



Trabajo de final de grado

GRADO EN MATEMÁTICAS

**Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona**

**Diseños esféricos y
sampling en la esfera**

David Monter Sánchez

Director: Dr. Jordi Marzo
Realizado en: Departament de
Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Barcelona, 29 de junio de 2017

Esta página queda intencionalmente en blanco.

Abstract

This project is a study of Chebyshev-type quadratures and the theory behind these mathematical objects, as well as an analysis of some of the most recent results in relation to optimal quadratures. The main purpose is to understand the solution of the Korevaar-Meyers conjecture by Bodarenko, Radchenko and Viazovska. Furthermore, some sphere sampling tools necessary for the proof will also be discussed.

Resumen

El objetivo de este proyecto es estudiar la base teórica que hay detrás de las cuadraturas de Chebyshev, así como analizar algunos resultados recientes sobre la existencia de cuadraturas óptimas. Principalmente, se centrará el foco en entender la demostración presentada por Bondarenko, Radchenko y Viazovska de la conjetura de Korevaar-Meyers. Adicionalmente, se estudian algunas herramientas de la teoría de sampling en la esfera, necesarias para comprender esta demostración.

Agradecimientos

Al Dr. Jordi Marzo por su ayuda en este proyecto.

A Mariola por todo el apoyo brindado mientras cursé el grado.

A Madre, ya que sin ella no podría haber llegado hasta aquí.

Índice general

Introducción	1
1. El concepto de cuadratura	3
1.1. Un poco de historia	3
1.2. En la actualidad	5
1.3. Aproximando la integral definida	6
2. Cuadraturas importantes	8
2.1. Cuadratura de Gauss	8
2.2. Cuadratura de Chebyshev	10
2.2.1. Cuadratura en $[-1, 1]$	11
2.2.2. Cuadratura en S^1	11
2.3. Existencia	12
3. Sampling en la esfera	14
3.1. Introducción	14
3.2. Existencia de puntos	16
3.3. Herramientas de sampling en la esfera S^d	18
4. Diseños esféricos	21
4.1. Preliminares	21
4.2. Conjetura de Korevaar-Meyers	23
Conclusiones	32
Bibliografía	33

Introducción

Desde tiempos antiguos, los geómetras han tratado de calcular áreas de figuras y funciones. El método más popular en la Antigua Grecia consistía en construir un cuadrado con el mismo área que la figura en cuestión. Este proceso tomó el nombre de cuadratura [4].

Actualmente, consideramos que una cuadratura es una aproximación de la integral definida de una función. En general, se busca una expresión de este tipo: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)w(x_i)$, donde w es una función continua que atribuye pesos distintos a cada punto. Encontrar cuadraturas es útil cuando nos enfrentamos por ejemplo, a problemas numéricos, ya que en ocasiones, las funciones a integrar son complejas o bien carecen de primitiva.

En este trabajo, se pone foco en las cuadraturas de Chebyshev. Un tipo de cuadratura donde, a cada punto, se le atribuye exactamente el mismo peso. Encontraremos dos ejemplos: en el intervalo $[-1,1]$ y en el círculo unidad S^1 , donde se presentarán las primeras complicaciones.

Generalmente, no es trivial encontrar fórmulas de cuadratura ni saber cuantos puntos se necesitan. Sin embargo, Bernstein [15] demuestra que restringiéndonos a $[-1,1]$, el número de puntos es del orden de t^2 , siendo t el mayor grado del espacio de polinomios. Más adelante, Korevaar y Meyers [3] logran encontrar cotas inferiores y superiores para conjuntos que se pueden parametrizar con combinaciones de los dos conjuntos mencionados anteriormente.

Restringiendo las cuadraturas a la esfera, nacen los llamados diseños esféricos, término acuñado por Delsarte, Goethals y Seidel en el año 1997 [10]. En general, encontrar ejemplos de diseños esféricos no es sencillo; y cuando los hay, suelen ser de dimensiones y de número de puntos no demasiado grandes. Por ejemplo, Mimura [8] construye diferentes diseños para polinomios de grado dos.

En un principio, no estaba claro cuantos puntos se necesitarían para construir un diseño esférico en una esfera de dimensión arbitraria. En 1993, Korevaar y Meyers [14] demostraron que un diseño esférico en S^d debe tener un número mínimo de puntos de orden mayor a t^d y menor a t^{d^2} y conjeturaron que la cota inferior era el orden correcto.

Más adelante, en 2013, Bondarenko, Radchenko y Viazovska demuestran en [1] un resultado todavía más potente: se garantiza la existencia de diseños esféricos para esferas de dimensión arbitraria con cardinal de orden igual a la dimensión del espacio de polinomios de grado menor que t , esto es, t^d resolviendo la conjetura de Korevaar y Meyers.

El objetivo principal que persigue este proyecto, es estudiar y analizar la demostración dada por estos tres autores mencionados anteriormente. Adicionalmente, se pretende comprender las problemáticas que derivan de encontrar cuadraturas óptimas, así como entender todas las herramientas utilizadas durante el proceso.

Para perseguir esta meta, el trabajo se distribuye en cuatro bloques. En un primer lugar será posible encontrar una introducción histórica al concepto de cuadratura. Para continuar, se hace foco en dos tipos de cuadraturas importantes: de Gauss y de Chebyshev, necesarias para entender el concepto de diseño esférico. En el tercer capítulo, se trata el sampling en la esfera, donde se habla de maneras óptimas de tomar puntos para construir *buenas* cuadraturas. Para finalizar, se tiene el bloque más importante, éste se centrará de lleno en los diseños esféricos y en el análisis de la conjetura de Korevaar-Meyers.

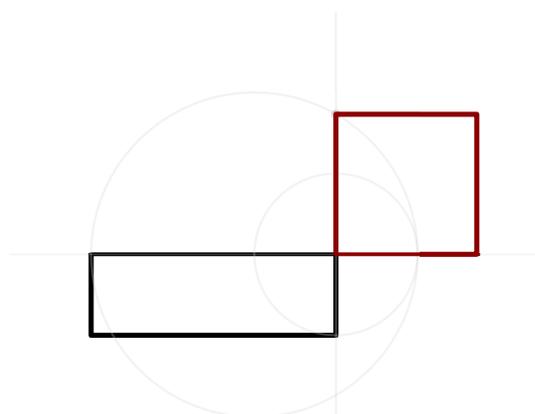
Capítulo 1

El concepto de cuadratura

El objetivo principal de este capítulo es introducir el concepto de cuadratura. Primeramente, se introducirá la noción intuitiva de cuadratura a la vez que se presentarán algunos ejemplos clásicos. Además, se verá como ha evolucionado hasta la actualidad, sentando las bases del cálculo numérico y su vínculo con el concepto de integral definida. Al final del capítulo se da una definición formal de cuadratura, que nos ayudará a entender otros conceptos presentes en este proyecto.

