Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Mean Field Games

Xavier Gamito García

Director: Josep Vives
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica. UB

Barcelona, 29 de juny de 2017

Abstract:

In recent years, at the interface of game theory, control theory and statistical mechanics, a new baby of applied mathematics was given birth. Now named mean-field game theory, this new model represents a new active field of research with a huge range of applications.

Inspired by ideas from statistical particle physics particles are replace by agents with strategic interactions.

Consider an N-player stochastic dynamic game, thus we can consider that is a MFG when $N \to \infty$. It comes into a system of coupled equations :

- Fokker - Plank
- Hamilton - Jacobi - Bellman.

This ungraduate thesis tryes to introduce the tools that MFG need to be understood, it is given mostly whith analysis tools, it does not go deep into functional analysis but it is enogh to introduce the main ideas from this field.

It will begin from the derivation of HJB equation from the Dynamic Programing Principle of Bellman and then adapt it into the stochastic case. The following chapters will derive the Fokker - Plank equation and give an heuristic interpretation. Finally it will study a very simple model and some variation to illustrate the the main idea from MFG.

Agraïments

Voldria agraïr al meu tutor, en Josep Vives, per la proximitat personal i l'atenció que m'ha oferit durant tots aquests anys. No només durant el transcurs d'aquest TFG, sinò també a tot el viatje personal i acadèmic que represnta la universitat.

Gràcies Alba, per haver-me ajudat, cuidat i estimat sempre, espeecialment durant els moments més difícils. Gràcies per haver-me fet suport i escoltat atentament, encara que t'expliqués matemàtiques. Gràcies per tot l'amor i respecte que rebut de tu.

Gràcies a la meva família per haver-me cuidat i animat. Especialment als meus pares, que sense saber què seria estudiar matemàtiques, em donéssin l'empenta necessària per fer allò que volia fer. Encara sona la veu que deia: "Si et fa feliç estudiar mates carinyo, fes-ho".

Mean Field Games

Xavier Gamito García

Index

1 Introducció

Els Mean-Field Games són una branca, encara jove, de la Teoria de Jocs. Aquesta ea va desenvolupar de manera independent per Jean-Michel Lasry i Pierre-Louis Lions a Paris, alhora que Minyi Huang, Roland Malhamé i Peter Caines ho feien a Montreal. Els *MFG* són un cas particular dels *Jocs Diferencials Estocàstics* on el joc és seqüencial, a temps continu i amb certa aleatorietat afegida, *soroll blanc*. En aquest cas, però, el nombre N de jugadors és molt gran. El model ha estat aplicat al control o *politica* de l'extracció de recursos naturals, les "*Onades*" que fa el públic als camps de futbol, el mercat d'*stocks* o el moviment d'un banc de peixos.

Pensem en el cas de N *Jugadors*. Cada agent intenta optimitzar el seu pagament/cost i per tant, optimitzar un cert funcional que dependrà del temps, la seva posició $x(t)$ i les accions de la resta de jugadors. D'aquesta manera ell podrà prendre una decisió α a cada instant que conformarà el control òptim $\alpha(t)$. Per un N no gaire gran ($N = 2$) podriem utilitzar els sistemes d'equacions de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs*; però el problema es complica computacionalment amb més de 2 agents.

La idea central dels MFG resideix en la Llei dels Grans Nombres. L'efecte "*suavitzador*" dels MFG, en comparació amb l'enfoc tradicional de la Teoria de Jocs, prové de considerar com actúa un individu a temps t i posiciò $x(t)$ en funció de què fa la *massa*. Per aquest procés, farem servir el Principi de Programació Dinàmica per transformar el problema d'optimització en un problema de EDPs, el sistema de equacions de *Hamilton-Jacobi-Bellman*. D'això li direm fer el cami *backward* o cap enrere i dona lloc als Equilibris closed-loop, anomenats així perqué es pot corregir el control a cada instant t, donada la resposta del sistema en aquest $x(t)$. Més endevant, intentarem trobar solucions o funcions que l'aproximin: *Solucions Viscoses*. Aquestes, ens donaran un nou concepte de solució. Els hi demanarem condicions de regularitat com la continuitat, però en general, res més. En el cas que la solució sigui suficientment diferenciable, la solució viscosa corresponent, coincidirà amb la definició usual de solució. Així doncs, les solucions viscoses son consistens amb la definició de solució d'una EDP. En els punts crítics, és on les solucions viscoses prenen sentit, dient-nos si en el punt x on s'arriba a l'extrem correspon a un màxim o un mínim. És gràcies a això que podem crear controls explícitament.

El Principi del Maxim de Pontyagrin, en canvi, dona Equilibris open-loop. D'altra banda la massa també actúa d'acord amb el que fa cadascún dels agents *(ara anem forward o endevant)*. Per aquesta tasca farem servir , que sota certes hipòtesis, les equacions de *Fokker-Plank*, que estudia l'evolució una distribució que depén als controls dels agents varia amb el temps. Incorpora, doncs, les influencies de perturbacions associades al moviment *Brownià*. L'objectiu es intentar descriure el moviment de la massa amb un sistema de EDP estocàstiques. En aquest cas, de segon ordre.

En el Capitol 2 tractem els conceptes necessaris del control òptim. En el cas $N = 1$, i sota el suposit de la racionalitat d'aquest agent, s'afirma que vol maximitzar o minimitzar una funció segons convingui. A la teoria econòmica, sovint s'estudia el principi del màxim de Pontryagin. De fet, en el cas que $N = 1$, les solucions oferides coincideixen. De manera heurística, es pot entendre que la variable de coestat, $\lambda(t)$ coneguda en economia com cost marginal és la derivada del moment, $\nabla_x v$ de la funció a optimitzar. En el cas de $N \geq 2$ la diferencia fonamental es que el Principi del Màxim dona controls que no depenen de x(t). Per això es diuen *open loop*. Donat el control, no es pot modificar fins a temps T donat que no es té resposta del sistema $x(t)$ per a cada t. El cas de *HJB*, en canvi, permet observar la trajectoria $x(t)$ i per tant realitzar un control que depengui de $x \in \mathbb{R}^n$. Les matemàtiques no regalen res, per tant la funció control serà sovint continua i no derivable en certs punts de discontinuitat. Per herència, la funció valor, presentarà també aquestes singularitats. Es per això que parlem de les solucions viscoses. Proporcionant funcions, que solucionen la eqüació i donant certes propitats. Aquestes ens ajudaràn a distingir la natura de les nostres singularitats. Arribarem a elles, deduïnt un pas al límit i esmentarem algun exemple que ilustri tota la secció.

Per últim, donaem la definició general d'un model de MFG i intentarem il·lustrar amb un exemple bàsic o com l'anomenen a [8]"*toy example*".

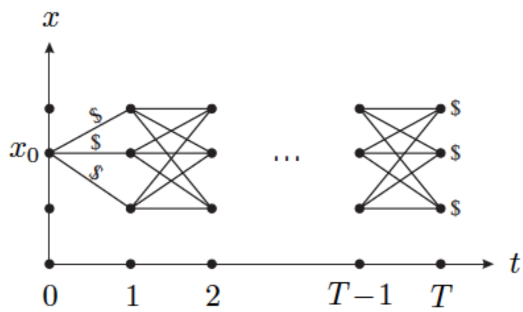
2 Control Òptim Determinista

2.1 Motivació: El problema

La Programació Dinàmica de Bellman és una aproximació bastant general, però és, potser, més fàcil d'il·lustrar en el cas de sistemes purament discrets.

$$x_{k+1} = f(x_k, \alpha_k) \quad k = 0, 1, ..., T-1$$

$x_k \in \mathcal{X}$-conjunt finit de cardinal N, $\alpha_k \in \mathcal{A}$- de cardinal M, on T, N, M son enters positius.

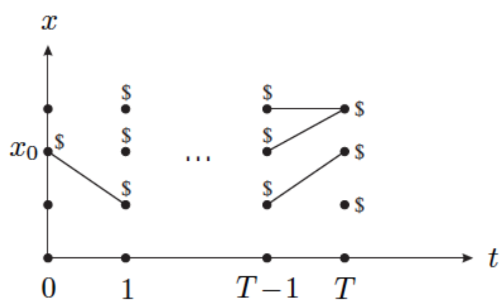


Cada transició (pas d'un estat a un altre) té un cost (payoff en el cas de ser un cost negatiu), més possiblement un cost (benefici) final o terminal. El nostre objectiu es minimitzar (max.) el nostre resultat.

Una aproximació molt primaria, és la següent:
començant a x_0, cal enumerar tots els possibles camins, calcular el cost de cada un d'ells, comparar el resultat i per últim triar el millor. Aquest métode és computacionalment costos.

Una aproximació alternativa sería anar cap enrere (*backwards*): Comencem al iterat $k = T$ i coneixem així els cost terminal a $x(T)$.

Per $k = T-1$; per a cada $x(T-1)$ possible, cal trobar quin control α_{T-1} hauriem de prendre per saltar cap a $x(T)$ que doni el mínim cost total, en aquest pas.



Cal repetir per $k = T-2, T-3, ..., 1, 0$.

Observació: Un cop acabat, tindrem el camí òptim de x_0 a x_T amb un cost $J(T, x_0, (\alpha_k)_k)$; i aquest és mínim.

Per demostrar això necessitem certes definicions per enunciar i demostrar el *Principi de Programació Dinàmica.*

Donat un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^m$, una funció $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ continua Lipschitz, y una condició inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, volem resoldre el sistema dinàmic següent:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), \alpha(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

D'ara endevant considerarem $t_0 = 0$. Fixem-nos en el terme α. És una funció que anomenarem *control* o, *policy* en literatura d'economia. A la funció $x(t)$ li direm *trajectòria o resposta del sistema.* Notem que $x(\cdot) = x(\cdot, \alpha(\cdot), x_0)$, és a dir, la resposta del sistema varia segons l'elecció d'$\alpha(\cdot)$. Direm que $\alpha(\cdot)$ és un control per (2.1).

Definició: *Definim col·lecció de controls admissibles com:*

$$\mathcal{A} \;=\; \{\alpha : [0, \infty) \to A \mid \alpha(\cdot) \textit{ mesurable}\}$$

L'objectiu serà determinar quin és el millor *control o policy* per al sistema (2.1).
Per tal de poder quantificar aquestes decisions, cal definir una mesura que els permeti comparar.

Definició: *Donat un $T > 0$, temps final; $r : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$, pagament variable o current payoff; i sigui $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el pagament final o terminal payoff. Definim el funcional de Benefici o Payoff com:*

$$J(t, x(t), \alpha(t)) := J_{x,t}[\alpha(t)] := \int_t^T r(x(t), \alpha(t))dt + g(x(T)) \tag{2.2}$$

On $x(\cdot)$ és solucio de (2.1) per al control $\alpha(\cdot)$.

El nostre problema es redueix ara a trobar un control $\alpha^*(\cdot)$ que maximitzi o minimitzi el *Payoff* per a x_0 donat i per a tot $t \geq 0$. És a dir:

$$J_{x,t}[\alpha^*(t)] \geq J_{x,t}[\alpha(t)] \tag{2.3}$$

Si $\alpha^*(t)$ compleix aquesta condició, li direm *òptim.*

2.2 Programació Dinàmica

El métode pretén descomposar un problema d'optimització en petits sub-problemes. D'aquesta manera es poden anar definint processos de manera recursiva per tal d'optimitzar una funció valor $v(x,t)$, $x = x(t)$. Aquesta funció va ser utilitzada primerament per Bellman.

En la següent secció, definirem la funció valor i donarem les restriccions d'aquesta. Aplicant principi de el programació dinàmica, podrem veure com la funció v es solució d'un sistema de EDPs, les equacions de *Hamilton-Jacobi-Bellman*. Si trobem una solució del sistema, el métode de programació dinàmica ens dona una recepta per trobar el control òptim $\alpha(t)$. En aquest capitol, intentarem maximitzar un payoff i per tant farem servir resultats amb suprems. En cas contrari agafariem els ínfims. Comentarem, en les properes seccions, breument, les equacions de Lax-Hopf per minimitzar un cost.

Per presentar la funció valor, considerem una família més general de problemes. Farem variar l'interval de temps on hem de resoldre el problema. En la secció anterior motivavem el problema (2.1) que direm $P(x_0, t_0)$, per tal de facilitar la notació en aquest comentari *heurístic.* No només aquest, sinó que el Principi de Programació dinàmica, resoldrà tots els $\{P(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T\}$ on el problema comença a temps t i estat x.

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= f(x(s), \alpha(s)) \qquad (t \leq s \leq T) \\ x(t) &= x \end{cases} \tag{2.4}$$

i definim la funció benefici o payoff com:

$$J_{x,t}[\alpha(\cdot)] := \int_t^T r(x(s), \alpha(s))ds + g(x(T)) \tag{2.5}$$

Definició 2.0.1. *Per a $x \in \mathbb{R}^n$ $0 \leq t \leq T$, es defineix la funció valor $v(x(t),t)$ com el màxim dels possibles payoffs que es pot obtenir si es comença a temps t en posició $x \in \mathbb{R}^n$. És a dir:*

$$v(x(t),t) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{J(x(t), \alpha(t), t) : \ x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T\}, \tag{2.6}$$

amb la restricció:

$$v(x(T),T) = g(x(T)) = g(x), \tag{2.7}$$

El nostre objectiu és veure quines condició i propietats verifica v.

2.2.1 Principi de programació Dinàmica

El següent resultat dona una condició per a d'optimalitat.

Teorema 2.1. *(Principi de prgramació dinàmica). Per a cada $h > 0$ prou petit tal que $t + h < T$, es verifica la condició d'optimalitat*

$$v(x(t), t) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s), s) ds + v(x(t+h), t+h)\, ds \tag{2.8}$$

on x és la solucio de (2.4) per al control α.

Demostració. Fixem un $\varepsilon > 0$ qualsevol i provem que

$$v(x(t), t) \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s), s)\, ds + v(x(t+h), t+h) - \varepsilon$$

Escollim qualsevol $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ i resolem (2.4) en els temps entre t i $t + h$. Així obtenim la *resposta del sistema* x_1. Ara prenem la posició $x_1(t+h)$ i el temps $t+h$. Suposem que tenim un control òptim. Aleshores $v(x_1(t+h), t+h)$ està definida. Com v es un suprem, donat un $\varepsilon > 0$, prenem $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ tal que

$$v(x_1(t+h), t+h) - \varepsilon \leq \int_{t+h}^{T} r(x(s), \alpha_2(s), s) ds + g(x_2(T)), \tag{2.9}$$

on x_2 és solució de:

$$\begin{cases} \dot{x_2}(s) &= & f(x(_2 s), \alpha_2(s)) & (t \leq s \leq T) \\ x_2(t+h) &= & x_1(t+h) & , \end{cases} \tag{2.10}$$

Definim el control

$$\alpha_3 := \begin{cases} \alpha_1(s) & t \leq s < t+h \\ \alpha_2(s) & t+h \leq s \leq T, \end{cases}$$

i resolem doncs (2.1) per l'α_3 en (t, T) amb condició inicial $x_3(t) = x$. Per la unicitat de solucions d'una EDO, tenim que la única trajectoria possible es:

$$x_3(t) := \begin{cases} x_1(s) & t \leq s < t+h \\ x_2(s) & t+h \leq s \leq T. \end{cases}$$

Per definició de v,

$$v(x, t) \geq J_{x,t}[\alpha_3(\cdot)] = \int_t^T r(x_3(s), \alpha_3(s)) ds + g(x_3(T)) =$$

$$= \int_t^{t+h} r(x_1(s), \alpha_1(s)) ds + \int_{t+h}^{T} r(x_2(s), \alpha_2(s)) ds + g(x_2(T)) \geq$$

$$\geq \int_t^{t+h} r(x_1(s), \alpha_1(s)) ds + v(x_1(t+h), t+h) - \varepsilon$$

Notem que la última desigualtat val per definició d' α_2 de la equació (2.9) El control $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ l'hem escollit arbitrariament, tenim:

$$v(x,t) \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s))ds + v(x(t+h), t+h) \right\} - \varepsilon.$$

Això val per tot $\varepsilon > 0$. Si fem el pas al límit, $\varepsilon \to 0$, i per tant tenim:

$$v(x,t) \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s))ds + v(x(t+h), t+h) \right\}. \tag{2.11}$$

Amb això tenim una banda de la desigualtat. Resta comparar l'altre. Prenem un $\varepsilon > 0$ i escollim $\alpha_4 \in \mathcal{A}$ tal que

$$v(x,t) - \varepsilon \leq \int_t^T r(x_4(s), \alpha_4(s))ds + g(x_4(T))$$

on $x_4(\cdot)$ és solució de (2.4) a $[t,T]$ pel control α_4 i per condició inicial $x_4(t) = x$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_4}(s) & = & f(x_4(s), \alpha_4(s)) \qquad (t \leq s \leq T) \\ x_4(t) & = & x(t) \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Com $v(x(t+h), t+h)$ és un suprem,

$$v(x_4(t+h), t+h) \geq \int_t^T r(x_4(s), \alpha_4(s))ds + g(x_4(T)).$$

Prenent les desigualtats com abans:

$$v(x,t) - \varepsilon \leq \int_t^T r(x_4(s), \alpha_4(s))ds + g(x_4(T))$$

$$= \int_t^{t+h} r(x_4(s), \alpha_4(s))ds + \int_{t+h}^T r(x_4(s), \alpha_4(s))ds + g(x_4(T))$$

$$\leq \int_t^{t+h} r(x_4(s), \alpha_4(s))ds + v(x_4(t+h), t+h)$$

Prenem el suprem a la banda dreta de la desigualtat queda

$$v(x,t) - \varepsilon \leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s))ds + v(x(t+h), t+h) \right\},$$

i fent el pas al $\varepsilon \to 0$,

$$v(x,t) \leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s))ds + v(x(t+h), t+h) \right\}. \tag{2.13}$$

Ajuntant les desigualtats de (2.11) i (2.13) queda la igualtat

$$v(x,t) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+h} r(x(s), \alpha(s))ds + v(x(t+h), t+h) \right\},$$

demostrant el Principi de Programació Dinàmica. □

2.3 Equació de Hamilton-Jacobi-Bellman

Com ja hem esmentat abans, volem transformar un problema d'optimització en un de EDP. Per aquest motiu, farem el pas al límit, i donarem la versió infinitessimal del Principi de Programació Dinàmica. Les solucions que proporciona l'HJB s'anomenen Closed Loop o *feedback*, a la literatura econòmica. El motiu, com evidenciarem més endevant, és l'obtenció d'un control òptim que depengui de la posició $x(t)$ per a cada instant t. En contrast amb el Principi del Màxim, que proporciona un control òptim depenent de la condició inicial x_0 i serà òptim a cada t i no té en compte l'estat del sistema. Per ara, el control és òptim per a $N = 1$ i per tant els resultats seràn equivalents. Volem evidenciar la necessitat de les HJB per als Mean Field Games, però ho farem en les properes seccions, sense passar per l'estudi del Principi del Màxim.

