm{m} \neq 0$.

Exemple. $\frac{1}{5} \equiv \left[\frac{1}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \dots\right]$

Notació. Per a cada nombre racional $\frac{p}{q}$, $\mathrm{E}\left[\frac{p}{q}\right] \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{Q}\left[\frac{p}{q}\right] < 1$ designen, respectivament, la part entera i la part fraccionària de $\frac{p}{q}$.

Lema 1.17. *Cada nombre real positiu* ρ *conté un agregat* a *que té la «forma decimal estàndard».*

Demostració. Sigui b un agregat format per nombres racionals positius com ara

$$b := \left[b_0, \frac{b_1}{n_1}, \frac{b_2}{n_2}, \frac{b_3}{n_3}, \dots\right],$$

on, per a cada $k = 1, 2, 3, \dots$, amb n_k i $b_k \in \mathbb{N}$, i $n_k \neq 0$.

Ara procedim per inducció sobre el nombre de termes de l'agregat.

Cas 1. Comencem amb el nombre racional $\frac{p}{q} = b_0 + \frac{b_1}{n_1}$, amb $n_1 \neq 0$. Considerem $a_0 = \mathrm{E}\left[\frac{p}{q}\right]$ i $\frac{p_1}{q_1} = \mathrm{Q}\left[\frac{p}{q}\right] < 1$. Seguidament, $a_1 = \mathrm{E}\left[\frac{10p_1}{q_1}\right]$ i $\frac{p_2}{q_2} = \mathrm{Q}\left[\frac{10p_1}{q_1}\right] < 1$. Anem iterant el procés; tindrem $a_2 = \mathrm{E}\left[\frac{10p_2}{q_2}\right]$ i $\frac{p_3}{q_3} = \mathrm{E}\left[\frac{10p_2}{q_2}\right] < 1$, etc., $a_n = \mathrm{E}\left[\frac{10p_n}{q_n}\right]$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \mathrm{E}\left[\frac{10p_n}{q_n}\right] < 1$, etc. Per a cada $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, òbviament $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $\frac{p_k}{q_k} < 1$. Obtenim

$$\frac{p}{q} \equiv c := \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_3}{10^3}, \ldots, \frac{a_n}{10^n}, \ldots\right].$$

Si l'agregrat $c := \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_3}{10^3}, \ldots, \frac{a_n}{10^n}\right]$ és finit, el reescrivim en la forma: $\overline{c} := \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_3}{10^3}, \ldots, \frac{a_n-1}{10^n}, \frac{9}{10^{n+1}}, \frac{9}{10^{n+2}}, \ldots\right]$. Aleshores transformem b en

$$\overline{b}_1 := \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{b_2}{n_2}, \frac{b_3}{n_3}, \ldots\right].$$

Cas r. Suposem que, per inducció, l'agregat b s'ha transformat en

$$\overline{b}_r := \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{b_r}{n_r}, \frac{b_{r+1}}{n_{r+1}}, \ldots\right].$$

Procedim com abans, i transformem el nombre racional $\frac{b_r}{n_r}$ en

$$\frac{b_r}{n_r} \equiv c_r := \left[a_0', \frac{a_1'}{10}, \frac{a_2'}{10^2}, \ldots\right].$$

Aleshores obtenim

$$\begin{aligned} \overline{b}_r &:= \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{b_r}{n_r}, \frac{b_{r+1}}{n_{r+1}}, \ldots\right] \\ &\equiv \left[a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, a_0', \frac{a_1'}{10}, \frac{a_2'}{10^2}, \ldots, \frac{b_{r+1}}{n_{r+1}}, \ldots\right] \\ &\equiv \left[a_0 + a_0', \frac{a_1 + a_1'}{10}, \frac{a_2 + a_2'}{10^2}, \ldots, \frac{b_{r+1}}{n_{r+1}}, \ldots\right]. \end{aligned}$$

És possible que, per a alguns índexs $k \geq 1, 9 < a_k + a_k' < 19$.

De moment, acceptem que això no importa; és a dir, que podem reduir

$$\left[a_0 + a_0', \frac{a_1 + a_1'}{10}, \frac{a_2 + a_2'}{10^2}, \ldots\right]$$

a una expressió de la forma $\left[a_0'', \frac{a_1''}{10}, \frac{a_2''}{10^2}, \ldots, \frac{a_n}{10^n} \ldots\right]$, amb $a_0'' \geq 0$ i $0 \leq a_k'' \leq 9$ (vegeu el lema 1.18).

En resulta, finalment, que

$$b \equiv c_{r+1} := \left[a_0'', \frac{a_1''}{10}, \frac{a_2''}{10^2}, \ldots, \frac{a_n''}{10^n}, \ldots, \frac{b_{r+1}}{n_{r+1}}, \ldots\right],$$

amb $a_0'' \geq 0$ i $a_k'' \in \mathbb{N}, 0 \leq a_k'' \leq 9$ i, per a cada m, existeix un $n > m$, amb $\overline{a}_n'' \neq 0$, que acaba el pas del procés d'inducció.

D'aquest procés en resulta que tot agregat es pot transformar en una «forma decimal estàndard», com volíem.[75] $\square$

Lema 1.18. *Siguin* $\left[\mathrm{a}_0, \frac{\mathrm{a}_1}{10}, \frac{\mathrm{a}_2}{10^2}, \ldots, \frac{\mathrm{a}_n}{10^n}, \ldots\right]$ *i* $\left[\mathrm{a}_0', \frac{\mathrm{a}_1'}{10}, \frac{\mathrm{a}_2'}{10^2}, \ldots, \frac{\mathrm{a}_n'}{10^n}, \ldots\right]$ *les formes decimals estàndards de dos agregats* b *i* b'. *Aleshores, l'agregat* $\left[\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_0', \frac{\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_1'}{10}, \frac{\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_2'}{10^2}, \ldots, \frac{\mathrm{a}_n+\mathrm{a}_n'}{10^n}, \ldots\right]$ *—que correspon a la classe* $\mathrm{b} + \mathrm{b}'$ *(vegeu la definició 1.22)— admet un transformat*

$$\left[a_0'', \frac{a_1''}{10}, \frac{a_2''}{10^2}, \ldots, \frac{a_n''}{10^n}, \ldots\right]$$

que té la forma decimal estàndard.

Demostració. Procedirem per inducció sobre l'índex n dels termes dels agregats, tot recordant que, per a cada índex k, o bé $0 \leq a_k + a_k' \leq 9$, o bé $9 < a_k + a_k' < 19$. Per tant, en cada pas de la inducció, cal distingir dos casos:

Cas $n = 1$.

a) Si $0 \leq a_1 + a_1' \leq 9$, fem $\left[a_0 + a_0', \frac{a_1+a_1'}{10}\right] = \left[a_0'', \frac{a_1''}{10}\right]$, on $a_0'' = a_0 + a_0'$ i $a_1'' = a_1 + a_1'$.

b) Si $9 < a_1 + a_1' < 19$, $\left[a_0 + a_0', \frac{a_1+a_1'}{10}\right] \equiv \left[a_0 + a_0', \frac{10+a_1''}{10}\right] = \left[a_0'', \frac{a_1''}{10}\right]$, on $a_0'' = a_0 + a_0' + 1$ i $a_1'' \leq 9$.

75. Si imposem la condició «per a cada m, existeix un $n > m$, amb $a_n'' \neq 0$», l'expressió decimal és única per la forma com l'hem construïda.

Cas $n = r - 1$. Si $\left[a_0 + a'_0, \frac{a_1+a'_1}{10}, \frac{a_2+a'_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_{r-1}+a'_{r-1}}{10^{r-1}}, \frac{a_r+a'_r}{10^r} \ldots\right]$, aleshores, per hipòtesi d'inducció, és equivalent a l'agregat

$$\left[a''_0, \frac{a''_1}{10}, \frac{a''_2}{10^2}, \ldots, \frac{a''_{r-1}}{10^{r-1}}, \frac{a_r + a'_r}{10^r} \ldots\right],$$

on els $0 \leq a''_k \leq 9, k = 1, \ldots, r-1$.

Com abans, distingim dos casos:

a) Si $0 \leq a_r + a'_r \leq 9$, fem $a''_r = a_r + a'_r$, i hem acabat el pas d'inducció.

b) Si $9 < a_r + a'_r < 19$, aleshores

$$\left[a''_0, \frac{a''_1}{10}, \frac{a''_2}{10^2}, \ldots, \frac{a''_{r-1}}{10^r}, \frac{a_r + a'_r}{10^r}, \ldots\right] = \left[a''_0, \frac{a''_1}{10}, \frac{a''_2}{10^2}, \ldots, \frac{a''_{r-1}}{10^{r-1}}, \frac{10 + a''_r}{10^r} \ldots\right].$$

El podem reescriure:

$$\left[a''_0, \frac{a''_1}{10}, \frac{a''_2}{10^2}, \ldots, \frac{a''_{r-1} + 1}{10^{r-1}}, \frac{a''_r}{10^r}, \frac{a_{r+1} + a'_{r+1}}{10^{r+1}}, \ldots\right],$$

i hem acabat atès que $a''_{r-1} < 9$ i, per tant, $a''_{r-1} \leq 9$.

En el supòsit que, a partir d'un índex $m, a''_k = 0$, amb $k > m$; és a dir, en el cas que

$$\left[a''_0, \frac{a''_1}{10}, \frac{a''_2}{10^2}, \ldots, \frac{a''_{m-1}}{10^{m-1}}, \frac{a''_m + 1}{10^m}\right],$$

fem

$$\left[a''_0, \frac{a''_1}{10}, \frac{a''_2}{10^2}, \ldots, \frac{a''_{m-1}}{10^{m-1}}, \frac{a''_m + 1}{10^m}, \frac{9}{10^{m+1}}, \frac{9}{10^{m+2}}, \ldots\right].[76] \qquad \square$$

Ara podem demostrar el teorema bàsic, però abans donaré un exemple que palesa la subtilesa de tot plegat.

76. Tanmateix, ambdós agregats són equivalents.

Exemple. Vegem que $\frac{1}{3} \equiv 0{,}3333\ldots$; és a dir, $a \equiv b$, on $a := \left[\frac{1}{3}\right]$ i $b := \left[\frac{3}{10}\frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots\right]$.

Hi ha dues maneres de fer-ho: 1) Determinant la forma decimal estàndard de a, i 2) Veient que $a \leq b$ i $b \leq a$.

Fem la segona, que és la més interessant.

a) Volem veure que $a \leq b$. Considerem un subagregat s_a finit de a i considerem el representant decimal estàndard infinit equivalent $s'_a := \left[\frac{a_1}{10}\frac{a_2}{10^2}, \frac{a_3}{10^3}, \ldots\right]$.

Considerem el tres casos possibles:

- $a_1 > 3$. Aleshores, $\frac{a_1}{10} = \frac{1}{3} + \frac{3\,a_1 - 10}{30} > \frac{1}{3}$. Això contradiu que $s'_a < \left[\frac{1}{3}\right]$. Per tant, s'ha de produir un dels dos casos següents:
- $a_1 < 3$. En aquest cas, atès que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10}$. Aleshores, $s'_a \equiv \left[\frac{a_1}{10}, \frac{1}{10}\right] \leq \left[\frac{3}{10}\right] \leq b$.
- Finalment, si $a_1 = 3$ i comencem amb a_2 i, pel raonament precedent, tindrem que $a_2 \leq 3$, i així successivament.

b) Volem veure que $b \leq a$. Considerem un subagregat, finit, $s_b := \left[\frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots, \frac{b_r}{10^r}\right]$ de b, on cada $0 \leq b_k \leq 3$, $k = 1, \ldots, r-1$ i $b_r > 0$. És clar que $a \equiv \left[\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \ldots, \frac{3}{10^r}, \frac{1}{3\times 10^r}\right]$, ja que $\frac{1}{3\times 10^r} = \frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{r} \frac{3}{10^k}$. D'on: $s_b < a$.

Vegem ara el teorema següent:

Teorema 1.19 (Teorema de completesa). *Tot conjunt, no buit, fitat superiorment de nombres reals té un suprem.*

Demostració. De fet, és un corol·lari de 1.17. En efecte, sigui $S \subset \mathbb{R}$, fitat superiorment. Per a cada $\rho \in S$, considerem la forma decimal estàndard. Atès que S està fitat superiorment, hi ha un a'_0 que és el més gran de tots els elements a_0 dels agregats d'índex zero del conjunt S.

Descartem ara de S tots els membres els representants decimals dels quals tenen l'element d'índex zero $< a'_0$. Obtenim un conjunt S_0 també fitat superiorment per al qual tots els representants decimals tenen l'element d'índex zero $= a'_0$; és a dir, són de la forma $[a'_0, \ldots]$.

Ara, d'entre tots els termes d'índex un —de la forma $\frac{a_1}{10}$— n'hi ha un que té un terme d'índex un, a'_1, màxim, —atès que, per a tots els termes d'índex un dels elements de S_0, $0 \le a_1 \le 9$—. Descartem ara de S_1 tots els nombres reals els representants decimals dels quals tenen el numerador del terme d'índex un $< a_1$. Obtenim un conjunt $S_1 \subseteq S_0$ en el qual els representants decimals són de la forma $\left[a'_0, \frac{a'_1}{10}, \dots\right]$. I, procedint inductivament, obtenim

$$a' := \left[a'_0, \frac{a'_1}{10}, \frac{a'_2}{10^2}, \dots, \frac{a'_n}{10^n}, \dots\right].$$

El nombre real ρ que té com a representant la forma decimal estàndard a' —és a dir, aquell per al qual $a' \in \rho$— és el suprem de S.

1. És una fita superior dels elements de S, per un argument lexicogràfic: en efecte, sigui $S \ni b := \left[b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \frac{b_3}{10^3}, \dots\right]$, amb $b \neq a'$. Per tant, per la definició de a', hi ha un índex k per al qual $b_k < a_k$.
2. És la més petita de les fites superiors de S. Considerem els conjunts $T_{k+1} = T_k - S_k$, on $T_0 = S$, i $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Aleshores, $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$, amb $T_k \cap T_\ell = \emptyset$, si $k \neq \ell$. Sigui $c := \left[c_0, \frac{c_1}{10}, \frac{c_2}{10^2}, \frac{c_3}{10^3}, \dots\right]$ la forma decimal estàndard d'un nombre real ρ' que també fos fita superior de S. Suposem que $c < a'$. Considerem el primer índex n amb $c_0 = a'_0, c_1 = a'_1, \dots, c_{n-1} = a'_{n-1}$, $c_n < a'_n$. Tots els elements de $S_n \subseteq T_n \subseteq T_{n-1} - S_{n-1}$ són més grans que c. Aleshores, $S_n \subset S$ té un element b que és més gran que c i, per tant, c no és fita superior.

En definitiva, l'agregat a' defineix un nombre real ρ que és el *suprem* de S.

$\square$

Definició 1.20. *Un nombre real* ρ *és un punt d'acumulació del conjunt* $S \subset \mathbb{R}$ *si, i només si, hi ha una subcessió* $\{\rho_n\}$ *de punts de* S *que s'apropa a* a ρ *tan com vulguem.*

Corol·lari 1.21 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). a) *Tot conjunt* S *de nombres reals, infinit, fitat, té un punt d'acumulació.*[77]
b) *Tota successió fitada* $\{\rho_n\}$ *té, almenys, un punt d'acumulació.*[78]

77. Vegeu [Pinc80, p. 237] i [Weie74, p. 305]. Val a dir que en les pàgines 313-320 fa una demostració per al cas n-dimensional.
78. Vegeu [Weie74, p. 163].

Demostració. a) Podem ficar S dins l'interval real $[\alpha, \beta]$. Ara el dividim per la meitat i obtenim dues meitats $[\alpha_0, \sigma_1]$, $[\sigma_1, \beta_0]$, on $\alpha_0 = \alpha, \sigma_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)$ i $\beta_0 = \beta$. Un d'ambdós intervals té una infinitat de punts de S. Anomenem-lo $[\alpha_1, \beta_1]$, i agafem-lo com si fos el segment inicial i iterem el procés. Tindrem una successió creixent de punts $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_r < \cdots$. Considerem el conjunt $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \ldots\}$. Pel teorema 1.19, T té un suprem ρ_0 que, òbviament, per la construcció de la successió T —atès que $\left|\alpha_{r+1} - \alpha_r\right| = \frac{1}{2^r}\left|b_0 - a_0\right| < \epsilon$, per petit que sigui $\epsilon > 0$—, és d'acumulació de S.
b) És un cas particular de l'anterior. $\square$

Per cloure l'exposició, donem la definició de suma i de producte de dos nombres reals.

Definició 1.22 (Definició de suma i producte de nombres reals). *Siguin* α, β *dos nombres reals, i* $a \in \alpha$ *i* $b \in \beta$, *amb*

$$a := \left[\frac{1}{n_1}, \overset{k_1)}{\ldots}, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \overset{k_2)}{\ldots}, \frac{1}{n_2}, \ldots, \frac{1}{n_r}, \overset{k_r)}{\ldots}, \frac{1}{n_r}, \ldots\right] \quad i$$

$$b := \left[\frac{1}{m_1}, \overset{\ell_1)}{\ldots}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots, \frac{1}{m_2}, \overset{\ell_2)}{\ldots}, \frac{1}{m_r}, \overset{\ell_r)}{\ldots}, \frac{1}{m_r}, \ldots\right].$$

La suma $\alpha + \beta$ *és la classe d'equivalència de* $a + b$, *on*

$$a + b := \left[\frac{1}{n_1}, \overset{k_1)}{\ldots}, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \overset{k_2)}{\ldots}, \frac{1}{n_2}, \ldots, \frac{1}{n_r}, \overset{k_r)}{\ldots}, \frac{1}{n_r}, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{1}{m_1}, \overset{\ell_1)}{\ldots}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots, \frac{1}{m_2}, \overset{\ell_2)}{\ldots}, \frac{1}{m_r}, \overset{\ell_r)}{\ldots}, \frac{1}{m_r}, \ldots\right].$$

El producte $\alpha \cdot \beta$ *és la classe d'equivalència de* $a \cdot b$, *on* $a \cdot b$ *és l'agregat que conté, com a elements, tots i cada un dels productes* $\frac{1}{n_i}$ *i* $\frac{1}{m_i}$, *tenint en compte les corresponents multiplicitats;*[79] *és a dir,* $a \cdot b = \left[\ldots \frac{1}{n_i} \cdot \frac{1}{m_j} \ldots\right]$.[80]

79. Pensem en la distributivitat d'un factor sobre l'altre.
80. En ambdós casos, ordenats en ordre creixent dels denominadors.

Òbviament, per a un estudi complet, caldria veure que tot funciona: hi ha independència dels representants, i satisfan les propietats del cos ordenat i arquimedià; per fi, fóra d'interès veure que $\mathbb{Q}$ és dens a $\mathbb{R}$, però això no forma part d'aquesta presentació, de fet ja massa extensa.

1.3. Un incís: apareix Jean Gaston Darboux

Podríem pensar que el que caracteritza la continuïtat d'una funció en un cert interval $[a, b]$ de la recta real és que satisfaci el teorema del valor mitjà.[81]

Introduïm, doncs, la definició següent:

Definició 1.23. *Una funció* f *és D-contínua [en honor al matemàtic francès Jean Gaston Darboux] quan, per passar d'un valor imatge* α *a un valor imatge* β, *ha de passar necessàriament per tots els valors intermedis.*[82]

És a dir, diem que la funció $f(x)$ és D-contínua en l'interval $[a, b]$, si, per a tota parella $x_1, x_2 \in [a, b]$, $f(x)$, ha de recórrer tots els valors que hi ha entre $\alpha = f(x_1)$ i $\beta = f(x_2)$.

Disposem, doncs, de dues definicions de *continuïtat*: la de Bolzano-Cauchy i la de Darboux. La qüestió és saber si són equivalents, o no.

L'any 1875, Jean Gaston Darboux s'adonà d'aquesta dualitat i construí funcions no contínues —obtingudes per derivació (vegeu el lema 1.24)—

81. Voldria indicar, encara que no sigui gaire adequat, que, quan vaig apropar-me, per primera vegada, al concepte de funció contínua, estava convençut que aquesta —la propietat del valor mitjà— era la propietat que caracteritzava la continuïtat, i se'm feia molt difícil entendre per què calia recórrer a la continuïtat puntual. Creia que la continuïtat era una propietat global i no pas puntual, una herència del comportament físic del moviment. Em vaig dotar d'una imatge: l'arbre creix de forma contínua, mentre que la paret creix de forma discontínua, rajola a rajola.

Van passar alguns anys abans no vaig saber que aquests dos conceptes no eren equivalents, i que la continuïtat puntual era moltíssim més fina que la del valor mitjà. M'ho va fer notar, uns quants anys més tard, el col·lega Joan Cerdà, quan li ho vaig preguntar.

82. Hom diu també que *f satisfà la propietat D.*

Jean Gaston Darboux[83]

per mostrar que les dues definicions de *continuïtat* eren molt diferents.[84] Cal tenir present tanmateix que, a França, era normal definir una funció contínua usant la definició de la D-continuïtat, perquè se la considerava equivalent a la definició de Cauchy.[85]

És realment fàcil trobar funcions discontínues que, per anar d'un punt a un altre, passin necessàriament per tots els punts intermedis.

Exemple 1. Un cas força elemental és el que proporciona la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{per a } x \neq 0, \\ \alpha, & \text{on } \alpha \in (-1, +1), \text{ arbitrari.} \end{cases} \qquad \square$$

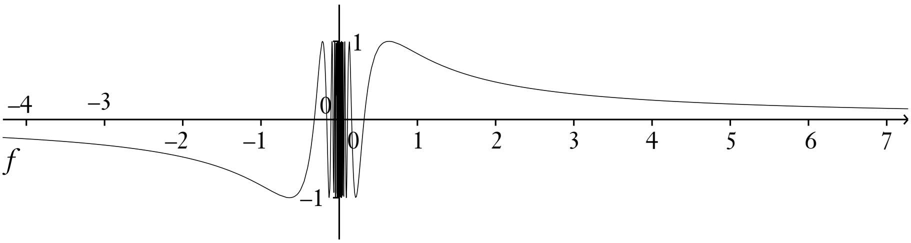


Figura 1. Gràfic de la funció $f(x)$.

Exemple 2. O encara la derivada de la funció

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{per a } x \neq 0, \\ 0, & \text{per a } x = 0. \end{cases}$$

---

83. Jean Gaston Darboux. Nimes (França), 14 d'agost de 1842 – París (França), 23 de febrer de 1917.

84. Vegeu [Darb75, p. 109-110].

85. L'any 1903, en alguns *lycées* de París, encara s'usava, com a definició de *funció contínua*, la D-continuïtat, criticada per Darboux feia més de vint-i-cinc anys. El que fa que això sigui realment curiós és el fet que, en les demostracions elementals, el que cal és la definició de Cauchy i no pas la de la D-continuïtat. Vegeu [Lebe04, nota, p. 89-90].

És derivable per a tot $x \in \mathbb{R}$ i la derivada

$$f'(x) = -\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right),\ x \neq 0,$$

és discontínua a l'origen però, en canvi, és D-contínua en qualsevol interval que contingui l'origen d'acord amb el teorema de Darboux 1.24, pàgina 41. $\square$

Però el que és realment curiós és que una funció pugui ser D-contínua i alhora discontínua, en el sentit de Cauchy, en tots i cada un dels punts.[86]

Exemple 3. La funció $\varphi(x)$, la definim per casos de la manera següent. D'entrada, escrivim el nombre real $x \in [0,1]$ en el sistema de numeració decimal (lema 1.17). Resulta que

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots$$ [87]

Definim la funció $\varphi(x)$ per casos:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_1 a_3, \cdots, \text{ no és periòdic;} \\ \dfrac{a_{2n}}{10} + \dfrac{a_{2n+2}}{10^2} + \dfrac{a_{2n+4}}{10^3} + \cdots, & \text{si } a_1 a_3, \cdots, \text{ és periòdic i el} \\ & \text{primer període comença a } a_{2n-1}. \end{cases}$$

Ara hem de veure que aquesta funció $\varphi(x)$, en cada interval, per petit que sigui, pren tots els valors de $[0,1]$. Això fa que sigui discontínua en el sentit de Cauchy.

Siguin, doncs, $0 < r < s < 1$, on $r, s \in \mathbb{R}$. Suposem que

$$r = 0'a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1} \ldots,$$

86. Vegeu [Lebe04, nota, p. 90].

87. La base de numeració no és essencial. El que sí és essencial, en la construcció que farem, és no admetre que, a partir d'un lloc en endavant, tots els dígits siguin igual a $b-1$, on b és la base; caldrà substituir-los per 0. Així, en base 10, s'escriu el número 0,2 … en lloc del número 0,1999 …, i 1 … en lloc de 0,9999 … .

Considerem el nombre real

$$r' = 0'a_1a_2\dots(a_k+1)000\dots$$

Òbviament $r' > r$, i $r' - r < \frac{1}{10^k}$. Si agafem k prou gran, tenim que $r' < s$. Existeix, doncs, un senar, $2\,\ell+1$, prou gran, per al qual

$$s' = r' + \frac{1}{10^{2\,\ell+1}} < s.$$

De tot això, en resulta que

$$\begin{aligned} r' &= 0'a_1a_2\dots(a_k+1)00\dots0\overset{2\,\ell+1}{0\,|}\,000\dots,\\ s' &= 0'a_1a_2\dots(a_k+1)00\dots0\overset{2\,\ell+1}{1\,|}\,000\dots. \end{aligned}$$

Agafem ara un nombre real

$$0'b_1b_2b_3\dots$$

arbitrari, amb la limitació de la nota 87, i considerem

$$\xi = 0'a_1a_2\dots(a_k+1)00\dots\overset{m}{0|}01b_11b_21b_3\dots$$

És obvi que $r' < \xi < s'$ i, de retruc, que $r < \xi < s$.
Finalment, per definició,

$$\varphi(\xi) = 0'b_1b_2b_3\dots$$ [88] □

A més, a diferència del que passa amb la continuïtat de Cauchy, la suma de dues funcions D-contínues no és necessàriament D-contínua.

---

88. A més, no pren cap valor a fora de l'interval $[0,1]$. Per tant, per passar d'un valor α a un valor β, ha de passar per tots els valors de $[0,1]$ i, de retruc, per tots els valors entre α i β.