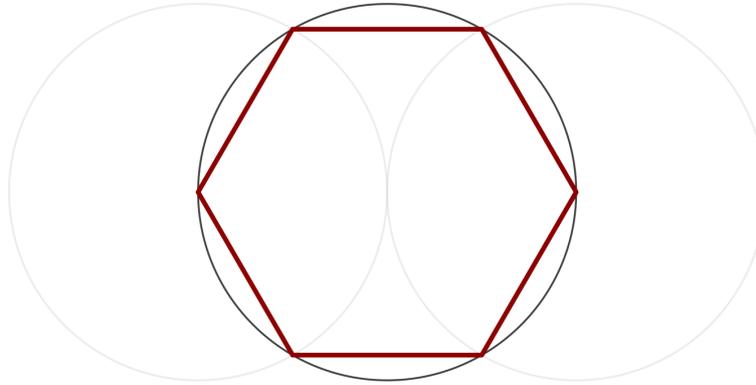
1.1. Un poco de historia

Hay que remontarse a la antigua Grecia para encontrar el primer uso de la palabra *cuadratura*; presente desde que los primeros geómetras existen. En tiempos antiguos, se utilizaba esta palabra para denotar el área de las figuras geométricas planas. Para determinar el área, los griegos intentaban construir un cuadrado con el mismo área; proceso que tomó el nombre de *cuadratura*. Veamos gráficamente uno de los casos más sencillos, la cuadratura del rectángulo:



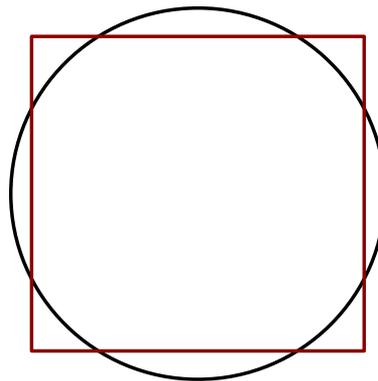
Para poder construir estos cuadrados, era imprescindible que se pudiesen crear sólo con regla y compás. Método por el cual se deben construir las figuras geométricas únicamente utilizando una regla y un compás idealizados. Esto es, una regla que no puede medir distancias y un compás que no

puede trasladar medidas de un punto a otro. Veamos otro ejemplo, ahora la construcción de un hexágono partiendo de un sólo círculo. Únicamente se utilizan rectas y dos círculos:



Hay multitud de construcciones que se pueden crear con este método. Sin embargo, hay ocasiones en las que no es posible cuadrar figuras geométricas. El caso más conocido es la llamada *cuadratura del círculo*. Un problema que estuvo vivo durante mucho tiempo entre la comunidad matemática.

La cuadratura del círculo. Tomando el círculo unidad, de área π^2 , se necesita un cuadrado de lado $\sqrt{\pi}$ para tener dos figuras con la misma área. Luego, se debe poder construir π con regla y compás; pero esto es imposible, pues en el siglo XIX se demostró que π era un número trascendente¹, luego no se puede construir con regla y compás. Por lo tanto se llegó a la conclusión de que el círculo no se podía cuadrar.



¹ **π es trascendente:** En 1882, Ferdinand von Lindemann probó este resultado. Más adelante, Karl Weierstrass generalizó este resultado con el teorema de Lindemann-Weierstrass, que ayuda a determinar si un número es trascendente o no.

Hacia los siglos XVI y XVII, el término cuadratura toma otra dimensión. Se utiliza para denotar el cálculo del área, independientemente del método utilizado. En este caso ya no se utiliza un método tan riguroso como el que se utilizaba en la antigua Grecia, sino que se sacrifica rigurosidad por potencia de resolución. Por ejemplo, el principio de Cavalieri, basado en la siguiente afirmación:

"Si dos sólidos al ser cortados por planos paralelos producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen".

Gracias a este método y muchos otros, se consiguen áreas de figuras más complejas. Galileo encuentra el área del cicloide y Grégoire de Saint-Vincent el de la hipérbola, que más tarde serviría para encontrar la función logaritmo, importantísimo resultado para el mundo de las matemáticas. John Wallis en 1656 presenta resultados que sentarían las bases del cálculo infinitesimal. Newton y Leibniz también en el siglo XVII, descubren el teorema fundamental del cálculo que ayuda a dar pasos de gigante en este campo. Años más tarde, Riemann formaliza el concepto de integración. También aparecen otras definiciones de integral, como por ejemplo la de Lebesgue.

1.2. En la actualidad

Habitualmente, se introduce la integral definida de una función respecto en un intervalo $[a, b]$ cómo

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad (1.1)$$

donde $f(x)$ toma valores reales en el intervalo $[a, b]$.

Intuitivamente, encontrar el valor de I no es más que encontrar el área bajo la curva de la función f (véase la figura 1.1). Por lo tanto, esto nos une el concepto de cuadratura y de integral definida. Encontrar este valor de I es un problema que se debe solucionar a menudo numéricamente. Sin embargo, no es algo que sea en general, sencillo. Pues se puede dar que la función $f(x)$ sea compleja o que no tenga una función primitiva expresable en funciones elementales sencillas.

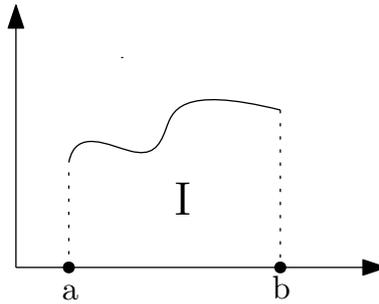


Figura 1.1

Un ejemplo que ilustra la falta de una primitiva sencilla es el siguiente:

$$\int e^{-x^2} dx.$$

Es interesante observar que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ es la función de densidad de una variable aleatoria normal de media 0 y varianza 1. Ésta integral no tiene una función primitiva expresable en funciones elementales. Pero si que se puede encontrar la integral definida en \mathbb{R} . Para este tipo de casos, consideraremos aproximaciones a la función en cuestión, como se verá en el siguiente apartado.

1.3. Aproximando la integral definida

Sean f, f_n funciones continuas en $[a, b]$, supongamos que f_n es una aproximación de la función f . Podemos calcular el valor de la siguiente integral

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx. \quad (1.2)$$

Consideremos ahora, el error de esta aproximación

$$e_n = I(f) - I(f_n).$$

Y usando (1.1) y (1.2) es sencillo encontrar una cota superior de este error acotando por la norma infinito

$$|e_n| = \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty. \quad (1.3)$$

Si para algún n tenemos $\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$ entonces

$$e_n \leq (b - a)\epsilon.$$

Una manera razonable de encontrar esta aproximación es tomar $f_n \in \mathbb{P}_n$ los polinomios de grado menor o igual que n . Por ejemplo, utilizando el polinomio interpolador de Lagrange f en $N + 1$ puntos $\{x_j\}_{j=0, \dots, N}$ diferentes entre si y usando (1.2) se tiene

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^N f(x_j) \int_a^b l_j(x) dx, \quad (1.4)$$

donde l_j es el polinomio característico de Lagrange de grado N asociado al punto x_j :

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

A la fórmula obtenida en (1.4) se le llama **cuadratura de Lagrange**. Este proceso no es único y se puede repetir utilizando diferentes polinomios interpoladores, pero es algo que queda fuera de las necesidades de este trabajo. Utilizando (1.4) podemos generalizar este concepto e introducir una definición formal y rigurosa.