Teorema 2.2. *Suposem que $v \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Aleshores, v és solució de la equació de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)*

$$v_t + \max_{a\in\mathcal{A}} \big\{ f(x,a) \cdot \nabla_x v(x,t) + r(x,a) \big\} = 0 \tag{2.14}$$

a $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, amb la condició inicial

$$v(x,t) = g(x)$$

amb $x \in R^n$.

Demostració. Escollim $\alpha(s) \equiv a$ un control constant amb $a \in A$. Apliquem el Principi de Programació dinàmica i tenim:

$$v(x,t) \geq \int_t^{t+h} r(x(s),a)ds + v(x(t+h),t+h)$$

per a tot $h > 0$.
Es fàcil veure que reordenant la desigualtat i multiplicant per $\frac{1}{h}$, la desigualtat del Principi de Programació Dinàmica queda:

$$\frac{v(x(t+h),t+h) - v(x,t)}{h} + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} r(x(s),a)ds \leq 0$$

Prenem $h \to 0$. Volem veure que

$$v_t(x,t) + \nabla_x v(x,t) \cdot \dot{x}(t) + r(x,a) \leq 0.$$

Per aquesta finalitat, acotarem el quocient incremental i acte seguit aplicarem el Teorema Fonamental de Càlcul.

$$\frac{v(x(t+h),t+h) - v(x(t),t)}{h} =$$

$$= \frac{v(x(t+h),t+h) - v(x(t+h),t)}{h} + \frac{v(x(t+h),t) - v(x(t),t)}{h}$$

El primer terme de la suma resulta ser

$$v_t(x(t),t) = v_t(x,t)$$

Pel que fa a l'altre, cal recordar que $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$.

D'aquesta manera, podem definir el segon terme com:

$$\frac{v(x(t+h),t)-v(x(t),t)}{h}=\frac{v(x_1(t+h),...,x_n(t+h),t)-v(x_1(t),...,x_n(t),t)}{h}=$$
$$=\frac{v(x_1(t+h),...,x_n(t+h),t)-v(x_1(t),...,x_n(t+h),t)}{h}+...$$
$$...+\frac{v(x_1(t),...,x_n(t+h),t)-v(x_1(t),...,x_n(t),t)}{h}$$

Si $x_i(t+h)-x_i(t)\neq 0$, podem reescriure el quocient com

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{v(x_1(t),...,x_i(t+h),...,x_n(t+h),t)-v(x_1(t),...,x_{i+1}(t+h),...,x_n(t+h),t)}{x_i(t+h)-x_i(t)}\cdot\frac{x_i(t+h)-x_i(t)}{h}$$

Fent ara el pas al límit queda:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}(x,t)\cdot\dot{x}_i(t)=\nabla_x v(x,t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)$$

D'altra banda aplicant el teorema fonamental del càlcul, tenim

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} r(x(s),a)ds=r(x(t),a).$$

Per tant val l'expressió:

$$v_t(x,t)+\nabla_x v(x,t)\cdot f(x(t),a)+r(x(t),a)\leq 0.$$

Com hem pres $a\in A$ arbitrari, i val per tot a, podem concloure que en particular val pel màxim:

$$v_t(x,t)+\max_{a\in A}\left\{\nabla_x v(x,t)\cdot f(x(t),t)+r(x(t),a)\right\}\leq 0 \tag{2.15}$$

Ara resta provar l'altre desigualtat. Suposem ara que coneixem α^* i la solució x^* del problema. Apliquem el principi de programació dinàmica utilitzant el control òptim $\alpha^*(\cdot)$ per als temps $t\leq s\leq t+h$. Tenim

$$v(x,t)=\int_t^{t+h} r(x^*(s),\alpha^*(s))ds+v(x(t+h),t+h).$$

Fent servir la mateixa reordenació que abans i tornant a dividr per h, tenim

$$\frac{v(x^*(t+h),t+h)-v(x^*,t)}{h}+\frac{1}{h}\int_t^{t+h} r(x^*(s),\alpha^*(s))ds=0,$$

i com abans, fent el pas al límit $h\to 0$ obtenim

$$v_t(x^*,t)+\nabla_x v(x^*,t)\cdot f(x^*(t),t)+r(x^*(t),\alpha^*(t))=0$$

Notem que també, $x^*(t)=x \quad i \quad \dot{x}(t)=f(x^*,\alpha^*(t)$
Si definim $a^*=\alpha^*(t)$, amb $a^*\in A$, tenim

$$v_t(x,t)+\nabla_x v(x,t)\cdot f(x(t),a^*)+r(x(t),a^*)=0$$

Per tant, val la igualtat per (2.15) i queda demostrat el teorema.

□

És habitual trobar-nos a la literatura econòmica una versió, sovint més pràctica per la natura del propi camp.

$$J(x(t), \alpha(t), t) = \int_0^T e^{-r(s-t)} h(x(s), \alpha(s), s) ds + e^{-r(T-t)} g(x(T))$$

L'equació equivalent és:

$$r \cdot v(x,t) - v_t(x,t) = \max_{\alpha(\cdot) \in A} \left\{ f(x(t), \alpha(t)) \cdot \nabla_x v + h(x(t), \alpha(t), t) \right\}.$$

Per el nostre estudi, en particular, farem servir la notació habitual de les equacions HJB:

$$v_t + H(x, \nabla_x v) = 0.$$

En particular:

$$H(x, \nabla_x v) = \max_{a \in A} \left\{ H(x, \nabla_x v, a) \right\} = \max_{a \in A} \left\{ \nabla_x v(x(t), t) \cdot f(x(t), a) + r(x(t), a)) \right\}$$

Sovint es fa servir la variable $p = \nabla_x v$ gradient de v i s'escriurem $H(x, p)$ per al Hamiltonià H.

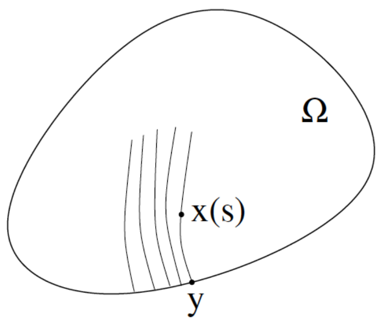
2.4 Solucions Viscoses

2.4.1 Introducció. Métode de les Característiques

Considerem una notació més general per poder parlar de les solucions viscoses de manera més còmode. Tenim,

$$u_t + H^*(x(t), \nabla_x u) = F(x, v, \nabla_x u) = 0, \tag{2.16}$$

on $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Donades unes condicions de contorn, $u(x) = \overline{u}(x), \quad x \in \partial\Omega$ podem construir una solució. La idea es obtenir els valors $u(x)$ sobre la corba $s \to x(s)$començant per la frontera del domini Ω. Aquest és el mètode de les característiques. Nosaltres ho aplicarem per trobar la funció valor $u(x) = v(x)$ sobre $x(t)$ pero també es pot aplicar a equacions d'altra natura.



Donat un punt de la frontera $y \in \partial\Omega$ i considerant la corva $s \to x(s)$ amb condició inicial $x(0) = y$, podem escriure:

$$u(s) := u(x(s)), \qquad p := p(x(s)) = \nabla_x u(x(s)),$$

i per tant, podem construir la EDO que buscàvem, la que descriu com varien u i p sobre la corba $x(s)$:

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{x}_i \tag{2.17}$$

$$\dot{p_j} = \dot{u_{x_j}} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_j x_i}\dot{x}_i \tag{2.18}$$

La idea del metode de les característiques resideix en trobar una corba tal que les segones derivades siguin zero. Derivant respecte de x_j obtenim doncs:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial u}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}u_{x_i x_j} = 0 \tag{2.19}$$

D'aquí es dedueix la familia de problemes de Cauchy, que en notació vectorial queda

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \frac{\partial F}{\partial p} & x(0) & = & y, \\ \dot{u} & = & p\cdot\frac{\partial F}{\partial p} & u(0) & = & u(y), \\ \dot{p} & = & -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u}\cdot p & p(0) & = & \nabla u(y), \qquad y\in\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

Per tant, hem reduit el problema de condicions inicials (2.16) a la resolució d'una familia de EDOs, depenent del punt inicial y. Remarquem que y varia sobre la corva $x(\cdot)$.

Definició 2.2.1. *Una funció u és solució general de (2.16) si u és continua i Lipschitz en $\overline{\Omega}$ amb les condicions de contorn de (2.16) i satisfa l'equació de primer ordre per quasi tot $x\in\Omega$*

$$\begin{cases} u_t + H(x,\nabla_x u) & = & 0 & \textit{en} & \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u & = & g & \textit{sobre} & \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.21}$$

Desafortunadament, la definició anterior es molt feble i està lluny de donar-nos un resultat d'unicitat. La nostre idea és aproximar la nostre funció u per una successió

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon \to u,$$

que convergeix de manera uniforme sobre oberts de $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ (diem que convergeix uniformament localment).
Per tal de poder *estabilitzar* la succeció, afegim el terme $\varepsilon\triangle u$ on:

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Aleshores, per a $\varepsilon > 0$, (2.21) es transforma en:

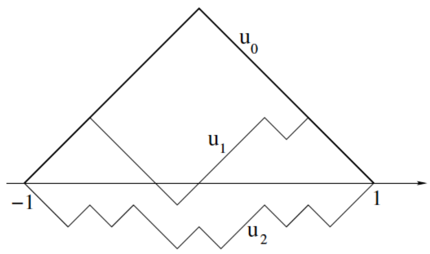
$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + H(x,\nabla_x u^\varepsilon) - \varepsilon\triangle u & = & 0 & \textit{en} & \mathbb{R}^n\times(0,\infty), \\ u^\varepsilon & = & g & \textit{sobre} & \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.22}$$

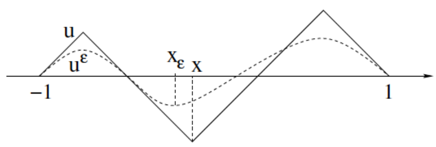
La intuició és que el problema (2.21) engloba tota una familia de sistemes de EDPs no lineals de primer ordre, i en canvi, (2.22) és un problema de valors inicials per a unes EDP quasilineals parabòliques. La intuició és que al fer $\varepsilon\to 0$ estem aproximant a alguna mena de solució feble. Aquest mètode s'anomena *Vanishing Viscosity* o (dissolució la viscositat).

Exemple 2.2.1 Donat el problema

$$|u_x| - 1 = 0, \qquad x \in [-1, 1], \qquad x(-1) = x(1) = 0$$

Trobem moltes solucions diferents:





Notem que les possibles solucions continues, no diferenciables en algun punt, que compleixen la condició anterior, son de la forma de les u_i (de la figura de l'esquerra). Notem que la solució

$$u_0 = 1 - |x| \qquad x \in [-1, 1]$$

es la única que podem apropar per la tècnica de Dissolució de la Viscositat. Tota la resta de solucions, passaràn per tenir un mínim, on $u_x^\varepsilon = 0$. Per tant qualssevol altre solució de l'equació amb la grafica poligonal, passa per tenir almenys un mínim local estricte a l'interior de l'interval $[-1, 1]$ (Figura de la dreta).

Apliquem el mètode de les solucions viscoses i tenim:

$$|u_x^\varepsilon| - 1 = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon$$

Per $\varepsilon > 0$ prou petit, la funció u^ε ha de tenir un minim local al punt x_ε. I això no és possible perquè:

$$|u_x^\varepsilon(x_\varepsilon)| - 1 = -1 \neq \varepsilon u_{xx}^\varepsilon(x_\varepsilon) \geq 0$$

D'altra banda, ens adonem que sí que poden tenir algun màxim local dins de l'interval obert.

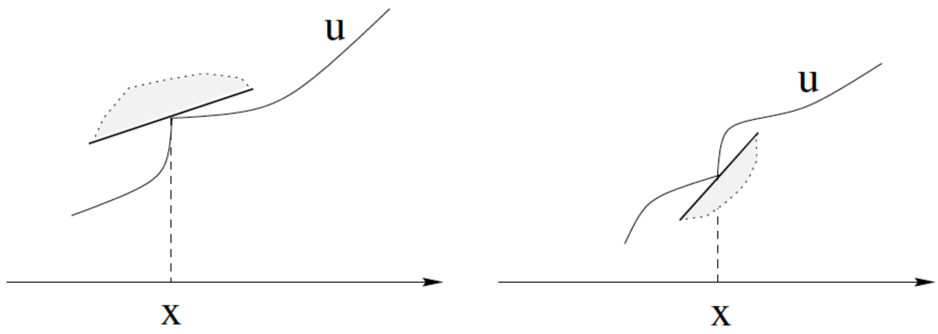
2.4.2 Lateralment Diferenciables (One-Side Diferentials)

Sigui $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funció escalar amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunt de *super-diferencials* es defineix com

$$D^+u(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^n | \quad \limsup_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - p(y - x)}{|y - x|} \leq 0 \right\}.$$

En altres paraules, un vector $p \in \mathbb{R}^n$ és super-diferencial si i només si l'hiperplà $y \to u(x) + p(y - x)$ es tangent al graf de u al punt x per damunt. De manera semblant es defineix el conjunt de les sub-diferencials.

$$D^-u(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^n | \quad \limsup_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - p(y - x)}{|y - x|} \geq 0 \right\}.$$



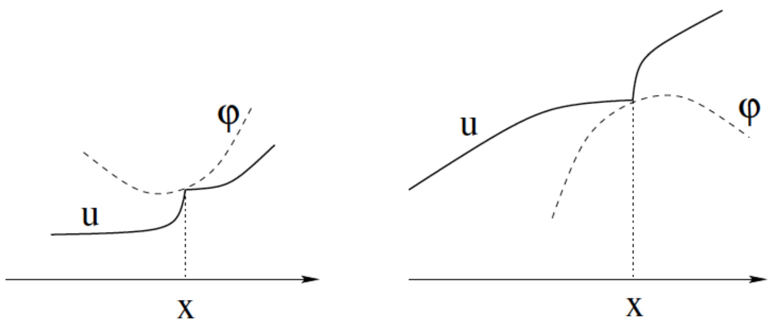
Fixem-nos que si $D^+u(x)$ i $D^-u(x)$ son tots dos diferents del conjunt buit en x, aleshores:

$$D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\}$$

Lema 2.2.1. *Sigui u una funció continua. Aleshores:*

i) $p \in D^+u(x)$ si i només si, existeix una funció $\varphi \in \mathcal{C}^1$ tal que $\nabla\varphi(x) = p$ i $u - \varphi$ te un màxim local en x.
ii) $p \in D^-u(x)$ si i només si, existeix una funció $\varphi \in \mathcal{C}^1$ tal que $\nabla\varphi(x) = p$ i $u - \varphi$ te un mínim local en x.

Nota 2.2.2: Afegint una constant, i sense perdre generalitat, es pot assumir $\varphi(x) = u(x)$. En aquest cas diem que $p \in D^+u(x)$ si i només si existeix una funció diferenciable $\varphi \geq u$ amb $\nabla\varphi(x) = p$ i $\varphi(x) = u(x)$, en altres paraules, φ toca el graf de u en x. De manera anàloga per les sub-diferencials.