Exemple 4. Considerem les funcions D-contínues

$$f_1(x) = \sin\frac{1}{x}, \text{ per a } x \neq 0, \text{ i } f_1(x) = 1,$$

$$f_2(x) = -\sin\frac{1}{x}, \quad \text{per a } x \neq 0 \text{ i } f_2(x) = 1$$

La suma

$$f_1 + f_2 = 0 \text{ per a } x \neq 0 \text{ i } f_1(0) + f_2(0) = 2$$

només pren els valors 0 i 2. Per tant, no és D-contínua. □

Aquests exemples «posen de manifest la necessitat de disposar de definicions precises» i, alhora, el valor que tenen els exemples —i els contraexemples— per aclarir les qüestions cada cop més complexes, quelcom molt viu a l'època de Weierstrass.[89]

És curiós, en canvi, observar que una funció derivada mai no pot anar d'un valor a un altre sense passar per tots els valors intermedis.[90]

Lema 1.24 (Teorema de Darboux). *Sigui* $f(x)$ *una funció real derivable a l'interval* $I := [a, b]$. *Si* ℓ *és un nombre real comprès entre* $f'(a)$ *i* $f'(b)$, *aleshores hi ha un valor* $\xi \in [a, b]$ *amb* $f'(\xi) = \ell$.

Podem enunciar-lo de la forma alternativa següent:

Lema 1.25 (Teorema de Darboux). *Sigui* $f(x)$ *una funció real derivable a l'interval* $I := [a, b]$. *Aleshores* $f'\langle I\rangle$ *és un interval de* $\mathbb{R}$.

Fem dues demostracions: la primera, elemental, basada en les propietats de les funcions reals de variable real; i la segona, una mica més elaborada, basada en les propietats topològiques dels subconjunts de $\mathbb{R}$.

89. Tampoc no n'hi ha prou que f tingui la propietat de Darboux en $[a, b]$ i prengui cada valor *una sola vegada*. Ara bé, si la funció f és monòtona en $[a, b]$, la propietat de Darboux equival a la continuïtat. Vegeu [Reyp15].
90. Vegeu [Lebe04, p. 89].

Demostració. *a*) Suposem que $a < b$ i que $f'(a) < \ell < f'(b)$.[91] Considerem la funció $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida per $g(x) = f(x) - \ell x,\ \ell \in \mathbb{R}$.

Per hipòtesi, la funció $g(x)$ és derivable a l'interval $[a,b]$ —per tant, és contínua en $[a,b]$—.[92] Per tant, $g(x)$ té un «mínim» a $[a,b]$[93] i la derivada és: $g'(x) = f'(x) - \ell$. En conseqüència, $g'(a) = f'(a) - \ell < 0$ i $g'(b) = f'(b) - \ell > 0$.

Si el mínim l'atrapés en el punt a, aleshores $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0$, per a tot $x \in (a,b]$. Però això no és possible, atès que $g'(a) < 0$.

Però, anàlogament, el mínim no pot trobar-se en el punt b.

Se'n segueix que el mínim s'atrapa en un punt $\xi \in (a,b)$; en conseqüència, és un mínim relatiu. I, per fi, $g'(\xi) = 0$. O sigui $f'(\xi) = \ell$.[94] □

b) Sigui $U = \{(x,y) \in I \times I, x < y\}$.

Definim la funció $g(x)$ real de variable real sobre U,

$$g(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

El conjunt U és connex de $\mathbb{R}^2$, ja que és un convex de $\mathbb{R}^2$.[95]

La funció $g(x)$ és contínua. Per tant, $g\langle U\rangle$ és un conjunt connex de $\mathbb{R}$. O sigui, és un interval.

D'altra banda, tenim que $f'\langle I\rangle \subset \overline{g\langle U\rangle}$ —per la definició de derivada.

D'altra banda, el teorema dels increments finits diu que $g\langle U\rangle \subset f'\langle I\rangle$.[96]

En resulta que la imatge de $f'\langle I\rangle$ es toba entre l'interval $g\langle U\rangle$ i l'adhèrencia de $g\langle U\rangle$; o sigui $g\langle U\rangle \subseteq f'\langle I\rangle \subset \overline{g\langle U\rangle}$. En definitiva, $f'\langle I\rangle$ és un interval. □

---

91. El cas $f'(b) < \ell < f'(a)$ és anàleg.
92. Vegeu [Teix68, p. 245] i [Orte90, p. 133].
93. És el teorema de Weierstrass. Vegeu [Teix68, p. 228] i [Orte90, p. 101].
94. Vegeu [Olse04].
95. Si l'interval està fitat és un triangle.
96. Vegeu [Lag01, p. 270] per a un enunciat primerenc del teorema dels increments finits. Per a una exposició actual, vegeu [Teix68, p. 254] i [Orte90, p. 141].

1.4. Apareix el Cours d'Analyse *d'A. L. Cauchy*

Malgrat la importància del text de Bolzano, esmentat a § 1.1, pàgina 13, no fou fins que l'any 1821 aparegué el *Cours d'Analyse* d'Augustin Louis Cauchy que els conceptes de *límit*, *continuïtat*, *convergència de nombres*, *funcions* i *sèries* no adquiririen la importància que encara avui tenen en els cursos reglats introductoris d'anàlisi matemàtica en les carreres científiques i tècniques, en general, i en l'ensenyament de matemàtiques, en particular. Han esdevingut eines específiques pròpies de l'estudi i de la recerca de la matemàtica. És un text, com s'ha assenyalat, que tingué un impacte —i una empremta— que canvià la manera d'entendre l'anàlisi matemàtica i que, com deia, ha perviscut fins ara.

1.4.1. Introducció

Als vint-i-dos anys, quan tot just acabava d'aconseguir la primera feina com a enginyer, aquest insigne matemàtic francès, reialista i conservador, a la conferència «Sur les limites des connaissances humaines»,[98] llegida el 14 d'octubre de 1811 —deu anys abans del famós curs d'anàlisi—, adreçant-se a la Société Académique de Cherbourg, després d'exposar la seva concepció general de les ciències i, un cop hagué parlat de les llengües, la geografia i la química, expressà un cert pessimisme en relació amb la matemàtica, inspirat molt probablement per les opinions de Joseph Louis Lagrange.[99]

Augustin Louis Cauchy[97]

97. Augustin Louis Cauchy (París [França], 21 d'agost de 1789 – Sceaux [França], 23 de maig de 1857).
98. Vegeu [Cauc11].
99. Vegeu [Pla15, p. 138]. Joseph Louis Lagrange (Torí [Itàlia], 25 de gener de 1736 – París [França], 10 d'abril de 1813).

> Què puc dir de les ciències exactes: la part més important sembla haver assolit el període més alt. L'aritmètica, la geometria, l'àlgebra, les matemàtiques transcendents són ciències que podem considerar acabades, i solament queda la tasca de fer-ne aplicacions útils.[100]

Són unes paraules que no poden deixar de sorprendre en un dels matemàtics més productius i més influents del segle XIX i que solament podem atribuir a la jovenesa.[101]

I, això no obstant, l'any 1821, a la introducció del *Cours d'Analyse*, precisa:

> Pel que fa als mètodes, he procurat donar-li el mateix rigor que s'exigeix en geometria, de manera que jamai s'hagi de recórrer a les raons que hom pot adduir de l'àlgebra. Les raons d'aquesta mena, si bé admeses comunament, sobretot en els passos que menen de les sèries convergents a les sèries divergents, i de les quantitats reals a les expressions imaginàries, només poden ser considerades, al meu parer, com a induccions adequades per fer-nos pressentir algunes vegades la veritat, però que s'ajusten molt poc a l'exactitud de la qual es vanen les ciències matemàtiques. [...][102]
>
> Determinant aquestes condicions i aquests valors, i fixant d'una manera precisa el sentit de les notacions de les quals em serveixo, faré que aquesta mena d'incerteses desaparegui. [...][103]
>
> Per tal de mantenir-me fidel als meus principis, m'he vist obligat a acceptar algunes proposicions que, d'antuvi, semblen una mica dures. Per exemple, al capítol VI, enuncio: «Una sèrie divergent no té suma». [...][104]
>
> Espero que les proposicions d'aquesta mena impliquin sortosament la necessitat d'imposar més precisió en les teories i de fixar restriccions

100. Vegeu [Cauc11, p. 6].

101. Recordem, encara que només sigui de passada, que l'obra completa ocupa 27 volums i és, després de la de Leonhard Euler (Basilea [Suïssa], 15 d'abril de 1707 – Sant Petersburg [Rússia], 18 de setembre de 1783), la més copiosa de la història de la matemàtica.

102. Vegeu [Cauc21, p. II-III]. En anglès, hom pot consultar l'edició anotada [Cauc09].

103. Vegeu [Cauc21, p. III].

104. Vegeu [Cauc21, p. IV].

útils a afirmacions massa esteses, i esdevenguin profitoses a l'anàlisi i proporcionin força temes de recerca que no són pas exempts d'importància. [...][105]

> Així, abans d'efectuar la suma d'una sèrie, cal examinar quines d'aquestes sèries són sumables, o, en altres paraules, quines són les condicions de la seva convergència; i, en aquest aspecte, he establert regles generals que espero que siguin mereixedores d'una certa atenció.[106]

Fixem-nos que, en aquesta citació, queda prou palesa la importància que Cauchy confereix a les sèries.

I com sabem tots els qui ens hi hem apropat alguna vegada a la vida, en matemàtiques el rigor comença per definicions precises i continua per les deduccions lògiques rigoroses que hom pot fer amb les propietats dels objectes acuradament definits. Això obliga, doncs, Cauchy a donar aquestes definicions amb el màxim de rigor possible.

D'antuvi, «per evitar qualsevol mena de confusió en el llenguatge i l'escriptura algèbriques, en aquests preliminars fixarem els valors d'alguns termes i de certes notacions».[107] Introdueix —un avenç important en la notació posterior— el valor absolut, que anomena *valor numèric*.[108]

Tot seguit, introdueix el concepte de *límit* d'una quantitat variable:

> Anomenen quantitat «variable» la que és susceptibe de rebre diversos valors successius diferents.[109]
>
> Quan els valors successius atribuïts a una mateixa variable s'apropen indefinidament a un valor fix, de manera que s'aconsegueix que difereixin també tan poc com desitgem, aquest valor fix s'anomena *límit de tots els altres*.[110]

---

105. Vegeu [Cauc21, p. v].

106. Vegeu [Cauc21, p. v].

107. Vegeu [Cauc21, p. 1].

108. Vegeu [Cauc21, p. 2].

109. Vegeu [Cauc21, p. 4].

110. Vegeu [Cauc21, p. 4]. Val la pena observar que en la definició omet el recurs al valor absolut, una imprecisió que li portarà problemes ulteriors.

És hàbil per traduir els conceptes d'*infinitament petit* —«aquella variable que tendeix[111] a zero»— i de les *quantitats infinites*, $\pm\infty$ o *infinitament gran* —«aquella variable que creix [en valor absolut] més que qualsevol quantitat»—,[112] al concepte de *límit*. I introdueix el símbol de L'Huilier —lím—[113] per indicar el límit únic d'una successió o d'una funció.[114]

Veiem com usa el límit en la formulació i demostració del teorema següent:

Teorema 1.26 (Teorema I). *Si, per a valors creixents de* x, *la diferència* f(x + 1) − f(x) *convergeix a un límit* k, *la funció* $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}}$ *convergeix al mateix límit.*

Demostració. Suposem que k és finit i sigui $\epsilon > 0$ un nombre tan petit com vulguem. Podem aleshores donar al nombre h un valor tan considerable com calgui per tal que, si $z \geq h$, la diferència de la qual parlem estigui dins l'interval de límits $k - \epsilon$, $k + \epsilon$.

Sigui ara n un nombre natural arbitrari i considerem la mitjana aritmètica

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n}$$

de les quantitats $f(h+1) - f(h), f(h+2) - f(h+1), \ldots, f(h+r) - f(h+r-1), \ldots, f(h+n) - f(h+n-1)$. Es troba entre $k - \epsilon$ i $k + \epsilon$. O sigui,

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} = k + \alpha, \text{ amb } -\epsilon < \alpha < +\epsilon. \tag{3}$$

Fem ara $x = h + n$. Tindrem

$$\frac{f(x) - f(h)}{x - h} = k + \alpha, \tag{4}$$

d'on se'n conclou que $f(x) = f(h) + (x - h)(k + \alpha)$. I, en definitiva, resulta que

111. Usaren «tendeix» en lloc de «té límit».
112. Vegeu [Cauc21, p. 4-5].
113. Vegeu [Schul3, primera part].
114. Vegeu [Cauc21, p. 13].

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \left(1 - \frac{h}{x}\right)(k + \alpha). \tag{5}$$

Ara deixem fix h i fem créixer n, fent que tendeixi a l'∞, per tal que creixi x. Aleshores tant $\frac{f(h)}{x}$ com $\frac{h}{x}$ de (5) tendeixen a zero. En resulta que el segon membre de l'equació (5) tendeix a un límit de la forma $k + \alpha$ i, per la desigualtat de (3),

$$\frac{f(x)}{x} \text{ es troba entre } k - \epsilon \text{ i } k + \epsilon,$$

com volíem. $\square$

Seguidament, Cauchy escriu

$$\text{lím}\,\frac{f(x)}{x} = k = \text{lím}\,\big(f(x+1) - f(x)\big).$$[115]

S'adona també de la possibilitat que una quantitat variable tingui més d'un límit, aportant el concepte del que avui coneixem com a «punt o valor adherent» d'una variable o d'un successió.[116]

1.4.2. La continuïtat puntual d'una funció

La definició de *funció* no és excessivament original, però sí que ho és el fet de distingir si és una funció amb un o diversos valors. I, a la pàgina 21, precisa que «perquè la funció estigui ben determinada» cal que «cada valor de la variable [independent] determini el valor de la funció».[117]

---

115. Després [Cauc21, p. 56] analitza el cas en què $x = \infty$, que ometo perquè no afegeix res al que m'interessa posar de manifest: el maneig dels conceptes en l'obra de Cauchy.

116. Vegeu [Cauc21, p. 13]. Dóna com a exemples les funcions $\frac{1}{x}$ i $\sin\frac{1}{x}$; ambdues presenten dos límits: $\pm\infty$, la primera, i ± 1, la segona. Escriu $\text{límit}_{x\to 0}((\frac{1}{x}))$ i $\text{límit}_{x\to 0}((\sin\frac{1}{x}))$ per indicar aquesta duplicitat.

117. Vegeu [Cauc21, p. 21]. És el concepte que adoptarà Dirichlet a [Diri37, p. 140].

És, però, al capítol segon on Cauchy —després de precisar què entendrà per «quantitats infinitament petites i grans»—[118] introdueix el concepte de *continuïtat d'una funció*, amb una definició molt propera a la de Bolzano, però usant ja el concepte de *valor absolut*. Diu:

Definició 1.27 (Definició de *continuïtat* de Cauchy). *Sigui* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *una funció de la variable real de variable real* x, *definida unívocament en un interval* $[\alpha, \beta]$. *Direm que és contínua per a la variable* x *si, i només si, per cada valor de* x *intermedi entre els límits* α *i* β, *el «valor numèric» de la diferència* $\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{a})-\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *decreix infinitament amb [el decreixement de]* a.[119]

I, amb la intenció d'aclarir-la, en fa una descripció més lingüística.

Aquesta definició, la precisarà Weierstrass cinquanta anys més tard amb els termes següents:[120]

Definició 1.28 (Definició de *continuïtat* de Weierstrass). *Una quantitat* y *és una funció contínua d'una quantitat* x, *si elegida una quantitat* ϵ, *podem establir l'existència d'una quantitat* δ *de manera que, per a tot valor de* x *comprès entre* $\mathrm{x}_0-\delta \ldots \mathrm{x}_0+\delta$, *els valors corresponents de* y *es troben entre* $\mathrm{y}_0-\epsilon \ldots \mathrm{y}_0+\epsilon$.[121]

Podem adonar-nos que, per a Weierstrass, la continuïtat de la funció $y = f(x)$ és puntual; s'estableix per al punt $\big(x_0, y_0 := f(x_0)\big)$. Aquesta definició, tanmateix, la deixarà en la forma actual Heine.

Definició 1.29 (Definició de *continuïtat* de Heine). *Una funció* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *és contínua en el valor particular* $\mathrm{x} = \mathrm{X}$ *si, i només si, per a cada quantitat donada*

118. Vegeu [Cauc21, p. 26].
119. Vegeu [Cauc21, p. 34-35]. Val la pena observar que no dóna pas, de fet, la definició puntual estricta —o en tot cas no queda del tot clar—, sinó per als punts d'un interval tancat. Vegeu [Cauc09, nota 6, p. 26].
120. Gerhard Wanner [Hair96, p. 171] ofereix un dibuix realment agradable i suggeridor que vol expressar de forma gràfica el diàleg intel·lectual entre Cauchy i Weierstrass, un diàleg pregon que anirem retrobant d'ara endavant i que assoleix el punt àlgid en el cas de les sèries, com veurem a § 2.2, pàgina 66.
121. Vegeu [Weie74, p. 311].

per endavant ϵ, *petita, existeix un nombre positiu* η_0 *per al qual es compleix la propietat: per a cap* η *més petit que* η_0 *el valor absolut de* $\mathrm{f}(\mathrm{x}+\eta)-\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *no pot excedir mai* ϵ.

Una funció $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *és contínua del valor* $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ *al valor* $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ *si, i només si, per a cada un dels valors* $\mathrm{x}=\mathrm{X}$ *que hi ha entre* a *i* b, *inclosos* $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ *i* $\mathrm{x}=\mathrm{b}$, $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *és contínua.*[122]

Ja no queda cap mena de dubte de la qualitat «puntual» de la definició de *continuïtat* d'una funció, una qualitat que s'assoleix pas a pas, i del fet que la continuïtat en un interval $[a, b]$ es dóna quan es dóna la continuïtat puntual en cada un dels punts de $[a, b]$.

És, doncs, un concepte que s'inicia l'any 1817 i culmina l'any 1872 —calen cinquanta anys per assolir-ne la precisió que el rigor matemàtic demana als seus conceptes— gràcies a les aportacions de Weierstrass.[123]

Val la pena d'observar com n'és de lenta, en moltes ocasions, la comprensió total i correcta dels conceptes que van apareixent en el desenvolupament de la matemàtica.

Vegem de quina manera les nocions incipients poden portar a certs errors.

Una imprecisió de Cauchy. Cauchy, per tal d'estendre la continuïtat a les funcions de diverses variables, prova «fàcilment» —hom podria esperar que fos el més natural— que «si són contínues per a cada variable, separadament, ho són també com a funció de les dues variables»,[124] un resultat

---

122. Vegeu [Hein72, p. 182].
123. Alfred Prinsheim (Oława [Silèsia prussiana], 2 de setembre de 1850 – Zuric [Suïssa], 25 de juliol de 1941), a *Encyclopédie des sciences mathématiques*, afirma: «Weierstrass ha estat el primer que ha donat al límit d'una funció tota la precisió de la qual és susceptible» (citat a [Duga78, p. 64]). I el primer manual d'ensenyament de l'anàlisi [Stol93], d'Otto Stolz (Hall in Tirol [Àustria], 3 de juliol de 1842 – Innsbruck [Àustria], 25 d'octubre de 1905), s'inspira en les idees de Weierstrass i dóna la definició actual de *límit*, la qual, segons afirma, és la de Weierstrass.
124. Vegeu [Cauc21, p. 46].

erroni com posaran de manifest Carl Johannes Thomae[125] i H. A. Schwarz amb els exemples respectius següents:[126]

a) La funció $f(x,y) = \sin\left(4 \arctan \frac{x}{y}\right)$, definida a l'entorn del punt $(0,0)$, que és contínua per a $x = 0$ i per a $y = 0$ separadament, si fem $f(0,y) = f(x,0) = 0$.

b) La funció $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\,x\,y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ [127]

Vegem com raona Cauchy:[128]

Teorema 1.30. *Si* f(x, y) *és una funció de dues variables* x, y[129] *i suposem que en les proximitats de certs valors* X, Y *atribuïts a les variables,* f(x, y) *és contínua respecte de* x, *i és contínua respecte de* y. *Hom prova «fàcilment» que* f(x, y) *és contínua respecte de* (x, y) *a les proximitats del punt* (X, Y).

Demostració. Hem de veure simplement que $f(X+\alpha, Y+\beta) - f(X,Y)$ és infinitament petit. Fàcil:

$$f(X+\alpha, Y) - f(X,Y) \text{ i } f(X+\alpha, Y+\beta) - f(X+\alpha, Y)$$

són infinitament petits. La suma, doncs, també serà infinitament petita. És a dir,

---

125. Carl Johannes Tomae (Laucha an der Unstrut [Alemanya], 11 de desembre de 1840 – Jena [Alemanya], 1 d'abril de 1921).
126. Vegeu [Thom70, p. 15] i [Schw72, p. 220]. Vegeu també [Duga03, p. 97], d'on he extret tota aquesta informació.
127. Deixo, com a exercici, veure que efectivament són contraexemples. Un bon llibre de contraexemples en anàlisi matemàtica és [Gelb03]. També deixo al lector que analitzi i precisi què cal entendre per «funció contínua en un punt» quan la funció té dues o més variables. Schwarz [Schw72, p. 220-221], als inicis dels estudis matemàtics —curs de Weierstrass de 1861—, ja li donà la definició correcta, que és la que recull Heine a [Hein69, p. 46].
128. Observa quina és la mena d'error que l'insigne matemàtic francès comet.
129. Cauchy considera el cas general d'un cert nombre de variable $x, y, z \ldots$, i no ho enuncia com un teorema, sinó que ho exposa com a text explicatiu, però en fa la demostració. Vegeu [Cauc21, p. 45-46; i l'edició anglesa anotada, nota 15, p. 29].

$$\lim_{(x,y)\to(X,Y)} f(x,y) = f(X,Y). \qquad \square$$

I curiosament Cauchy és conscient del problema que plantegen «els valors singulars» de les funcions —aquells que no queden determinats per «la definició de la funció», als quals cal donar un valor específic i cal recórrer al límit o límits de la funció en aquell punt—. I diu:

> La recerca dels valors singulars de les funcions és una de les qüestions més importants i delicades de l'anàlisi: ofereix més o menys dificultats segons la naturalesa de les funcions i del nombre de variables que contenen.[130]

Alguns resultats de Weierstrass lligats a la continuïtat. Com ja he dit (pàgina 22), Weierstrass no coneixia cap demostració dels teoremes que actualment es coneixen com a teoremes de Bolzano-Weierstrass i Weierstrass, però l'any 1870, sí.[131] Així, Cantor[132] fa una demostració a la qual afegeix, com a nota:

> Aquesta demostració es basa, en l'essencial, en el teorema que s'exposa freqüentment i es demostra en el curs de matemàtica de Weierstrass:
>
> [Teorema de Weierstrass]. Una funció real contínua $\varphi(x)$, definida en l'interval $(a \dots b)$ [compresos els extrems], atany el màxim g dels valors que pot prendre, en almenys un punt x_0 de la variable, o sigui $\varphi(x_0) = g$.[133]

El primer esbós de demostració correcta de Weierstrass, el trobem en les notes de Georg Hettner[134] del curs inèdit de Weierstrass de 1874: el teorema de Bolzano-Weierstrass —usant el fet que tota col·lecció infinita de punts d'un interval té un punt d'acumulació—.[135] També hi trobem

---

130. Vegeu [Cauc21, p. 86-89].

131. Vegeu [Duga76, p. 6].

132. Georg Cantor (Sant Petersburg [Rússia], 3 de març de 1845 – Halle [Alemanya], 6 de gener de 1918.

133. Vegeu [Cant70, p. 141, nota] i també [Duga73, p. 77 i 120].

134. Georg Hettner (Jena [Alemanya], 21 d'agost de 1854 – Berlín [Alemanya], 24 de maig de 1914).

135. Vegeu [Weie74, p. 304-310].

una demostració del teorema de Weierstrass,[136] si bé la primera demostració l'ofereix Heine a *Die Elemente der Functionenlehre*.[137]

L'obra de Heine reconeix alhora, d'entrada, tant les febleses com la importància de les lliçons de Weierstrass, i —com ja he deixat palès abans— la necessitat de disposar d'una construcció acurada dels nombres reals; la presentació que fa es basa en idees que comparteix amb Cantor, a qui agraeix «les comunicacions orals que han exercit una influència considerable en la realització» de l'obra i a qui deu la «idea de definir» els nombres reals amb les successions de Cauchy.[138]

> L'avenç de la teoria de funcions es veu travat fonamentalment pel fet que àdhuc les proposicions elementals, si bé han estat demostrades per un savi d'una gran finesa, encara ara es posen en dubte, de manera que els resultats d'una recerca no són acceptats per tothom com a correctes, perquè necessiten basar-se en proposicions fonamentals indispensables. Considero que això es deu al fet que, vertaderament, els principis de Weierstrass s'han propagat de forma aïllada en cercles amplis, directament per les seves lliçons o per altres comunicacions orals, i indirectament per les llibretes d'apunts presos en les seves classes, però que mai no han estat publicades en una versió autentificada, de manera que no hi ha cap indret on hom pugui trobar-les *desenvolupades sistemàticament*.[139]

I tot seguit afegeix la raó essencial de les llacunes —que ja hem esmentat a bastament:

136. Vegeu [Weie74, p. 311-313].

137. Voldria indicar tanmateix el curs del matemàtic italià Dini, en particular, [Dini78, p. 46-51]. Atribueix a Weierstrass —ajuntant ambdós teoremes— el teorema següent: «La imatge d'un interval finit i tancat $[a,b]$ per una funció contínua en $[a,b]$ és un interval $[f(x_1),f(x_2)]$, essent x_1 i x_2, respectivament, els punts en els quals la funció atany el mínim i el màxim». Per establir els resultats elementals, però més notables, de les funcions contínues en un interval $[a,b]$, es basa —com reconeix de forma explícita— en un resultat de Cantor [Dini78, p. 47], que tractarem en el § 1.4.3. Esmento aquest text, malgrat que és posterior al de Heine, perquè les notacions, la formulació de les definicions i la forma de les demostracions dels teoremes són d'una precisió i modernitat que sembla actual.