Definición 1.1. Sea f una función real integrable en el intervalo $[a, b]$. Llamaremos **cuadratura de la integral de una función** a la siguiente aproximación

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega(x_i),$$

donde ω es una función continua $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que atribuye un cierto peso a cada punto del intervalo $[a, b]$, y por esto mismo la denominamos peso. A los diferentes puntos $\{x_i\}_{i=0, \dots, N}$ del intervalo $[a, b]$, los llamaremos nodos.

Recuperando (1.4), en este caso particular, la función peso viene definida por $\omega(x_j) = \int_a^b l_j(x) dx$.

Capítulo 2

Cuadraturas importantes

Una vez tenemos una definición formal para la cuadratura, necesitamos introducir dos tipos. En primer lugar la cuadratura de Gauss, que nos da una primera intuición de como debería de ser una cuadratura óptima. Avanzado el capítulo, estudiaremos en profundidad la cuadratura de Chebyshev, ligada a los diseños esféricos. Veremos diversos resultados así como dos ejemplos importantes: la cuadratura en el intervalo $[-1, 1]$ y en la esfera 1-dimensional S^1 .

2.1. Cuadratura de Gauss

Partiendo de la definición dada en el capítulo anterior, tomaremos ahora $[a, b] = [-1, 1]$.

Definición 2.1. Sea f una función real integrable en el intervalo $[-1, 1]$. Llamaremos **cuadratura de Gauss** de la integral de una función a la siguiente aproximación

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)\omega_i(x_i),$$

donde tenemos una igualdad para todos los polinomios de grado menor o igual que $2n - 1$.

Observación 2.2. Notemos que si no disponemos de $[-1, 1]$ como intervalo de integración, siempre podremos reconvertir los límites de integración de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)dx \approx \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)\omega_i. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Una función peso importante es $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ con el cual podemos obtener fórmula de cuadratura relativamente sencillas gracias a los polinomios de Chebyshev. Debido a que estos polinomios son ortogonales respecto al peso $\omega(x)$:

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m, \\ \pi & : n = m = 0, \\ \pi/2 & : n = m \neq 0, \end{cases}$$

donde $T_n(x)$ y $T_m(x)$ son los polinomios de Chebyshev de grado n y m respectivamente.

Ejemplo 2.4. Consideremos ahora la cuadratura de Gauss en $[-1, 1]$ para el caso $n = 3$. Es decir, deberíamos de encontrar nodos x_1, x_2, x_3 y coeficientes a_1, a_2, a_3 tal que para todo polinomio de grado menor o igual que $2n - 1$, es decir, 5, se cumpla la igualdad que vimos anteriormente:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3).$$

Al ser un caso sencillo podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f = 1 &\Rightarrow \int_{-1}^1 1dx = 2 = c_1 + c_2 + c_3, \\ f = x &\Rightarrow \int_{-1}^1 xdx = 0 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \\ f = x^2 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3} = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2, \\ f = x^3 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^3dx = 0 = c_1x_1^3 + c_2x_2^3 + c_3x_3^3, \\ f = x^4 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^4dx = \frac{2}{5} = c_1x_1^4 + c_2x_2^4 + c_3x_3^4, \\ f = x^5 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^5dx = 0 = c_1x_1^5 + c_2x_2^5 + c_3x_3^5. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{5}{9}, c_2 = \frac{8}{9}, c_3 = \frac{5}{9}, \\ x_1 &= -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

Ahora ya tenemos los valores que necesitábamos y podemos poner:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Ya tendríamos la cuadratura de la integral de f para $n=3$.

2.2. Cuadratura de Chebyshev

La cuadratura de Chebyshev es, en cierto modo, parecida a la de Gauss. Sólo que en este caso la función peso será trivial, esto es que todos los puntos tendrán el mismo peso. El objetivo es estudiar la existencia de cuadraturas de Chebyshev en la esfera, con un número de nodos de orden óptimo.

Sea E un subespacio compacto de \mathbb{R}^d , $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y consideremos σ una medida de este espacio. Supondremos normalizada esta medida, esto es $\sigma(E) = 1$.

Definición 2.5. Una fórmula para la *cuadratura de Chebyshev* de E de orden N y grado t es la siguiente:

$$\int_E f(x)d\sigma \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\zeta_j) \quad \zeta_i \in E, \quad (2.1)$$

Exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que t .

Estos puntos ζ_i son los nodos a los que la fórmula les atribuye el mismo peso. A priori, no necesariamente estos nodos deben de ser diferentes. De todos modos, en nuestro caso y de ahora en adelante, consideraremos que sí lo son.

Notación 2.6. Ponemos $N = N_E(t)$ el número mínimo de puntos que cumplen la ecuación.

En palabras más llanas, tenemos una fórmula con la cual podemos aproximar la integral sobre un cierto espacio de una cierta función por la media de los valores de esta en ciertos nodos. Para ejemplificar este concepto, podemos encontrar a continuación dos ejemplos relativamente sencillos de esta cuadratura para $[-1, 1]$ y S^1 , que muestran ya las primeras complicaciones.

2.2.1. Cuadratura en $[-1, 1]$

Tomando ahora $E = [-1, 1]$, tenemos un espacio compacto. La longitud del intervalo es 2, luego podríamos normalizar esta medida tomando $d\sigma = \frac{dx}{2}$. Nuestro problema se reduce a encontrar nodos $x_1, \dots, x_N \in [-1, 1]$ que cumplan la fórmula que vimos anteriormente:

$$\int_{-1}^1 p(x) d\sigma = \int_{-1}^1 p(x) \frac{dx}{2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p(x_j),$$

para todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$ de grado $\leq N$, dado que tenemos N parametros libres a_1, \dots, a_N .

Es decir, como vimos en el capítulo anterior, queremos encontrar los puntos $x_1, \dots, x_N \in [-1, 1]$ tal que obtenemos la igualdad. Entonces:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_N = \int_{-1}^1 x \frac{dx}{2}, \\ \vdots \\ x_1^N + \dots + x_N^N = \int_{-1}^1 x^N \frac{dx}{2}. \end{cases}$$

En el siglo XIX, Chebyshev pudo comprobar que estos nodos existían para N comprendidas entre 2 y 7. En 1880, Radau comprueba que para $N=9$, siguen existiendo, pero que para $N=8$ se obtienen nodos complejos. Bernstein, prueba que para $N > 9$, todos los nodos que podamos encontrar deben ser complejos. Concluyendo, no existen cuadraturas de Chebyshev en $[-1, 1]$ con el aparentemente *óptimo* número de nodos.

2.2.2. Cuadratura en S^1

Para el caso que nos ocupa, tomamos $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Para facilitar las cosas, tomamos $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. Ya que de este modo, al tomar $z \in \mathbb{C}$, lo podemos denotar como $z = x + iy = e^{i\theta}$, usando la fórmula de Euler.

