Lliçó inaugural
del curs acadèmic
2016-2017

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

Definibilidad en estructuras matemáticas

Enrique Casanovas Ruiz-Fornells
Catedràtic del Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Definibilidad en estructuras matemáticas

Lliçó inaugural
del curs acadèmic
2016-2017
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Definibilidad en estructuras matemáticas

Enrique Casanovas Ruiz-Fornells
Catedràtic del Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 5 d'octubre 2016

Universitat de Barcelona
Edicions

Adolf Florensa, s/n, 08028 Barcelona, tel.: 934 035 430, fax: 934 035 531,
comercial.edicions@ub.edu, www.publicacions.ub.edu

ISBN: 978-84-9168-035-2

Sumario

1. Introducción

Una *estructura* es un objeto matemático de la forma

$$\mathcal{M} = (M, R_1, R_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$$

donde

- M es un conjunto no vacío, el *universo* de la estructura.
- $R_i \subseteq M^{n_i}$ es una relación en M.
- $f_i : M^{m_i} \to M$ es una operación en M.
- $c_i \in M$ es un elemento destacado de M, una constante de M.

Una estructura puede tener pocas o muchas relaciones, operaciones y elementos destacados, y puede carecer de alguno de estos ingredientes. Unos pocos ejemplos familiares contribuirán a mejorar la comprensión:

- Los cuerpos de los números racionales $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$, los números reales $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ y los números complejos $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$.
- Grupos como los enteros $(\mathbb{Z}, +, 0)$ y grupos ordenados como $(\mathbb{Z}, +, <, 0)$ y $(\mathbb{Q}, +, <, 0)$.
- Conjuntos ordenados como $(\mathbb{Q}, <)$ y $(\mathbb{Z}, <)$.
- Los números naturales con distintas operaciones y relaciones, como $(\mathbb{N}, +, 0)$ y $(\mathbb{N}, S)$ (donde S es la función sucesor) y $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$.

Implícitamente hemos aceptado que las relaciones, las operaciones y las constantes de una estructura se pueden enumerar mediante números naturales. Esto no es así siempre y nos hace perder un poco de generalidad, pero también nos permitirá eliminar algunos tecnicismos en la enunciación de resultados. En todo caso, los ejemplos más naturales son de ese tipo.

En lógica matemática se utilizan lenguajes formales de primer orden para caracterizar, en la medida de lo posible, las estructuras por las que uno se interesa y para estudiar sus conjuntos, relaciones y operaciones. Aquí vamos a contentarnos con una descripción superficial del lenguaje de primer orden. Un lenguaje de primer orden apropiado para la estructura

$\mathcal{M}$ hace uso de símbolos correspondientes a las relaciones, funciones y elementos destacados de la estructura así como de variables, cuantificadores y conectores lógicos. Siempre tiene, además, un símbolo para la igualdad con el que se pueden construir ecuaciones. En la práctica, muy a menudo no distinguimos notacionalmente las relaciones, operaciones y elementos destacados de una estructura de los símbolos del lenguaje formal que se usan para nombrarlos.

Los *términos* del lenguaje son las expresiones que se obtienen a partir de las constantes y las variables mediante la aplicación de los símbolos correspondientes a las operaciones. Las *fórmulas* se obtienen mediante los conectores booleanos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y cuantificación elemental $\forall x$, $\exists x$ a partir de las fórmulas atómicas, que son ecuaciones entre términos $t_1 = t_2$ y predicaciones básicas de la forma $R_i(t_1, \ldots, t_n)$ entre términos. Los *enunciados* son fórmulas en las que todas las variables que aparecen han sido cuantificadas y las *teorías* son conjuntos de enunciados. Es importante tener bien presente que las variables cuantificadas varían sobre elementos del universo de la estructura, no sobre subconjuntos suyos u objetos más complejos. Para mayor concreción se recomienda acudir a un manual de lógica, como por ejemplo el de H. B. Enderton [3].

Los enunciados del lenguaje formal son verdaderos o falsos en la estructura $\mathcal{M}$, lo cual no quiere decir que tengamos un algoritmo para decidir en cada caso si lo son o no. Escribimos $\mathcal{M} \models \sigma$ para indicar que el enunciado σ es verdadero en $\mathcal{M}$. La *teoría* de una estructura $\mathcal{M}$ es el conjunto $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ formado por los enunciados del lenguaje formal de primer orden que son verdaderos en $\mathcal{M}$, es decir:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\sigma \mid \mathcal{M} \models \sigma\}.$$

Vamos a necesitar hablar de dos relaciones entre estructuras, la isomorfía $\cong$ y la equivalencia elemental $\equiv$.

- $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ si y sólo si hay una biyección entre los universos M y N que transforma las relaciones, operaciones y constantes de $\mathcal{M}$ en los de $\mathcal{N}$.
- $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ si y sólo si los enunciados del lenguaje formal de primer orden que son verdaderos en $\mathcal{M}$ y en $\mathcal{N}$ son los mismos, es decir, si y sólo si $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Obsérvese que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ indica que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son indistinguibles por sus propiedades matemáticas, mientras que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ dice simplemente que no las podemos distinguir mediante las propiedades que pueden expresarse en el lenguaje formal de la lógica de primer orden. Estas nociones pertenecen a los aspectos más elementales de la teoría de modelos. Como texto de referencia para estas cuestiones y, en general, para todo lo que sigue, recomendamos el libro [23] de Katrin Tent y Martin Ziegler.

Las preguntas iniciales que, desde la perspectiva de la teoría de modelos, uno se puede plantear acerca de una estructura

$$\mathcal{M} = (M, R_1, R_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$$

incluyen muy posiblemente las siguientes:

1. ¿Es posible dar una lista comprensible de axiomas para la teoría de $\mathcal{M}$?
2. ¿Existe un algoritmo para decidir qué enunciados son verdaderos en $\mathcal{M}$?
3. ¿Cuáles son las estructuras $\mathcal{N}$ tales que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$?
4. ¿Qué relaciones, operaciones y elementos son definibles en $\mathcal{M}$?

Adelantamos alguna información sobre las posibles respuestas:

- Las dos primeras preguntas resultan equivalentes y muy a menudo no tienen respuesta positiva.
- Excepto en casos triviales, la respuesta a la tercera pregunta no es que son únicamente las estructuras isomorfas a $\mathcal{M}$.
- Nuestro propósito es mostrar cómo la última pregunta está muy relacionada con las anteriores.