138. Vegeu [Hein72, p. 173].

139. Vegeu [Hein72, p. 172].

La seva veritat reposa damunt de la definició, no gaire rigorosa, dels nombres irracionals.[140]

I seguidament justifica la necessitat de l'obra que presenta, que diu, «prové essencialment de comunicacions orals d'altres matemàtics i, en particular, de Weierstrass» de manera que, a ell, solament cal atribuir-li «l'exposició d'un curs en el qual el que importa és no deixar cap llacuna important», quelcom que aconsegueix fent una presentació acurada dels nombres irracionals, «en la qual ha reflexionat i resolt fa força temps».[141] I finalment, justifica l'obra «perquè, en una d'ulterior, farà falta trobar suport en aquests resultats».[142]

Estableix aleshores els teoremes fins ara esmentats: teorema de Bolzano-Weierstrass o del valor mitjà, i teorema de Weierstrass. I n'afegeix un altre que atribueix a Cantor.[143] Tanca així una aventura que, oberta per Bolzano l'any 1817, s'havia consolidat, com a intenció, en el curs de 1861, del qual tenim coneixement pels apunts de Schwarz, en què, d'alguna manera, Weierstrass fixa els objectius immediats; és, també, en aquest curs, on introdueix el concepte d'*entorn* (*Nachbarschaft*) d'un punt x_0: «Són els punts x per als quals la diferència $x - x_0$, en valor absolut, no sobrepassa mai una certa fita».[144]

1.4.3. La continuïtat uniforme d'una funció en un domini

Quan volem estendre la continuïtat puntual a un domini de punts, es planteja una qüestió que, per molt natural que ens pugui semblar, es concretà al

140. Vegeu [Hein72, p. 172].

141. L'exposa a la part A de [Hein72, p. 174-180], i reserva la part B a les funcions contínues. Quina capacitat de síntesi!

142. Vegeu [Hein72, p. 173-188].

143. Tots aquests resultats es deuen a Weierstrass, diu de forma insistent Heine, i afirma que ell els ha conegut a través de Schwarz i Cantor [Hein72, nota a peu de pàgina, p. 182].

144. Vegeu [Duga73, p. 120-121], o [Weie61, p. 310-311].

Heinrich Heine[145]

si de l'escola de Weierstrass; en concret, en Heinrich Heine, en un resultat que ja no atribueix a altri.

En la definició de continuïtat d'una funció en un interval $[a, b]$, atès que, de fet, és puntual, «per a cada $\epsilon > 0$, existeix un $\delta(\epsilon, x_0)$, per a cada $x_0 \in [a, b]$». És a dir, per a cada ϵ no hi ha cap garantia que existeixi un δ que valgui per a tots i cada un dels punts de $[a, b]$.

Tres exemples prou senzills són:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0, 1]$ i *b)* $g(x) = x^2$ en $[0, \infty)$: en el primer cas, cal empetitir més i més δ quan ens apropem a $x = 0$; en el segon, això passa quan x es fa gran.

Si considerem, en canvi, *c)* $h(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$, hi ha un $\delta_{\text{mín}}$ que, fixat ϵ, val per a tots els $x \in [0, 1]$.[146]

Quan això darrer passa, diem que la funció és «uniforme contínua». És un concepte que trobem en les lliçons de Dirchlet de 1854 i en les de Weierstrass de 1861, però la primera publicació és la de Heine.

Definició 1.31. *Una funció* f(x) *[real de variable real] és uniformement contínua des de* a *fins a* b *en* A *si, i només si, per a qualsevol quantitat positiva donada per endavant* ϵ, *per petita que sigui, existeix una altra quantitat positiva* η_0 *per a la qual, per a tots els valors positius* η *més petits que* η_0, $\mathrm{f(x \pm \eta) - f(x)}$ *és més petita que* ϵ. *Qualsevol que sigui el valor que prengui* x, *sempre que* $\mathrm{x \pm \eta}$ *i* x *pertanyin ambdós a la regió que hi ha entre* a *i* b, *també* η_0 *ha de satisfer la propietat exigida.*[147]

I és en aquest context que apareix un teorema nou, molt important: el teorema de Heine-Borel. Vegem-ne la motivació.

---

145. Heinrich Heine (Düsseldorf [Alemanya], 13 de desembre de 1797 – París [França], 17 de febrer de 1856).

146. Són exercicis simples i fàcils de constatar.

147. Vegeu [Hein72, p. 184]. Heine ja l'havia publicat a [Hein69, p. 353]. Observem que, malgrat la precisió, Heine oblida l'ús del valor absolut.

Teorema 1.32. *Si* f *és contínua de* x = a *fins a* x = b, *aleshores* f *és uniformement contínua.*[148]

Demostració. La demostració de Heine procedeix així: pren una partició de l'interval $[a, b]$ determinada per punts [creixents] $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de manera que, per a un $\epsilon > 0$ donat,

$$\left.\begin{array}{r} |f(x_1) - f(a)| = 3\,\epsilon \;\wedge\; x \in [a, x_1] \to |f(x) - f(a)| \leq 3\,\epsilon, \\ |f(x_2) - f(x_1)| = 3\,\epsilon \;\wedge\; x \in [x_1, x_2] \to |f(x) - f(x_1)| \leq 3\,\epsilon, \\ \vdots \qquad\qquad \\ x \in [x_{n-1}, b] \to |f(x) - f(x_{n-1})| < 3\,\epsilon. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Si hi hagués una infinitat de punts x_r en l'interval $[a, b]$, aleshores, pel teorema de Bolzano-Weierstrass, hi hauria un punt d'acumulació X dins l'interval $[a, b]$.

Sigui ara η_0 amb la propietat que

$$0 < \eta < \eta_0 \to |f(X) - f(X - \eta)| < \epsilon. \tag{7}$$

Ara bé, els punts $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ pertanyen a l'interval $[X - \eta, X]$, si agafem n suficientment gran. Aleshores, per la desigualtat triangular i (7), tindríem:

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq |f(x_{n+1}) - f(X)| + |f(x_n) - f(X)| < 2\,\epsilon, \tag{8}$$

en contra de la definició dels punts x_r. Solament hi ha, doncs, un nombre finit de punts x_r. Heus ací la primera aparició del teorema Heine-Borel.[149] Aquest resultat permet que el teorema que es proposava quedi demostrat.□

Seria, però, l'any 1895 quan Émile Borel[150] establiria per primera vegada el resultat essencial que avui coneixem com el teorema de Heine-Borel.[151]

---

148. Vegeu [Hein72, p. 188].

149. L'any 1880, Weierstrass demostra a [Weie80, p. 157-158] un teorema basant-se en el fet que un compacte del pla es pot recobrir amb un nombre finit de discs oberts.

150. Vegeu [Bore95, p. 51-52].

151. Per a una exposició històrica del teorema, vegeu *http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/an-analysis-of-the-first-proofs-of-the-heine-borel-theorem-borels-proof*.

Hom pot considerar aquest lema com a evident; i, malgrat tot, en donaré una demostració per la importància que té, basant-me en un teorema prou interessant. És aquest: *Si damunt d'una recta tenim una infinitat d'intervals, de manera que cada punt de la recta sigui interior a un d'aquests intervals, hom pot determinar efectivament un* nombre limitat *d'intervals elegits entre els que s'han donat amb la mateixa propietat (tot punt de la recta és a l'interior d'un d'aquests intervals)*. Cal entendre que la paraula *interior* es pren en el sentit estricte que s'exclouen els extrems; és fàcil constatar que sense aquesta condició el resultat és fals. Hom podria demostrar directament que tot punt de la recta es troba necessàriament a l'interior d'un interval de rang limitat (que els suposem numerats d'acord amb una llei), però la demostració següent sembla més avantatjosa atesa la naturalesa de les coses.

Partim d'un extrem A de la recta, i sigui A_iB_i un dels intervals que conté el punt A. Sigui $A_{i_1}B_{i_1}$ un dels intervals que conté el punt $B_i, A_{i_2}B_{i_2}$ un dels que conté el punt B_{i_1}, etc. Suposem, és clar, que el punt A designa l'extrem esquerre dels intervals i B l'extrem dret. Els punts $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3} \ldots$, si no assoleixen l'extrem B de la recta —i aleshores el teorema quedaria provat— té un límit B_{i_w} i es troba dins d'un interval $A_{i_{w+1}}, B_{i_{w+1}}$ de manera que $A_{i_{w+1}}$ es troba entre $B_{i_{m-1}}$ i B_{i_m}. Podem, doncs, refusar els intervals d'extrems $A_{i_{m+k}}, B_{i_{m+k}}$ i tindrem una successió ininterrompuda d'intervals de la recta. A partir d'aquest nou inici refem el raonament anterior, passant al límit quan calgui i mostrant que aleshores pot conservar només una quantitat infinita dels intervals considerats. Afirmo que atraparem necessàriament l'extren B de la recta, ja que si no fos així obtindríem una sèrie infinita d'intervals amb extrems

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_w}, \cdots, B_{i_{2w}}, \cdots, B_{i_{w^2}}, \cdots, B_{i_{w^w}}, \cdots$$

essent els índexs *tots* els nombres de la segona classe [és a dir, ordinals límits] (definits per Cantor). Però aquests índexs són també en un cert ordre els nombres naturals, en la totalitat o en part. I això és una contradicció, ja que la segona classe de nombres constitueix un conjunt de segona classe.

Així, emprant el procediment regular indicat, s'arribarà necessàriament a *determinar efectivament* un nombre finit d'intervals que recobrirà tota la recta. Fixem-nos que el principi de la demostració recau sobretot en el fet que el punt A_{i_w} es troba necessàriament a l'esquerra del punt B_{i_w}, quelcom que no podem afirmar si l'expressió *interior* s'estengués als extrems. És, a més, fàcil veure que, en aquest cas, el teorema és fals.[152]

152. Vegeu [Bore95, p. 51-52].

Tres anys més tard, en farà una demostració basada en el «teorema dels intervals encaixats».[153] Val a dir que serà en el curs Peccot de 1902-1903 sobre integració quan Henri Lebesgue[154] indica que la hipòtesi que el conjunt sigui numerable és supèrflua.[155] És, però, en un article datat el 26 de març de 1904 titulat «El teorema de Heine-Borel» on Oswald Veblen[156] indica que el teorema de Borel es trobava ja implícit en la demostració de Heine de la continuïtat uniforme. A més, fa notar que aquest teorema implica el teorema de Weierstrass afirmant que, de tota successió de punts d'un interval tancat i fitat, en podem extreure una subsuccessió que convergeix en un punt d'aquest interval. Indica també que el teorema de Heine-Borel és una conseqüència del «teorema de la talladura de Dedekind».[157]

Aquest teorema que, a voltes, anomenem teorema de Borel-Lebesgue i a voltes teorema de Heine-Borel, l'hauríem d'anomenar «teorema de Heine-Borel-Lebesgue».

---

153. Vegeu [Bore98, p. 42-43]. Aquesta és una de les demostracions que trobem en els textos reglats d'anàli actuals. Per això val la pena de reproduir-la. «En efecte, si numerem els intervals segons una llei, hi ha un nombre N de manera que tots els punts de la recta són a l'interior dels intervals d'índex $\leq N$. Perquè, si no fos així, aleshores, per a cada n, hi hauria un punt que no estaria en cap dels intervals d'índex superior a n. És clar que, si dividim el segment de recta en dues parts iguals, almenys una d'elles tindrà la mateixa propietat, ja que si per a cada un d'ells existís un nombre —com ara N' i N''— el suprem dels dos serviria per al segment de recta. Seguim el procediment, i en cada cas agafem el segment que no té associat el nombre N. Tindrem una successió de segments encaixats cada cop més i més petits amb la propietat següent: *per a cada* n, *hi ha un punt que no es troba en cap interval de rang inferior a* n. Però aquests segments encaixats, cada un d'amplada la meitat de l'anterior, defineixen un punt límit α. Per hipòtesi, es troba a l'interior d'un interval de rang k ja que el nombre d'intervals l'hem suposat numerable. *Els extrems* a_k, b_k *d'aquest interval són diferents de* α. Aquest interval $[a_k, b_k]$ comprèn del tot un dels intervals que contenen α i això és absurd perquè els punts d'aquest segment estarien tots dins l'interval $[a_k, b_k]$ l'índex del qual —el «rang», diu Borel— és un nombre fix. En resulta que N ha d'existir».

154. Henri Léon Lebesgue (Beauvais [França], 28 de juny de 1875 – París [França], 26 de juliol de 1941).

155. Vegeu [Duga89, p. 99].

156. Oswald Veblen (Decorah [Iowa, EUA], 24 de juny de 1880 – Brooklin [Maine, EUA], 10 d'agost de 1960).

157. Vegeu [Vebl04, p. 100-101]. Per a més informació, vegeu l'adreça electrònica de la nota 151, o bé [Duga03, p. 272-277].

1.4.4. La derivació en Cauchy i Weierstrass

Si bé el concepte informal de *derivada* —pensat com a pendent de la tangent geomètrica a una corba en un punt— i formalment en el cas de les funcions polinòmiques s'havia estudiat ja abans del text de Cauchy,[158] cal esperar aquesta obra per disposar de la definició basada en el límit.

És curiós observar que el primer recull de notes de les lliçons de Weierstrass —el que féu Schwarz— es tituli *Differentialrechnung*, *Sommer Semester 1861*, com si es volgués posar de manifest no tant les qüestions relatives a la continuïtat, sinó a la diferenciació de les funcions i de les sèries de funcions. Per això tancaré aquest paràgraf indicant algunes qüestions relatives a la derivació de funcions reals de variable real, fent èmfasi en les aportacions de Cauchy i Weierstrass.

Cauchy. En el text de Cauchy de 1821, llegim:

> D'entre les fraccions que convergeixen quan la variable α tendeix a zero, cal considerar la següent:
> $$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}, \tag{9}$$
> sempre que a x se li atribueixi un valor a l'entorn del qual $f(x)$ sigui contínua.
>
> Amb aquestes condicions, la diferència $f(x+\alpha)-f(x)$ és una quantitat petita. Podem observar que aquesta quantitat és un infinitament petit de primer ordre, de manera que el quocient (9) convergeix de forma ordinària, quan el valor numèric de α disminueix, vers un límit petit *diferent de zero*.[159]

Òbviament, la derivabilitat implica la continuïtat.[160]

Val a dir que on Cauchy recull el càlcul diferencial d'una forma explícita és als textos de 1823 i 1829.[161] A les lliçons setena i quarta, respec-

158. Recordem, per exemple, que Rolle havia establert l'antecedent del teorema de Rolle [Roll90, llibre II, capítol V, p. 124 i següents], i Lagrange el teorema del valor mitjà [Lagr97, p. 83; i 90-95].

159. Vegeu [Cauc21, p. 65].

160. Vegeu [Cauc21, p. 65] o [Cauc29, p. 9].

161. Vegeu [Cauc23] i [Cauc29].

tivament, estableix el teorema del valor mitjà o «dels increments finits».[162] Les demostracions que en fa estan plenes de llacunes.[163] Tanmateix, en una addenda del *Resumé* el dedueix —com a corol·lari— del que avui anomenem «teorema de Cauchy» del càlcul diferencial —que demostra d'una manera força rigorosa per a l'època—.[164]

Weierstrass. Caldrà esperar el text de Weierstrass que proporciona Schwarz per afinar una mica més en aquestes qüestions.

D'entrada fixem-nos en la manera com Weierstrass —segons Schwarz— defineix la derivada d'una funció: «La variació total $f(x+h) - f(x)$ [...] es pot descompondre en dos termes [...]».[165] Ho podem formalitzar així:

Definició 1.33. *Una funció* $\mathrm{f(x)}$ *és diferenciable en el punt* $\mathrm{x_0}$ *si, i només si, existeixen un número* $\mathrm{f'(x_0)}$ *i una funció* $\mathrm{r(x)}$, *contínua en el punt* $\mathrm{x_0}$ *i amb* $\mathrm{r(x_0)} = 0$, *de manera que*

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f(x_0)} + \mathrm{f'(x_0)}\left(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}\right) + \mathrm{r(x)}\left(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}\right). \tag{10}$$

Aquesta definició té l'avantatge que no necessita el límit en introduir la funció contínua $r(x)$; a més, mostra de forma explícita la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt x_0: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Aquesta definició implica de forma trivial la continuïtat de les funcions diferenciables —ambdós conceptes definits puntualment— i encara serà la base damunt la qual s'establirà la teoria de la diferenciabilitat quan les funcions siguin de dues variables.

Li permet, a més, establir amb facilitat el lema següent:

Lema 1.34 (Lema de Weierstrass). *Si* $\mathrm{f(x)}$ *i* $\mathrm{f'(x)}$ *prenen valors finits i ambdues són contínues a l'interval* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *i, a més,* $\mathrm{f'(x)} > 0$ *en* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, *aleshores* $\mathrm{f(b)} > \mathrm{f(a)}$ *i són, respectivament, els valors màxim i mínim de* $\mathrm{f(x)}$ *a* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

---

162. Vegeu [Cauc23, lliçó setena, p. 25] i [Cauc29, lliçó quarta, p. 36].
163. Vegeu [Flet74, p. 68] i [Grat80, edició castellana, p. 149].
164. Vegeu [Cauc23, *Addenda*, edició electrònica, p. 243-256].
165. Vegeu [Weie61, p. 5].

Demostració. És clar que, per a cada x i h, amb $x, x+h \in [a,b]$, $f(x+h) - f(x) > 0$. És a dir, $f(x)$ creix, dins $[a,b]$ amb x. $\square$

La derivació de Weierstrass en paraules de Schwarz. Aquesta és la definició que usa Schwarz en la carta que adreça a Cantor l'any 1870 —sempre com a seguidor de la inspiració weierstrassiana, «tot això ho faig seguint les notes del curs de Weierstrass»— on estableix el teorema següent:[166]

Hermann A. Schwarz[167]

Teorema 1.35 (Teorema de Schwarz-Weierstrass). *Si, per a un* x_0 *específic de l'interior de l'interval* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, *la derivada de la funció* $\mathrm{f(x)}$ *és no nula, aleshores, sempre hi ha valors de* x *de l'entorn de* x_0 *per als quals* $\mathrm{f(x)} > \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ *i d'altres per als quals* $\mathrm{f(x)} < \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$.

Per fer-ne una demostració correcta li calen els lemes següents:

Lema 1.36 (I. *Lema*). *Si, per a cada* $\mathrm{x} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\mathrm{f(x+h)} - \mathrm{f(x)}}{\mathrm{h}} = 0$, *aleshores* $\mathrm{f(x)}$ *és constant.*

Demostració. Suposem que $f'(x_0) \neq 0$ i sigui x de l'interval de x_0; és a dir, $x = x_0 + h$. Aleshores

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\left(f'(x_0) + r(x)\right),$$

on $r(x) := r(x_0, h)$ és una certa funció que per a tot x es fa petita amb h. Per hipòtesi, podem aconseguir que $r(x_0, h) \leq f'(x_0)$, agafant h prou petit. Agafant, doncs, $|h| < \delta$, resulta que $f'(x_0) + r(x_0, h)$ i $f'(x_0)$ tenen el mateix signe. Per tant, la diferència $f(x_0 + h) - f(x_0)$ canvia de signe amb h. $\square$

166. Vegeu [Mesc61, edició anglesa, p. 87-89].
167. Karl Hermann Amandus Schwarz (Hermsdorf [Silèsia, Prússia], 23 de gener de 1843 – Berlín [Alemanya], 30 de novembre de 1921).

Lema 1.37 (II. Teorema de Rolle). *Si, per a dos valors* x_1 *i* x_2, $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$, *aleshores entre* x_1 *i* x_2 *hi ha un* x *per al qual* $\mathrm{f}'(x)$ *s'anul·la.*

Demostració. Hi ha un x_3 entre x_1 i x_2 per al qual $f(x_3) \neq f(x_1)$, ja que, altrament, la funció fóra constant entre x_1 i x_2. Si $f(x_3)$ és més petita (més gran) que $f(x_1)$, hi haurà una fita inferior (superior) per als $f(x)$, amb $x_1 \leq x \leq x_2$. Aquesta fita ho és també d'una regió prou petita que contingui el punt x_0. Per la continuïtat de $f(x)$, la fita serà atrapada per $f(x)$ en el punt x_0. Però aleshores $f'(x_0) = 0$, en virtut del lema I, ja que altrament $f(x)$ prendria valors positius i negatius a l'entorn de x_0 i això contradiria el fet que $f(x_0)$ és un mínim (màxim). □

Lema 1.38 (III. *Lema*). *Si, a l'interval* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) > 0$, *aleshores* $\mathrm{f}(\mathrm{b}) > \mathrm{f}(\mathrm{a})$, *i* $\mathrm{f}(\mathrm{b})$ *i* $\mathrm{f}(\mathrm{a})$ *són els valors màxim i mínim que pren* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *en* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Demostració. Pel lema II, no és possible que, per a cap parella $x_1, x_2 \in [a, b]$, que $f(x_1) = f(x_2)$. Hi ha un suprem i un ínfim dels valors de $f(x)$ (per un argument com el que hem usat al lema II). No pot ser que $f(x_o)$ sigui màxim o mínim en $x_0 \in (a, b)$, ja que, si $f(x_o)$ fos màxim o mínim, aleshores $f'(x_0) = 0$. Per tant, el màxim i el mínim s'atrapen en els punts a i b. Ara només cal veure quin dels dos és el més gran. □

Demostració del teorema Schwarz-Weierstrass. Considerem les dues funcions, amb $\lambda > 0$ petit.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \lambda\,(x-a) \text{ i } h(x) = f(x) - f(a) + \lambda\,(x-a).$$

Per la hipòtesi, $g'(x) = -\lambda < 0$ i $h'(x) = \lambda > 0$ i $g(a) = h(a) = 0$. D'acord amb el lema III $g(x) < 0$ i $h(x) > 0$, per a tot x. Per tant,

$$|f(b) - f(a)| < \lambda\,(b-a), \text{ amb } \lambda \text{ petit però arbitrari.} \tag{11}$$

D'on en resulta que $f(b) = f(a)$. Ara bé, res no canvia si canviem b per qualsevol altre valor x de (a, b). En definitiva, la funció $f(x)$ és constant. □

Schwarz escriu, satisfet: «La demostració anterior és totalment correcta i constitueix el fonament del càlcul diferencial i integral».

Tres paraules sobre la fórmula de Taylor, un tema delicat. Aquest resultat el posposo i en parlaré a la secció § 3.1, pàgina 84, encara que el seu context històric sigui aquest.

2. Cauchy i Weierstrass: les sèries i les seves possibilitats

Una altra qüestió que va permetre a Weierstrass precisar i matisar conceptes foren les sèries de funcions.

2.1. Les sèries en el Cours d'Analyse *de Cauchy*

Una de les aportacions més notables del *Cours d'Analyse* és el tractament de les sèries, per la precisió amb la qual n'estableix i destria els conceptes, i fins i tot per les llacunes que s'obren en la seva presentació i que caldrà anar eixugant.

Estableix la definició d'una *sèrie*, barrejant-la amb la de *successió*:

Definició 2.1. *Anomenem* sèrie *una successió indefinida de quantitats*

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots \tag{12}$$

que deriven les unes de les altres d'acord amb una llei ben determinada. Aquestes quantitats són els diferents termes de la sèrie que es considera.

Sigui

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} \tag{13}$$

la suma dels n *primers termes, essent* n *un nombre natural arbitrari.*[168]

La convergència de la sèrie és la convergència de la successió s_n.

Definició 2.2. *Si, per a valors creixents de* n, *la suma* s_n *s'apropa tant com vulguem a un cert límit* s, *diem que la sèrie «és convergent» i que el límit* s *«és la*

168. Vegeu [Cauc21, p. 114].

suma». I si pel contrari, per a valors creixents de n, *la suma* $\mathrm{s_n}$ *no s'apropa tant com vulguem a cap límit fix, direm que la sèrie és «divergent».*[169]

I tot seguit introdueix el criteri de Cauchy de la convergència d'una sèrie numèrica, un dels pocs criteris que proporciona una condició necessària i suficient per a la convergència d'una sèrie.[170] De fet, Cauchy imposa que la successió s_n sigui una «successió fonamental» —en el sentit de Cantor—, o una «successió de Cauchy».

Teorema 2.3. *Una sèrie* $\mathrm{u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots}$ *és convergent si, i només si, per a* n *gran, la suma de tants termes com vulguem de la successió* $\mathrm{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots}$ *des del primer acabin essent constantment valors numèrics inferiors a qualsevol quantitat assignada.*[171]

És a dir, en termes weierstrassians: per a cada $\epsilon > 0$, *existeix un* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *que, per a* $\mathrm{n, n+k > N}$, $\left|\mathrm{a_n} + \cdots + \mathrm{a_{n+k}}\right| < \epsilon$.

Comentari a la demostració. Estableix que la condició és necessària. I en el decurs de la demostració diu: «u_n decreix indefinidament, però això no garanteix la convergència de la sèrie». Cal la condició de l'enunciat.

Redueix la suficiència a les paraules: «Si es compleix la condició aleshores la convergència està garantida».[172] □

Òbviament s'adona que aquest criteri permet demostrar la divergència de la «sèrie harmònica»: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.[173]

No triga gaire a considerar el cas en què els elements u_n de la sèrie són funcions d'una mateixa variable x; o sigui, de la forma $u_n(x)$. Òbviament, per a cada x fix, tenim una sèrie numèrica i val tot el que abans ha dit.

Aleshores sorgeix la qüestió que cal esmentar:

Teorema 2.4 (Teorema I de Cauchy). *Quan els termes de la sèrie (12) són funcions d'una mateixa variable, contínues respecte d'aquesta variable en un*

169. Vegeu [Cauc21, p. 114].
170. Recordem —ja ho he dit a la pàgina 15— que el criteri ja l'havia indicat Bolzano.
171. Vegeu [Cauc21, p. 115-116].
172. Aquesta condició requereix haver definit amb precisió els nombres reals.
173. Vegeu [Cauc21, p. 117].

entorn d'un valor particular [x_0] de la variable per al qual la sèrie és convergent,[174] *aleshores la suma* s *de la sèrie serà també contínua en aquest valor particular [x_0] de la variable.*[175]

Demostració. Introduïm l'n-«residu» $r_n(x)$ de la sèrie convergent $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de suma $s(x)$; és a dir, per a cada x, $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$. Tenim tres termes, $s_n(x)$, $r_n(x)$ i $s(x)$.

