Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

CONCEPTES DE MATEMÀTICA ABSTRACTA ADAPTATS A LA DOCÈNCIA SECUNDÀRIA I BATXILLERAT

Autora: Marina Ramírez Gallardo

Director:	**Jordi Font Gonzàlez**
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica. UB**

Barcelona, 29 de Juny de 2017

Índex

Abstract

In this project we introduce, with an advanced and rigorous mathematical approach, 14 concepts and results of mathematical miscellany that have been intensively historically contextualized and chronologically organized. Moreover, we propose the design of activities and exercises suitable for ESO and Batxillerat level that, in a very intuitive and guided way, let us see these consequences, relating them with several items from the in force curriculums of Catalonia.

En aquest treball presentem, amb un tractament matemàtic avançat i rigorós, 14 conceptes i resultats de miscel·lània matemàtica fortament contextualitzats a nivell històric i endreçats cronològicament. Posteriorment, proposem el disseny d'activitats i pràctiques adaptades a l'ESO i Batxillerat que deixen veure d'una forma molt guiada i intuïtiva aquests resultats tot relacionant-los amb punts dels currículums vigents a Catalunya per aquests estudis.

Introducció

En aquest treball presentem una col·lecció de 14 conceptes matemàtics desenvolupats i contextualitzats històricament i adjuntem per cadascun d'ells una activitat, pràctica o guió d'exercicis del nivell d'ESO i/o Batxillerat molt guiada per tal de veure de forma intuïtiva els conceptes o resultats que s'han exposat prèviament en cada cas. Es tracten les parts de cada concepte que millor es puguin fer servir en el disseny d'una activitat del nivell d'aquests estudis, i es pretén que en aquest desenvolupament apareguin les definicions, resultats i demostracions que considerem que el docent que porta a l'aula l'activitat que proposem en cada apartat hauria de recordar abans de provar-la ja sigui per rigor, exactitud dels conceptes, recordatori del que va estudiar, aprenentatge en cas de no haver-ho vist o aprofundiment en cas de necessitar treballar la matèria en un tipus d'activitat més complexa i elaborada com un Treball de Recerca o un projecte, a més d'aportar coneixements històrics que es consideren importants per portar a l'aula a tall de cultura matemàtica. En cap dels apartats ha estat la intenció o l'objectiu explotar el concepte o aprofundir en ell si això no ens dóna aplicacions pràctiques a l'hora de dissenyar l'activitat corresponent.

A l'Annex 1 adjuntem, de forma molt abreviada i esquemàtica (a la bibliografia es troba l'enllaç per veure-ho detallat) els currículums vigents a Catalunya de l'ESO i Batxillerat acompanyats de les competències que es pretenen treballar a l'àmbit de les matemàtiques, a més de les generals, que també les indicarem quan les apliquem. D'aquesta manera es pot consultar ràpidament durant la lectura d'aquest treball aspectes que es mencionen a l'Annex 2, on plantegem el disseny de les activitats que hem dut a terme a partir dels 14 conceptes que exposem.

Motivació i objectius

El motiu principal que m'ha portat a la redacció d'aquest treball tal i com està fet és la decisió presa en aquest últim curs acadèmic de dedicar-me professionalment a la docència. Això va fer que el tema principal del treball fos la didàctica de les matemàtiques. Per un altre costat, volia fer activitats que no només em poguessin servir per ensenyar, sinó també per aprendre jo mateixa. D'aquesta manera, vaig decidir investigar conceptes nous sobre matemàtiques (com veurem, per exemple, les esferes de Dandelin i la llei de Benford) i tractar altres conceptes estudiats durant el grau intentant exprimir al màxim el seu significat i conseqüències des d'un punt de vista més aplicable a la docència preuniversitària que no pas dirigit a la investigació o desenvolupament (com el grup diedral, l'índex d'una corba i els grafs).

En els inicis de la cerca de bibliografia vaig donar amb un llibre que em va fer afegir un nou objectiu a la redacció del treball: *Expediciones Matemáticas*, de Frank J. Swetz [1], on l'autor parla sobre la importància de la contextualització històrica dels conceptes matemàtics que s'imparteixen a l'aula. Swetz també comenta com, en una formació sobre problemes de l'antiguitat a docents, proposa una prova de contextualització matemàtica d'uns problemes clàssics. De 30 persones sotmeses a la prova, comenta que només 2 van obtenir una qualificació superior al 70%. Això em va animar a redactar una enquesta/prova on-line i proposar-la a docents de secundària de l'àmbit matemàtic, els resultats de la qual especificarem a l'apartat de Conclusions i comentaris finals.

Per la meva afició a l'estudi de la història i pel gust, en particular, per la història de la ciència, vaig decidir finalment donar importància cronològica a cada concepte desenvolupat en la memòria, fent que justament això els endrecés en la redacció. En definitiva, el meu treball pretén ser una proposta d'activitats amb una exposició prèvia dels detalls matemàtics entre els quals s'inclou la història de cadascun d'ells, exposant el *perquè*, el *com* i el ***quan*** d'aquest concepte.

Així doncs, encetem aquest treball amb els objectius d'aportar coneixements nous i més abstractes a la docència secundària i posar l'accent en el seu context històric, demostrant a la vegada que és possible portar les matemàtiques més avançades, per molt que només sigui de forma intuïtiva i guiada tal i com farem, a altres classes fora de la facultat.

Metodologia i estructura

El procediment que s'ha seguit per l'elaboració d'aquest treball comença per una recol·lecció d'idees de miscel·lània matemàtica que, en un principi, ens sembla que poden servir per fer un desenvolupament i una posterior activitat. La font emprada per excel·lència en aquesta tasca és [2]. Inicialment, al voltant de 30 conceptes formaven la llista de temes a tractar. A mida que s'anava avançant en l'elaboració del treball es van descartar més de la meitat per diversos motius: falta d'espai a la memòria, falta de confiança en les activitats que s'anaven dissenyant, simplicitat dels conceptes o, pel contrari, complexitat conceptual massa elevada i impossibilitat de l'adaptació a una pràctica per secundària.

Amb cada concepte s'ha realitzat una cerca en quant al context històric on han estat de molta ajuda les fonts [1], [2], [3], [4], [5] i [6]. A la vegada, s'ha realitzat un estudi matemàtic de cada concepte i s'ha buscat la forma de redactar les definicions, teoremes i demostracions. Aquestes últimes, en alguns casos degut a la dificultat o llargària, s'han suprimit ja que no formaven part de cap dels objectius principals.

Finalment, un cop redactades les activitats i els desenvolupaments dels conceptes, es va portar a la pràctica una de activitats dissenyades. Per falta d'hores del professor del meu antic Institut que em va deixar els seus grups no es van poder provar més activitats. Així doncs, l'aplicació a una aula real de les propostes que hi ha en aquest treball no formen una part d'aquest, sinó un complement anecdòtic.

En quant a l'estructura cal dir que el cos de la memòria, per qüestions de màxim de pàgines permeses (la majoria d'activitats ocupen més espai que l'explicació dels conceptes) i ja que el treball pertany al grau de matemàtiques, s'ha decidit dedicar al desenvolupament dels conceptes fets servir i al treball matemàtic que s'ha fet amb aquests, deixant per l'Annex 2 la redacció de les activitats.

Exposició dels conceptes matemàtics fets servir

A continuació presentem, per ordre cronològic, una exposició de tots els conceptes escollits per dissenyar les propostes docents que formen l'objectiu principal d'aquest treball.

---

1 milió a.C.: Cigales, nombres primers i l'algorisme d'Euclides

"De certa manera, es podria dir que la història dels nombres primers és la història d'un gran fracàs, però d'un fracàs meravellós."
- Enrique Gracián

Històricament, Euclídes a la Edat Antiga ja va parlar dels nombres primers, demostrant que existien en una quantitat infinita. El que ens porta a parlar d'aquests nombres en aquest apartat, però, no és el moment en que va començar a treballar amb ells l'ésser humà, sinó el moment en el que tenien una utilitat natural. Les cigales, habitants de la terra fa 1,8 milions d'anys, els feien servir ni més ni menys que per sobreviure: les del gènere *Magicicada* passen gran part de la seva vida sota terra alimentant-se dels sucs de les arrels. Surten a la superfície amb la finalitat d'aparellar-se i posteriorment morir. S'observa que la sortida dels túnels subterranis d'aquesta espècie és massiva i periòdica, de període 13 o 17 anys: ambdós nombres primers. El fet de que sigui massiva fa que els depredadors es trobin aclaparats per la gran quantitat d'individus que hi troben i en cacin menys, i el fet de que el període sigui un nombre primer, segons han conjecturat diversos investigadors (d'un projecte que es troba en els seus inicis a l'Institut Max Plank de Fisiologia Molecular de Dortmund, Alemanya) pot ser per tal d'evitar que espècies de depredadors amb cicles vitals més petits els cacin: com que el nombre 13 i el nombre 17 no són múltiples del cicle vital de cap depredador (no ho són de cap nombre sencer ja que són primers) la quantitat de cops que els cicles vitals dels possibles caçadors coincideix amb la sortida de la terra de les cigales es minimitza. Per tant, els nombres primers podrien ser un mètode de supervivència d'una petita part de les cigales *Magicicada*.[2]

La nostra idea per aquesta activitat no és treballar amb els nombres primers sabent el que són i com funcionen, o quines propietats tenen. La nostra idea és portar a l'aula de secundària un exercici que estimuli el descobriment dels nombres primers a la vegada que justifica una de les seves utilitats, arribant inevitablement al seu interès matemàtic. Abans, recordem alguns conceptes que ens seran necessaris i que hauríem de repassar a l'aula abans de portar l'activitat que proposarem:

Divisió de nombres enters: Donats a i b enters, $b \neq 0$, existeixen q, r enters únics tals que $a = bq + r$, on $0 \leq r < |b|$. Diem que q és el quocient i r la resta o residu de la divisió sencera de a entre b. Observem que si a és divisible per b, aleshores $r = 0$ necessàriament. En aquest cas direm que b divideix a i ho notarem $b \mid a$.

Algoritme d'Euclides: Siguin a i b dos enters, $b \neq 0$. Per la proposició anterior, podem construir una successió de divisions enteres:

$$a = bq_1 + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < |b|$$

$$b = r_1 q_2 + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 \leqslant r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3 q_4 + r_4,\ 0 \leqslant r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,\ 0 \leqslant r_n < r_{n-1}$$

Es pot demostrar que existeix un n natural tal que la successió arriba al seu final en la iteració n-èssima, quan es compleix que $r_n = 0$, i doncs $mcd(a, b) = r_{n-1}$. Això es veu clarament, ja que els residus de les divisions enteres que estem tractant conformen una successió de nombres naturals estrictament decreixent, i doncs, per alguna n tindrem que $r_n = 0$. D'altra banda, donats a, b i q nombres enters es compleix que $mcd(a, b) = mcd(a - bq, b)$, que es demostra veient que les parelles (a, b) i $(a - bq, b)$ tenen els mateixos divisors comuns.

Els conceptes que s'exposen, tal i com estan explicats, no serien factibles per portar a una aula de secundària, tot i que poden descriure's exercicis que deixin veure la essència de la teoria matemàtica i els resultats que hi han al darrere. A més, per tal de facilitar els càlculs, adaptarem els raonaments a cigales amb un mes de vida. Un exemple d'activitat el trobem en l'apartat A de l'Annex 2.

S. III a.C.: "Sobre l'equilibri dels plans", punts notables del triangle i experiments físics

"Eureka!"
- Arquímedes de Siracusa

Arquímedes va néixer a Siracusa al 287 a.C. Va ser físic, matemàtic, inventor, enginyer i astrònom a l'Antiga Grècia i se'l considera, a més d'un dels tres grans matemàtics per a molts historiadors de la ciència (juntament amb Isaac Newton i Carl Friedrich Gauss), pare de la enginyeria pràctica.[3] Va ajudar a l'exèrcit de

Siracusa a lluitar contra l'exèrcit romà en la II Guerra Púnica[1] tot dissenyant armes molt modernes que van desconcertar a l'enemic, com la *manus ferrea*, descrita com una espècie d'elevadora que aixecava els vaixells romans de la superfície del mar i els tornava a deixar anar fent que es destruïssin. Galeno (129-199), antic metge grec, escriu sobre Arquímedes i menciona per primer cop els seus "miralls ustoris". Avui dia s'interpreta que foren una espècie de miralls parabòlics que van fer servir per concentrar feixos de llum i cremar els vaixells de les tropes romanes. Durant aquesta guerra, mor al 212 a.C. quan l'exèrcit romà invadeix Siracusa. Existeix la llegenda de que, tot i que els soldats romans tenien l'ordre de no fer mal a Arquímedes, va ser un d'ells qui, enfadat perquè el matemàtic li va demanar que no li trepitgés els cercles que havia dibuixat a terra, el va matar. Altres llegendes diuen que anava carregat amb eines matemàtiques que van ser confoses amb armes i l'assassinaren en defensa pròpia.

És ben sabut que Arquímedes, a més d'alguns càlculs de volums i àrees importants, va fer aproximacions al càlcul infinitessimal i trobà valors molt acurats del nombre π. [4] En l'àmbit de la mecànica formula el principi hidrostàtic i fabrica el cargol d'Arquímedes i la palanca. Aquesta última la treballa en la seva obra "Sobre l'equilibri dels plans", que consta de dos llibres: el primer conté quinze proposicions i set axiomes i el segon deu proposicions, totes elles relatives a centres de gravetat de barres i diferents figures planes. A més de la coneguda llei de la palanca i les equacions matemàtiques que demostra, també parla del punt d'equilibri del triangle i alguns paral·lelograms. És el primer cop del que es té constància que s'hagi treballat d'aquest punt notable del triangle, tot i que Arquímedes en parla com si fos un concepte ja conegut en la seva època.

Avui dia el baricentre es treballa d'una forma més analítica i generalitzada. Volem demostrar que, tal i com es defineix de forma analítica en els estudis geomètrics de l'actualitat (i no només pels triangles, sinó per a qualsevol figura d'n vèrtex), el baricentre és el punt d'equilibri de la figura que tractem. Un exemple de definició analítica general pot ser la següent:

<u>Definició:</u> El baricentre de k punts $p_1, ..., p_k$ pertanyents a un conjunt de punts A es defineix com $bar(p_1, ..., p_k) = \frac{1}{k}p_1 + ... + \frac{1}{k}p_k$ on els p_i són punts d'un espai afí i els coeficients $\frac{1}{k}$ pertanyen a un cos de característica zero.

Sent rigorosos, en general no té cap sentit fer combinacions lineals de punts, ja que les úniques operacions permeses són la suma de vectors i la suma d'un punt i un vector. Doncs, hauríem de definir el baricentre a partir d'un punt auxiliar O de la següent forma: $O + \alpha_1\vec{Op_1} + \alpha_2\vec{Op_2} + ... + \alpha_k\vec{Op_k}$ on denotem per α_i els coeficients pertanyents al cos de característica zero. Aquesta definició, però, no té cap sentit si depèn del punt auxiliar O. Per veure que la definició inicial analítica de baricentre que hem donat la podem considerar vàl·lida demostrarem que la segona forma d'escriure una suma de punts és independent del punt de referència O si, i només si, es

[1] Enfrontament bèl·lic entre Roma i Cartago (ciutat antiga fundada pels fenicis, a 17km de l'actual Tunis) que va tenir lloc entre 218 a.C. i 201 a.C.

dóna una condició que compleix la definició inicial de baricentre: la suma dels coeficients és igual a la unitat. Vegem-ho suposant dos punts de referència O i O' i suposem que $O+\alpha_1\vec{Op_1}+\alpha_2\vec{Op_2}+...+\alpha_k\vec{Op_k} = O'+\alpha_1\vec{O'p_1}+\alpha_2\vec{O'p_2}+...+\alpha_k\vec{O'p_k}$. Això passa si, i només si $O+\alpha_1\vec{Op_1}+\alpha_2\vec{Op_2}+...+\alpha_k\vec{Op_k}-\alpha_1\vec{O'p_1}-\alpha_2\vec{O'p_2}-...-\alpha_k\vec{O'p_k} = O'$, és a dir $\vec{OO'} = \alpha_1(\vec{Op_1}-\vec{O'p_1})+...+\alpha_k(\vec{Op_k}-\vec{O'p_k}) = (\alpha_1+...+\alpha_k)\vec{OO'}$, per tant: $(1-\alpha_1-...-\alpha_k)\vec{OO'} = \vec{0}$ per qualsevol parella de punts O i O'. Així doncs, la suma de coeficients ha de ser igual a la unitat. $\square$

D'aquesta manera veiem que $bar(p_1,...,p_k) = \frac{1}{k}p_1+...+\frac{1}{k}p_k$ està ben definida. Per veure que el baricentre és, efectivament, el punt d'equilibri de forces, només cal comprovar que, si notem B com el baricentre d'un triangle i prenem $k=3$, es cumpleix que $\vec{Bp_1}+\vec{Bp_2}+\vec{Bp_3} = \vec{0}$. Demostrem, de tota manera, el cas general. Comencem amb la definició: $bar(p_1,...,p_k) = \frac{1}{k}p_1+...+\frac{1}{k}p_k$ per qualsevol O, en particular pot ser $O=B$, i doncs: $\frac{1}{k}\vec{Bp_1}+...+\frac{1}{k}\vec{Bp_k} = \vec{0}$ el que demostra la igualtat que volíem. Vegem ara la unicitat del baricentre suposant que podem tenir-ne dos diferents B i B', de forma que es cumpliria $\frac{1}{k}\vec{B'p_1}+...+\frac{1}{k}\vec{B'p_k} = \vec{0}$. D'aquesta manera es tindria que $\vec{0} = \vec{B'p_1}+...+\vec{B'p_k} = (\vec{B'B}+\vec{Bp_1}+...+\vec{B'B}+\vec{Bp_k}) = k\vec{B'B}+(\vec{Bp_1}+...+\vec{Bp_k}) = k\vec{B'B}$, d'on es dedueix que $B=B'$ ja que k es troba en un cos de característica zero i l'hem definit no nul. $\square$

En el cas del triangle, aquest punt és la intersecció de les mitjanes, és a dir, la intersecció dels segments que van del punt mig d'un costat al vèrtex oposat. Aquest fet no es gaire complicat de provar. Definint les coordenades dels vèrtex, les equacions de les mitjanes i trobant on és el punt on es tallen només s'ha de veure que aquest compleix la propietat de baricentre.

A l'apartat B de l'Annex 2 trobem un exemple de com portar a l'aula el descobriment de les propietats d'aquest punt i la verificació de que és el centre de gravetat mitjançant dos experiments físics molt il·lustratius.

S. III: Comptatge, posicions a una fila i teorema xinès del residu

"L'àlgebra és molt generosa.
Sempre ens diu més del que li preguntem."
- Jean le Rond d'Alembert

Comencem recordant algunes definicions bàsiques que ens permetran enunciar el teorema xinès del residu en notació moderna:

Definició: Suposem tres nombres enters x, y i p. Es diu que x és congruent amb y mòdul p, i es nota $x \equiv y \ (mod\, p)$, quan $x - y$ és múltiple de p.

Notem que la definició és equivalent a dir que $x \equiv y \pmod p$ quan existeix un enter q tal que $x = pq + y$, i doncs, que dos nombres siguin congruents mòdul p simplement vol dir que un d'ells és el residu de la divisió sencera de l'altre en dividir per p. Aquest punt de vista si que podria plantejar-se a l'aula en cas de voler introduir la idea de congruència.

Teorema xinès del residu: Suposem $n_1, n_2, ..., n_k$ nombres enters coprimers dos a dos (és a dir, el màxim comú divisor per cada parella possible és 1). Doncs, per nombres enters $a_1, a_2, ..., a_k$ tals que $0 \leqslant a_i < n_i$ per tot i, existeix un nombre enter x tal que resol el sistema de congruències simultànies:

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{n_k} \end{aligned}$$

A més, totes les possibles solucions x del sistema són congruents mòdul $N = n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$.
Veiem-ne la demostració:

Existència de la solució: Definim $N_i = \frac{N}{n_i}$. Com que tots els n_i són coprimers dos a dos, tindrem que N_i i n_i també ho seran, i doncs, per la Indentitat de Bezout[2] existeixen dos enters r_i i s_i tals que $r_i n_i + s_i N_i = 1$. Prenent classes d'equivalència en ambdós costats de la última igualtat obtenim, per a tot i i j amb $i \neq j$:

$$s_i N_i \equiv 1 \pmod{n_i}$$

$$s_i N_i \equiv 0 \pmod{n_j}$$

Definim $x = \sum_{i=1}^{k} a_i s_i N_i$ que compleix el sistema de congruències que volíem veure, i amb això queda demostrada l'existència.

Unicitat de la solució: Com hem dit, en el cas de que tots els n_i siguin coprimers la solució existent és la única mòdul N. Per veure-ho suposem que existeixen dos nombres diferents x i y que compleixen el sistema de congruències:

$$x \equiv a_i \pmod{n_i}$$

$$y \equiv a_i \pmod{n_i}$$

[2]Per a i b nombres enters no nuls i d el seu màxim comú divisor, existeixen x i y nombres enters tals que $ax + by = d$.

Això implica que $x-y \equiv 0 \pmod{n_i}$ i, per ser n_i coprimers, tindrem que N també divideix la resta: $x \equiv y \pmod{N}$, el que demostra que tota solució és congruent amb x mòdul N. □

L'origen de les idees que portaren al teorema el podem fixar al segle III al llibre *Sunzi Sunajing* del matemàtic xinés Sunzi. [7] Més tard, aquest llibre va ser considerat un de *Els Deu Cànons del Càlcul*[3], i en ell trobem l'enunciat d'un problema en el tercer capítol que diu així:

"Tenim una quantitat de coses desconeguda. Si les comptem de tres en tres en sobren dues; si les comptem de cinc en cinc en sobren tres; i si les comptem de set en set en sobren dues. Quina quantitat de coses hi ha?"

La resolució que fa Sunzi no és un algorisme generalitzat, sinó un cas particular i purament numèric que només és vàl·lid per aquests valors. On si trobem un algorisme per resoldre sistemes d'aquest tipus és, per primer cop segons sabem, al segle VI escrit per Aryabhata, primer gran matemàtic i astrònom indi, al seu llibre *Aryabhatiya*. En ell descriu un algorisme anomenat *kuttaka*[4] que passa per convertir dues expressions matemàtiques que sorgeixen d'enunciats d'aquest tipus en equacions diofàntiques[5]. Redactat rigorosament al 621 d.C. per Bhaskara I (c.600 – c.680), matemàtic indi del segle VII, és el mètode actual per la resolució d'equacions d'aquest tipus, i consisteix en, tot restant les expressions $x = p_i n_i + a_i$ i obtenint expressions de l'estil $p_i n_i - p_j n_j = a_j - a_i$ (equació diofàntica amb incògnites p_i i p_j), aplicar una recursivitat definida als valors implicats a les equacions: els divisors, els residus i la resta dels residus. Aquest mètode no serà d'interès per aplicar-lo en la redacció de l'activitat que dissenyem referent al teorema xinès del residu, però l'afegirem com a curiositat. Ho farem per un cas particular ja que de forma genèrica s'haurien d'introduir moltes variables, fet que faria molt complicat el seu seguiment. Es considera l'enunciat següent: *"troba el nombre que en dividir de forma sencera per 29 té un residu igual a 15 i en dividir de forma sencera per 45 dóna un residu de 19"*. Aleshores, tenim els residus 15 i 19 i fem la següent classificació:

Residu més alt: 19
Divisor corresponen al residu més alt: 45
Residu més baix: 15
Divisor corresponen al residu més baix: 29
Diferència de residus: $19 - 15 = 4$

I procedim amb els següents passos:

- Successió de divisions senceres: dividim 45 entre 29 (divisor major entre divisor menor) i obtenim un residu igual a 16. Ara dividim 29 entre 16, i obtenim

[3] Es tradueix així de *Shuanjing Shishu*. Es va crear al 656 i era la col·lecció oficial de textos matemàtics fets servir per l'examinació de matemàtiques al sistema d'examen imperial xinès.

[4] Del sànscrit, "polvoritzar".

[5] Equacions polinòmiques de dues o més variables amb coeficients enters i l'objectiu de les quals és trobar les solucions enteres.

residu igual a 13. Ara fem 16 entre 13, i obtenim residu 3. Toca, doncs, dividir 13 entre 3, i obtenim com a residu 1. Fem 3 entre 1 i obtenim residu 0, on aturem el procediment. Els quocients que s'han obtingut són els següents i en el aquest ordre: (1, 1, 1, 4, 3).

- Elecció d'un divisor opcional: ara prenem els quocients trobats en el procediment anterior (1, 1, 1, 4, 3) i comptem quants hem obtingut abans d'acabar el procediment anterior excloent del comptatge la primera entre els divisors de l'enunciat. En aquest cas en tenim 4. Ara escollim un nombre qualsevol que ens farà el paper de divisor opcional k. Suposem $k = 2$. El multipliquem per l'últim quocient obtingut i li sumem la diferència de residus inicials: $3 \cdot 2 + 4 = 10$.

- A continuació construirem una taula i tornarem a fer un mètode recursiu que ens portarà a la finalització del problema. A la primera columna escrivim els quocients que hem obtingut en el primer pas, excloent el que sortia de la primera divisió (és a dir, només escrivim els que hem comptat, que en teniem 4). A continuació en aquesta columna escrivim el divisor opcional i rere d'ell la diferència entre els residus inicials. Seguidament, emplenem la resta de columnes fent l'algoritme de càlcul que especifiquem:

Quocient 1	1	1	1	1	52·1+42 = 94
Quocient 2	1	1	1	42·1+10 = 52	52
Quocient 3	4	4	10·4+2 = 42	42	-
Quocient 4	3	2·3+4 = 10	10	-	-
Divisor opcional	2	2	-	-	-
Diferència de residus	4	-	-	-	-

Figura 1: Taula de resultats pel mètode *kuttaka*.

És a dir, començant pel divisor opcional, multiplico pel nombre que hi ha a sobre i sumo el nombre que hi ha a sota, ho col·loco a la casella que queda a la diagonal superior de la següent columna i copio la resta de dades de forma lateral excepte el nombre que he sumat. Es repeteix el procediment fins que només queden dos nombres.

- Dividim el nombre obtingut pel divisor de mínim residu (en aquest cas dividirem per 29) i obtenim un nou residu: 7 ($94 = 3{\cdot}29+7$). Multipliquem aquest nombre per l'altre divisor, i obteim $45{\cdot}7 = 315$. Li sumem el residu corresponent a aquest últim divisor: $315+19 = 334$, que és la solució al problema: el nombre enter més petit que dividit per 29 té un residu 15 i dividit per 45 dòna un residu 19 és 334.