Para normalizar la medida nos basta tomar $d\sigma = \frac{d\theta}{2\pi}$. En esta ocasión, nos va bien tomar las raíces de la unidad como nodos para la cuadratura, esto es, $e^{\frac{2\pi ij}{N}}$ con $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Podemos construir un sistema similar al que teníamos en el caso del intervalo $[-1, 1]$.

Por un lado se tiene

$$\int_{S^1} z^k d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2\pi ijk}{N}} = \delta_{k,0}.$$

Ya que cuando $k = 0$ se tiene que vale 1, y cuando $k \neq 0$ se tiene que vale 0. Por otro lado se puede escribir

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ijk}{N}} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi ik}}{1 - e^{\frac{2\pi ik}{N}}} = \delta_{k,0}, \quad \text{para } |k| \leq N - 1.$$

Igualando, obtenemos la fórmula de la cuadratura:

$$\int_{S^1} f(x, y) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\cos \theta_j, \sin \theta_j). \quad (2.2)$$

Que es exacta para los polinomios $f(e^{i\theta}) = \sum_{|k| \leq N-1} c_k e^{ik\theta}$ de grado menor o igual que $N - 1$. En éste caso se tiene $N_{S^1}(N - 1) \leq N$, y se puede ver que efectivamente, $N_{S^1}(N - 1) = N$.

2.3. Existencia

Vistos estos ejemplos, la pregunta es si estas cuadraturas de Chebyshev existen. En el caso del ejemplo en $[-1, 1]$ que vimos anteriormente, Bernstein demuestra el siguiente resultado [15].

Teorema 2.7. (Bernstein) Sean $x_1, \dots, x_N \in [-1, 1]$ los nodos tal que:

$$\int_{-1}^1 p(x) \frac{dx}{2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p(x_j),$$

para todo polinomio de grado menor o igual que t . Entonces, tenemos una relación entre el número de nodos y el grado del polinomio: $t < 4\sqrt{N}$.

Además, Bernstein construyó ejemplos que muestran que el número minimal de puntos que cumplen esta configuración es del orden de t^2 . Es decir $N_{[-1,1]}(t) \sim t^2$

Para el caso general, Seymour y Zaslavsky probaron en [7] que para conjuntos conexos por caminos, estas cuadratura existen para cualquier grado t . El problema es que esto es un método no constructivo, es decir, sabemos que para una cantidad suficientemente grande de puntos, estas cuadraturas existen. Pero este resultado no nos proporciona buenas estimaciones para $N_E(t)$.

Usando parametrizaciones para algunos conjuntos E , se puede acotar $N_E(t)$. Por ejemplo, en el caso de la S^2 parametrizada como $[-1, 1] \times S^1$. Korevaar y Meyers, en 1993, en [2] consiguieron tanto una cota superior como inferior:

$$t^2 \lesssim N_{S^2} \lesssim t^3.$$

No sólo consiguieron estas cotas, si no que demostraron resultados para dimensiones mayores:

$$t^2 \lesssim N_{S^2} \lesssim t^{d(d+1)/2}. \quad (2.3)$$

De ahora en adelante, nos centraremos únicamente en la esfera S^d . Como veremos más adelante, a los llamados diseños esféricos.

Capítulo 3

Sampling en la esfera

El *sampling* (o muestreo) es la teoría que estudia problemas relacionados con la discretización de funciones f definidas en un variedad, en términos de los valores de esta función en un conjunto numerable de puntos de dicha variedad. En nuestro caso, se toma como variedad S^d y como funciones f , polinomios en \mathbb{R}^{d+1} restringidos a la esfera. Este capítulo se centra en presentar herramientas para poder realizar este muestreo.

3.1. Introducción

Sea M una variedad y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, el proceso de discretizar trata de conseguir un conjunto de puntos x_1, \dots, x_N tal que se tiene una aproximación

$$f \approx \sum_{j=1}^N f(x_j)G_j, \quad (3.1)$$

donde G_j son funciones que no dependen de f .

Suponiendo que esta discretización exista, la pregunta natural es si es *buena*. Consideramos que una discretización *buena* es aquella donde los errores que se cometen al evaluar $f(x_j)$ propaguen errores pequeños (en algún sentido) en la reconstrucción

$$\sum_{j=1}^N f(x_j)G_j.$$

Por ejemplo, si se consideran polinomios de un cierto grado menor o igual que N . Supongamos que a partir de y_j reconstruimos de algún modo, sin errores, el polinomio P tal que $P(x_j) = y_j$ y a partir de \tilde{y}_j con

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\tilde{y}_j - y_j| < \epsilon,$$

reconstruimos \tilde{P} tal que $\tilde{P}(x_j) = \tilde{y}_j$.

Notación 3.1. Denotamos \gtrsim y \lesssim para indicar que es una igualdad salvo constante, en el lado respectivo. Y \sim cuando hay constantes a ambos lados de la igualdad.

Se quiere que el error cometido al reconstruir \tilde{P} en lugar de P sea también pequeño. Es suficiente que los puntos x_j verifiquen

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |Q(x_j)| \gtrsim \int_M |Q(x)| dx$$

para cualquier polinomio Q . En efecto,

$$\epsilon > \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\tilde{P}(x_j) - P(x_j)| \gtrsim \int_M |\tilde{P}(x) - P(x)| dx.$$

Se quieren errores uniformes en el grado, luego se necesita que las constantes que verifican las desigualdades no dependan del número de puntos N .

Recordemos ahora la noción de polinomio trigonométrico.

Definición 3.2. Llamamos *polinomio trigonométrico real de grado n* a una suma finita de la siguiente forma

$$P(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta)), \quad (3.2)$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Notación 3.3. Se denota T_n el conjunto de los polinomios trigonométricos de grado menor o igual que n .

Observación 3.4. El espacio de los polinomios algebraicos de dos variables de grado total menor o igual que n restringidos a S^1 es el mismo espacio que el de los polinomios trigonométricos T_n . Donde un polinomio algebraico es de la forma

$$P(x, y) = \sum_{i+j \leq n} c_{ij} x^i y^j.$$

Demostración. Utilizando la fórmula de Moivre se tiene

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (3.3)$$

Pero a su vez

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n. \quad (3.4)$$

Entonces con (3.3) y (3.4)

$$(e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Luego se tiene una relación uno a uno entre los conjuntos

$$\{\cos k\theta, \sin k\theta; \quad k \leq n\} \text{ y } \{\cos^k \theta, \sin^k \theta; \quad k \leq n\},$$

que es lo que se necesitaba probar. \square

Ejemplo 3.5. Tomando $\theta \in [0, 2\pi]$ el polinomio

$$P(\theta) = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta.$$

Utilizando la fórmula para el coseno del ángulo doble

$$P(\theta) = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2} = \frac{2\cos^2 \theta}{2} = \cos^2 \theta.$$

El polinomio algebraico es $Q(x, y) = x^2$ y una vez restringido a S^1 es

$$Q(\cos \theta, \sin \theta) = \cos^2 \theta = P(\theta).$$

En dimensiones superiores, para S^d con $d \geq 2$, esta equivalencia se mantiene. Los polinomios algebraicos restringidos a S^d es el espacio de los armónicos esféricos de grado menor o igual que n .

