

Treball final de grau
GRAU DE MATEMÀTIQUES
Gisela Yélamos Bayarri

DIDÀCTICA DE LA PROBABILITAT I L'ESTADÍSTICA PER PROJECTES

Facultat de Matemàtiques
UNIVERSITAT DE BARCELONA



Director: *Olga Julià de Ferran*

Realitzat a: *Departament de Matemàtiques i Informàtica*

Barcelona, 29 de juny de 2017

ABSTRACT

This paper is about project work, a current methodology in the classroom. My goal in realizing it has been on the one hand, to know the current documents used in education. On the other hand, discovering and learning a new way of teaching.

After the introduction, in the second chapter, you will find parts of the curriculum of primary, secondary and high school education. Information published by the "Department d'Educació". This curriculum becomes the guide for school educational activities and his spine is basic competencies (10 for primary, 12 for E.S.O. and 6 for high school).

In a mathematics curriculum based on basic competences beyond the blocks of traditional content (numbering and calculation, change and relations, space and form; measurement, statistics and randomness), the processes that are developed throughout the whole Mathematical work (problem solving; reasoning and testing; connections; communication and representation).

We mean by competence, the ability to use knowledge and skills, in a transversal and interactive way, in contexts and situations that need the intervention of knowledge related to different sciences, which implies the understanding, reflection and discernment being aware the social dimension of each situation.

In the next two chapters, in develops the method of projects. First, mentioning what they are and how they work (choose the project, data types, resources ...). The main features of project work are cooperative learning, the use of many challenges and direct contact with reality. Students are the center of learning and the projects promote their autonomy.

Here are two examples of projects: "Random Intuitions" (using randomly simulating a coin launching) and "Medical tests" (to apply the conditioned probability).

RESUM

Aquest treball tracta sobre el treball per projectes, una metodologia actual a l'aula. El meu objectiu en realitzar-lo ha estat d'una banda, conèixer els documents actuals usats en educació; i d'altra banda, descobrir i aprendre'n una nova manera d'ensenyar.

Després de la introducció, al segon capítol, trobareu parts del currículum de l'educació primària, secundària i batxillerat. Informació publicada pel Departament d'Ensenyament. Aquest currículum esdevé la guia de les activitats educatives escolars i es basa en les competències bàsiques (10 per primària, 12 per l'E.S.O. i 6 al batxillerat).

En un currículum de matemàtiques basat en competències bàsiques més enllà dels blocs de **continguts** tradicionals (*numeració i càlcul; canvi i relacions; espai i forma; mesura; estadística i atzar*), adquireixen una especial importància els **processos** que es desenvolupen al llarg de tot el treball matemàtic (*resolució de problemes; raonament i prova; connexions; comunicació i representació*).

S'entén per competència, la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva, en contextos i situacions que requereixen la intervenció de coneixements vinculats a diferents sabers, cosa que implica la comprensió, la reflexió i el discerniment tenint en compte la dimensió social de cada situació.

En els dos següents capítols, es desenvolupa el treball per projectes. Primerament, esmentant què són i com es treballen (tria del projecte, tipus de dades, recursos...). Les característiques principals dels treballs per projectes són l'aprenentatge cooperatiu, l'ús de molts recursos i el contacte directe amb la realitat. Els alumnes són el centre de l'aprenentatge i els projectes fomenten la seva autonomia.

A continuació, s'expliquen dos exemples de projectes: "Intuïcions sobre atzar" (treballa l'aleatorietat simulant un llançament d'una moneda) i "Proves mèdiques" (per aplicar la probabilitat condicionada).

Índex

CAPÍTOL 1:

Introducció.....	9
------------------	---

CAPÍTOL 2:

Objectius i motivació del problema. Repàs històric.....	11
2.1 La probabilitat i l'estadística com a ciència.....	11
2.2 Motivació de la probabilitat i l'estadística en l'ensenyança.....	13

CAPÍTOL 3:

La probabilitat i l'estadística dins el currículum actual.....	15
3.1 Educació primària.....	17
3.1.1 Sobre el currículum actual.....	17
3.1.2 Classificació competències primària.....	20
3.1.2.1 Dimensió resolució de problemes.....	21
3.1.2.2 Dimensió raonament i prova.....	25
3.1.2.3 Dimensió connexions.....	28
3.1.2.4 Dimensió comunicació i representació.....	31
3.1.3 Continguts primària.....	35
3.1.3.1 Primer Cicle.....	35
3.1.3.2 Segon Cicle.....	39
3.1.3.3 Tercer Cicle.....	43
3.2 E.S.O.	47
3.2.1 Classificació competències E.S.O.	48
3.2.1.1 Dimensió resolució de problemes.....	48
3.2.1.2 Dimensió raonament i prova.....	52
3.2.1.3 Dimensió connexions.....	54
3.2.1.4 Dimensió comunicació i representació.....	56

3.2.2	Continguts E.S.O	60
3.2.2.1	Primer Curs.....	60
3.2.2.2	Segon Curs.....	63
3.2.2.3	Tercer Curs.....	66
3.2.2.4	Quart Curs.....	68
3.3	Batxillerat.....	70
3.3.1	Classificació competències Batxillerat.....	72
3.3.1.1	Competències generals.....	72
3.3.1.2	Competències específiques.....	76
3.3.2	Continguts Batxillerat.....	80
3.3.2.1	Primer Curs.....	80
3.3.2.2	Segon Curs.....	83
3.4	Resum competències.....	85
3.5	Conclusions sobre el currículum.....	89

CAPÍTOL 4:

4.	Desenvolupament dels projectes.....	91
4.1	Treball per projectes.....	92
4.2	Raonament estadístic per projectes.....	95
4.2.1	La tria del projecte.....	97
4.2.2	Tipus de dades i fonts de dades.....	98
4.2.3	Calculadores i ordinadors.....	101
4.2.3.1	Càlcul i representació gràfica.....	101
4.2.3.2	Simulació.....	102
4.2.4	Informes.....	104
4.2.5	Recursos a Internet.....	105

CAPÍTOL 5:

Exemples.....	107
5.1 Comprovar les intuïcions respecte l'atzar.....	108
5.1.1 Objectius.....	108
5.1.2 Les dades.....	108
5.1.3 Preguntes activitats i gestió de la classe.....	110
5.1.4 Activitats d'ampliació.....	120
5.1.5 Algunes dificultats i errors previsibles.....	120
5.1.5.1 Intuïció en probabilitat.....	120
5.1.5.2 Percepció de l'aleatorietat.....	121
5.1.5.3 Elaboració de gràfiques.....	121
5.1.6 Anàlisi del contingut estadístic.....	122
5.2 Proves mèdiques.....	123
5.2.1 Objectius.....	123
5.2.2 Les dades.....	124
5.2.3 Preguntes activitats i gestió de la classe.....	124
5.2.4 Activitats d'ampliació.....	133
5.2.4.1 Les corbes ROC.....	133
5.2.4.2 Examen.....	134
5.2.5 Algunes dificultats i errors previsibles.....	136
5.2.5.1 Probabilitat condicionada.....	136
5.2.5.2 Teorema de Bayes.....	140
5.2.6 Anàlisi del contingut estadístic.....	141

CAPÍTOL 6:

Conclusions.....	143
------------------	-----

BIBLIOGRAFIA.....	145
-------------------	-----

AGRAÏMENTS.....	145
-----------------	-----

CAPÍTOL 1:

Introducció

Aquest treball de fi de grau del grau de matemàtiques, pretén ser alhora la culminació d'una etapa de coneixement i el inici d'una altra, més enfocada al futur professional.

L'elecció d'estudiar aquesta carrera ha estat sempre pensant en la passió i vocació que sento per la didàctica. En especial, per la didàctica de les matemàtiques. En aquest sentit, tot l'esforç i tot el camí recorregut, té un clar objectiu: educar matemàtiques.

Sent fidel al que sempre he pensat, un alt grau del coneixement de les matemàtiques en profunditat, ens aportarà als mestres no només més seguretat i formació en la matèria, sinó moltes eines per a transmetre aquests coneixements. Moltes maneres equivalents de plantejar-se un problema, molts camins diferents per a donar respostes i, també, la possibilitat de més d'una resposta vàlida.

Però com això no ho és tot, penso que és important sentir aquesta passió i admiració per les matemàtiques per tal de fer-la arribar a tot l'alumnat. Tant a aquells que la troben una assignatura interessant, com aquells que la veuen difícil, els que la treballen però no l'entenen o aquells que no volen ni veure-la.