Demostració. Sigui $p \in D^+u(x)$. Podem trobar un $\delta > 0$ i una funció continua i creixent $\sigma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ amb $\sigma(0) = 0$ tal que:

$$u(y) \leq u(x) + p(y - x) + \sigma(|y - x|)|y - x|$$

per $|y - x| < \delta$. Definim:

$$\rho(r) := \int_0^r \sigma(t)dt.$$

observem que: $\rho(0) = \dot\rho(0) = 0$ i $\rho(2r) \geq \sigma(r)r$.

Per les propietats anteriors, existeix una funció φ tal que

$$\varphi(y) := u(x) + p(y-x) + \rho(2|y-x|)$$

de classe $\mathcal{C}^1$ que satisfà

$$\varphi(x) = u(x), \qquad \nabla\varphi(x) = p$$

De fet, per $|y-x| < \delta$ tenim:

$$u(y) - \varphi(y) \leq \sigma(|y-x|)|y-x| - \rho(2|y-x|) \leq 0$$

Per tant la diferencia entre u i φ arriba al mínim en x. Per provar la implicació contrària, prenem $\nabla\varphi(x) = p$ i assumim que $u - \varphi$ te un mínim a x. Aleshores:

$$\limsup_{y\to x} \frac{u(y) - u(x) - p(y-x)}{|y-x|} \leq \limsup_{y\to x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - p(y-x)}{|y-x|} = 0$$

Això completa la prova de *i*). La prova de *ii*) és molt similar. □

2.4.3 Solucions Viscoses

Considerem la nostre equació HJB:

$$F(x(t), u(x), \nabla u(x)) = u_t + H(x, \nabla_x u) = 0, \tag{2.23}$$

amb $u = g$ en $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$, g coneguda. H és definida a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua i no lineal.

Definició 2.2.2. *Una funció $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ és una subsolució viscosa de (2.23) si*

$$i) \qquad F(x, u(x), p) \leq 0 \tag{2.24}$$

per a cada $x \in \Omega, p \in D^+u(x)$.

Analogament tenim que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ és una supersolució viscosa de (2.23) si

$$ii) \qquad F(x, u(x), p) \geq 0 \tag{2.25}$$

iii) Direm que u és solució viscosa si és alhora subsolució i supersolució.

Nota 2.2.3 : A la definició de subsolució, estem imposant condicions a la u només a punts x on $D^+u(x)$ és no buit. De fet, podem tenir que $D^+u(x) \neq \emptyset$ sigui dens en Ω. Podem veure el mateix per les superdiferencials $D^-u(x) \neq \emptyset$.

Nota 2.2.4 : Una funció Lipschitz-continua, es una solució generalitzada (2.23) si:

$$p = \nabla u(x) \quad \Rightarrow \quad F(x, u(x), p) = 0 \tag{2.26}$$

Que podem traduir com:

$$[p \in D^+u(x) \quad i \quad p \in D^-u(x)] \quad \Rightarrow \quad [F(x, u(x), p) \leq 0 \quad i \quad F(x, u(x), p) \geq 0], \tag{2.27}$$

La definició de solució viscosa la podriem separar en dos parts:

$$\begin{cases} p \in D^+u(x) \quad \Rightarrow \quad F(x, u(x), p) \leq 0 \quad (u \quad subsolucio), \\ p \in D^-u(x) \quad \Rightarrow \quad F(x, u(x), p) \geq 0 \quad (u \quad supersolucio). \end{cases} \tag{2.28}$$

Observem que si $u(\cdot)$ satisfà totes dues implicacions a (2.28), aleshores també compleix amb (2.27). Si u es solució viscosa, aleshores u és una solució generalitzada. La implicació contrària, no és certa en general.

Exemple 2.2.5 : Sigui $F(x, u, p) := |p| - 1$. Volem veure que la funció $u(x) = 1 - |x|$ és solució viscosa de

$$|\nabla_x u(x)| - 1 = 0 \tag{2.29}$$

a l'interval obert $(-1, 1)$. De fet, u és diferenciable i satisfa l'equació anterior a tots els punts menys a $x = 0$. Tenim:

$$D^+u(0) = [-1, 1], \qquad D^-u(0) = \emptyset \tag{2.30}$$

És evident que u es una subsolució al punt $x = 0$ donat que $p \in [-1, 1]$, aleshores $|p| - 1 \leq 0$ com demanem. Per provar que és supersolució al punt $x = 0$, no hi ha res a comprovar donat que $D^-u(x) = \emptyset$.

Definició 2.2.3. *Una funció continua $u : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ és una subsolució viscosa de (2.23), si per a tota funció $\varphi(t, x) \in \mathcal{C}^1$ tal que $u - \varphi$ té un màxim local a (t, x) es compleix*

$$\varphi_t(t, x) + H(t, x(t), u(x), \nabla_x \varphi) \leq 0. \tag{2.31}$$

Analogament per a supersolucions

$$\varphi_t(t, x) + H(t, x(t), u(x), \nabla_x \varphi) \geq 0. \tag{2.32}$$

Teorema 2.3. *Sigui u_ε una familia de solucions diferenciables de la equació viscosa*

$$F(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) = \varepsilon \triangle u_\varepsilon \tag{2.33}$$

Sigui $\varepsilon \to 0_+$ i suposem que tenim convergencia de $u_\varepsilon \to u$ uniformement en un subconjunt obert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Aleshores u és solució viscosa de (2.23)

Demostració. Prenem $x \in \Omega$ i $p \in D^+u(x)$. Per demostrar que u és subsolució cal veure que $F(x, u(x), p) \leq 0$

1. Pel Lema *2.2.1*, existeix $\varphi \in \mathcal{C}^1$, amb $\nabla\varphi(x) = p$, tal que $u - \varphi$ té un màxim estricte a x. Per qualssevol $\delta > 0$ podem trobar $0 < \rho < \delta$ i una funció $\psi \in \mathcal{C}^2$ tal que si $|y - x| \leq \rho$,

$$|\nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(x)| \leq \delta \tag{2.34}$$

i la norma a l'espai de funcions $\mathcal{C}^1$

$$\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}^1} \tag{2.35}$$

tal que cada funció $u_\varepsilon - \psi$ té un màxim a la bola $B(x;\rho)$, per tot $\varepsilon > 0$ prou petit.
2. Sigui x_ε el màxim de $u_\varepsilon - \psi$. Com les u_ε son diferenciables, tenim

$$\nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \nabla\psi(x_\varepsilon), \qquad \triangle u_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \triangle\psi(x_\varepsilon). \tag{2.36}$$

Si prenem l'equació (2.33) queda:

$$F(x, u(x_\varepsilon), \nabla\psi(x_\varepsilon)) \leq \varepsilon\triangle\psi(x_\varepsilon) \tag{2.37}$$

3. Prenem ara una subsucceció $\varepsilon_v \to 0_+$ tal que $\lim_{v\to\infty} x_\varepsilon = \bar{x}$ per algun límit $\bar{x}$. Per la construcció de l'apartat **1** obtenim $|\bar{x} - x| \leq \rho$. Donat que $\psi \in \mathcal{C}^2$, fent el pas al límit, podem concloure que

$$F(x, u(\bar{x}), \nabla\psi(\bar{x})) \leq 0. \tag{2.38}$$

I per les relacions (2.33)-(2.34) podem acotar:

$$|\nabla\psi(\bar{x}) - p| \leq |\nabla\psi(\bar{x}) - \nabla\varphi(\bar{x})| + |\nabla\varphi(\bar{x}) - \nabla\varphi(x)| \leq \delta + \delta = 2\delta \tag{2.39}$$

Donat que $\delta > 0$ és arbitrariament petit, i donada la continuitat de F, tenim que

$$F(x, u(x), p) \leq 0;$$

podem concloure que u es una subsolució. El cas de supersolucions és similar. □

Corol·lari 2.4. *Si u és diferenciable, tenim*

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0.$$

Demostració. Si u és diferenciable, tenim $D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\}$, i fent tendir $\varepsilon \to 0$, pel teorema anterior, tenim el que voliem. □

2.4.4 Comparació i Unicitat

Unes de les caracteristiques de la noció de solució viscosa, és que requereix una quantitat mínima de regularitat (continuitat). Per altra banda, però, és una condició prou forta com per permetre desenvolupar teoremes de comparació i unicitat.

La demostració del teorema d'unicitat, està basada en la técnica de doblar el número de variables, inspirada en el Teorema d'unicitat per a lleis de conservació de Kruzhkov. Encara que a [1] pagina 547-550, poguem trobar aquesta demostració, prenem el camí, més intuitiu, segons el meu punt de vista seguit a [2]

Teorema 2.5. *(comparació)*
Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert i acotat. Siguin $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ respectivament subsolució i supersolució viscosa de:

$$u + H(x, \nabla u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{2.40}$$

Si assumim

$$u_1(x) \leq u_2(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega \tag{2.41}$$

I també que $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és uniformement continua sobre x

$$|H(x,p) - H(y,p)| \leq \omega(|x-y|(1+|p|)), \tag{2.42}$$

per alguna funció continua i no decreixent ω amb

$$\omega(0) = 0 \qquad \omega : [0,\infty) \to [0,\infty).$$

Aleshores podem concloure que

$$u_1(x) \leq u_2(x) \qquad \forall x \in \bar{\Omega}. \tag{2.43}$$

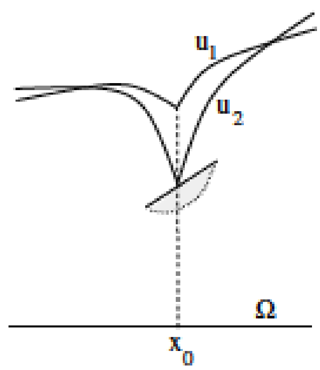
Demostració. Per ilustrar el sentit de la demostració, prenem primer el cas on u_1 i u_2 son diferenciables. Si la desigualtat (2.42) no és certa, aleshores la diferencia $u_1 - u_2$ pren un maxim positiu algun punt interior $x_0 \in \Omega$. Això implica que $p := \nabla u_1(x_0) = \nabla u_2(x_0)$. Per definició de sub- i supersolució, tenim:

$$\begin{aligned} u_1(x_0) + H(x_0, 0) &\leq 0 \\ u_2(x_0) + H(x_0, 0) &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Restant la segona a la primera, podem concloure que $u_1(x_0) - u_2(x_0) \leq 0$, per tant, tenim contradicció amb (2.42)

Considerem ara el cas no diferenciable. Podem tornar a repetir l'argument anterior i trobar una contradicció, motivada pel fet de trobar un punt x_0 on:
* $u_1(x_0) > u_2(x_0)$. I existeix algun vector p que està contingut alhora a $D^+u_1(x_0)$ i a $D^-u_2(x_0)$.

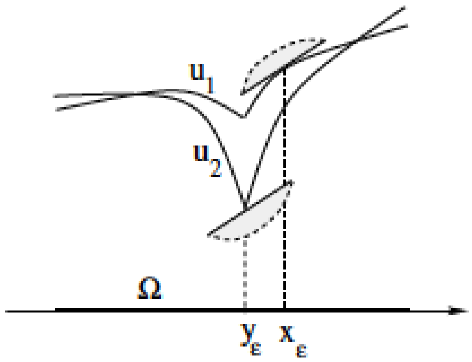
Un candidat natural per ser aquest x_0 es el punt de màxim global de $u_1 - u_2$. Malauradament, algun dels conjunts $D^+u_1(x_0)$ o $D^-u_2(x_0)$ pot ser buit. i l'argument ja no és vàlid.



Ara introduim la técnica de doblar variables. La idea clau és mirar la funció de dues variables següent:

$$\phi_\varepsilon(x,y) := u_1(x) - u_2(y) - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} \tag{2.45}$$

Aquesta funció admet un maxim global al subconjunt compacte $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Si $u_1 > u_2$ en algun punt x_0, aquest màxim serà estrictament positiu. De fet, si prenem $\varepsilon > 0$ prou petit, les condicions de contorn impliquen que el màxim s'assoleix en un punt interior $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Omega \times \Omega$



Si la condició falla, arribem a contradicció trobant punts propers $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ tals que $u_1(x_\varepsilon) > u_2(y_\varepsilon)$ i $D^+u_1(x_\varepsilon) \cap D^-u_2(y_\varepsilon) \neq \emptyset$

Observem, ara, que la funció d'una variable

$$x \to u_1(x) - \left(u_2(y_\varepsilon) + \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}\right) = u_1(x) - \varphi_1(x) \tag{2.46}$$

Que té el màxim a x_ε donat el Lema (2.2.1)

$$\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} = \nabla\varphi_2(y_\varepsilon) \in D^-u_2(y_\varepsilon) \tag{2.47}$$

I hem trobat els punts $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ i el vector $p = \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}$ de la condició (*).

1. Si la conclusió falla, aleshores existeix un $x_0 \in \Omega$ tal que:

$$u_1(x_0) - u_2(x_0) = \max_{x\in\bar{\Omega}}\{u_1(x) - u_2(x)\} := \delta > 0 \tag{2.48}$$

Per a $\varepsilon > 0$ diem que el punt $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ és on la funció ϕ_ε assumeix el màxim del compacte $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ Per la igualtat anterior tenim:

$$\phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \delta > 0$$

2. Sigui M una cota superior per a els valors $|u_1(x)|, |u_2(x)|$ per $x \in \bar{\Omega}$. Aleshores

$$\phi_\varepsilon(x, y) \leq 2M - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}$$

$$\phi_\varepsilon(x, y) \leq 0 \qquad si \quad |x-y|^2 \geq M\varepsilon$$

I arribem a

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \sqrt{M\varepsilon} \tag{2.49}$$

3. Per continuitat uniforme de la funció u_2 en $\bar{\Omega}$ per a $\varepsilon' > 0$ prou petit tenim:

$$|u_1(x) - u_2(y)| < \frac{\delta}{2} \tag{2.50}$$

per $|x-y| \leq \sqrt{M\varepsilon'}$. Podem mostrar que escollint $\varepsilon < \varepsilon'$, els punts $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ no poden romandre a la frontera de Ω. PEr exemple, si $x_\varepsilon \in \partial\Omega$, tenim que per (2.40) i (2.48)-(2.49) tenim:

$$\begin{array}{rcc} \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) & \leq & (u_1(x_\varepsilon) - u_2(x_\varepsilon)) + |u_2(x_\varepsilon) - u_2(y_\varepsilon)| - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \\ & \leq & 0 + \delta/2 + 0 \end{array} \tag{2.51}$$

Arribant a contradicció en $\phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \delta$.
4. Un cop provat que $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ corresponen a punts interiors, considerem les funcions de una variable φ_1, φ_2 definides anteriorment. Donat que x_ε és un màxim local de $u_1 - \varphi_1$ i y_ε otorga un mínim de $u_2 - \varphi_2$, podem concloure que

$$p := \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} \in D^+u_1(x_\varepsilon) \cup D^-u_2(y_\varepsilon) \tag{2.52}$$

Per la definició de sub-/supersolució obtenim:

$$\begin{array}{rcl} u_1(x_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, p_\varepsilon) & \leq & 0 \\ u_2(y_\varepsilon) + H(y_\varepsilon, p_\varepsilon) & \geq & 0 \end{array} \tag{2.53}$$

5. De

$$u_1(x_\varepsilon) - u_2(x_\varepsilon) = \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq u_1(x_\varepsilon) - u_2(x_\varepsilon) + |u_2(x\varepsilon) - u_2(y_\varepsilon)| - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}$$

es dedueix que

$$|u_2(x\varepsilon) - u_2(y_\varepsilon)| - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \geq 0$$

Fent servir (2.48) i la continuitat de u_2, obtenim:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0_+} \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \quad \leq \quad \limsup_{\varepsilon \to 0_+} |u_2(x_\varepsilon) - u_2(y_\varepsilon)| = 0 \tag{2.54}$$

6. Per $\phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \delta > 0$ i la definició de la p, restant les desigualtats de (2.52) i utilitzant (2.41), tenim:

$$\begin{array}{rcl} \delta & \leq & \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \\ & \leq & u_1(x_\varepsilon) - u_2(x_\varepsilon) \\ & \leq & |H(x_\varepsilon, p_\varepsilon) - H(y_\varepsilon, p_\varepsilon)| \\ & \leq & \omega\Big(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \cdot (1 + \varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|)\Big) \end{array} \tag{2.55}$$

Això porta a contradicció. De fet, per (2.53) la desigualtat de la dreta de (2.54) és arbitrariament petita quan $\varepsilon \to 0$ □

Com a conseqüència del resultat anterior, tenim el resultat d'unicitat per al problema de condicions inicials següent:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + H(x, \nabla_x u) & = & 0 & x \in \Omega \\ u & = & g & x \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.56}$$

Corol·lari 2.6. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotat i obert. Sigui el Hamiltonià H que satisfà (2.41). Aleshores el problema de condicions inicials (2.39)-(2.40) admet com a molt una solució viscosa*

Demostració. Sigui u_1, u_2 solucions viscoses. Donat que u_1 és una subsolució i u_2 una supersolució, i $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega$, pel teorema de Comparació (2.5), podem concloure que $u_1 \leq u_2$ a $\bar{\Omega}$. Si intercanviem els rols, obtenim $u_2 \leq u_1$ a $\bar{\Omega}$ completant la demostració. □

Prenem ara $T > 0$ i considerem les equacions *HJB* per

$$\begin{cases} u_t + H(x, \nabla_x u) & = & 0 & \textit{en} & \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u & = & g & \textit{sobre} & \mathbb{R}^n \times t = 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

Direm que una funció u acotada i uniformement contínua és solució viscosa de (*2.39*).Si compleix, com hem vist anteriorment: si per a tota funció $\varphi(t, x) \in \mathcal{C}^1$ tal que $u - \varphi$ té un màxim local a (t_0, x_0) es dona:

$$\varphi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x(t_0), u(x_0), \nabla_x \varphi(x_0)) \leq 0 \tag{2.58}$$

O bé si per a tota funció $\varphi(t, x) \in \mathcal{C}^1$ tal que $u - \varphi$ té un mínim local a (t_0, x_0) es dona:

$$\varphi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x(t_0), u(x_0), \nabla_x \varphi(_0)) \geq 0 \tag{2.59}$$

És a dir, permitirem $t_0 = T$.
Tenim el següent resultat:

Teorema 2.7. *(Unicitat)*
Sigui $c > 0$ una constant positiva tal que per a tots $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$, H satisfà:

$$|H(x, p) - H(x, q)| \leq c|p - q| \tag{2.60}$$

$$|H(x, p) - H(y, p)| \leq c|x - y|(1 + |p|) \tag{2.61}$$

Aleshores existeix una única solució viscosa de (2.39).