Una teoría T es *axiomatizable* si es posible dar una lista efectiva de *axiomas* para T. Los axiomas son enunciados de T a partir de los cuales se pueden obtener todos los demás como *teoremas*, como enunciados demostrados. La teoría T es *decidible* si existe algún algoritmo aplicable a los enunciados del lenguaje formal para resolver si pertenecen o no a T.

Finalmente, la teoría T es *completa* si siempre que un enunciado del lenguaje formal no pertenece a T, entonces pertenece a T la negación de ese enunciado.

La teoría $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ de una estructura $\mathcal{M}$ es siempre una teoría completa. Para este tipo de teorías, axiomatizabilidad y decidibilidad son equivalentes, presuponiendo que tenemos un contexto efectivo, es decir, un contexto en el que tiene sentido aplicar algoritmos, y por tanto los enunciados del lenguaje de primer orden se dan de manera sintácticamente verificable y la lista de axiomas puede ser generada de modo computable. Por un lado, si podemos decidir con un algoritmo cuáles son los enunciados verdaderos en $\mathcal{M}$, podemos también dar una lista efectiva de ellos y tomarlos directamente como axiomas. Por otro lado, si tenemos una lista efectiva de axiomas (generada por un algoritmo), gracias al cálculo deductivo obtenemos a continuación una lista efectiva de los teoremas, que son los enunciados verdaderos en $\mathcal{M}$. Podemos usar esa lista como procedimiento de decisión: en el paso n del algoritmo miramos si el enunciado o su negación ocupa el lugar n en la lista efectiva de los teoremas, y si la respuesta es negativa en ambos casos, se continúa.

Conviene recordar que, como Kurt Gödel demostró en 1931 (véase [5]), no es posible axiomatizar la aritmética, es decir, la teoría completa de $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$. La aritmética de Peano de primer orden, de la que hablaremos después, no es más que un fragmento de esta teoría.

En segundo lugar, y contrastando con lo anterior, hay que añadir que Alfred Tarski mostró en 1951 (véase [21] y [22]) que la teoría del cuerpo de los números complejos sí es decidible y también demostró la decidibilidad de la teoría del cuerpo ordenado de los números reales. En el primer caso, su teoría es la de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, y en el segundo, es la de los cuerpos ordenados real cerrados, los cuerpos ordenados que satisfacen el teorema del valor intermedio para polinomios.

En lo que respecta a la cuarta pregunta, la descripción de las relaciones definibles, el método más habitual está basado en la *eliminación de cuantificadores*. Consiste en ampliar el lenguaje de modo natural, añadiendo si es preciso relaciones, operaciones o elementos definibles, de manera que finalmente se obtenga una estructura en la que toda fórmula es equivalente a una fórmula sin cuantificadores. A. Tarski demostró que las teorías mencionadas de cuerpos tienen eliminación de cuantificadores en el lenguaje de anillos y en el lenguaje de anillos ordenados, respectivamente. Gracias a ello, sabemos cuáles son los subconjuntos de $\mathbb{C}$ que son definibles en $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$: son los subconjuntos finitos y sus complementos. Y los subconjuntos definibles de $\mathbb{C}^n$ (las relaciones n-arias definibles) son los conjuntos constructibles de la topología de Zariski. En lo que respecta a los números reales, los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definibles en $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ son las uniones finitas de intervalos (incluyendo semirrectas) y puntos. Y las relaciones n-arias definibles son los subconjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}^n$. Por el contrario, en el caso de $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ no tenemos eliminación de cuantificadores y las relaciones definibles son de gran complejidad.

2. *Axiomatización*

Vamos a especificar algunos conjuntos de axiomas para teorías de particular interés. En todos los casos, la axiomatización tiene lugar en el lenguaje formal de la lógica de primer orden. Comenzamos con la *aritmética de Peano*, el sistema formal habitual para la aritmética. Tiene los siguientes axiomas:

1. $\forall xy(x + 1 = y + 1 \to x = y)$.
2. $\forall x\, x + 1 \neq 0$.
3. $\forall x\, x + 0 = x$.
4. $\forall xy\, x + (y + 1) = (x + y) + 1$.
5. $\forall x\, x \cdot 0 = 0$.
6. $\forall xy\, x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$.
7. $\forall xy(x < y \leftrightarrow \exists z(x + z = y \wedge z \neq 0))$.
8. Principio de inducción: para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$

$$\forall x_1 \ldots x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n, 0) \wedge \forall y(\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n, y + 1)) \\ \to \forall y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

En ocasiones se prefiere usar la función de sucesión $S(x) = x + 1$ en vez del número uno (definible por su parte como $1 = S(0)$) y enunciar en el lenguaje $\{S, +, \cdot, 0, <\}$ la aritmética de Peano. Simplemente hay que cambiar las expresiones de la forma $t + 1$ por $S(t)$ en los axiomas. Los axiomas 1 y 2 especifican que S es una función inyectiva y que 0 no forma parte de su recorrido. Los axiomas 3 y 4 ofrecen la definición recursiva de la suma y los axiomas 5 y 6 la definición recursiva del producto. El orden $<$ se introduce en 7 mediante una definición explícita. De hecho, es perfectamente prescindible, podemos también presentar la aritmética sin el orden. En 8 se presenta el principio de inducción en forma de esquema axiomático. Hay tantas instancias particulares del axioma como fórmulas del lenguaje de primer orden. No puede sustituirse por un único axioma que cuantifique sobre conjuntos de números naturales pues, como ya hemos indicado, en el lenguaje de primer orden sólo podemos cuantificar sobre elementos del universo de la estructura. La notación $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ se usa para dar la fórmula φ simultáneamente con una lista $x_1, \ldots, x_n, y$ de sus variables no cuantificadas, que se llaman también sus *variables libres*.

Como ya hemos comentado antes, K. Gödel demostró que este sistema de axiomas es insuficiente para la aritmética completa, no caracteriza $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$. Sin embargo, sí sirve para la gran mayoría de los problemas aritméticos habituales y no es tarea nada fácil encontrar enunciados verdaderos que no pueden ser obtenidos como teoremas. Como no es una teoría completa, no se puede concluir la decidibilidad de la aritmética de Peano de su axiomatizabilidad. De hecho, es indecidible.