1. Òbviament, $s_n(x)$ és una funció contínua en l'esmentat entorn del valor x_0. Traduïm-ho:
   Donat $\epsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ que, si $|\alpha| < \delta$, aleshores
   $$\left|s_n\big(x+\alpha\big) - s_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{4}, \text{ per a tot } n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$
2. Atès que la sèrie $s_n(x)$ és convergent, tenim que $r_n(x) = s(x) - s_n(s)$ tendeix a zero. Traduïm-ho:
   Donat $\epsilon > 0$, existeix un $N \in \mathbb{N}$ que, per a $n > N$,
   $$\left|r_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{15}$$
3. Diu: «[Per la continuïtat de les funcions $u_n(x)$,] el creixement dels $r_n(x)$ serà insensible al mateix temps que ho és $r_n(x)$, quan n és suficientment gran». Traduïm-ho:
   Donat $\epsilon > 0$, existeix un $N \in \mathbb{N}$ que, per a $n > N$,
   $$\left|r_n(x+\alpha)\right| < \frac{\epsilon}{4}, \text{ per a } |\alpha| \leq \delta. \tag{16}$$

   Escrivim
   $$\begin{aligned} s(x+\alpha) - s(x) &= s_n(x+\alpha) + r_n(x+\alpha) - s_n(x) - r_n(x) \\ &= s_n(x+\alpha) - s_n(x) - r_n(x) + r_n(x+\alpha). \end{aligned} \tag{17}$$

174. Observem que es tracta de la convergència puntual.
175. Vegeu [Cauc21, p. 120].

Aleshores, en el supòsit que les afirmacions (14), (15) i (16) siguin correctes, la tesi és clara, aplicant la desigualtat triangular al valor absolut del membre de l'esquerra de (17).

Donat $\epsilon > 0$, existeix un $N \in \mathbb{N}$ que, per a $n > N$,

$$\left|s_n(x+\alpha) - s(x)\right| < \left|s_n(x+\alpha) - s_n(x)\right| + \left|r_n(x+\alpha)\right| + \left|r_n(x)\right| < \epsilon$$

per a $|\alpha| \leq \delta$. □

Ara bé, la desigualtat (14) —que és certa per a cada $n \in \mathbb{N}$—, tal com l'enuncia Cauchy, és falsa[176] perquè suposa que n és independent de δ.

Considerem l'exemple de la sèrie de terme general

$$u_n = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}, \text{ amb } n \in \mathbb{N}^*.$$

En resulta que

$$s_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{x}.$$

Per matenir la validesa de (14) cal que, sigui qui sigui $\epsilon > 0$, existeixi un $\delta > 0$ que valgui per a tots els índexs n; és a dir,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|s_n(\alpha)\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| < \epsilon,$$

que és impossible.

A més, la desigualtat (16) diu que $N := N(\epsilon)$ no depèn del punt x, i això, si la sèrie és solament (puntualment) convergent, en general, és fals.

Cauchy, tanmateix, dóna, com a exemple de la vàlua del teorema, la funció $s(x) = \frac{1}{1-x}$, amb $x \in (-1, +1)$, que és el límit de les sumes parcials $s_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.[177]

176. Per a una discussió, vegeu [Lutz03, p. 168-169], o bé [Duga03, p. 99-100].

177. Vegeu [Cauc21, p. 120-121].

Això suggereix que Cauchy pensava en funcions generades per sèries enteres.

2.2. *Tres aportacions de Weierstrass relacionades amb les sèries de funcions*

En aquest camp —el de les sèries de funcions— Weierstrass té un paper molt important que posaré de manifest amb tres ítems. Les lliga amb la continuïtat, amb la derivabilitat[178] i amb la creació de noves funcions amb propietats particulars.

2.2.1. Weierstrass *versus* Cauchy

Encara que Cauchy, l'any 1853, fa una revisió del teorema anterior i n'ofereix una demostració usant la «convergència uniforme», la qual no defineix de forma explícita, però sí, en canvi, de forma implícita.

> Convinguem que, si atribuïm a n un valor prou gran, hom pot aconseguir, *per a tots els valors x* compresos entre els límits donats, que el mòdul de l'expressió $s_{n'}(x) - s_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n'-1}(x)$ (sigui quin sigui el valor de n'), i, per tant, el mòdul de $r_n(x)$, sigui inferior a un nombre $\epsilon > 0$, donat per endavant.[179]

Aquesta correcció és el fruit que li motivà una reflexió a partir d'una observació que li féu Bouquet et Briot.[180]

La definició explícita de la convergència uniforme d'una sèrie, la trobem, però, ja abans, en l'obra de Weierstrass anterior, de 1841, en la qual introdueix el terme actual *gleichmäch Convergenz*,[181] i en la definició usa

178. I també amb la integrabilitat, com indicaré més endavant succintament.

179. Vegeu [Cauc53, p. 32-33].

180. Vegeu [Cauc53, p. 31].

181. Vegeu [Weie41, p. 68-69].

el que avui coneixem com el «criteri de convergència de Weierstrass» o «criteri M de Weierstrass».[182]

Una conseqüència immediata —implícita en la definició— és un criteri de fitació superior. En concret:

Teorema 2.5 (Criteri M de Weierstrass). *Si* $\left|\mathrm{f_n(x)}\right| \leq \mathrm{c_n}$, *per a tot* $\mathrm{x} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, *i la sèrie numèrica* $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{c_n}$ *és convergent, aleshores la sèrie* $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{f_n(x)}$ *és uniformement convergent.*[183]

Demostració. És un simple corol·lari del criteri de Cauchy de les sèries numèriques i de la definició de *convergència uniforme*. Per la desigualtat triangular tenim que $\left|s_{n+k}(x) - s_n(x)\right| \leq c_{n+k} + \cdots + c_{n+1} < \epsilon$. $\square$

En les notes de Schwarz de 1861, hi trobem la definició de *convergència uniforme* —salvant alguns detalls— tal com es dóna en els textos d'anàlisi actuals.

> Analitzem ara la convergència uniforme.
>
> Sigui
>
> $$f(x) = f_1(x) + f_(x) + f_3(x) + \cdots \text{ convergent per a tot } x \text{ entre } a \text{ i } b;$$
>
> és a dir, si la suma
>
> $$f_n(x) + f_{n+1}(x) + f_{n+2} + \cdots + f_{n+r}(x)$$
>
> a partir d'un n i per a tot r i tot x es fa més petit que qualsevol valor petit.[184]

---

182. L'article —que tracta funcions de variable complexa— comença així:

> Sigui $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n x^n$ una sèrie de potències de coeficients donats. Aleshores, si r és un nombre real positiu que cau dins del cercle de convergència de la sèrie, el valor absolut de $F(x)$ té, si hom dóna a x tots els valors per als quals $|x| = r$, una fita superior anomenada g; i el teorema estableix que $\left|A_\mu\right| \leq g\, r^{-\mu}$ per a cada valor enter de μ [Weie41, p. 67].

183. Vegeu [Weie80, p. 202, nota a peu de pàgina].

184. Vegeu [Weie61, p. 65], a [Duga73, p. 123].

I afegeix que també podem acceptar que el residu $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ compleixi: per a cada $\epsilon > 0$ existeix un cert N, que $\left|r_n(x)\right| < \epsilon$, per a tot $n > N$ i per a tot x.[185] Ras i curt diu:

Definició 2.6. *Una sèrie infinita* $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{u_n(x)}$ *convergeix uniformement en* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *si, i només si, per a cada* $\epsilon > 0$, *hi ha un* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ *(que depèn de* ϵ*) de manera que, per a cada* $\mathrm{x} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *1)* $\left|\mathrm{s_{n,n+h}(x)}\right| < \epsilon$, *o bé 2)* $\left|\mathrm{r_n(x)}\right| < \epsilon$, *on* $\mathrm{s_{n,n+h}(x)} = \mathrm{u_n(x)} + \cdots + \mathrm{u_{n+h}}$ *i* $\mathrm{r_n(x)} = \mathrm{u_n(x)} + \mathrm{u}_{\mathrm{n}+\mathit{1}} + \cdots + \mathrm{u_{n+h}} + \cdots$.

Després demostra el teorema següent:

Teorema 2.7 (Teorema de Cauchy-Weierstrass). *Sigui* $\left\{\mathrm{s_n(x)}\right\}_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ *la successió de les sumes parcials de la sèrie de terme general* $\mathrm{u_n(x)}$*: suposem que, per a cada* n, *el terme* $\mathrm{u_n(x)}$ *és una funció contínua a* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. *Suposem que* $\mathrm{s_n(x)}$ *convergeix uniforment cap a* $\mathrm{s(x)}$. *Aleshores* $\mathrm{s(x)}$ *és contínua en* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.[186]

Demostració. Hem de computar $\left|s(x) - s(x+h)\right|$ per a cada $x, x+h \in [a, b]$.

Per la desigualtat triangular tenim que $\left|s(x) - s(x_0)\right|$

$$\left|s(x+h) - s(x)\right| \leq \left|s_n(x+h) - s_n(x)\right| + \left|r_n(x+h)\right| + \left|r_n(x)\right|, \tag{18}$$

atès que $s(x+h) = s_n(x+h) + r_n(x+h)$ i $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Els termes $\left|r_n(z)\right|$, per a $z := x + h$ i $z := x$ són, per la convergència uniforme, respectivament, $< \epsilon_1$ i $< \epsilon_2$.

El valor absolut del terme $\left|s_n(x+h) - s_n(x)\right| < \epsilon_3$ per la continuïtat de $s_n(x)$. Això acaba la demostració.[187] □

Val la pena fer tres observacions.

1. Weierstrass usa la tècnica de «trossejar» ϵ i acceptar, com a ϵ, $\epsilon_1 + \epsilon_2$ o com a $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. El curiós d'això és que Schwarz pren nota explícita de l'ús d'aquest recurs.[188]

---

185. Deixeu-m'hi insistir: «N solament depèn ara de ϵ, però no depèn per a res de X». Vegeu el comentari sobre la continuïtat uniforme de Heine, pàgines 53-54.

186. Vegeu [Weie61, p. 65-66].

187. Compareu-la amb la de Cauchy, pàgina 63. Què ha canviat?

188. Vegeu [Weie61, p. 7]. També Dugac considera que és un detall que val la pena posar en relleu [Duga03, p. 126].

2. Si bé hem donat la definició per a funcions que són sumes de sèries, la podríem haver donat simplement per a successions de funcions $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, definides a $[a, b]$.
3. Val la pena fer-se la pregunta següent: Pot ser que la successió $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n(x)$ convergeixi a una funció contínua $f(x)$ però la convergència no sigui uniforme? És a dir, la convergència uniforme és una *condició suficient*, però «és necessària»?

La resposta és: No, no és necessària, com mostra l'exemple de Cantor: $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$.[189] Es constata que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per a tot $x \neq 0$. Les funcions $f_n(x)$ tenen un màxim a $x = \frac{1}{n}$ d'altura $y = 1$; per tant, la convergència no és uniforme. Però, $f_n(0) = 0$ i, per tant, la funció límit $f(x) = 0$ és contínua.

A Weierstrass el preocupava força el concepte de *convergència uniforme* i el discutia àmpliament en els cursos. Així, per exemple, en el curs de 1880[190] —on estudia la definibilitat de funcions usant sèries de potències—, demostra algunes relacions entre diferents tipus de convergència uniforme en una regió de la recta real. A la secció § 1, llegim:

> Una sèrie infinita $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$, els membres de la qual són funcions d'una quantitat variable arbitrària, convergeix uniformement en una certa part B de la regió de convergència, si donada una quantitat positiva δ, arbitràriament petita, es pot determinar un nombre natural m, de manera que el valor absolut de la suma $\sum_{\nu=n}^{\infty} f$ és més petit que δ per a tot valor $n \geq m$, i, per a tota col·lecció de valors de les variables que pertanyin a la regió B.[191]

Després fa una definició lleugerament diferent de *convergència uniforme* —a l'entorn d'un punt:

> D'altra banda, suposem una magnitud positiva ρ donada per endavant per a un cert punt concret a de la regió, de manera que la sèrie convergeixi uniformement per a tots els valors de x que satisfan la condició $|x - a| \leq \rho$,

189. En la línia de la que ofereix Cantor a [Cant80, p. 267].
190. Vegeu [Weie80].
191. Vegeu [Weie80a, p. 719].

> aleshores direm que la sèrie convergeix uniformement en un entorn del punt a.[192]

És evident que la primera definició —la relativa a la regió— implica la segona —la relativa a un entorn de a.

El recíproc no és tan evident, i Weierstrass n'ofereix la demostració següent:

> La quantitat ρ té aleshores una fita superior, diguem-ne R. Aleshores, la col·lecció de valors de x per als quals $|x - a| < R$ podem anomenar-la —en relació amb la sèrie considerada— el veïnatge (*der Nähe Stekke*) de a, i a R la semimesura. Si suposem un punt qualsevol d'aquest veïnatge, aleshores és clar que la sèrie també convergeix uniformement en un entorn del segon [punt]. D'això se'n segueix que la col·lecció de punts en l'entorn del qual convergeix la sèrie uniformement està representat en el pla (*ebene*) de la variable x per una superfície (*flache*) simple, però que pot existir en forma de peces diverses separades les unes de les altres.[193]

La demostració usa el teorema de Hiene-Borel de forma implícita i força natural.

2.2.2. Les sèries i el mètode dels intervals encaixats

No voldria ometre un mètode de demostració que Weierstrass usa per establir un lema que qualifica d'important:[194] «L'existència d'una fita superior i d'una d'inferior» —el «mètode dels intervals encaixats».

El trobem —potser una mica fora de context— en els apunts de Hettner. De la pàgina 158 a la pàgina 206, estudia les sèries enteres i introdueix el concepte de *radi de convergència* —exactament com el definim actualment, «el suprem dels valors $|x|$ per als quals la sèrie $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$ convergeix».[195]

192. Vegeu [Weie80a, p. 719-720].

193. Vegeu [Weie80a, p. 720].

194. Vegeu [Weie74, p. 164].

195. Vegeu [Weie74, p. 159-160].

Tot seguit demostra el lema suara esmentat i ho fa construint una successió de punts i mostrant que té un punt d'acumulació. I és en aquest fet on usa els intervals encaixats.[196]

Comença suposant que es tracta d'un nombre infinit de punts reals positius i diu: «Podem limitar-nos a conjunts de nombres racionals de l'interval».[197] El conjunt admet una fita superior g_1 i aleshores considera g de manera que, qualsevol que sigui $x' < g$, hi hagi elements del conjunt a l'interval (x', g).

Per les hipòtesis del conjunt X —i amb l'ús implícit de l'axioma d'Arquimedes— pot determinar un enter b_0 de manera que, a l'interval, $\big[b_0, b_0 + 1\big)$ hi hagi encara punts de X. Aquests punts satisfan, doncs, $[b_0 \leq x < b_0 + 1)$.

Sigui $a > 1$ un enter. Podem trobar encara un enter b_1 de manera que $a\,x < b_1 + 1$ per a tot x de X i de manera que hi hagi punts de X que satisfacin $b_1 \leq a\,x < b_1 + 1$. És a dir, $\frac{b_1}{a} \leq x < \frac{b_1+1}{a}$. Iterant, obtenim una successió

$$b_0, \frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a^2}, \ldots, \frac{b_{r+1}}{a^{r+1}}, \text{ amb } \frac{b_p}{a^p} < \frac{b_q + 1}{a^q} \text{ per a qualssevol } p \text{ i } q.$$

Com que tenim que

$$\frac{b_r}{a^r} < \frac{b_{r+1} + 1}{a^{r+1}} \text{ i } \frac{b_{r+1}}{a^{r+1}} < \frac{b_r + 1}{a^r},$$

en resulta que $a\,b_r + a > b_{r+1}$ i $b_{r+1} + 1 > a\,b_r$. Si fem $b_{r+1} = a\,b_r + c_{r+1}$, tenim finalment que $-1 < c_{r+1} = b_{r+1} - a\,b_r < a$. D'on en resulta que $b_{r+1} = a\,b_r + c_{r+1}$. Atès que es tracta de nombres enters, resulta que c_{r+1} és un element del conjunt $\{0, 1, 2, \ldots, a - 1\}$.

De les definicions, resulta que

$$\frac{b_{r+1}}{a^{r+1}} = b_0 + \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a^2} + \cdots + \frac{b_r}{a^r}.$$

196. Vegeu [Weie74, p. 163-168] o bé [Duga73, p. 74-75].
197. Vegeu [Weie74, p. 163].

I, com que $a > 1$, la sèrie numèrica $g = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{a^{n+1}}$ és convergent.[198] Aleshores Weierstrass demostra que g és la fita superior de X i que posseeix les propietats que volíem.[199]

2.2.3. Preliminars de topologia

En aquest text —per tal de treballar amb sèries—, recorre a algunes nocions de topologia que enumero, tot de passada.[200] Recordem que, ja en el treball de 1861 —vegeu la pàgina 53—, havia introduït el concepte d'*entorn*.

Ara introdueix els conceptes de *conjunt fitat* i de *conjunt no fitat*, i també la noció de *conjunt obert* (*gebeit*: 'regió' o 'domini'). Un conjunt $\mathcal{O}$ «obert» és aquell conjunt que, amb cada punt $a \in \mathcal{O}$, el seu veïnatge $V(a)$ està totalment inclòs $\mathcal{O}$ —és a dir, $V(a) \subseteq \mathcal{O}$, on veïnatge de a significa un «disc obert centrat en a»—. D'altra banda, un punt a és «exterior» a $\mathcal{O}$, si hi ha almenys un veïnatge de a que no talla $\mathcal{O}$. Finalment, a pertany a la frontera d'un obert $\mathcal{O}$, si qualsevol veïnatge de a té punts de $\mathcal{O}$ i punts exteriors a $\mathcal{O}$.[201]

Aquesta secció de caràcter topològic es tanca amb el concepte de *connexitat*.

2.2.4. Les sèries de funcions i de les derivades

Weierstrass es demana[202] si la sèrie de les funcions derivades proporciona la derivada de la sèrie inicial. És a dir,

Teorema 2.8. *Considerem dues sèries uniformement convergents a l'interval* [a, b]

198. Vegeu [Weie74, p. 166].
199. Vegeu [Weie74, p. 167-168].
200. Vegeu [Weie74, p. 181-182].
201. Val la pena indicar que Hettner no precisa, en cap cas, si es tracta d'un veïnatge, o de qualsevol veïnatge; o millor dit, en quins casos cal només un veïnatge i en quin, tots els veïnatges.
202. Vegeu [Weie61, p. 68-69].

$$\mathrm{s(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots} \tag{19}$$

$$\mathrm{t(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + \cdots + u_k'(x) + \cdots} \tag{20}$$

Podem garantir que $\mathrm{t(x) = s'(x)}$ *per a tot* $\mathrm{x \in [a, b]}$*?*

Demostració. Volem saber si

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x+h) - u_k(x)}{h} =$$

$$= t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{u_k'(x+h) - u_k'(x)}{h}, \text{ per a } x+h, x \in [a,b] \text{ i } h \neq 0.$$

Fem

$$s_n(x) = u_0(x) + \cdots + u_{n-1}(x), r_n(x) = u_n(x) + u_{n+1} + \ldots;$$

$$t_n(x) = s_n'(x) = u_0'(x) + \cdots + u_{n-1}'(x), R_n(x) = u_n'(x) + u_{n+1}' + \ldots$$

i aleshores tenim que $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$ i $t(x) = t_n(x) + R_n(x)$.

En conseqüència, d'una banda,

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} + \frac{r_n(x+h) - r_n(x)}{h},$$

i, pel teorema dels increments finits,

$$\frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} = s_n'(x + \theta\, h), \text{ amb } 0 < \theta < 1.$$

En resulta que

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} - \frac{r_n(x+h) - r_n(x)}{h} = \frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} = t_n(x + \theta\, h).$$

D'on:

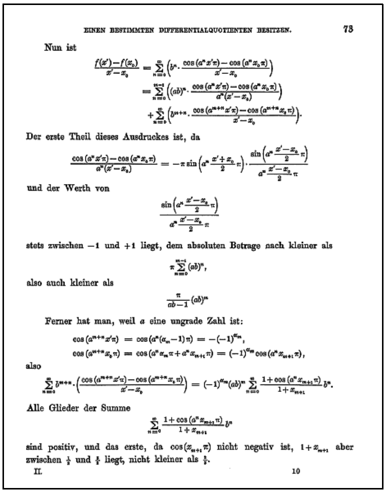
$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} - \frac{r_n(x+h) - r_n(x)}{h} = t(x + \theta\, h) - R_n(x + \theta\, h). \tag{21}$$

Ara, prenem límits a ambdós membres de (21) i tenint en compte que la convergència és uniforme, obtindrem una funció contínua:

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = t(x).$$

Fem que $h \to 0$, i en resulta que $s'(x) = t(x)$, com volíem.[203] $\square$

2.2.5. Una funció contínua arreu no derivable enlloc



EINEN BESTIMMTEN DIFFERENTIALQUOTIENTEN BESITZEN. 73

Nun ist

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^n\cdot\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{x'-x_0}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\cdot\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)}\right)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(b^{m+n}\cdot\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right).$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist, da

$$\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)} = -\pi\sin\left(a^n\frac{x'+x_0}{2}\pi\right)\cdot\frac{\sin\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

und der Werth von

$$\frac{\sin\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

stets zwischen -1 und $+1$ liegt, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n,$$

also auch kleiner als

$$\frac{\pi}{ab-1}(ab)^m$$

Ferner hat man, weil a eine ungrade Zahl ist:

$$\cos(a^{m+n}x'\pi) = \cos(a^n(\alpha_m-1)\pi) = -(-1)^{\alpha_m},$$
$$\cos(a^{m+n}x_0\pi) = \cos(a^n\alpha_m\pi + a^n x_{m+1}\pi) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^n x_{m+1}\pi),$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty}b^{m+n}\cdot\left(\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right) = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n.$$

Alle Glieder der Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n$$

sind positiv, und das erste, da $\cos(x_{m+1}\pi)$ nicht negativ ist, $1+x_{m+1}$ aber zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ liegt, nicht kleiner als $\frac{2}{3}$.

II. 10

Figura 2. Una pàgina de l'article [Weie72]

Una altra qüestió que Weierstrass es planteja és la que lliga la continuïtat i la derivabilitat. És un exercici immediat veure que, si una funció està definida a l'entorn d'un x_0 i és derivable en x_0, aleshores és contínua en x_0.

També és fàcil veure que una funció contínua en un cert interval no ha d'ésser tan regular que admeti una tangent en cada un dels punts de l'interval. Un exemple senzill, i clàssic, és $y = |x|$, que té un «pic» en el punt $(0,0)$.[204]

Aleshores, de forma anàloga a la que plantejà Darboux (vegeu la secció § 1.3), és lícit preguntar-se:

> Pot ser que una funció sigui contínua en un cert interval i alhora no sigui derivable en cap dels punts d'aquest interval?

És ben conegut que Weierstrass presentà una funció amb aquesta propietat.[205] En concret, la funció

---

203. Val la pena indicar que Weierstrass diu que la font en la qual s'inspirà fou una carta d'Abel a Holmboe [Abel39, volum II, p. 268].

204. Les derivades per la dreta —quan $h \to 0$ amb valors positius— i la derivada per l'esquerra —quan $h \to 0$ amb valors negatius— no coincideixen.

205. Sembla que ho féu ja en el curs de 1861.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k \pi x\right), \tag{22}$$

on b és un enter senar i $a \in (0,1)$ una constant que satisfà $a\,b > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Hi dedicà una lliçó en el curs de 1874 com podem veure a les notes de Hettner,[206] però ja havia escrit un treball específic a aquesta qüestió,[207] en el qual informa que Riemann, en les classes de la Universitat de Göttingen de 1860, havia presentat una funció que té aquesta propietat; en concret, la funció $f(x) = \sum^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$.[208]

En canvi, Weierstrass desconeixia la proposta que havia fet Bolzano l'any 1834.[209]

La proposta de Bolzano. La idea de Bolzano és fractàlica. Procedeix així: considerem un segment rectilini $\overline{PQ}$ inclinat respecte de l'horitzontal. Dimidiem-lo pel punt M. Tindrem dues meitats $\overline{PM}$ i $\overline{MQ}$. Subdividim cada una d'aquestes meitats en quatre parts iguals i siguin P_1, P_2, i P_3 i Q_1,

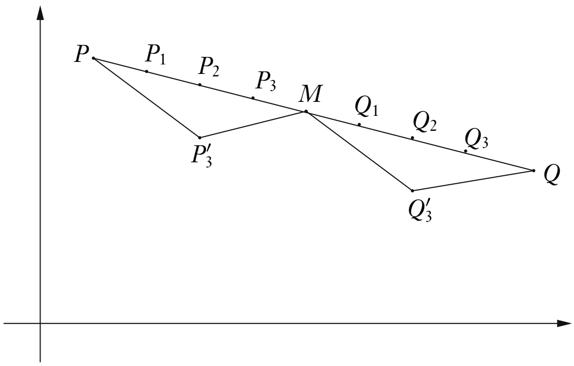


Figura 3. Corba de Bolzano

206. Vegeu [Weie74, p. 221-234].
207. Vegeu [Weie72].
208. Vegeu [Weie74, p. 220] i [Weie72, p. 221]. Weierstrass, però, desconeixia si Riemann creia que no era derivable en cap punt, o bé pensava que només no ho era en alguns punts. Per aclarir-ho, caldria esperar a l'any 1970, en què Joseph Gerver demostrà que és derivable en els múltiples racionals de π. Vegeu [Gerv70] o [Duga03, p. 137].
209. El lector interessat pot veure [Hyks00, p. 72-76], i, per a una breu història del problema i de les solucions aportades, [Thim03].

Q_2, i Q_3 els punts que produeixen les divisions.[210] Sigui P_3' el punt reflectit del punt P_3 respecte de l'horitzontal que passa per M, i Q_3' el reflectit del punt Q_3 respecte de l'horitzontal que passa per Q. S'obté la poligonal $PP_3'MQ_3'Q$. Ara, iterant, apliquem a cada una de les quatre parts d'aquesta línia trencada l'operació fonamental que acabem de descriure. Obtindrem òbviament 4^2 segments rectilinis. Si procedim així de forma indefinida obtindrem la corba que volíem.[211] $\square$

La proposta de Weierstrass. Constatar la validesa d'aquest exemple és un pèl delicat,[212] però val la pena entretenir-s'hi per adonar-se de la qualitat expressiva de Karl Weierstrass a finals del tercer quart de segle xix.[213]

Compararem els dos membres d'una igualtat de quocients de diferències i veurem que s'assoleix una contradicció. Observem, d'entrada, que, pel criteri M de Weierstrass, la sèrie (22) és uniformement convergent atès que: $\left|a^n \cos(b^n \pi x)\right| \leq a^n$.