La demostració, la ometrem per ser molt extensa. Es una manera poc usual però molt útil que consisteix en duplicar el nombre de variables. Es pot consutar a: [1] pàgina 547-550.

2.5 Fórmula Lax-Hopf i Unicitat de la funció Valor

En aquesta secció volem minimitzar un cost, equivalent a maximitzar un pagament. En particular H, el Hamiltonià, depen només de p. Això ens permetrà trobar una fòrmula explícita per a solucionar el problema. Tornem a centrar l'atenció en els problemes purament del tipus HJB provenints de la rogramació dinàmica. Prenem doncs la nostre funció Valor v com a funció incògnita u de les seccions anteriors.

$$\begin{cases} v_t + H(\nabla_x v) & = & 0 & \textit{en} & \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ v & = & g & \textit{sobre} & \mathbb{R}^n \times t = 0 \end{cases} \tag{2.62}$$

Suposem que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és Lipschitz, $p \to H(p)$ convex amb:

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$$

Aleshores la fòrmula de Lax-Hopf per a (2.62) és:

$$v(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \Big\{ tL\Big(\frac{x-y}{t}\Big) + g(y) \Big\} \tag{2.63}$$

per $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, i L la transformada de Legendre de H

$$L(q) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \big\{ p \cdot q - H(p) \big\}, \qquad q \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 2.8. *Sota les hipòtesis anteriors, si g és també acotada, aleshores la única solució viscosa de (2.62) és la donada per (2.63).*

Demostració. Recordem que per la definició de v en la igualtat (2.63) i donat que g és acotada, continua i Lipschitz, aleshores v també és acotada a $\mathbb{R}^n \times (0,T]$. Sigui $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ una funció diferenciable. Sigui $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ un màxim de $v - \varphi$. Tenim:

$$v(x_0,t_0) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\{ (t_0-t)L\big(\frac{x_0-x}{t_0-t}\big) + v(x,t) \Big\} \tag{2.64}$$

per a cada $0 \le t < t_0$. Per tant:

$$v(x_0,t_0) \le (t_0-t)L\big(\frac{x_0-x}{t_0-t}\big) + v(x,t) \tag{2.65}$$

D'altra banda, donat que és un màxim de $v - \varphi$:

$$v(x_0,t_0) - \varphi(x_0,t_0) \ge v(x,t) - \varphi(x,t) \tag{2.66}$$

I per (x,t) proper a (x_0,t_0) tenim:

$$\varphi(x_0,t_0) - \varphi(x,t) \le (t_0-t)L\big(\frac{x_0-x}{t_0-t}\big) \tag{2.67}$$

per a cada $t < t_0$, (x,t) proper a $x_0, t_0)$. Escribint $h = t_0 - t$ i $x = x_0 - hq$ on $q \in \mathbb{R}^n$ donat. La desigualtat anterior es transforma en:

$$\varphi(x_0,t_0) - \varphi(x_0 - hq, t_0 - h) \le hL(q) \tag{2.68}$$

Dividim per h i fem $h \to 0$:

$$\varphi_t(x_0,t_0) + \nabla\varphi(x_0,t_0)\cdot q - L(q) \le 0, \qquad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

i

$$\varphi_t(x_0,t_0) + H(\nabla\varphi(x_0,t_0)) \le 0. \tag{2.69}$$

Com H depén només del Hamiltonià,

$$H(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \{p\cdot q - L(q)\}$$

Dona la desigualtat desitjada per al màxim de $v - \varphi$.

Suposem ara que $v - \varphi$ té un mínim a (x_0, t_0). Hem de demostrar que

$$\varphi_t(x_0, t_0) + H(\nabla\varphi(x_0, t_0)) \geq 0$$

Suposem que no és cert:

$$\varphi_t(x_0, t_0) + H(\nabla\varphi(x_0, t_0)) \leq -\theta < 0$$

Per algun $\theta > 0$ i per a tots els punts (x, t) prou propers a (x_0, t_0).

$$\varphi_t(x_0, t_0) + \nabla\varphi(x_0, t_0) \cdot q - L(q) \leq -\theta,$$

per punts (x, t) prou propers a (x_0, t_0) i $\forall q \in \mathbb{R}^n$.
Ara tenim que per $h > 0$ prou petites,

$$v(x_0, t_0) = hL\big(\frac{x_0 - x}{h}\big) + v(x_1, t_0 - h) \tag{2.70}$$

Per algún punt proper x_1 de x_0. Calculant:

$$\varphi(x_0, t_0) - \varphi(x_1, t_0 - h) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\varphi(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h)\, ds =$$

$$= \int_0^1 \nabla\varphi(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h) \cdot (x_0 - x_1) + \varphi_t(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + s(s-1)h)h\, ds =$$

$$= h\Big(\int_0^1 \nabla\varphi(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h) \cdot (x_0 - x_1) + \varphi_t(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + s(s-1)h)\, ds\Big)$$

D'on $q = x_0 - x_1/h$. Ara si $h > 0$ prou petit apliquem la desigualtat (2.69) i tenim

$$\varphi(x_0, t_0) - \varphi(x_1, t_0 - h) \leq hL\big(\frac{x_0 - x}{h}\big) - h\theta$$

□

Ara finalment, veurem que la funció valor és la única solució viscosa del problema de valors inicials

$$\begin{array}{rcll} v_t + \max_{a\in\mathcal{A}}\big\{f(x,a)\cdot\nabla_x v(x,t) + r(x,a)\big\} & = & 0, & \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ v(x,t) & = & g(x), & \mathbb{R}^n \times \{t = T\} \end{array} \tag{2.71}$$

Teorema 2.9. *La funció valor v és la única solució viscosa del problema de condicions inicials (2.70).*

Observació: Com tenim un problema de valors terminals, hem d'especificar qué serà la solució viscosa en aquest context. Serà una funció v acotada, uniformement continua que:

i) $v = g$ en $\mathbb{R}^n \times \{t = T\}$,

ii) $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ es té:

a) Si $v - \varphi$ té un màxim local en $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$, aleshores

$$\varphi_t(t_0, x_0) + H(x(t_0), \nabla_x \varphi(x_0)) \geq 0$$

b) Si $v - \varphi$ té un mínim local en $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$, aleshores

$$\varphi_t(t_0, x_0) + H(x(t_0), \nabla_x \varphi(x_0)) \leq 0$$

Es a dir, es giren les desigualtats.

Observació: Si v és solució viscosa del problema de condicions terminals (2.70), aleshores $\omega(x,t) = v(x, T-t)$ és solució viscosa de:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \omega_t(x,t) - \min_{a\in A}\left\{\nabla_x \omega(x(t),t)\cdot f(x(t),a) + r(x(t),a))\right\} & = & 0 & \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \omega(x,t) & = & g(x) & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{array} \right. \tag{2.72}$$

Demostració del Teorema 2.9. Suposem que $v - \varphi$ té un mínim local en $(x_0, t_0) \in R^n \times (0,T)$. Volem mostrar que:

$$\varphi_t(x_0,t_0) + \min_{a\in A}\left\{\nabla_x \varphi(x_0,t_0)\cdot f(x_0,a) + r(x_0,a))\right\} \leq 0$$

Suposem que existeix un $\theta > 0$ tal que

$$\varphi_t(x,t) + \nabla_x \varphi(x,t)\cdot f(x,a) + r(x,a) \geq \theta > 0$$

per a qualssevol $a \in \mathcal{A}$ i per a (x,t) prou proper de (x_0,t_0). És a dir, que existeix $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| - |t - t_0| < \delta$$

Com que $v - \varphi$ té un mínim local en (x_0, t_0), podem suposar

$$(v-\varphi)(x,t) \geq (v-\varphi)(x_0,t_0) \qquad \forall (x,y), |x-x_0| - |t-t_0| < \delta$$

Sigui $0 < h < \delta$ petit, tal que $|x(s) - x_0| < \delta$ per tots $t_0 \leq s \leq t_0 + h$, on $x(\cdot)$ és solució de:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x}(s) & = & f(x(s),\alpha(s)) & t_0 \leq s \leq T \\ x(t_0) & = & x_0 & \end{array} \right. \tag{2.73}$$

Per un cert control $\alpha(\cdot) \in A$

Aleshores, per qualsevol $\alpha(\cdot) \in A$ tenim:

$$\begin{aligned} v(x(t_0+h), t_0+h) - v(x_0,t_0) &\geq \varphi(x(t_0+h), t_0+h) - \varphi(x_0,t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_0+h} \tfrac{d}{ds}\varphi(x(s),s)\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+h} \varphi_t(x(s),s) + f(x(s),\alpha(s)) \cdot \nabla_x \varphi(x(s),s)\, ds \end{aligned} \tag{2.74}$$

D'altra banda, per la condició d'optimalitat (estem mirant una equació amb un mínim), podem escollir $\alpha(\cdot) \in A$:

$$v(x_0,t_0) \geq \int_{t_0}^{t_0+h} r(x(s),\alpha(s))ds + v(x(t_0+h), t_0+h) - \frac{\theta h}{2}$$

De les dues últimes desigualtats segueix:

$$\frac{\theta h}{2} \geq \int_{t_0}^{t_0+h} \varphi_t(x(s),s) + f(x(s),\alpha(s)) \cdot \nabla_x \varphi(x(s),s) + r(x(s)\alpha(s))\, ds \geq \theta h$$

Per a un cert control $\alpha(\cdot)$, amb el qual arribem a absurd.
De la mateixa manera s'arriba a l'absurd suposant que $v - \varphi$ té un mínim local en (x_0,t_0) pero no satisfà la desigualtat correponent. $\square$

2.6 Construcció del control òptim

Farem servir el Principi de la Programació Dinàmica per disenyar controls òptims. Ho farem de la següent manera:

1. Ressolem l'equació de *Hamilton-Jacobi-Bellman* per obtenir v
2. Un cop coneguda la funció v, per a cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $0 \leq t \leq T$ definim $\alpha(x,t) = a \in A$ amb a el paràmetre on s'assoleix el màxim per a (x,t). Prenem α que

$$v_t + f(x,\alpha(x,t)) \cdot \nabla_x v(x,t) + r(x,\alpha(x,t)) = 0.$$

3. Resolem el sisitema d'equacions suposant que α es prou regular.

$$\begin{cases} \dot{x}^*(s) = f(x^*(s), \alpha^*(x(s),s)) & t \leq s \leq T \\ x(t) = x \end{cases} \tag{2.75}$$

4. Definim el control com:

$$\alpha^*(s) = \alpha(x^*(s),s)$$

En resum, si l'estat del sistema a temps t és x, fem servir el control que a temps t prendrà valor $a \in A$, tal que a assoleix el màxim de HJB.

3 Control Òptim Estocàstic

3.1 Motivació

En aquesta secció s'adaptarà el problema anterior afegint *soroll* al model. D'aquesta manera podem tenir en compte les possibles flucuacions que hi poden tenir lloc i modelar més minuciosament. En aques cas es planteja la equació diferencial estocàstica següent

$$\begin{cases} \dot{X}(t) & = & f(X(t)) + \sigma\xi(t), \quad t > 0 \\ X(0) & = & x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

on ξ representa el soroll blanc que causa les fluctuacions aleatòries. Observem que la solució també seria aleatòria. Farem servir X per indicar aquesta característica.

Una solució de (3.1) és un procés estocàstic amb una distribució de probabilitat sobre els possibles camins.

Podriem considerar el problema de control associat a la equació diferencial estocàstica. Sigui $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$, considerem el sistema següent,

$$\begin{cases} \dot{X}(s) & = & f(X(s), A(s)) + \sigma\xi(s), \quad t \leq s \leq T \\ X(0) & = & x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Associat al funcional$J_t(X(t), A(t))$ que depén de la resposta del sistema $x(t)$ Introduim les definicions necesàries.

Definició 3.0.1. *Un control A és una assignació $A : [t, T] \to \Lambda$, tal que per a cada $t \leq s \leq T$, A és mesurable i adaptat a la filtració $[F_s]_{t \leq s \leq T}$ generada per $X(\tau)$ on $t \leq \tau \leq s$.*

Definició 3.0.2. *Definim el funcional asociat com*

$$J_t(X(t), A(t)) = J_{X,t}[A(t)] = \mathbb{E}\Big\{ \int_t^T r(X(s), A(s))ds + g(X(T)) \Big\}. \tag{3.3}$$

Aquesta expresió ens dona el valor esperat sobre tots els possibles camins de la solució de (3.2). Direm r al pagament variable i g al pagament terminal. Considerem que aquestes funcions son conegudes.

El problema es centra en trobar el control òptim A^* tal que

$$J_{X,t}[A^*] = \max_{A \in \mathcal{A}} J_{X,t}[A],$$

on

$$\mathcal{A} = \Big\{ A(\cdot) | \quad \textit{admisible, mesurable i adaptat a} \quad [F_s]_{t \leq s} \Big\}$$

En la secció següent donarem les definicions necessaries, per a poder mostrar més endevant, de l'adaptació el principi de programació dinàmica i l'equació de *Hamilton-Jacobi-Bellman.*

3.2 Equacions i càlcul estocàstic

. En aquesta secció presentarem les eines necessàries del càlcul estocàstic per poder studiar el problema plantejat.

3.2.1 Moviment Brownià

Introduirem, breument les definicions necessaries per modelar les fluctuacions possibles amb moviment brownià.

Definició 3.0.3. *Un procés estocàstic és una col·lecció de variables aleatòries* $X(t)$ *amb* $0 \leq t \leq \infty$*, definidas a l'espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

La assignació $\omega \to X(t, \omega)$ és la corresponent al ω-éssim camí del procés.

Definició 3.0.4. *Un procés estocàstic* $W(t)$ *que pren valors a* $\mathbb{R}$ *és un moviment brownià estàndard unidimensional si*

i) W(0)=0 quasi segurament.

ii) Sigui $\Omega_0 \subset \Omega$ *amb* $P(\Omega_0) = 1$ *i* $\forall \omega \in \Omega_0$*, tenim que* $t \to W(T, \omega)$ *és continu. És a dir, quasi tot camí es continu.*

iii) $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ *segueix una distribució normal amb mitjana* $\mu = 0$ *i variancia* $\sigma^2 = t$.

iv) Per a tota col·lecció de temps $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$*, les variables aleatòries*

$$W(t_1),\ W(t_2) - W(t_1),\ ...,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$$

son independents.És a dir, $W(\cdot)$ *té increments independents.*

Definició 3.0.5. *Un moviment brownià n-dimensional és*

$$W(t) = (W^1(t), W^2(t), ..., W^n(t))$$

on $W^i(t)$ *son moviments brownians independents*

Tornem a considerar el sistema d'equacions diferencials estocàstiques sense el control A.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= f(X(t)) + \sigma\xi(t), \quad t > 0 \\ X(0) &= x_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

I acceptem de manera informal que $\dot{W} = \xi$

Definició 3.0.6. *Direm que un procés aleatori X és solució de l'equació diferencial estocàstica (3.1), si per a tot temps $t \geq 0$ es compleix*

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \sigma W(T). \tag{3.5}$$

Notem que es possible resoldre localment l'equació (3.5) pel mètode de les aproximacions succesives, si assumim certa regularitat en f, per exemple, que sigui Lipschitz.

Prenem $X^0 = x_0$ i definim inductivament:

$$X^{k+1}(t) = \int_0^t f(X^k(s), s)ds + \sigma W(t).$$

Podem demostrar que $\{X^k\}_k$és una successió de Cauchy i que $X^k(t)$ convegeix cap a $X(t)$ per a tot $t \geq 0$

Observació: Més endevant, considerarem unes equacions diferencials estocàstiques més generals.