3.2. Existencia de puntos

En 3.1 se discutió la existencia de puntos de discretización *buena*. Nos preguntamos ahora si de verdad existen. Sea de nuevo T_n el espacio de polinomios trigonométricos de orden menor o igual que n .

En S^1 se tiene que

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} |P(x_j)|^2 = \int_{S^1} |P(x)|^2 dx, \quad (3.5)$$

x_0, \dots, x_{2n} las raíces $(2n+1)$ -ésimas de la unidad $x_{n_j} = e^{\frac{2i\pi j}{2n+1}}$ para $j = 0, \dots, 2n$.

En este caso se ve que se obtiene una igualdad. En otras normas, no podemos asegurar la igualdad, pero sí equivalencias. El siguiente resultado de [11, p.28 Tomo II] lo demuestra.

Teorema 3.6. (*Desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund*) Sea $S(x)$ un polinomio de grado n , se verifica:

$$\left| \int_0^{2\pi} |S(x)|^p d\omega_{2n+1} \right|^{1/p} \leq A \left| \int_0^{2\pi} |S(x)|^p dx \right|^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3.6)$$

$$\left| \int_0^{2\pi} |S(x)|^p dx \right|^{1/p} \leq B_p \left| \int_0^{2\pi} |S(x)|^p d\omega_{2n+1} \right|^{1/p} \quad 1 < p < \infty \quad (3.7)$$

con A, B_p dos constantes donde B sólo depende de p . Y $d\omega_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} \delta x_j$ donde δx_j son las deltas de Dirac.

Este resultado nos permite establecer relaciones entre la suma de los polinomios evaluados en ciertos nodos con la integral de estos.

No es necesario que los puntos sean las raíces de la unidad (ver [12]), ya que si los puntos x_j están *bien distribuidos* se verifica que

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} |P(x_{n_j})| \sim \int_{S^1} |P(x)| dx, \quad (3.8)$$

con constantes independientes del grado.

Estos conjuntos de sampling se han estudiado y existen en S^d con $d > 1$ [13]. La principal diferencia con el círculo es que ahora no hay puntos tan bien distribuidos como las raíces de la unidad. Por ejemplo, no es posible obtener un resultado como (3.5).

3.3. Herramientas de sampling en la esfera S^d

Una forma de poder encontrar puntos *bien distribuidos* en la esfera es tomar puntos asociados a una llamada partición de área regular.

Definición 3.7. Una *partición* es una colección finita de conjuntos $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ cerrados contenidos en S^d tal que se verifican

- (1) $\bigcup_{i=1}^N R_i = S^d$,
- (2) $\mu_d(R_i \cap R_j) = 0$, para $1 \leq i < j \leq N$.

Donde μ_d es la medida de Lebegue en S^d .

Definición 3.8. La norma de una partición \mathcal{R} se define como

$$\|\mathcal{R}\| = \max_{R \in \mathcal{R}} \text{diam } R$$

donde el diámetro de R no es más que la máxima distancia geodésica entre dos puntos del mismo conjunto R .

Definición 3.9. Una *partición de área regular* es un conjunto $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ que cumple las condiciones de partición y adicionalmente verifica

- (1) $\mu_d(R_i) = \frac{1}{N}$, para $1 \leq i \leq N$,
- (2) $\|\mathcal{R}\| \leq cN^{-\frac{1}{d}}$.

La existencia de estas particiones nos viene dada por el siguiente resultado [5].

Teorema 3.10. Para cada $N \in \mathbb{N}$ existe una partición de área regular $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ con norma $\|\mathcal{R}\| \leq B_d N^{-1/d}$ para una cierta constante B_d .

Tomando un punto en cada uno de los elementos de esta partición, obtenemos un conjunto de puntos *bien distribuidos*, como demuestra el siguiente resultado [6].

Teorema 3.11. *Existe una constante r_d tal que para toda partición de área regular $\mathcal{R} = \{R_1 \dots, R_N\}$ con $\|\mathcal{R}\| \leq \frac{r_d}{m}$, para cada colección de puntos $x_i \in R_i$ con $i = 1, \dots, N$ y para cada polinomio P de grado menor o igual que m se verifican las siguientes desigualdades*

$$\frac{1}{2} \int_{S^d} |P(x)| d\mu_d(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |P(x_i)| \leq \frac{3}{2} \int_{S^d} |P(x)| d\mu_d(x). \quad (3.9)$$

Para demostrar el resultado principal de este trabajo, es necesario ampliar las desigualdades anteriores al gradiente tangencial de polinomios que veremos a continuación.

Recordamos que el **gradiente** de una función diferenciable, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define de la siguiente forma:

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \xi_n} \right) \quad \text{para } x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 3.12. *El **gradiente esférico (o tangencial)** de un polinomio P restringido a $S^d \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se define de la siguiente forma*

$$\nabla_t P(x) := \frac{\partial}{\partial x} \left(P \left(\frac{x}{|x|} \right) \right). \quad (3.10)$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclidiana de \mathbb{R}^n .

El siguiente resultado se puede encontrar en [1].

Teorema 3.13. *Para cada partición de área regular $\mathcal{R} = \{R_1 \dots, R_N\}$ con $\|\mathcal{R}\| \leq \frac{r_d}{m+1}$, para cada colección de puntos $x_i \in R_i$ con $i = 1, \dots, N$ y para cada polinomio P de grado menor o igual que m se verifican las siguientes desigualdades*

$$\frac{1}{3\sqrt{d}} \int_{S^d} |\nabla_t P(x)| d\mu_d(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_t P(x_i)| \leq 3\sqrt{d} \int_{S^d} |\nabla_t P(x)| d\mu_d(x). \quad (3.11)$$

Demostración. Veamos que este resultado se deduce del teorema 3.11. Utilizando la definición 3.12 no queda muy claro que $\nabla_t P(x)$ sea un polinomio al que le podamos aplicar el teorema 3.11. Veamos que se puede. Sea

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{d+1}) = \xi_0^2 + \dots + \xi_d^2 - 1.$$

Por definición $\nabla F(x)$ es el generador del espacio normal a S^d en el punto $x \in S^d$. Entonces, podemos construir el gradiente tangencial como:

$$\nabla_t P(x) = \nabla P(x) - \left\langle \nabla P(x), \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|} \right\rangle \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}. \quad (3.12)$$

Gracias a esto podemos poner

$$|\nabla_t P(x)| = \sqrt{P_1^2(x) + \dots + P_{d+1}^2(x)}, \quad (3.13)$$

donde

$$P_j(x) := \frac{\partial P}{\partial \xi_j}(x) - \sum_{k=1}^{d+1} \xi_j \xi_k \frac{\partial P}{\partial \xi_k}(x).$$

Que se obtiene precisamente de (3.12) y son polinomios de grado menor o igual que $m + 1$. Ahora podemos acotar (3.13) tanto por abajo como por arriba

$$\frac{1}{\sqrt{d+1}} \sum_{k=1}^{d+1} |P_k(x_i)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d+1} P_k^2(x_i)} \leq \sum_{k=1}^{d+1} |P_k(x_i)|. \quad (3.14)$$

Aplicando (3.9) llegamos precisamente al resultado que necesitábamos. \square

Capítulo 4

Diseños esféricos

En este capítulo se introduce el concepto de diseño esférico. Korevaar y Meyers conjeturaron en 1993 en [14] que existían diseños esféricos de orden igual a la dimensión del correspondiente espacio de polinomios, esto es la cota inferior de (2.3). El grueso del capítulo se centra en presentar y entender la demostración de esta conjetura por parte de Bondarenko, Radchenko y Viazovska.