Sigui $x_0 \in \mathbb{R}$ i considerem un enter $\alpha_m \in \mathbb{N}$ de manera que $b^m x_0 - \alpha_m \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ i definim $x_{m+1} = b^m x_0 - \alpha_m$. Ara fem $y_m = \frac{\alpha_m - 1}{b^m}$ i $z_m = \frac{\alpha_m + 1}{b^m}$. Aleshores

$$y_m - x_0 < -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} < 0 < \frac{1 - x_{m+1}}{b^m} = z_m - x_0.$$

Per tant, $y_m < x_0 < z_m$. D'això se'n dedueix que

$$\lim_{m\to\infty} \left(y_m - x_0\right) = \lim_{m\to\infty} -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} = 0,$$

que implica $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = x_0$. Això val també per a z_m, però $y_m \to x_0$ per l'esquerra i $z_m \to x_0$ per la dreta.

210. La figura 3 és una reelaboració de la figura que trobem a [Bolz30, ítem 8, de Karel RychlÆk, p. 14-17]; vegeu també [Thim03, p. 13].
211. Si voleu aprofundir en aquesta funció, vegeu [Hyks00, p. 72-76] o bé [Thim03, p. 11-17]. Carl B. Boyer [Boye49, nota 8, p. 270] diu que fou Waisdman qui, equivocant-se, atribuí la prioritat de la creació d'una corba d'aquesta mena a Weierstrass.
212. Vegeu [Weie72] i, més actual, [Thim03, p. 20-25].
213. La figura 2, pàgina 74, palesa que l'estil i la simbologia de Weierstrass difereixen molt poc de l'actual. Ho tornarem a veure a la secció següent.

Considerem el quocient per l'esquerra

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k \pi y_m\right) - \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k \pi x_0\right)}{y_m - x_0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{\cos\left(b^k \pi y_m\right) - \cos\left(b^k \pi x_0\right)}{y_m - x_0} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (a\, b)^k \frac{\cos\left(b^k \pi y_m\right) - \cos\left(b^k \pi x_0\right)}{b^k\left(y_m - x_0\right)} + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} a^{m+k} \frac{\cos\left(b^{m+k} \pi y_m\right) - \cos\left(b^{m+k} \pi x_0\right)}{y_m - x_0} \\
&= S_{m-1} + R_{m-1},
\end{aligned}$$

on S_{m-1} és la suma parcial dels m primers termes i R_{m-1} és el residu de la sèrie.

Analitzem-les ara separadament:

$$\begin{aligned}
S_{m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} (ab)^k \frac{\cos\left(b^k \pi y_m\right) - \cos\left(b^k \pi x_0\right)}{b^k\left(y_m - x_0\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (-\pi)\,(ab)^k \sin\left(\frac{b^k \pi\left(y_m + x_0\right)}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{b^k\pi\left(y_m - x_0\right)}{2}\right)}{\frac{b^k\pi\left(y_m-x_0\right)}{2}},
\end{aligned}$$

ja que $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = -2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$ i $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$,

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{b^k\pi\left(y_m - x_0\right)}{2}\right)}{\frac{b^k\pi\left(y_m-x_0\right)}{2}}\right| \leq 1,$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\left|S_{m-1}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{m-1} (-\pi)\,(ab)^k \sin\left(\frac{b^k \pi\left(y_m + x_0\right)}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{b^k\pi\left(y_m - x_0\right)}{2}\right)}{\frac{b^k\pi\left(y_m-x_0\right)}{2}}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \pi\,(ab)^k = \frac{\pi\left((ab)^m - 1\right)}{ab-1} \leq \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}.
\end{aligned}$$

Existeix, doncs, un $\epsilon_1 \in [-1, +1]$ que fa que

$$S_{m-1} = \epsilon_1 \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}. \tag{23}$$

Considerem ara el residu R_{m-1} i centrem-nos en $\cos\left(b^{m+k}\,\pi\, y_m\right)$, atès el fet que b és un enter senar i que $\alpha_m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(b^{m+k}\,\pi\, y_m\right) &= \cos\left(b^{m+k}\,\pi\,\frac{\alpha_m - 1}{b^m}\right) = \cos\left(b^k\,\pi\,\left(\alpha_m - 1\right)\right)\\ &= \left((-1)^{b^k}\right)^{\alpha_m - 1} = -(-1)^{\alpha_m - 1}.\end{aligned}$$

Considerem ara la segona part trigonomètrica de R_{m-1}, substituint x_0 pel seu valor en funció de α_m:

$$\begin{aligned}\cos\left(b^{m+k}\,\pi\, x_0\right) &= \cos\left(b^{m+k}\,\pi\frac{\alpha_m + x_{m+1}}{b^m}\right)\\ &= \cos\left(b^k\,\pi\alpha_m\right)\cos\left(b^k\pi\, x_{m+1}\right) - \sin\left(b^k\,\pi\alpha_m\right)\sin\left(b^k\pi\, x_{m+1}\right)\\ &= \left((-1)^{b^k}\right)^{\alpha_m}\cos\left(b^k\pi\, x_{m+1}\right) - 0\\ &= (-1)^{\alpha_m}\cos\left(b^k\pi\, x_{m+1}\right).\end{aligned}$$

De tot això, en resulta que

$$\begin{aligned}R_{m-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{m+k}\frac{-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m}\cos\left(b^k\,\pi\, x_{m+1}\right)}{-\frac{1+x_{m+1}}{b^m}}\\ &= (ab)^m(-1)^{\alpha_m}\sum_{k=0}^{\infty} a^k\frac{1+\cos\left(b^k\,\pi\, x_{m+1}\right)}{1+x_{m+1}}.\end{aligned}$$

Ara bé, $a \in (0,1)$. Per tant, cada un dels termes de la sèrie anterior és no negatiu i, atès que $x_{m+1} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, obtenim una fita inferior de la sèrie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k\frac{1+\cos\left(b^k\,\pi\, x_{m+1}\right)}{1+x_{m+1}} \geq \frac{1+\cos\left(\pi\, x_{m+1}\right)}{1+x_{m+1}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Existeix, doncs, un $\eta_1 \geq 1$ de manera que

$$R_{m-1} = (ab)^m(-1)^{\alpha_m}\eta_1\frac{2}{3}. \tag{24}$$

Si ara considerem (23) i (24), veiem que

$$\begin{aligned}\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0} &= (ab)^m(-1)^{\alpha_m}\eta_1\tfrac{2}{3}+\epsilon_1\tfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}\\ &= (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\eta_1\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{\epsilon_1}{\eta_1}\cdot\tfrac{\pi}{ab-1}\right),\end{aligned} \tag{25}$$

on el signe de $\frac{\epsilon_1}{\eta_1}$ depèn del de $(-1)^{\alpha_m}$.

Ara considerem el quocient de la diferència per la dreta $\frac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0}$. El procediment és el mateix. Comencem expressant-ho com una suma de la forma

$$\frac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0}=S'_{m-1}+R'_{m-1}.$$

De forma anàloga a la que ens ha portat a (23), podem demostrar l'existència d'un valor ϵ_2 de manera que

$$S'_{m-1}=\epsilon_2\frac{\pi(ab)^m}{ab-1}. \tag{26}$$

Atès que b és un enter senar i $\alpha_m\in\mathbb{Z}$, si considerem els termes cosinus de R_{m-1} arribem a

$$\begin{aligned}\cos\left(b^{m+k}\,\pi\,z_m\right) &= \cos\left(b^{m+k}\,\pi\frac{\alpha_m+1}{b^m}\right)=\cos\left(b^k\,\pi\left(\alpha_m+1\right)\right)\\ &= \left((-1)^{b^k}\right)^{\alpha_m+1}=-(-1)^{\alpha_m}.\end{aligned}$$

Això significa que

$$\begin{aligned}R'_{m-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}a^{m+k}\frac{-(-1)^{\alpha_m}-(-1)^{\alpha_m}\cos\left(b^k\,\pi\,x_{m+1}\right)}{\frac{1-x_{m+1}}{b^m}}\\ &= -(ab)^m(-1)^{\alpha_m}\sum_{k=0}^{\infty}a^k\frac{1+\cos\left(b^k\,\pi\,x_{m+1}\right)}{1-x_{m+1}}.\end{aligned}$$

Ara podem trobar una fita inferior per a la sèrie

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k\frac{1+\cos\left(b^k\,\pi\,x_{m+1}\right)}{1-x_{m+1}}$$

pel fet que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1+\cos\left(b^k \pi x_{m+1}\right)}{1-x_{m+1}} \geq \frac{1+\cos\left(\pi x_{m+1}\right)}{1-x_{m+1}} \geq \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Per tant, com abans, existeix un $\eta_2 > 1$ per al qual

$$R'_{m-1} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_2 \frac{2}{3}. \tag{27}$$

De (26) i (27), en resulta que

$$\begin{aligned} \frac{f\left(z_m\right) - f\left(x_0\right)}{z_m - x_0} &= -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_2 \tfrac{2}{3} + \epsilon_2 \tfrac{\pi (ab)^m}{ab-1} \\ &= -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_2 \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{\epsilon_2}{\eta_2} \cdot \tfrac{\pi}{ab-1}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

on el signe de $\frac{\epsilon_2}{\eta_2}$ depèn del de $-(-1)^{\alpha_m}$.

Hem suposat que $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$ o, equivalentment, $\frac{\pi}{ab-1} < \frac{2}{3}$. Aleshores, sense que importin els valors de ϵ_1 i ϵ_2, els membres de l'esquerra de (25) i els de la dreta (28) tenen signes oposats i no tendeixen pas a zero, que podria ser la derivada en el punt zero.

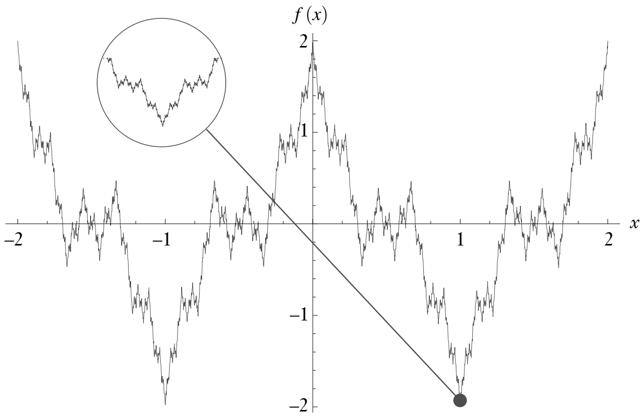


Figura 4. La funció de Weierstrass a $[-2; 2]$ d'acord amb [Rocc08]

A més, com que

$$\text{lím}_{m\to\infty}(ab)^m = \infty,$$

resulta que la funció de Weierstrass no és derivable en el punt x_0.[214] El punt x_0 és un punt arbitrari de $\mathbb{R}$. Per tant, la funció de Weierstrass no és derivable en cap punt de $\mathbb{R}$, com volíem establir. $\square$

Una proposta nostàlgica. La primera vegada que vaig veure aquest teorema va ser en l'assignatura Matemáticas Generales del Curso Selectivo —en aquella època tot es feia en castellà, malgrat que tots fossin de parla catalana— de l'any acadèmic 1962-1963. Ens ho explicà el professor Dr. Josep Vaquer i Timoner, usant la corba de Knopp.[215] És tal com el teorema es presentava en el Curso de Matemáticas.[216]

Es construeix també amb un procés iteratiu fractàlic.[217]

Considerem la funció, definida per

$$\{x\} = \text{mín}\left(x - \mathrm{E}(x), \big(\mathrm{E}(x) + 1\big) - x\right)$$

per a cada $x \in \mathbb{R}$. És a dir, $\{x\}$ és la distància més curta de x als dos punts enters més propers —és a dir, $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$.

És clar que $\{x\}$ és contínua en $\mathbb{R}$ i periòdica de període 1; és a dir, $\{x\} = \{x + 1\}$.

Fixem-nos que, si dos punts $x, x+h \in [0, 1)$ cauen al mateix vessant de la funció $\{x\}$ —és important aquesta limitació—, òbviament $\{x+h\}-\{x\} = h$.

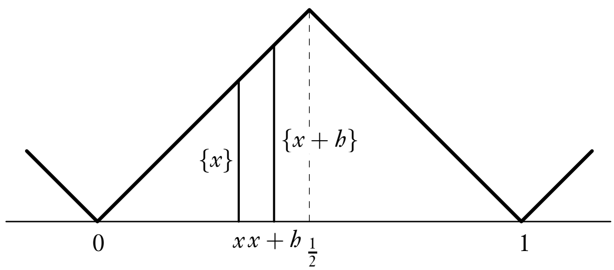


Figura 5. Gràfica de la funció $\{x\}$

---

214. És interessant observar que la diferència de signe fa que les derivades oscil·lin entre més i menys infinit, fet que indica com de violenta és l'oscil·lació de la derivada.

215. Vegeu [Knop18, p. 23-26].

216. Vegeu [Teix68, p. 336-337].

217. Les figures, les he manllevat de [Spiv64, edició castellana, volum II, p. 622-623 i 626-627].

Per a cada $n \in \mathbb{N}$ i cada $x \in \mathbb{R}$, definim les funcions (en base 10)

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\,\{10^n x\}\,. \tag{29}$$

Òbviament, per a cada $n \in \mathbb{N}$ i cada $x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{10^n}$.

Considerem ara la funció (en base 10)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\,\{10^n\,x\}. \tag{30}$$

Atesa l'observació precedent i aplicant el criteri M de Weierstrass, resulta que la sèrie (30) és uniformement convergent en cada punt $x \in \mathbb{R}$, i, de retruc, pel teorema de Cauchy-Weierstrass, la funció $f(x)$ és contínua a $\mathbb{R}$.

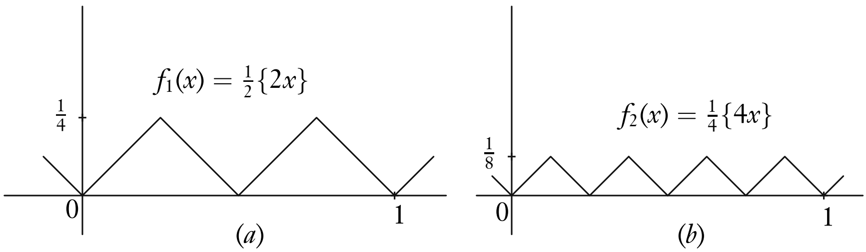


Figura 6. Les funcions $f_1(x)$ i $f_2(x)$ de (29), però en base 2

Limitarem, doncs, l'anàlisi de la possible derivabilitat de $f(x)$ als punts $x \in [0,1)$.

Els punts de $[0,1)$ —com hem vist al lema 1.17, pàgina 30— són de la forma: $x = 0, n_1\,n_2\,n_3\,\cdots\,n_m\,\cdots$.[218]

Considerem ara, per a cada $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, els nombres

$$\delta_m = \begin{cases} +1, & \text{si } n_m \neq 4 \text{ i } n_m \neq 9; \\ -1, & \text{altrament.} \end{cases} \tag{31}$$

I fem $h_m = \frac{\delta_m}{10^m}$.[219]

218. Com sempre, excloem els periòdics o bé amb període 9 o bé amb període 0.

219. La distinció en la definició dels nombres δ_m de (31), la fem per tal que, en sumar h_m a $10^m\,x$, el punt que s'obtingui dins l'interval $[0,1)$ pertanyi al mateix vessant que $10^n\,x$.

Calculem ara

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = 10^m\,\delta_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{10^n\,x + 10^{n-m}\,\delta_m\right\} - \left\{10^n\,x\right\}}{10^n} =$$

$$= 10^m\,\delta_m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\left\{10^n\,x + 10^{n-m}\,\delta_m\right\} - \left\{10^n\,x\right\}}{10^n} \tag{32}$$

$$+ \sum_{n\geq m} \frac{\left\{10^n\,x + 10^{n-m}\,\delta_m\right\} - \left\{10^n\,x\right\}}{10^n}. \tag{33}$$

Tots els termes del residu (33) són zero, ja que $10^{n-m}\,\delta_m \in \mathbb{Z}$ i, per tant, $\left\{10^n\,x + 10^{n-m}\,\delta_m\right\} = \left\{10^n\,x\right\}$ per la periodicitat de la funció $\{x\}$.

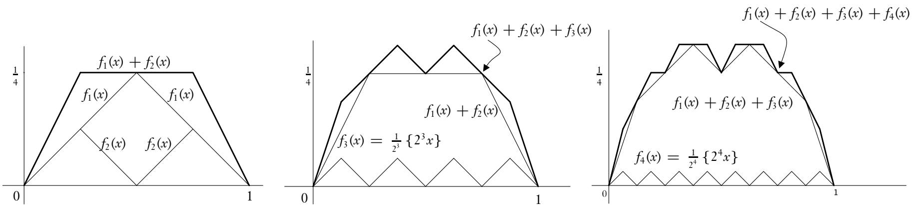


Figura 7. Les tres primeres sumes parcials (en base 2) de la sèrie 30

Cal analitzar, doncs, cada un dels termes de (32), en què $n \geq m$. Per l'observació que hem fet, atès que al decimal $(m-n)$-èsim de $10^n\,x$ li afegim o traiem una unitat, els dos punts $10^n\,x + 10^{n-m}\,\delta_m$ i $10^n\,x$ són en un mateix vessant. Per tant, la diferència $\left\{10^n\,x + 10^{n-m}\,\delta_m\right\} - \left\{10^n\,x\right\}$ és igual a 10^{n-m}. Aquesta diferència l'hem de dividir per 10^n i l'hem de multiplicar per $10^m\,\delta_m$. Obtenim ± 1, segons el valor de n_m en la notació decimal de x. O sigui que el signe de cada un dels sumands és el mateix perquè no depèn de n; solament de n_m. La suma

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

és, doncs, un enter de la paritat de m.

En conseqüència, la funció $f(x)$ no és derivable en cap punt de l'interval $[0,1)$ i, de retruc, en cap punt de $\mathbb{R}$. $\square$

3. El teorema d'aproximació de Weierstrass

Vull indicar que aquest resultat fou magistralment exposat pel nostre company, col·lega i amic, el Dr. Joan Cerdà,[220] en la conferència inaugural del curs acadèmic 2011-2012 de la Facultat.

Ara, doncs, sense entrar en els detalls tècnics de l'article i seguint una mica el to d'aquest text —entre metodològic, històric i docent—, miraré de situar-lo en el context en què es va produir i de justificar-ne la «plausibilitat».[221]

3.1. La fórmula de Taylor

Brook Taylor[222]

Sabem que, si una funció és derivable d'ordre $n+1$, aleshores la podem aproximar amb un polinomi de grau n.

Lagrange, en l'intent de reduir l'infinit al finit —«algebraïtzar l'anàlisi»— recorre al teorema dels increments finits per establir la regla de Taylor [o de MaLaurin][223] i diu:

> D'on en resulta per fi aquest teorema nou i notable per la seva simplicitat i la seva generalitat: si designem per u una quantitat desconeguda, però que es troba entre 0 i x, podrem desenvolupar successivament *qualsevol* funció de x, i d'altres quantitats arbitràries, segons les potències de x, de la manera següent:
>
> $$f(x) = f. + xf'u = f. + xf'. + \frac{x^2}{2}f''u = f. + xf' + \frac{x^2}{2}f''. + \frac{x^3}{2\cdot 3}f'''u, \text{ etc.},$$
>
> on les quantitats $f.$, $f'.$, $f''.$, etc. són els valors de la funció $f\,x$ i de les seves derivades $f'x$, $f''x$, etc., quan fem x igual a 0.[224]

220. Vegeu [Cerd11].
221. Vegeu [Pla12, p. 12].
222. Brook Taylor (Edmonton [Middlesex, Anglaterra], 18 d'agost de 1685 – Londres [Anglaterra], 29 de desembre de 1731).
223. Vegeu [Stru69, p. 328-333 i 338-341].
224. Vegeu [Lagr97, p. 49].

En la demostració, Lagrange usa el teorema dels increments finits que no ha establert amb tot el rigor i que caldrà precisar amb molta més cura.

De fet, la sèrie de Taylor no determina necessàriament la funció —que naturalment suposem infinitament derivable—,[225] com palesa la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{34}$$

És una funció contínua en el punt $x = 0$ i infinitament derivable, però amb la peculiaritat que $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 0$.[226]

Aquesta situació féu que Abel —en una carta de 16 de gener de 1826 adreçada a Bernt Michael Holmboe— s'expressés en els termes següents:

> El teorema de Taylor, la base de tota la matemàtica superior, s'ha fonamentat malament. Només n'he trobat una demostració rigorosa i és la que ofereix Cauchy en el seu *Resumé des leçons sur le calcul infinitésimal*.[227]

Cauchy és conscient d'aquestes limitacions, com podem deduir de les seves pròpies paraules:

> [...] Per aquesta raó, m'ha semblat convenient refusar els desenvolupaments de les funcions en sèries infinites quan les sèries que s'obtenen no són convergents. Això m'ha portat a enviar la fórmula de Taylor al càlcul integral. Aquesta fórmula no la podem admetre en general llevat del cas en què la sèrie que englobi no es trobi reduïda a un nombre finit de termes que es completin amb una integral definida.[228]

Seguidament palesa les dificultats que els desenvolupaments de Taylor presenten com a aproximacions a la funció donada per endavant i s'adona

225. Vegeu la dualitat, «aproximable fins a l'ordre *n*» i «definible com a sèrie de Taylor» a [Orte90, p. 152-153 i 357-358].

226. Vegeu [Cauc23, lliçó 38, p. 152]. Lagrange pensava que una funció com aquesta no era possible: «No hem de témer l'existència d'una funció per a la qual $f(x), f'(x), f''(x) \ldots$ s'anul·len totes alhora en una posició $x = a$» [Lagr97, p. 37].

227. Vegeu [Abel39, p. 267].

228. Vegeu [Cauc23, preàmbul p. v].

de la irregularitat que representa la funció (34).[229] Aconsegueix, però, determinar el «terme corrector» del polinomi de Taylor, anomenat «residu de Taylor», i presenta formes diverses d'expressar-lo.[230]

I finalment dóna l'expressió

$$f(x) = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{(n-1)!}\,h^{n-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}\left(x-z\right)^{n-1} dz,$$

on $h := x - x_0$.[231]

En definitiva, doncs, si volem aproximar una funció $f(x)$, derivable fins a l'ordre n, amb certes condicions,[232] podem usar el «polinomi de Taylor» de l'expressió anterior i la integral proporciona l'error que intentarem fitar.

3.2. El desenvolupament de Fourier

Joseph Fourier[233]

Ara, pel principi d'anar més enllà, podem preguntar-nos:

> Una funció contínua és aproximable d'alguna manera?

Una primera resposta la donà Fourier i, encara que es tracta d'una qüestió d'índole purament matemàtica, sorgí de l'anàlisi d'una qüestió física.[234]

229. Vegeu [Cauc23, p. 394-395].

230. Vegeu [Cauc23, lliçó 36, p. 214-219, i apèndix, p. 257-261].

La importància d'aquesta recerca a començaments del segle xix, la resumeix molt clarament Grattan-Guinness a [Grat80, § 3.8, edició castellana, p. 152-159].

231. Vegeu [Cauc23, lliçó 36, p. 212].

232. Per exemple, que la funció $f^{(n)}(x)$ sigui contínua en un entorn del punt x_0.

233. Jean-Baptiste-Joseph Fourier (Auxerre [França], 21 de març de 1768 – París [França], 16 de maig de 1830).

234. Aquesta qüestió ja havia tret el nas en voler resoldre un problema físic: la llei del moviment de la «corda que vibra».

Així doncs, el 21 de desembre de 1807, Joseph Fourier llegí a l'Acadèmia de Ciències de París[235] la memòria *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*.[236] L'objectiu de la memòria era «establir els principis matemàtics de la teoria de la calor».[237]

Ens trobem davant d'un exemple autèntic del que cal entendre per *matemàtica aplicada*:[238]

> L'estudi aprofundit de la naturalesa és la font més fecunda de les descobertes matemàtiques.[239]

L'any següent Denis Poisson féu públics els resultats de Fourier i, en particular, la fórmula que proporciona els coeficients:[240]

$$a_i = \int_{-1}^{+1} \varphi(y) \cos (2i+1)\frac{\pi y}{2}\, dy, \tag{35}$$

del desenvolupament d'una funció $\varphi(y)$ que suposem, d'antuvi, que és desenvolupable en sèrie trigonomètrica:

$$\varphi(y) = a \cos \frac{\pi y}{2} + a_3 \cos 3\, \frac{\pi y}{2} + \cdots + a_i \cos (2i+1)\frac{\pi y}{2} + \cdots . \tag{36}$$

S'adona que els coeficients (35) es dedueixen fàcilment de suposar que la funció admet un desenvolupament de la forma (36) atesa la propietat d'«ortogonalitat» —com s'anomena actualment— de les funcions circulars.

Tot rau a multiplicar ambdós membres de (36) per $\cos (2i+y)\frac{\pi y}{2}$, integrar després ambdós membres entre -1 i $+1$, i observar que

$$\int_{-1}^{+1} \cos (2i+1)\frac{\pi y}{2} \cos (2'+1)\frac{\pi y}{2}\, dy = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq i', \\ 1, & \text{si } i = i'. \end{cases} \tag{37}$$

235. Aquest text no es publicà fins a l'any 1972. Vegeu [Four72, p. 33-440].

236. Vegeu [Four07, p. 215-221]. Aquest text, el redactà Poisson: [Four07, nota 1, p. 215].

237. Vegeu [Four07, p. 215].

238. Per a una descripció succinta de com el problema físic mena el problema matemàtic, vegeu [Dieu78, p. 130-132 i 138-143].

239. Vegeu *Discourse préliminaire*, a [Four22, p. xxii-viii].

240. Vegeu [Four07, p. 218-219].

Fixem-nos en el fet següent: per trobar els coeficients cal que la funció $\varphi(y)$ sigui integrable; aleshores és possible determinar els coeficients a_i, $i = 1, 2, \dots$, i considerar la sèrie del segon membre de (36).