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t)dt + H(X(t))\xi(t)$$

On $\xi := \frac{dW}{dt}$ i $t > 0$

Reformulant l'equació anterior tenim

$$dX(t) = f(X(t))dt + H(X(t))dW(t),$$

Ens queda així una equació diferencial estocàstica d'Itô. Direm que $X(0)$ és solució amb condició inicial $X(0) = x_0$ si

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t H(X(s))dW(s)$$

per tot $t \geq 0$. L'expressió $\int_0^t H(X(s))dW(s)$ es coneix com a *integral estocàstica de Itô.*

En general donat un moviment brownià W i un procés estocàstic Y tal que per a tot $0 \leq \tau \leq s$ (i que no depén de $W(\tau)$ per a $\tau \geq s$) es pot definir l'integral d'Itô

$$\int_0^t Y dW$$

Si bé no entrarem en detall sobre la construcció de l'integral d'Itô, una de les seves propietats més importants és

$$\mathbb{E}[\int_0^t Y dW] = 0$$

3.2.2 Regla de la Cadena d'Itô

Un cop definida l'integral estocàstica d'Itô, es te una nova mena de calcul, les propietats del qual esmentarem a continuació. En particular, la regla de la cadena conté ara nous termes adicionals, si la comparem amb la regla de la cadena usual. Aquests càlculs s'han de tenir en cosideració alhora de deduir les equacions de *Hamilton-Jacobi-Bellman*.

Enunciarem un resultat que està demostrat a [5]

Teorema 3.1. *Sigui* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^3$*. Considerem l'equació*

$$\begin{cases} dX(t) &= F(t)dt + G(t)dW(t), \quad t > 0 \\ X(0) &= x_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

amb solució

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(t)dt + \int_0^t G(t)dW(t),$$

definim el procés

$$Y(t) := u(X(t))$$

Aleshores,

$$dY := \left[u'(X(t))F(t) + \frac{1}{2}G^2(t)u''(X(t)) \right] dt + u'(X(t))G(t)dW$$

Per donar una idea de la demostració del teorema, hem de fer servir el següent principi heurístic

$$dW(t) = (dt)^{\frac{1}{2}}$$

Volem entendre com és el comportament de Y, trobant l'equació que resol.

Aproximant la funció u pel seu polinomi de Taylor de segon ordre, inclosa una estimació de l'error.

$$u(t + ds) = u(s) + u'(s)ds + \frac{1}{2}u''(s)(ds)^2 + o(ds^2).$$

Aplicant la regla de la cadena sobre Y

$$\begin{aligned} dY(t) &= d(u(X(t))) \\ &= u'(X(t))dX + \tfrac{1}{2}u''(X(t))(dX)^2 + o(dX^2) \\ &= u'(X(t))[F(t)dt + G(t)dW] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}u''(X(t))[F(t)dt + G(t)dW]^2 + o([dt + dW]^2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituim fent servir la idea heurística $dW(t) = (dt)^{1/2}$ i queda que

$$\begin{aligned} [F(t)dt + G(t)dW]^2 &= F(t)^2dt^2 + G(t)^2dW^2 + 2F(t)G(t)dtdW, \\ &= G(t)^2dt + o(dt). \end{aligned}$$

Si menyspreem els termes $o(dt)$, arribem a la regla de la cadena de Itô unidimenional següent:

$$\begin{aligned} dY(t) &= d(u(X(t))) \\ &= u'(X(t))dX + \tfrac{1}{2}u''(X(t))(dX)^2 + o(dX^2) \\ &= \left[u'(X(t))F(t)dt + \tfrac{1}{2}G^2(t)u''(X(t)) \right] dt + u'(X(t))G(t)dW \end{aligned}$$

Reescribint l'ecuació de u en forma integral queda

$$\begin{aligned} u(X(t)) &= Y(t) \\ &= Y(0) + \int_0^t \left[u'(X(s))F(s)dt + \tfrac{1}{2}G^2(s)u''(X(s))\right] ds \\ &\quad + \int_0^t u'(X(t))G(t)dW. \end{aligned}$$

On X(t) és solució de l'equació

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) + \sigma dW(t), & t > 0 \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Considerem seguidament el cas multidimansional,

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) + \sigma dW(t), & t > 0 \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

escrivim per $X(T)$ en coordenades com

$$X(t) = \big(X^1(t), X^2(t), X^3(t), \dots, X^n(t)\big).$$

Aleshores Y queda

$$\begin{aligned} dY(t) &= d(u(X(t))) \\ &= u_t(X(t),t)dt + \textstyle\sum_{i=1}^n u_{x_i}(X(t),t)dX^i \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}(X(t),t)dX^idX^j. \end{aligned}$$

Les següents condicions son necessàries: $X(\cdot)$ solució de l'equació (3.8), $dW^i = (dt)^{1/2}$ i que

$$dW^idW^j = \begin{cases} dt & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Donat que les components dW son independents. Substituint a la igualtat anterior i prenent els termes de primer i segon ordre en dt, tenim:

$$\begin{aligned} dY(t) &= d(u(X(t))) \\ &= u_t(X(t),t)dt + \textstyle\sum_{i=1}^n u_{x_i}(X(t),t)[F(X(t)) + \sigma dW(t)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \textstyle\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}(X(t),t)dX^idX^j. \end{aligned}$$

Notem que la primera suma correspon al producte intern de $\triangledown_x u$ amb $[F(X(t)) + \sigma dW(t)]$, alhora que la segona suma correspon al laplacià de u. Per tant la igualtat anterior es pot escriure com

$$dY(t) = u_t(X,t) + \triangledown_x u(X,t) \cdot [F(X(t)) + \sigma dW(t)] + \frac{\sigma^2}{2}\triangle u(X,t)dt$$

Exemple 3.1.1. *Sigui $P(t)$ el preu d'un actiu a temps t. Podem modelar la evolució de $P(t)$ segons t. Suposem que $\frac{dP}{P}$, l'increment de preu relatiu, evoluciona respecte la següent EDS:*

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW$$

per a certa constant $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, corresponen a l'esperança i la variancia. Se les coneixen com tendencia i volatilitat. Aleshores

$$dP = \mu P dt + \sigma P dW,$$

per tant, podem reescriure l'equació com

$$d(log(P) = \frac{dP}{P} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 P^2 dt}{P} = \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)dt + \sigma dW$$

En conseqüéncia

$$P(t) = p_0 e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

Observem que donat un p_0 inicial tal que $p_0 > 0$ tenim

$$P(t) = p_0 + \int_0^t \mu P ds + \int_0^t \sigma P dW$$

Prenem l'esperança a totes dues bandes (fixem-nos que al ser W(t) moviment Brownià i $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma P dW] = 0$)

$$\mathbb{E}[P(t)] = p_0 + \int_0^t \mu \mathbb{E}[P(s)] ds \qquad \forall t \geq 0$$

per tant, en aquest cas, el valor esperat correspon al cas determinista corresponent a $\sigma = 0$.

3.3 Principi de la Programació Dinàmica.

Volem, com en el cas determinístic anterior, construir un control òptim per al cas estocàstic. Necessitem adaptar el principi de programació dinàmica al nou context.

Volem, per aquest motiu, reescriure el problema de control per al següent sistema de EDS.

$$\begin{cases} \dot{X}(s) &= f(X(s), A(s)) + \sigma dW(s), \quad t \leq s \leq T \\ X(t) &= x. \end{cases} \tag{3.10}$$

Amb solució

$$X(\tau) = x_0 + \int_t^\tau f(X(s), A(s)) ds + \sigma[W(\tau) - W(t)]. \tag{3.11}$$

Associat al funcional

$$J_{X,t}[A(t)] := \mathbb{E}\Big\{ \int_t^T r(X(s), A(s)) ds + g(X(T)) \Big\},$$

y la funció valor serà

$$v(x,t) := \sup_{A \in \mathcal{A}} J_{x,t}[A(t)]$$

3.3.1 Equacions de Hamilton-Jacobi-Bellman

Un altre cop volem transformar el problema de control en el de resoldre una equació diferencial a la qual la funció valor v sigui solució.

Suposem que existeix un control òptim A^*. Sigui A un control qualssevol,, i suposem que el fem servir per als temps $t \leq s \leq t+h$, $h > 0$, i a partir d'aquí, fem servir el control A^*. Definim per a A i h fixes, el control admissible

$$\hat{A} = \begin{cases} A(s) & si \quad t \leq s \leq t+h, \\ \\ A^*(s) & si \quad t+h \leq s \leq T. \end{cases}$$

Calculem el pagament esperat

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T r(X(s), \hat{A}(s))ds + g(X(t))\right],$$

per la linearitat de l'esperança

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} r(X(s), A(s))ds + \int_{t+h}^T r(X(s), A^*(s))ds + g(X(t))\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} r(X(s), A(s))ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_{t+h}^T r(X(s), A^*(s))ds + g(X(t))\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} r(X(s), A(s))ds\right] + v(X(t+h), t+h) \leq v(x,t).$$

Per a $A = A^*$ control òptim val la igualtat.

Per la desigualtat anterior anterior, tenim que per un control arbitrari A,

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} r(X(s), A(s))ds + v(X(t+h), t+h) - v(x,t)\right] \leq 0$$

es a dir,

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} r(X(s), A(s))ds\right] + \mathbb{E}[v(X(t+h), t+h) - v(x,t)] \leq 0$$

Donat que $X(t)$ és solució de la equació diferencial

$$\begin{cases} dX(s) &= f(X(s), A(s))ds + \sigma dW(s), \quad t \leq s \leq T \\ X(0) &= x_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Apliquem la regla de Itô:

$$dv(X(s), s) = v_t(X(s), s)ds + \nabla_x v(X(s), s) \cdot [f(X(s))ds + \sigma dW(t)] + \frac{\sigma^2}{2} \triangle v(X(s), s)ds.$$

Això indica que

$$v(X(t+h),t+h)-v(x,t)=\int_t^{t+h}\big(v_t+\nabla_x v\cdot f+\frac{\sigma^2}{2}\triangle v\big)ds+\int_t^{t+h}\sigma\nabla_x v dW(s).$$

Calculant l'esperança en queda

$$\mathbb{E}\Big[\int_t^{t+h}\big(r+v_t+\nabla_x v\cdot f+\frac{\sigma^2}{2}\triangle v\big)ds\Big]\leq 0$$

Si dividim per $h>0$ i la fem tendir a 0^+, ens queda

$$r(X(t),A(t))+v_t(X(t),t)+f(X(t),A(t))\cdot\nabla_x v(X(t),t)+\frac{\sigma^2}{2}\triangle v(X(t),t)\leq 0$$

Aixo ho escriurem com

$$r(x,a)+v_t(x,t)+f(x,a)\cdot\nabla_x v(x,t)+\frac{\sigma^2}{2}\triangle v(x,t)\leq 0$$

Com val la igualtat per al control òptim A^*

$$\max_{a\in A}\Big\{r+v_t+f\cdot\nabla_x v+\frac{\sigma^2}{2}\triangle v\Big\}=0.$$

La deducció anterior ens diu que la funció valor v del nostre problema de control, es la solució de la següent EDP.

$$\begin{array}{rcl} v_t+\frac{\sigma^2}{2}\triangle v(x,t)+\max_{a\in\mathcal{A}}\big\{f(x,a)\cdot\nabla_x v(x,t)+r(x,a)\big\} & = & 0, \\ v(x,t) & = & g(x). \end{array} \tag{3.13}$$

És l'anomenada equació de *Hamilton - Jacobi - Bellman* per al problema de control òptim estocàstic.

3.4 Solucions Viscoses

Com abans, la funció valor no és sovint continua. Per això, necessitem adaptar la noció de viscositat per al cas aleatori, per caracteritzar la funció valor.

Definició 3.1.1. *Una funció $v\in\mathcal{C}([0,T]\times\mathbb{R})$ es diu subsolució viscosa de la equació (3.13) si*

$$v(x,T\leq h(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

(analogament supersolució per $v(x,T))\geq h(x))$ i per a cada $\varphi\in\mathcal{C}^2$, quan $v-\varphi$ assoleix un màxim (analogament mínim per supersolucions) al punt $(x,t)\in[0,T)\times\mathbb{R}$ tenim que

$$-\varphi_t-\inf_{A\in\mathcal{A}}\big[\frac{\sigma^2}{2}\triangle\varphi(x,t)+f(x,a)\cdot\nabla_x\varphi(x,t)+r(x,a)\big]\leq 0,\qquad(\geq 0)$$

Si $v\in\mathcal{C}(\mathbb{R}\times[0,T])$ és alhora sub i supersolució viscosa de (3.13), aleshores s'anomena solució viscosa de (3.13).

Volem demostrar que la funció valor v és solució viscosa de (3.13).

Demostració. Per a tota funció $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times [0,T])$, sigui $(y,s) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ el punt on $v - \varphi$ assoleix un màxim. Fixem $a \in A$ i escrivim $x(\cdot) = x(\cdot, s, y, a)$ la trajectoria de l'estat amb el control $a = \alpha(x,t)$. El principi de Programació dinàmica i per les propietats de la fòrmula de Itô, tenim per $h > 0$,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\mathbb{E}[v(y,s) - \varphi(y,s) - v(x(s+h), s+h) + \varphi(s+h, x(s+h))]}{h} \\
&\leq \frac{1}{h}\mathbb{E}\bigg[\int_s^{s+h} r(x(t),a)\,dt - \varphi(y,s) + \varphi(s+h, x(s+h))\bigg] \rightarrow \\
&\rightarrow \varphi_t + \frac{\sigma^2}{2}\triangle\varphi(x,t) + f(x,a)\cdot\nabla_x\varphi(x,t) + r(x,a)
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
-\varphi_t - \inf_{A\in\mathcal{A}}\big[\frac{\sigma^2}{2}\triangle\varphi(x,t) + f(x,a)\cdot\nabla_x\varphi(x,t) + r(x,a)\big] \leq 0
$$

per tant, v és una sunsolució viscosa

Per altra banda, si $v - \varphi$ té una minim local al punt $(y,s) \in \mathbb{R} \times [0,T)$, aleshores per tot $\varepsilon > 0, \quad h > 0$, podem trobar un control $\alpha(\cdot) = \alpha_{\varepsilon,s+h}(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \mathbb{E}[v(y,s) - \varphi(y,s) - v(x(s+h), s+h) + \varphi(s+h, x(s+h))] \\
&\geq -\varepsilon h + \mathbb{E}\bigg[\textstyle\int_s^{s+h} r(x(t),a)\,dt - \varphi(y,s) + \varphi(s+h, x(s+h))\bigg]
\end{aligned}
$$

divint per h

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \tfrac{1}{h}\mathbb{E}\bigg[\textstyle\int_s^{s+h} r(x(t),a)\,dt - \varphi(y,s) - \varphi(s+h, x(s+h))\bigg] \\
&\geq \tfrac{1}{h}\mathbb{E}\bigg[\textstyle\int_s^{s+h} \varphi_t \inf_{A\in\mathcal{A}}\big[\tfrac{\sigma^2}{2}\triangle\varphi(x,t) + f(x,a)\cdot\nabla_x\varphi(x,t) + r(x,a)\big]\,dt\bigg]
\end{aligned}
$$

quan $h \rightarrow 0$

$$
\rightarrow \varphi_t + \inf_{A\in\mathcal{A}}\big[\frac{\sigma^2}{2}\triangle\varphi(x,t) + f(x,a)\cdot\nabla_x\varphi(x,t) + r(x,a)\big]
$$

Per tant,

$$
-\varphi_t - \inf_{A\in\mathcal{A}}\big[\frac{\sigma^2}{2}\triangle\varphi(x,t) + f(x,a)\cdot\nabla_x\varphi(x,t) + r(x,a)\big] \geq 0
$$

Per tant, v és una supersolució viscosa. Podem demostrar la unicitat aplicant el teorema de comparació (2.5), del capítol anterior $\square$

Exemple 3.1.2. *Volem mostrar com el mètode d'arbre binomial per a opcions americanes, convergeix a temps continu a la ben coneguda equació Black-Scholes per a opcions americanes.*

El model d'arbre binomial es pot escriure de la següent manera

$$V_j^n = \max\Big\{\frac{1}{\rho}[pV_{j+1}^{n+1} + (1-p)V_{j+1}^{n+1}], \big(S_0u^j - X\big)^+\Big\},$$

on $j = n, n-2, \ldots, -n$ indica el nombre de pujades o baixades propocionals, del preu. Tenim que $d = \frac{1}{u}$ per u i d constants. La indexacció del temps ve donada per $0 \leq n \leq N$ i per tant

$$V_j^N = \big(S_0u^j - X\big)^+, \quad j = N, N-2, \ldots, -N$$

on

$$p = \frac{\rho - d}{u - d}, \quad \rho = exp(r\sqrt{\Delta t}\,), \quad u = exp(\sigma\sqrt{\Delta t}\,), \quad d = exp(-\sigma\sqrt{\Delta t}\,)$$

per els valors $\sigma > 0$, $0 \leq r \leq 1$ Per simplificar la notació escriurem el model com

$$V^n = F(\Delta t)\big(V^{n+1}\big) \tag{3.14}$$

on $V^k = \{V_j^k\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Es pot veure que (3.14) és monòtona. Això és per $U \leq V$

$$F(\Delta t)U \leq F(\Delta t)V$$

i es té que per $K \geq 0$, $K \in \mathbb{N}$

$$F(\Delta t)(V + K) \leq F(\Delta t)V \; + \; K$$

Escriurem $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$. Definim la funció ampliada $u_{\Delta t}(x,t)$ per a

$$x \in \Big[(j - \frac{1}{2})\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta x\Big], \qquad t \in \Big[(n - \frac{1}{2})\Delta t, (n + \frac{1}{2})\Delta t\Big]$$

de la forma següent

$$u_{\Delta t}(x,t) = V_j^n$$

Per la definició d'abans, queda

$$u_{\Delta t}(x,t) = \Big(F(\Delta t)u_{\Delta t}(\cdot, t + \Delta t)\Big)(x) \qquad (x,t) \in [0, T - \Delta t] \times \mathbb{R} \tag{3.15}$$

Es fàcil de veure que per Δt prou petit

$$0 \leq u_{\Delta t}(x,t) \leq exp(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Teorema 3.2. *Suposem que $u(x,t) \quad x \in \mathbb{R} t \in [0,T]$ és la solució per al problema*

$$\begin{cases} \min\Big\{ -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} + ru, u - \big(e^x - X\big)\Big\} & = \; 0, \\ \qquad\qquad\qquad u & = \; u - \big(e^x - X\big)^+. \end{cases} \tag{3.16}$$

Quan $\Delta t \to 0$, tenim que $u_{\Delta t}(x,t)$ convergeix cap a $u(x,t)$.