Prestamos ahora atención a la teoría de cuerpos, y en particular a los cuerpos real y complejo. Es habitual en teoría de modelos tratar a los cuerpos en el lenguaje de anillos $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ y la teoría de cuerpos ordenados en el lenguaje de anillos ordenados $\{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$. No tenemos, por tanto, la operación de división disponible de modo explícito, aunque indirectamente es posible hablar de ella.

La *teoría de cuerpos* tiene una lista sencilla y previsible de axiomas. Basta con especificar que $0 \neq 1$, que $+$ y $\cdot$ son operaciones asociativas y conmutativas, que $\cdot$ es distributiva respecto a $+$, que 0 es el neutro en la suma y $-x$ el opuesto de x en la suma, que 1 es el neutro del producto y que todo elemento distinto de cero tiene un inverso en el producto. Nos ahorramos dar la lista de estos axiomas, que son de sobra conocidos.

La teoría de *cuerpos algebraicamente cerrados* se obtiene añadiendo a la teoría de cuerpos los axiomas que garantizan la existencia de ceros de polinomios no constantes. Esto puede lograrse mediante los siguientes enunciados para cada $n \geq 1$:

$$\forall y_0 \ldots y_n (y_n \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^{n} y_i x^i = 0).$$

La teoría de los *cuerpos algebraicamente cerrados de característica prima* p, ACF_p, se obtiene añadiendo además el axioma que determina la característica:

$$\varphi_p := \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ veces}} = 0.$$

La teoría de los *cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero*, ACF_0, se obtiene añadiendo a la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados los axiomas $\neg\varphi_p$ para cada primo p.

ACF_0 es la teoría del cuerpo complejo y ACF_p es la teoría del cuerpo $\widetilde{\mathbb{F}_p}$, la clausura algebraica del cuerpo $\mathbb{F}_p$ de p elementos. Son, por tanto, teorías completas axiomatizables y por ello teorías decidibles.

La teoría de *cuerpos real cerrados* puede formularse en el lenguaje de anillos o en el de anillos ordenados. La versión sin orden es la teoría *RCF*, que se axiomatiza añadiendo a la teoría de cuerpos los siguientes axiomas:

1. $\forall x_1 \ldots x_n \, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq -1$ para cada $n \geq 1$.

2. $\forall x \exists y (y^2 = x \vee y^2 = -x)$.

3. $\forall y_0 \ldots y_{2n+1} (y_{2n+1} \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^{2n+1} y_i x^i = 0)$ para cada $n \geq 0$.

No es necesario especificar la característica, pues los axiomas en 1 ya implican que no puede ser prima. Los cuerpos en los que valen los axiomas de 1 se llaman *formalmente reales*. En 2 se postula la existencia de raíces cuadradas y en 3 se garantiza la existencia de ceros de polinomios de grado impar.

RCF es la teoría de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$. Como en el caso del cuerpo complejo, fue A. Tarski quien lo demostró. Y como en el caso complejo, la teoría es completa y axiomatizable y por ello decidible.

Consideramos ahora la teoría del cuerpo real con orden, que tiene la ventaja de eliminar los cuantificadores. La teoría *RCOF* del cuerpo ordenado real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ puede axiomatizarse añadiendo simplemente a *RCF* la definición explícita del orden:

$$\forall xy(x < y \leftrightarrow x \neq y \wedge \exists z\, x + z^2 = y).$$

Alternativamente podemos axiomatizar *RCOF* partiendo de la teoría de *cuerpos ordenados*, que tiene los siguientes axiomas adicionales a los de la teoría de cuerpos:

1. $\forall x\, x \not< x$.
2. $\forall xyz(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$.
3. $\forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x)$.
4. $\forall xyz(x < y \rightarrow x + z < y + z)$.
5. $\forall xyz(x < y \wedge 0 < z \rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$.

Se añaden entonces axiomas que garantizan que todo polinomio que pasa de positivo a negativo en un intervalo tiene un cero en el intervalo. Esto se puede conseguir con los siguientes axiomas para cada $n \geq 0$:

$$\forall y_0 \ldots y_n \forall x_1 x_2 (x_1 < x_2 \wedge \sum_{i=0}^{n} y_i x_1^i > 0 \wedge \sum_{i=0}^{n} y_i x_2^i < 0$$
$$\rightarrow \exists x(x_1 < x \wedge x < x_2 \wedge \sum_{i=0}^{n} y_i x^i = 0)).$$

Las demostraciones de la decidibilidad de estas teorías de cuerpos que se ofrecieron originalmente se basaban en métodos efectivos de eliminación de cuantificadores.

3. Definibilidad

Vamos a ser un poco más concretos sobre cuestiones de definibilidad. La manera más directa de explicar qué significa que una relación, una operación o un elemento de una estructura sea definible es apelando a las fórmulas del lenguaje formal de primer orden que pueden usarse para dar las definiciones. Recordemos que la notación $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ indica que las variables libres de la fórmula φ están en la lista $x_1, \ldots, x_n$. Por ejemplo, en el lenguaje de anillos $\varphi(x, y)$ puede ser la fórmula $\exists z(x = y + z \cdot z)$, que dice que x es la suma de y con un cuadrado.

Sea $\mathcal{M} = (M, R_1, R_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$ una estructura arbitraria, sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con las variables libres $x_1, \ldots, x_n$. Escribimos $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ para indicar que la fórmula es verdadera en $\mathcal{M}$ al remplazar las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los elementos $a_1, \ldots, a_n \in M$, es decir, que la tupla $(a_1, \ldots, a_n)$ satisface la fórmula en $\mathcal{M}$. Por ejemplo, la fórmula $\varphi(x, y)$ dada en el párrafo superior la satisfacen en el cuerpo real todos los pares (a, b) de números reales tales que $a \geq b$; pero en el cuerpo complejo la satisfacen todos los pares de números complejos sin restricciones.

Una relación $R \subseteq M^n$ es *definible* en $\mathcal{M}$ sobre el conjunto $A \subseteq M$ (es A-definible en $\mathcal{M}$) si hay una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje ampliado con nombres para los elementos de A tal que

$$R = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

es decir, R está formada por las n-tuplas de M que satisfacen la fórmula en $\mathcal{M}$. En el caso de una operación, se dice que es definible si lo es su grafo y, finalmente, decimos que un elemento a es definible si lo es su conjunto unitario $\{a\}$. Se dice que los elementos de A que aparecen en la fórmula son *parámetros* de la definición.