Altres exemples de problemes relacionats amb el teorema xinès del residu foren resolts per Brahmagupta (598–670), matemàtic i astrònom índi, al segle VII en el seu llibre *Brama Sputa Siddhanta*, on trobem el següent enunciat: *"Tenim un cistell* *amb ous. Si els agafem de dos en dos en sobra un, si els agafem de tres en tres en sobren dos, si els agafem de quatre en quatre en sobren tres, si els agafem de cinc en cinc en sobren quatre, si els agafem de sis en sis en sobren cinc i si els agafem de set en set no en sobra cap. Quin és el nombre mínim d'ous que pot arribar a haver-hi al cistell?"* Aquest enunciat és equivalent a escriure el següent sistema d'equacions, on x és el nombre d'ous i la resta de lletres representen nombres enters desconeguts:

$$\begin{cases} x = 2v + 1; \\ x = 3c + 2; \\ x = 4d + 3; \\ x = 5k + 4; \\ x = 6h + 5; \\ x = 7u + 0; \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2}; \\ x \equiv 2 \pmod{3}; \\ x \equiv 3 \pmod{4}; \\ x \equiv 4 \pmod{5}; \\ x \equiv 5 \pmod{6}; \\ x \equiv 0 \pmod{7}; \end{cases}$$

Brahmagupta planteja el problema d'una forma equivalent a aquesta (les congruències encara no s'havien definit ni fet servir com les coneixem avui) i aplicant recursivament a les equacions el mètode d'Aryabhata troba el 119 com a solució sencera més petita.[7] Segles més tard, també apareixen problemes similars al *Liber Abaci* de Fibonacci (c. 1170-1240), matemàtic italià, al 1202. Al 1247, Qin Jiushao(c. 1202 – 1261), matemàtic xinès, publica una resolució general al *Mathematical Treatise in Nine Sections* a la que anomena *Dayanshu*. No és fins a l'any 1801 quan Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemàtic alemany, publica el *Disquisitiones Arithmeticae* i defineix les congruències que aquest teorema torna a veure la llum de forma significativa, aquest cop per resoldre un problema sobre calendaris, i s'aplica la notació que fem servir actualment quan l'enunciem.

Sovint, a secundària i fins i tot a primària, es veuen exercicis i problemes senzills de matemàtiques que, de ser resolts per un matemàtic, es resoldrien fent servir congruències, tot i que evidentment, si la dificultat no és gaire alta, es poden resoldre amb procediments merament calculistes o per assaig i error. Pot ser una bona forma d'estimular l'estratègia i d'assajar el comptatge i visualitzar les multiplicitats.

A l'apartat C de l'Annex 2 trobem un exemple d'exercici que treballa amb el concepte de congruència. Amb algunes preguntes clau pot deixar veure les propietats que verifica el teorema xinès del residu i estimula tècniques i estratègies de comptatge.

1611: Volums, percentatges i la conjectura de Kepler

"On hi ha matèria hi ha geometria."
- Johannes Kepler

Es defineix com "empaquetament d'esferes" un conjunt d'objectes esfèrics apilats, tots del mateix radi, emplenant un cert espai. Normalment es tracta de l'espai euclidià tridimensional, tot i que es pot generalitzar al pla euclidià (i doncs, treballar amb circumferències) i a altres espais euclidians n-dimensionals. Una altra forma de generalitzar el problema es estenent-lo a espais no euclidians, com per exemple l'espai hiperbòlic. En aquest treball ens centrarem únicament en els espais euclidians de dimensions dos i tres. El problema típic quan es parla d'empaquetaments és el d'optimitzar la densitat de volum (resp. àrea en el cas del pla) pertanyent a les esferes (resp. circumferències) que es té en una certa regió de l'espai. Entenem que aquesta densitat no es mesura pel cas particular de que les esferes (resp. circumferències) es trobin en una regió amb una determinada forma, sinó que es fa de forma general, tenint en compte únicament la disposició o estructura de les esferes (resp. circumferències) i doncs, considerant que les tenim en un espai suficientment ampli sense atendre a la forma o possible frontera d'un recipient (resp. àrea). En aquest aspecte, les conclusions seran generals.

Suposem, començant per la segona dimensió de l'espai euclidià, que tenim un grup de cercles del mateix radi a sobre d'una taula. Si intentem agrupar-les de forma que estiguin el més juntes possibles i emplenin la superfície d'una forma òptima, no haurem d'esforçar-nos gaire: elles mateixes, de forma natural quan les empenyem perquè s'ajuntin, es disposaran amb una estructura hexagonal: sis amb els centres en els vèrtex d'un hexàgon regular imaginari i una setena al centre de la figura tangent a totes les anteriors.

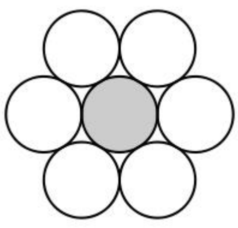


Figura 2: Posició hexagonal de circumferències.

Al segle XIX Gauss demostra que la disposició òptima de recobriment d'àrea amb circumferències del mateix radi és l'hexagonal, amb una densitat d'ocupació de $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069$. [8]

Resolt el problema i saltant a la tercera dimensió de l'espai euclidià, volem abans estudiar les possibles formes de disposició d'esferes del mateix radi. Per un costat tenim l'empaquetament aleatori: introduïm objectes esfèrics en un recipient qualsevol suficientment gran per tal de que, en una regió bastant cèntrica d'aquest, puguem treballar sense que la forma de les parets del recipient afecti a la disposició dels objectes i el sacsegem fins que no es compactin més. Quan fem la mesura del percentatge de volum ocupat per les esferes serà aproximadament d'un $64 - 65\%$. Aquesta disposició és totalment aleatòria, tot i que podríem tenir el cas de que, per casualitat, es disposessin en una configuració definida i més òptima, donant lloc així a altres densitats de volum més altes, fet que ens avisaria de que hi ha algun patró més endreçat de l'esperat dins del recipient. Per una altra banda trobem els empaquetaments periòdics, que són aquelles agrupacions d'esferes disposades amb un cert ordre o patró de forma que apareixen simetries i repeticions i amb la qual s'optimitza la densitat de volum ocupat amb respecte a la disposició aleatòria. En aquest cas trobem, de forma més habitual, la disposició cúbica centrada a les cares i la disposició hexagonal compacta, que tenim a la figura 3. Aquestes dues disposicions tenen una densitat de volum ocupat per esferes igual a $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.7405$.[2], [9] i [10]

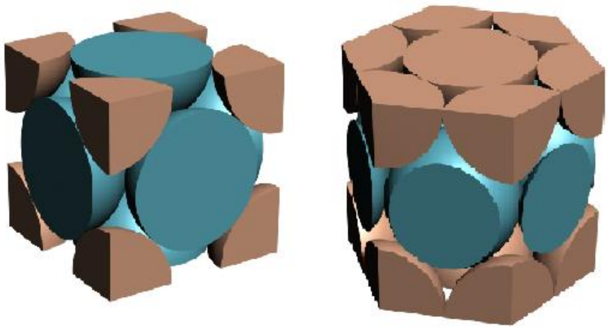


Figura 3: A l'esquerra empaquetament cúbic centrat a les cares. A la dreta empaquetament hexagonal compacte.

L'inici de tot aquest estudi es remunta, de forma significativa i tal que en tinguem constància, als segles XVI-XVII. Al 1571, més exactament, neix Johannes Kepler a Württemberg, Alemanya. Sobretot se'l coneix per les seves aportacions a l'astronomia: va deduir que les òrbites dels planetes eren el·líptiques, que la força del Sol sobre aquests era inversament proporcional a la distància (teoria que acabarà perfeccionant Isaac Newton amb la llei de la gravitació universal) i escriu les tres lleis de Kepler: les dues primeres a l'*Astronomia nova* (1609) i l'última a *Harmonices mundi* (1619). A més de totes aquestes aportacions a la física també va dedicar temps de la seva vida a treballar en les matemàtiques, fet que no és tan conegut. Va calcular l'àrea d'una circumferència per sectors d'una forma aproximada als infinitèsims i l'àrea i el volum d'una esfera amb una partició formada per cons. Entre altres coses, també va estudiar el volum d'un barril de vi i els canvis en la quantitat de líquid que podia contenir en variar la hipotenusa del triangle format per la meitat de l'altura i el diàmetre del cercle màxim a aquesta alçada. A l'any 1611, motivat per la pregunta d'un militar de la marina que volia saber quantes bales de canyó podia portar l'enemic a la seva nau, afirma a la seva monografia *The Six-Cornered Snowflake* i a mode de conjectura, que si en una regió de l'espai donada volem disposar una certa quantitat d'esferes de la mateixa mida per tal que el volum ocupat per aquestes sigui màxim, les haurem de col·locar amb una estructura de xarxa hexagonal compacta. Com hem vist, hi ha més estructures amb aquesta densitat. Kepler, però, només va afirmar que cap altra disposició podia superar el 74% de volum ocupat que suposava la que va proposar, sense parlar d'igualacions.

La demostració a la conjectura de Kepler arriba al 1998, quan el nord-americà Thomas Hales (nascut al 1958) crea una equació de 150 variables que simula cada possible disposició d'un grup de 50 esferes. A partir d'uns càlculs amb aquesta equació duts a terme per un ordinador mostra com cap d'aquestes configuracions supera la proporció de volum ocupat per la configuració descrita per Kepler. La revista matemàtica *Annals of Mathematics* li assigna a aquesta demostració un comitè de dotze experts perquè revisin els càlculs. Aquest comitè afirma al 2003 que, tot i que no han pogut revisar el codi al complet, es troben segurs al 99% de que la demostració és correcta i la conjectura de Kepler es troba cada cop més a prop d'esdevenir teorema, tot i que es preveu que encara faran falta un parell de dècades per tancar la demostració definitivament. [8]

Un altre problema que es troba relacionat amb aquest tema i que cal destacar és *The Kissing Number Problem*. Aquest problema tracta de veure quantes esferes poden ser tangents a una mateixa esfera donada. Newton va conjecturar que el màxim a la tercera dimensió eren 12, fet que va ser demostrat ja ben entrat el segle XX. A la segona dimensió, el *kissing number* és 6 (veiem que coincideix amb la configuració de la densitat màxima d'àrea ocupada al pla), a la primera dimensió evidentment ja que tractem amb intervals, el nombre és 2. A la vuitena dimensió, per exemple, el *kissing number* és 240, i a la dimensió 24 és 196.560. Sembla ser que aquest nombre té una tendència logarítmica, però encara no s'ha demostrat i per moltes dimensions només existeixen cotes sobre aquest nombre. [11] Tot i així, és una bona pregunta a formular en una aula, tot treballant la visió espacial i les tangències. A l'apartat D de l'Annex 2 adjuntem un guió d'activitats on s'intueixen les optimitzacions descrites i es fan experiments pràctics per visualitzar-les.

1822: Còniques, punts de tangència i el teorema de Dandelin

"Les equacions són només la part avorrida de les matemàtiques.
Intento veure les coses en termes de geometria."
- Stephen Hawking

Quan parlem de l'origen de les còniques podem buscar, com en una gran quantitat de casos, en l'Antiga Grècia. Breument podem mencionar alguns matemàtics que van ser importants en els inicis de l'estudi d'aquestes corbes. La primera aparició de còniques les trobem amb Menecmo, entorn el 350 a.C. que les defineix com la intersecció de la superfície d'un con amb un pla perpendicular a una de les seves generatrius. Quan l'angle del con (és a dir, l'angle d'obertura a la seva cúspide) és recte obtenim una paràbola, quan és obtús obtenim una hipèrbola, de la que fins Apoloni només es considera una de les branques, i quan és agut obtenim una el·lipse. Menecmo anomenà aquest corbes com *secció de con recte*, *secció de con obtusangle* i *secció de con acutangle*, respectivament. Amb aquesta disposició no podem obtenir el cas de la circumferència. [12]

D'Euclides d'Alexandria es diu, en comentaris d'obres de Pappos i Apoloni, que va escriure un tractat anomenat *Sobre les còniques*: quatre llibres on estudiava seccions còniques, però que es van perdre i se'ls coneix pels comentaris de matemàtics posteriors. Arquímedes, de qui ja hem parlat, va fer estudis sobre la paràbola. I posteriorment i citant a ambdós anteriors, apareix Apoloni de Perga (262 – 190 a.C.). La seva millor contribució a la matemàtica és el seu tractat *Còniques*, vuit llibres que investiguen propietats sobre les corbes que definia com el tall d'un pla amb la superfície d'un con, aquest cop sí, considerant també la circumferència. És bastant conegut el con d'Apoloni, construcció que visualitza molt bé la definició que aquest matemàtic tractà. La resta de segles en endavant fins l'actualitat, l'estudi de les còniques consta de comentaris, traduccions, ampliacions, demostracions i generalitzacions a altres dimensions de la teoria treballada fins aleshores.[5]

Avui dia, les còniques es poden definir de tres formes fonamentals:

- Definició per la propietat que compleixen els seus punts:
  - La circumferència és el lloc geomètric dels punts que equidisten una distància anomenada *radi* d'un punt donat anomenat *centre*.
  - La el·lipse és el lloc geomètric dels punts tals que la suma de les distàncies a dos punts donats anomenats *focus* és constant.
  - La paràbola és el lloc geomètric dels punts tals que la distància a un punt donat anomenat *focus* i a una recta donada anomenada *directriu* és la mateixa.

- La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts tals que la resta de les distàncies a dos punts donats anomenats *focus* és constant.

- Definició per com un pla talla la superfície d'un con en termes de la relació entre α (angle d'obertura de la cúspide del con) i β (angle d'inclinació entre el pla que talla el con i l'eix d'aquest):
  - Si $\beta = 90°$ tenim una circumferència.
  - Si $\beta > \alpha$ tenim una el·lipse.
  - Si $\beta = \alpha$ tenim una paràbola.
  - Si $\beta < \alpha$ tenim una hipèrbola.

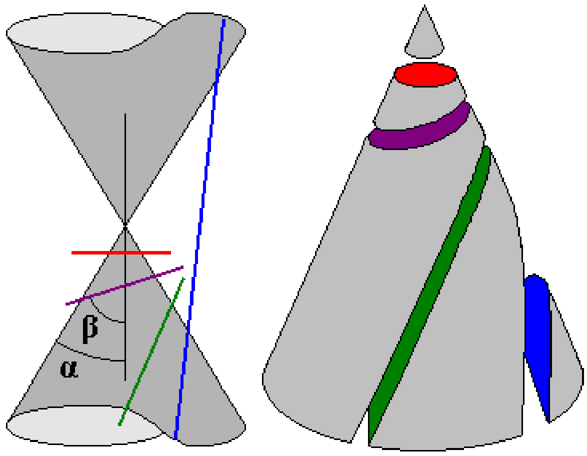


Figura 4: Còniques segons la relació dels angles α i β.

- Definició per les equacions que les descriuen:
  - Circumferència de centre (x_0, y_0) i radi r: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.
  - El·lipse de centre (x_0, y_0), que és el punt mig entre els focus, semieix major de longitud a i semieix menor de longitud b: $\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$.
  - Paràbola amb focus al punt (x_0, y_0) i directriu la recta $x = a$: $(y - y_0)^2 = 2x(x_0 - a) + a^2$.
  - Hipèrbola de centre (x_0, y_0), que és el punt mig entre els focus, semieix major de longitud a i semieix menor de longitud b: $\frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$.

Aquestes tres definicions són equivalents. Comprovar que la primera i l'última són iguals és evident (només s'ha de fer servir la definició euclídia de distància en dues dimensions i aplicar la primera definició). L'equivalència entre la segona i la primera, en canvi, no és tan evident. A l'Antiga Grècia, pel que es veu als tractats que es conserven, es coneixien les propietats dels punts a partir de la forma de la intersecció. Tot seguit definim les esferes de Dandelin i enunciem un teorema que ens demostra aquesta equivalència de forma molt senzilla i visual.

Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847) va ser un matemàtic, soldat i professor d'enginyeria nascut a París però amb nacionalitat belga. Les esferes de Dandelin, que definirem a continuació i que porten el seu nom, van ser descobertes al 1822. Adolphe Quetelet (1976-1874), matemàtic, sociòleg i naturista belga també va col·laborar en la definició d'aquestes esferes i en l'estudi de les seves propietats. [13]

<u>**Definició:**</u> Anomenem esferes de Dandelin (o esferes focals) d'una cònica a les esferes que són tangents a la superfície d'un con per l'interior i tangents també al pla que interseca aquest con definint la cònica. Veiem en cada cas com es disposen les esferes i quina informació ens donen:

- Circumferència: hi ha dues esferes de Dandelin tals que els seus centres estan alineats en l'eix del con amb el centre de la circumferència.
- El·lipse: hi ha dues esferes de Dandelin, una superior i una altra inferior al pla que interseca amb el con, si considerem que la cúspide del con és superior a tota la figura.
- Paràbola: hi ha una esfera de Dandelin, ja que la esfera inferior no podria tenir una intersecció de només un punt amb el pla de la paràbola i ser tangent al con en una circumferència.
- Hipèrbola: hi ha dues esferes de Dandelin, cadascuna en un dels cons que unim per la cúspide quan volem visualitzar les dues branques d'aquesta corba.

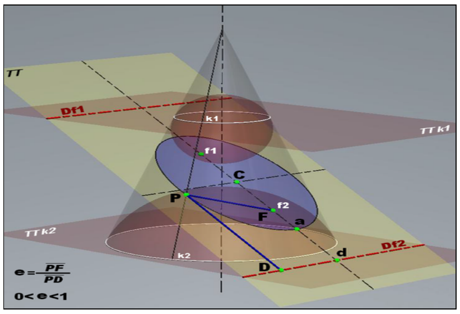


Figura 5: El·lipse i les seves esferes de Dandelin.

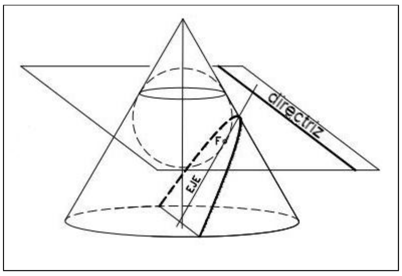


Figura 6: Paràbola i la seva esfera de Dandelin.

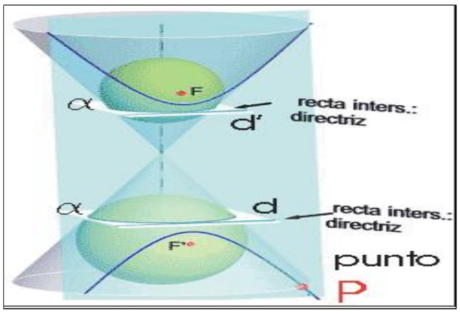


Figura 7: Hipèrbola i les seves esferes de Dandelin.

Ara estem en condicions d'enunciar el teorema de Dandelin:

Teorema: Les esferes de Dandelin intersequen amb el pla que conté la cònica ens els focus d'aquesta.

La intersecció de les esferes de Dandelin amb el con dóna lloc a circumferències que defineixen un pla. Aquest pla, quan interseca amb el pla que conté la cònica en una recta, defineix la directriu[6] de la figura. Aquest resultat ja era conegut per Pappus d'Alexandria, matemàtic grec que va viure entre els segles III i IV. Aquest fet, però, no el demostrarem i ens centrarem en veure l'equivalència de les definicions exposades al principi, que acabarà per ser l'objectiu de l'activitat que dissenyem.

Fixem-nos en la Figura 5. Escollim un punt qualsevol de l'el·lipse de focus F_1 i F_2 i l'anomenem P. Si escollim la generatriu que passa per ell, delimitem els punts P_1 i P_2, pertanyents a la intersecció de les esferes de Dandelin amb la superfície del con. Els anomenem P_1 i P_2. Observem que els segments PF_1 i PP_1 tenen la mateixa longitud, doncs són segments de les rectes tangents a una de les esferes de Dandelin i intersequen en un punt. Per tant, la distància de P_1 a P és la mateixa que la de F_1 a P. Igualment, i per un raonament anàleg, es té que la distància de P_2 a P és la mateixa que la de F_2 a P. És evident la igualtat $d(P_1, P) + d(P, P_2) = d(P_1, P_2)$ ja

[6] Les directrius de l'el·lipse són les dues rectes paral·leles a l'eix menor tals que la distància de cada punt de la el·lipse a un dels focus és igual a la distància del punt a la directriu més propera al focus esmentat. La directriu de la paràbola ja la hem definit, i en el cas de la hipèrbola es defineixen de forma anàloga al cas de l'el·lipse.

que P, P_1 i P_2 estan alineats, i tenim que $d(P_1, P_2)$ és constant per tot P de l'el·lipse. Per l'equivalència de distàncies que hem vist, tindrem que $d(P, F_1) + d(P, F_2)$ és una constant. $\square$

Un raonament anàleg a partir de punts de tangència amb les esferes de Dandelin es pot fer per demostrar la resta d'equivalència entre les definicions. Aquestes observacions, degudament guiades per no perdre's en la geometria de la figura, es poden veure en una aula per tal d'explorar les còniques de totes les formes possibles. Un exemple el trobem a l'apartat E de l'Annex 2.

1852: Mapes, superfícies topològiques i teorema dels quatre colors

"Una bona prova matemàtica és similar a un poema.
Però això és una guia telefònica!"
- crítica anònima a la demostració del Teorema dels quatre colors.

Francis Guthrie (1831-1899) era un estudiant de matemàtiques a la University College de Londres a qui va impartir classes August de Morgan (1806-1871) conegut, entre altres coses, per formular a la seva memòria les lleis de Morgan. A l'any 1852, mentre acoloria un mapa dels comtats d'Anglaterra, se n'adona de que només li calen quatre colors diferents per pintar-lo, tenint en compte que no poden ser del mateix color dos comtats tals que les seves fronteres tenen en comú més d'un punt de la frontera. Ni ell ni el seu germà Frederik van ser capaços de trobar una demostració, així és que Guthrie ho anuncia com a conjectura al seu professor De Morgan. En no poder trobar la demostració que el converteixi en teorema, De Morgan envia la conjectura a Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), físic, matemàtic i astrònom irlandès, que tampoc arriba a demostrar-ho. Al 1879 s'anuncia a la revista *Nature* que Alfred Bray Kempe (1849-1922), matemàtic conegut per les aportacions al teorema dels quatre colors i que va ser alumne de Arthur Cayley al Trinity College de Cambridge, té una demostració per la conjectura. Percy John Heawood (1861-1955) matemàtic britànic, sense demostrar en cap moment que la conjectura no fos vàl·lida, troba un error a la demostració onze anys després i continua acolorint mapes demostrant, això sí, que cinc colors eren suficients.

No és fins al 1976 (124 anys després de la primera conjectura) que Kenneth Appel (1932-2013), matemàtic nord-americà i Wolfgang Haken (1928 fins l'actualitat) matemàtic alemany, per mètodes computacionals, troben la demostració i la converteixen en teorema. Aquesta demostració, però, genera a la societat matemàtica de l'època una gran quantitat de crítiques i controvèrsies. Els procediments que es van dur a terme amb un ordinador per tal de demostrar la conjectura no podien fer-se manualment per una persona en un temps raonable degut a la quantitat de detalls que considera la computadora, provocant així una onada d'escepticisme general. A més, es va parlar molt entre els intel·lectuals matemàtics de la poca elegància de la demostració duta a terme. De fet, va ser una demostració que va obligar a la comunitat matemàtica de l'època a qüestionar-se què és una demostració matemàtica partint de la pregunta: *"Es pot considerar una demostració si només un ordinador ho pot fer?"*. Thomas Tymoczko (1943-1996), filòsof especialitzat en lògica i filosofia de les matemàtiques, va publicar al 1979 *"The four colour problem and its philosofical significance"*, on caracteritza una demostració com un raonament convincent, formalitzable i comprovable. Edward Reinier Swart especifica els tipus de teorema que poden haver-hi: teoremes que es poden demostrar simplement pensant-los, teoremes que necessiten paper i llapis per comprovar-ho, teoremes que necessiten llapis, paper i molt d'esforç i temps i per últim teoremes que requereixen processos computacionals per poder-los demostrar. La divisió dels teoremes en aquestes quatre categories és complicada, ja que alguns poden trobar-se en més d'una classe depenent de qui els pensi o formuli. El teorema dels quatre colors es troba al quart tipus de teorema, i avui dia la seva demostració es considera totalment vàl·lida.

Tot això, de moment, ha estat tractat en un pla euclidià. Les mateixes preguntes que van portar a la primera conjectura sobre el nombre de colors suficient per acolorir un mapa qualsevol les podem traslladar a altres superfícies topològiques com per exemple una esfera o un tor, superfícies suficientment senzilles com per portar a una aula a secundària, fet pel que tractarem només aquestes de forma específica. En el cas de la esfera, per ser homeomorfa a un pla quan prèviament li traiem un punt (existeix entre ambdós superfícies una funció bijectiva, continua i d'inversa continua), compleix les mateixes propietats en quant al nombre de colors. Això és fàcil de veure: si en una esfera excepte un punt fessin falta més de quatre colors, per projecció estereogràfica[7] veuríem que al pla també en farien falta cinc i entraríem en contradicció. En afegir el punt que hem tret per poder aplicar les propietats d'homeomorfisme res canviaria, ja que perquè dues regions hagin de tenir diferents colors cal que tinguin en comú més d'un punt de la frontera. Afegir un sol punt, doncs, no fa variar aquesta propietat. Aquest resultat és interessant, ja que veiem que calen la mateixa quantitat de colors per pintar un mapa en un globus terraqüi que en un planisferi. En el cas del tor les coses són diferents. Prenem, abans de tot, unes definicions prèvies sobre superfícies topològiques, que és el camp en el que ens mourem. Recordem, però, que una superfície topològica és una varietat topològica de dimensió 2, és a dir, un espai topològic de Hausdorff[8] amb una base numerable[9] i tal que tots els seus punts tenen un entorn obert homeomorf a $\mathbb{R}^2$. També cal destacar què volem dir quan determinem que una superfície topològica té vora: tots els punts de la superfície tenen un entorn obert homeomorf a un obert

[7]Sobre una esfera a la que li traiem el punt p i tangent a un pla pel punt antipodal a aquest, és l'aplicació que projecta cada punt de la superfície esfèrica en la direcció que l'uneix amb p sobre aquest pla.

[8]Espais tals que donats dos punts qualssevol es poden definir entorns oberts que els continguin i siguin disjunts.

[9]Tot obert de l'espai es pot expressar com la unió d'oberts pertanyents a un conjunt numerable.

de $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Veiem altres conceptes per acabar d'introduir la teoria que tractarem:

<u>Definició:</u> En un espai topològic X podem definir un triangle T com un homeomorfisme $\varphi : \triangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow T \subseteq X$ on $\triangle \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

<u>Definició:</u> Una triangulació d'una superfície S és una família de triangles $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ tal que cada T_i és un triangle de la superfície, $S = \bigcup_i T_i$ i pel cas en què la intersecció entre dos triangles sigui no buida, aquesta intersecció serà només d'un punt.

<u>Definició:</u> Sigui S una superfície topològica triangulable. Es defineix la característica d'Euler per la triangulació τ com $\chi(\tau) = V - E + C$ on V és el nombre de vèrtex, E el nombre d'arestes i C el nombre de cares triangulars de la triangulació.

Les superfícies topològiques que tractarem poden definir-se com superfícies poligonals. Aquestes superfícies es defineixen a partir d'un polígon de $2n$ costats i el que anomenem *paraula*: un conjunt de n parelles de lletres disposades en un cert ordre que ens indicarà de quina manera "enganxem"els costats del polígon per tal de formar la superfície que volem definir. Cada parella de lletres pot sortir de dues maneres: una parella on les dues lletres tenen el mateix sentit (a i a) o una parella on una de les lletres es troba en el sentit invers (a i a^{-1}). D'aquesta manera, a cada costat del polígon li associem una lletra de la paraula de forma que si una lletra segueix una altra en la paraula les arestes a les que corresponen són adjacents tenint en compte el seu sentit. La superfície topològica serà l'àrea del polígon un cop unim les arestes que corresponen a la mateixa lletra de manera que en el moment de la unió els sentits de les fletxes (tal i com veiem en la següent figura) coincideixi:

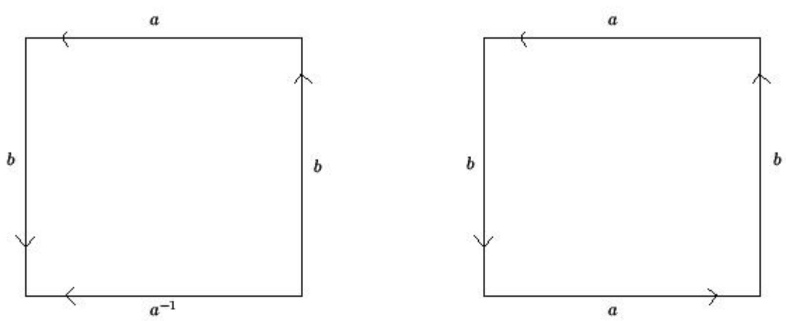


Figura 8: A l'esquerra, superfície poligonal amb la paraula $aba^{-1}b$, que es correspon amb l'ampolla de Klein. A la dreta, superfície poligonal amb la paraula $abab$ que es correspon amb un pla projectiu.