M'agradaria fer sentir a l'aula la importància de les matemàtiques en el dia a dia, veure la seva repercussió, observar la seva presència en el món. I a partir d'aquí, primer visualitzant la practicitat, poder desenvolupar els temes. Perquè mai més ningú preguntés: per a què serveixen les matemàtiques?

I en aquest sentit, la probabilitat i l'estadística són potser la branca de les matemàtiques que ho posen de manifest d'una forma més natural i intuïtiva. Amb exemples visuals fàcils d'interpretar (gràfiques, funcions, ...), amb situacions quotidianes que ens afecten directament (factures de la llar, tractament de la informació digital, connexions a xarxes socials, ...), situacions esporàdiques però conegudes per tots (eleccions, sorteigs, ...), i més en general, oportunitats per a la interpretació de dades i la gestió d'aquestes.

I amb tot aquest desig d'aportar alguna cosa al món de la docència, m'he trobat que em falta encara molta formació en didàctica. I és per això que aquest treball ha estat creat també per a donar-me seguretat de cara al màster i també per acostar-me al món real, visitar aules i testar tota aquesta teoria 'in situ'. I més ara, que el mètode és clarament diferent de l'usat fa uns anys. L'accés a noves tecnologies, ha desenvolupat eines pràctiques per a utilitzar a l'aula i ben usades, poden facilitar l'aprenentatge.

Paral·lelament, la tipologia general de les classes ha notat canvis significatius, participació de l'alumnat i maneres diferents de fer arribar el coneixement (a partir de generar preguntes, recollir dades, interpretar-les, i donar respostes). En aquest context, sorgeixen noves metodologies de treball a l'aula, un ventall de possibilitats per a mestres i alumnes, amb el propòsit d'aprendre millor els coneixements, però, sobretot, fer-los útils en la vida real. Un d'aquests mètodes emprats en educació consisteix en treballar per projectes. Al llarg del treball, tractaré de profunditzar en el tema, i estudiar la seva viabilitat en l'estudi de la matèria de matemàtiques i, més contretament, en el l'aprenentatge de probabilitat o estadística.

Així doncs, amb aquest treball que té per títol "*didàctica de la probabilitat i l'estadística per projectes*" he fixat uns objectius clars: conèixer els currículums actuals de matemàtiques de primària, E.S.O. i batxillerat, així com les competències, i d'altra banda, descobrir les noves metodologies treballant per projectes, saber què són i com s'aplica i poder, així, extreure'n conclusions sobre els canvis en treballar per projectes. Aquesta metodologia representa un canvi important en la creació de recursos, la distribució horària de classes, la tipologia d'aula i sobretot, la participació i immersió de l'alumne en la tasca d'aprendre.

Dins el treball es troben, després dels objectius i la motivació del problema, dos blocs clarament diferenciats, un primer bloc més tècnic, que conté currículum, competències i continguts, i un segon bloc més pràctic, el desenvolupament, on s'aborda el tema de la didàctica per projectes.

I per tal d'assolir aquests objectius, ha estat clau la recerca d'informació a les fonts adients i la recerca de personal qualificat i escoles que em traslladin la teoria del treball, a la realitat a l'aula.

CAPÍTOL 2:

Objectius i motivació del problema. Repàs històric.

2.1. La probabilitat i l'estadística com a ciència

Existeixen molts motius per reconèixer la importància de l'estadística dins la societat. Per fer una mica d'història, cal parlar només d'estadística, doncs les primeres evidències del seu ús, varen ser la recopilació d'idees. Més endavant, s'introduirà la probabilitat, com a eina per a la interpretació d'aquestes.

L'estadística juga un paper primordial en el desenvolupament de l'individu, proporcionant eines metodològiques per relacionar variables, dissenyar experiments, millorar prediccions i, més en general, la presa de decisions en situacions concretes. És molt més que només xifres i gràfiques, és una ciència amb tanta antiguitat com l'escriptura i per si mateixa és auxiliar de totes les ciències – medicina, enginyeria, sociologia, psicologia, economia, etc.-, així com auxiliar dels governs, mercats i d'altres activitats humanes.

Des dels inicis de la civilització han existit formes senzilles d'estadístiques, perquè ja s'usaven representacions gràfiques i d'altres símbols sobre pells, roques, parets de coves, per contar el nombre de persones, animals o possessions de cert col·lectiu de persones. Podem dir, generalitzant, que l'estadística s'usava per a realitzar cens poblacionals i materials.

Parlem aproximadament del 3000 aC, quan els babilonis usaven argila per registrar dades sobre el mercat i bescanvi de subministraments.