Aleshores, l'únic que cal observar és si la sèrie és convergent; i, finalment, si ho és, de convergent, demostrar que convergeix cap a la funció inicial $\varphi(y)$.[241]

El jurat que li concedí el premi féu el comentari següent:

> Aquesta obra inclou les equacions diferencials vertaderes de la transmissió de la calor, tant a l'interior dels cossos com en la superfície: la novetat de l'objectiu plantejat, juntament amb la importància que té, ha estat determinant perquè *la Classe* l'hagi coronat, observant tanmateix que la manera com l'autor arriba a les equacions no està exempta de dificultats, i la seva anàlisi, per integrar-les, deixa encara coses pendents tant en relació amb la generalitat com en relació amb el rigor.[242]

I Gaston Darboux digué:

> Aquesta preciosa obra, que sense cometre injustícia podem col·locar al costat de les obres científiques més perfectes de tots els temps, es recomana per a una exposició interessant i original dels principis fonamentals.[243]

I l'obra és d'una riquesa intel·lectual que no podem deixar de comentar, perquè s'intueix el concepte general de *funció*:

> En general, la funció $f(x)$ representa una successió de valors o ordenades cada una de les quals és arbitrària. Atès que l'abscissa pren una infinitat de valors, hi ha també una infinitat d'ordenades $f(x)$ i totes tenen valors numèrics *concrets*: positius, negatius o nuls.
>
> No suposem pas que aquestes ordenades estiguin subjectes a una llei comuna a totes elles, sinó que se succeeixen les unes a les altres de manera arbitrària, i cada una ve donada com si fos una quantitat aïllada.[244]

---

241. Recordem, de passada, que Fourier tornà a presentar —aquesta vegada completa— la memòria el 28 de setembre de 1811 [Four11].

242. Vegeu [Bert12, p. 374] o bé [Bert12, p. VII-VIII].

243. Vegeu [Bert12, p. 374] o bé [Four89, p. V].

244. Vegeu [Four22, capítol novè, article 417, p. 552].

Expressa, doncs, una idea —un concepte— que s'allunya moltíssim del concepte de *funció* vigent al segle XVIII.

I potser més important encara, li dóna un estatus de normalitat analítica quan diu:

> Cal observar que la funció a la qual s'aplica aquesta demostració és totalment arbitrària, i no està sotmesa a cap llei de continuïtat.[245]

Aquesta idea la recull Cauchy quan, un cop ha introduït la «integral de Cauchy»[246] —per a les funcions contínues tal com ell les entén—,[247] es pregunta si una funció arbitrària —en el sentit de Fourier— serà integrable.

Dirichlet, «en una memòria antològica»,[248] fa la primera demostració rigorosa de la convergència d'una sèrie de Fourier i ho fa «amb una anàlisi que servirà de model a molts dels desenvolupaments del segle dinou».[249] Comença analitzant la demostració de Cauchy, publicada l'any 1827,[250] i veu quines són les deficiències que presenta i alhora es pregunta en quines condicions la sèrie de Fourier, en cas de ser convergent, defineix la funció integrable $f(x)$ usada per trobar els coeficients. Creu que la sèrie de Fourier d'una funció contínua —en el sentit de Cauchy— $f(x)$ convergeix cap a la mateixa funció $f(x)$.[251]

245. Vegeu [Four22, capítol novè, article 417, p. 551].

246. Vegeu [Cauc23, lliçó 21, p. 81 i següents].

247. Recordem que Euler, un cop ha introduït la definició de *funció* —«Una funció d'una quantitat variable és una expressió analítica que es compon d'alguna manera de la quantitat variable i de quantitats constants o nombres» [Eule48, §4, p. 4]—, les classifica i anomena *contínues* les que poden ser descrites per una certa llei única, un concepte que no té res a veure amb el que introduirà Bolzano i consolidaran Cauchy i Weierstrass.

248. Vegeu [Duga78a, p. 250].

249. Vegeu [Dieu71, p. 3].

250. Vegeu [Cauc27].

251. Vegeu [Duga78a, p. 250-251]. En el cas que la funció tingui una infinitat de discontinuïtats, falla la noció d'*integral* de Cauchy, com posa de manifest la funció

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0 & \text{, si } x \in \mathbb{Q}, \\ f(x) = 1 & \text{, si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

En aquesta memòria trobem implícitament la definició de *funció* i explicítament, en la memòria de 1837. Són aquestes aportacions les que menen a la definició actual:

> f és una funció, si fa correspondre a cada valor de x un valor ben determinat de $f(x)$.[252]

Però Paul du Bois-Reymond l'any 1875 —en contra de l'opinió de Dirichlet, Weierstrass i Dedekind—[253] proporciona una funció contínua per a la qual la sèrie de Fourier és convergent, però, en canvi, no convergeix cap a la funció $f(x)$ en aquells punts a l'entorn dels quals hi ha una «infinitat de màxims».[254]

Cal, doncs, esperar al teorema de Féjer, de l'any 1903,[255] per saber quines són les condicions que ha de satisfer una funció contínua perquè la sèrie de Fourier associada convergeixi a la pròpia funció.

Teorema 3.1 (Teorema de Féjer). *Sigui* f(x) *una funció contínua a* $[-\pi, +\pi]$ *i periòdica de període* 2π, *la sèrie de Fourier de la qual és convergent en algun punt* x. *Aleshores convergeix a la funció* f(x).[256]

Tot això fa plausible —volia que quedés clar— el teorema d'aproximació de Weierstrass. Aquest resultat es troba molt ben explicitat i exposat a la conferència inaugural de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona del curs acadèmic 2011-2012.[257]

Aquesta mena de limitacions són les que intentarà resoldre Riemann amb el seu concepte d'*integral*, si bé la funció proposada per Dirichlet tampoc no ho serà, d'integrable, en el sentit de Riemann.

252. Vegeu [Diri37, p. 135]. Val la pena indicar que aquesta definició la trobem, més de cinquanta anys abans, en Weierstrass: «Si una quantitat y depèn d'una altra x per una llei qualsevol, y serà precisament el que anomenem funció de x», a [Duga73, p. 120].

253. Vegeu [Duga73, p. 169] i [Duga76, 1.7].

254. Vegeu [Bois73, p. 574-578].

255. Vegeu [Feje03].

256. Vegeu [Apos60, edició castellana de 1976, p. 391].

257. Vegeu [Cerd11]. Un altre article molt acurat d'aquesta qüestió és [Pink00].

Per això, presento la demostració derivada de la plausibilitat esmentada suara: una funció contínua la podem aproximar amb una sèrie trigonomètrica i aleshores les funcions sinus i cosinus admeten l'aproximació polinòmica que proporciona el desenvolupament de Taylor.[258]

Teorema 3.2 (Teorema d'aproximació de Weierstrass). *Sigui* $\mathrm{f(x)}$ *una funció real i contínua en un interval compacte* $[\mathrm{a,b}]$. *Aleshores, per a cada* $\epsilon > 0$, *existeix un polinomi* $\mathrm{P}_\epsilon(\mathrm{x})$ *—que depèn de* ϵ*— que*

$$\left|\mathrm{f(x)} - \mathrm{P(x)}\right| < \epsilon \textit{ per a cada } \mathrm{x} \textit{ de } [\mathrm{a,b}]. \tag{38}$$

Demostració. Considerem la funció

$$g(t) = \begin{cases} f\left(a + t\,\frac{b-a}{\pi}\right), & \text{si } t \in [0,\pi), \\ f\left(a + (2\,\pi - t)\,\frac{b-a}{\pi}\right), & \text{si } t \in [\pi, 2\,\pi). \end{cases}$$

I estenem $g(t)$ fora de $[0, 2\,\pi]$ de manera que g sigui periòdica de període $2\,\pi$.

Ara, per al valor de ϵ donat, podem aplicar el teorema de Féjer i obtenim una funció

$$\sigma(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos kt + B_k \sin kt\right) \tag{39}$$

que, per a cada $t \in [0, 2\,\pi]$,[259] satisfà $\left|g(t) - \sigma(t)\right| < \frac{\epsilon}{2}$.

Però σ és una suma finita de funcions trigonomètriques. Genera, doncs, un desenvolupament en sèrie de potències en un entorn de l'origen que, en cada interval finit, convergeix uniformement. Les sumes parcials d'aquest desenvolupament en sèrie de potències constitueix una successió de polinomis $\{P_n\}$ que $P_n \to \sigma$ uniformement a $[0, 2\,\pi]$.

Per tant, per al mateix valor ϵ, existeix un $m \in \mathbb{N}$ que

$$\left|P_m(t) - \sigma(t)\right| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ per a tot } t \text{ de } [0, 2\,\pi]. \tag{40}$$

---

258. És així com el vaig aprendre quan, amb el professor Dr. Enrique Linés, seguíem el text de l'Apostol [Apos60, edició castellana de 1976, p. 392-393]. Vegeu també [Reyp15, volum III, p. 117].

259. Cal notar que N, i, de retruc, σ, depèn de ϵ.

Tenim, doncs:

$$\left|P_m(t) - g(t)\right| < \epsilon, \text{ per a tot } t \text{ de } [0, 2\,\pi]. \tag{41}$$

Ara definim el polinomi $P(x)$ per mitjà de l'expressió $P(x) = P_m\left(\pi\,\frac{x-a}{b-a}\right)$. Aleshores, la desigualtat (41) es converteix en (38), si fem $t = \pi\,\frac{x-a}{b-a}$. □

Una demostració alternativa del teorema d'aproximació de Weierstrass és la que vaig explicar al curs Anàlisi II de l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura, a mitjan anys 70 del segle passat.

Teorema 3.3 (Teorema d'aproximació de Weierstrass). *Si* f *és una funció contínua en* [a, b], *existeix una successió de polinomis* $\mathrm{P_n}$ *que*

$$\mathit{lím}_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{P_n(x) = f(x)}$$

uniformement en [a, b].

Demostració. Sense que es perdi generalitat, fem $[a, b] := [0, 1]$, i $f(0) = f(1) = 0$.[260] Suposem, a més, que $f(x) = 0$ per a tot $x \notin [0, 1]$. Aleshores f és uniformement contínua en tota la recta real.

Fem

$$Q_n(x) = c_n\left(1 - x^2\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{42}$$

on c_n l'elegim de manera que

$$\int_{-1}^{+1} Q_n(t)dt = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{43}$$

Quin és l'ordre de magnitud de c_n?

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \left(1 - t^2\right)^n dt = 2 \int_{0}^{+1} \left(1 - t^2\right)^n dt \geq 2 \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1 - t^2\right)^n dt \\ \underset{*}{\geq} 2 \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1 - n\,t^2\right) dt = \frac{4}{3}\sqrt{n} > \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

260. Si el teorema és cert en aquest cas, solament cal que considerem $g(x) = f(x) - f(0) - x\big(f(1) - f(0)\big)(0 \leq x \leq 1)$. Resulta que $g(0) = g(1) = 0$ i, si g s'obté com a límit d'una successió uniformement de polinomis, també ho serà f, atès que $f - g$ és un polinomi.

Per tant,

$$c_n < \sqrt{n}.^{261} \tag{44}$$

Per a tot $\delta > 0$, la desigualtat (44) implica

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}\left(1 - x^2\right)^n \quad \left(\delta \leq |x| \leq 1\right). \tag{45}$$

Això fa que $Q_n \to 0$ uniformement a $\delta \leq |x| \leq 1$.

Sigui ara

$$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt \quad (0 \leq x \leq 1). \tag{46}$$

D'acord amb les hipòtesis, amb un simple canvi de variables, tenim

$$P_n(x) = \int_{-x}^{+1-x} f(x+t)\, Q_n(t)\,(t) dt = \int_0^1 f(t)\, Q_n(t-z)\, dt, \tag{47}$$

i la darrera integral és un polinomi en x. Així doncs, $\left\{P_n(x)\right\}$ és una successió de polinomis.

Ara, donat ϵ, elegim $\delta > 0$ de manera que $|y - x| < \delta$ impliqui $\left|f(y) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sigui $M = \sup\left|f(x)\right|$. Usant ara (43) i (45) i el fet que $Q_n(x) \geq 0$, veiem que, per a $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|P_n(x) - f(x)\right| &= \left|\int_{-1}^{+1} \left(f(x+t) - f(x)\right) Q_n(t)\, dt\right| \\
&\leq \int_{-1}^{+1} \left|\left(f(x+t) - f(x)\right)\right|\; Q_n(t)\, dt \\
&\leq 2\,M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{+\delta} Q_n(t)\, dt \\
&\qquad + 2\,M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}\left(1 - \delta^2\right)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,
\end{aligned}$$

261. L'$*$ resulta del fet que $\left(1 - x^2\right)^n \geq 1 - n\,x^2$, que resulta del fet que la funció $h(x) := \left(1 - x^2\right)^n - \left(1 - n\,x^2\right)$ és nul·la per a $x = 0$ i $h'(x) > 0$ per a tot $x \in (0, 1)$.

per a n suficientment gran. Això estableix la demostració del teorema.[262] $\square$

Introduïm el concepte de *clausura uniforme* d'una àlgebra $\mathcal{A}$ de funcions com aquella propietat que diu: Si $f_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, 3 \ldots,$ i $f_n \underset{\text{unif.}}{\rightarrow} f$, aleshores $f \in \mathcal{A}$.

Així doncs, el teorema d'aproximació de Weierstrass diu: «L'àlgebra de les funcions contínues en $[a, b]$ és la clausura uniforme de l'àlgebra dels polinomis». Fixem-nos que es tracta d'una mena de «densitat».

Això permet plantejar el teorema de Stone-Weierstrass:[263]

Definició 3.4. *Una àlgebra* $\mathcal{A}$ *de funcions definides en* E *separa punts de* E *si, i només si, hi ha sempre una funció* $\mathrm{f} \in \mathcal{A}$ *que distingeix punts* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$ *diferents de* E*; és a dir, per a cada parella de punts* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{E}$, *amb* $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$, *hi ha una funció* $\mathrm{f} \in \mathcal{A}$ *per a la qual* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) \neq \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$.

Si a cada punt $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ *li correspon una funció* $\mathrm{f} \in \mathcal{A}$ *de manera que* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \neq 0$, *diem que l'àlgebra* $\mathcal{A}$ *no desapareix en cap punt de* E.

Teorema 3.5. (Teorema d'aproximació de Stone-Weierstrass). *Si* $\mathcal{A}$ *és una àlgebra de funcions reals contínues en un compacte* K *que separa punts en* K *i no desapareix en cap punt de* K, *la clausura uniforme* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$ *consta de totes les funcions contínues reals en* K.[264]

Dos resultats d'anàlisi complexa

4. Teorema de Casorati-Weierstrass

Ara, un cop hem vist un teorema en el qual apareix la «densitat», ens endinsarem en la variable complexa per veure'n un altre, ben diferent, però que també fa referència a la densitat.[265]

262. Fixem-nos que cal la continuïtat uniforme de f per poder establir la convergència uniforme de la successió $\{P_m\}$.
263. El trobem a [Ston37] i, molt més elaborat, a [Ston48].
264. Vegeu [Rudi53, edició castellana, p. 161-165].
265. Per a una aproximació a les aportacions de Weierstrass a la variable complexa, vegeu [Port97].

Com diu Kramer:

> Anà a la Universitat de Bonn, on el pare tenia l'esperança que estudiaria comptabilitat, comerç i dret. Weierstrass, però, s'entretenia practicant l'esgrima i gaudint del *gemütlichkeit* dels salons de cervesa. Podem imaginar-nos la reacció paterna, quan, l'any 1839, tornà a casa sense el diploma. Fou aleshores que Weierstrass prengué la decisió de preparar-se per a l'ensenyament i entrà a l'Acadèmia de Münster, que es trobava a la vora de casa. Fou un pas afortunat perquè hi conegué un professor de matemàtica hàbil i inspirat, Cristoph Gudermann, que sapigué despertar en el jove l'interès en les «funcions el·líptiques», recentment creades per Abel i Jacobi. Guderman confià en el seu pupil i li digué que, durant anys, havia mirat d'usar sèries de potències per a representar-les. I, en aquesta tasca en la qual havia fracassat el mestre, excel·lí el deixeble, i resultà, a més, que aquestes sèries esdevingueren la clau de volta de totes les descobertes que aconseguí després.[266]

Recordem, de passada, els conceptes de *funció holomòrfica*, *analítica*, *meromorfa*, de *punt de discontinuïtat essencial*, etc.

Definició 4.1. *Una funció* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *l'anomenarem una funció complexa de domini* D *que, per simplicitat, suposarem obert i connex de* $\mathbb{C}$.

La funció f *és holomorfa —del grec «enter»* (ὅλος) *i «forma»* (μορφή)*— en* D *si, i només si, és derivable [en els complexos; és a dir, si, i només si, els components real i imaginari satisfan les equacions de Cauchy-Riemann] en cada punt* z *de* D.[267]

Una funció complexa f *és analítica si, i només si, pot ser expressada localment [a l'interior de tot disc obert del domini] com una sèrie de potències enteres convergent.*[268]

Sigui $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. *Un punt* $z_0 \in D$ *és un:*

- *zero d'ordre* p *d'una funció holomorfa* $f(z)$ *en el domini* D, *si existeix una funció holomorfa* $g(z)$ *en* D *de manera que*

266. Vegeu [Kram70, p. 548].

267. Recordem que si una funció complexa f és derivable en un punt z d'un domini és infinitament derivable en D. Aquesta no és l'única gran diferència entre les funcions reals i complexes. Una altra situació particular la proporciona el famós teorema de Liouville (vegeu la pàgina 99).

268. Les funcions analítiques coincideixen amb les holomorfes.

$$g(z_0) \neq 0 \; i \; f(z) = (z - z_0)^p \, g(z);$$

- *pol d'ordre* p *d'una funció holomorfa* $f(z)$ *en un domini* $D - \{z_0\}$, *si existeix una funció holomorfa* $g(z)$ *en* D *de manera que*

$$g(z_0) \neq 0 \; i \; f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}.$$[269]

Direm que z_0 *és un punt singular aïllat de la funció* f *si, i només si, existeix un cercle* $\mathcal{O}(z_0, r) := \{z : |z - z_0| < r\}$, *de centre* z_0 *i radi* $r > 0$, *de manera que* f *és holomorfa en el cercle foradat* $\mathcal{O}_{z_0}(z_0, r) := \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$.[270]

I z_0 *és un punt singular essencial si, i només si, és un punt singular aïllat que no és un pol.*

Una funció complexa f *és meromorfa —del grec «part»* (μέρος) *i «forma»* (μορφή)*— en* D *si, i només si, és holomorfa en* D *llevat en un nombre finit de pols.*

Exemples

1. La funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}, z \neq 0$, té, en el punt $z = 0$, un punt singular evitable. En efecte,

$$\sin z = z + z^3 \, g(z), \text{ on } g(z) \text{ és analítica per a tot } z.$$

Per tant, per a $z \neq 0, f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 + z^2 \, g(z)$.

La funció del segon membre és analítica per a tot $z \in \mathbb{C}$. Si fem $f(0) = 1$ i $f(z) = \frac{\sin z}{z}, z \neq 0$, la funció és analítica en $z = 0$ i hem eliminat la singularitat.

269. Fixem-nos que tot pol és una singularitat —la funció no és holomorfa en z_0—. Els pols, si $f \not\equiv 0$, són aïllats. Un pol d'ordre p d'una funció holomorfa és una singularitat que es comporta com la singularitat $z = 0$ de la funció $\frac{1}{z^p}$.

270. Considerem $\alpha := \lim_{z \to z_0} f(z)$ i $\beta := \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)}$. És fàcil veure que

a) Si α i β existeixen ($\neq \infty$), aleshores z_0 és una singularitat evitable.
b) Si α existeix ($\neq \infty$) i $\beta := \infty$, aleshores z_0 és un zero de $f(z)$ i un pol $\frac{1}{f(z)}$.
c) Si $\alpha := \infty$ i β existeix ($\neq \infty$), aleshores z_0 és un pol de $f(z)$ i un zero $\frac{1}{f(z)}$.
d) Si $\alpha := \infty$ i $\beta := \infty$, aleshores z_0 és una singularitat essencial de $f(z)$ i de $\frac{1}{f(z)}$.

2. Considerem la funció $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Té una singularitat essencial en $z_0 = 0$ perquè $f^{-1}(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ no és holomorfa. Per tant, no és meromorfa en el pla complex $\mathbb{C}$ sencer.

Aquesta funció té la propietat curiosa següent.

No admet el desenvolupament en sèrie entera a l'entorn de $z_0 = 0$, però admet un desenvolupament de la forma

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots + \frac{1}{n!\,z^n} + \cdots ,$$

que s'anomena «sèrie de Laurent» de $e^{\frac{1}{z}}$.

Fem el canvi de variable $z = \rho\, e^{i\theta}$. Aleshores $f(z) = e^{\frac{1}{\rho}\, e^{-i\theta}} = e^{\frac{1}{\rho}\cos\theta}\, e^{-\frac{1}{\rho} i \sin\theta}$. Per tant, $\left|f(z)\right| = \left|e^{\frac{1}{\rho}\cos\theta}\right| \cdot \left|e^{-i\frac{1}{\rho}\sin\theta}\right| = e^{\frac{1}{\rho}\cos\theta}$.

En resulta que, per als valors θ que fan que $\cos\theta > 0, f(z) \underset{\rho\to 0}{\to} \infty$ i, en canvi, per als valors θ que fan que $\cos\theta < 0, f(z) \underset{\rho\to 0}{\to} 0$.

Què passa en un cercle de radi $\frac{1}{\rho}$ tangent a l'eix imaginari; és a dir, si fem $\rho = \frac{1}{r}\cos\theta$?

Doncs, hem de calcular:

$$f(z) = e^r \Big(\cos\, \big(\tan(r\,\theta)\big) - i\, \sin\, \big(\tan(r\,\theta)\big)\Big) \text{ i } \left|f(z) = e^r\right|.$$

Per tant, $\left|f(z)\right|$ pren tots els valors $\neq 0$, quan r varia en $\mathbb{C}$. A mesura que $z \to 0$, per r fix, $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Per tant, $\big(\tan(r\,\theta) - i\,\tan(r\,\theta)\big)$ pren tots els valors del cercle unitari una infinitat de vegades.

Per tant, $f(z)$ pren tots els valors complexos, excepte el 0, una infinitat de vegades.

Felice Casorati[271]

3. Què passa amb la funció $g(z) = e^{-\frac{1}{z^3}}$? Té un pol en $z = 0$?

Disposem del que cal per enunciar el teorema de Casorati-Weierstrass.[272]

271. Felice Casorati (Pavia [Itàlia], 17 de desembre de 1835 – Casteggio [Itàlia], 11 de setembre de 1890).

272. Per a una presentació històrica, vegeu [Neue78]; per a una demostració més actual, vegeu, per exemple, [Levi70, edició castellana, p. 155-157].

Vegem l'enunciat del teorema tal com el formula Casorati:

§ 88. Teorema. *En un punt de discontinuïtat, una funció admet com a valors tots els nombres; en el supòsit, és clar, que la discontinuïtat no sigui d'aquelles que es poden evitar efectuant un canvi en el valor de la funció únicament en el punt de discontinuïtat.*[273]

Weierstrass presenta el teorema sobre el comportament d'una funció analítica en un veïnatge d'una singularitat inicial en un apèndix de l'article de 1876, vuit anys més tard del de Casorati. Diu:

D'acord amb això, la funció $f(x)$ varia tan discontínuament en un entorn petit del punt c que pren valors tan propers com vulguem a qualsevol valor preescrit. Per tant, no li podem donar un valor determinat en $x = c$.[274]

En termes actuals, el teorema diu, ras i curt:

Si z_0 és una singularitat essencial d'una funció $f(z)$, no constant, analítica en $\mathbb{C} - \{z_0\}$, aleshores, per a cada $\delta > 0, f\left\langle \mathcal{O}_{z_0}(z_0, \delta) \right\rangle$ és dens en $\mathbb{C}$.

Per tant, com diu Weierstrass, no és possible atribuir a $f(z_0)$ un valor que faci que la funció sigui analítica a tot $\mathbb{C}$.

La demostració de Weierstrass difereix de les dues demostracions precedents —la de Casorati[275] i la de Shokhotskii—[276] perquè recorre al teorema de Liouville:[277]

Atès que s'ha parlat de les funcions el·líptiques, vull aprofitar l'avinentesa per donar l'enunciat d'un principi general que, en la meva opinió, imprimeix a l'estudi d'aquesta mena de funcions un caràcter d'unitat i simplicitat molt particulars. Sigui z una variable arbitrària, real o imaginària, i $\psi(z)$ una

273. Vegeu [Caso68, p. 434-435].
274. Vegeu [Weie76, p. 124]. Vegeu, així mateix, [Remm89, edició anglesa, p. 308-309].
275. Vegeu [Neue78, p. 151-152].
276. Vegeu [Neue78, p. 154-155].
277. Vegeu [Liou44].

funció de z ben determinada —em refereixo a una funció que, per a cada valor $x + y\sqrt{-1}$ de z, pren un valor únic, el mateix en tots els casos, en què x i y prenen també els mateixos valors—. Si una funció com aquesta és doblement periòdica, i si a més admetem que mai no esdevé infinita, podem afirmar per això sol que es redueix a una constant.

Aquest principi —que condueix per si sol a nombroses conseqüències útils en altres parts de l'anàlisi— m'ha proporcionat sense dificultat la validesa dels teoremes coneguts, ja siguin relatius a la multiplicitat, a la transformació de les funcions el·líptiques o als des- envolupaments en sèrie. N'he trobat també una demostració...[278]

S'entén —així ho van entendre els qui l'escoltaven i així ho entenen els historiadors de la matemàtica— el teorema següent:

Teorema 4.2 (Teorema de Liouville). *Si* f *és una funció definida, holomorfa i fitada, en* $\mathbb{C}$, *aleshores* f *és constant.*[279]

Vegem ara la demostració del teorema de Casorati-Weierstrass, segons Weierstrass.

Demostració. D'acord amb § 3,[280] $f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)}$, on $G_1(z), G_2(z)$ són funcions enteres sense zeros en comú. La hipòtesi «$f(z)$ té una singularitat essencial en ∞» fa que, almenys, una de les dues sigui transcendent.

a) Si $G_2(z)$ és transcendent, aleshores, segons ha establert Weierstrass a § 3, $G_2(z)$ té una infinitat de zeros i, atès que cap no és un zero de $G_1(z)$ i no hi ha punts d'acumulació, tenim el resultat desitjat.

b) Si $G_2(z)$ és racional, aleshores $G_1(z)$ és transcendent. Podem, doncs, escriure $f(z) = \frac{G_3(z)}{G_2(z)} + G_4(z)$, on $G_3(z)$ és un polinomi, $\mathrm{gr}\big(G_3(z)\big) < \mathrm{gr}\big(G_2(z)\big)$ i $G_4(z)$ és transcendent i entera. I, atès que el quocient $\frac{G_3(z)}{G_2(z)}$ es fa tan petit

278. Vegeu [Liou44, p. 1262-1263].

279. Weierstrass l'enuncia així: «Si f és una funció holomorfa en tot $\mathbb{C}$ —és a dir, una "funció entera"—, no constant, pren valors arbitràriament grans a l'exterior de cada cercle».