Recordem que pel teorema de comparació de solucions viscoses, si u i v son sub- i super-solució respectivament per problema (3.16) i

$$|u(x,t)|, |v(x,t)| \leq e^x.$$

Aleshores $u \leq v$.

Demostració. Escriurem

$$u^*(x,t) = \limsup_{\Delta t \to 0,\ (y,s) \to (x,t)} u_{\Delta t}(x,t)$$
$$u_*(x,t) = \liminf_{\Delta t \to 0,\ (y,s) \to (x,t)} u_{\Delta t}(x,t).$$

Donat que

$$0 \leq u_{\Delta t}(x,t) \leq e^{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

i per la definició de funcions anteriors

$$0 \leq u^*(x,t) \leq u_*(x,t) \leq e^{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Si demostrem que u^* és subsolució i u_* és supersolució de (3.16), aleshores, el teorema de comparació i la cota anterior, deduirem que $u^* = u_* = u(x,t)$ que garanteix la convergencia de cap a la solució viscosa u

Necessitem demostrar que u^* és una subsolució de (3.15). Suposem que per $\phi \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R})$, $u^* - \phi$ assoleix un màxim local a $(x_0, t_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Suposem que (x_0, t_0) és un màxim estricte a la bola tancada $B_r(x_0, t_0)$. Escriurem $\Phi = \phi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Aleshores $u^* - \Phi$ assoleix un màxim local a (x_0, t_0) i

$$(u^* - \Phi)(x_0, t_0) > 0 \tag{3.17}$$

Per definició de u^*, existeix una seqüència $u_{\Delta t_k}(y_k, s_k)$ tal que $\Delta t_k \to 0$, $u_{\Delta t_k}(y_k, s_k) \to u^*(x,t)$ quan $k \to \infty$. Suposem$(\hat{y}_k, \hat{s}_k)$ és un màxim global de $u_{\Delta t_k} - \Phi$ a $B_r(x_0, t_0)$. Deduim que existeix una subsuccessió $u_{\Delta t_{k_i}}(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i})$ tal que

$$\Delta t_{k_i} \to 0, \quad (\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) \to (x_0, t_0), \quad (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) \to (u^* - \Phi)(x_0, t_0), \qquad k_i \to \infty$$

De fet podem suposar que $(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) \to (\hat{y}, \hat{s})$. Per tant

$$\begin{aligned} (u^* - \Phi)(x_0, t_0) &= \lim_{k_i \to \infty} (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(y_{k_i}, s_{k_i}) \\ &\leq \lim_{k_i \to \infty} (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) \\ &\leq (u^* - \Phi)(\hat{y}, \hat{s}), \end{aligned}$$

D'on es dedueix que $(\hat{y}, \hat{s}) = (x_0, t_0)$ és un màxim estricte de $(u^* - \Phi)$. Aleshores

$$(u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i}) \leq (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}), \quad (\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) \in B_r(x_0, t_0),$$

això és

$$(u_{\Delta t_{k_i}}(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i}) \leq \Phi(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i}) + (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}), \quad (\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) \in B_r(x_0, t_0)$$

Sense pèrdua de generalitat

$$(u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}) > 0$$

Per l'equació (3.15) tenim

$$\begin{aligned}(u^* - \Phi)(x_0, t_0) &= \Big(F(\Delta t_{k_i}) u_{\Delta t_{k_i}}(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i})\Big)(\hat{y}_{k_i}) \\ &\leq \Big(F(\Delta t_{k_i})\Phi(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i}) + (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i})\Big)(\hat{y}_{k_i}) \\ &\leq \Big(F(\Delta t_{k_i})\Phi(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i})\Big)(\hat{y}_{k_i}) + (u_{\Delta t_{k_i}} - \Phi)(\hat{y}_{k_i}, \hat{s}_{k_i}).\end{aligned}$$

Aleshores

$$\Phi(\hat{s}_{k_i}, \hat{y}_{k_i}) - (F(\Delta t_{k_i})\Phi(\cdot, \hat{s}_{k_i} + \Delta t_{k_i})(\hat{y}_{k_i}) \leq 0$$

Fent tendir $k_i \to \infty$ tenim:

$$\min\Big\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial \Phi}{\partial x} + r\Phi, \Phi - \big(e^x - X\big)\Big\}_{(x_0,t_0)} \leq 0.$$

Per $\varepsilon \to 0$ queda

$$\min\Big\{ -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial \phi}{\partial x} + r\phi, \phi - \big(e^x - X\big)\Big\}_{(x_0,t_0)} \leq 0.$$

D'on deduïm que $u^*(x_0, t_0) = u_*(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$ com voliem demostrar, u és solució viscosa de (3.16).

□

3.5 Construcció del control òptim

Volem trobar el control òptim $A^*(s)$. Suposem que resolem l'equació HJB, per al cas estocàstic. En conseqüencia coneixem la funció v. Podem, aleshores, calcular el control $a \in A$ per a cada punt (x, t) per al qual

$$f(x, a) \cdot \nabla_x v(x, t) + r(x, a)$$

assoleix un màxim. En altres paraules, per a cada (x, t), escollim $\alpha(x, t) = a$ tal que

$$\max_{a \in \mathcal{A}} \big\{ f(x, a) \cdot \nabla_x v(x, t) + r(x, a) \big\}$$

Aleshores, si es possible, resolem

$$\begin{cases} dX^*(s) &= f(X(s), A(s))ds + \sigma dW(s), \\ X^*(t) &= x. \end{cases}$$

En conseqüència, $A^*(s) = \alpha(X^*(s), s)$ és el control buscat.

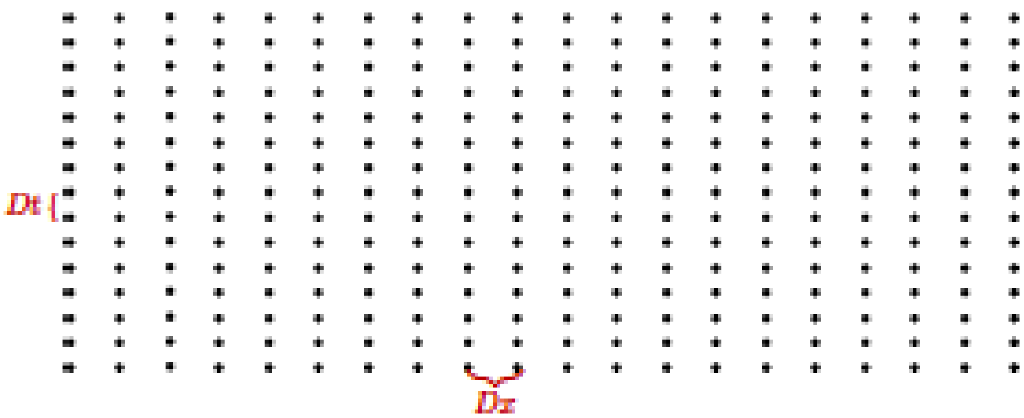
Es pot veure en més detall i amb exemples a [6]. Per ara, veurem un exemple de control òptim estocàstic on apliquem les solucions viscoses per estudiar la convergencia a temps continu, d'un model a temps discret, quan el pas incremental $\Delta t \to 0$.

4 Equació Fokker-Plank

Per donar una idea de la derivació de l'equació de Fokker-Plank, farem una demostració heurística fent un pas al límita partir del cas discret.

4.1 Cas discret.

Considerem una graella bi-dimensional que es pot pensar intuitivament que està composat per graelles de mesura vertical Dt i mesura horitzontal Dx. Podem identificar la graella, en el cas que contingui un numero contable de punts, amb $\mathbb{Z}^2$. Cada punt es pot representar, doncs, com (i, n) una parella d'enters.



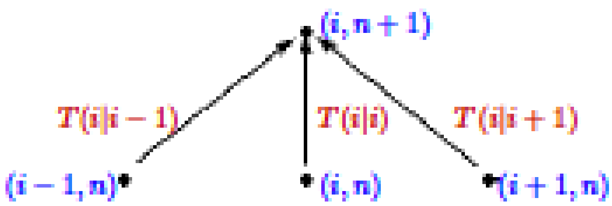
Sigui P la probabilitat definida sobre la graella, direm la probabilitat de ser a la posició i a temps n com $p(i, n)$. Denotarem la probabilitat de passar de j a i en una unitat de temps com $T(i|j)$ anomenada probabilitat de transició.

A cada pas de Dt, la particula pot romandre a la seva posició i o bé moure's cap al primer veí més proper. Per tan tenim que

$$T(j+1|j) + T(j|j) + T(j-1|j) = 1 \tag{4.1}$$

l'equació de $p(i, n+1)$ és doncs

$$p(i, n+1) = T(i|i-1)p(i-1, n) + T(i|i)p(i, n) + T(i|i+1)p(i+1, n). \tag{4.2}$$



Per tant, la variació de p per unitat de temps és

$$p(i,n+1)-p(i,n) = T(i|i-1)p(i-1,n)-[T(i+1|i)-T(i-1|i)]p(i,n)+T(i|i+1)p(i+1,n) \tag{4.3}$$

Defeinim l'operador diferencial sobre la graella com

$$D_{n,\pm 1}\hat{f}(n) = \hat{f}(n \pm 1) - \hat{f}(n) \tag{4.4}$$

La raó per introduir l'operador $D_{n,\pm 1}$ és que té una relació directe amb el quocient de Newton. Escriurem

$$\hat{f}(n) = f(nDx) \equiv f(x)$$

i per tant

$$\hat{f}(n+1) = f(nDx + Dx) \equiv f(x + Dx)$$

Dividint l'operador $D_{n,1}$ per Dx quan $Dx \to 0$ queda

$$\lim_{Dx\to 0} \frac{D_{n,1}}{Dx}\hat{f}(n) = \lim_{Dx\to 0} \frac{f(x+Dx)-f(x)}{Dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \equiv \partial_x f(x) \tag{4.5}$$

i

$$\lim_{Dx\to 0} \frac{D_{n,1}+D_{n,-1}}{(Dx)^2}\hat{f}(n) = \lim_{Dx\to 0} \frac{f(x+Dx)-2f(x)+f(x-Dx)}{(Dx)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \equiv \partial_x^2 f(x). \tag{4.6}$$

Com es pot comprovar expandint el polinomi de Taylor el numerador al voltant de x. Ls identitats (4.5) i (4.6) motiven la següent terminologia:

1. $D_{n,1}$ s'anomena derivada cap endevant respecte n.
2. $D_{n,-1}$ s'anomena derivada cap enredera respecte n.
3. $D_{n,1} + D_{n,-1}$ correspon al laplacià respecte n.

Suposem que $T(i|j)$ depen només si la partícula va cap a la dreta o cap a l'esquerra

$$T(i|j) = \begin{cases} T_+ & si \quad i-j=1 \\ \\ T_- & si \quad i-j=-1. \end{cases}$$

En aquest cas podem expressar

$$D_{n,1}p(i,n) = \frac{T_+ + T_-}{2}(D_{i,1}+D_{i,-1})p(i,n) - \frac{T_+ - T_-}{2}(D_{i,1}-D_{i,-1})p(i,n). \tag{4.7}$$

Anomenem difusió a

$$\bar{T} = \frac{T_+ + T_-}{2}$$

i tendència

$$\tilde{T} = T_+ - T_-.$$

Podem expressar

$$D_{n,1}p(i,n) = \bar{T}(D_{i,1}+D_{i,-1})p(i,n) - \tilde{T}\frac{D_{i,1}-D_{i,-1}}{2}p(i,n).$$

Suposem ara que T depen si va ala dreta o a la esquerra en funció punt

$$T(i|j) = \begin{cases} T_+ & si \quad i-j=1 \\ \\ T_- & si \quad i-j=-1. \end{cases}$$

En aquest cas

$$D_{n,1}p(i,n) = T(i|i-1)p(i-1,n) - [T(i+1|i) - T(i-1|i)]p(i,n) + T(i|i+1)p(i+1,n) \quad (4.8)$$

Sumem i restem $T_+(i-1)p(i,n)$ i $T_-(i+1)p(i,n)$ queda

$$D_{n,1}p(i,n) = T_+(i+1)D_{i,-1}p(i,n) + p(i,n)[D_{i,-1}T_+(i) + D_{i,1}T_-(i)] + T_-(i+1)D_{i,1}p(i,n) \quad (4.9)$$

i l'ecrivim com

$$\begin{aligned} D_{n,1}p(i,n) &= [T_+(i) + (D_{i,-1}T_+)(i)]D_{i,-1}p(i,n) \\ &+p(i,n)[D_{i,-1}T_+(i) + D_{i,1}T_-(i)] + [T_-(i) + (D_{i,1}T_-)(i)]D_{i,1}p(i,n) \end{aligned}$$

Escrivim

$$T_+(i) = \bar{T}(i) + \frac{\tilde{T}(i)}{2}$$

i

$$T_-(i) = \bar{T}(i) - \frac{\tilde{T}(i)}{2}.$$

I escriurem de la següent manera:

$$D_{n,1}p(i,n) = \mathscr{L}_i p(i,n)$$

On l'operador $\mathscr{L}_i$ actua linealment sobre p.

4.2 Pas al límit.

Definim les coordenades continues com

$$t = nDt$$

per al temps i

$$x = nDx$$

per l'espai.
Donarem una el pas al límit de les equacions anterior assumint la hipòtesis

$$(Dx)^2 = \sigma^2(x)(Dt).$$

Assumim que la difusió queda

$$\bar{T} = \sigma^2(x)\frac{T_+ + T_-}{2} \to \frac{\sigma^2(x)}{2} > 0$$

quan $Dx \to 0$. I que la tendència queda quan $Dx \to 0$ com

$$\frac{\tilde{T}}{Dx} = \frac{T_+ - T_-}{Dx} \to b(x)$$

on heurísticament es pot interpretar com $\sigma = [\frac{espai^2}{temps}]$ i $b = \frac{espai}{temps}$

Denotem quan $D_x, D_t \to 0$

$$p(i,n) = p(x,t)$$

Usant les equacions (4.5) i (4.6) es dedueix que quan $D_x, D_t \to 0$ i $(Dx)^2 = \sigma^2(x)(Dt)$. Tenim

$$lim_{D_x,D_t\to 0}\frac{D_{n,1}p(i,n)}{Dt} = lim_{D_x,D_t\to 0}\frac{\mathscr{L}_i p(i,n)}{Dt}$$

obtenint així l'equació de Fokker-Plank següent:

$$\partial_t p(x,t) + \partial_x b(x)p(x,t) = \frac{1}{2}\partial_x^2\sigma^2(x)p(x,t) \tag{4.10}$$

Demostrem doncs la idea heurística anterior.