En ocasiones no usamos parámetros en las definiciones. Una relación, operación o individuo es definible sin parámetros en $\mathcal{M}$ si es A-definible para el caso $A = \emptyset$. Esto significa simplemente que en la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ que usamos para definir no empleamos nombre alguno adicional. Hay una gran diferencia entre definir con o sin parámetros. Por ejemplo, todo conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es definible con parámetros en cualquier estructura que contenga a sus elementos, basta considerar la disyunción $(x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n)$; pero no es normal que los conjuntos finitos puedan definirse sin parámetros.

Nos interesa relacionar la definibilidad con la invariancia. Una relación, operación o individuo es *invariante* en $\mathcal{M}$ si los automorfismos de $\mathcal{M}$ la respetan. Las relaciones, operaciones e individuos definibles sin parámetros son invariantes, pero lo inverso no es generalmente cierto. Comentaremos algún ejemplo más adelante.

Es posible también caracterizar las relaciones definibles en una estructura sin necesidad de utilizar el lenguaje formal. Se puede evitar la lógica y adoptar la siguiente presentación de la definibilidad:

Sea $\mathcal{M} = (M, R_1, R_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$ una estructura y sea $A \subseteq M$. Las relaciones $R \subseteq M^n$ A-definibles en $\mathcal{M}$ son los elementos de D_n, donde $(D_n \mid 0 < n < \omega)$ es la menor colección de subconjuntos $D_n \subseteq \mathcal{P}(M^n)$ tal que:

1. $\{a\} \in D_1$ para cada $a \in A$ y $\{c_1\}, \{c_2\}, \ldots \in D_1$.
2. $R_i \in D_n$ si $R_i \subseteq M^n$.
3. $f_i \in D_{n+1}$ si $f_i : M^n \to M$.
4. $\{(a, a) \mid a \in M\} \in D_2$.
5. Cada D_n está cerrado bajo operaciones booleanas: si $R, S \in D_n$, entonces

$$R \cap S, R \cup S, R \smallsetminus S \in D_n.$$

6. Si $R \in D_{n+1}$, entonces

$$\mathrm{dom}(R) = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (a_1, \ldots, a_n, b) \in R \text{ para algún } b \in M\} \in D_n.$$

7. Si $R \in D_n$, entonces

$$R \times M = \{(a_1, \ldots, a_n, b) \mid b \in M \text{ y } (a_1, \ldots, a_n) \in R\} \in D_{n+1}.$$

8. Si $R \in D_n$ y π es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$, entonces

$$R_\pi = \{(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \mid (a_1, \ldots, a_n) \in R\} \in D_n.$$

Obsérvese que 1-4 especifican que ciertas relaciones son A-definibles sin más, mientras que 5-8 dan procedimientos para obtener relaciones A-definibles a partir de otras relaciones A-definibles. Las relaciones A-definibles de 1-4 son la igualdad, las relaciones propias de $\mathcal{M}$, los grafos de sus operaciones y los conjuntos unitarios tanto de los elementos de A como de los elementos destacados de $\mathcal{M}$. Los procedimientos de generación de nuevas relaciones A-definibles son operaciones booleanas, proyecciones (o dominios), productos cartesianos y reordenaciones de tuplas asociadas a permutaciones de índices.

Consideremos algunos ejemplos de definibilidad sin parámetros en estructuras familiares. Está claro que 0 es definible en $(\mathbb{N}, S)$ mediante la fórmula $\forall y \neg S(y) = x$. Y entonces cada número natural es también definible, basta aplicar S a 0 el número adecuado de veces. Pero 0 no es definible sin parámetros en $(\mathbb{Z}, S)$, pues no es invariante: hay automorfismos que transforman 0 en cualquier otro entero. Lo mismo ocurre con los demás enteros, ninguno de ellos es definible sin parámetros.

En $(\mathbb{N}, +)$ sí se puede definir sin parámetros el cero, y además el orden y cada número natural: 0 se define mediante $x + x = x$, el orden $x < y$ se define con $\exists z(x + z = y \wedge z \neq 0)$, el número 1 se define con $0 < x \wedge \neg \exists y(0 < y \wedge y < x)$ y cada número natural $n \geq 2$ se define con $x = 1 + \ldots + 1$ (n veces). Una consecuencia de que podamos definir sin parámetros el cero, el orden y el uno es que no sólo la teoría de $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ no es axiomatizable, sino que tampoco lo es la de $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. En general, si las relaciones, operaciones y elementos destacados de una estructura $\mathcal{M}$ son definibles en otra estructura $\mathcal{N}$ que tiene el mismo universo, entonces la axiomatizabilidad de $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ implica la axiomatizabilidad de $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

No todos los resultados sobre definibilidad se resuelven de modo sencillo, exhibiendo una breve fórmula. Por ejemplo, Kurt Gödel mostró en 1931 (en [5]) que la exponenciación (como todas las funciones recursivas) es definible sin parámetros en $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, pero la fórmula que la define ni es breve ni se entiende bien sin explicaciones adicionales.

4. *Aritmética*

La aritmética de la suma y el producto tiene una gran complejidad, no podemos axiomatizarla ni ofrecer un algoritmo que decida cuáles son los enunciados aritméticos verdaderos. Sin embargo, si prescindimos del producto y nos quedamos únicamente con la suma, las cosas cambian radicalmente. Mojżesz Presburger mostró en 1929 (véase [12]) que la teoría de $(\mathbb{N},+)$ es axiomatizable. Y además indicó cómo ampliar el lenguaje formal mediante definiciones de manera que se obtenga eliminación de cuantificadores. La teoría se llama *aritmética de Presburger* en su honor.

En el caso de la teoría de $(\mathbb{N},+)$, tenemos eliminación de cuantificadores si añadimos $0, 1, <$ y las relaciones (también definibles sin parámetros) de congruencia módulo n para cada natural $n \geq 2$. La relación de congruencia $\equiv_n$ se define en $(\mathbb{N},+)$ mediante la fórmula $\varphi(x,y)$ siguiente:

$$\exists z(x = y + \underbrace{z + \ldots + z}_{n \text{ veces}}) \vee \exists z(y = x + \underbrace{z + \ldots + z}_{n \text{ veces}}).$$

Un sistema de axiomas para la aritmética de Presburger se obtiene adaptando la axiomática de la aritmética de Peano al lenguaje $\{+, 0, 1\}$ eliminando la definición recursiva del producto y, si se quiere, usando las definiciones del orden $<$ y de cada congruencia $\equiv_n$.