4.1. Preliminares

El concepto de diseño esférico lo introducen Delsarte, Goethals y Seidel en [10]. Estos diseños son cuadraturas de Chebyshev en la esfera. En capítulos anteriores, se vio cómo se podían construir cuadraturas en algunos espacios arbitrarios. De ahora en adelante, en el caso de los diseños esféricos se toma $E = S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

Definición 4.1. *Un t -diseño esférico es un conjunto de puntos $x_1, \dots, x_N \in S^d$ tal que se verifica:*

$$\int_{S^d} P(x) d\mu_d(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(x_j)$$

para cualquier polinomio con $d + 1$ variables y de grado menor o igual a t .

Notación 4.2. *Anteriormente se utilizaba $N_E(t)$ para denotar el número mínimo de puntos necesarios para conseguir una cuadratura. De ahora en adelante se escribe $N(d, t)$ donde d es la dimensión de la esfera S^d y t el grado del espacio de polinomios. Esto es debido a que únicamente se considera $E = S^d$.*

Los mismos autores, probaron que existía una cota inferior $N(d, t)$ (en pocos casos alcanzable) para cualquier par $t, d \in \mathbb{N}$ que pudiésemos tomar:

$$N(d, t) \geq \begin{cases} \binom{d+k}{d} + \binom{d+k-1}{d}, & \text{si } t = 2k, \\ 2\binom{d+k}{d}, & \text{si } t = 2k+1 \geq 0. \end{cases}$$

Observación 4.3. $\binom{d+k}{d} + \binom{d+k-1}{d} \sim t^d, \quad t = 2k.$

Demostración. Desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} \binom{d+k}{d} + \binom{d+k-1}{d} &= \frac{k!(k+1)(k+2)\cdots(k+d)}{d!k!} \\ &\quad + \frac{(k-1)!k(k+1)\cdots(k+d-1)}{d!(k-1)!} \\ &= \frac{1}{d!} \left((k+1)\cdots(k+d) + k(k+1)\cdots(k+d-1) \right). \end{aligned}$$

Tenemos d productos de k y además $t = 2k$, luego

$$\frac{1}{d!} \left((k+1)\cdots(k+d) + k(k+1)\cdots(k+d-1) \right) \sim \frac{1}{d!} \left(\left(\frac{t}{2}\right)^d + \left(\frac{t}{2}\right)^d \right) \sim t^d.$$

□

Recordemos que en [7] se probó la existencia de diseños esféricos para cualquier par $t, d \in \mathbb{N}$. Sin embargo, el método era no constructivo y sin control en el orden de puntos necesarios. La pregunta natural que surge es que si el verdadero valor de $N(d, t)$ dista mucho de la cota obtenida anteriormente. Ésta pregunta nos traslada al siguiente apartado.

4.2. Conjetura de Korevaar-Meyers

Korevaar y Meyers en 1994 conjeturan que la cota inferior para este número mínimo de puntos es del orden de t^d .

Conjetura de Korevaar-Meyers. Sea x_1, \dots, x_N un t -diseño esférico en S^d , entonces $N = N(d, t) \sim t^d$.

Bondarenko, Radchenko y Viazovska en [1] probaron un resultado todavía mas fuerte, ya que se garantiza la existencia de estos diseños esféricos.

Teorema 4.4. Para cada $N = N(d, t) \geq C_d t^d$ existe un t -diseño esférico de N puntos en S^d tal que C_d es una constante que sólo depende de d .

Como se presenta en la introducción, el objetivo que persigue este proyecto es entender y analizar la demostración de este teorema. En adelante se presentan tres secciones. Primeramente se prepara el espacio introduciendo a su vez algunos resultados necesarios para continuar. En segundo lugar se da una idea intuitiva de los pasos necesarios para demostrar el teorema. Termina con la demostración del teorema en cuestión.

Resultados previos

Sea H un espacio vectorial sobre \mathbb{R}^n , un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H,$
- (2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- (3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H,$
- (4) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H \text{ y } \forall a, b \in \mathbb{R}^n,$

Se dice que el espacio con la norma es un espacio normado.

Teorema 4.5. (Teorema de representación de Riesz) Sea H un espacio normado y H^* su espacio dual. Tomamos $x \in H$, entonces, cada elemento ϕ_x del espacio dual H^* se puede escribir unívocamente de la siguiente manera:

$$\phi_x(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar.

El siguiente resultado topológico es fundamental para la demostración principal de este trabajo

Teorema 4.6. (Brouwer) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y Ω un abierto acotado con frontera $\partial\Omega$ tal que $0 \in \Omega$. Si $\langle x, f(x) \rangle > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = 0$.

Sea ahora \mathcal{P}_t el espacio de Hilbert de polinomios de grado menor o igual que t en S^d con el producto escalar

$$\langle P, Q \rangle = \int_{S^d} P(x)Q(x)d\mu_d(x),$$

tal que los polinomios verifican

$$\int_{S^d} P(x)d\mu_d(x) = 0. \quad (4.1)$$

Utilizando el teorema de representación de Riesz (Teorema 4.5), para cada punto que tomemos $x \in S^d$, existe un único polinomio $G_x \in \mathcal{P}_t$ tal que

$$\langle G_x, Q \rangle = Q(x) \quad \forall Q \in \mathcal{P}_t. \quad (4.2)$$

Este polinomio se llama **núcleo reproductor** del espacio.