Teorema 4.1. *(Equació Fokker - Plank (Kolmogorov) cap endevant). Sigui X_t un procés estòcastic de la forma*

$$dX_t = \sigma dW + a(t, X_t)dt,$$

amb una distribució inicial m_0, la evolució de la distribució de X_t ve donada per

$$m_t - \frac{\sigma^2}{2}m'' + (am)' = 0 \tag{4.11}$$

Demostració. Primerament, derivem l'equació per el cas $a(t,X) = a$ constant. Volem fer servir una aproximació discreta. Sigui un interval de temps de longitud t, el dividim en $n = t/\Delta t$ subintervals, discrets. A cada pas la variable X_t augmenta Δh amb probabilitat p i disminueix Δh amb probabilitat $(1-p) = q$. Es té

$$p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right], \qquad q = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{a}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right]$$

Volem mantenir la esperança i la variança de $X_t - m_0$ independents de la tria de Δt. Així escriurem

$$\Delta h = \sigma\Delta t.$$

Sigui $m(x,t)$ la densitat de probabilitat de X_t, donada una distribució inicial $m(x,0) = m_0(x)$. Aleshores

$$\mathbb{P}(c \le X_t \le d) = \int_c^d m(u,t)\,du.$$

A l'interval $[t-\Delta t, t]$, el procés pot assolir el punt x de dues formes. Creixent desde $x - \Delta h$ o decreixent desde $x + \Delta h$. Per tant

$$m(x,t) = p\cdot m(x-\Delta h, t-\Delta t) + q\cdot m(x+\Delta h, t-\Delta t) \tag{4.12}$$

Volem expressar l'igualtat anterior, expandint en polinomis de taylor els sumants. Notem que al voltant de $m(x,t)$

$$m(x-\Delta h, t-\Delta t) = m(x,t) - \Delta t m_t - \Delta h m_x + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 m_{xx} + \cdots$$

Analogament

$$m(x+\Delta h, t-\Delta t) = m(x,t) - \Delta t m_t + \Delta h m_x + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 m_{xx} + \cdots$$

Substituim a l'equació (4.12) i queda

$$\begin{aligned} m(x,t) &= p[m(x-\Delta h, t-\Delta t) = m(x,t) - \Delta t m_t - \Delta h m_x + \tfrac{1}{2}(\Delta h)^2 m_{xx}] \\ &+ q[m(x+\Delta h, t-\Delta t) = m(x,t) - \Delta t m_t + \Delta h m_x + \tfrac{1}{2}(\Delta h)^2 m_{xx}] \\ &= (p+q)m(x,t) - (p+q)\Delta t m_t - (p-q)\Delta h m_x + \tfrac{1}{2}(\Delta h)^2 m_{xx}. \end{aligned}$$

Donat que $p+q=1$ i per la definició donada de p i q, $p-q = \frac{a}{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ i recordem que tenim $\Delta h = \sigma \Delta t$

$$\Delta t m_t + (\frac{a}{\sigma})\sqrt{\Delta t}\,\Delta h m_x - \frac{1}{2}(\Delta h)^2 m_{xx} = 0$$

Per tant

$$\Delta t m_t + a \Delta t m_x - \frac{\sigma^2}{2}\Delta t m_{xx} = 0$$

d'on resulta

$$m_t + a m_x - \frac{\sigma^2}{2} m_{xx} = 0$$

□

La demostració es pot adaptar fàcilment per a $a(x,t)$ no necessàriament constant.

5 Mean Field Games

En aquesta secció presentarem el concepte de Mean Field Games, que va ser introduït per primera vegada per Pierre-Louis Lions al 2007. En general, els MFG, son un sistema format per una parella de equacions en derivades parcials, que descriuen un equilibri d'una situació en la qual hi interactuen un gran nombre d'agents. En la presentació del model seguirem la ruta desde el control òptim de Lachapelle [12] i Lachapelle i Wolfram a [11].

Un exemple d'un cas no estacionari de MFG ve donat per

$$v_t + \frac{\sigma^2}{2}\triangle v + H(x, \nabla v) = V[m], \quad \Omega \times (0, T), \tag{5.1}$$

$$m_t - \frac{\sigma^2}{2}\triangle m + div(H_p(x, \nabla v)m) = 0, \quad \Omega \times (0, T), \tag{5.2}$$

$$\int_\Omega m(x, t)\, dx = 1, \quad m > 0, \tag{5.3}$$

$$v(\cdot, T) = g(m(\cdot, T)),\ m(\cdot, 0) = m_0(\cdot) \quad a\ \Omega. \tag{5.4}$$

On v és una funció escalar desconeguda definida a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La funció m és una mesura de probabilitat, que descriu la posició dels agents. V és una aplicació qe depén de m i $\sigma > 0$ és una constant positiva. H és el Hamiltonià, el qual $p = \nabla v$.

La Segona equació és la Fokker-Plank, descriu la evolució de la població m cap endevant en el temps t. La Primera equació és la Hamilton-Jacobi-Bellman, que optimitza la desició racional de cada agent segons la seva posició x i segons la previsió d'evolució de m. És per això que diem que aplica cap enrere en el temps. Aquesta doble perspectiva, endevant/enrere enriqueix el model, però també ho dificulta computacionalment.

La dinàmica individual d'un agent

$$\min_\alpha \mathbb{E}\Big[\int_0^T L(t, X_t, \alpha_t) + V[m](X_t)\, dt + g[m_T](X_T)\Big] \tag{5.5}$$

$$dX_t = \alpha_t dt + \sigma dW, \quad X_0 = x_0$$

Intuitivament, donat el gran nombre d'agents, amb el mateix *poder* sobre el sistema, la funció m_T representa les accions preses per la resta d'agents, que es traduiràn el la evolució de la funció m. L és el Lagrangià o funció de cost, que és convexa en α, i V es una funció de cost global. La presència de m_t al primer terme, il·lustra un altre cop que cada jugador escull el seu control respecte tota la evolució de la densitat $(m_t)_{t\in[0,T]}$.

Suposem que coneixem $(m_t)_{t\in[0,T]}$. Definim

$$v(x, t) = \min_\alpha \mathbb{E}\Big[\int_0^T L(t, X_t, \alpha_t) + V[m](X_t)\, dt + g[m_T](X_T)\Big]$$

Aleshores la funció v es pot escriure com a solució de la HJB següent

$$v_t + \frac{\sigma^2}{2}\triangle v + H(x, \nabla v) = V[m] \quad \Omega \times (0,T) \quad v(\cdot, T) = g(m(\cdot, T)), \tag{5.6}$$

Amb el Hamiltonià $H(x,p) = L^*(x,p) = \sup_\alpha\{p\alpha - L(x,\alpha)\}$ i $\alpha(x,t,m_t) = \partial_p H(x,t,\nabla v(x,t), m_t)$. Podem consultar [7] per veure-ho amb tot detall.

Per l'equació de Fokker - Plank definim per qualssevol $t \in [0,T]$ una distribució donada per

$$\int \psi \, dm_t = \int \mathbb{E}[\psi(X_t)] \, dm_0(x), \qquad \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty$$

Aleshores per la fòrmula de Itô tenim que el canvi de ψ es donat per

$$d\psi(X_t) = \Big(\alpha(X_t, t, m_t)\nabla\psi + \frac{\sigma^2}{2}\triangle\psi(X_t)\Big)dt + \sigma\nabla\psi(X_t)dW.$$

Integrant per parts queda

$$0 = \int_0^T \psi[\partial_t m - \frac{\sigma^2}{2}\triangle m + div(\alpha m)],$$

que implica

$$0 = \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2}\triangle m + \div(\alpha m).$$

Fent servir que $\alpha(x,t,m_t) = \partial_p H(x,t,\nabla v(x,t), m_t)$ tenim

$$m_t - \frac{\sigma^2}{2}\triangle m + div(H_p(x, \nabla v)m) = 0$$

per a $m|_{t=0} = m_0$

5.1 Quan comença una reunió. Un model de joguina

5.1.1 Plantejament

Volem estudiar el problema de l'horari real en el qual comença una reunió. És habitual, encara que aquesta es programi per començar a un cert moment t, comenci uns minuts més tard, especialment en cultures llatines. Al temps d'inici real li direm T i depèn de la dinàmica d'arribada dels agents. Si afegim alguna norma per determinar en quin moment començarà la reunió, això produira una interacció estratègica entre els participants.

Cada agent i escull un temps τ^i en el qual voldria arribar, d'acord amb un cert cost que vol minimitzar. És a dir, cada participant controla el seu temps d'arribada, i tractarà de optimitzar la desició.

Encara que cada participant escull el seu moment d'arribada dessitjat, τ^i, en realitat arribarà a l'instant $\tilde{\tau}^i = \tau^i + \sigma^i\xi^i$ on ξ es soroll normal ab variança 1. Suposarem independents els sorolls afegits. La variança de cada agent ve donada per $\sigma^i > 0$ per tot i. Més precisament, τ^i és la variable de control de cada agent i $\sigma^i\xi^i$ la incertesa a la qual l'agent esta sotmés. La incertesa i la intensitat d'aquesta, difereixen entre els agents, i són la formalització de factors externs com el trànsit, climatologia, o diferents distàncies a recòrrer per poder arribar. Denotem per m_0 la distribució de σ^i en la població.

Recordem els elements del model:

- t és el temps (horari) al que està programada la reunió.
- τ^i és el temps en el qual voldria arribar l'agent i.
- $\tilde{\tau}^i = \tau^i + \sigma^i\xi^i$ serà el temps en el qual realment arriba, on ξ és el soroll normal amb variança 1 i σ^i es l'incertesa de cada agent. suposem$\sigma^i > c > 0$ per a tot i.
- m_0 denota la distribució de σ^i a la població.
- T és el temps real en el qual començarà la reunió.

Per decidir a quina hora es vol arribar, cada agent optimitzarà el seu cost total. El cas més simple, comsiderem la funció de cost

$$c(t, T, \tilde{\tau}) = c_1(t, T, \tilde{\tau}) + c_2(t, T, \tilde{\tau}) + c_3(t, T, \tilde{\tau})$$

on, per certes constants positives α, β, γ, es té

$$c_1(t, T, \tilde{\tau}) = \alpha(\tilde{\tau} - t)^+$$

és el cost (efecte reputació) d'arribar tard a la reunió, en relació del temps t acordat

$$c_2(t, T, \tilde{\tau}) = \beta(\tilde{\tau} - T)^+$$

representa el cost (inconvenient personal) d'arribar tard a la reunió al temps d'inici real T.

$$c_3(t, T, \tilde{\tau}) = \gamma(T - \tilde{\tau})^+$$

representa el cos (temps d'espera) del temps que es perd esperant fins a T.

Observem que $c(t, T, \tilde{\tau})$ és convexa en $\tilde{\tau}$

5.1.2 Ressolució

Cada agent vol minimitzar el cost total esperat. Segons la teoria de jocs, i dels Equilibris de Nash amb expectatives racionals, cada agent optimitza suposant T conegut. T és *a priori* una variable aleatoria, pero al considerar un número infinit de jugadors, per la *Llei dels grans nombres* podem suposar que T és determinista. Així la considerem d'ara en endevant.

Per a cada agent i, el problema serà trobar

$$\tau^i = argmin\{\mathbb{E}[c(t, T, \tilde{\tau})]\}$$

Notem que aquí T és el camp mitjà, la estimació exhaustiva per a cada agent, del comportament dels altres.

El nostre objectiu es mostrar que existeix un punt fix T, això és, demostrar que les optimitzacions individuals, suposant T conegut, generen completament la formació d'aquest temps T, al que anomenarem equilibri.

Per demostrar que aquest equilibri existeix, primerament estudiarem les accions individuals.

Proposició 5.1. *El temps òptim $\tilde{\tau}^i$ d'un agent racional amb incertesa $\sigma^i > c > 0$ està difinit implícitament per*

$$\alpha\Phi\big(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big) + (\beta+\gamma)\Phi\big(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big) = \gamma$$

on Φ és la funció de distribució acumulada d'una variable aleatòria normal.

Demostració. La expressió que es vol minimitzar és

$$\mathbb{E}\big[\alpha(\tilde{\tau}-t)^+ + \beta(\tilde{\tau}-T)^+ + \gamma(T-\tilde{\tau})^+\big],$$

que podem escriure com

$$\mathbb{E}\big[\alpha(\tilde{\tau}-t)^+ + (\beta+\gamma)(\tilde{\tau}-T)^+ - \gamma(\tilde{\tau}-T))^+\big],$$

per la linealitat de l'Esperança, queda

$$\alpha\mathbb{E}[(\tau^i - t + \sigma^i\xi^i)^+] + (\beta+\gamma)\mathbb{E}[(\tau^i - T + \sigma^i\xi^i)^+] - \gamma(\tau^i - T).$$

Derivant respecte τ^i queda

$$\frac{d}{d\tau^i}\mathbb{E}[(\tau^i - t + \sigma^i\xi^i)^+] = \frac{d}{d\tau^i}\int_{\tau^i - t+\sigma^i\xi^i>0}(\tau^i - t + \sigma^i\xi^i)dZ =$$

$$= \int_{\tau^i - t+\sigma^i\xi^i>0} dZ = \mathbb{P}(\tau^i - t + \sigma^i\xi^i > 0),$$

on dZ indica integrar respecta la distribució normal. Per tant tenim

$$\alpha\mathbb{P}(\tau^i - t + \sigma^i\xi^i > 0) + (\beta+\gamma)\mathbb{P}(\tau^i - T + \sigma^i\xi^i > 0) = \gamma.$$

Si Φ es la funció de distribució de la Normal, és a dir, $W \sim \mathcal{N}(0,1)$, aleshores

$$\mathbb{P}(W \leq \omega) = \Phi(\omega),$$

a més, per la simetria de la Normal respecte del 0, val que

$$\Phi(\omega) = \mathbb{P}(W \leq \omega) = \mathbb{P}(W \geq -\omega).$$

Aleshores, amb la condició anterior queda

$$\alpha\Phi\big(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big) + (\beta+\gamma)\Phi\big(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big) = \gamma. \tag{5.7}$$

Per ser Φ una funció estrictament monòtona i α, β, γ constants positives, es dedueix la existència i unicitat de τ^i.

□

De la caracterització de τ^i com a funció de (t, T, σ), podem deduir la dinàmica d'arribada dels agents. Per això, considerem la distribució m_0 de σ^i. Denotem la funció F a la funció de distribució acumulada dels temps reals d'arribada dels agents. Com suposem un continu d'agents, per la *Llei dels grans nombres*, F pot ser considerada determinista.

Necessitem establir normes per a que comenci la reunió, és a dir, que determini el temps T. Es natural pensar qie aquesta norma dependrà de $F(\cdot)$. Suposem, per exemple, que es fixa una norma de *quorum*: la reunió comença quan una proporció θ dels participants han arribat.

Volem demostrar l'existència i unicitat d'un punt fix. Comencem per un valor T, obtenim estratègies òptimes dels agents $(\tau^i(\cdot, T))_i$. Si bé aquests són els òptims per a cada agent, sabe que el temps real d'arribada de cadascú està afectat per possibles perturbacions externes. Necessitem obtenir, aleshores, $(\hat{\tau}^i(\cdot, T))_i$. Aleshores per la Llei dels gran Nombres i la hipòtesi d'independència del moviment Brownià associat a cada agent, aquests temps d'arribada segueixen la distribució F. Recordem doncs, que F és determinista i T es dedueix a partir de F amb la regla d'inici, $(T^*(F))$, en aquest cas el *quorum*. Es pot expressar com el següent esquema

$$T^{**} : T \mapsto (\tau^i(\cdot, T))_i \mapsto (\hat{\tau}^i(\cdot, T))_i \mapsto F = F(\cdot, T) \mapsto T^*(F)$$

Observació La regla del *quorum* $(T^*(F))$ compleix

- La reunió comença abans de t,

$$\forall F(\cdot), T^*(F) \geq t$$

- (Monotonia) Sigui F , G dues funcions de distribució acumulada,

$$F \leq G \Rightarrow T^*(F) \geq T^*(G)$$

- (Subaditivitat)

$$\forall s > 0,\ T^*(F(\cdot - s)) - T^*(F(\cdot)) \leq s$$

Aquesta condició es la menys natural de totes tres. Considerem $G(\tau) = F(\tau - s)\ \forall \tau$, és a dir, la situació on tots els agents arriben s instants més tard que en el cas F, pero mateixa distribució. Es raonable pensar que hi hagi quorum com a molt tard s instants despres, que el quorum per a F. Això és

$$T^*(F(\tau - s)) \leq s + T^*(F(\tau))$$

Aquesta idea és similar a la del Principi de la Programació Dinàmica, deixem passar s instants i comencem a contar amb F. Amb això obtenim el següent resultat

Proposició 5.2. *Si* α, β, $\gamma > 0$ *i* $0 \notin Sop(m_0)$, *aleshores* T^{**} *és una contraxxió com a funció de* $[t, +\infty)$, *i existeix una única solució* T *per al nostre problema*

Demostració. Primerament derivem respecte T la condició (5.7) que defineix τ^i

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial}{\partial T}\Big(\alpha\Phi\big(\tfrac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big) + (\beta+\gamma)\Phi\big(\tfrac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)\Big) \\
&= \alpha\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i})}{\partial T} + (\beta+\gamma)\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i})}{\partial T} \\
&= \alpha\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial}{\partial \tau^i}\big(\tfrac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial \tau^i}{\partial T} \\
&+ (\beta+\gamma)[\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial}{\partial \tau^i}\big(\tfrac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial \tau^i}{\partial T}\big(\tfrac{-1}{\sigma^i}\big)] \\
&= \alpha\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big)\tfrac{1}{\sigma^i}\tfrac{\partial \tau^i}{\partial T} - \tfrac{(\beta+\gamma)}{\sigma^i}\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big) \\
&+ \tfrac{(\beta+\gamma)}{\sigma^i}[\Phi'\big(\tfrac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)\tfrac{\partial \tau^i}{\partial T}]
\end{aligned}$$

Aïllant ens queda

$$\frac{d\tau^i}{dT}\Big[\Big(\alpha\Phi'(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i}) + (\beta+\gamma)\Phi'(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i})\Big)\Big] = (\beta+\gamma)\Phi'(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i})$$

Per tant queda

$$\frac{d\tau^i}{dT} \leq \frac{(\beta+\gamma)\Phi'\big(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)}{\alpha\Phi'\big(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i}\big) + (\beta+\gamma)\Phi'\big(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i}\big)} \leq k < 1$$

Com el 0 no hi és al suport de m_0, hem de tenir que

$$\frac{d}{dT}\tau(t, \sigma, T) \leq k < 1.$$

Aleshores, per tot $T, s, h > 0$,

$$F(s, T+h) = \mathbb{P}(\tau^i(\sigma^i, T+h) + \sigma^i\xi^i \leq s)$$

$$\geq \mathbb{P}(\tau^i(\sigma^i, T) + kh + \sigma^i\xi^i \leq s) = F(s - kh, T).$$

En conseqüència

$$T^*(F(\cdot, t+h)) \leq T^*(F(\cdot - kh, T)) \leq T^*(F(\cdot, T)) + kh,$$

per tant podem concloure que

$$T^{**}(T+h) - T^{**}(T) \leq kh$$

Per tant T^{**} és una contracció i existeix un punt fixe T. □

Observació Quan plantegem el model, demanem que $\sigma^i > 0$. Això ja implica que $0 \notin Sop(m_0)$.