Otro fragmento tratable de la aritmética es la aritmética del producto. Thoralf Skolem demostró en 1930 (véase [20] y [2]) que la teoría de $(\mathbb{N},\cdot)$ es axiomatizable (y decidible). Por tanto, la suma no es definible sin parámetros en $(\mathbb{N},\cdot)$ y el producto no lo es en $(\mathbb{N},+)$. Sin embargo, el producto es invariante en $(\mathbb{N},+)$. Julia Robinson demostró en 1949 (en [14]) que la suma es definible sin parámetros en $(\mathbb{N},\cdot,S)$ y en $(\mathbb{N},\cdot,<)$, y por tanto sus teorías no son axiomatizables; también demostró que la suma y el producto son definibles a partir de la operación S de sucesor y la relación de divisibilidad. Para definir la suma $x + y = z$ en $(\mathbb{N},\cdot,S)$ puede utilizarse la fórmula

$$S(x \cdot z) \cdot S(y \cdot z) = S((z \cdot z) \cdot S(x \cdot y)).$$

Como S es definible a partir del orden, está claro que también la suma puede definirse en $(\mathbb{N},\cdot,<)$.

Joseph-Louis Lagrange estableció en 1770 que todo número natural es suma de cuatro cuadrados. Una consecuencia de ello es que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es definible sin parámetros en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y por tanto su teoría no es axiomatizable. Bastante más recientemente, en 1949, Julia Robinson demostró que $\mathbb{N}$ es definible sin parámetros en el cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ y por tanto la teoría de este cuerpo tampoco es axiomatizable. En general, si el universo de una estructura $\mathcal{M}$ es definible sin parámetros en una estructura $\mathcal{N}$ y las operaciones, relaciones y constantes de $\mathcal{M}$ son también definibles sin parámetros en $\mathcal{N}$ (por ejemplo, si son la restricción de las de $\mathcal{N}$ al universo M de $\mathcal{M}$), entonces la axiomatizabilidad de $\mathcal{N}$ implica la axiomatizabilidad de $\mathcal{M}$.

El número 1 no es definible sin parámetros en $(\mathbb{Z}, +)$ (pues no es invariante), pero el número 0 sí lo es; tampoco son definibles $<$ y $\mathbb{N}$ por no ser invariantes. Si añadimos el número 1 las cosas cambian. El orden entero $<$ sigue sin ser definible sin parámetros en $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$, pero ya no podemos usar el argumento de que no es invariante. De hecho, es invariante. La razón de que no se pueda definir el orden en este caso es más profunda. Las teorías de $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ y $(\mathbb{Z}, +, <, 0, 1)$ son axiomatizables, son variaciones sobre la aritmética de Presburger. Pero en los dos primeros casos las teorías son *estables*, y una de las características de las teorías estables es que en ellas no es posible definir ningún orden no trivial. En los tres casos es posible obtener eliminación de cuantificadores si se añade la aplicación $a \mapsto -a$ y las relaciones de congruencia $\equiv_n$, todas definibles.

Resumiendo la situación encontrada en la aritmética:

- Son axiomatizables (y decidibles) las teorías de $(\mathbb{N}, +)$, de $(\mathbb{N}, \cdot)$, de $(\mathbb{Z}, +)$, de $(\mathbb{Z}, +, 1)$ y de $(\mathbb{Z}, +, <, 1)$.
- No son axiomatizables (ni decidibles) las teorías de $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, de $(\mathbb{N}, \cdot, S)$, de $(\mathbb{N}, \cdot, <)$, de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ni de $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$.

5. Cuerpos

Cuando una teoría tiene eliminación de cuantificadores suele ser relativamente sencillo describir sus relaciones definibles, pues habitualmente las fórmulas sin cuantificación son manejables y comprensibles. En el contexto de la teoría de cuerpos hay numerosos resultados de eliminación de cuantificadores. En los casos más notables la eliminación tiene lugar en el lenguaje de anillos o en el lenguaje de anillos ordenados.

A. Tarski demostró en 1951 que la teoría del cuerpo complejo $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1)$ (la teoría ACF_0 de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero) tiene eliminación de cuantificadores. Angus Macintyre demostró en 1971 que si la teoría de un cuerpo tiene eliminación de cuantificadores, el cuerpo es algebraicamente cerrado. A. Tarski demostró también en 1951 que la teoría de $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, 0, 1)$ (la teoría *RCOF* de los cuerpos ordenados real cerrados) tiene eliminación de cuantificadores. El orden $<$ es necesario para ello. A. Macintyre, Kenneth McKenna y Lou van den Dries demostraron en 1983 (véase [8]) que ese es fundamentalmente el único caso: si la teoría de un cuerpo ordenado tiene eliminación de cuantificadores en el lenguaje de anillos ordenados, el cuerpo es real cerrado.

Ni $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{Q}$ son definibles sin parámetros en $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$. Si lo fueran, la complejidad lógica de la aritmética la heredarían los números reales y su teoría no sería axiomatizable. Por el mismo motivo, tampoco son definibles sin parámetros en $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1)$. Pero, por otro motivo, sabemos incluso que tampoco pueden definirse en estos cuerpos con ayuda de parámetros. La razón es que, gracias a la eliminación de cuantificadores, conocemos muy bien los conjuntos que se pueden definir con parámetros en este tipo de estructuras: son únicamente los conjuntos finitos y los cofinitos en el cuerpo complejo y son las uniones finitas de intervalos y puntos en el cuerpo real. Pero de esto hablaremos más adelante.

Curiosamente, $\mathbb{Z}$ sí es definible sin parámetros en $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, e^x, 0, 1)$ y por tanto la teoría del cuerpo exponencial complejo no es axiomatizable. Úsese para definir $\mathbb{Z}$ la fórmula $\varphi(x)$ siguiente:

$$\forall yz(z \cdot z = -1 \wedge e^{y \cdot z} = 1 \rightarrow e^{x \cdot y \cdot z} = 1).$$

6. Categoricidad

Vamos a prestar ahora atención a la tercera de las preguntas que hemos formulado al principio, la relativa al isomorfismo y la equivalencia elemental. La cuestión más inmediata es si las teorías completas de primer orden determinan, salvo isomorfismo, a sus modelos, a las estructuras que las satisfacen. Y de nuevo la definibilidad tiene algo que aportar a la discusión.