280. Vegeu [Weie76, p. 102-103].

com vulguem, quan z es fa gran, el teorema queda establert aplicant el teorema de Liouville a $G_4(z)$.[281] $\square$

Actualment, la demostració més corrent es basa en la «prolongació d'una funció meromorfa» d'un disc foradat al disc sencer. És la següent:

Demostració. Raonem per l'absurd. Existeix un disc de centre u_0 i radi $r > 0$ a l'«exterior de la imatge» per f del disc foradat $0 < |z| < \epsilon$. Tindrem que $\left|f(z) - u_0\right| \geq r$ per a $0 < |z| < \epsilon$. La funció $g(z) = \frac{1}{f(z)-u_0}$ serà holomorfa i fitada en el disc foradat. El valor absolut del seu desenvolupament en sèrie de Laurent $g(z) = \sum_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n$ serà fitat per un cert nombre $M > 0$ per a r prou petit però arbitrari. En resulta que $\left|a_n\right| \leq \frac{M}{r^n}$ per petit que sigui r, i per a tot $n < 0$, que, quan $n < 0$, implica $a_n = 0$. El desenvolupament de Laurent de $g(z)$ es redueix a una sèrie de Taylor que estableix la perllongació de $g(z)$.

Per tant, la funció $\frac{1}{g(z)}$ serà meromorfa en el disc $|z| < \epsilon$, i per tant $f(z) = u_0 + \frac{1}{g(z)}$ també, i això contradiu el fet que f té un punt singular essencial en el zero. $\square$

Existeix una generalització del teorema de Casorati-Weierstrass deguda a Émile Picard.

Teorema 4.3. *Si* 0 *és un punt singular essencial aïllat de la funció* $\mathrm{f(z)}$, *aleshores la imatge per* f *de la corona* $0 < \left|\mathrm{z}\right| < \epsilon$ *és el pla* $\mathbb{C}$ *sencer o el pla* $\mathbb{C} - \{0\}$.[282]

Exemple. Considerem l'exemple d'abans $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$o bé $\cos\frac{1}{z}$.

5. La funció $\wp$ de Weierstrass

Atesa la importància que la variable complexa té en la matemàtica weierstrassiana, m'ha semblat bé cloure aquesta monografia amb una informació succinta de la «funció $\wp$» de Weierstrass.

281. Vegeu [Weie76, p. 122-124].
282. Vegeu [Pica79, p. 745-747].

Comencem considerant un cas senzill i molt familiar.

La circumferència de radi 1, $x^2 + y^2 = 1$, la podem parametritzar mitjançant les funcions trigonomètriques:

$$x = \sin u, \quad y = \cos u \,\big(:= (\sin u)' \big).$$

La funció inversa $u = \arcsin x = \sin^{-1} x$, la podem definir introduint una integral:

$$u = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Per tal de generalitzar aquesta situació particular, fem $x = f(u)$ i $u = f^{-1}(x)$. En resulta que

$$f'(u) = \frac{dx}{du} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-1},$$

on

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{y}.$$

És a dir, $y = f'(u)$.

Això pot servir per a parametritzar qualsevol relació de la forma $y = p(x)$, on $p(x)$ és un polinomi —per tant, aquesta generalització engloba les corbes cúbiques $y^2 = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$—. Per analogia, fem

$$u = g^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}.$$

Tindrem $x = g(u)$, i, diferenciant u, $y = g'(u)$.

Cada integral de la forma $\displaystyle\int R\big(t, \sqrt{p(t)}\,\big)\, dt$, on R és una funció racional i p un polinomi de grau 3 o 4 sense factors múltiples, s'anomena «integral el·líptica».[283]

Les funcions que s'obtenen invertint les integrals són les «funcions el·líptiques» i les corbes que necessiten funcions el·líptiques en llur parametrització són les «corbes el·líptiques».

283. La raó del nom és que apareix en la rectificació de l'el·lipse i de la hipèrbola, en la determinació del període d'un pèndol simple i en la deflexió d'una barra fina elàstica. Vegeu [Melz73, p. 253-269].

Les funcions el·líptiques no són «elementals» —és a dir, no són integrables per primitives en el sentit de Leibniz—, quelcom que ja havia conjecturat Jakob Bernoulli el 1694,[284] i confirmat Liouville l'any 1833.[285]

Sabem que Karl Weierstrass reduí les tres menes d'integrals el·líptiques a les formes[286]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2\,x - g_3}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^3 - g_2\,x - g_3}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{4x^3 - g_2\,x - g_3}}$$

i, a partir d'elles, invertint la primera integral, obtingué la funció el·líptica fonamental.

En concret,

$$\text{si } u = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2\,x - g_3}}, \text{ aleshores } x = \wp(u) = \wp\big(u \big| g_2, g_3\big).$$

Apareix, al si de la variable complexa, la funció $\wp$ de Weierstrass[287] que parametritza la funció $u^2 = 4z^3 - g_2\,z - g_3$.

Teorema 5.1. *La funció* $\wp(z)$ *parametritza la cúbica* $u^2 = 4z^3 - g_2\,z - g_3$.

Demostració. Considerem un reticulat del pla complex

$$\mathcal{R} = \big\{\omega : w = m\,\omega_1 + n\,\omega_2, \text{ amb } m, n \in \mathbb{Z}\big\}$$

de base ω_1 i ω_2 —és a dir, $\mathbb{R}$-independents o, dit altrament, amb $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$—.

Considerem ara la sèrie

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{R} - \{0\}} \left(\frac{1}{\big(z-\omega\big)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$ [288]

284. Vegeu [Bern94, p. 272].

285. Una descripció de l'evolució de les integrals el·líptiques, la podeu trobar al meu article de 2003, «Una història breu de la matemàtica», [Pla03, § 3, p. 63-71].

286. Vegeu [Klin72, edició castellana, volum II, p. 341].

287. Vegeu [Weie82a].

288. Seguiré l'elegant presentació de Cartan [Cart6, p. 156-160], que és la que vaig estudiar el curs 1965-1966 quan feia tercer de la llicenciatura de matemàtiques.

El segon sumand de la part de la dreta està fitat per la sèrie

$$\sum_{\omega\in\mathcal{R},\omega\neq 0}\frac{1}{|\omega|^3}.$$[289]

Per tant, convergeix normalment en tot compacte de $\mathbb{C}$ a una funció $\wp(z)$ que és clarament meromorfa: els pols són —és evident— els punts del reticle $\mathcal{R}$. La podem escriure

$$\wp(z)=\frac{1}{(z-\omega)^2}+g(z),\ \text{amb } g(z) \text{ holomorfa.}$$

La funció $\wp$ és una funció parella. La seva derivada —normalment convergent— és $\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\mathcal{R}}\frac{1}{(z-\omega)^2}$, periòdica per a tot punt del reticle $\mathcal{R}$; és a dir, $\wp'(z)=\wp'(z+\omega)$ i és senar: $\wp'(-z)=-\wp'(z)$. De fet, $\wp$ és doblement periòdica, respecte de cada element de la base: $\wp\big(z+\omega_1\big)=\wp(z)$, $\wp\big(z+\omega_2\big)=\wp(z)$.

A l'origen, $\wp(z)$ té un desenvolupament de Laurent de la forma

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+a_2\,z^2+a_4\,z^4+\cdots\,, \tag{48}$$

on, per mitjà de càlculs simples, es determinen els coeficients

$$a_2=3\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}\quad \text{i}\quad a_4=5\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}$$

Substituïm i obtenim

$$\big(\wp'(z)\big)^2=\frac{4}{z^6}-\frac{8\,a_2}{z^2}-16\,a_4+\cdots\,. \tag{49}$$

Calculem, de forma anàloga, $\big(\wp(z)\big)^3$ i tindrem que

$$\big(\wp'(z)\big)^2-4\,\big(\wp(z)\big)^3=-20\,\frac{a_2}{z^2}-28\,a_4+z^3(\cdots). \tag{50}$$

La funció $\wp'^2-4\,\wp^3+20\,a_2\,\wp+28\,a_4$ és holomorfa en un entorn de l'origen i s'hi anul·la. És holomorfa en un entorn de l'origen i fitada en tot compacte i, per la periodicitat, en tot $\mathbb{C}$. Pel teorema de Liouville és nul·la.

289. N'hi ha prou a fitar en parallelograms $(2\,k, 2\,k)$ centrats en $z=0$.

De tot això, en resulta que

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\left(\wp(z)\right)^3 + 20\,a_2\,\wp - 28\,a_4 = 0. \tag{51}$$

Si ara la comparem amb la corba algèbrica

$$y^2 = 4x^3 - 20\,a_2\,x - 28\,a_4, \tag{52}$$

tenim que $z = \wp(z), y = \wp'(z)$ en donen una representació paramètrica de la mateixa manera que $x = \sin\theta$ i $y = x' = \cos\theta$ la donaven de $y^2 = 1 - x^2$. □

Amb totes aquestes aportacions, queda ben palesa l'aportació que Weierstrass féu —i que, naturalment, és incompleta— en l'anàlisi del tercer terç del segle XIX, tant en l'àmbit real com en el complex.

6. Especificació dels resultats indicats

Aquesta monografia és el fruit de l'elaboració de la xerrada inaugural del curs acadèmic 2015-2016 de la Facultat de Matemàtiques de la UB, que, durant més de cinquanta anys, ha estat casa meva, primer com a estudiant, després com a professor interí, seguidament com a titular i, finalment, com a emèrit. L'he llegida a la fi de la vida professional i, molt probablement, serà la darrera lliçó que hi faré.

Per això, he pretès que sigui una lliçó en un sentit ampli, adreçada als estudiants dels primers cursos del grau: hi exposo on i com van néixer els conceptes d'anàlisi matemàtica que aniran descobrint al començament de la vida acadèmica.

Per aquestes raons, no em sembla forassenyat recollir, com a síntesi, els indrets on els meus companys d'estudi i jo mateix —ja fa mig segle— els vam estudiar[290] i, alhora, indicar els textos on els estudien els alumnes

290. Permeteu-me un record nostàlgic als professors que ens van apropar a l'anàlisi —Rafael Aguiló (1923-1995), Joan Augé (1919-1993), Enrique Linés (1914-1988) i Josep Vaquer (1928-)—, i a alguns companys d'aquella època que, per una raó o una altra, amb més o menys intensitat, han estat rellevants en la meva vida personal i acadèmica: Nadal

actuals de la Facultat, un exercici que —en aquesta conferència històrica i metodològica— lliga el passat i el present, el mestratge humil del qui se'n va amb l'aprenentatge seriós i rigorós dels qui comencen l'aventura: «Res no s'acaba i tot comença. Vénen mecànics de remença amb olis nous de llibertat» —diu el poeta.[291]

Definició de:

—*continuïtat*

—*puntual* [Teix68, p. 223] i [Orte90, p. 97].

—*uniforme* [Teix68, p. 228] i [Orte90, p. 107].

—*convergència uniforme de les sèries* [Teix68, p. 317] i [Orte90, p. 343].
—*derivada* [Teix68, p. 245-247] i [Orte90, p. 130-131].
—*límit de successions i de funcions* [Teix68, p. 207 i 225] i [Orte90, p. 34 i 89].
—*sèrie numèrica i de funcions* [Teix68, p. 299 i 333-335] i [Orte90, p. 311-312 i 345].

Construcció dels nombres reals [Teix68, p. 61-75] i [Orte90, p. 50-57].

Criteri:

—de convergència de Cauchy-Cantor [Teix68, p. 301 i 334] i [Orte90, p. 55, 312 i 346].
—de Weierstrass [Teix68, p. 335] i [Orte90, p. 346].

Preliminars de topologia [Teix68, p. 210-217] i [Orte90, p. 121-124].

Propietats:

—de la convergència de les sèries de funcions [Teix68, p. 335] i [Orte90, p. 353-357].
—del criteri de Darboux [Reyp15, p. 387-388, nota, i p. 493].
—de les funcions derivables [Teix68, p. 247-254] i [Orte90, p. 133-145].

Batle († 1997), Pilar Bayer, Manuel Castellet, Joan Cerdà, Julià Cufí, Josep Grané, Mercè Potau i Carles Simó.

291. Vegeu [Foix64, p. 215].

Funció:

- —contínua no derivable [Teix68, p. 336-337] i [Orte90, p. 352].
- —derivable sense desenvolupament de Taylor [Orte90, p. 147 i 362].
- —$\wp$ de Weierstrass [Cart61, p. 155-160] i [Conw73, segona edició, p. 201].
- —representable en sèrie de
  - —Fourier [Apos60, edició castellana, p. 380-392] i [Conw73, segona edició, p. 198-204].
  - —Taylor [Teix68, p. 259 i 318-320], [Apos60, edició castellana, p. 292-294] i [Orte90, p. 150-153 i 362].

Teorema:

- —d'aproximació de
  - —Taylor. Vegeu l'ítem «representable en sèrie de Taylor».
  - —Weierstrass [Apos60, edició castellana, p. 392-393] i [Orte90, p. 382-386].
- —de Bolzano [Teix68, p. 229] i [Orte90, p. 103].
- —de Bolzano-Weierstrass [Teix68, p. 217-218] i [Orte90, p. 76].
- —de Casorati-Weierstrass [Cart61, p. 88-90] i [Conw73, segona edició, p. 110-111].
- —de Heine [Teix68, p. 228] i [Orte90, p. 108].
- —de Heine-Borel-Lebesgue [Teix68, p. 219] i [Orte90, p. 121-124].
- —de Weierstrass [Teix68, p. 230]i [Orte90, p. 105].

Referències

[Abel26] Niels Henrik ABEL. «Untersuchungen über die Reihe: $1+(m/1)x+m\cdot(m-1)/(1\cdot 2)\Delta x^2+m\cdot(m-1)\cdot(m-2)/(1\cdot 2\cdot 3)\Delta x^3+\cdots$. *Journal of Crelle*, 1(1826), p. 311-339. Vegeu *http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?coverline umhistmath;idno=ABW7150*.

[Abel39] —*Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*. Grøndahl & Søn: Christiania, 1881. Editades per B. Holmboe en dos volums: *Mémoires publiés par Abel, v. 2. Mémoires posthumes d'Abel*. Vegeu *https://ia600402.us.archive.org/14/items/oeuvrescomplte01abel/* i *https://ia600402.us.archive.org/14/items/oeuvrescomplte02abel/*.

[Apos60] Tom M. APOSTOL. *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus*. Addison-Wesley: Reading, Massachusetts, 1960. Traducció castellana de Francisco Vélez Cantarell, *Análisis matemático*. Barcelona: Reverté, 1960. Reeditat el 1976, amb traducció castellana de Josep Pla i Carrera. ISBN 8429150048. Vegeu *https://valeriano.wikispaces.com/file/view/Análisis+matemático+Escrito+por+Tom+M.+Apostol-Enrique+Linés+Escardù.pdf*.

[Barn75] Jonathan BARNES. *Aristotle's posterior analytics*. Clarendon: Londres, 1975. Vegeu *http://classics.mit.edu/Aristotle/posterior.1.i.html*.

[Baro69] Margaret E. BARON. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Hafner Publishing, Inc.: Nova York, 1969. Reimprès per Dover Publications, Inc.: Nova York, 2004. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books?id=S0L9Njm3xp8C&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false*.

[Bell37] Eric Temple BELL. *Men of Mathematics*. Simon & Schuster: Nova York, 1937. Traducció francesa d'Ami Gandillon, *Les grands mathématiciens*. Payot: París, 1939, reeditat el 1959. ASIN: B0000 DLB5R. Traducció castellana de Felipe Jiménez de Azúa, *Los Grandes Matemáticos*. Losada: Buenos Aires, Argentina, 1948. Reeditat l'any 2010. ISBN 9789500397193.

[Bern94] Jakob BERNOULLI. «Curvatura laminæ elasticæ». *Acta Eruditorum*, 13 (1694), p. 262-276. Vegeu *http://books.google.es/books?id=Wa8J4qKCS-0C&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=cognosce&f=false*.

[Bert12] *Mercure de France–Journal Littéraire et Politique, Tome Cinquantième*. Arthus-Bertrand: París, 1812, núm. 553, 22 Février.

[Birk73] Garret Birkhoff. *A Source Book in Analysis*. Harvard University Press: Cambridge, 1973.

[Bois73] Paul Du Bois-Reymond. «Über die Fourierschen Reihen». *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wisenschaften un der G. A. Universität zu Göttingen*, 28(1873), p. 571-584. Vegeu *http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=53885*.

[Bolz17] Bernhard Bolzano. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je wei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Gottlieb Haase: Praga, 1817. Traducció anglesa de J. B. Russ, «A translation of Bolzano's paper on the intermediate value Theorem», a *Historia mathematica*, 7(1980), p. 156-185; un text revisat a [Ewal96, volum 1, p. 225-248] i, encara, a [Russ04, p. 251-278]. Vegeu *http://www.sciencedirect.com/ science/article/pii/0315086080900361*. Traducció francesa de J. Sebesnik, «Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation». *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications* 17(1964), núm. 2, p. 136-164. Vegeu *http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1964_num_17_2_2325*.

[Bolz30] —*Bernard Bolzano's Schriften*, amb contribucions de Petr, Karel i RychlÆk, Karel. Královská česká společnost nauk v Praze: Praga, 1930. Vegeu *http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400333*.

[Bore95] Émile Borel. *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (tesi doctoral de l'Ecole Normale Superieur). *Annales scientifiques de l'E.N.S* (1895). Sèrie 3, 12, p. 9-55. Vegeu *http://www.proba.jussieu.fr/ mazliak/Borel_1895.pdf*.

[Bore98] —*Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars: París, 1898.Vegeu *https://archive.org/stream/leconstheoriefon00borerich#page/n1/mo de/1up*.

[Bott90] Umberto Bottazzini. *Il flauto di Hilbert. Storia de la matematica moderna e contemporanea*. Utet Libreria: Torí, 1990. ISBN 8877500905.

[Bott03] —«Complex Function Theory, 1780-1900», a [Jahn03, p. 244-255].

[Bour60] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann: París, 1960. ISBN 978-3540339380. [Traducció castellana de Jesús Hernández, *Elementos de historia de las matemáticas*. Alianza: Madrid, 1976.] ISBN 8420620181. Vegeu *https://books.google.es/books?id=csgswR8TlQ8C&pg=PA9&lpg=PA9&dq=Bourbaki+Elements+d'histoire&source=bl&ots*

=ve1-Sd1A-k&sig=WSqKehu9ribypQZs-AHaoKwcny4&hl=ca&sa=X&ei=Gd-rVJrhC4L1UMPsgZgB&ved=0CDoQ6AEwCDge#v=onepage&q=critère&f=false.

[Boye49] Carl Benjamin Boyer. *The Concepts of the Calculus. A critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral*. Hafner Publishing, Inc.: Nova York, 1949. Reeditat amb el títol actual, *The History of the Calculus and its conceptual Development: the Concepts of the Calculus*. Dover Publications, Inc.: Nova York, 1959. Vegeu, parcialment, *https://books.google.es/books?id=KLQSHUW8FnUC&pg=PP4&lpg=PP4&dq=The+Concepts+of+the+Calculus.A+critical+and+Historical+Discussion+of+the+%09%09%09Derivative+and+the+Integral&source=bl&ots=hA3JAbyBTU&sig=-k5ufGfOgVJSn7ifEH98CdCNZNc&hl=ca&sa=X&ei=aeeSVNPbMIneaoX0gLgI&ved=0CDgQ6AEwCQ#v=onepage&q=The%20Concepts%20of%20the%20Calculus.A%20critical%20and%20Historical%20Discussion%20of%20the%20%09%09%09Derivative%20and%20the%20Integral&f=false*.

[Boye68] —*A History of Mathematics*. John Wiley & Sons: Nova York, 1968. ISBN 047109374X. Vegeu *https://archive.org/details/AHistoryOfMathematics*. Traducció castellana de Mariano Pérez, *Una historia de la matemática*. Alianza Universidad: Madrid, 1972.

[Cant70] Georg Cantor. «Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt». *Mathematische Annalen*, 72(1879), p 139-142. Vegeu [Cant32, p. 80-83]. Traducció castellana [Gome09]. Vegeu *https://eudml.org/doc/148127*.

[Cant72] —«Über die Ausdehnung eines Satze aus der trigonometrischen Reihen». *Mathematischen Annalen*, 5(1872), p. 123-132, o [Cant32, p. 92-102]. Traducció castellana [Gome09]. Vegeu *http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Cantor/Ausdehnung/Ausdehnung.pdf*.

[Cant80] —«Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen». *Mathematischen Annalen*, 16(1880), p. 267-267, o [Cant32, p. 104-106]. Traducció castellana [Gome09]. Vegeu *https://eudml.org/doc/156889*.

[Cant32] —*Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer-Verlag: Berlín, 1932. Hi ha una reimpressió a Olms: Hildesheim, 1962. Vegeu *http://www.highenergyastrobiology.com/philosophons/philosophes/cantor1932.pdf*.

[Cart61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann: París, 1961.

[Caso68] Felici Casorati. *Teorica delle funzioni di variabili complesse*. Pavia, 1868.

[Cauc11] Augustin-Louis Cauchy. «Sur les limites des connaissances humaines», a [Cauc82, sèrie 2, volum xxvii, p. 5-7]. Vegeu *http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90207s/f1.image*.

[Cauc21] —*Cours d'Analyse de l'École royale politechnique*. Debure: París, 1821. Vegeu *https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog*. Reeditat a [Cauc82, volum iii (1897)]. Hi ha una edició facsímil editada per SAEM, «Thales». Sevilla, 1996. Vegeu també [Cauc09].

[Cauc23] —*Résumé des leçons données a l'École royale politechnique sur le calcul infinitesimal*. Debure: París, 1823. Vegeu *https://archive.org/stream/uvres compltesda07natigoog#page/n9/mode/2up*, p. 5-262. Reeditat a [Cauc82, volum iv (1899), p. 5-261]. Vegeu també [Cauc09].

[Cauc27] —*Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, volum 6, p. 603-612, 1823. Didot: París, 1827. Vegeu *http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k901828/f18*. Reeditat a [Cauc82, volum ii (1899), p. 12-19].

[Cauc29] —*Leçons sur le calcul différentiel*. Imprimerie Bethune: París, 1829. Vegeu *https://archive.org/stream/uvrescompltesda07natigoog#page/n9/m ode/2up*, p. 263-634. Reeditat a [Cauc82, sèrie 2, volum iv (1899), p. 263-615]. Vegeu *http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90196z/*.

[Cauc53] —«Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable rélle ou imaginaire, entre des limitesdonnées». *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 33 (1853), p. 454-459. Vegeu [Cauc82, sèrie 1, volum 12, p. 30-36], a *http://ga llica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90192k/f36*.

[Cauc82] —*Œuvres complètes*. Gauthier-Villars: París, 1882-1974. Vegeu *https://archive.org/search.php?query=Cauchy%20AND%20collection%3Aamericana*, o *http://gallica.bnf.fr/Search?ArianeWireIndex=index&p=1&lang=FR&q=Cauchy&x=0&y=0*.

[Cauc09] —*Cauchy's Cours d'Analyse. An Annoted translation*. Springer: Nova York, 2009. Vegeu *http://users.uoa.gr/spapast/TomeasDidaktikhs/Caychy/CauchyCoursdAnalyseAnAnnotatedTranslationSourcesandStudiesintheHistoryofMathematicsandPhysicalSciences.pdf*.

[Cerd11] Joan Cerdà. *Weierstrass i l'aproximació uniforme*. Lliçó inaugural del curs acadèmic 2011-2012. Universitat de Barcelona: Barcelona, 2011. Editat també al *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 28(2013), p. 51-85. Vegeu *http://www.raco.cat/index.php/ButlletiSCM/article/viewFile/268083/355664*.

[Conw73] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*, 2 volums. Springer-Verlag: Nova York, 1973. Segona edició, 1978. ISBN 038793283 i 0387944605. Vegeu https://psm73.files.wordpress.com/2009/03/connway.pdf, per al primer volum, i http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/conwaycx2.pdf, per al segon.

[Dant08] Victor von Dantscher. *Vorlesungen über die Weierstrassche Theorieder Irrationalen Zahlen*. Druck und Verlag von B. G. Teubner: Leipzig i Berlín, 1908. Vegeu *https://archive.org/details/vorlesungenberd01dantgoog*.

[Darb75] Gaston Darboux. «Memoire sur les fonctions discontinuea». *Annales scientifiques de l'É.N.S*, 4(1875), p. 161-248. Vegeu *http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS_1875_2_4_/ASENS_1875_2_4_57_0/ASENS_1875_2_4_57_0.pdf*.

[Dede72] Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen, erste Auflage*. Braunschweig, 1872. A *Werke*, iii, 315-334. Traducció anglesa [Dede01, edició de 1963, p. 1-27]. Traducció castellana [Dede98, p. 77-94]. Vegeu l'edició original a *http://archive.org/strem/stetigkeitundir00dedegoog#page/n4/mo de/2up* i, amb traducció anglesa, *https://www.scribd.com/doc/179234952/Continuity-and-Irrational-Numbers*.

[Dede01] —Traducció anglesa de Wooster Woodruff Beman, *Essays on The Theory of Numbers. 1. Continuity and irrational numbers. 2. The nature of Meaning of Numbers*. The Open Court Publishing Company. Toronto (Canadà), 1901. Reeditat per Dover Publications Inc.: Nova York, 1963. ISBN 0-486-21010-3.

[Dede98] —Traducció castellana de José Ferreirós Domínguez, *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Alianza: Madrid, 1998. ISBN 8420678589.

[Dieu71] Jean Dieudonné. *Histoire de l'analyse harmonique*. Nauka: Moscou, 1971.