Observación 4.7. Veamos como construir el núcleo reproductor en este caso. Podemos considerar Q_1, \dots, Q_n una base ortonormal del espacio \mathcal{P}_t . Entonces

$$G_x = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n.$$

Por lo visto en el teorema de Riesz, se tiene

$$\langle G_x, Q_j \rangle = \langle \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_n Q_n, Q_j \rangle = \alpha_j Q_j(x).$$

Al ser Q_1, \dots, Q_s base ortonormal se verifica

$$\alpha_j \langle Q_j, Q_j \rangle = Q_j(x) \Rightarrow \alpha_j = Q_j(x) \quad \forall j = \{1, \dots, s\}.$$

Luego

$$G_x = Q_1(x)Q_1 + \dots + Q_s(x)Q_s.$$

Proposición 4.8. *Un conjunto de puntos $x_1, \dots, x_N \in S^d$ es un t -diseño esférico si y sólo si*

$$G_{x_1} + \dots + G_{x_N} = 0. \quad (4.3)$$

Demostración. \Leftarrow) Sea $x_1, \dots, x_N \in S^d$ tal que se verifica $G_{x_1} + \dots + G_{x_N} = 0$. Sea $P \in \mathcal{P}_t$ un polinomio no nulo y $\int P$ su integral. Entonces $(P - \int P) \in \mathcal{P}_t$. Luego, por hipótesis

$$\langle P - \int P, G_{x_1} + \dots + G_{x_N} \rangle = 0.$$

Utilizando las propiedades de producto escalar se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P - \int P, G_{x_1} + \dots + G_{x_N} \rangle \\ &= \langle P - \int P, G_{x_1} \rangle + \dots + \langle P - \int P, G_{x_N} \rangle \\ &= P(x_1) - \int P + \dots + P(x_N) - \int P \\ &= \sum_{j=1}^N P(x_j) - N \int P \end{aligned}$$

Arreglando la igualdad obtenemos

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(x_j) = \int_{S^d} P(x) d\mu_d(x),$$

que es precisamente la definición de t -diseño esférico.

\Rightarrow) Para demostrar esta implicación se utiliza un argumento similar. Tomando la definición de t -diseño esférico se tiene que

$$\int_{S^d} P(x) d\mu_d(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(x_j)$$

Luego, volviendo los pasos hacia atrás del argumento que utilizamos en la implicación anterior, tenemos que:

$$G_{x_1} + \dots + G_{x_n} = 0.$$

□

Idea intuitiva

Se considera Ω el conjunto abierto de \mathcal{P}_t como en el teorema 4.6, definido como

$$\Omega = \left\{ P \in \mathcal{P}_t; \int_{S^d} |\nabla P(x)| d\mu_d(x) < 1 \right\} \quad (4.4)$$

Supongamos que existe una función continua $F : \mathcal{P}_t \rightarrow (S^d)^N$ tal que para todo $P \in \partial\Omega$ se cumple

$$\sum_{i=1}^N P(x_i(P)) > 0, \text{ con } F(P) = (x_1(P), \dots, x_N(P)). \quad (4.5)$$

Y sea,

$$L : (S^d)^N \rightarrow \mathcal{P}_t,$$

tal que $L(x_1, \dots, x_N) = G_{x_1} + \dots + G_{x_N}$. Componiendo ambas funciones se tiene $f = L \circ F : \mathcal{P}_t \rightarrow \mathcal{P}_t$. Entonces

$$f(P) = L(x_1(P), \dots, x_N(P)) = G_{x_1(P)} + \dots + G_{x_N(P)}.$$

Por el teorema 4.5 se tiene

$$\langle P, f(P) \rangle = \sum_{i=1}^N P(x_i(P)), \quad \forall P \in \mathcal{P}_t.$$

Utilizando el teorema 4.6 para la función f vista y Ω se tiene que $f(Q) = 0$ para algún $Q \in \mathcal{P}_t$. Luego

$$G_{x_1(Q)} + \dots + G_{x_N(Q)} = 0.$$

Y por lo visto en la proposición 4.8, $x_1(Q), \dots, x_N(Q)$ es un t -diseño esférico.

La dificultad radica en construir esta F , o lo que es lo mismo, unos puntos $x_1(P), \dots, x_N(P)$ construidos de manera continua tal que

$$\sum_{i=1}^N P(x_i(P)) > 0, \quad \forall P \in \Omega.$$

Demostración

Sean $d, t \in \mathbb{N}$, ponemos $C_d > \left(\frac{54dB_d}{r_d}\right)^d$ con B_d de la forma vista en el teorema 3.10 y r_d como en el teorema 3.11. Fijamos $N \geq C_d t^d$ y se toma un conjunto de puntos x_1, \dots, x_N bien distribuidos en la esfera, esto es considerando una partición de área regular $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ tal que verifica

$$\|\mathcal{R}\| \leq B_d N^{-1/d} < \frac{r_d}{54dt}, \quad (4.6)$$

es decir, como se vio en el teorema 3.10 y tomando arbitrariamente $x_i \in R_i$ para cada $i = 1, \dots, N$.

Como se vio anteriormente, se intenta conseguir que

$$\sum_{i=1}^N P(x_i(P)) > 0.$$

Una forma de proceder, es considerar $F(0) = (x_1, \dots, x_N)$ y mover cada punto x_i a lo largo del gradiente tangencial del polinomio P y así poder incrementar el valor de $P(x_i)$.

Para ello, se considera $\epsilon = \frac{1}{6\sqrt{d}}$ y la siguiente función

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} x & \text{si } u > \epsilon, \\ \epsilon & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Se utilizará esta h_ϵ para asegurar que la función $U : \mathcal{P}_t \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ está bien definida. Ya que se define como

$$U(P, y) = \frac{\nabla_t P(y)}{h_\epsilon(|\nabla_t P(y)|)}.$$

Luego se acota por ϵ el denominador cuando el gradiente tangencial está por debajo de este valor.

Para cada $i = 1, \dots, N$ se toman las funciones $y_i : \mathcal{P}_t \times [0, \infty] \rightarrow S^d$ que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{ds} y_i(P, s) = U(P, y_i(P, s)). \quad (4.7)$$

tomando como condición inicial

$$y_i(P, 0) = x_i,$$

para cada $P \in \mathcal{P}_t$.

Se ve que $U(P, y)$ es Lipschitz respecto a ambas variables e y_i está bien definida pues toma valores en S^d . Luego, por la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, se escribe

$$F(P) = (x_1(P), \dots, x_N(P)) := \left(y_1\left(P, \frac{r_d}{3t}\right), \dots, y_N\left(P, \frac{r_d}{3t}\right) \right). \quad (4.8)$$

y por la definición, es continua.

Notación 4.9. Para facilitar la notación se escribirá $y_i(s)$ en lugar de $y_i(P, s)$.

Ahora, nos basta probar el siguiente teorema para terminar la demostración.

Teorema 4.10. Sea $F : \mathcal{P}_t \rightarrow (S^d)^N$ la aplicación definida como en (4.8) y $\Omega = \{P \in \mathcal{P}_t; \int_{S^d} |\nabla_t P(x)| d\mu_d(x) < 1\}$ entonces para cada $P \in \partial\Omega$,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i(P)) > 0.$$

Demostración. Fijando $P \in \partial\Omega$ se tiene por definición que

$$\int_{S^d} |\nabla P(x)| d\mu_d(x) = 1.$$

Utilizado el teorema fundamental del cálculo se escribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i(P)) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(r_d/3t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) + \int_0^{r_d/3t} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(s)) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Y el objetivo ahora, es acotar estos dos términos.