Necesitamos hablar un poco de cardinalidades infinitas para poder discutir cuestiones de categoricidad, pero vamos a limitarnos a los mínimos datos que son necesarios. Dos conjuntos A, B tienen el mismo tamaño o cardinalidad ($|A| = |B|$) cuando existe una biyección entre ellos. El orden $|A| \leq |B|$ entre cardinalidades se define por la existencia de una función inyectiva de A en B. Los números cardinales $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \ldots$ comienzan con los números naturales y continúan con las cardinalidades de los conjuntos infinitos. El menor número cardinal infinito es $\omega = \aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. A cada cardinal le sigue inmediatamente otro en el orden. El sucesor de $\aleph_0$ es $\omega_1 = \aleph_1$, el primer cardinal no numerable. El cardinal del continuo es $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$. Un texto básico y claro sobre estos temas es [4].

No ocurre nunca que todos los modelos de una teoría sean isomorfos entre sí, a no ser que estemos en el caso trivial (a estos efectos) de una estructura finita. En otras palabras, sólo las teorías de las estructuras finitas son categóricas. Ello se debe al teorema de Löwenheim-Skolem: si $\mathcal{M}$ es una estructura infinita, entonces para cada cardinal infinito κ hay una estructura $\mathcal{N}$ de cardinalidad κ tal que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Como la teoría de $\mathcal{M}$ tiene modelos de distintas cardinalidades infinitas, tiene modelos no isomorfos. Si bien $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ implica $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, normalmente el recíproco es falso. Por ejemplo, se sabe que $(\mathbb{R}, +, <, 0) \equiv (\mathbb{Q}, +, <, 0)$ pero (por razones de cardinalidad) $(\mathbb{R}, +, <, 0) \not\cong (\mathbb{Q}, +, <, 0)$. Similarmente, $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \equiv (\widetilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot, 0, 1)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \not\cong (\widetilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot, 0, 1)$.

Un sucedáneo bastante satisfactorio de la categoricidad es la categoricidad en cardinal. Decimos que una teoría es *κ-categórica* si tiene algún modelo de cardinalidad κ y todos sus modelos de cardinalidad κ son isomorfos. Michael Morley demostró en 1965 (en [10]) que una teoría T es categórica en un cardinal $\geq \aleph_1$ si y sólo si es categórica en todos los cardinales $\geq \aleph_1$. Por tanto, las opciones se reducen a $\aleph_0$-categoricidad y $\aleph_1$-categoricidad (categoricidad en todos los cardinales $\geq \aleph_1$). Un ejemplo de teoría $\aleph_0$-categórica y $\aleph_1$-categórica lo constituyen los espacios vectoriales infinitos sobre $\mathbb{F}_p$. En estas estructuras, el universo está formado exclusivamente por los vectores. Los elementos del cuerpo intervienen indirectamente, mediante las operaciones de producto por un escalar. Las operaciones son la suma de vectores y los productos $v \mapsto \lambda \cdot v$ asociados a los elementos λ del cuerpo.

Existen teorías no $\aleph_0$-categóricas pero sí $\aleph_1$-categóricas, por ejemplo la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero o la de los espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$. También hay teorías $\aleph_0$-categóricas que no son $\aleph_1$-categóricas. El orden denso sin extremos, que es la teoría de $(\mathbb{Q}, <)$ y de $(\mathbb{R}, <)$ y la teoría de las álgebras de Boole sin átomos son dos ejemplos. Finalmente, hay también teorías que no son categóricas en ningún cardinal, como la teoría *RCF* de los cuerpos real cerrados.

Se saben bastantes cosas de las teorías $\aleph_0$-categóricas. Hay un célebre resultado que Czesław Ryll-Nardzewski demostró en 1959 (en [15]) y que las caracteriza en términos del número de relaciones definibles que poseen:

Las siguientes condiciones son equivalentes para una teoría $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$:

1. T es $\aleph_0$-categórica.
2. Para cada $n \geq 1$, no hay más que un número finito de relaciones $R \subseteq M^n$ que sean definibles sin parámetros en $\mathcal{M}$.
3. Para cada $A \subseteq M$ finito, no hay más que un número finito de subconjuntos $X \subseteq M$ que sean A-definibles en $\mathcal{M}$.

Veremos en la siguiente sección que también el análisis de las relaciones definibles tiene que ver con la $\aleph_1$-categoricidad.

7. *Minimalidad y o-minimalidad*

Se dice que la estructura $\mathcal{M}$ es *minimal* si todos los subconjuntos de su universo M que son definibles con parámetros son o bien finitos o bien cofinitos. Obsérvese que eso significa que sólo se pueden definir los conjuntos que en cualquier caso son definibles siempre (con ayuda del símbolo de igualdad). Por otro lado, las estructuras minimales pueden tener relaciones n-arias definibles de gran complejidad para $n \geq 2$; sólo se impone una limitación en el caso $n = 1$. Una estructura $\mathcal{M}$ es *fuertemente minimal* si no sólo ella, sino toda estructura $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ es minimal. Por ejemplo, $(\mathbb{N}, <)$ es minimal, pero no es fuertemente minimal. Una teoría es fuertemente minimal si sus modelos lo son, es decir, si en sus modelos los únicos conjuntos definibles con parámetros son los finitos y los cofinitos. William Marsh demostró en 1966 que las teorías fuertemente minimales son $\aleph_1$-categóricas. El resultado fue incorporado en el artículo [1] de John. T. Baldwin y Alistair Lachlan.

Entre las teorías que hemos discutido encontramos ejemplos que son fuertemente minimales. El ejemplo más elemental es el de la teoría de un conjunto infinito. En este caso la estructura se reduce a su universo, no hay más relaciones que la igualdad y no hay operaciones ni elementos destacados. También la teoría de cualquier espacio vectorial es fuertemente minimal. Y lo son también las teorías ACF_0 y ACF_p de cuerpos algebraicamente cerrados, las teorías del sucesor en los números naturales y en los enteros $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, S)$ y $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, S)$, y la teoría de los grupos abelianos sin torsión $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, +) = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +)$.