<u>Definició:</u> Quan totes les parelles de lletres que apareixen a la paraula són d'una lletra i la seva inversa, diem que la superfície és orientable. Si existeix com a mínim una parella de lletres on ambdues són iguals diem que la superfície és no orientable.

Existeixen tres tipus de superfícies anomenades superfícies normals, que són aquelles que es defineixen amb les paraules:

- $A_0 = aa^{-1}$, es tracta de la S^2.
- $A_g = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, es tracta de la unió de g tors.
- $B_g = a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g = a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$, es tracta de la unió de g plans projectius.

El Teorema de classificació de superfícies estableix que qualsevol superfície S connexa[10] i compacta[11] definida per una paraula, té que existeix un homeomorfisme entre S i una superfície normal. Per tant, podem fer la següent definició:

Definició: Donada una superfície S connexa i compacta definida per una paraula, anomenem gènere de la superfície al nombre g corresponent segons a quina superfície normal és homeomorfa S.

Per a superfícies de gènere g es té que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } S \text{ és orientable} \Longrightarrow \ \chi(S) = 2 - 2g \\ \text{Si } S \text{ és no orientable} \Longrightarrow \ \chi(S) = 2 - g \end{array}$$

Veiem alguns exemples de superfícies topològiques en la següent taula:

Nom	Paraula	Orientable?	$\chi(S)$	Colors
Esfera	aa	Sí	2	4
Tor	$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$	Sí	0	7
Triple tor	$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}$	Sí	-4	9
Ampolla de Klein	$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1$	No	0	6
Pla projectiu	aa	No	1	6

Taula 1: Taula de superfícies topològiques i nombre suficient de colors per pintar-hi mapes. Veiem les imatges a la Figura 9 de la plana següent.

Com hem sabut per a cada superfície el nombre de colors suficient? En el cas d'una superfície tancada, ja sigui orientable o no, amb gènere positiu, és suficient la quantitat de colors per pintar un mapa que ve donada per: $p = \left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}\right]$ on els claudàtors indiquen la part sencera. Com que per superfícies orientables es té que $\chi(S) = 2 - 2g$ podem dir que en aquest cas el nombre suficient de colors per pintar un mapa ve donat per $p = \left[\frac{7+\sqrt{1+48g\chi}}{2}\right]$.

[10]Superfície que no es pot expressar com la unió disjunta d'oberts continguts en aquesta.

[11]Pel cas que ens ocupa (ens trobem en espais euclidians) superfície tancada i acotada.

Aquesta última formula es coneix com conjectura de Heawood, i va ser conjecturada al 1890 i demostrada per Gerhard Ringel i J.T.W. Youngs al 1968 per als casos de figures orientables i no orientables sense vora. Existeix, però, una excepció: l'ampolla de Klein, que tot i tenir característica d'Euler nul·la, i doncs necessitaria set colors segons la formula que hem especificat, s'ha demostrat que sis colors són suficients. [14]

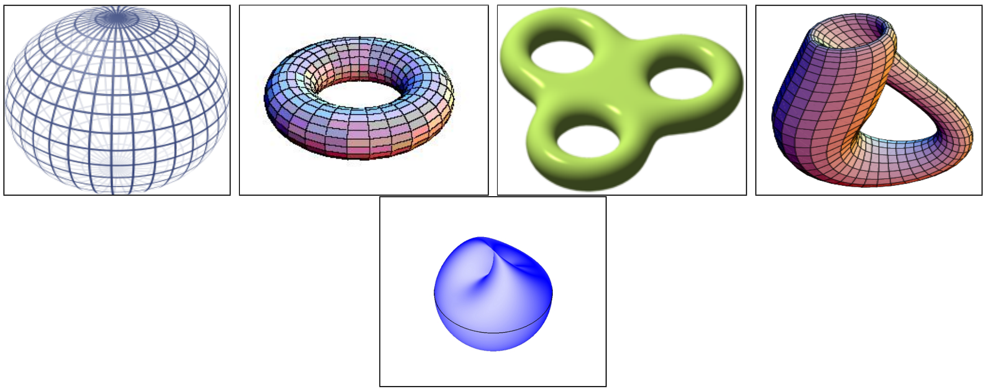


Figura 9: D'esquerra a dreta a la fila superior: esfera, tor, triple tor i ampolla de Klein. Inferiorment pla projectiu.

Una pregunta que pot resultar més interessant és: existeix algun "teorema dels quatre colors" per a l'espai tridimensional? És a dir, podem posar una cota superior al nombre de colors necessaris per pintar diferents regions de volum en l'espai euclidià? La resposta és que, de forma general, aquesta cota no existeix, i doncs necessitarem infinits colors. El germà de Francis Guthrie, Frederik Guthrie, a més de ser el fundador de la *Physical Society* al 1874, va ser la primera persona a conjecturar que el teorema dels quatre colors no es podia generalitzar a la tercera dimensió. Heinrich Tietze (1880-1964) va ser un matemàtic austríac que va dedicar la seva carrera a investigacions topològiques. Entre d'altres coses, va proposar un exemple que val·lida la conjectura de Frederik, construint un cas particular de "mapa"en tres dimensions que necessita tants colors com es vulgui per pintar-lo. Cal destacar que quan ens referim a la tercera dimensió no ens referim a superfícies que es generen en aquest espai, com l'esfera, el tor o l'ampolla de Klein que hem tractat abans. Ens referim a pintar regions amb volum de l'espai de forma que no coincideixin els colors en regions adjacents. Ara les fronteres es converteixen en superfícies.

En la Figura 10 veiem un cas en el qual necessitem 10 colors diferents, però fent un tractament anàleg per la quantitat de barres que vulguem s'arriba fàcilment a la conclusió de que no hi ha un nombre suficient de colors per pintar qualsevol "mapa"a l'espai: suposem que aquest nombre de colors suficient si que existís i, evidentment, és finit. L'anomenarem n. És evident que $2(n+1) > n$. Agafem $n+1$ barres de colors diferents i li superposem de la mateixa forma que hem vist a la figura un conjunt de $n+1$ barres iguals a sobre. Veiem, doncs, que necessitem $2(n+1)$ colors per pintar aquest "mapa", contradient el fet de que n colors eren suficients. [15]

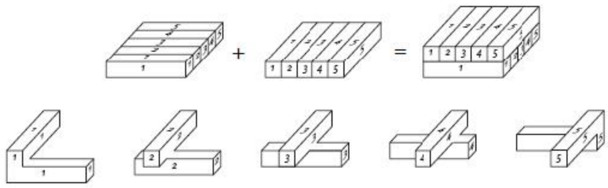


Figura 10: Disposició d'objectes per demostrar que no hi ha cota de colors necessaris a la tercera dimensió.

A l'apartat F de l'Annex 2 trobem un guió d'activitat per tal de que alumnes de l'ESO descobreixin aquestes propietats. Per la senzillesa del teorema resulta un exercici molt accessible i a més ajuda a interioritzar les interseccions entre fronteres de figures i particions del pla.

1881: Logaritmes, estadística i llei de Benford

"Jo mai he vist un logaritme caminant pel passadís."
- company de classe de matemàtiques de Bertrand Russell
a la seva professora, criticant la utilitat del que s'ensenyava.

Era l'any 1881 quan l'astrònom i matemàtic Simon Newcomb (1835-1909), consultant el seu llibre de logaritmes (en aquella època representaven una eina indispensable per qualsevol persona propera al treball amb xifres) s'adonà de que les primeres planes es trobaven més desgastades per haver-les fet servir més que la resta. Això equival a veure que es consultaven molt més els logaritmes de nombres que començaven per la xifra 1 que per qualsevol altra. Doncs, Newcomb va deduir que els nombres que provenien de la observació d'astres, que eren els que es feien servir a la seva feina, no són equiprobables, i els que comencen per la xifra 1 apareixen amb més freqüència. El següent dígit més freqüent és el 2, després el 3 i així successivament fins al 9, que és el menys freqüent. D'aquesta forma, enuncià: "la llei de probabilitat d'ocurrència de nombres és tal que les mantisses[12] dels seus logaritmes són equiprobables", tot i que va fer-ho a mode de conjectura, doncs no aportà cap demostració ni argument validat més que l'observació que acabem d'exposar. [17]

[12]Un nombre x en base b s'escriu de la forma $x = m \cdot b^q$, on q és un nombre enter anomenat *exponent* i $m = \pm 0.a_1 a_2 ... a_t ...$ és el que anomenem *mantissa*, on els a_i són nombres naturals menors estrictament que b. [16]

Ja no va ser fins al 1938 que es va reprendre el fil en quant a aquesta qüestió, moment en el que el físic Frank Benford (1883-1948), treballador de General Electric, se n'adona del mateix patró d'aparició de l'1 com a primera xifra d'una quantitat de nombres més gran que la resta de xifres. Va estudiar 20.229 nombres que provenien de 20 tipus de mostres de tipus més variats: longituds de rius, direccions postals de persones, constants i magnituds físiques, estadístiques d'esports, defuncions en desastres... A partir d'aquestes dades i considerant que comptava amb una mostra bastant significativa, va dibuixar un gràfic de freqüències on observava una forma semblant a la d'una funció logarítmica, i és aleshores quan, després d'alguns ajustos numèrics, arriba al que anomenà "llei dels nombres anòmals de Benford"o "llei de Benford"que diu que la probabilitat de que un nombre tingui com a primera xifra el valor d és $P(d) = log(1 + \frac{1}{d})$. [2] D'aquesta forma postula que la probabilitat de que la primera xifra en un conjunt de dades sigui 1 és del 30% aproximadament, la probabilitat de que sigui el 2 és del 17,6%, la del 3 és del 12,5%, la del 4 és del 9,7% i així successivament si apliquem la fórmula anterior. Amb aquest estudi, però, no feia cap demostració ni explicava els fets. Va ser al 1996 quan arribà, de la mà de Ted Hill, una demostració matemàtica satisfactòria relacionada amb teoremes del límit central i el comportament de les mantisses en les multiplicacions de valors aleatoris.

Raonant una mica, veiem que és bastant lògic que les freqüències tinguin aquest patró en nombres que no són totalment aleatoris, sinó que provenen d'algun tipus de comptatge o enumeració. Quan comencem a comptar amb els nombres naturals (ignorem el cero) i arribem al 9 tenim la mateixa freqüència per totes les xifres. Després continuem amb el deu, i no tindrem la mateixa freqüència un altre cop en totes les xifres fins que no arribem al 99. D'aquesta manera veiem que, fins que avançant en els nombres naturals no portem una quantitat de nombres igual a una potència de deu, no tenim igualtat en les freqüències en quant a la primera xifra, el que fa pensar en algun tipus de relació amb el logaritme en base decimal, a més de fer evident que sigui més complicat tenir més nombres que comencen per una xifra més elevada que no més baixa.

De tota manera, cal destacar que la llei de Benford no es compleix en qualsevol conjunt de nombres que trobem. Per exemple, si fem una estadística fent servir els números de telèfon que tenim guardats a la nostra agenda, excepte alguns d'informació o d'emergències, pràcticament tots començaran pel sis, pel nou o pel set si són força nous. Un altre exemple és l'altura d'un col·lectiu arbitrari de persones o el seu coeficient intel·lectual, que segueixen una distribució normal. Tot i així, si recombinem aquestes dades amb altres que sí compleixen la llei de Benford, la distribució resultant de la unió d'ambdós tipus de dades és més semblant a la logarítmica de Benford.

Alguns exemples de dades que s'ha observat compleixen la llei de Benford són:

- Vots per un partit polític en els diferents censos d'una regió.

- La quantitat de factures emeses per una companyia de telèfons a tots els seus clients.
- La quantitat de factures individuals de cada client enregistrades en un hipermercat durant un dia.
- Els pagaments per sinistre que fa una companyia d'assegurança d'automòbils.

A més de curiosa, la llei de Benford és molt útil: al 1994 Mark Nigrini, professor de comptabilitat de Dallas, proposa fer servir aquest resultat com a mecanisme analític per detectar irregularitats en comptes bancaris i altres dades referents a l'economia. Recentment va crear un programa en llenguatge Java per detectar quines dades encaixen i quines no amb la llei de Benford. A Espanya, Juan M.R. Parrondo va estudiar si la llei de Benford funciona amb la recaptació econòmica a cadascun dels cinemes espanyols durant l'any 1997 i amb la venta de revistes i diaris, confirmant de nou l'aparició d'aquesta distribució. [17]

Una altra utilitat d'aquesta llei pot ser treballar l'estadística, els logaritmes i el coneixement dels nombres amb activitats que exposem en l'apartat G de l'Annex 2.

S: XIX: El tres en ratlla, factorials i el grup diedral

"La bellessa es troba fortament
lligada amb la simetria"
– Hermann Weyl

Podríem començar aquest apartat parlant dels inicis de l'àlgebra moderna (o també anomenada àlgebra abstracta), que comprèn l'estudi de les estructures algebraiques: cos, anell, grup i espai vectorial, entre d'altres. [4] Evariste Galois (1811 – 1832) va ser un gran matemàtic francès que abans de tenir 21 anys (edat a la que va morir) va donar les condicions suficients i necessàries perquè una equació pogués ser resolta per radicals. És en aquest personatge on podem situar els inicis de l'àlgebra abstracta, ja que introdueix el concepte de grup a la teoria d'equacions. Després d'ell, matemàtics com Ernst Kummer (1810-1893) o Leopold Kronecker (1823-1891) conduiran les seves idees a l'estudi d'estructures algebraiques abstractes. Amb el temps, la teoria de conjunts (part de la matemàtica que estudia les propietats de les col·leccions d'objectes matemàtics) envaeix l'àlgebra moderna, iniciant un procés d'abstracció formal i generalització ja al segle XX, en els anys que es situen entre les dues guerres mundials. Com a resultat obtenim un tipus d'àlgebra que no té restriccions en quant al tipus d'elements amb els que treballa: tant podríem estar tractant amb nombres, com amb matrius, funcions continues o polígons del pla.

En aquesta línia, l'àlgebra envaeix el camp de la geometria. Molts dels conceptes topològics i de geometria lineal analítica apareixen en aquesta època, com són els vectors, definits com a tals i estudiant les seves propietats, generadors, bases, etc. o els espais Haussdorf, anomenats així per Felix Haussdorf, matemàtic alemany que va viure entre 1868 i 1942.

És en aquest marc històric on podem ubicar l'aparició i desenvolupament del que anomenem grup diedral. Veiem algunes definicions prèvies per anar construint la teoria que se'ns farà necessària en aquest apartat:

<u>**Definició:**</u> Un grup és un conjunt G amb una operació interna:

$$GxG \longrightarrow G$$
$$(a, b) \longrightarrow a \cdot b \equiv ab$$

tal que satisfà:

- és associativa: $(ab)c = a(bc)$,
- existeix element neure e en G tal que per a tot a de G: $ea = ae = a$,
- existeix element invers: per tot a de G, existeix a^{-1} en G tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

<u>**Definició:**</u> Considerem un conjunt de n elements σ_i de G disposats en un ordre $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$. Anomenem permutació a una aplicació $P_{ij} : G^n \longrightarrow G^n$ tal que $P_{ij}(\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_j, ..., \sigma_n) = (\sigma_1, ..., \sigma_j, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$. És a dir, és una aplicació que intercanvia l'ordre de dos elements d'un cert conjunt. La composició de permutacions de diferents permutacions és el que entenem per combinació dels elements del conjunt.

<u>**Definició:**</u> Considerem un polígon de n costats al pla, i considerem $G = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ el conjunt dels seus vèrtex. Definim una rotació d'angle $\beta = \frac{365^{\mathrm{o}} t}{n}$, amb t pertanyent a $0, 1, 2, ..., n-1$ com la composició de t vegades la permutació P tal que avança tots els elements una posició i el primer element el passa a la última posició.

Observem que aquesta composició és una isometria (aplicació entre espais mètrics invariant per distàncies), ja que la distància entre els vèrtex no varia. També podem observar que la composició d'n vegades la rotació és la identitat.

<u>**Definició:**</u> Suposem ara el cas particular en el qual el polígon és un quadrat. Definim una simetria respecte un eix que passa per dos vèrtex oposats a la transformació isomètrica tal que permuta els dos vèrtex pels que no passa l'eix i deixa invariants els vèrtex pels que sí passa.

S'observa fàcilment que la composició de dues vegades una simetria és igual a la identitat, independentment d'on col·loquem l'eix.

En un quadrat podem determinar, segons aquesta definició, dos eixos de simetria (les dues diagonals). Si fem simetries amb respecte aquests eixos, veiem que són iguals llevat de rotacions. És a dir, composant una simetria per un determinat eix amb una rotació de 90, 180 o 270 graus tenim una simetria per un altre eix de simetria diferent. Això ens motiva la següent definició:

Definició: Anomenem grup diedral d'un polígon A d'n costats al grup D_n tal que conté totes les possibles isometries $f : A \longrightarrow A$ del pla. Doncs, és el grup de totes les possibles combinacions entre rotacions i simetries.

Per exemple, i pel que ens interessa, el grup diedral del quadrat és:

$$D_4 = \left\{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3\right\}$$

on ρ és una rotació de 90 graus en sentit antihorari i σ és una simetria.

Pel que acabem de veure a les definicions de rotació i simetria i l'equivalència entre les seves composicions, és evident que el grup diedral compleix la definició de grup. El que volem fer en l'activitat que proposarem és veure aquestes equivalències, i per això farem servir el tauler d'un joc de tres en ratlla, que té forma quadrada. Ja a l'Antic Egipte es jugava a jocs de tauler. [2] A la seva cultura aquests tipus de joc eren força habituals, i es creu que aquest va ser l'inici de totes les variants dels jocs de tauler posicionals i d'estratègia. Tot i que molt segurament les normes han anat variant al llarg dels segles, diversos arqueòlegs situen l'inici del 3 en ratlla als voltants de l'any 1300 a.C. Per fer les activitats amb les que introduirem el grup diedral considerarem la normativa més estàndard: el joc es disputa en un tauler 3x3 amb dos jugadors X i O i es tracta de marcar una casella per torn, guanyant qui abans posi tres marques en línia recta ja sigui vertical, horitzontal o una de les diagonals principals.

A més, se'ns farà necessari (i aprofitarem per) treballar alguns aspectes de combinatòria que ens portaran als factorials i a una regla fonamental en el comptatge de casos possibles:

Regla del producte de la combinatòria: Suposem que hem d'efectuar k tries successives on en cada tria tenim m_i possibilitats, per $i = 1, ..., k$. El nombre total de combinacions possibles en les tries és $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$.

La idea és debatre i treballar el comptatge de possibles jugades. Per fer-ho, farem servir permutacions, rotacions i simetries. En un tauler de 3 en ratlla convencional tenim nou caselles. En el primer torn, el jugador X té 9 possibilitats per posar la seva fitxa. En el segon torn, el jugador O té 8 possibilitats. Al tercer torn, el jugador X en té 7, i així successivament. Si considerem totes les possibilitats de joc en cas que acabem omplint el tauler, per la regla del producte que hem exposat tenim 9! possibilitats. En aquesta quantitat de jugades estem comptant, efectivament, les que acaben en taules (no guanya cap jugador) i totes aquelles que guanya un o altre jugador amb totes les possibles formes d'omplir totalment el tauler. Si volguéssim calcular de quantes formes es pot acabar una partida, evidentment hauríem de comptar moltes menys, ja que en aquelles on un dels dos jugadors guanya es deixen caselles sense omplir, i no cal considerar totes les possibles formes d'omplir el tauler un cop acabada la partida. Com que només volem fer servir els raonaments que explicitem per tal de comptar disposicions del tauler, considerarem les possibles posicions de les fitxes fins omplir el tauler sencer encara que un dels jugadors ja tingui la victòria. Però com podem calcular les jugades equivalents? És a dir, quantes disposicions de fitxes tenen exactament la mateixa estructura? Quan diem mateixa estructura entre dues jugades ens referim a que donada una casella amb una determinada fitxa, la repartició de les fitxes del seu voltant és la mateixa en tipus de fitxa (X i O) i en ordre. Esquematitzant, per considerar una jugada equivalent o no a una altra ens basarem en els següents criteris:

- Si les fitxes es posen d'una determinada manera amb dos possibles ordres: com que estem donant importancia a l'ordre, dues jugades que deixen el tauler igual al final de la partida però amb l'ordre de col·locació de les fitxes diferent les considerarem possibilitats diferents.

- Són equivalents dues jugades quan una de les jugades és idèntica (també en ordre) a una altra després de rotar el tauler un angle de 90º, 180º o 270º.

- Són equivalents dues jugades quan una de les jugades és idèntica (també en ordre) a l'altra després de fer una simetria axial per una de les dues diagonals del tauler. Com que hem vist que una simetria és igual a una altra excepte per rotació podem suposar que només hi ha una simetria.

Per calcular el cardinal de les possibilitats de jugada considerant aquestes equivalències, primer haurem de calcular quants cops tenim cada jugada. Aquesta quantitat serà el cardinal del grup diedral $D_4 : 8$, ja que cada disposició de les fitxes la tenim en la forma "original" i en les seves possibles transformacions amb les aplicacions del grup diedral. Per tant, la quantitat de jugades possibles que tenim serà $\frac{9!}{8} = 45.360$, que representa el 12.5% de les possibilitats totals. Per fer aquest raonament estem fent servir nombres factorials, simetries, rotacions, combinacions de simetries i rotacions i equivalència entre aquestes combinacions (per tal de poder definir bé el grup diedral).

A l'apartat H de l'Annex 2 trobem un guió/qüestionari per portar a l'aula i treballar, mitjançant les preguntes adequades i de forma molt guiada, aquests conceptes de forma intuïtiva per tal de calcular de quantes formes es pot disposar un tauler de 3 en ratlla.

S: XIX-XX: Laberints, postulats i índex d'una corba

"Pel laberint es perden fàcilment
els fets coneguts si no es planifiquen."
- Dmitri Mendeléyev

Un postulat és un enunciat, derivat de conceptes definits prèviament, que es considera vàl·lid sense fer cap demostració i que serveix com a base per a raonaments i enunciats posteriors. [4] A l'actualitat, quan es llegeix un estudi matemàtic sobre conceptes que no es coneixen, primer és necessari saber les definicions i postulats a partir dels quals es treballa. Avui dia no hi ha diferència de significat entre axioma i postulat, tot i que en els inicis del formalisme matemàtic els axiomes eren més bàsics i suposaven la base a partir de la qual es feien els postulats, que es demostraven a partir d'axiomes però encara no rebien el nom de teorema. Ja als *Elements* d'Euclides trobem els primers axiomes. Els filòsofs grecs van ser els primers en qüestionar-se què és un punt, què és una recta, etc. i estableixen així la necessitat de definicions i convenis per tal de treballar raonadament a partir d'unes bases que fan el paper de veritats irrefutables i universals. Aquesta manera de raonar va ser el que va permetre a la matemàtica no només néixer sinó convertir-se en el que és avui dia.

Al període que podem anomenar "Matemàtica Il·lustrada", que va del 1707, on té lloc el naixement del matemàtic Leonhard Euler, fins al 1804, on trobem la coronació de Napoleó Bonaparte com emperador de França, els matemàtics continuen treballant en els conceptes del segle anterior, creant múltiples aplicacions de la matemàtica a la enginyeria moderna i a l'astronomia. Això no va fer, però, que la comunitat matemàtica de l'època estigués satisfeta. A finals del segle XVIII apareix una onada de pessimisme: potser les eines matemàtiques les estàvem aplicant "tant"que l'essència primordial de la ciència mare s'estava perdent. El formalisme, l'abstracció i la generalització s'estaven convertint en aspectes innecessaris per "fer matemàtiques". Durant tot el segle XVIII el coneixement s'havia basat en l'experimentació i l'observació. A partir del segle XIX, però, es comença a dependre cada cop més d'un conjunt de conceptes abstractes, complexos i generals, que havien de ser transmesos de la manera més formal possible. Històricament, l'aparició d'aquesta filosofia segueix al racionalisme: corrent filosòfica que succeeix en l'Europa Occidental durant els segles XVII i XVIII i que defensa el predomini de la raó en l'adquisició de coneixement. Una anàlisi o reflexió sobre el racionalisme està fora dels objectius d'aquesta exposició, però si que ens centrarem en com el mètode racional pauta d'alguna forma el pensament matemàtic fins l'actualitat. Per començar, estableix una terminologia pròpia que esquematitza les eines necessàries per al raonament matemàtic:

- Idees primeres: són les idees o conceptes dels que no s'especifica cap definició, ja que el fet de fer-ho portaria a una cadena de definicions necessàries que no tindrien fi. Doncs, l'enteniment d'aquests conceptes no venen darrere de la lectura o assimilació d'una definició sinó d'un procés mental intuïtiu que ens fixa les idees i la seva comprensió. Per exemple, un punt. És ben sabut que Euclides el defineix (i molts altres matemàtics així l'expliquen) com "allò que no té parts". Però, què és "allò", què és "part"? Podríem considerar, doncs, que la idea de punt és bàsica i intuïtiva i la definició es dóna com una explicació del que realment ja tenim interioritzat.

- Conceptes no primaris: són aquells que es defineixen. Una bona definició ha de tenir els elements necessaris sense aportar informacions supèrflues. Podem distingir-ne de dos tipus: definicions explícites (en un conjunt d'elements es donen les característiques particulars d'allò que definim, com per exemple els nombres primers dins dels nombres naturals) i definicions per abstracció (aquelles que sorgeixen d'observar una característica comú a diversos ens matemàtics).

- Axiomes o postulats: ens referim a aquells enunciats que especifiquen una propietat o criteri i que no té demostració. La manca d'aquesta prova pot donar-se bé per evidència o bé perque es tracta d'un resultat acceptat per conveni. Els axiomes o postulats corresponents a una teoria han de cumplir quatre condicions:

  - Han de ser independents: uns no poden ser conclusions dels altres.
  - Han de ser compatibles: no poden presentar contradiccions.
  - Han de ser clars i no deixar lloc a dubtes.
  - Han de reflexar les propietats del món físic percebudes per nosaltres.

  A l'antiguitat, un postulat era derivat dels axiomes. A l'actualitat, axioma i postulat poden considerar-se sinònims.

- Arguments: és el procés mitjançant el qual es passa d'una col·lecció de resultats degudament justificats anteriorment a uns altres en forma de proposicions.

- Teoremes: és una proposició o enunciat que afirma unes propietats o resultat de forma justificada per un raonament o demostració.

- Demostracions: són cadenes de raonaments que sorgeixen d'un conjunt d'hipòtesis fins arribar a una afirmació, que és la que es pretén demostrar. Demostració, justificació i prova són sinònims en les matemàtiques.

- Llenguatge matemàtic: és característic en els enunciats i demostracions que es fan en matemàtiques. Requereix dues condicions bàsiques: precisió i brevetat. Aquestes porten a la utilització del simbolisme, que a més és universal.

Podríem tractar, de pasada, tipus de demostracions, tipus de teoremes, etc. però estendríem massa l'exposició pel que volem fer. Simplement destaquem que aquestes característiques del raonament matemàtic són essencials a l'hora de treballar més profundament en les matemàtiques i que formen la base del tipus de raonament i la filosofia que caracteritza aquesta ciència.