[Dieu78] —*Abregé d'Histoire des mathématiques*. Hermann: París, 1978. Aquest text, originalment en dos volums, fou abreujat en un i publicat per Hermann, París, 1996. També n'era l'editor Jean Dieudonné. Els altres autors eren Pierre Dugac, W. J. i F. Ellison, Jean Guéridon, Marcel Guillaume, Guy Hirsh, Christian Houzel, Paulette Libermann, Michel Lpève, Jean-Luc Verley. ISBN 2705660240.

[Dini78] Ulisse Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Tipografia T. Nistri: Pisa, 1878. Vegeu *https://archive.org/stream/fondamentiperla00dinigoog#page/n7/mode/2up*.

[Diri29] P. G. Lejeune Dirichlet. «Sur la convergence des séries trigonomètriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données». *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4(1829), p. 157-169, a [Diri89, p. 117-132].

[Diri37] —«Über die Darstellung ganz willkülicher Funktionem durch Sinus und Cosinusreihen». *Repertorium der Physik, unter Mitwirkung der Herren Lejeune Dirichlet, Jacobi, Neumann, Riess, Strehlke, herausgegeben von Heinrich Wilhelm Dove und Ludwig Moser*, 1(1837), p. 152-174, [Diri89, p. 313-342].

[Diri89] —*G. Lejeune Dirichlet' Werke*, editat per L. Kronecker. Reimer: Berlín, 1889. Vegeu, parcialment, *https://books.google.es/books?id=r6Lwt-5J-psC&printsec=frontcover&hl=ca#v=onepage&q&f=false*.

[Duga73] Pierre Dugac. «Élements d'Analyse de Karl Weierstrass». *Archive for History of Exact Sciences*, 10(1973), p. 41-173.

[Duga76] —«Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique aux XIX^e siècle. Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind». *Historia mathematica*, 3(1976), p. 5-16.

[Duga76a] —*Richard Dedekind et les fondements de l'analyse*, amb un prefaci de Jean Diuedonné. Vrin: París, 1976.

[Duga78] —«Sur les fondements de l'analyse mathématique de Cauchy à Baire». Universitat de París VI: París, 1978.

[Duga78a] —«Fondements de l'Analyse», a [Dieu78, edició de 1996, p. 237-291].

[Duga89] —«Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierestrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue». *Archives internationales d'histoire des sciences*, 39(1989), p. 69-110.

[Duga03] —*Histoire de l'Analyse autour de la notion de limite et de ses voisinages*, Vuibert: París, 2003. ISBN 2711753115.

[Dura03] Antonio J. Durán. *Pasiones, piojos, dioses y matemáticas*. Ediciones Destino: Barcelona, 2009. ISBN 9788423341276.

[Edwa79] C. H. Edwards. *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag: Nova York, 1979. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books?id=D2SWE_iZjYsC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false*.

[Eule48] Leonhard Euler. *Introductio in Analysin Infinitorum*. Lausana: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. Opera Omnia, sèrie 1, vol. 8. Leipzig, 1922. Vegeu *http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69587.r=introductio+in+analyssin+infinitorum.langEN*.

[Ewal96] William Bragg Ewald (editor). *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, dos volums. Oxford University Press: Oxford, 1996.

[Feje03] Lipót Fejér. «Untersuchungen über Fourier'sche Reihen». *Mathematische Annalen*, 58(1903), p. 51-69.

[Flet74] T. M. Flett. «Some historical notes and speculations concerning the mean value theorems of the differential calculus». *Bulletin of the Institute of Mathematics and Applications*, 10(1974), p. 66-72.

[Foix74] Josep-Vicenç Foix Mas. *Obres poètiques*. Edicions Nauta: Barcelona, 1964.

[Four07] Joseph Fourier. «Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides». *Présenté le 21 décembre 1807 à l'Institut national-Nouveau Bulletin des sciences par la Société philomatique de Paris*, volum i, p. 112-116, núm. 8, març 1808. Vegeu [Four90, p. 215-221].

[Four11] —«Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides». *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, années 1821 et 1822*, volum v, p. 153-246. Vegeu [Four90, p. 1-94].

[Four22] —«Théorie analytique de la chaleur». Chez Firmin Didot: París, 1822. Vegeu *https://archive.org/stream/thorieanalytiq00four#page/n7/mode/2up*, o bé [Four89].

[Four89] —*Œuvres complètes*, volum 1, editades per Gaston Darboux; Gauthier -Villars: París, 1889. Vegeu *https://archive.org/stream/uvresdefourier00natigoog#page/n11/mode/2up*.

[Four90] —*Œuvres complètes*, volum 2, editades per Gaston Darboux; Gauthier-Villars: París, 1889. Vegeu *http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_FOURIER_2*.

[Four72] —«Théorie de la chaleur dans les solides, lu à l'Institut le 21 décembre 1807», a *Joseph Fourier*, publicat per Ivor Grattan-Guinness. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts, 1972, p. 33-440.

[Gelb03] Bernard R. Gelbaum i John M. H. Olmsted. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, Inc: Nova York, 2003. Vegeu *http://kryakin.org/am2/_Olmsted.pdf*.

[Gerv70] Joseph Gerver. «The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of π». *American Journal of Mathematics* (1970), 92, p. 33-55. Vegeu *http://www.pnas.org/content/62/3/668.full.pdf*.

[Gome09] Carlos Gómez Bermúdez. *Cantor, Georg. Sistema de números y conjuntos*. Universitat de la Corunya: la Corunya, 2009.

[Grat80] Sir Ivor Grattan-Guinness et alii. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. Princeton University Press:

Princeton, Nova Jersey, 1980. Traducció castellana de Mariano Martínez Pérez, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial: Madrid, 1984. ISBN 8420623873. Vegeu *http://books.google.es/books/about/From_the_Calculus_to_Set_Theory_1630_191.html?id=OLNeNIbD3jUC&redir_esc=y*.

[Hair96] Ernst Hairer i Gerhard Wanner. *Analysis by Its History*. Springer Verlag: Nova York, 2008. ISBN 9780387770314. Vegeu, parcialment, *https://books.google.es/books?id=Kzp4zPIL8B0C&printsec=frontcover&dq=Hairer+and+Wanner&hl=ca&sa=X&ei=JcSWVLj6N8uvafKVgfgG&ved=0CCMQ6AEwAg#v=onepage& q=Hai rer%20and%20Wanner&f=false*.

[Hein69] Heinrich Heine. «Über trigonometrischen Reihen». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 71(1869), p. 353-365. Vegeu *https://eudml.org/doc/148121*.

[Hein72] —«Die Elemente der Functionenlehre». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74(1872), p. 172-188. Vegeu *http://www.cs.elte.hu/badam/matbsc/11o/heine1874.pdf*.

[Herr12] Alan Herreman. «L'inauguration des séries trigonométriques dans la Théorie analytique de la chaleur de Fourier et dans la controverse des cordes vibrantes». Vegeu *http://arxiv.org/pdf/1211.0794.pdf*.

[Hilb00] David Hilbert. «Über den Zahlbegriff». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8(1900), p. 180-184. Vegeu *https://eudml.org/doc/144659*. Traducció castellana a [Hilb53, apèndix vi, p. 244-249].

[Hilb53] —*Fundamentos de Geometría*. Traducció castellana de Francisco Cebrián. Centro Superior de Investigaciones Científicas: Madrid, 1953. ISBN 840007114X. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books/about/Fundamentos_de_la_geometr%C3%ADa.html?id=3VufvuQ6WRwC&redir_esc=y*.

[Hyks00] Magdalena Hykšová. «Bolzano's inheritance research in Bohemia», a *Mathematics throughout the ages. Contributions from the summer school and seminars on the history of mathematics and from the 10th and 11th Novembertagung on the history and philosophy of mathematics* (editor Eduard Fuchs). Holbaek, Dinamarca, 28-31 d'octubre de 1999, i Brno, República Txeca, 2-5 de novembre del 2000. Praga: Prometheus, 2001. ISBN 8071962198, p. 67-91. Vegeu *http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401238*.

[Jahn03] Hans Niels Jahnke. *A History of Analysis*. American Mathematical Society i London Mathematical Society. Estats Units d'Amèrica: 2003. ISBN 0821826239. Vegeu, parcialment, *https://books.google.es/books?id=CVRZEXFVsZkC&printsec=frontcover&dq=Jahnke+History+of+Analy*

sis&hl=ca&sa=X&ei=cGeuVITvEYzvaKGhgKAH&redir_esc=y#v=onepage&q=Jahnke%20History%20of%20Analysis&f=false.

[Klin72] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press: Oxford, 1972. ISBN 0195014960. Traducció castellana de Carlos Fernández i Alejandro Garciadiego, sota la coordinació de Jesús Hernández, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza: Madrid, 1992. 3v. ISBN 842062957X.

[Knop18] Konrad Knopp. «Ein einfaches Verfahren zur Bildüng stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen», *Mathematische Zeitschrift*, 2(1918), p. 1-26.

[Koss72] Ernst Kossak. *Die Elemente der Arithmetik*. Programm Friedr-Werder Gymm.: Berlín, 1972.

[Kram70] Edna E. Kramer. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. Princeton University Press: Princeton, 1970. Vegeu, parcialment, *https://books.google.es/books?id=LLEZQC74gVcC&printsec=frontcover&dq=Kramer+The+Nature+and+Grouth&hl=ca&sa=X&ei=uXTkVPnuLonnUr71g5AD&redir_esc=y#v=onepage&q=Kramer%20The%20Nature%20and%20Grouth&f=false*.

[Lagr97] Joseph Louis Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits ê l'analyse algébrique des quantités*. Mlle Courcier: París, 1797. Vegeu *http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-86263&I=21&M=tdm*.

[Lag01] —*Leçons sur le calcul des fonctions*. Courcier: París, 1801. La segona edició, de 1806, es troba a *Œuvres complètes*, volum 10, p. 5-541. Vegeu *http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_LAGRANGE_10_5_0*.

[Lebe04] Henri Lebesgue. «Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France». Gauthier-Villars: París,1904. Vegeu *https://archive.org/stream/leconegrarecher00leberich#page/n0/mode/2up*.

[Levi70] Norman Levinson i Raymond M. Redheffer. *Complex Variables*. Holden-Day, Inc.: San Francisco, 1970. Traducció castellana, *Curso de variable compleja*. Editorial Reverté: Barcelona, 1975.

[Liou33] Joseph Liouville. «Mémoire sur les transcendentes elliptiques de premiere et seconde spece considerées comme fonctions de leur amplitude».*Journal de l'École Polytechnique*, 23(1833), p. 37-83. Vegeu *https://books.google.es/books?id=BplbAAAAQAAJ&pg=PA441&lpg=&dq=Memoire+sur+les+transcendantes+elliptiques+de+premiere+et+seconde+spece+consi*

der%5C%27ees+comme+fonctions+de+leur+amplitude&source=bl&ots=2rg8Vyj9iK&sig=dMgAjG3ZtY5Qb6Elg8h7YdkFm6o&hl=ca&sa=X&ei=5WPnVLKnDMfraJSpgMgD&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

[Liou44] —«Remarques de M. Liouville». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, p. 1844 i 1261-1263. Vegeu *http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-2978&I=1263&M=chemindefer*.

[Lutz03] Jesper Lützen, «The foundation of analysis in the 19th century», a [Jahn03, p. 155-196].

[Melz73] Z. A. Melzak. *Companion to Concrete Mathematics*. Jonh Wiley Sons: Nova York, reeditat per Dover Publications, Inc.: Nova York, 2007. ISBN 9780486457819. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books?hl=ca&id=aZ-_GxnhsUgC&q=253#v=snippet&q=253&f=false*.

[Mera72] Charles Méray. *Nouveax précis d'analyse infinitésimal*. F. Savy, Libraire-Éditeur: París, 1872. Vegeu *http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k995638*.

[Merz04] John Theodore Merz. *A history of European thought in the nineteenthcentury*, 4 volums. W. Blackwood and Sons: Edimburg i Londres, 1904-1914. Vegeu *http://www.biodiversitylibrary.org/search?searchTerm=Merz#/titles*.

[Mesc61] Herbert Meschkowski. *Denkweisen großer Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik*. Friedr. Vieweg & Sohn: Brunsvic, 1961. Traducció anglesa de John Dyer-Bennet, a [Mesc64]. Vegeu *https://books.google.es/books?id=ILubBgAAQBAJ&pg=PR2&lpg=PR2&dq=H+Meschkowski+Denkweisen&source=bl&ots=DZY8HKittD&sig=GfDnkE70TjtTtjpa8AMzL-2VZJE&hl=ca&sa=X&ei=TZkQVfKzHcnlaPXkgcAL&ved=0CD4Q6AEwBQ#v=onepage&q=H%20Meschkowski%20Denkweisen&f=false*.

[Mesc64] —*Ways of thought of great mathematicians: An Approach to the History of Mathematics*. Holden Day: San Francisco, 1964.

[Mitt02] Gösta Mittag-Leffler. «Une page de la vie de Weierstrass». *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathematiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars: París, 1902. Vegeu *https://archive.org/stream/compterendudude00dupogoog#page/n0/mode/2up*. La presentació és un extracte de «Weierstrass at Sonja Kowaleswky». *Acta Mathematica*, 39(1923), p. 133-198. Vegeu *http://download.springer.com.sire.ub.edu/static/pdf/780/art%253A10.1007%252FBF02392859.pdf?auth66=1424909568_2c444f961aec8267f37354c266fc0aa6&ext=.pdf*.

[Neue78] E. NEUENSCHWANDER. «Studies in the history of complex function theory I: The Casorati-Weierstrass theorem». *Historia Mathematica* 5(1978), p. 139-166. Vegeu *http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/03150860 78900472*.

[Neue81] —«Studies in the history of complex function theory II: Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass». *Bulletin of the American Mathematical Society* 5(1981), p. 87-105. Vegeu *http://www.ams.org/journals/bull/1981-05-02/S0273-0979-1981-14923-5/home.html*.

[Olse04] Lars OLSEN. «A New Proof of Darboux's Theorem». *American Mathematical Montly*, 111(8), 2004, p. 713-715. Vegeu *https://www.ime.usp.br/oliveira/DARBOUXPROPERTY.pdf*.

[Orte90] Joaquín M. ORTEGA ARAMBURU. *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Bellaterra: Servei de Publicacions. Universitat Autònoma de Barcelona, 1990. Reeditat l'any 2002. ISBN 847488800X. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books/about/Introducció_a_l_anàlisi_matemàtica.html?id=MrgNf2sn4M8C*.

[Pica79] E. PICARD. «Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel». *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 89(1879), p. 745-747. Vegeu *http://visualiseur.bnf.fr/CadresFene tre?O=NUMM-3046&I=801&M=tdm*.

[Pinc80] Salvatore PINCHERLE. «Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass». *Giornale di Matematiche* (1) 18(1880), p. 178-254 i 317-354, publicat de forma separada per Benedetto Pellerane Edittore: Nàpols, 1880, 118 pàgines. Vegeu *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN59941528 2_0018/DMDLOG_0012* i *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415282_0018/D MDLOG_0017* o bé *http://mathematica.sns.it/opere/367*.

[Pink00] Allan PINKUS. «The Weierstrass Approximation Theorems». *Journal of Approximation Theory*, 107(2000), p. 1-66. Vegeu *http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021904500935081*.

[Pla92] Josep PLA I CARRERA. «The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss». *Publicacions matemàtiques*, 36(1992), p. 879-911. Vegeu *http://www.raco.cat/index.php/PublicacionsMatematiques/article/view/38183/38057*.

[Pla93] —«Dedekind y la teoría de conjuntos». *Modern Logic* 3 (1993), p. 215-305. Vegeu *http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.rml/1204835013*.

[Pla03] —«Una història breu de la matemàtica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 2003(18), núm. 1, p. 47-219. Vegeu *http://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/9785/9779*.

[Pla05] —«Aproximació històrica i heurística al teorema fonamental de l'àlgebra». *Conferències FME. Curs Gauss 2005-2006* (editor, Sebastià Xambó), p. 231-301. Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC): Barcelona, 2005. Vegeu també *http://upcommons.upc.edu/video/handle/2099.2/309*.

[Pla07] —«Lliçó darrera». *Conferències FME. Curs Gauss 2006-2007* (editor Sebastià Xambó), p. 201-232. Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC): Barcelona, 2007. Disponible també a *http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2010/v2010n02.pdf*.

[Pla12] —«Reflexions d'un neòfit en didàctica de la matemàtica». *NouBiaix*, 31(2012), p. 8-22. Vegeu *https://sites.google.com/site/noubiaix/noubiaix31*.

[Pla15] —*Història de la Matemàtica grega. Resultats, contextos i textos*, volum primer. IEC: Barcelona, 2015, pendent de publicació.

[Port97] R. Michael Porter. «Contribuciones de Weierstrass a la variable compleja». *Miscelánia Matemática* 25(1997), p. 59-74. Vegeu *http://www.miscelaneamatematica.org/Misc25/porter.pdf*.

[Remm89] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie*. I, Grundwissen Mathematik 5. Springer-Verlag: Berlín, 1989. Traducció anglesa de Robert B. Burckel, *Theory of Complex Functions*. Springer-Verlag: Nova York, 1991. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books?id=uP8SF4jf7GEC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=Weierstrass&f=false*.

[Reyp15] Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja i César A. Trejo. *Análisis Matemático*, en tres volums. Kapelusz: Buenos Aires, 1915.

[Roll90] Michel Rolle. *Traité d'Algèbre, ou principles generaux pour resoudre les questions de Mathématique*. Estienne Michallet: París. Vegeu *http://books.google.es/books?id=Zu64zLVfjfsC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false*.

[Rocc08] C. Rocchini. *Weierstrass Function Wikipedia*. 2008. Vegeu *http://upload.wikimedia. org/wikipedia/commons/6/60/WeierstrassFunction.svg*.

[Rudi53] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill: Nova York, 1953. Traducció castellana de Mariano Baratech, *Principios de Análisis Matemático*. Ediciones del Castillo: Madrid, 1966. Vegeu *https://notendur.hi.is/vae11/%C3%9Eekking/principles_of_mathematical_analysis_walter_rudin.pdf*.

[Rusn94] Paul Rusnock. *Bolzano's Philosophy and the Emergence of Modern Mathematics*. Editions Rodopi: Amsterdam, 1994. Vegeu, parcialment, *https://books.google.es/books?id=HuUjhwIonC4C&pg=PA74&lpg=PA74&dq=Bolzano+Der+binomische+Lehrsatz&source=bl&ots=hjxZDVdKAa&sig=N2p9Ijp07qUJHyGeeHUur4jzDAU*&hl=ca&sa=X&ei=8_b0VMqKHsjvULKtgvAB&ved=0CCAQ6AEwAA#v=onepage&q=Bolzano%20Der%20binomische%20Lehrsatz&f=false*.

[Russ04] Steve Russ. *The Mathematical works of Bernard Bolzano*. Oxford University Press. Oxford, 2004. ISBN 0198539304. Vegeu, parcialment, *http://books.google.es/books/about/The_Mathematical_Works_of_Bernard_Bolzan.html?id=zp7cLQn0x3gC&redir_esc=y*.

[Rych61] Karel RychlÆk. «La théorie des nombres réels dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano». *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 14(1961), p. 313-327. Vegeu *http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1961_num_14_3_3954*.

[Schu13] Gert Schubring. «El Concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes». *NouBiaix*, 32, abril de 2013, p. 14-27 (primera part); 33, octubre de 2013, p. 6-21 (segona part). Vegeu *http://raco.cat/index.php/Noubiaix/search/authors/*.

[Schw72] H. A. Schwarz. «Zur Integration der partiellen Differentialgleichung». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74, p. 218-253. Vegeu *https://eudml.org/doc/148178*.

[Sokh72] Yulian V. Sokhotskii. *A Theory of Integral Residues with Some Applications*, en rus. Sant Petersburg, 1868.

[Spiv64] Michel Spivak. *Calculus*. W. A. Benjamin: Nova York, 1964. ISBN 0914098896. [Traducció castellana de Bartolomé Frontera, *Cálculo Infinitesimal*. Reverté, S.A. Barcelona, 1970.] ISBN 8429151584.

[Ston37] Marshall Harvey Stone. «Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology». *Transactions of the American Mathematical Society*, 41(1937), p. 375-481.

[Stol93] Otto Stolz. *Grundzüge der differential - und integralrechnung*, 3 volums. B. G. Teubner: Leipzig, 1893-1899.

[Ston48] —«The Generalized Weierstrass Approximation Theorem». *Mathematics Magazine*, 21(1948), p. 167-184.

[Stru69] Dirk J. Struik. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press: Cambridge. Massachusetts, 1969. ISBN 0691084041.

Disponible en línia, parcialment, a *http://books.google.es/books?id=XmRsZhJZGhEC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false*.

[Teix68] Josep Teixidor i Josep Vaquer. *Curso de matemáticas*. Universitat de Barcelona: Barcelona, 1968.

[Thim03] Johan Thim. *Continuous Nowhere Differentiable Functions*. MSc Programmes in Engineering Computer Science and Engineering, 2003: 320. Vegeu *http://epubl.ltu.se/1402-1617/2003/320/index-en.html*.

[Thom70] Carl Johannes Thomae. *Abriss einer Theori der complexen Funktionen und Thetafunktionen einer Veränderlichen*. Nerbart: Halle, 1870. Vegeu *http://catalog.hathitrust.org/Record/006199689*.

[Twed11] J. Christopher Tweddle. «Weierstrass's Construction of the Irrational Numbers». *Mathematische Semesterberichte*, abril del 2011, volum 58(1), p. 47-58. Vegeu *http://faculty.evansville.edu/ct55/Portfolio/Weierstrass Article.pdf*.

[Ullr89] Peter Ullrich. «Weierstraß' Vorlesung zur "Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen"». *Archive for History of Exact Sciences*, 40(1989), 2, p. 143-172.

[Vebl04] Oscar Veblen. «The Heine-Borel theorem». *Butlletin of American Mathematical Society*, 10(1904), p. 436-439. Vegeu *http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183417954*.

[Weie41] Karl Weierstrass. *Zur theorie der Potenzreihen*. Manuscrit de 1841.Vegeu [Weie94, p. 67-74], a *https://archive.org/stream/mathematischewer01weieuoft#page/66/mode/2up*.

[Weie61] —*Differentialrechnung, Sommer Semester 1861*. Manuscrit per H. A. Schwarz, Institut Mittag-Leffler: Djursholm, Suècia. Vegeu [Duga73, p. 118-125] o [Duga78, p. 63-67].

[Weie65] —*Principien der Theorie der analytischen Funktionen, Wintersemster 1865-1866*. Manuscrit per M. Pasch, Biblioteca de la Universitat de Giessen, Alemanya.

[Weie72] —«Über continuirliche functione eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmiten differentialquotienten besitzen». *Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872*, a [Weie95, p. 71-74].

[Weie74] —*Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. Nach derVorlesungen im S.S, 1874*, segons von Georg Hettner, Biblioteca de l'Institut de Matemàtiques de Gotinga, 1988, amb les notes d'Ernst Hurwitz, editat per Peter Ullrich. El manuscrit es pot veure, parcialment, a

[Duga73, p. 125-129], i complet a *http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiuc.565673;view= 1up;seq=1*.

[Weie76] —«Zur Theorie der eindeutingen analytischen Functionen». *Abhandlungen in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1876, 11-60, a [Weie95, p. 77-124].

[Weie78] —*Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen* Summer-Semester, segons Adolf Hurwitz, Bibliothek der Eidg. Technisc Hochschuhle Zürich, 1878. Es pot veure, parcialment, a [Duga73, p. 96-118], i complet a *http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiuc.565673;view=1up;seq=1*.

[Weie80] —«Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques». *Bulletin de la Société des Mathématiques*, (2) 5 (1881), p. 157-183. Vegeu *https://eudml.org/doc/85092*.

[Weie80a] —«Zur Fubktionenlehre». *Monatsb. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, math-phys. Kl.*, 1880, p. 719-743. Vegeu [Weie95, p. 201-233], a *https://archive.org/stream/mathematischewer02weieuoft#page/200/mode/2up*.

[Weie81] —*Theorie der elliptischen Functionen*. Notes manuscrites de les lliçons impartides el curs 1880-1881. Vegeu *http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/compoundobject/collection/coll7/id/61734/rec/14*.

[Weie82] —*Theorie der analytischen Functionem, nach Vorlesungen des Professor Weierstrass, Wintersemester 1882/1883*. Vegeu *http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/39821*.

[Weie82a] —«Zur Theorie der elliptischen Functionem». *Aus des Sitzengebericht der Königl. Akademie der Wissenschaften*, 27 d'abril del 1882, p. 443-451. Vegeu [Weie95, p. 245-255].

[Weie85] —«Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen». *Sitzungsberichte der Akademiezu Berlin* (1885), 633-639 i 789-805. Traducció francesa del mateix Weierstrass, «Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle», *J. Mat. Pure et Appl. (Journal de Liouville)*, 2 (1886), p. 105-113 i 115-138. Vegeu *http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1886_4_2_A3_0.pdf*.

[Weie86] —*Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*, semestre de 1886, segons G. Thieme. Institut de Matemàtiques de la Universitat Humboldt de Berlín. Vegeu-lo, parcialment, a [Duga73, p. 129-136] i, complet, a *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre: Vorlesung, gehalten in Berlin 1886 Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren*

Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86, editat per Reinhard Siegmund-Schultze. Springer: Berlín, 1989. ISBN 9783211958414.

[Weie94] —*Mathematische Werke*, volum i, Mayer und Müller: Berlín, 1894. Vegeu *https://archive.org/details/mathematischewer01weieuoft*.

[Weie95] —*Mathematische Werke*, volum ii, Mayer und Müller: Berlín, 1895. Vegeu *https://archive.org/details/mathematischewer02weieuoft*.

[Weie03] —*Mathematische Werke*, volum iii, Mayer und Müller: Berlín, 1903. Vegeu *https://archive.org/stream/mathematischewer03weieuoft#page/n9/mode/2up*.

[Weie15] —*Mathematische Werke*, volum v, Mayer und Müller: Berlín, 1915. Vegeu *https://archive.org/stream/mathematischewer05weieuoft#page/n1/mode/1up*. Podem veure els textos manuscrits dels cursos 1880-1881 i 1881-1882 a *http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/61734* i *http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/39821*.

[Weyl19] Herman Weyl. «Der circulum vitiosus in der heutigen Begründug der Analysis». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 28 (1919), p. 85-92. Vegeu *https://eudml.org/doc/145566*.

Universitat de Barcelona
Publicacions i Edicions