La minimalidad tiene otras consecuencias estructurales. Joachim Reineke demostró en 1971 (en [13]) que todo grupo minimal es abeliano. A. Macintyre demostró también en 1971 (en [7]) que todo cuerpo con teoría $\aleph_1$-categórica es algebraicamente cerrado y por ello fuertemente minimal. Hay una conjetura abierta al respecto, la conjetura de Podewski, según la cual todo cuerpo minimal es algebraicamente cerrado. Frank O. Wagner demostró en 2000 (en [26]) que la conjetura de Podewski es cierta en característica prima.

Las estructuras ordenadas no son nunca fuertemente minimales. Pero hay una noción análoga a la minimalidad que se adapta de modo natural a las estructuras totalmente ordenadas: la *o-minimalidad*. Fue introducida por Anand Pillay y Charles Steinhorn en 1986 (en [11]), tras inspirarse en unos trabajos previos de Lou van den Dries, y hoy día constituye un área autónoma de la teoría de modelos, estrechamente asociada a la geometría algebraica real. Un texto de referencia es [25], de L. van den Dries.

Una estructura totalmente ordenada es *o-minimal* si en ella los únicos conjuntos definibles con parámetros son uniones finitas de intervalos (incluyendo semirrectas) y puntos. Esto significa que los conjuntos definibles son los que serían en cualquier caso definibles si tuviéramos eliminación de cuantificadores en el lenguaje del orden. A diferencia de lo que ocurre en el caso minimal, si una estructura es o-minimal, todas las elementalmente equivalentes a ella también lo son y se dice que su teoría completa es o-minimal. Por tanto, no tiene sentido distinguir entre o-minimal y fuertemente o-minimal. Estructuras o-minimales son el orden de los racionales $(\mathbb{Q}, <)$ y el cuerpo ordenado de los números reales $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$. Sin embargo, la aritmética de los enteros $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ no es o-minimal. A. Pillay y C. Steinhorn demostraron en 1986 que si un anillo ordenado es o-minimal, entonces es elementalmente equivalente al cuerpo ordenado real.

A. Tarski planteó en 1967 la pregunta sobre la axiomatizabilidad de la teoría del cuerpo exponencial real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$. En 1996 (en [28]) Alex Wilkie demostró que $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ es o-minimal. La conjetura de Schanuel para los reales dice que si $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, el grado de trascendencia de $\mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_n, e^{r_1}, \ldots, e^{r_n})$ sobre $\mathbb{Q}$ es mayor o igual que n. A. Macintyre y A. Wilkie demostraron en 1996 (en [9]) que si la conjetura de Schanuel es cierta, la teoría de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ es axiomatizable. Pero esta conjetura está lejos de ser resuelta. L. van den Dries mostró en 1984 (en [24]) que la teoría de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ no tiene eliminación de cuantificadores y A. Wilkie demostró en [28] que es *modelo-completa*, es decir, toda fórmula es equivalente en ella a una fórmula de la forma $\exists y_1, \ldots, y_m \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, donde en φ no hay cuantificadores. La modelo-completud es una condición sobre la complejidad de las relaciones definibles no tan buena como la eliminación de cuantificadores, pero suficientemente satisfactoria en muchos casos.

8. Dimensión y estabilidad

Los modelos de las teorías fuertemente minimales y los de las teorías o-minimales tienen una dimensión que se define en términos de geometría combinatoria.

Una *operador de clausura finitario* es un conjunto X junto con una operación cl que asigna a cada subconjunto A de X otro subconjunto $cl(A)$ de X (su *clausura*) y cumple las siguientes condiciones:

1. $A \subseteq cl(A)$.

2. Si $A \subseteq B$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.

3. $cl(cl(A)) \subseteq cl(A)$.

4. Si $a \in cl(A)$, entonces existe $A_0 \subseteq A$ finito tal que $a \in cl(A_0)$.

Una *pregeometría* es un operador de clausura finitario que cumple adicionalmente la *condición de intercambio*: si $a, b \in X$ y $a \in cl(A \cup \{b\}) \setminus cl(A)$, entonces $b \in cl(A \cup \{a\})$. En una pregeometría decimos que $a \in X$ es *independiente* de $A \subseteq X$ si $a \notin cl(A)$. Decimos que $A \subseteq X$ es *independiente* si para cada $a \in A$, a es independiente de $A \setminus \{a\}$. Una *base* de $A \subseteq X$ es un subconjunto independiente maximal de A. Todas las bases de A tienen el mismo tamaño, que se llama *dimensión* de A.

La *clausura algebraica* de un subconjunto A de una estructura $\mathcal{M}$ es el conjunto $acl(A) \subseteq M$ formado por los elementos de M que pertenecen a algún conjunto finito definido mediante una fórmula con parámetros en A. La terminología viene motivada por el paralelismo con la clausura algebraica en un cuerpo, obtenida añadiendo ceros de polinomios. El universo M con la operación *acl* es un caso particular de operador de clausura finitario. Si $\mathcal{M}$ es fuertemente minimal o es o-minimal, la clausura algebraica *acl* cumple la condición del intercambio y, por ello, define una pregeometría en M. En el contexto o-minimal la clausura algebraica $acl(A)$ coincide además con la *clausura definible* $dcl(A)$, la colección de los elementos de M que son A-definibles. Por tanto, en las estructuras fuertemente minimales y en las estructuras o-minimales tenemos una dimensión algebraica (es decir, proveniente del operador *acl* de clausura algebraica) bien definida.

En una estructura fuertemente minimal $\mathcal{M}$, la dimensión algebraica es un invariante que determina el isomorfismo: si $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ si y sólo si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tienen la misma dimensión. Esto explica por qué las teorías fuertemente minimales son $\aleph_1$-categóricas: la dimensión de un modelo de cardinalidad $\aleph_1$ debe ser $\aleph_1$.

En una estructura o-minimal, la dimensión no es suficiente para determinar el isomorfismo. Se sabe que si $\mathcal{M}$ es una estructura ordenada, para cada cardinal $\kappa \geq \aleph_1$, existen 2^κ estructuras de cardinalidad κ que son elementalmente equivalentes a $\mathcal{M}$ pero no son isomorfas entre sí.