Continuant en la línia històrica amb la que començàvem aquest apartat, sobretot referida a l'ús dels postulats com a base de qualsevol estudi matemàtic, podem destacar les figures de Giuseppe Peano (1858-1932), matemàtic, lògic i filòsof italià i David Hilbert (1862-1943) matemàtic alemany. Són coneguts els axiomes de Peano, redactats a la seva obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* al 1889, on a partir de cinc enunciats descriu el conjunt dels nombres naturals. Es pot situar en aquesta publicació, juntament amb el procés d'aritmetització de l'anàlisi, el detonant que porta a una gran part de la matemàtica que s'estudiava (exceptuant la geometria) a fonamentar-se en un marc teòric purament axiomàtic. Al 1899, Hilbert publica *Fonaments de Geometria*, on descriu de forma rigorosa la geometria euclidiana a partir de 21 axiomes (avui coneguts com axiomes de Hilbert) que parteixen de tres nocions primitives: punt, recta i pla; i de sis relacions definides: estar a sobre, estar contingut, estar entre, ser congruent, ser paral·lel i ser continu. Aquesta obra és la que fa que els geòmetres posteriors del segle XX dotin a la geometria del caràcter formal que té a l'actualitat, moment en el que la matemàtica ja era acceptada com una forma de pensament axiomatitzat. A principis d'aquest segle, però, va haver-hi una crisi entorn a aquesta tendència: l'axiomatització de la matemàtica no era unànime, i es classificaren els matemàtics en tres grups distingits segons la seva forma d'entendre la matemàtica:

- Els lògics: defensen el caràcter típic de la lògica per arribar d'idees primeres i postulats a teoremes, dels que passen a nous teoremes, si escau. Es neguen a creure en figures i analogies entre les matemàtiques i els objectes físics reals. Un bon representant d'aquesta tendència és Bertrand Russell, qui va treballar en la formalització de la matemàtica sencera a símbols lògics.

- Els formalistes: són els matemàtics que apostaven per reduir a símbols matemàtics sense significat intuïtiu, no només els objectes, sinó també els enunciats, convertint-los en normes d'utilització d'aquests símbols. Un representant és David Hilbert, de qui ja hem parlat.

- Els intuicionistes: contràriament als lògics, aquests pensen que és la lògica la que es basa en la matemàtica i no a l'inrevés. Doncs, busquen analogies amb el món físic de tot allò que volen estudiar matemàticament. Un representant important, pel fet de a més ser considerat el pare, és l'holandès Luitzen Egbertus Brouwer, de qui parlarem en el següent apartat.

Kurt Gödel (1906-1978), matemàtic austríac, publica i demostra al 1931 un enunciat que afirma que, en un sistema formulat de forma estrictament lògica, hi haurà sempre proposicions que no són ni certes ni falses. En altres paraules, en tot sistema hi ha afirmacions ben definides que no poden ser ni demostrades ni refutades. Això fa que alguns matemàtics consideressin oportú revisar les bases de la lògica clàssica per tal d'elaborar una nova teoria. Aquest pensament es coneix amb el nom de *Metamatemàtica*. Un altre fenomen relacionat amb la construcció de les bases de la matemàtica és Nicolas Bourbaki, pseudònim rere el qual no hi ha una persona sinó un grup de joves matemàtics francesos que es fundà a l'any 1933. El grup va intentar elaborar un tractat completament independent i extremadament lògic i rigorós de tota la matemàtica coneguda fins aleshores mitjançant la publicació de llibres sobre topologia, teoria de conjunts, àlgebra, etc. Els membres de Bourbaki creien que els matemàtics més vells s'aferraven a les pràctiques antigues, pel que van decidir que a l'edat dels cinquanta anys havien d'abandonar el grup. Aquest equip publica un tractat anomenat *Elements de Matemàtica*, on s'utilitza un plantejament axiomàtic i un desenvolupament abstracte paral·lel al que es fa servir avui dia en els camps d'investigació més alts de les matemàtiques, i doncs es considera un tractat precursor a les tendències dels estudis actuals i revolucionari de l'època. Bourbaki, doncs, no va aportar res en quant a teories o resultats, però va suposar una nova visió de les matemàtiques en quant a organització, claredat, terminologia, notació i estil. Actualment, l'*Association des Collaborateurs* de Nicolas Bourbaki encara organitza de forma anual seminaris de Bourbaki.

Tot i haver-hi les controvèrsies que plantejàvem, el desenvolupament de les matemàtiques durant el segle XX va ser enorme, tant a nivell teòric com a nivell pràctic, ampliant el camp de treball de les matemàtiques i consolidant els estudis antics. Actualment la matemàtica continua creixent, aparentment, sense límits.

El plantejament axiomàtic, per tant, és un aspecte bàsic de les matemàtiques, però no es troba a l'abast de tothom, ja que es fan necessàries, entre altres coses, capacitat de raonament abstracte i visualització de conceptes que no es troben al món físic o real. Per tant, portar a una aula de secundària propostes que es basin en raonaments d'aquest estil és, com a mínim, complicat, però a la vegada interessant i curiós, ja que no deixem d'estar parlant de la base del raonament matemàtic. Com que qualsevol aspecte que trobem al món real és apte per definir conceptes i regles i consolidar teories o classificacions, en aquest apartat hem decidit fer-ho amb un element que sigui atractiu i fàcil per portar-lo a l'aula: els laberints. De passada, tractarem un altre concepte matemàtic que hem considerat menys interessant per fonamentar la contextualització històrica:

Definició: Sigui γ una corba tancada i p un punt que no es troba sobre el recorregut de la corba. Es defineix l'índex de la corba γ respecte del punt p com el nombre de voltes senceres que fa la corba al voltant del punt, considerant com a positiu el sentit antihorari i negatiu l'horari. En altres paraules, és la quantitat de voltes completes que faríem sobre nosaltres mateixos si, situats sobre el punt i sense poder girar el coll, volguéssim recórrer amb la vista un punt que fa un recorregut sencer per sobre de la corba, tot tenint en compte el sentit de gir de la corba.

Un mode o idea per treballar aquests conceptes el trobem a l'apartat I de l'Annex 2.

1909: Continuïtat, la bola peluda i teorema del punt fix de Brouwer

"Un matemàtic és una màquina
que transforma el cafè en teoremes."
- Paul Erdös

El teorema del punt fix de Brouwer pertany a la família dels teoremes de punts fixos, que enuncien que sota certes hipòtesis relatives a una funció f aquesta compleix que té un punt fix, és a dir, que existeix x_0 en el seu domini de definició tal que $f(x_0) = x_0$. Ha estat considerat per molts matemàtics com un resultat "sorprenent i útil"de la topologia.

Veiem les arrels històriques d'aquesta branca de les matemàtiques per poder introduir les del teorema. [4] El primer cop que es fa servir la paraula "topologia"(del grec, *"ciència de la posició"*) va ser en la *Introducció a l'Estudi de la Topologia*, de Johann Benedict Listing (1808-1882), matemàtic alemany. Alguns matemàtics, però, consideren que els inicis de la topologia es remunten a la resolució de certs problemes per Euler o Moëbius, com el dels ponts de Könisberg al 1735, o fins i tot a les idees de límit i de continuïtat, que avui dia s'estudien des d'una perspectiva purament topològica i que tenen els seus inicis ja a l'Antiga Grècia. La seva formalització, però, no va ser tant aviat. A finals del segle XIX es definia com la branca de la geometria que estudia les propietats invariants per deformacions continues dels ens geomètrics. Alguns autors fixen en el temps el naixement de la topologia l'any 1895, quan el matemàtic francès Jules Henri Poincaré (1854-1912), en el seu *Analysis Situs*, desenvolupa de forma sistemàtica certs raonaments topològics tot distingint espais topològics no homeomorfs. Poincaré va destacar pels seus estudis sobre sistemes dinàmics i moviment, i va demostrar que certs problemes analítics es podien resoldre buscant els punts fixos d'una funció d'un espai en ell mateix. Va ser al segle XX quan aquesta branca de la matemàtica pren autonomia i es divideix en topologia conjuntista i topologia algebraica. [18] Enllà els anys 20 d'aquest segle, el problema del punt fix continua representant una part central d'aquesta matèria. Va ser també amb Charles Émile Picard (1856-1941), matemàtic francès, i també conegut per les seves aportacions i estudis als sistemes dinàmics i a la teoria d'equacions diferencials, que aquest estudi va avançar de forma significativa. Ja abans de 1909 existien versions del teorema del punt fix de Brouwer reduïdes a casos més particulars. De fet, 20 anys abans Poincaré havia demostrat un resultat equivalent estudiant l'estabilitat del sistema solar, que el porta a fixar-se en la dinàmica del cafè en una tassa en moure una cullereta a dins. D'aquesta manera preveu que les propietats topològiques de les regions on es troben contingudes certes trajectòries són la clau en quant al seu estudi. En la dinàmica de la tassa de cafè Poincaré veu que, en el cas de trajectòries en un disc, ha d'existir necessàriament un punt fix: un punt invariant per les corrents que tenen lloc en moure's la cullereta. Al 1886 escriu un resultat anàleg al teorema del punt fix de Brouwer en la segona dimensió.

Veiem, però, la versió més general:

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) va ser un filòsof i matemàtic holandès. Es va dedicar a diversos camps de la matemàtica com la topologia, la teoria de conjunts i l'anàlisi complexa. En una fusió de filosofia i matemàtiques va ser el fundador del intuïcionisme del que parlàvem en l'apartat anterior. D'aquesta manera, defensava que un concepte existeix si, i només si, l'home el pot construir a la seva ment. Fou al 1909, però, quan Brouwer coneix a Poincaré i a altres matemàtics que estudiaven la topologia dels espais euclidians, com Émile Borel (1871-1956) i Jaques Hadamard (1865-1963), ambdós també amb francesos. Impulsat pels seus estudis, i adonant-se de la importància de conèixer les propietats topològiques dels espais euclidians $\mathbb{R}^n$, descobreix i demostra per al cas $n = 3$ el teorema sobre punts fixos que porta el seu nom. S'enuncia com segueix:

Teorema: Tota aplicació continua de $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{B}^n$ (boles tancades centrades a l'origen i de radi la unitat) té com a mínim un punt fix.

En la majoria de fonts de la bibliografia, aquest teorema data del 1909, tot i que de vegades també es pot trobar que data del 1910. Aquesta discrepància es deu a que la demostració del cas general va ser al 1910 per part del seu amic Hadamard.

Existeixen enunciats posteriors que van generalitzar el teorema. Per exemple, i tenint en compte que qualsevol espai convex[13] i compacte K de l'espai euclidià és homeomorf a una bola tancada en $\mathbb{R}^n$ i que la propietat del punt fix és invariant per homeomorfisme, es pot generalitzar el teorema per funcions $f : K \longrightarrow K$ continues on K és un espai compacte i convex de l'espai euclidià. Per tant, si col·loquem dos fulls de paper iguals un a sobre de l'altre i ara el superior l'arruguem en una pilota i el col·loquem a sobre de l'inferior, hi haurà un dels punts del full superior que es trobarà exactament superposat al mateix punt del que ho estava anteriorment. Això es demostra pel fet de que els fulls de paper són homeomorfs a una bola tancada de $\mathbb{R}^2$ i l'acció de fer una bola de paper amb el full és continua. Quan ho superposem al full inferior, estem associant a cada punt del paper superior un del paper inferior per projecció vertical, i doncs la funció f que hem modelitzat va d'un compacte K a ell mateix i homeomorf a una bola tancada de $\mathbb{R}^2$.

Juliusz Schauder (1899-1943), matemàtic polonès, generalitzà el teorema de la següent forma: tota aplicació f continua entre un convex compacte K no buit en un espai de Banach[14] en K té un punt fix.

[13] En l'espai euclidià, un objecte és convex si per a tots els parells de punts dins de l'objecte, tots els punts del segment recte que els uneix també estan dins de l'objecte. Aquesta definició té una forma més general, tot i que més endavant la tornarem a veure per al cas particular dels polígons

[14] Espai vectorial normat (que té una norma definida) i complet (tota successió de Cauchy és convergent) segons la norma definida.

Aquestes variants les afegim per curiositat, ja que el que ens interessa veure són les aplicacions que té i una forma molt atractiva de demostrar-ho:

Teorema de la Bola Peluda: A l'any 1912, Brouwer demostra un altre resultat que, a més, serveix per demostrar el teorema del punt fix enunciat tres anys abans. En llenguatge purament matemàtic, el teorema diu que, donada una bola unitària de dimensió parella en un espai euclidià de dimensió una més que la bola, no existeix cap camp de vectors continu tangent en tots els punts a la seva superfície i que no s'anul·li mai. Intuïtivament, podríem dir que si tenim una bola peluda, no podem pentinar-la de cap manera de forma que tots els pèls quedin totalment enganxats a la superfície. Això implica, per exemple, que sempre hi ha un lloc en la superfície terrestre on no bufa el vent de forma horitzontal. [2]

La demostració del teorema del punt fix de Brouwer a partir d'això que acabem de presentar es fa per reducció a l'absurd. Suposem que existeix una funció f de $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{B}^n$ que no accepta cap punt fix. Aleshores, també existeix una funcio g de $\mathbb{B}^{n+1}$ en $\mathbb{B}_{n+1}$ que no té punts fixos (podem entendre $\mathbb{B}_{n+1}$ com la unió de boles $\mathbb{B}^n$ i la funció f com la restricció de g a cadascun d'aquestes $\mathbb{B}^n$). Si sobre una bola $\mathbb{B}^m$ existeix una funció f de $\mathbb{B}^m$ en $\mathbb{B}^m$ sense punts fixos, aleshores sobre la superfície de $\mathbb{B}^m$ (és a dir, sobre S^m) existeix un camp vectorial α tal que per a tot x de S^m, $\alpha(x) = 0$. Aquest últim fet ho podem aplicar tant a la funció f com a la funció g. Pel teorema de la bola peluda, ni n ni $n+1$ poden ser parells, arribant a una evident contradicció. $\square$

Tots aquests aspectes poden tractar-se a una aula de secundària força avançada o a batxillerat, amb els materials adequats i les indicacions precises. A l'apartat J de l'Annex 2 hi trobem un model de qüestionari i la resta d'instruccions.

1933: Comptatge, nombres normals i el nombre de Champernowne

"Totes i cadascuna de les seqüències finites de paraules que es puguin imaginar es troben ocultes en algun lloc del tediós argot encadenat. Totes les cartes d'amor i totes les novel·les que mai s'hagin escrit. S'hauria de viatjar durant milers de milions d'anys llum per poder-les trobar, però hi són allà, en algun lloc."
- Hans von Baeyer

Es diu que un nombre pertanyent al cos dels nombres reals és normal quan qualsevol patró finit de nombres es produeix amb la mateixa freqüència entre els seus dígits. Van ser definits per primer cop al 1909 pel matemàtic i polític francès Émile Borel, ja mencionat en l'apartat anterior. Per motius obvis, un nombre normal ha de ser necessàriament irracional, però la implicació inversa no es compleix. Un contraexemple seria la constant de Liouville, que es defineix com $\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0.110001000000000000000001000...$ i no conté tots els patrons possibles, però tampoc és un nombre racional[19]. Un exemple de nombre normal (i un dels primers en base 10 dels que es van conèixer) és el nombre de Champernowne, escrit per primer cop per David Gawen Champernowne (1912-2000), un economista i matemàtic anglès contemporani i amic del famós Alan Turing, a l'any 1933, abans de graduar-se a la Universitat de Cambridge. La constant que porta el seu nom es defineix com un nombre decimal positiu menor que la unitat tal que les seves xifres decimals són tots els nombres naturals posats per ordre: 0,1234567891011121314151617181920... David demostra que aquest nombre és normal veient que cadascun dels nombres naturals entre el 0 i el 9 surten amb la mateixa freqüència (0,1), cadascun dels nombres naturals entre el 10 i el 99 surten també en la mateixa proporció (0,01), cadascun dels nombres naturals entre el 100 i el 999 també tenen la mateixa proporció (0,001) i així de forma successiva: tots els nombres naturals d'n xifres tenen una freqüència igual a 10^{-n}[2]. La demostració d'aquesta propietat es veu per construcció:

- Si recorrem el nombre de Champernowne, quan anem pel primer 9 ja hem vist cada xifra un cop.
- Quan anem pel 19 hem sumat a les freqüències de cada xifra 1 aparició, a més de 10 aparicions a la xifra 1.
- Quan anem pel 29 hem sumat a les freqüències de cada xifra 1 aparició, a més de 10 aparicions a la xifra 2.
- Recursivament, quan anem pel 99 haurem sumat a la freqüència de cada xifra 20 aparicions, excepte a la xifra 0, que tindrà 10 aparicions.
- Com que en algún moment del nombre de Champernowne (pot semblar paradoxal, pero es demostra que és veritat sabent que és un nombre d'infinites xifres i amb la definició que el descriu) trobarem la cadena 0000000000 (deu ceros), per exemple en el 10^{10}, veiem que es compensen les freqüències.
- Es pot continuar el raonament a partir del 100 amb un esquema anàleg de comptatge i verificar que es continuen compensant les freqüències en les xifres.
- Per demostrar que la freqüència d'aparició és la mateixa per cada nombre d'n xifres es pot realitzar un raonament anàleg i veure que el nombre de Champernowne és normal. $\square$

Un factor interessant en aquest nombre és que, tot i tenir una estructura per definir-lo realment senzilla, hi ha molts sistemes informàtics que no detecten el patró que el defineix. Una gran part dels programes que fan servir les grans computadores per detectar regularitats en les xifres d'un nombre no reconeixen aquesta seqüència. Aquest fet provocà que els estadístics de l'època encarregats d'afirmar si una seqüència és totalment aleatòria o compleix algun patró reflexionessin en quant als mètodes informàtics que feien servir. D'altra banda, hi ha més preguntes que ens podem fer referents a aquest nombre: si segueix una seqüència evident que tots podem veure però no el detecten els ordinadors, així a priori, diríem que es tracta d'un nombre algebraic o d'un nombre transcendent? Al 1937, el matemàtic alemany Kurt Mahler (1903 - 1998) demostra que és transcendent al seu tractat *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen*. La demostració és suficientment llarga com per fer només un apunt de la idea en que es basa: fa servir un teorema que afirma que, donat un polinomi no constant $p(x)$ tal que per x enter positiu dóna valors enters positius, el nombre que s'obté amb la concatenació $0.p(1)p(2)p(3)\ldots$ és transcendent[20].

A l'actualitat se sap que la constant de Champernowne en base binària també és un nombre normal. De moment no s'ha demostrat que aquest nombre sigui absolutament normal[15]. Els matemàtics conjecturen que π, e, $ln2$ i $\sqrt{2}$ podrien ser-ho, però encara no s'ha demostrat, i per tant és un estudi que continua obert i actiu[2].

A l'apartat K de l'Annex 2 trobem un qüestionari sobre el nombre de Champernowne que pretén, a més de realitzar exercicis de comptatge i de quantitats de xifres en un nombre (fets que de vegades s'han de repassar als primers nivells d'ESO en alguns grups), proposar exercicis sobre probabilitats tot ampliant els coneixements culturals sobre nombres especials de les matemàtiques.

1966: Combinatòria, construcció de cubs i la Bogeria Instantània

"Un bon passatemps val més i aporta més
a la matemàtica que una dotzena d'articles mediocres."
- John Edensor Littlewood

Frank Armbruster (1929-2013) va ser un consultor educatiu aficionat als trencaclosques. Mentre treballava en el disseny d'activitats educatives, va veure un paral·lelisme entre el funcionament d'una activitat i les regles d'un joc: la normativa de les coses que es poden fer i les que no, objectius, resolució per passos i capacitat d'estratègia. Així va ser com al voltant de 1965 començà a dissenyar trencaclosques amb finalitats educatives, a més de fer-los servir com a passatemps. La primera versió que va construir del disseny que anomenà *Instant Insanity* (que traduïm com "Bogeria instantània") data del 1966, i es pot utilitzar, entre altres coses, per fer qüestions sobre combinatòria i permutacions. *Parker Brothers*, empresa de joguines, li va comprar la llicència i va vendre al voltant de 12 milions

[15] Un nombre absolutament normal és normal en qualsevol base

d'exemplars fins al final de la dècada dels seixanta. A més d'aquest joc, té la patent d'altres construccions i disseny de joguines i trencaclosques educatius, com *Noisy Numbers*: un llibre interactiu per nens petits amb sons d'animals que ajuda a entendre els nombres naturals, jocs de construcció amb peces encaixables i taulers d'escacs magnètics[21].

En aquest apartat del treball, però, ens dedicarem a parlar de la Bogeria instantània. Aquest joc consta de quatre cubs de la mateixa mida i amb les cares pintades de quatre colors diferents seguint el següent patró:

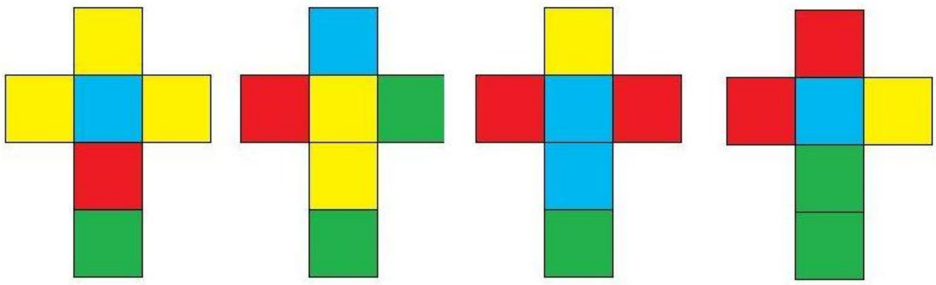


Figura 11: Distribució dels colors a la Bogeria Instantània.

Tot i que els colors podrien ser altres, han d'estar disposats de la manera que s'esquematitza a la imatge superior. Podem observar que aquesta disposició no és regular, fet que fa que l'objectiu del joc no sigui evident: col·locar els quatre cubs en fila de manera que formin un prisma de base quadrada i de forma que a cada cara lateral d'aquest prisma apareguin els quatre colors que hem disposat als cubs.

Altres versions d'aquest joc van aparèixer de forma anterior: al 1890 amb cors, trèvols, diamants i piques en comptes de colors, patentat per Frederik Schossow, sota el nom *Katzenjammer*, que es pot traduir com "commoció" o "ressaca". Durant el segle XX també van anar apareixent variants en quant als símbols que s'empraven a les cares per distingir-les en comptes dels quatre colors i amb diferents noms.

Estudiem la combinatòria del joc: cada cub té $4 \cdot 6 = 24$ orientacions possibles, ja que el podem recolzar sobre cadascuna de les seves sis cares i disposar-lo de quatre formes diferents per la rotació de la base. Doncs, el conjunt dels quatre cubs es pot posar de $24^4 = 331.776$ formes diferents. Si a més tenim en compte les posicions respectives dels cubs en la fila que formen, hem de multiplicar aquest nombre per 4!. D'aquesta manera trobem $4! \cdot 24^4 = 7.962.624$ disposicions possibles. De tota manera, hi ha moltes posicions que ens són indiferents per l'objectiu del joc. Per exemple, com es troben disposats els cubs en la fila no és rellevant. Doncs, el 4! no fa falta que el considerem en el producte de les posicions possibles. D'altra banda, si ens imaginem la disposició en fila dels quatre cubs com un prisma de base quadrada, veiem que podem el col·locar de $2 \cdot 4 = 8$ formes possibles: recolzat sobre cadascuna de les seves dues bases i en les quatre respectives posicions possibles en rotar el prisma sobre cadascuna de les seves bases. Doncs, haurem de dividir el nombre total calculat anteriorment per 8 i per 4!, el que ens dóna un total de 41.472 posicions. Segons el propi fabricant, la disposició dels colors és tal que de totes aquestes disposicions només dues són vàlides. Doncs, el mètode d'assaig i error no és gaire favorable per arribar a la solució, ja que la probabilitat d'encertar seria de $\frac{2}{41.472} \approx 0.000048$ [2]. Suficientment baixa com per pensar una forma més justificada de resoldre el trencaclosques.

A l'apartat L de l'Annex 2 trobem un guió de pràctica per tal de fer servir aquest trencaclosques, a més d'una explicació de com construir-lo a partir de la papiroflèxia, no només amb l'objectiu proposat sinó també altres variants de col·locació de cubs, i preguntes clau per resoldre la combinatòria de la construcció a l'aula. A més, una resolució mitjançant grafs del trencaclosques i l'explicació de l'experiència que va suposar portar aquesta activitat a dues aules reals.

1973: Polígons, convexitat i el teorema de la galeria d'art

"Un d'aquells problemes bonics de les matemàtiques."
- Raúl Ibáñez

Com altres coses que ja hem tractat (teorema dels quatre colors i empaquetaments d'esferes, per exemple) el que exposarem ara es troba dins de la geometria combinatòria: la branca de les matemàtiques, i més en particular de la geometria, que tracta les característiques combinatòries de figures discretes. Al 1973, Victor Klee (1925 – 2007), un matemàtic nord-americà especialitzat en conjunts convexos, combinatòria i optimització, entre d'altres, proposa a Vàclav Chvàtal (1946 fins l'actualitat), informàtic teòric txec-canadenc amic seu: *"Quin és el nombre mínim de vigilants o càmeres de vigilància que calen per vigilar una galeria d'art?"*. Per tal de representar aquest problema amb el formalisme matemàtic necessari per arribar a l'enunciat del teorema que volem exposar, farem primer unes definicions:

Definició: Entenem per polígon simple del pla un conjunt finit de vèrtex coplanaris units per segments de recta tals que la única intersecció entre segments té lloc als vèrtex i a cada vèrtex hi convergeixen únicament dos segments.

Definició: Sigui un polígon simple del pla. Direm que aquest polígon és convex si, i només si, per a cada parell de punts diferents de la seva adherència existeix un segment de recta que els uneix contingut completament a l'adherència del polígon.

Si escenifiquem una galeria d'art com un polígon simple del pla, els vigilants o les càmeres seran punts pertanyents a l'interior del polígon, i direm que es troba vigilada aquella regió de l'interior del polígon tal que, per tots els seus punts, existeix un segment amb un extrem en ell i un altre a un dels punts que representen un vigilant de forma que tots els punts d'aquest segment es trobin dins del polígon. En un polígon convex, evidentment, només es fa necessari un vigilant. Quants vigilants (o càmeres) serien suficients per vigilar una galeria d'art amb una forma qualsevol? Václav Chvátal estableix que en una galeria amb n cantonades (el que serien els vèrtex del polígon i on per suposat $n > 2$) és suficient, independentment de la forma de la sala, $\left[\frac{n}{3}\right]$ vigilants. A l'any 1978, el matemàtic Steve Fisk publica una demostració molt senzilla del teorema de la galeria d'art, tan enginyosa i breu que Martin Aigner i Günter Ziegler la van introduir al seu llibre anomenat *El llibre de les demostracions*, on es recullen les demostracions que els seus autors van considerar més belles i brillants. Ambdós van ser alumnes de Paul Erdös, qui parla sovint de *"EL LLIBRE"*, un llibre fictici escrit per Déu i que conté la demostració més elegant de cada teorema matemàtic, d'entre les quals l'home només s'apropa a conèixer-ne algunes. La demostració de Fisk, però, diu com segueix:

- Primer pas: triangulació. És fàcilment demostrable per inducció que qualsevol polígon simple es pot triangular mitjançant $n - 3$ diagonals de forma que els vèrtex de la triangulació coincidiran amb els del polígon.

- Segon pas: coloració. També de forma senzilla per inducció es pot demostrar que tres colors són suficients per pintar els vèrtex de forma que no hi hagi dos vèrtex amb el mateix color si estan units per una aresta de la triangulació.