És interessant observar que el quorum no és un cas especial, en el sentit que la demostració continua siguent vàlida per a qualssevol regla inicial $\tilde{T} : F \mapsto T$ que verifiqui les propietat de (5.7)

És natural pensar que els agents no només tindràn en compte el temps real d'inici, sinó tambñe la dinàmica d'arribada de la resta de participants. És a dir, el cost no només dependrà de T sinò també de F. En aquest cas, més general, F es construeix sobre aquestes desicions. Desde aquest punt de vista, el punt fix dependrà de F.

5.2 Variants

Hi ha moltes possibles maneres d'enriquir el problema inicial. Per exemple, una variant implica considerar una pertorbació compartida afegida a les pertorbacions individuals. Aquesta variant és interessant donat que la dinàmica de la població és estocàstica. Aquest exemple, però, ens portaria massa temps i dificultats afegides.

Anem a considerat doncs la variant "geogràfica". Els agents estàn inicialment distribuits a diferents llocs i han de desplaçar-se cap al lloc on es durà a terme la reunió.

L'interés d'aquesta variant es que mostra la parella d'equacions en derivades parcials (5.2) i (5.1) "*forward/backward*" que resideixen al nucli dels MFG.

5.2.1 Marc del problema

Suposem que els agents estan distribuïts en la meitat negativa de la recta real, d'acord a una distribució inicial m_0 amb suport compacte i $m_0(0) = 0$.Han d'arribar al punt de trobada situat al 0. Suposem que per anar cap al 0, cada agent i es mou d'acord

$$dX_t^i = a_t^i dt + \sigma dW_t^i$$

on la tendència a és el control amb un cost $\frac{1}{2}a^2$ i σ és igual per a tothom. Aquesta hipòtesi de distribució pot semblar una representació artificial del transport amb incerteces. A la pràctica té, però, aplicacions cariades.

Cada agent ha d'afrontar doncs, el problema d'optimització següent

$$\min_a \mathbb{E}\big[c(t, T, \tilde{\tau}^i) + \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{\tau}^i} a^2(t)\, dt\big]$$

amb $X_0^i = x_0, \quad dX_t^i = a_t^i dt + \sigma dW$ i el temps d'arribar al 0 ve donat per $\tilde{\tau}^i = \min\{s / X_s^i = 0\}$

Si busquem un equilibri de Nash-MFG, podem pensar que donat un temps T i que cada agent s'enfronta a un problema de control estocàstic, podem plantejar la següent equació HJB.

$$u_t + \min_a \Big(a \cdot \nabla_x u + \frac{1}{2}a^2\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\triangle u = 0 \tag{5.8}$$

que podem escriure com

$$u_t - \frac{1}{2}(\nabla_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2}\triangle u = 0 \tag{5.9}$$

La condició d'extrem es fàcil,

$$\forall \tau, \quad u(\tau, 0) = c(t, T, \tau),$$

on T és determinista pel mateix motiu que a l'anterior context. Aquesta condició corrspon al cost d'arrivada total on c té la mateixa forma que a l'apartat anterior, pero que en aquest cas serà de classe $\mathcal{C}^2$

L'equació HJB dona una funció valor u i per tant indica el comportament òptim dels agents per a un T fixat. Aquesta equació és la mateixa per a tots els agents, donat que tenen el mateix funcional de cost associat i es distingeixen només pel punt on estàn situats al moment inicial. D'altra banda, la solució aquí és Markoviana, com a la majoria de problemes de control estocàstic. La estratégia en aquest cas correspon a trobar la tendència òptima $a = -\nabla_x u$, que depèn només de la posició x.

Els agents es comporten identicament al mateix punt x a temps s, hipòtesis prou natural donat que tenen la mateixa informació, el mateix cost de desplaçament i la mateixa condició terminal. Aquesta propiestat simplifica l'expressió del problema.

La llei dels grans nombres, ens proporciona ara una distribució m d'agents a través de la equació de Fokker - Plank (Kolmogrov). Aquesta distribució és la corresponent a jugadors que encara no han arribat al 0. Podem dir que m perd massa pel 0, a mesura que els agents hi arriben gradualment. La dinàmica és

$$m_t + \partial_x((-\nabla u)m) = \frac{\sigma^2}{2}\triangle m,$$

on $m(0, \cdot) = m_0(\cdot)$ és fixat i volem trobar una solució amb la condició $m(\cdot, 0) = 0$

D'altra banda, com hem escollit modelar amb la dinàmica que prové de la difussió *browniana*, el model ha de ésser considerat a un domini compacte $[0, T_{max}] \times [-X_{max}, 0] = \Omega$ i les condicions extremals són

$$u(T_{max}, \cdot) = c(t, T, T_{max}), \quad u(\cdot, -X_{max}) = c(t, T, T_{max}), \quad m(\cdot, -X_{max}) = 0$$

En aquest context, $s \mapsto \nabla_x m(s, 0)$ indica la "velocitat" en la que els agents arriben al 0. Donat que la distribució acumulativa de F de temps t'arribada és definida com

$$F(s) = -\int_0^s \nabla_x m(v, 0)\, dv$$

Ara, T és fix per la regla del quorum (per exemple $\theta = 90\%$) i imposem que ha d'ocòrrer a l'interval $[t, T_{max}]$.En altres paraules

$$T = \begin{cases} t, & si \quad F^{-1}(\theta) \leq t, \\ T_{max}, & si \quad F(T_{max}) \leq \theta \\ F^{-1}(\theta), & \quad altrament. \end{cases}$$

5.2.2 Existència d'un equilibri pel començament de la reunió

Com en el primer problema, volem demostrar que hi ha un temps T coherent amb les expectatives racionals dels agents. Farem servir un teorema de punt fix com abans. De fet, anirem d'un T donat i deduirem u. L'equació de Fokker-Plank ens dona m i per tant com escapen els agents pel punt 0. Com que el temps T és donat per la proporció θ de tots els agents. És una perspectiva que convé tractar buscant un punt fix.

Abans d'aprofundir, ens disposem a introduir alguns hipòtesis.

- Suposem que $T \mapsto c(t,T,\tau)$ és una funció contínua.
- Suposem que $\tau \mapsto c(t,T,\tau)$ és una funció $\mathcal{C}^2$.
- Supose que $m_0(0) = m_0(-X_{max}) = 0$. També, suposem que $|m_0'(0)| > 0, \quad |m_0'(-X_{max})| > 0$.

Ara, considerem el següent diagrama

$$T \mapsto c(t,T,\tau) \in \mathcal{C}^2 \mapsto u \in \mathcal{C}^2 \mapsto \nabla_x u \in \mathcal{C}^1 \mapsto m \in \mathcal{C}^1 \mapsto \nabla_x m(\cdot,0) \in \mathcal{C}^0 \mapsto F \mapsto T$$

Com el diagrama va desde $[t, T_{max}]$ en ell mateix, només necessitem veure que el diagrama és continu.

La primera part ($T \mapsto c(t,T,\tau) \in \mathcal{C}^2$) és continua per les hipótesis. Per la segona part ($c(t,T,\tau) \in \mathcal{C}^2 \mapsto u \in \mathcal{C}^2$) necessitem el següent Lema.

Lema 5.2.1. *Considerem la següent EDP*

$$u_t - \frac{1}{2}(\nabla_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2}\triangle u = 0$$

amb les condicions extremes

$$u(\cdot,0) = c(t,T,\cdot), \quad u(T_{max},\cdot) = c(t,T_{max},T_{max}), \quad u(\cdot,-X_{max}) = c(t,T_{max},T_{max})$$

aleshores la solució $u \in \mathcal{C}^2((0,T_{max}) \times (-X_{max},0)$ i $\exists K,\ \forall T \in [t,T_{max}],\ \nabla_x u$ és K-Lipschitz.

Aleshores la funció $c(t,T,\tau) \in \mathcal{C}^2 \mapsto u \in \mathcal{C}^2$ és contínua.

Ara tenim u i el control $-\nabla_x u$ i podem abordar l'equació de Fokker - Plank.

Enunciarem un lema que és una aplicació del principi de Hopf.

Lema 5.2.2. *Considerem la següent EDP*

$$m_t + \nabla_x(am) = \frac{\sigma^2}{2}\triangle m$$

amb $a \in \mathcal{C}^1$ *(i per tant Lipschitz) i les condicions d'extrems* $m(0,\cdot) = m_0(\cdot), \quad m(\cdot,0) = 0, \quad m(\cdot,-X_{max}) = 0$ *on* m_0 *compleix les hipòtesis anterior. Aleshores, la solució* m *és de classe* $\mathcal{C}^1$ *i*

$$\exists\epsilon > 0, \quad \inf|\nabla_x m(\cdot,0))| \geq 0.$$

Aleshores ϵ *depén només de la constant de Lipschitz de la funció* a*. També tenim que* $a \mapsto m \in \mathcal{C}^1$ *és continua.*

A partir d'aquests dos lemes, podem deduir un tercer adaptat al nostre problema. De fet, donat que $u \in \mathcal{C}^2$, $a = \nabla_x u$ és Lipschitz i aleshores podem donar una cota inferior a la sortida d'agents al punt de trobada.

Lema 5.2.3.

$$\exists\epsilon > 0, \ t.q \ \forall T \in [t, T_{max}], \ \ \inf|\nabla_x m(\cdot,0))| \geq \epsilon$$

Ara considerem l'aplicació $\Psi : \nabla_x m(\cdot,0) \in \mathcal{C}^0 \mapsto T$, definides prèviament, fent servir la regla del quorum. Volem provar que Ψ és continua donat $\nabla_x m(\cdot,0) > \epsilon > 0$.

Lema 5.2.4. Ψ *és una funció Lipschitz sobre* $\mathcal{C}^0([0,T_{max}],\mathbb{R}_+ - \{0\})$

Demostració. Considerem dues funcions ψ_1, ψ_2, dos possibles "velocitats" d'arribada i ϵ una cota inferior de totes dues. Ara definim $T_1 := \Psi(\psi_1)$, $T_2 := \Psi(\psi_2)$. Si $T_{1,2}$ son totes dues a (t, T_{max}), aleshores, assumint $T_1 \leq T_2$ podem escriure

$$0 = \int_0^{T_1}\psi_1 - \int_0^{T_2}\psi_2 = \int_0^{T_1}(\psi_1 - \psi_2) - \int_{T_1}^{T_2}\psi_2$$

$$\Rightarrow \epsilon(T_2 - T_1) \leq \int_{T_1}^{T_2}\psi_2 = \int_0^{T_1}(\psi_1 - \psi_2) \leq T_{max}|\psi_1 - \psi_2|_\infty$$

En aquest cas la funció és Lipschitz. En tota la resta de casos, si assumim $T_1 \leq T_2$ podem escriure

$$\int_0^{T_1}\psi_1 - \int_0^{T_2}\psi_2 \geq 0$$

i obtenim el resultat seguin el mateix raonament.
Per tant la funció és lipschitz i aleshores també contínua. □

Per ara hem demostrar que el diagrama és continu, fent servir el punt fix de Brower i donat que la definició del domini era compacte, segueix l'existència d'un equilibri a T.

Proposició 5.3. *(Existència). El diagrama que defineix a l'actual* T *com una funció de la* T *anticipada pels agents, és continu i té almenys un punt fix. Aleshores existeix almenys un equilibri* T*.*

6 Conclusió

Les equacions que hem fet servir fins ara, són relativament fàcils de deduïr i a més han estat ben estudiades durant temps, i ensenyades a cursos de grau i màster. La dificultat la presenten sovint alhora d'intentar fer models més propers a la realitat. Esmentarem certes peculiaritats de les equacions.

Sovint podem trobar equacions HJB, on les solucions han de estar calculades a partir de mètodes computacionals. A priori, el problema d'EDP pot ser arbitràriament complicat, però gràcies a les solucions viscoses, podem esperar trobar un resultat únic a la equació. Per veure com es pot treballar amb solucions viscoses amb molts casos diferents i exemples, consultem com a eina comú [4].Molt sovint, s'aborden aquest tipus de problemes desde el mètode de les diferències finites, encara que també és comú trobar ressolucions amb el mètode de Newton. Per al cas estocàstic més general que el soroll brownià, caldria molt més coneixement del que he pogut assolir, perè és tot un repte que avui dia està encara sobre la taula. en [14] René Carmona presenta una manera d'abordar el problema amb les denominades *Backward Stochastic Differential Equations*. Es caracteritzen per fer servir la idea intuitiva de la Programació dinàmica, que recull informació enrere en el temps.

L'equació de Fokker - Plank és ben coneguda pels físics, en especial per les branques de termodinàmica o termodinàmica estadística més particularment. Per aquesta equació de difussió, és realista pensar en l'adaptació del mètode dels elemts finits, que té en compte e domini, per tal d'aproximar la solució a tot aquest. En particular, en el cas de soroll normal, el mètode dels elements finits, permet ajustar la solució fàcilment.

La dificultat i la magnitud del treball creixia moltíssim si volem fer alguna simulació, donat que el mateix MFG pot entrar a parlar d'àreas de l'Anàlisis Funcional, que queden molt allunyades de l aintenció del treball i les possibilitats de l'autor, per ara. D'altra banda, si volem resoldre el problema amb algun mètode com el dels elements finits o diferències finites, no podriem fugir de l'estudi directe dels espais se Sobolev.

Per altra banda, hagués motivat potser, una altra secció parlant i comparant el principi de la programació dinàmica amb el Principi del Màxim, veient les principals diferències i les similituds. En el cas de un sol agent (control òptim) les solucions que proporcionen són les mateixes. Per tal d'il·lustrar les principals diferéncies podriem parlar en profunditat dels jocs diferencials amb 2 jugadors. Per poder conèixer el problema en profunditat veieu [13].

Per últim destacar el caràcter motivador dels MFG, que adapten eines prou sofisticades de la física per a donar un marc de pensament a les ciències del comportament i a les finances. Proporcionen al camp de la teoria de jocs, una teoria que supera les limitacions computacionals del cas amb un nombre finit de jugadors i proporciona models que sense trobar solucions analítiques, proporcioni un repte realista alhora de fer els càlculs computacionals. Aquesta teoria propociona no només un camp per a curiosos matemàtics o físics, sinò també una bona perspectiva del comportament humà i una eina que es tornarà essencial a l' economia i les finances.

References

[1] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Math Society, 1998.

[2] A. Bressan, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems.* Department of Mathematics, Penn State University.

[3] K. H. Karlsen. Notes on weak convergence. Online: http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4380/v06/Weakconvergence.pdf.

[4] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishi, Pierre-Louis Lions. *Users Guide to Viscosity Solutions of second order Partial Differential equations*BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 27, Number 1, July 1992

[5] Lawrence C. Evans, Department of Mathematics; UC Berkeley, *Lecture Notes: An Introduction to Stochastic Differential Equations.*

[6] B. K. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, 4th ed., Springer, 1995.*

[7] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer, 2nd edition, 2006.*

[8] P. L. Lions, J.M. Larsy, O. Guéant : *Mean Field Games and Applications*

[9] J.-M. Lasry and J.-Louis Lions. *Mean Field games. Japanese Journal of Mathematics, 2007.*

[10] Pierre Cardaliaguet, *Notes on Mean Field Games.* 2015

[11] A. Lachapelle and M. Wolfram. *On a mean eld game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds.*

[12] A. Lachapelle. *Quelques problemes de transport et de contrôle en économie: aspects theoriques et numeriques.*

[13] Kandethody M. Ramachandran, Chris P. Tsokos *Stochastic Diffeential Games, Theory and Applications* volume 2. University of South Florida

[14] René Carmona *Lectures on BSDEs, Stochastic Control and Stochastic Differential Games with Financial Applications*