La diferencia de comportamiento de la dimension entre las teorías fuertemente minimales y las o-minimales tiene que ver con el hecho de que las primeras son *teorías estables*, mientras que las segundas son inestables. Una teoría es estable si en ninguno de sus modelos hay ninguna relación definible que ordene totalmente un subconjunto infinito $X \subseteq M^n$. El conjunto X puede no ser definible y la relación puede no definir un orden en el universo. Las estructuras ordenadas tienen siempre una teoría inestable. La noción de teoría estable, y con ella la teoría de la estabilidad, fue introducida por Saharon Shelah en 1969 (en [16]). La obra fundamental sobre la estabilidad es el libro [18] de S. Shelah. La teoría de la estabilidad es un conjunto de nociones y técnicas destinadas al análisis de los modelos de las teorías estables. Ejemplos de teorías estables son las de los módulos, en particular los grupos abelianos, las teorías de los cuerpos separablemente cerrados, las teorías de los cuerpos diferencialmente cerrados y, en particular, las teorías ACF_0, ACF_p, $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ y $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, 0)$ ya discutidas anteriormente. Se conjetura que todo cuerpo cuya teoría es estable debe ser separablemente cerrado.

En los últimos años se han adaptado las nociones propias de la estabilidad de modo que puedan ser aplicadas al estudio de estructuras inestables. Importancia especial tienen en ese sentido las *teorías simples* y las *teorías NIP*. Las primeras incluyen a las estables y fueron inicialmente trabajadas por S. Shelah en [17] y luego redescubiertas y desarrolladas por Byunghan Kim y Anand Pillay a partir de 1995 (véase [6] y el texto [27] de F. O. Wagner). Ejemplos importantes de estructuras con teorías simples son los cuerpos pseudofinitos y los cuerpos con automorfismos genéricos. Las teorías de estructuras ordenadas no son simples.

Las teorías NIP incluyen también a las estables, pero muchas de ellas son compatibles con un orden. De hecho, todas las teorías o-minimales son NIP. Un texto de referencia reciente sobre teorías NIP es el libro [19] de Pierre Simon. El caso más elemental de las teorías NIP lo constituyen las llamadas *teorías dp-minimales*. No incluyen a todas las estables, pero sí a las fuertemente minimales, a las o-minimales, a la aritmética de Presburger y nuevos ejemplos como las teorías de los cuerpos p-ádicos.

Las investigaciones más recientes van mucho más allá de las teorías simples y las teorías NIP. Gabriel Conant ha diseñado un mapa, que puede visitarse en http://www.forkinganddividing.com/, en el que se dibujan los principales tipos de teorías que hoy se analizan y se representan como puntos algunos ejemplos importantes. Lo llama *el mapa del universo*.

Referencias

[1] Baldwin, J. T. y Lachlan, A. H. On strongly minimal sets. *The Journal of Symbolic Logic 36* (1971), pp. 79-96.

[2] Cegielski, P. Théorie elementaire de la multiplication des entiers naturels. En: *Model Theory and Arithmetic*, C. Berline, K. McAloon y J.-P. Ressayre, eds., núm. 890 de Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1981, pp. 44-89.

[3] Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York, 1972.

[4] Enderton, H. B. *Elements of Set Theory*. Academic Press, New York, 1977.

[5] Gödel, K. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik 38* (1931), pp. 173-198.

[6] Kim, B. y Pillay, A. Simple theories. *Annals of Pure and Applied Logic 88* (1997), pp. 149-164.

[7] Macintyre, A. On ω_1-categorical theories of fields. *Fundamenta Mathematicae 71* (1971), pp. 1-25.

[8] Macintyre, A., McKenna, K. y Van den Dries, L. Elimination of quantifiers in algebraic structures. *Advances in Mathematics 47* (1983), pp. 74-87.

[9] Macintyre, A. y Wilkie, A. J. On the decidability of the real exponential field. En: *Kreiseliana*, P. Odifredi, ed. A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996, pp. 441-467.

[10] Morley, M. Categoricity in power. *Transactions of the American Mathematical Society 114* (1965), pp. 514-538.

[11] Pillay, A. y Steinhorn, C. Definable sets in ordered structures. I. *Transactions of the American Mathematical Society 295* (1986), pp. 565-592.

[12] Presburger, M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen in welchem die Adittion als einzige Operation hervortritt. En: *Sprawozdanie z I Kongresu Mat. Krajów Słowiańkich* (Warsaw, 1930), pp. 92-101.

[13] Reineke, J. Minimalen Gruppen. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 21* (1975), pp. 357-359.

[14] Robinson, J. Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic 14* (1949), pp. 98-114.

[15] Ryll-Nardzewski, C. On the categoricity in power $\leq \aleph_0$. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences 7* (1959), pp. 545-548.

[16] Shelah, S. Stable theories. *Israel Journal of Mathematics 7* (1969), pp. 187-202.

[17] Shelah, S. Simple unstable theories. *Annals of Mathematical Logic 19* (1980), pp. 177-203.

[18] Shelah, S. *Classification Theory*, second ed. North Holland P.C., Amsterdam, 1990.

[19] Simon, P. *A guide to NIP theories*. Núm. 44 de Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[20] Skolem, T. A. Über einige Satzfunktionen in der Aritmetik. *Skriften utgit av videnskasselskapet i Kristiana 1*, 7 (1930), pp. 1-28.

[21] Tarski, A. Sur les ensembles définissables de nombres réels. *Fundamenta Mathematicae 17* (1930), pp. 210-239.

[22] Tarski, A. *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, Berkeley, 1951. Prepared for publication with the assistance of J. C. C. McKinsey.

[23] Tent, K. y Ziegler, M. *A Course in Model Theory*. Núm. 40 de Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[24] Van den Dries, L. Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$. En: *Logic Colloquium'82*, G. Longi, G. Longo y A. Marcja, eds. North Holland, 1984, pp. 79-138.

[25] Van den Dries, L. *Tame Topology and o-minimal Structures*, vol. 248 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[26] Wagner, F. O. Minimal fields. *The Journal of Symbolic Logic 65* (2000), pp. 1833-1835.

[27] Wagner, F. O. *Simple Theories*, vol. 503 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[28] Wilkie, A. J. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. *Journal of the American Mathematical Society 9*, 4 (1996), pp. 1051-1094.

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Edicions