- Tercer pas: col·locació dels vigilants. Si tenim n vèrtex, com a mínim hi haurà un color dels que hem triat abans que acoloreix com a molt $\left[\frac{n}{3}\right]$ vèrtex. En aquests és on col·loquem els vigilants. Per veure que tota la sala està vigilada només cal fixar-se en que, amb aquesta disposició, tots els triangles estan vigilats, ja que tindran un vèrtex de cada color i un d'aquests colors és l'escollit per col·locar els vigilants. Si tots els triangles es troben vigilats està sota vigilància la sala sencera, de forma que $\left[\frac{n}{3}\right]$ són suficients. □

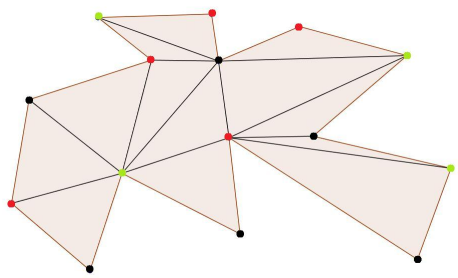


Figura 12: Coloració dels vèrtex en la triangulació d'un polígon.

El problema de la galeria dóna la millor cota superior de forma general, però no la dóna per cada polígon en concret, i hi ha casos particulars on podríem obtenir cotes més petites. Per exemple, tots aquells polígons que siguin convexos només necessiten un vigilant, com ja hem especificat. En el cas particular en que totes les cantonades formen un angle recte, podem acotar-ho de forma més ajustada: només caldran $\left[\frac{n}{4}\right]$ vigilants. Així ho van demostrar la matemàtica canadenca Maria Klawe (1951 fins l'actualitat) i el novaiorquès Daniel Kleitman (1934 fins l'actualitat) al 1983, després d'adonar-se que a les galeries convencionals es necessitaven menys vigilants dels que es calculaven per la cota del teorema de la galeria d'art.

El problema de la galeria d'art va suposar l'inici de multitud de variants i de problemes nous per resoldre, fet que el manté viu. Proposem unes quantes:

- Vigilància vigilada: es tracta de saber quin és el nombre mínim de vigilants necessaris amb la condició de que, a més, cada vigilant ha de trobar-se a la vista de com a mínim un altre vigilant.

- Galeries amb forats: quants vigilants es farien necessaris si fixéssim alguns forats en certes parets de la galeria de manera que també es pot vigilar a través d'ells?

- Galeries amb sales internes: es proposa que veiem quin és el nombre de vigilants que es necessitarien en el cas de tenir, en l'interior del polígon, parets internes o sales interiors que redueixen la visibilitat del personal de vigilància.

- Vigilants mòbils: en comptes de fixar els vigilants en punts dels que no es poden moure, el problema consisteix en col·locar-los en parets (arestes del polígon) de manera que poden desplaçar-se en aquesta línia. El raonament parteix de que estarà vigilada tota la zona amb visibilitat des d'aquella paret on es col·loqui un vigilant i no només des del punt en que es trobi en cada moment determinat.

- La ruta del vigilant: en aquesta variant es tracta de traçar una ruta tancada (es parteix del mateix punt en el qual s'acaba) formada per segments de recta, tot minimitzant la longitud del camí de forma que en el recorregut un vigilant hagi vist tots els racons de la galeria.

- Vigilància de 180$^{\text{o}}$: fins ara hem suposat que els vigilants poden veure en els 360$^{\text{o}}$ de rotació des de les seves posicions. Com variaria el problema si només poden veure en un angle de 180$^{\text{o}}$?

- Generalització a les tres dimensions: ampliant amb un grau de llibertat el problema, podríem preguntar-nos: donat un poliedre simple (les seves cares no interseccionen en cap altre lloc que no sigui una aresta i de forma que una aresta només pertanyi a dues cares diferents) en quins punts situaríem un vigilant per tal que el volum total de la figura estigui sota vigilància?

- Extensió a la forma de la frontera: i si en comptes de tenir arestes rectes tinguéssim línies corbes delimitant l'àrea de la sala?

Fins ara aquestes preguntes segueixen obertes. En el millor dels casos per a certes famílies de formes de sales s'han conjecturat alguns resultats. Per exemple, per a la variant dels vigilants que podien desplaçar-se per una paret de la sala, el matemàtic i científic computacional belga Godfried Toussaint (1944 fins l'actualitat) va conjecturar que per polígons d'n vèrtex, excepte per alguns casos concrets, la part sencera de $\frac{n}{4}$ era un nombre suficient de vigilants.

Sobretot, el problema de la galeria d'art s'ha començat a investigar de forma majoritàriament computacional. S'ha demostrat que és un problema NP fort[16], i és actualment un repte d'aplicacions evidents (eficiència en la vigilància d'una sala) i no tan evidents però igualment importants: la planificació de moviments, en robòtica, en disseny arquitectònic, etc. [22]

En l'apartat M de l'Annex 2 trobem un model de qüestionari on intentem que alumnat de l'ESO descobreixi el teorema, les aplicacions i les variants, tot treballant característiques geomètriques i espacials, reflexionant sobre les figures i les seves propietats i assajant l'estratègia i la optimització.

1982: Aleatorietat, triangles en S^n i probabilitats geomètriques

"Si els triangles fossin els creadors de Déu,
el farien amb tres costats."
- Charles Louis de Secondat, baró de Montesquieu.

Motivada pel que proposem a continuació, vaig demanar a un grup de 13 persones de diferents edats i estudis que dibuixessin deu cercles i que a dins assenyalessin tres punts aleatoris sense dir-los per a què servia. Un cop feta la prova s'obtenen 130 mostres, que considerarem una quantitat significativa, i després d'unir els tres punts aleatoris formant triangles, volem saber quants conformen triangles acutangles. Curiosament, obtenim una freqüència de $43/130 \approx 0.33$ i de manera que tots els subjectes han "dibuixat"entre 2 i 4 triangles acutangles d'entre les deu mostres que se'ls demana.

Al 1982, Glen Richard Hall (nascut al 1954 a EE.UU. i actualment professor de matemàtiques a la Universitat de Boston) es pregunta quina és la probabilitat de

[16] NP són les segles de *nondeterministic polynomial time*, que vol dir que el problema no es pot resoldre en un temps polinòmic per una màquina de Turing. És a dir, no es pot resoldre en un temps acotat per una forma polinòmica que depèn de variables d'entrada fixades per una màquina d'aquest tipus.

que tres punts aleatoris continguts en un disc formin un triangle acutangle i escriu el que va esdevenir la seva primera publicació matemàtica: *Acute Triangles in the n-Ball*. En aquest document calcula una probabilitat més general: donats tres punts aleatoris en una bola tancada n-dimensional de radi arbitrari, com de probable és que formin un triangle acutangle?. De fet, el radi de la circumferència és irrellevant, així és que podem suposar-lo igual a la unitat.

Aplicant la fórmula que obté Hall, però, s'obtenen les següents probabilitats, juntament amb algunes curiositats:

n	Nom de la bola	Probabilitat	Racionalitat
2	Cercle	$\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{8} \approx 0.280285$	Irracional
3	Esfera	$\frac{33}{70} \approx 0.471429$	Racional
4	Hiperesfera tetramensional	$\frac{256}{45\pi^2} + \frac{1}{32} \approx 0.607655$	Irracional
5	Hiperesfera pentadimensional	$\frac{1415}{2002} \approx 0.706793$	Racional
6	Hiperesfera hexadimensional	$\frac{2048}{315\pi^2} + \frac{31}{256} \approx 0.799842$	Irracional

Taula 2: Valors de les probabilitats de tenir un triangle acutangle en una esfera de dimensió n.

S'observa que la probabilitat tendeix a augmentar a mida que augmentem la dimensió de la bola. Per $n = 9$ la probabilitat és, aproximadament, 0.905106. A més veiem que hi ha una alternança en la racionalitat de la probabilitat, cosa que va sorprendre molt a Hall [2].

Fins aquí tenim tota la informació que hem pogut trobar sobre aquest resultat. Durant l'elaboració del treball vam començar a fer proves i a trobar altres propietats i conceptes que m'agradaria destacar:

- L'expressió de la probabilitat en la segona dimensió es podria fer servir per trobar una aproximació de π. En l'experiment de l'*Agulla de Buffón*[17] l'expressió que ens dóna la probabilitat de que una agulla toqui una de les línies si la distància entre elles és igual a la longitud de l'agulla és de $\frac{2}{\pi}$. L'Anton Aubanell, professor d'aquesta facultat, ens va fer observar la similitud d'aquest problema amb la probabilitat de que un triangle aleatori sigui acutangle en una bola de la segona dimensió, doncs la dependència amb π d'ambdues probabilitats difereix en un quadrat. Quina de les dues iteracions convergiria més ràpid a π? No vam buscar resposta a aquesta pregunta, però podria ser una bona qüestió per portar a l'aula.

- Tornem a l'experiment amb què hem començat l'apartat. Podem comprovar que la probabilitat teòrica difereix però no gaire de la experimental que hem

[17]Problema clàssic de probabilitat geomètrica que consisteix en calcular la probabilitat de que una agulla de longitud L llançada a l'atzar sobre un conjunt de línies paral·leles separades una distància D talli a alguna d'aquestes. Aquesta probabilitat val $\frac{2L}{D\pi}$

calculat com a curiositat. Això ens fa pensar en la qüestió de l'aleatorietat. Per definició, un fenomen es diu que és aleatori quan només depèn de l'atzar. Per tant, es comprova un fet que ja podíem sospitar: l'elecció de tres punts en un cercle quan aquesta elecció la fa l'ésser humà no és *totalment* aleatòria. Podríem fer servir la probabilitat per contradir la hipòtesi de que un experiment sigui totalment aleatori, però podríem mesurar el grau de l'aleatorietat per mitjà d'experiments com aquest en una aula?

- En la tercera construcció de GeoGebra d'aquest enllaç, que també deixem a la bibliografia [23], veiem que les freqüències que experimentem amb el programa si que són més acurades a la probabilitat teòrica (s'aproxima fins les centèsimes). Fins que això va passar, vam haver de fer algunes proves abans per tal que la probabilitat experimental calculada fos la que esperàvem. La primera qüestió que ens ve a la ment és: com definim punts aleatoris amb el GeoGebra? Veiem-ne dues opcions i les seves correccions:
  - Ja que ens trobem a dins d'un cercle és una bona opció fer servir les coordenades polars. El programa ens dóna un valor entre 0 i 1 que anomenarem a. A l'enllaç de GeoGebres trobem, en la segona secció, que es defineixen les coordenades com $\rho = a$ i $\theta = 2\pi a$. Quan provem quina probabilitat calcula el programa veiem que els punts tendeixen a apropar-se més al centre que no pas a la frontera, evidentment, de forma independent de θ. És, doncs, un fenomen totalment aleatori? Si veiem quina és la probabilitat que ens està calculant el programa veiem que alguna cosa no funciona. Proposem l'estudi d'àrees: l'àrea que hi ha des del centre del cercle fins un punt aleatori que calculem serà $\pi\rho^2 = \pi a^2$. Com que a és un valor entre 0 i 1 disminueix en elevar-ho al quadrat, i doncs, els punts que definim de forma aleatòria d'aquesta manera tendeixen a delimitar àrees més petites dins del cercle total. Una solució per rectificar això és definir $\rho = \sqrt{a}$.
  - També és factible, però, definir les coordenades cartesianes a partir dels valors aleatoris que ens facilita el programa. Suposem de nou que el nombre aleatori que proporciona el GeoGebra és a, i tal com es fa en la primera secció de l'enllaç que proposàvem, definim $b = 2a - 1$ per obtenir un valor entre -1 i 1. Definim les coordenades cartesianes com $x = b$ i y un nombre que es troba entre $-\sqrt{1-x^2}$ i $\sqrt{1-x^2}$ tot fent $y = 2(\sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^2}$. Quan provem aquesta configuració en la primera entrada de l'enllaç als GeoGebres veiem que els punts tendeixen a aproximar-se més a la frontera del cercle per la zona central. Què està passant ara? Exactament el mateix que abans: quan es veuen implicats els quadrats de nombres 0 i 1 els valors de les àrees que delimitem entre el centre del cercle i els punts aleatoris no tenen valors equiprobables.

Tot i que la demostració de la fórmula que hem fet servir per als càlculs és força complicada i no es podria portar a una aula de secundaria, d'aquest resultat se'n poden fer variants més senzilles, algunes reflexions importants com hem vist sobre el que és l'aleatorietat i la definició de punts aleatoris, a més de treballar les probabilitats geomètriques i definir una nova forma d'aproximar el nombre π. A l'apartat N de l'Annex 2 trobem el disseny d'algunes activitats per tal de treballar aquests conceptes que hem exposat de forma pautada i amb preguntes considerades adients per guiar el procés a una aula de secundària.

Conclusions i comentaris finals

Un cop finalitzada la redacció del treball considerem que s'han assolit els objectius: hem pogut desenvolupar conceptes matemàtics prou complexos i abstractes i s'han pogut adaptar amb activitats guiades a nivells d'ESO i Batxillerat. A més, hem pogut contextualitzar prou bé cada concepte matemàtic, enriquint a nivell cultural l'exposició de cadascun d'ells.

A l'enquesta/prova on-line s'han rebut 30 respostes i els resultats s'assemblen als que obté Swetz: només 10 dels enquestats arriba a la meitat de la nota, i 2 dels que van respondre el qüestionari tenen una puntuació superior al 70%. La màxima puntuació és de 19/21, la més baixa 0/21, i la mitja es troba en 9/21 encerts. En la pregunta oberta *Quin és l'objecte més antic del que es té constància que podria tenir un ús matemàtic?* només 4 persones de 30 responen correctament *l'Os d'Ishango*, i altres 4 responen coses semblants a la resposta correcta però sense acabar d'especificar. En una altra pregunta, 10 persones de 30 atorguen a Gilles de Roverbal i a Isaac Newton la notació del càlcul diferencial i integral que fem servir avui dia. A una pregunta referent a un dels punts que apareixen al currículum de l'ESO i que demana: *Com es defineix el metre com a unitat de mesura?*, 14 persones de 30 responen incorrectament i només 15 marquen *Des de 1960, és 1.650.763,73 cops la longitud d'ona al buit de la radiació taronja de l'àtom* Cr^{86} (un enquestat ho deixa en blanc). Per acabar, 11 persones de 30 atribueixen la demostració de que $\sqrt{2}$ és irracional a Pitàgores de Samos (només 6 encerten: Hipaso de Metaponto).

Això fa pensar que la història no és la part de les matemàtiques més coneguda entre els docents, i el fet de que punts que a més apareixen al currículum no es responguin de forma correcta a nivell general fa veure que no estaria de més acompanyar cada activitat que es proposi d'un complement històric.

Com a comentaris finals m'agradaria comentar:

- Resulta molt interessant treballar sobre conceptes matemàtics "moderns": 10 dels 14 conceptes que hem treballat daten de fa menys de 200 anys. Hem sembla interessant portar a una aula conceptes tan relativament nous, ja que de vegades dóna la impressió de que les matemàtiques ja estan fetes, no s'investiguen, no es fan *ara* sinó que són immutables i invariants en el temps.

- La dificultat més gran que he trobat fent aquest treball ha estat saber *on* havia de parar els desenvolupaments. Tot i que pot semblar que no, cadascun dels conceptes exposats es pot aprofundir de manera que podrien ser el tema principal d'un sol Treball de Fi de Grau. Tot i així, penso que els hem exposat adequadament pel que volíem fer.

- Com a conclusió crec que és molt positiu emfatitzar la trajectòria dels estudis matemàtics al llarg de la història dins de l'aula, ja que més sovint del que pensem segueixen la mateixa línia: experimentació, descoberta, conceptuació i demostració.

Agraïments

A la primera persona que vull mencionar en els agraïments de la memòria és al meu tutor, en Jordi Font. Res d'això hauria estat possible sense el seu suport i entusiasme amb cada idea que li proposava pel meu treball, a més de la seva ajuda fonamental amb el GeoGebra, la descoberta del teorema de Dandelin, les variants proposades per *"rebentar el problema"* i aportacions complementaries, sempre enriquidores, boniques i originals. També vull mencionar a en Sergi Muria i agrair les seves aportacions via e-mail amb respecte a la Bogeria Instantània i per resoldre els nostres dubtes burocràtics. Moltes gràcies també a l'Anton Aubanell per les seves idees sobre el resultat dels triangles aleatoris i la comparació amb l'agulla de Buffon, m'ha ajudat a arrodonir un dels apartats més bonics del treball.

També vull mencionar a en Jose Ramírez, professor del meu antic Institut, per deixar-me dos dels seus grups d'alumnes per tal de fer una prova d'una de les activitats dissenyades a la seva aula i les seves orientacions amb respecte a l'activitat.

I per últim, però no menys important, vull agrair als meus companys i amics: la Marta P., en Dani P., en Dani S., en Juan Luis, l'Albert G., en David, l'Eva, en Miguel, la Mireia, la Beatriu, l'Enric i la Muriel, tant per participar en una enquesta sobre triangles com pel seu suport durant aquest mesos, amb un agraïment especial a la Paula A. i sobretot a en Pablo O. per la seva generosa i indispensable ajuda amb el LaTeX.

Bibliografia

[1] Expediciones matemáticas. La Esfera De Los Libros.

[2] Clifford Pickover. El Libro De Las Matemáticas: De Pitagoras a La 57º Dimensión. Ilus Books, 2011.

[3] Colin Beveridge. La biblia de las matematicas. Gaia, 2017.

[4] Juan Anto Arguelles Rodriguez. Historia de La Matematica (Spanish Edition). Akal Ediciones, 2000.

[5] Carles Dorce i Polo. Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia al Renaixement. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2013.

[6] Carles Dorce i Polo. Història de la matemàtica. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2011.

[7] The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press, 2007.

[8] ¡mates, mates! empaquetamiento de esferas. https://matesmates.wordpress.com/2013/01/04/empaquetamiento-de-esferas-2/.

[9] Estructura cristal·lina hexagonal compacta. http://www.mim-us.es/estructuras_cristalinas/hc.html.

[10] Estructura cristal·lina cúbica centrada a les cares. http://www.mim-us.es/estructuras_cristalinas/ccc.html.

[11] Gaussianos, kissing number. http://gaussianos.com/las-esferas-besuconas-o-el-gran-salto-a-la-tercera-dimension/.

[12] Historia de las cónicas. http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/apolonio/conic.

[13] Charles Taylor. An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics: Being a Geometrical Treatise On the Conic Sections with a Collection of Problems and Historical Notes and Prolegomena. Nabu Press, 2010.

[14] El teorema de los cuatro colores. marta macho. www.ehu.eus/~mtwmastm/Paseo0405.pdf.

[15] El teorema de los cuatro colores. guión charla de la universidad del país vasco. www.ehu.eus/~mtwmastm/Colores_Granada_24abril09.pdf.

[16] A. Delshams A. Aubanell, A. Benseny. Útiles Básicos De Cálculo Numérico. Labor Universitaria Manuales, 1999.

[17] Estadística para todos. ley de benford. http://www.estadisticaparatodos.es/taller/benford/benford.html.

[18] Teorema del punto fijo de brouwer. https://valenteramirezgl.files.wordpress.com/2016/06/puntos-fijos-handout.pdf.

[19] Gaussianos. números normales. http://gaussianos.com/numero-normal/.

[20] Arithmetische eigenschaften einer klasse von dezimalbruchen. www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00017063.pdf.

[21] Cultura científica. locura instantánea. https://culturacientifica.com/2017/06/14/locura-instantanea-rompecabezas-cubos-colores/.

[22] Cultura científica. teorema de la galería de arte. https://culturacientifica.com/2014/01/29/teorema-de-la-galeria-de-arte/.

[23] Jordi Font. Construccions de geogebra de triangles aleatoris a un cercle. https://www.geogebra.org/book/title/id/SdbD3uhR.

[24] Currículum eso. http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/curriculum/.

[25] Currículum batxillerat. http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/batxillerat/curriculum/.

[26] Jordi Font. Construccions de geogebra de les esferes de dandelin. https://www.geogebra.org/book/title/id/EaCdUeyW#material/jN59gQVH.

[27] Blog Lobo Topológico. Postulados de dificultad de un laberinto. http://eltopologico.blogspot.com.es/2007/02/laberintos-parte-1.html.

Annex 1: Currículum i competències

Sense comentar-ho, enunciem els punts que conformen el currículum i les competències, tant d'àmbit com generals, de l'ESO i del batxillerat vigents actualment a Catalunya i amb els que ens hem orientat a l'hora de dissenyar i classificar una activitat. En l'exposició dels punts d'ambdós currículums adjuntem només els punts més generals. Els punts específics, així com una explicació i anàlisi més detallat, ho trobem a les fonts [24] per l'ESO i [25] pel batxillerat.

Competències generals de l'ESO

- **Competències transversals:**
  - Les competències comunicatives:
    - 1. Competència comunicativa lingüística i audiovisual
    - 2. Competències artística i cultural
  - Les competències metodològiques:
    - 3. Tractament de la informació i competència digital
    - 4. Competència matemàtica
    - 5. Competència d'aprendre a aprendre
  - Les competències personals:
    - 6. Competència d'autonomia i iniciativa personal
- **Competències específiques centrades en conviure i habitar el món:**
    - 7. Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic
    - 8. Competència social i ciutadana

Competències d'àmbit de matemàtiques de l'ESO

- Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
- Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
- Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
- Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.
- Competència 5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.

- Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.
- Competència 7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.
- Competència 8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.
- Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
- Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
- Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
- Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Currículum de matemàtiques de 1r d'ESO

- Numeració i càlcul
  - Nombres naturals i enters
  - Fraccions
  - Càlcul mental
- Canvi i relacions
  - Patrons per expressar regularitats entre magnituds i quantitats
  - Taules i gràfics per expressar relacions
- Espai i forma
  - Figures geomètriques de dues dimensions
  - Simetria
  - Eines i instruments
- Mesura
  - Unitats de mesura de magnituds, longituds, angles i d'àrees
  - Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions
- Estadística i atzar
  - Estudis estadístics

  - Gràfics estadístics
  - Eines d'anàlisi de dades
  - Conceptes bàsics de probabilitat

Currículum de matemàtiques de 2n d'ESO

- Espai i forma
  - Figures i cossos geomètrics
  - Proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions
  - Teoremes de Tales i de Pitàgores
- Mesura
  - Unitats de mesures d'àrees i volums
  - Longituds, perímetres i àrees de figures planes
  - Superfícies i volums de cossos de l'espai
- Estadística i atzar
  - Estudis estadístics
  - Gràfics estadístics
  - Eines d'anàlisi de dades
  - Conceptes bàsics de probabilitat
- Numeració i càlcul
  - Nombres racionals
  - Percentatges
  - Càlcul mental
- Canvi i relacions
  - Proporcionalitat directa i inversa
  - Funcions
  - Equacions de 1r grau

Currículum de matemàtiques de 3r d'ESO

Els punts marcats amb (*) pertanyen a la branca de les matemàtiques orientades a estudis posteriors de batxillerat.

- Estadística i atzar

- Estudis estadístics
- Gràfics estadístics
- Eines d'anàlisi de dades
- Conceptes bàsics de probabilitat

- Numeració i càlcul
  - Nombres naturals
  - Nombres grans i petits
  - Successions numèriques
- Canvi i relacions
  - Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa
  - Equacions de 1r i 2n grau i sistemes d'equacions de 1r grau
- Espai i forma
  - Proporcionalitat i semblança
  - (*)Transformacions geomètriques
- Mesura
  - Mesures directes
  - Mesures indirectes

Currículum de matemàtiques de 4t d'ESO

Els punts marcats amb (*) pertanyen a la branca de les matemàtiques orientades a estudis posteriors de batxillerat.

- Numeració i càlcul
  - Nombres racionals i irracionals
- Canvi i relacions
  - Funció quadràtica, exponencial i (*) logarítmica
  - (*) Funcions definides a trossos
  - Equacions de grau superior o igual a 2
  - (*) Inequacions lineals
- Espai i forma
  - (*)Trigonometria
  - (*) Geometria analítica en el pla

- Mesura
  - Mesures indirectes
- Estadística i atzar
  - Estudis estadístics
  - Gràfics estadístics
  - Eines d'anàlisi de dades
  - Conceptes bàsics de probabilitat

Competències de Batxillerat

Del batxillerat especificarem les competències d'àmbit:

- Resoldre problemes matemàtics.
- Comunicar-se matemàticament.
- Raonar matemàticament.
- Valorar la matemàtica i la seva construcció.
- Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

Currículum de matemàtiques de 1r de Batxillerat Científic

- ARITMÈTICA I ÀLGEBRA
  - Classificació i representació dels conjunts numèrics
  - El càlcul amb nombres decimals: notacions, aproximacions i errors en funció de la situació objecte del càlcul
  - El càlcul amb polinomis: la transformació d'expressions algèbriques, per aplicar a l'estudi de funcions
  - Les progressions: un model per a l'estudi de l'interès simple i del compost. El comportament a l'infinit d'una successió: un pas previ a l'estudi en una funció
- GEOMETRIA
  - Les funcions circulars en l'estudi de fenòmens periòdics i la trigonometria per resoldre problemes mitjançant triangulació
  - Els vectors, una nova eina per resoldre problemes de geometria. Les còniques en àmbits no matemàtics
- ANÀLISI

- Estudi de les característiques de certs tipus de funcions que poden ser models de fenòmens científics, tecnològics i socials
  - Interpretació física i geomètrica de les taxes de canvi en contextos científics diversos

- PROBABILITAT I ESTADÍSTICA
  - Anàlisi del tipus i grau de relació entre dues variables en contextos científics i socials
  - Aplicació de les tècniques de recompte i del càlcul de probabilitats per resoldre situacions i problemes en àmbits tant científics com socials.

- ELS CONTEXTOS HISTÒRICS
  - L'acceptació al llarg de la història dels diferents nombres reals. La irracionalitat d'arrel de 2.
  - Introducció històrica als nombres complexos. Leonhard Euler.
  - La mesura del meridià terrestre i el naixement del metre. Una mesura universal sorgida de la Revolució Francesa. Jean-Baptiste Delambre i Méchain.
  - La resolució d'equacions i el teorema fonamental de l'àlgebra.
  - Resolució analítica d'equacions i resolució gràfica. El mètode de Descartes per resoldre equacions quadràtiques geomètricament.
  - La funció exponencial i el càlcul amb logaritmes. John Napier i Henry Briggs.
  - Abraham de Moivre i el càlcul de les probabilitats.

Currículum de matemàtiques de 2n de Batxillerat Científic

- ÀLGEBRA LINEAL
  - El llenguatge matricial com a eina per expressar i resoldre problemes relacionats amb l'organització de dades
  - Els sistemes lineals, una eina per plantejar i resoldre problemes

- GEOMETRIA A L'ESPAI
  - La interpretació geomètrica dels sistemes lineals amb tres incògnites
  - EEl plantejament i la resolució de problemes mètrics a l'espai

- ANÀLISI
  - L'aplicació de l'estudi local i global d'una funció a situacions geomètriques, científiques i tecnològiques

  - El càlcul d'àrees planes, una de les situacions que requereixen el càlcul integral

- ELS CONTEXTOS HISTÒRICS

  - El teorema fonamental del càlcul. La controvèrsia sobre dos camins a Newton i a Leibniz.
  - Mètodes numèrics xinesos en la resolució d'equacions. El mètode de Horner.
  - Karl Friedrich Gauss i la resolució de sistemes lineals d'equacions. La resolució de sistemes en la matemàtica xinesa.
  - Arquimedes i el càlcul d'àrees i volums.
  - El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri per al càlcul d'àrees.
  - El naixement de les geometries no euclidianes: Gauss, Bolyai i Lobatxevski.