Primer término. Por definición de la partición que hemos tomado se tiene

$$0 = \int_{S^d} P(x) d\mu_d(x) = \sum_{i=1}^N \int_{R_i} P(x) d\mu_d(x),$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{R_i} P(x_i) - P(x) d\mu_d(x) \right| \leq \sum_{i=1}^N \int_{R_i} |P(x_i) - P(x)| d\mu_d(x) \\ &\leq \frac{\|\mathcal{R}\|}{N} \sum_{i=1}^N \max_{z \in S^d: \text{dist}(z, x_i) \leq \|\mathcal{R}\|} |\nabla_t P(z)|, \end{aligned}$$

donde $\text{dist}(z, x_i)$ es la distancia geodésica entre z y x_i . Este máximo se alcanza y sea $z_i \in S^d$ tal que se verifica $\text{dist}(z_i, x_i) \leq \|\mathcal{R}\|$ y

$$|\nabla_t P(z_i)| = \max_{z \in S^d: \text{dist}(z, x_i) \leq \|\mathcal{R}\|} |\nabla_t P(z)|,$$

se escribe

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) \right| \leq \frac{\|\mathcal{R}\|}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_t P(z_i)|.$$

El último paso consiste en considerar una nueva partición de área regular $\mathcal{R}' = \{R'_1, \dots, R'_N\}$ tal que

$$R'_i = R_i \cup \{z_i\}.$$

Ahora, $\|\mathcal{R}'\| \leq 2\|\mathcal{R}\|$ debido a que $\text{dist}(z_i, x_i) \leq \|\mathcal{R}\|$, entonces

$$\|\mathcal{R}'\| \leq 2\|\mathcal{R}\| < \frac{r_d}{27t\sqrt{d}}.$$

Utilizando el teorema 3.13 con esta partición y los puntos z_i se obtiene

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) \right| \leq 3\sqrt{d}\|\mathcal{R}\| \int_{S^d} |\nabla_t P(x)| d\mu_d(x) < \frac{r_d}{18t\sqrt{d}}, \quad (4.10)$$

para todo $P \in \partial\Omega$.

Segundo término. Por definición de la ecuación diferencial en (4.7) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(s)) \right] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\nabla_t P(y_i(s))|^2}{h_\epsilon(|\nabla_t P(y_i(s))|)} \\ &\geq \frac{1}{N} \sum_{i: |\nabla_t P(y_i(s))| \geq \epsilon} |\nabla_t P(y_i(s))| \\ &\geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_t P(y_i(s))| - \epsilon. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por definición de $U(P, y)$ se tiene

$$\left| \frac{\nabla_t P(y)}{h_\epsilon(|\nabla_t P(y)|)} \right| \leq 1 \quad \forall y \in S^d,$$

e igualmente

$$\left| \frac{dy_i(s)}{ds} \right| \leq 1.$$

De esto se concluye que $\text{dist}(x_i, y_i(s)) \leq s$.

Similar al argumento que utilizamos en el caso anterior, consideramos la partición de área regular $\mathcal{R}'' = \{R_1'', \dots, R_N''\}$ tal que

$$R_i'' = R_i \cup \{y_i(s)\}.$$

Y de nuevo, por definición de \mathcal{R} ,

$$\|\mathcal{R}''\| < \frac{r_d}{54dt} + \frac{r_d}{3t}.$$

Aplicando de nuevo el teorema 3.13 a esta partición y a los puntos $y_i(s)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(s)) \right] &\geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_t P(y_i(s))| - \frac{1}{6\sqrt{d}} \\ &\geq \frac{1}{3\sqrt{d}} \int_{S^d} |\nabla_t P(x)| d\mu_d(x) - \frac{1}{6\sqrt{d}} = \frac{1}{6\sqrt{d}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

para cada $P \in \partial\Omega$ y $s \in [0, r_d/3t]$. Luego, utilizando las acotaciones obtenidas y utilizando que si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \geq b - |a|$ se tiene

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i(P)) > \frac{1}{6\sqrt{d}} \frac{r_d}{3t} - \frac{r_d}{18t\sqrt{d}} = 0.$$

Y queda probado el lema, luego hemos demostrado el teorema. \square

Conclusiones

En la demostración principal de este proyecto, aparecen herramientas como el teorema fundamental del cálculo, existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales, distancias geodésicas y resultados topológicos, entre otros. Se utilizan también resultados de *sampling*, tal como se introducen en el tercer capítulo. Gracias a los conocimientos adquiridos en el grado y durante el desarrollo del proyecto, se ha alcanzado el objetivo principal de éste: entender y analizar la demostración, así como comprender la totalidad de las herramientas utilizadas.

Por otro lado, para elaborar este trabajo, he adquirido conocimientos relativos a cómo redactar documentos científicos y a construir una bibliografía. Ésta, ha sido esencial para el desarrollo de este trabajo, más teniendo en cuenta que es un campo donde encontrar referencias no es sencillo.

Bibliografía

- [1] Bondarenko, A.; Radchenko, D.; Viazovska, M.: Optimal asymptotic bounds for spherical designs, *Annals of Mathematics*, 178:443-452, 2013.
- [2] Korevaar, J.; Meyers, J. L. H.: Chebyshev-Type Quadrature on multidimensional domains, *Journal of Approximation Theory*, 79:144-164, 1994.
- [3] Korevaar, J.: Chebyshev-type quadratures: use of complex analysis and potential theory, *Complex Potential Theory*, 325-364, 1994.
- [4] Eves, H: An Introduction to the History of Mathematics, *Sanders Series*, 6a edición, Cengage Learning, 1990
- [5] Kuijlaars, A. B.; Saff, E. B.: Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere, *Transactions of the American Mathematical Society*, 350:523-538, 1998.
- [6] Mhaskar, H. N.; Narcowich, F. J.; Ward, J. D.: Spherical Marcinkiewicz-Zygmund inequalities and positive quadrature, *Mathematics of Computation*, 70:1113-1130, 2001.
- [7] Seymour, P. D.; Zaslavsky, T.: Averaging sets: a generalization of mean values and spherical designs, *Advances in Mathematics*, 52:213-240, 1984.
- [8] Mimura, Y.: A construction of spherical 2-designs, *Graphs and Combinatorics*, 6:369-372, 1990
- [9] Marcinkiewicz J.; Zygmund, A.: Mean values of trigonometrical polynomials, *Fundamenta Mathematicae* 28, 1937.
- [10] Delsarte, P.; Goethals, J. M.; Seidel, J. J., A.: Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata* 6:363-388, 1977.
- [11] Zygmund, A: Trigonometric Series, *Cambridge Mathematical Library*, 1935.
- [12] Chui, C.K.; Zhong, L.: Polynomial Interpolation and Marcinkiewicz-Zygmund Inequalities on the Unit Circle, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233:387-405, 1999.

- [13] Mhaskar, H. N.; Narcowich, F. J.; Ward, J. D.: Spherical Marcinkiewicz-Zygmund inequalities and positive quadrature, *Mathematics of Computation*, 70:1113-1130, 2001.
- [14] Korevaar, J.; Meyers, J. L. H.: Spherical Faraday cage for the case of equal point charges and Chebyshev-type quadrature on the sphere, *Integral Transforms and Special Functions*, 1:105-117, 1993.
- [15] Bernstein, S. N.: Sur les formules de quadrature de Cotes et Tchebycheff, *URSS Academy of Sciences*, 14:323-236, 1937.