Annex 2: Disseny de les activitats

En cada apartat d'aquest Annex trobarem l'activitat que hem introduït al cos de la memòria. Explicitarem el material necessari, la finalitat, el marc curricular, el temps previst, quines de les vuit competències generals (iguals per totes les matèries de l'ESO) i quines de les dotze competències d'àmbit (particulars per la matèria de matemàtiques) es treballen i les possibles adaptacions curriculars.

Apartat A: Cigales, nombres primers i algorisme d'Euclides

En aquest exercici plantegem preguntes les respostes de les quals són els nombres primers. D'aquesta manera, l'alumnat no aprèn, entén o memoritza una definició, sinó que descobreix un concepte tot just després de fer-lo servir: el "crea". A més de trobar els nombres primers entre 10 i 31, també introduirem els conceptes de divisió sencera, algorisme d'Euclides i màxim comú divisor de dos nombres.

Aquest exercici es planteja per una classe de 1r d'ESO, en la secció de Numeració i càlcul, on s'estudien els nombres enters i les seves utilitats i propietats. Per fer l'activitat no es necessitarà cap material a més del full de preguntes, i seria enriquidor fer-ho per parelles o fins i tot per grups petits, per tal d'emfatitzar el diàleg i el raonament col·lectiu. El temps previst per aquesta activitat és, aproximadament, d'una hora de classe si es fa sencer. També el podem fer només fins l'exercici 5, aproximadament en 30 minuts. La resta de temps de classe es pot fer servir, o bé de forma anterior introduint els conceptes necessaris o repassant-los, o bé de forma posterior a un altre exercici o a deixar que cada parella/grup expliqui als companys com ha resolt el problema i quines conclusions en treu.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 1, 6, 8, 10 i 11.

Proposta de qüestionari per l'alumnat:

Suposa que ets una cigala de l'espècie *Magicicada*. Has nascut el dia 30 d'abril i la teva esperança de vida és d'un mes (el mes de Maig, que té 31 dies). A la zona on vius hi ha un estany que arriba al seu mínim de capacitat cada set dies, fent que sigui quasi bé impossible sortir a beure aigua. Justament avui ens trobem en un d'aquests mínims. Des d'avui mateix, els teus depredadors més potents sortiran a caçar periòdicament. El *Cardinalis Cardinalis* surt a caçar cada dos dies, el *Coracina Teruinostris* cada tres dies, i el *Coccyzus Vieilloti* cada cinc.

Exercici 1: Dibuixa una línia del temps, assenyala el teu naixement i enumera els dies que tens de vida des d'avui.

Es pretén que els alumnes treballin la representació de nombres enters. En aquest cas, hauran de començar per 30 i continuar amb l'1. Amb això estimulem el raonament sobre punts inicials de de comptatge. Treballem el concepte d'ordre i escala en rectes de nombres i la seva representació.

Exercici 2: Assenyala quins dies decidiries **NO** sortir de l'amagatall per tal d'evitar que els diferents tipus d'aus et mengin.

Pretenem que, en començar a comptar pel dia 30, els alumnes assenyalin els múltiples de 2, 3 i 5. D'aquesta manera s'emfatitza el comptatge amb nombres enters, on moltes vegades, fins i tot en la vida adulta, es cometen errors greus però senzills.

Exercici 3: Assenyala quins dies **NO** sortiries per tal de poder beure aigua.

En aquest exercici, els alumnes haurien d'assenyalar els múltiples de 7. En aquest punt del problema els alumnes han eliminat tots els nombres no primers d'entre l'11 i el 31. Convé una posta en comú dels resultats per poder continuar.

Exercici 4: Encercla els nombres que et queden sense marcar. Quins nombres són aquests? Quina propietat compleixen?

Exercici 5: Per a què se t'acut que poden servir els nombres primers, després de resoldre aquest exercici?

Pretenem que els alumnes trobin una utilitat en els nombres primers. Fins i tot, podem proposar una cerca per tal de trobar més aplicacions d'aquests nombres. Seguidament, si la dinàmica de l'activitat és favorable, podem continuar amb la pregunta: creus que les matemàtiques més abstractes es poden aplicar al món real?

Exercici 6: El dia 9 de Maig, quants cops ha sortit a caçar el *Cardinalis Cardinalis*? I el dia 17? I el dia 23? Escriu aquests resultats de color vermell. Com has fet aquest raonament? Emplena la taula següent posant en les caselles vermelles els nombres que has trobat, en les caselles grogues cada quants dies surt a caçar aquesta au i acaba d'emplenar les caselles que quedin buides perquè es compleixi la igualtat.

En la següent taula, mitjançant el comptatge que facin en la línia del temps de l'Exercici 1, estaran descobrint la divisió sencera i introduïm la idea d'equació, tot resolent-la d'una forma intuïtiva i senzilla. També es pot aprofitar per treballar la jerarquia d'operacions, tot i que en aquest cas ja hem situat el producte al davant. Haurem d'observar que a la casella verda només posem nombres més petits que el de la casella groga, però insistirem en això més tard.

9	=		•		+	
17	=		•		+	
23	=		•		+	

Figura 13: Taula per reproduir la divisió sencera.

Exercici 7: Aquests dies, quants cops ha sortit a caçar el *Coracina Teruinostris*? Escriu els resultats en vermell. I quants dies porta sense caçar? Escriu els resultats en color verd. Després, emplena una taula com l'anterior posant cada nombre on li correspon segons els colors i la fila que toca i emplena les caselles buides. Quin nombre has posat en les caselles grogues?

Novament adjuntem la mateixa taula que en l'exercici anterior. Aquest cop, la manera d'enfocar-ho és diferent i lleugerament més complicada. Hauran d'adonar-se que a les caselles grogues sempre posaran el número 3, i que a les caselles verdes posen nombres més petits que 3, així com en l'exercici anterior a aquestes caselles el nombre era sempre 1 (més petit que 2, que era el nombre groc). En definitiva, el nombre de la casella verda sempre és més petit o igual que el de la casella groga. Aquest aspecte serveix per introduir la estructura de l'Algorisme d'Euclides.

Per a grups d'alumnes avançats, com a pregunta per reflexionar a casa o com a ampliació per a qui estigui interessat, podem proposar l'últim exercici de forma voluntària:

Exercici 8: Hem trobat diverses formes de descompondre un nombre en productes i sumes. Aquesta descomposició és única? Se t'acut alguna altra? Fes algunes proves, i després intenta completar aquestes taules amb els nombres adients:

25	=	15	•		+	10
	=	10	•	2	+	5
5	=	5	•		+	

Figura 14: Algorisme d'Euclides per 25 i 15.

30	=		•	4	+	2
7	=	2	•	3	+	
1	=	1	•		+	

Figura 15: Algorisme d'Euclides per 7 i 30.

Observes cap patró en les posicions dels nombres? Quin és el màxim comú divisor dels nombres 25 i 15? El trobes a la taula? En quina posició? I el màxim comú divisor de 7 i 30? Està a la taula? Això passa sempre?

A la taula, s'han marcat les posicions que, seguint l'algorisme d'Euclides definit a la memòria, ocuparien els m.c.d. de les parelles de nombres proposades. Es tracta d'un exercici d'ampliació on l'alumnat pot descobrir l'algoritme, i es practiquen i treballen les operacions bàsiques entre nombres enters i la jerarquia d'operacions.

Apartat B: "Sobre l'equilibri dels plans", punts notables del triangle i experiments físics

Tot seguit proposem una activitat que pretén comprovar les propietats del centre de gravetat del triangle (baricentre). Està pensada per fer per parelles en una hora de classe a un grup de 3r d'ESO, durant l'apartat curricular d'Espai i forma. En aquesta activitat proposem dos experiments físics per tal de demostrar la propietat del baricentre i fer l'exercici més atractiu. Doncs, ens serà necessari un tros de tel·la, una cartolina i un regle per parella i un GeoMag, uns quants escuradents i un petit tros de plastilina per tota la classe.

<u>Anàlisi de les competències treballades:</u>

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 8 i 11.

<u>Exposició dels experiments:</u>

- El primer experiment tracta de construir una estructura amb Geomag de tal forma que simulem tres pilars (amb la mateixa alçada ja que les peces que fan de pilars seran iguals) i per pressió amb altres peces que col·loquem al damunt de les inicials "atrapem"els vèrtex del triangle que hagin dibuixat a la tel·la. Les peces es trobaran fixes una superfície foradada com pot ser la tapa d'una capsa de sabates o similar, que les mantindrà fixes a la posició que necessitem segons la mesura de cada triangle. Un cop tinguem el triangle en suspensió sense mantenir contacte amb la capsa deixem anar una bala rodona per sobre. Si han trobat correctament el baricentre, aquesta es desplaçarà sobre el punt marcat.
- El segon experiment serveix per verificar que hem trobat correctament el baricentre del triangle de cartolina. Es tracta de retallar-lo i fer un forat petit al baricentre, de com a molt un mil·límetre de diàmetre. Aleshores, fem passar el triangle per un escuradents o qualsevol pal de fusta igual de prim on haguem col·locat abans, en un cert punt prop del punt mig del bastonet, un bocí de plastilina que ens servirà per a que el triangle no rellisqui i surti de l'escuradents. Quan col·loquem el bastonet en vertical de manera que el triangle quedi per sobre de la plastilina, aquest hauria d'estar paral·lel al

terra si hem trobat correctament el baricentre. En cas contrari, el triangle s'inclinarà cap a algun costat.

Guió per la pràctica:

Primerament proposem que dibuixin dos triangles qualssevol: un al tros de tel·la i un altre a la cartolina. Després, demanem que trobin el baricentre en ambdós casos. Després d'explicar els dos experiments, preguntem que creuen que passarà. Un cop tinguin opinions i conjectures diverses, deixem que facin la prova. L'alumnat ha de poder repetir l'experiment tants cops com vulgui en cas que l'experiment no surti bé, emfatitzant la importància de la precisió a l'hora de fer dibuix tècnic.

Apartat C: Comptatge, posicions a una fila i teorema xinès del residu

En aquest apartat proposem un problema a resoldre per grups de tres o quatre alumnes durant una hora de classe al curs de 1r d'ESO i pertanyent a l'apartat curricular de Numeració i càlcul, tot just després de treballar la factorització, els múltiples i els divisors per tal de repassar aquests conceptes d'una forma més visual i intuïtiva. Al final del problema, es pot intuir molt per sobre el teorema xinès del residu, que esdevé la motivació i la base teòrica d'aquesta activitat. Tot i així, aquesta visió del teorema potser no és adequada per un grup de primer. Doncs, és un exercici que es pot portar a qualsevol nivell com a curiositat o fins i tot a la facultat com a introducció, sempre depenent de les preguntes que es facin posteriorment a la realització de l'activitat.

Anàlisi de les competències treballades

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 1, 3, 6 i 11.

Qüestionari per l'alumnat:

Imagina que treballes per una empresa i la teva tasca és anar al banc a portar els llistats dels comptes cada dia d'entre setmana. A més d'això, cada cop que hi vas has de posar-te al dia amb un dels cinc delegats del banc sobre els diners del compte de l'empresa, cadascun dels quals té una finestreta fixa a la oficina.

Per tal de que t'atenguin al banc, pots fer-ho de dues formes: anar a la hora que puguis i posar-te a la cua a agafar número (de manera que pots trigar tot el matí per sortir de la oficina) o bé decidir una posició fixa a la cua (per exemple, ser sempre el tercer en ser atès, o el cinquè, o el vuitè...). Considerant la darrera opció, decidiu quina posició fixa escolliríeu a la fila si cada dia que aneu heu de ser atesos per un dels directors (cada dia un diferent), que es troben repartits a les finestretes vermelles i les finestretes grises estan tancades, tal com indica el dibuix:

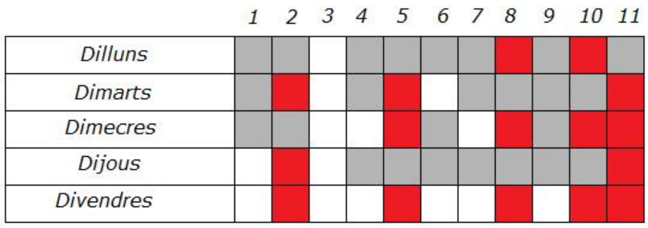


Figura 16: Proposta 1 per l'exercici.

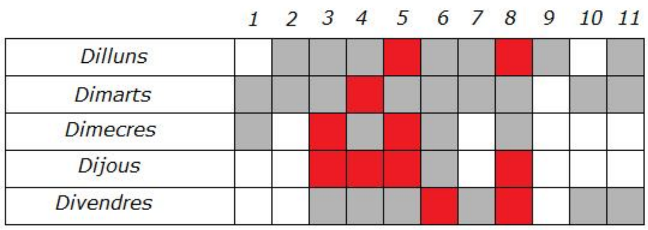


Figura 17: Proposta 2 per l'exercici.

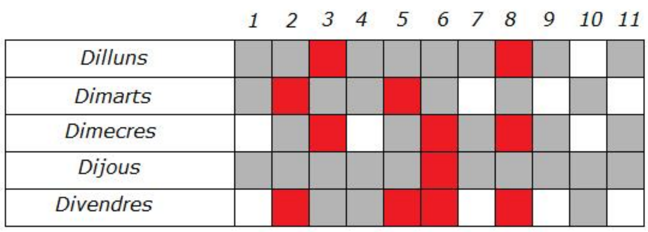


Figura 18: Proposta 3 per l'exercici.

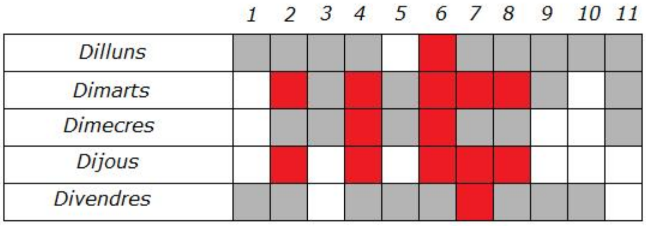


Figura 19: Proposta 4 per l'exercici.

En aquest exercici presentem quatre opcions: cadascuna per un dels grups que es formin a la classe. Si hi ha més grups, poden crear-se fàcilment més plantilles o repetir-ne alguna. Les solucions possibles són: cinquè, tercer, segon i segon. L'opció més senzilla amb que podem orientar a l'alumnat per trobar la resposta pot ser anar provant: si em col·loco a la posició 1, parlaré amb tots els directors? I si em poso a la segona? I si sóc el tercer? I si em col·loco el quart? La relació amb el Teorema xinès del residu és, primerament, la verificació de que la solució existeix. A més, en els casos que els n_i*'s són coprimers, les possibles solucions són congruents mòdul* $N = n_1 n_2 ... n_k$ *on les* n_i *en aquest cas corresponen a la quantitat de caselles obertes.*

Apartat D: Volums, percentatges i la conjectura de Kepler

En aquesta activitat farem servir peus de rei per mesurar boles de pin pon o de porexpan de diferents radis i cigrons, i treballarem volums d'esferes (objectes pròxims a una esfera, més bé) i de recipients (ja sigui matemàticament fent càlculs o per altres mètodes, com emplenant-los d'aigua i abocant-la després a un vas de precipitats). Intentarem ficar el major nombre de boles dins de cada recipient veient les limitacions que tindrem i descobrint així la conjectura de Kepler. Abans, però, proposarem el *Kissing Number Problem* en la segona dimensió. Per això podem fer servir com a materials els anells dels taps de les ampolles d'aigua, per exemple, sempre mirant que tinguin la mateixa mida.

L'activitat està pensada per fer en una hora i per grups (depenent del material que tinguem es podria fer per parelles) en una classe de 2n curs d'ESO, en l'apartat curricular de Numeració i càlcul on es tracten els percentatges i ja s'han treballat les àrees i volums de figures de l'espai.

Anàlisi de les competències treballades

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 3, 7 i 11.

Proposta de qüestionari per l'alumnat:

Exercici 1: Agafeu una anella i poseu-la sobre la taula. En total contacte amb la taula, quantes anelles com a màxim podeu posar al voltant d'aquesta i que en siguin tangents? Creieu que aquesta quantitat depèn del radi de l'anella?

El nombre màxim, com esmentàvem a la memòria, és 6. Es tracta de que visualment l'alumnat vegi aquesta cota. Evidentment, no depèn del radi. Aquesta pregunta estimula reflexions visuals que serviran als següents exercicis.

Exercici 2: Dibuixeu un rectangle en un full de paper i mesureu l'àrea. Superposeu anelles sobre el rectangle i calculeu quina percentatge d'àrea podeu ocupar amb elles. Com les heu de col·locar per maximitzar aquest percentatge? Quin valor d'àrea ocupada obteniu? El podeu superar? *Aquest percentatge serà* $\approx 90\%$ *amb la disposició trobada a l'Exercici 1.*

Exercici 3: Mesureu el diàmetre de les pilotes de pin pon amb el peu de rei. Quin volum tenen? Quin volum té el recipient? Quantes pilotes hi caben?

La forma més convenient de mesurar el volum de les pilotes és multiplicant el cub del diàmetre per $\frac{\pi}{6}$. *Per mesurar el recipient (estem considerant un recipient arbitrari de forma qualsevol) es pot fer mesurant-lo i fent els càlculs pertinent o bé omplint-lo d'aigua i mesurant després amb un got mil·limetrat el volum de l'aigua emprada. La idea inicial (i errònia) que poden tenir és fer la divisió entre el volum del recipient i el volum de les pilotes. A la realitat, les pilotes, per la seva forma, no poden omplir tot l'espai del recipient. D'aquesta idea, proposem l'exercici següent.*

Exercici 4: Fiqueu totes les pilotes que pugueu a dins del recipient. Es correspon la quantitat de pilotes que hi caben amb el valor que heu trobat abans? Per què? Proveu quantes pilotes com a màxim podeu ficar en el recipient. De quina manera ho feu? Quin percentatge de volum heu ocupat?

Segons la conjectura de Kepler, de forma ordenada amb una disposició hexagonal (els alumnes, provant, veuran que és la que sembla més òptima) la densitat de pilotes és d'un 74% aproximadament, i aquesta densitat és màxima.

Exercici 5: Agafeu el recipient més petit i els cigrons. Mesureu el volum del recipient i el dels cigrons amb l'ajuda d'un peu de rei. Quants cigrons hi caben? Com que són més petits, podreu augmentar la densitat de cigrons que podeu ficar al pot petit en quant a la obtinguda amb el recipient gran i les pilotes de pin pon?

La resolució de l'exercici és anàloga als dos anteriors. La conjectura de Kepler es tornarà a complir i per tant el percentatge màxim de volum de cigrons respecte al volum del recipient serà inferior o igual al 74%. La finalitat de provar-ho amb cigrons és desmentir la possible idea de que amb esferes més petites emplenem més espai. Els espais que queden entre les pilotes els fem més petits, però també els augmentem en quantitat compensant el canvi de volum per mantenir el percentatge de volum de boles dins del recipient.

Apartat E: Còniques, punts de tangència i teorema de Dandelin

En aquest exercici proposem una sèrie de preguntes amb la intenció de que l'alumnat vegi l'equivalència entre les definicions de cònica que es demostraven al cos de la memòria a partir del Teorema de Dandelin. L'activitat està pensada per dur a terme en un grup de 4t d'ESO però no per una qüestió curricular (ja que les còniques, de fet no surten al currículum de l'ESO) sinó amb la intenció de tractar aquesta part de les matemàtiques en un curs obligatori i aprofitant que a aquesta edat la visualització de les tangències és potser més factible i sòlida que en cursos anteriors, tot i que es podria fer en una aula de 3r si el grup ho permet. Al batxillerat, però, si hi surten les còniques. Es podria fer l'activitat a aquest nivell per tal d'acompanyar les equacions amb un exercici més il·lustratiu.

L'activitat està pensada per una hora de classe i per resoldre per parelles o grups petits, debatent els resultats de forma col·lectiva. Els materials necessaris seran la proposta de qüestionari/guió que adjuntem i una maqueta on es pugui veure la geometria del problema o, en el seu defecte, construccions de GeoGebra similars a les d'aquest enllaç [26].

Per no allargar-nos massa repetint qüestionaris anàlegs, farem la deducció de la construcció de les esferes de Dandelin pel cas de l'el·lipse. Per la paràbola i la hipèrbola són les mateixes pautes variant detalls sobre la diferència en les seves respectives propietats.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 1, 9 i 12

Proposta de guió:

L'el·lipse és la corba que resulta d'intersecar un pla amb la superfície d'un con de la forma que veieu a la maqueta (o a la construcció d'aquest enllaç en cas de no aportar maqueta). Volem veure que aquesta corba compleix una altra definició d'el·lipse: el lloc geomètric dels punts que, donats dos punts anomenats focus F_1 i F_2, la suma de distancies a cadascun d'ells és constant.

Exercici 1: Dibuixeu en un full com es veuria una secció que passa pel l'eix del con considerant que el pla que hi interseca formant l'el·lipse el veiem com una recta. Quins elements identifiqueu i com es relacionen?

En aquest exercici es pretén que l'alumnat faci un dibuix semblant a la Figura 19 i identifiqui els punts de tangència, tot veient que el pla que conté l'el·lipse és una de les tangents internes de les dues esferes i les dues generatrius que es veurien del con són les tangents exteriors.

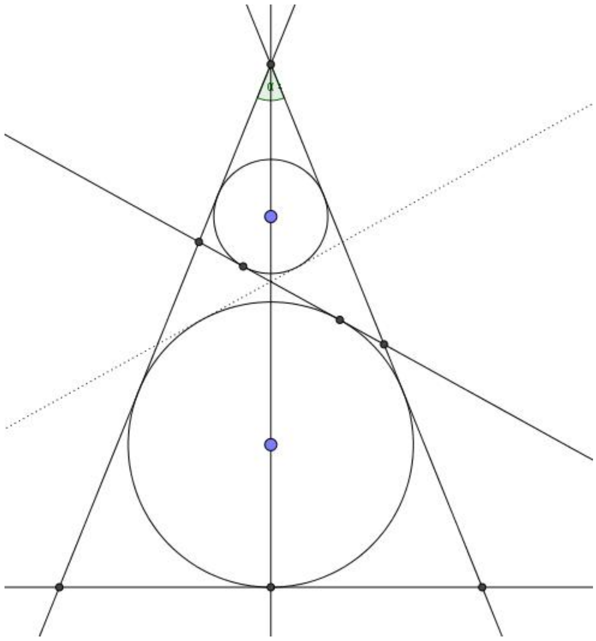


Figura 20: Secció d'un con amb esferes les de Dandelin de l'el·lipse.

Exercici 2: Identifiqueu els punts de tangència de les rectes i circumferències que heu dibuixat en l'apartat anterior. A quins punts importants de la el·lipse pertanyen els de les tangents interiors?

A classe podríem exposar, un cop s'ha observat la geometria d'aquesta construcció, el Teorema de Dandelin, arribant a la conclusió de que són els focus.

Exercici 3: Quina figura formen els punts de contacte de les esferes amb la superfície del con?

Com hem vist, aquestes figures són circumferències i en tenim dues: la superior i la inferior.

Exercici 4: Escolliu un punt qualsevol de l'el·lipse que d'ara en endavant anomenarem P. Quines són les distàncies a les figures que heu contestat en l'Exercici 3? És constant la seva suma?

Obtenim les distancies $d(P, P_1)$ i $d(P, P_2)$ que mencionàvem al cos de la memòria. Hauran de veure que la suma és constant ja que el pla de l'el·lipse no es mou, les esferes també estan fixes i els punts P, P_1 i P_2 estan alineats.

Exercici 5: Quina és la distància del punt P a cadascun dels focus? La podeu igualar a alguna de les distàncies que hem vist a l'Exercici 4? Quina conclusió en traieu?

Amb aquest últim exercici, si veuen que les distàncies $d(P, F_1)$ i $d(P, F_2)$, a partir d'un raonament per tangències, són iguals a $d(P, P_1)$ i $d(P, P_2)$ respectivament, hauran acabat el raonament al que volíem arribar.

Apartat F: Mapes, superfícies topològiques i teorema dels quatre colors

Presentem una activitat a realitzar per grups de tres o quatre persones. Facilitem, a cada grup, dues còpies d'un mosaic pertanyent a una col·lecció de mosaics com la següent:

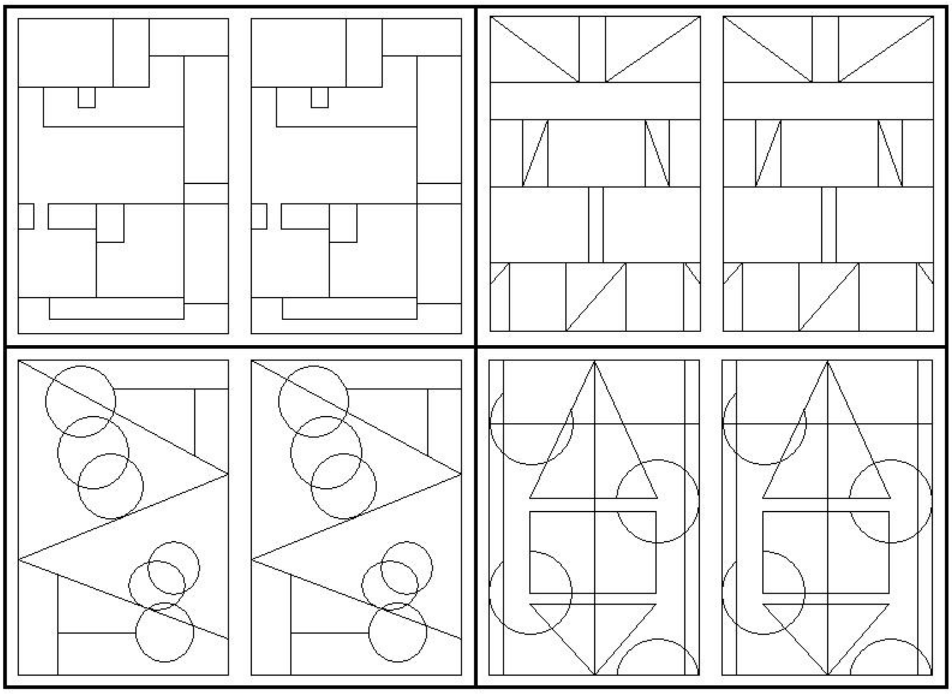


Figura 21: Proposta de mosaics per acolorir.

Com es pot observar, en tots ells es fan necessaris quatre colors exactament per pintar-lo. L'activitat està pensada per dur a terme durant una hora de classe en un grup de 3r d'ESO, en l'apartat d'Espai i forma, on es treballen transformacions geomètriques en cossos de tres dimensions (més bàsiques de les que farem servir en aquesta pràctica). Així doncs, podem presentar el qüestionari que adjuntem, on s'empren transformacions extracurriculars però que poden servir per aguditzar la capacitat visual en tres dimensions i facilitar després la realització d'altres exercicis amb figures més senzilles que sí que hi són al currículum. A més, descobrim un teorema interessant com és el dels quatre colors.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 3 i 6.

Qüestionari per l'alumnat:

Exercici 1: Escolliu un dels dos mosaics que teniu i pinteu-lo de manera que no siguin del mateix color dues caselles que es toquen per una aresta (poden tocar-se en un punt i ser del mateix color). Quants colors heu fet servir?

La resposta a aquest exercici és variable, ja que no hem imposat cap tipus de restricció. Probablement faran servir molts colors. Aquest apartat el fem servir per familiaritzar-se amb el dibuix i treballar la capacitat visual en el pla.

Exercici 2: Ara pinteu el segon mosaic (que és igual que el primer) i intenteu pintar-lo amb el mínim nombre de colors. Quants heu fet servir? I els vostres companys?

Si no han comés cap errada, tots els grups faran servir quatre colors. Els sembla sospitós que tots facin servir el mateix nombre de colors quan tracten d'optimitzar-lo?

Exercici 3: Creus que podríeu dissenyar un mosaic on siguin necessaris més colors dels que heu fet servir? I un mosaic on amb menys colors tingueu suficient?

Fer servir tres colors o menys pot resultar bastant senzill, només es tracta de crear un mosaic on les diferents regions tinguin un contacte per arestes suficientment simple. Evidentment, cap grup aconseguirà un mosaic on es facin necessaris cinc colors (o més).

Exercici 4: Sense fer cap prova i amb el que heu vist fins ara, amb quants colors creieu que teniu suficient per pintar un planisferi? I si el pinteu a sobre d'un globus terraqüi? Proveu a inflar un globus i dibuixar amb retoladors un mosaic sobre la seva superfície. Quin nombre de colors és suficient?

L'alumnat podrà relacionar un mapa com un cas particular de mosaic. Doncs, només són necessaris quatre colors per pintar qualsevol mapa (i evidentment se'n poden fer servir menys). En una esfera (o qualsevol cos aproximat com un globus) i tots els cossos homeomorfs a una esfera el nombre suficient de colors serà el mateix, com hem explicat a la memòria. Doncs, són necessaris els mateixos colors per pintar un mapa tant si és al pla com si és en un globus terraqüi.

Exercici 5: I en una pilota de rugbi? I en un cub? I en un prisma d'una base qualsevol?

Com que tots aquests cossos són homeomorfs a l'esfera, el nombre de colors necessari torna a ser quatre. Volem intentar que els alumnes vegin que aquests cossos són deformacions uns dels altres que no afecten a la distribució de colors.

[AMPLIACIÓ] Exercici 6: I si dibuixeu un mosaic a una superfície en forma de donut?

En el cas del tor i per la conjectura de Heawood, el nombre màxim de colors necessaris és 7. Deixem que l'alumnat faci proves i en tot cas, proposem la cerca a

Internet sobre el Teorema dels quatre colors per tal de trobar la resposta correcta. Aquest últim exercici és totalment ampliació i curiositat i en cap cas pretenem ensenyar sobre gènere de superfícies ni característica d'Euler.

[**AMPLIACIÓ**] **Exercici 7:** Imagineu que teniu figures de diferents colors a la tercera dimensió i voleu encaixar-les en una regió de l'espai. Quants colors necessiteu tenir si, per qualsevol forma de disposar-les, no voleu que dos d'elles estiguin en contacte quan són del mateix color?

Aquí pretenem que l'alumnat reflexioni de forma espacial. Com hem argumentat a la memòria, no hi ha cota de colors. Aquest exercici també es planteja com ampliació i com a pregunta oberta per continuar el raonament, treballant la capacitat visual en 3D.

Apartat G: Logaritmes, estadística i llei de Benford

Aprofitarem la llei de Benford per barrejar dos apartats curriculars: Numeració i càlcul i Estadística i atzar. Treballarem a la vegada els nombres naturals i enters (significat, coneixement i expressió) i la recollida de dades i els gràfics estadístics. El curs on aplicar aquesta activitat no el fixem. Realment, es podria fer en qualsevol curs d'ESO i, depenent del curs, plantejar uns objectius o altres. Així doncs, el guió que adjuntem és bàsic i pretén ser un esquema comú propi del l'activitat al que es pot fer les modificacions necessàries depenent del curs la on portem.

La durada és aproximadament d'una setmana: es comptarà amb una presentació de la tasca, una recollida de dades individual per dur a terme fora de l'institut i una posta en comú dels resultats i estudi estadístic de les dades.

<u>Anàlisi de les competències treballades:</u>

- Competències generals: 3, 4, 7 i 8.
- Competències d'àmbit: 6, 10 i 12.

<u>Guió de l'activitat:</u>

Presentació: Es tracta de demanar a l'alumnat que de forma individual vagin apuntant tots els nombres que trobin durant una o dues setmanes: temperatures, preus, dades numèriques a la televisió, factures, ordinals... Es demanarà que els apuntin en un full d'Excel per columnes i analitzin quina és la primera xifra significativa de cada valor. Doncs, els nombres s'hauran d'escriure només a partir de la primera xifra que no és nul·la. Per exemple, si es vol fer servir com a dada 0,0074 el nombre que farem servir serà 74. Altre aspecte a destacar és que han de ser nombres que trobin de forma natural, i que no els inventin o els trobin a partir d'algun generador aleatori, ja que la gràcia de l'activitat es perdria totalment. El temps dedicat a això és variable i en funció del temps que disposem.

Tractament de les dades: L'alumnat ajuntarà tots els nombres recopilats per grups i es demanarà un gràfic de barres, un altre de punts i un diagrama circular de sectors amb la freqüència de l'aparició com a primera xifra en els nombres dels valors naturals de l'1 al 9, tant de grup com individualment, tot treballant amb el full de càlcul.

Presentació dels resultats: Cada grup haurà de fer una exposició breu sobre com han recollit les dades, si la mostra és significativa, quin és el resultat trobat i com interpreten aquest succés. Podrien tenir dades que no compleixen la llei de Benford, tot i que com ja hem vist, la seva llei logarítmica predomina quan les seves mostres es barregen amb mostres que segueixen altres lleis. Si no arribem a aquest concepte, però, haurem fet igualment un exercici d'interpretació de dades.

Per la seva banda, el docent haurà tractat la totalitat de les dades, demanant prèviament que els alumnes li enviïn els Excel personals. Presentarem els resultats globals a l'aula i obrirem un debat sobre com interpreten els resultats.

Per 1r d'ESO, per exemple, ens centraríem en la naturalesa, coneixement i aparició dels nombres al món real. A 2n d'ESO podríem concentrar l'atenció en fer preguntes sobre moda, freqüències absolutes, freqüències relatives... A 3r i 4t d'ESO, a més de demanar les conclusions de l'alumnat per tal de reflexionar sobre el fenomen que es té al davant i aprofitant que ja tenen més coneixements de nombres i probabilitats podríem enfocar l'activitat a fer hipòtesis abans de la recollida de dades. Si volem portar l'activitat al batxillerat, a més de tots els aspectes per treballar mencionats fins ara, podríem demanar a l'alumnat que trobin aquella funció amb la que es pot ajustar millor la gràfica de freqüències i per què creuen que existeix aquesta dependència.

Apartat H: El 3 en ratlla, factorials i el grup diedral

En aquest exercici l'únic que farem serà comptar les possibles jugades en una partida de 3 en ratlla. El joc serà l'atractiu del problema, i la finalitat serà aprendre a comptar i a considerar equivalències posicionals. No parlarem a classe dels grups diedrals, però treballarem les simetries, rotacions, combinacions d'ambdues i igualtat entre aquestes. Per tant, ubiquem aquest exercici a 3r d'ESO, en l'apartat d'Espai i forma, tot just després de treballar els conceptes de transformacions geomètriques, fent-lo servir com repàs i consolidació. Convé introduir el concepte de nombre factorial si encara no s'ha vist. El material necessari per l'activitat serà el guió que exposem tot seguit i un tauler de tres en ratlla. Aquest tauler es pot fer amb un full de paper en el moment de començar l'activitat, ja que únicament es farà servir per visualitzar les simetries i rotacions d'un quadrat. L'activitat està pensada per ocupar dues sessions d'una hora. La primera sessió la dedicarem a plantejar el problema, a calcular les possibles combinacions i fer servir els factorials i debatre quines són les jugades equivalents. Després de deixar la pregunta oberta, veurem a la segona sessió com calcular les simetries, rotacions i combinacions equivalents d'aquestes, tot construint el grup diedral (sense definir-lo), obtenint el seu cardinal i entenent que la quantitat de jugades és 9!/8.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 1, 7 i 11.

Proposta de qüestionari per l'alumnat:

Exercici 1: Suposa un tauler de tres en ratlla on comença el jugador X. En quantes posicions diferents pot col·locar la seva fitxa? Escolleix una casella i marca-la.

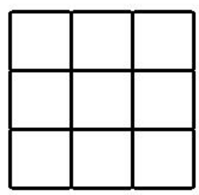


Figura 22: Model de tauler de 3 en ratlla.

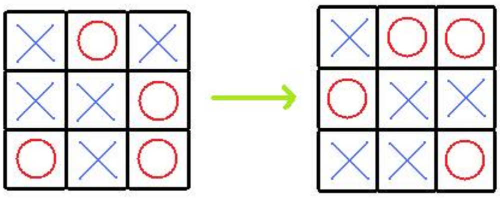
Ara li toca al jugador O. En quantes caselles diferents es pot posar la fitxa? I doncs, de quantes maneres possibles es pot col·locar aquest parell de fitxes?

Suposa que ara el jugador X torna a tirar. De quantes formes diferents pot col·locar la fitxa? Veus cap patró als càlculs? Pots dir de quantes formes diferents pots col·locar les fitxes si acabem omplint el tauler?

La idea d'aquest primer exercici és fer veure que, d'entrada, tenim tantes possibilitats com caselles per començar la partida. És a dir, 9 inicis possibles. I per cada inici possible, tenim 8 formes de continuar-la amb el segon torn. Per tant, tenim $9 \cdot 8 = 72$ *disposicions possibles de les fitxes quan no hem llençat per tercera vegada. D'aquesta manera, l'alumnat està treballant la regla del producte de la combinatòria i descobreix, si ho raona correctament, els nombres factorials.*

Exercici 2: Feu una partida al 3 en ratlla i, quan tingueu el tauler ple, dibuixeu en el tauler del costat una rotació de 90 graus en sentit horari. Tot i que la disposició de les fitxes és diferent, es pot dir que és la mateixa jugada?

Evidentment, la jugada és diferent. Però l'ordre de col·locació de les fitxes ha estat el mateix, i la intenció amb la que s'ha jugat en cada torn és la mateixa (hem col·locat cada X i cada O de forma estratègica per arribar a la victòria o per evitar la del contrincant d'una determinada forma). Tot i que és una pregunta on hi ha lloc al debat, hauriem d'arribar a la conclusió de que les jugades són equivalents ja que la disposició de les fitxes és la mateixa.



j

Figura 23: Rotació de 90º en sentit horari. Podem adjuntar-la a guió si es creu necessari.

Exercici 3: Feu, amb aquesta mateixa partida o amb una altra si voleu, una simetria per un eix horitzontal. Feu després, per aquesta mateixa partida, una simetria per un eix vertical. Què passa si al primer tauler que heu obtingut li feu una rotació de 180 graus?

L'objectiu és que l'alumnat practiqui i consolidi els coneixements relatius a la reproducció de simetries i rotacions del pla. A més, treballem la composició de transformacions isomètriques. La idea és veure que composant unes simetries i rotacions determinades podem arribar al mateix resultat que amb una composició diferent, i doncs, visualitzar l'equivalència d'aquestes transformacions.

Amb aquesta pregunta, l'alumnat hauria de pensar en la combinació de rotacions i simetries. Aquest és, potser, l'exercici més llarg. Per tal de visualitzar-lo, és convenient construir, amb un full de paper, un tauler de 3 en ratlla i reproduir físicament les rotacions i simetries. La resposta a la que haurien d'arribar és el cardinal del grup $D_{2,4}$*: 8.*

Exercici 4: De quantes maneres puc transformar una jugada en una equivalent mitjançant rotacions i simetries?

Exercici 5: Per tant, quan hem considerat la quantitat de disposicions de les fitxes en el tauler a l'exercici 1, quants cops estem considerant la mateixa jugada? Quantes jugades possibles (obviant les equivalents) en tenim?

La intenció d'aquesta pregunta és fer veure que cada jugada està repetida 8 cops, i doncs tenim 8 cops totes les jugades possibles. Per tant, la quantitat de jugades "originals" serà 9!/8.

[**Ampliació**] **Exercici 6:** I si no omplim el tauler, i només juguem 5 torns? O 6 torns? O 7 o 8 torns?

Aquest exercici el deixem per alumnes més avançats, o per qui vulgui continuar el raonament a casa. Es tracta de veure que l'únic canvi a fer en tot el procés seguit és el 9! pel factorial de la quantitat de torns que juguem.

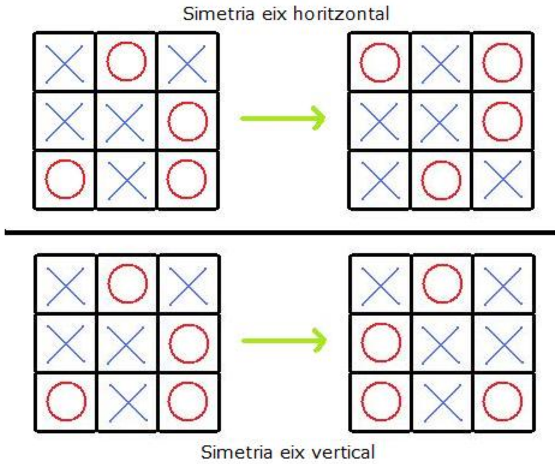


Figura 24: Simetries per eixos verticals i horitzontal del tauler sobre l'Exercici 4. Podem adjuntar-la a guió si es creu necessari.

Apartat I: Laberints, postulats i l'índex d'una corba

La pràctica següent té com a objectiu el tractament del concepte de *laberint* a partir de dos conceptes matemàtics: el sistema de postulats i l'índex d'una corba. A la primera part de la pràctica, relativa als postulats, li dedicarem aproximadament una hora de classe i es farà en forma de debat emfatitzant el raonament col·lectiu. La segona part, relativa a l'índex d'una corba, es farà per parelles o per grups petits, i li reservem també una hora, a ser possible de la classe següent a la que dediquem els sistemes de postulats.

L'activitat pot plantejar-se a qualsevol nivell d'ESO i en qualsevol apartat curricular. Es tracta d'una pràctica dedicada, sobretot, a entendre en què es basen les teories matemàtiques, d'on sorgeixen, com funcionen. Per la part de l'índex d'una corba adaptarem els raonaments que deixem fer a l'alumnat depenent de a quin curs estem treballant. L'únic material necessari a més d'aquest guió serà un cordill d'uns quants metres de llargada.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 2, 5 10 i 11.

Guió/pauta per la creació dels postulats de dificultat:

Primerament, farem servir a l'alumnat *"què"* és un postulat i *"què representa"* a les matemàtiques un sistema o conjunt de postulats. Treballem amb el terme postulat per tal de deixar clar que poden ser enunciats discutibles, no demostrables, no contradictoris i base d'una teoria que ens estem inventant a l'aula per tal de treballar d'una forma purament matemàtica.

La idea és, en forma de pluja d'idees i de debat, establir unes premisses amb les que construir una teoria per tal de decidir *"d'alguna forma"* quina és la dificultat per resoldre un laberint. Qüestionarem a l'alumnat les següents preguntes per tal de guiar la construcció dels postulats si veiem que l'activitat no acaba d'anar de forma molt fluida:

- Què és un laberint? Quines característiques ha de tenir un dibuix perque el considerem un laberint?
- Com mesurarem la dificultat d'un laberint? Amb nombres (i en aquest cas, nombres naturals, enters, racionals, reals, i a nombres més grans més dificultat o menys)? Amb colors (vermell més complicat i verd més accesible, negre impossible, blanc molt senzill...)? Algun altre símbol?
- Quin grau de dificultat pactat anteriorment (color, nombre, lletra, etc.) li assignarem a un laberint que és un sol passadís (i per tant, no és necessari raonar res per resoldre'l)?
- Què han de cumplir dos laberints per tenir la mateixa dificultat? Mateix nombre de passadissos, de nusos, mateixa distància entre l'entrada i la sortida, mateixa estructura...?
- Si a un laberint li afegim passadissos sense nusos i sense sortida, mantenim la dificultat?
- Si unim per un passadís simple un laberint amb un altre, com és la dificultat del laberint resultant?
- Si un laberint té més nusos que un altre, té també més dificultat? I si té més passadissos?
- Si un laberint, als seus nusos té moltes opcions per triar a l'atzar, tindrà més dificultat que un laberint amb la mateixa quantitat de nusos amb poques opcions en cadascun d'ells?
- I si tenen diferent nombre de nusos, com ho podrieu simbolitzar per mesurar la dificultat?
- Tindrà més dificultat un laberint que tingui més camins possibles o un que en tingui menys?

Amb aquest exercici previ, no es tracta de construir un "mesurador de dificultat"determinat del que disposem com a resposta correcta, sinó de que reflexionem sobre com volem construir una teoria i de com podem fixar unes regles i normes per mesurar. De postular, en definitiva, i de treballar de la mateixa forma que es fa quan es defineixen conceptes en matemàtiques. Doncs, podem arribar a diferents resultats que, mentre no es contradiguin a ells mateixos, no tenen per què ser erronis. La funció del docent en aquest exercici col·lectiu és, doncs, detectar possibles *contradiccions o informacions supèrflues, guiar en el raonament i estimular certes idees quan s'encallin o no trobin respostes. Els deixem crear matemàtiques. Una bona guia i exemple de postulats els trobem en [27]*

Exercici 1: Fem una prova sobre els postulats que hem creat. Observeu els següents laberints i qualifiqueu la seva dificultat. Trobeu alguna contradicció? Faríeu cap canvi als postulats?

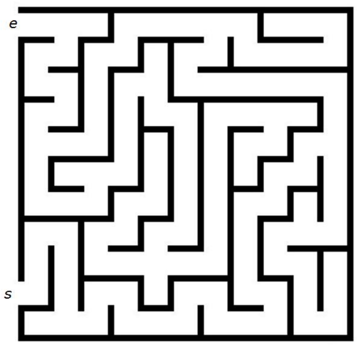


Figura 25: Primer exemple de laberint.

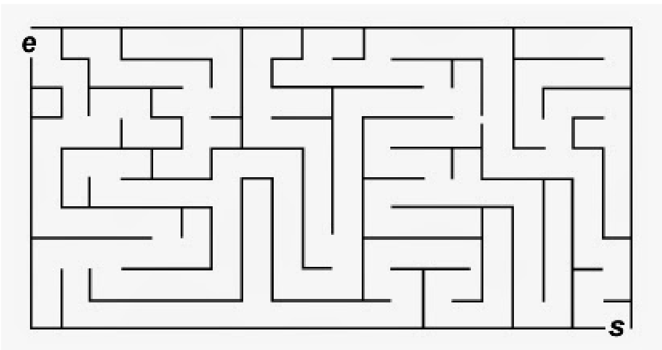


Figura 26: Segon exemple de laberint.

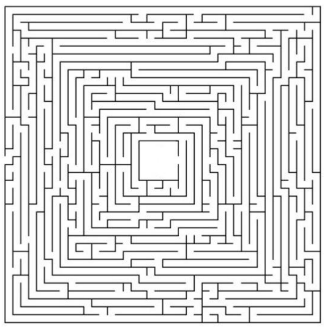


Figura 27: Tercer exemple de laberint.

Aquest exercici es proposa com a primera prova per veure si han entès els postulats acordats i per detectar possibles canvis (o millores sobre aspectes que no han tingut en compte) a fer en la teoria creada. Un cop fet aquest estudi dels laberints, podem proposar alguns exercicis sobre el tema.

Exercici 2: Fent servir una corda fina i suficientment llarga (tres o quatre metres aproximadament) feu un nus de manera que formi un llaç tancat i poseu-lo sobre la taula. Entortolligueu-lo tant com vulgueu fent figures similars a la imatge que trobeu a continuació i sense passar en cap moment la corda per sobre de si mateixa: de moment estem treballant amb laberints al pla que no tenen ponts ni passadissos subterranis. Col·loqueu a dins de la corba algunes fitxes. Com decidiríeu quines es troben dins del recinte del laberint i quines fora?

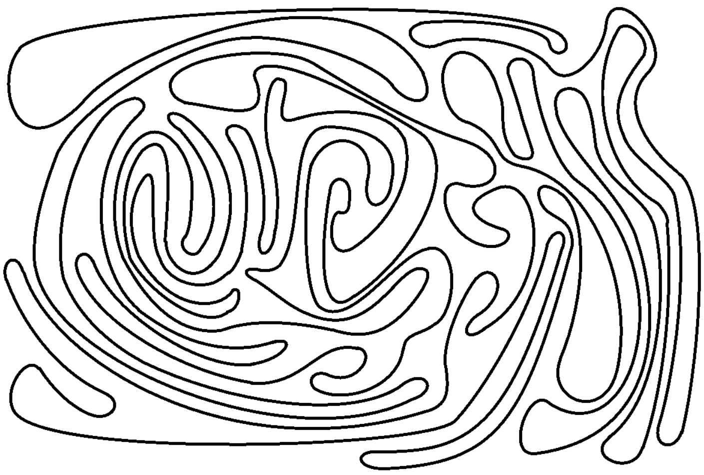


Figura 28: Exemple de laberint per representar amb una corda.

En aquest exercici no es tracta de trobar el mètode que anem buscant. Simplement es tracta de raonar estratègies i metodologies diverses. Tot i que pot ser que algun grup trobi el mètode que volem exposar tot seguit, és més probable que trobin altres formes, fins i tot mètodes que depenguin de la dificultat calculada anteriorment. Busquem, doncs, familiaritzar-se amb la figura creada i raonar sobre les seves formes.

Exercici 3: Agafeu un regle o una cinta i col·loqueu-lo de manera que un extrem estigui a sobre d'alguna de les fitxes i l'altre estigui fora del laberint (en una regió allunyada de la figura que heu creat). Si marqueu les interseccions amb la corda, les compteu i les anoteu per cada fitxa, quina relació trobeu? Sabríeu explicar per què?

En aquest exercici sí que pretenem que se'n adonin de que si la recta creua un cop parell de vegades les parets del laberint ens trobem a fora (ja que per passar a *l'exterior segur hem d'entrar i sortir n cops del laberint i això suposa un nombre parell de parets a travessar) i si la creua un cop senar de vegades ens trobem a dins (per un raonament similar).*

Apartat J: Continuïtat, el teorema de la bola peluda i el teorema del punt fix de Brouwer

En aquest exercici no tractarem de demostrar cap dels dos teoremes, simplement proposarem exercicis i farem preguntes tals que deixin veure l'essència dels resultats i, en tot cas, la relació entre el Teorema del punt fix de Brouwer i el Teorema de la bola peluda. En cas de no veure aquesta última relació, haurem reflexionat sobre propietats geomètriques i descobert certes propietats en dues i tres dimensions.

L'activitat està pensada per fer durant una hora en una aula de 2n de Batxillerat, donada la dificultat d'alguns raonaments i el tractament del concepte de continuïtat, tot i que algunes idees es podrien fer servir en cursos més baixos. Un moment idoni per fer-ho seria com a introducció als apartats de geometria per tal de treballar la visió espacial. El material necessari per la pràctica és un projector per tal de visualitzar algunes imatges, algunes boles (totes de la mateixa mida) i una capsa circular per tal de fer una simulació. Podríem fer servir, si en disposem, una pilota esfèrica que tingui pèl suficientment llarg a la superfície. La idea és que cada alumne tingui el seu guió i que la resolució sigui en forma de debat, ja sigui per grups o a nivell classe.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 5, 7 i 9.

Proposta de guió per l'activitat:

Exercici 1: Imagina una estructura com la del triangle dels jocs de billar però de forma circular i plena de boles. Sense aixecar cap bola del terra, se t'acut algun moviment de les boles on cap d'elles quedi fixa al mateix lloc? Prova-ho amb una capsa circular plena de pilotes a dins.

D'aquesta manera fixem el moviment possible a un moviment purament continu d'un espai en ell mateix. Pel teorema del punt fix de Brouwer, cap moviment és possible amb totes les boles fixes. Cal destacar, però, que ens referim a moviments instantanis, de manera que són possibles moviments on totes les boles es desplacin però alguna d'elles varii el seu moviment molt poc o de forma inapreciable. Per fer una bona simulació i poder-ho provar, cal que les pilotes es puguin moure a la capsa però que omplin tot l'espai, com les boles de billar al triangle.

Exercici 2: Imagina que ara les boles de l'exercici anterior són les partícules que hi ha a la superfície del líquid del cafè que tenim a una tassa. Si remenem la cullereta dins la tassa i apliquem el que hem raonat en l'exercici anterior, a quina conclusió arribem? Busqueu "Teorema del punt fix de Brouwer"a Internet. Us corrobora el raonament?

D'aquesta manera pretenem que vegin les similituds entre els dos escenaris: boles de billar i partícules de líquid en recintes circulars i amb moviment continu. En buscar el teorema a la web pretenem que intentin entendre el llenguatge amb que poden trobar-lo enunciat i que verifiquin el que estaven, potser, conjecturant.

Exercici 3: Aquest teorema es podria aplicar, en comptes de a circumferències, a rectangles del pla?

La resposta és afirmativa com hem raonat al cos de la memòria, ja que són compactes homeomorfs i la propietat del punt fix es conserva per homeomorfisme. Veiem si l'alumnat és capaç de veure, de forma intuïtiva, aquesta relació.

Exercici 4: Suposeu dos fulls de paper tals que un es troba totalment a sobre de l'altre (coincideixen les quatre cantonades perfectament). Imagina que agafes el full superior, l'arrugues formant una bola i el poses de nou sobre el full inferior. Hi ha algun punt que hagi quedat superposat al full inferior de la mateixa manera a com es trobava abans?

La resposta és afirmativa, tal com hem explicat a la memòria. La idea és deixar que l'alumnat raoni per què això és cert a partir de la informació que tenen i de les idees intuïtives que poden haver adquirit amb els exercicis anteriors.

Exercici 5: Imagineu ara una pilota peluda que voleu pentinar de forma que tots els pèls quedin totalment enganxats a la superfície. Podríeu fer-ho sense desenganxar el raspall de la superfície de la pilota en cap moment? Per què? Busqueu a Internet el Teorema de la Bola Peluda. Ho podríeu explicar a partir d'ell?

El raspall obliga a que la disposició dels pèls es faci de forma continua. És bastant fàcil veure que no és possible el que s'està demanant. Proposant que cerquin el teorema fem que busquin analogies entre allò que ha pensat i allò que trobaran.

Exercici 6: El raonament que heu fet per la superfície d'una esfera, es pot fer per una circumferència? Què passaria en una "circumferència peluda"?

Evidentment, en una circumferència si que seria possible el que es demanava a l'exercici 5. El teorema de la bola peluda, per aquesta dimensió, no especifica res.

[AMPLIACIÓ] Exercici 7: Sabríeu veure alguna relació entre el teorema de la bola peluda i el teorema del punt fix de Brouwer?

Aquesta pregunta es deixa per alumnat més avançat o com a pregunta oberta per reflexionar a casa, ja que la resposta no és gens evident. Podria esdevenir el tema d'un projecte de recerca, per exemple.

Apartat K: Comptatge, nombres normals i el nombre de Champernowne

En aquest apartat plantejarem dues vies de treball. Per un costat dissenyarem algunes preguntes de tècniques de comptatge, destinades a classes de 1r d'ESO, en l'apartat de Numeració i càlcul per tal de familiaritzar l'alumnat amb els nombres naturals i amb la comptabilitat bàsica. Per un altre costat pretenem explicar a l'alumnat d'un grup de 4t d'ESO què és un nombre normal després de veure les propietats que compleix el nombre de Champernowne i estudiar la seva irracionalitat. En ambdós casos es plantejaran les preguntes que presentem a continuació per raonar-les per grups petits o per parelles i fer després una posta en comú en un debat a nivell classe per comentar els resultats obtinguts i els raonaments duts a terme.

Primera via: comptatge a 1r d'ESO:

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 2, 3 i 11.

Proposta de qüestionari per l'alumnat:

Exercici 1: Donat el nombre de Champernowne fins que apareix el nombre 200 en els seus decimals, digueu en quines posicions es troba la xifra 2 al llarg de les xifres decimals. I el 4? I el 7? Quina relació hi ha?

L'alumnat assajarà tècniques de comptatge per veure en quines posicions es troben els nombres demanats. Veuran que dues xifres disten una quantitat de nombres definida per un patró que depèn de quantes potències de 10 hem avançat, entre altres coses. La resta d'exercicis són només problemes de comptatge.

Exercici 2: En quina posició trobem el número 6? I el 16, quines posicions ocupa? I el 26? I el 36? I el 106?

Exercici 3: Quins nombres trobem en la posició 100? I en la 150? I en la 500?

Segona via: probabilitats a 4t d'ESO:

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 2.

Proposta de qüestionari per l'alumnat:

Exercici 1: Donat el nombre de Champernowne, calculeu amb quina freqüència surt, fins on trobem entre els seus decimals el nombre 1000, cadascuna de les xifres entre el 0 i el 9. Són iguals?

Exercici 2: Amb quina freqüència surt cada nombre del 10 al 19? És la mateixa que del 20 al 29? I que del 50 al 59? Ho és en general per qualsevol conjunt de nombres entre el X0 i el X9? I quan X=0?

Exercici 3: Repetiu l'exercici anterior però augmentant els decimals del nombre de Champernowne fins al 10.000 i amb els nombres del 100 al 199 i del 200 al 299. També passa amb els nombres del X00 al X99?

Apartat L: Combinatòria, construcció de cubs i la Bogeria Instantània

Amb aquest exercici pretenem que, sota l'atractiu d'un joc, l'alumnat provi a fer combinatòria i assajar una resolució a partir d'arguments lògics i amb sentit i estratègia sense fer servir l'assaig i error, que té una probabilitat de funcionar força baixa en aquest cas. Per portar a l'aula aquest joc només necessitem quatre cubs iguals amb la distribució a les cares dels colors tal com hem especificat al cos de la memòria. En comptes de colors podem posar imatges, figures, números, lletres o els símbols de les quatre estacions. Inclús podem construir algun tipus de variant tal que la distinció en les cares es pugui fer a partir del sentit del tacte en cas que tinguem alumnes cecs a l'aula. Una pauta per construir els cubs fent servir sis fulls de paper per cub i una mica de papiroflèxia és la que s'esquematitza a la figura següent:

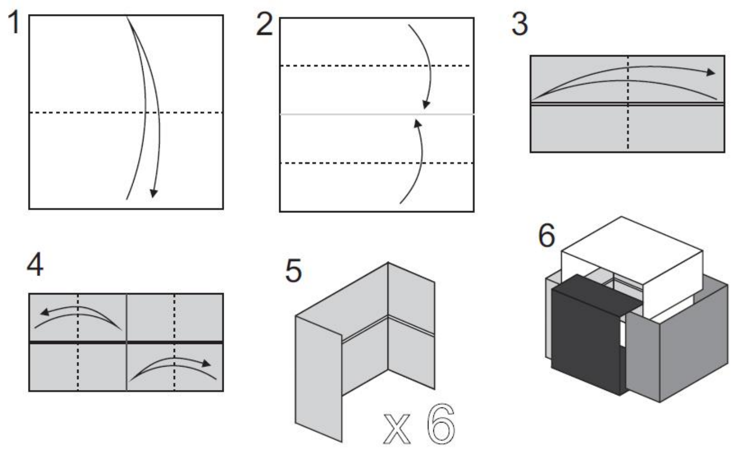


Figura 29: Esquema per construir cubs amb sis fulls de paper.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 1, 3, 8 10 i 11.

Qüestions per treballar la combinatòria:

En cas de que l'alumnat s'encalli molt amb els càlculs i els raonaments, podem proposar aquestes preguntes per tal de que flueixi més el procediment:

- Sobre quantes cares es pot recolzar un cub? I un cop recolzat en una cara, de quantes formes el podem col·locar? Quantes posicions podem tenir d'un sol cub?
- Si cada cub té tantes posicions com hem calculat abans, de quantes formes diferents podem posar un conjunt de dos cubs? I de tres? I de quatre? I de 100?
- Importa la posició dels cubs pel que estem treballant? Cal que ho tinguem en compte?
- Una mateixa disposició de cubs la podem rotar com si estiguessin travessats per un eix que va del punt A al punt B que talla els quatre cubs pel centre de les cares que queden ocultes. Quants cops podem rotar aquest eix variant la posició dels cubs sense que afecti a l'objectiu del trencaclosques? I si invertim l'orientació de l'eix portant el punt A al punt B i a la inversa? Quantes posicions equivalents obtenim per una mateixa disposició de les cares? Què faríeu amb aquest nombre?
- Tindríeu en compte alguna cosa més per continuar el càlcul?
- Creieu que són poques combinacions? Suposeu que en col·locar cadascuna d'aquestes disposicions trigueu un minut, i suposant que dediqueu una hora i mitja cada dia a col·locar cubs, quants mesos podríeu passar per trobar la solució assajant totes les possibilitats? És viable?

Resolució del trencaclosques amb grafs:

Una altra forma de resoldre el problema és amb grafs etiquetats: grafs que porten escrita informació sobre les arestes o sobre els vèrtex i que indiquen, per exemple, els colors. El que farem és dibuixar quatre grafs etiquetats (un per cada cub que composa el trencaclosques), tots amb quatre vèrtex que porten escrit a quin color pertanyen. Les arestes connecten una parella de vèrtex segons si els colors que uneixen es troben en cares oposades del cub. Tindrem que cada graf té quatre vèrtex i tres arestes. Tot seguit fusionem totes les arestes en un mateix graf. Per distingir alguna cosa entre tota la informació que es recull aleshores, etiquetem les arestes amb números que indiquen a quin cub pertanyen. Ara es tracta de trobar un subgraf favorable: un subconjunt de quatre arestes tals que cadascuna pertanyi a un cub, de forma que passem pels quatre vèrtex, i de grau dos, és a dir, que a cada vèrtex hi incideixin només dues arestes. Aquest graf ens dirà per a cada cub quines cares han de quedar ocultes i ens resoldrà el problema. Veiem en aquest cas com quedaria:

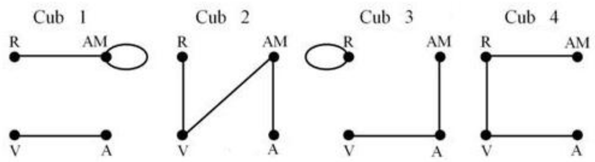


Figura 30: Grafs etiquetats esquematitzant les parelles oposades de colors. Es troben en l'ordre corresponent a la Figura 5 del cos de la memòria.

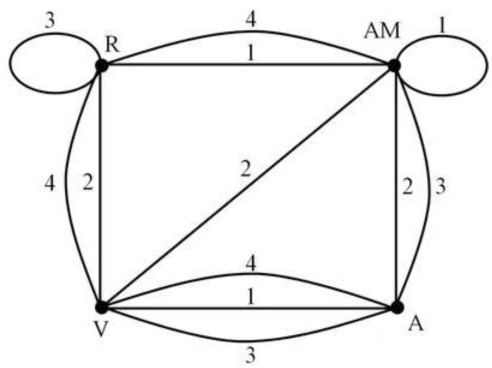


Figura 31: Grafs que fusiona els quatre anteriors i on podem trobar la solució.

Ara només es tracta de buscar un conjunt de quatre arestes a la Figura 23 tal que el subgraf format tingui quatre vèrtex de grau 2 i de forma que cada aresta tingui associat un nombre diferent.

Experiència en una aula real:

Vaig tenir la sort i la oportunitat de poder portar aquesta activitat a una aula real de l'institut on estudiava: l'IES Bruguers de Gavà. Vaig decidir portar aquesta activitat per diversos motius. Per un costat, penso que la combinatòria és un aspecte que normalment no es tracta a les aules, i em semblava una bona excusa i oportunitat per fer-ho. Per altra banda, la senzillesa dels materials i la facilitat amb que pot captar l'atenció de l'alumnat em van fer decantar-me per aquesta activitat i no per una altra. El resultat va ser immillorable. A la classe de quart d'ESO el va resoldre una alumna, un altre es va emportar un esquema per resoldre'l a casa i enviar-me per correu la solució i la meitat de la classe es va quedar a fer proves i raonaments durant l'hora del pati. Tot això després de fer, correctament i a nivell col·lectiu, el càlcul de les posicions possibles dels conjunt de cubs i d'adonar-se que l'assaig i error no era un mètode factible per resoldre el problema. A la classe de 1r de Batxillerat científic també van fer correctament els càlculs combinatoris (de forma més àgil que el grup anterior), un altre alumne va resoldre el trencaclosques i un grup d'alumnes va intentar resoldre'l mitjançant grafs. La idea es va quedar a l'aula quan va acabar la sessió i espero notícies de les conclusions a les que van arribar. Adjunto algunes imatges de la sessió:

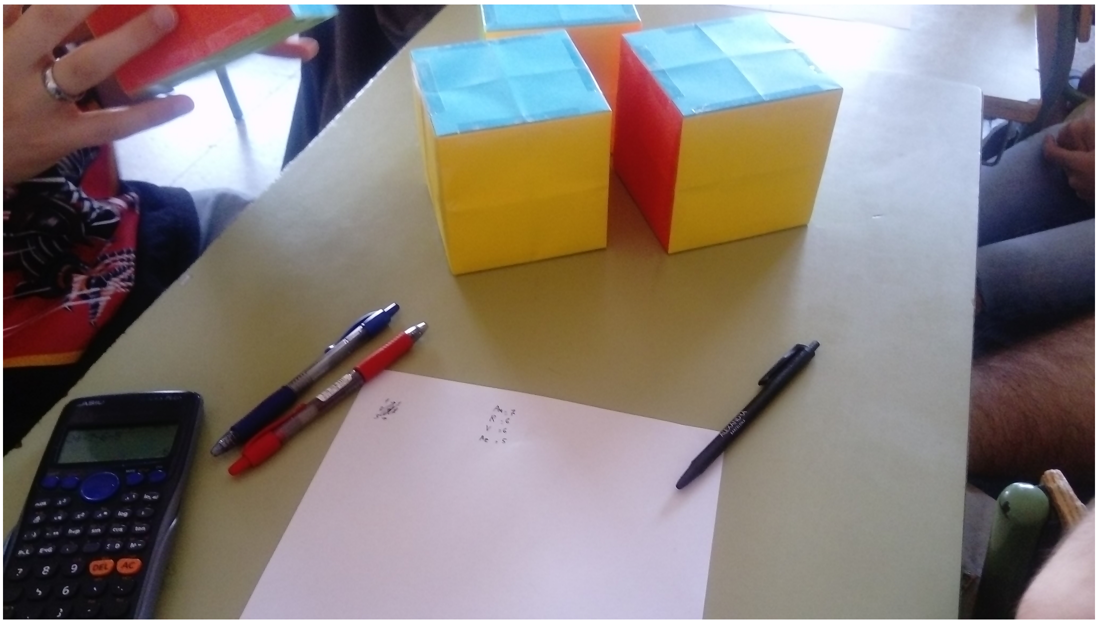


Figura 32: Classe de 1r de Batxillerat científic. Inici del raonament.

Figura 33: Classe de 1r de Batxillerat científic. Proves del raonament començat.

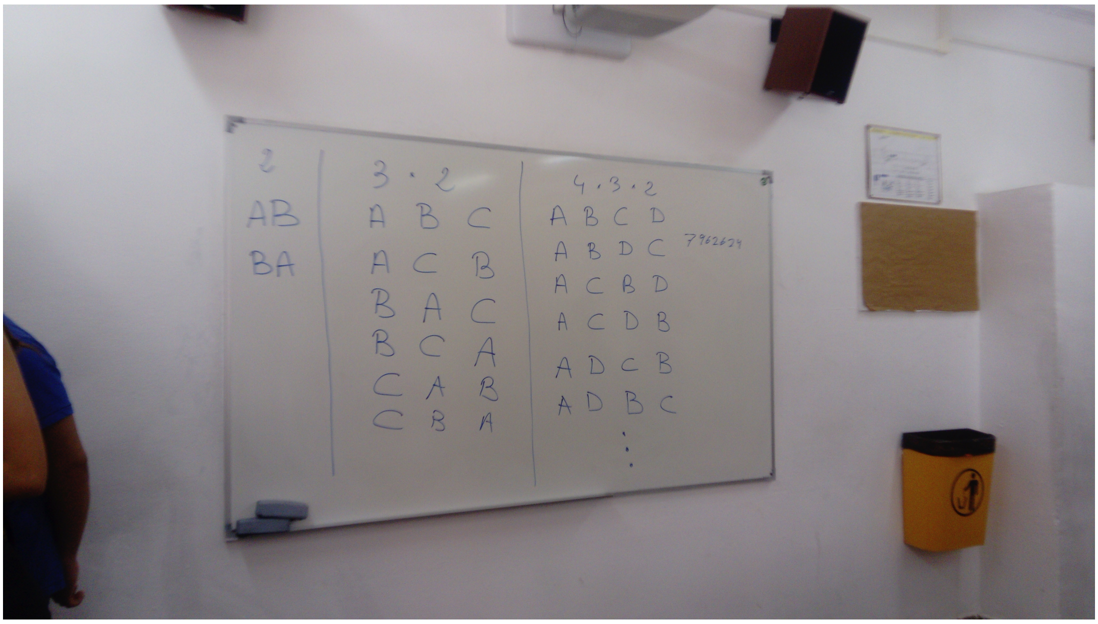


Figura 34: Classe de 4t d'ESO. Esquema per fer combinatòria sobre la Bogeria Instantània.

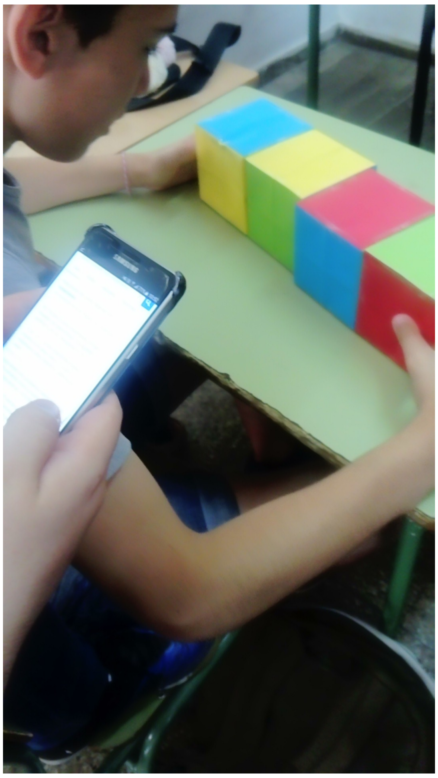


Figura 35: Classe de 4t d'ESO. Buscant possibles mètodes de resolució a Internet.

Figura 36: Classe de 4t d'ESO. Començant a raonar mètodes de resolució del trencaclosques.

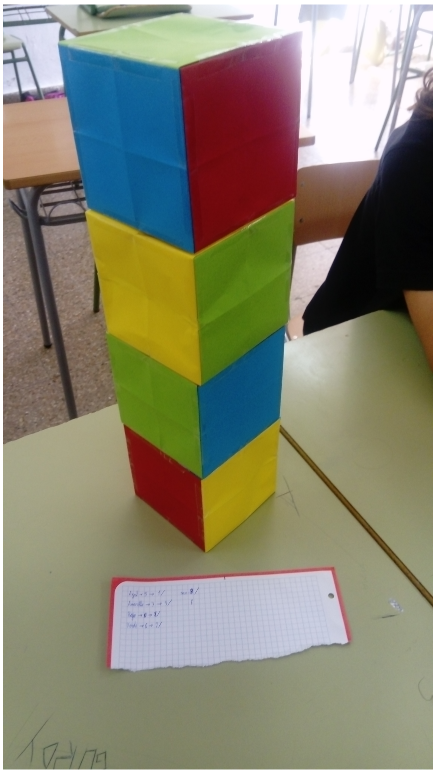


Figura 37: Classe de 4t d'ESO. Bogeria Instantània resolta i raonament fet a sota de com s'ha arribat a la solució.

Apartat M: Polígons, convexitat i el teorema de la galeria d'art

Al primer curs d'ESO, en l'apartat curricular d'Espai i forma, trobem la classificació i propietats de figures geomètriques de dues dimensions. Una bona forma d'interioritzar la definició de polígon convex és mitjançant problemes que puguem resoldre amb el Teorema de la galeria d'art. Dissenyem doncs un exemple de qüestionari per fer per parelles o grups més amplis (incentivant l'aportació d'idees i la capacitat d'estratègia) durant una hora de classe on s'aplica el teorema mencionat i repassem conceptes geomètrics bàsics sobre polígons. Facilitem com a material, a més del qüestionari, un full amb uns quants polígons de diverses característiques (adjunt a l'inici del llistat de preguntes) que puguin fer servir d'esborrany mentre raonen les respostes.

<u>Anàlisi de les competències treballades:</u>

- Competències generals: 4.
- competències d'àmbit: 6 i 8.

Proposta de qüestionari per l'alumnat:

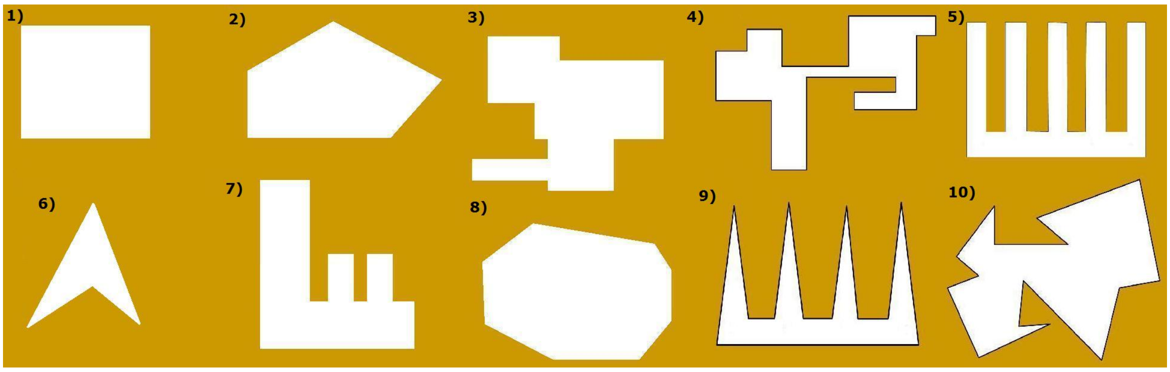


Figura 38: Figures sobre les quals farem els exercicis.

Exercici 1: Imagina que els polígons que tens dibuixats són els plànols (vista alçada) de les sales d'un museu ple de quadres i escultures de gran valor. Aquestes obres d'art es troben repartides per les sales però no especifiquem a on. Marca amb una creu a on col·locaries vigilants de seguretat per tal que totes les obres d'art, siguin on siguin, estiguin a la vista de com a mínim un vigilant.

De forma intuïtiva, estem marcant punts $p_0, p_1, p_2, ...$ que compleixen que per a tot punt A pertanyent a l'adherència del polígon, existeix una i natural tal que es pot traçar un segment recte entre el punt A i p_i. Si el polígon és convex, aleshores només es fa necessari un sol punt. En aquest primer exercici no parlarem de propietats poligonals, però familiaritzem a l'alumnat amb diferents polígons del pla i treballem el raonament sobre ells.

Exercici 2: Ho podrieu fer amb menys vigilants? Intenteu optimitzar el nombre de vigilants en cada sala i empleneu la taula següent:

Poligon	Nombre de vèrtex n	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	Nombre òptim de vigilants
1	4	1	1
2	5	1	1
3	16	5	2
4	20	6	3
5	20	6	5
6	4	1	1
7	14	4	3
8	8	2	1
9	12	4	4
10	15	5	3

Taula 3: Taula de valors per emplenar a partir de la figura 30. En aquest cas, adjuntem els resultats.

Quin nombre és més gran: el que heu posat a la tercera columna o el nombre de vigilants? Sempre? En quins casos coincideix?

Pel teorema de la galeria d'art, la part sencera de la tercera part del nombre de vèrtex és suficient per tenir tota la sala vigilada. És a dir, el nombre òptim de vigilants sempre serà menor o igual que la part sencera d'aquest terç. Provem si veuen aquesta propietat.

Exercici 3: Si us hi fixeu, quan el nombre de vèrtex és menor o igual a 5 o quan el polígon és convex un vigilant és suficient. Per què? Podríeu dibuixar un polígon amb més de cinc vèrtex no convex on només es necessiti un vigilant?

Provem si entenen per què la convexitat del polígon faria que un vigilant fos suficient i si entenen que a partir de la formula es pot veure que per menys de cinc vèrtex és suficient un vigilant independentment de la forma del polígon. Hi ha múltiples figures que podrien servir per respondre l'última pregunta d'aquest exercici. Per exemple, un amb forma de papallona, que tindrà 8 vèrtex però no serà convex.

Exercici 4: I si ara, en comptes de col·locar als vigilants a les cantonades de la sala els col·loquem al punt mig de les parets? Com, quants i en quines parets fixaries la seva posició?

Pel moment, s'ha conjecturat que, en alguns casos, $\left[\frac{n}{4}\right]$ *vigilants són suficients. Aquest pot ser un bon exercici per veure que donat un polígon qualsevol, el nombre de costats és igual al nombre de vèrtex i potser trobar un raonament per aquest camí. A més, és positiu treballar problemes amb l'alumnat que encara no han estat resolts de forma exacta i amb una resposta fixa demostrada.*

Exercici 5: Suposa que els vigilants es poden moure al llarg de les parets. En quines parets col·locaries vigilants?

Amb aquesta pregunta continuem estimulant el coneixement de les formes poligonals que hem proposat i la capacitat d'estratègia, a més de la visualització del moviment en un pla.

Exercici 6: Imagina que entrem en el torn de nit i totes les obres han d'estar vigilades per un vigilant (com a mínim) en tot moment per si entren lladres. A més, reforcem la vigilància de manera que un lladre no pugui atacar a un vigilant sense que un altre se n'adoni. Com els col·locaries per tal de que cap obra d'art estigui sense vigilància però tampoc ho estigui cap vigilant?

Plantegem aquest últim exercici per continuar reflexionant sobre les formes dels polígons i com a altra variant sobre la quantitat de preguntes que podem fer relacionades amb el teorema de la galeria d'art. Podem trobar moltes més variants, tot i que per al nivell que estem tractant considerem que seria d'una dificultat massa alta.

Apartat N: Aleatorietat, triangles en S^n i probabilitats geomètriques

Després de l'experiència treballant sobre els resultats de Hall i els triangles dins d'una bola n-dimensional, orientarem aquesta pràctica sobretot a la reflexió sobre l'aleatorietat i la definició de punts aleatoris. També, però, proposarem el càlcul previ de probabilitats geomètriques i barrejarem ambdues branques en un exercici final que resumeix la conclusió de Hall.

La pràctica està pensada per fer per parelles i només serà necessari un ordinador amb el GeoGebra instal·lat. La idea és que ocupi dues hores de classe: una per treballar la probabilitat geomètrica en figures més senzilles (a més de la construcció d'aquestes) i introduir la definició de punts aleatoris i una altra per treballar l'aleatorietat i arribar al resultat de Hall. Dissenyem les preguntes de guia per una classe de 4t d'ESO, un cop acabat l'apartat d'Estadística i atzar, on trobem un subapartat relatiu a la probabilitat que menciona la simulació amb recursos digitals.

Anàlisi de les competències treballades:

- Competències generals: 4.
- Competències d'àmbit: 7 i 12.

Proposta de guió per l'alumnat:

Exercici 1: Construïu un polígon tancat qualsevol P amb el GeoGebra i, al seu interior, delimiteu l'àrea d'una altra figura qualsevol F de manera que estigui totalment continguda en l'interior de la primera figura que heu dibuixat. Imagineu que ara voleu escollir un punt aleatori dins de P. Responeu a les següents preguntes sobre la probabilitat de que el punt es trobi també dins de F:

- Si engrandim F deixant fix P, la probabilitat augmenta o disminueix?
- Si engrandim P deixant fix F, la probabilitat augmenta o disminueix?
- Si engrandim P en la mateixa proporció que engrandim F, la probabilitat augmenta o disminueix?

Com creieu que es pot calcular aquesta probabilitat?

Amb aquestes preguntes no demanem que l'alumnat simuli cap comptador de probabilitat, simplement que puguin variar les àrees per, intuïtivament, respondre a les preguntes formulades. La clau per veure que la probabilitat vindria donada per la divisió de l'àrea de F entre l'àrea de P s'intenta donar a entendre amb la penúltima pregunta.

Exercici 2: Construïu un quadrat amb GeoGebra i escolliu dos vèrtex adjacents A i B. Quina és la probabilitat de que, donat un altre punt aleatori C de l'interior del quadrat, l'angle ACB sigui obtusangle? I la probabilitat de que sigui acutangle? Tenint en compte que la suma de les probabilitats per tots els casos possibles és 1, quina és la probabilitat de que sigui recte?

La probabilitat de que sigui obtusangle és igual a la divisió de l'àrea de la zona que es troba dins de la semicircumferència de diàmetre AB entre l'àrea total del quadrat. La probabilitat de que sigui acutangle és igual a la divisió de l'àrea de la zona que no es troba dins de la semicircumferència de diàmetre AB entre l'àrea total del quadrat. La probabilitat de que sigui recte és nul·la, ja que l'àrea d'un arc de circumferència és zero. Amb això practiquem el càlcul d'àrees i repassem alguns conceptes bàsics de probabilitat, com és que la suma de les probabilitats de tots els casos possibles és igual a la unitat.

Exercici 3: Feu l'exercici anterior fent servir un polígon qualsevol i delimitant una semicircumferència de diàmetre un dels costats, de manera que aquesta semicircumferència estigui totalment continguda en la figura.

Amb aquest exercici acabem de consolidar els plantejaments bàsics de probabilitat que intentàvem introduir en els dos exercicis anteriors i treballem la funció del càlcul d'àrees amb el GeoGebra.

Exercici 4: Dibuixeu dues circumferències concèntriques de manera que, donat un punt aleatori dins de la circumferència més gran, la probabilitat de que es trobi també a dins de la petita sigui igual a $\frac{1}{2}$. Importa el fet de que siguin concèntriques?

La relació entre els seus radis ha de ser d'un factor 4, contràriament a la resposta intuïtiva de que hagi de ser un factor 2. El fet de que siguin concèntriques, evidentment, no importa, ja que en aquest càlcul només té a veure la relació entre les àrees. Amb aquesta última pregunta estimulem la reflexió sobre l'aleatorietat.

Exercici 5: Dibuixeu una circumferència de radi arbitrari i centrada a l'origen. La funció *random()* del GeoGebra proporciona un nombre aleatori entre 0 i 1. Definiu punts aleatoris que es trobin dins de la circumferència a partir d'això.

Entenem que una part de l'alumnat farà l'exercici en coordenades polars i una altra part en coordenades cartesianes. En ambdós casos es cometrà, molt probablement, l'error que exposàvem a la memòria.

Exercici 6: Fent diverses proves, calculeu la probabilitat de que el triangle que formen tres punts definits així sigui acutangle. Us hauria de donar 0.28 aproximadament. Si no us dóna aquest resultat, sabríeu dir per què? Creieu que pot tenir a veure la transformació que li feu al nombre aleatori per definir les coordenades? Com es podria arreglar?

Aquest exercici podría ser el més complicat, ja que l'alumnat s'hauria d'adonar de que les transformacions que fan amb el nombre aleatori canvien les probabilitats dels resultats possibles quan afegim quadrats a les operacions.