També a l'antic Egipte, els faraons recopilaven dades relatives a la població i riquesa del país. Els grecs, cap al 594 aC realitzaven censos periòdicament amb fins tributaris, socials i militars. Però van ser els romans qui millor va saber emprar els recursos de l'estadística, realitzant censos cada 5

anys anotant naixements, defuncions, matrimonis, recomptes de bestiar i riqueses contingudes a les terres conquerides.

A posteriori de la caiguda de l'Imperi Romà, es van fer molt poques operacions estadístiques durant els posteriors 1000 anys, així doncs, els mètodes estadístics van ser oblidats durant l'Edat Mitjana.

Però, més endavant, durant els segles, XV, XVI, XVII l'estadística com a ciència no va parar de créixer gràcies a persones tan reconegudes com Leonardo Da Vinci, Nicolau Copernic, Galileu Galilei, Francis Bacon o René Descartes. Donant lloc a les primeres interpretacions de dades, així com prediccions sobre els naixements o defuncions per malalties, o les proporcions d'homes i dones que hi hauria.

Cap al segle XVII ja es van aportar indicacions força concretes sobre els mètodes d'observació, anàlisi quantitatiu i es van ampliar els camps de la inferència i la teoria estadística.

L'any 1760, Godofredo Achenwall, professor de la Universitat de Gotinga (Alemanya) va encunyar la paraula 'estadística' provinent del terme italià 'statista' i va preveure que les dades d'aquesta nova ciència serien l'aliat dels governants més eficients.

Un dels primers treballs sobre probabilitats correspon a Girolano Cardano, matemàtic italià del segle XVI. Al segle XVII trobem correspondència relativa a probabilitat en els jocs d'atzar entre els matemàtics Blaise Pascal i Pierre de Fermat. I durant el segle XVIII matemàtics com Bernoulli, Lagrange i Laplace, desenvolupen la teoria de probabilitats.

És aleshores, durant el segle XVIII, que comença l'auge de l'estadística descriptiva en afers socials i econòmics i a principis del segle XIX quan es comencen a assentar les bases teòriques de la teoria de probabilitats. És Arnold Fisher la figura més rellevat dins l'estadística, doncs la va situar com la poderosa eina que és avui dia.

Actualment, l'estadística s'ha convertit en un mètode efectiu per a descriure amb exactitud els valors de les dades econòmiques, polítiques, socials, psicològiques, biològiques i físiques, i serveix com a eina per relacionar i analitzar aquestes dades. L'estadística no només es basa en la recopilació de dades sinó també en la interpretació de la informació.

Alhora, el desenvolupament de la probabilitat ha augmentat l'abast de les aplicacions de l'estadística (molts conjunts de dades es poden estudiar amb exactitud usant determinades distribucions probabilístiques). Així com, per si mateixa, calcular les possibilitats que una cosa passi o succeeixi a l'atzar.

2.2. Motivació de la probabilitat i l'estadística en l'ensenyança

Entrant en matèria de didàctica, l'ensenyança de l'estadística i la probabilitat ja va ser introduïda dins el currículum anglès l'any 1961, però de forma opcional (només com a especialitat de matemàtiques) per als estudiants de 16 a 19 anys. Aleshores, Holmes, al 1980 va presentar el projecte School Council Project, on demostraven que era possible iniciar l'ensenyament de la probabilitat i l'estadística des de l'escola primària.

Alguns dels motius importants que sustenten aquesta teoria són:

- L'estadística és una part de l'educació general per a qualsevol ciutadà adult. És necessari adquirir la capacitat d'interpretar taules i gràfics estadístics que apareixen freqüentment als mitjans informatius.
- És bàsic de cara al futur laboral, ja que molts professionals necessiten d'aquests coneixements.
- Ajuda al desenvolupament personal, fomenta el raonament crític, basat en la valoració de l'evidència objectiva.
- Ajuda a entendre la resta de temes del currículum, tant en l'etapa d'educació obligatòria com a posteriori, atès que sovint apareixeran gràfiques, resums o conceptes estadístics.

Per tots aquests motius, ha crescut l'interès per l'ensenyança de l'estadística, insistint en la necessitat d'iniciar-la com més aviat possible. Dit d'una altra manera, proporcionar '*cultura estadística*' dotant de:

- a) Capacitat per interpretar i avaluar críticament la informació estadística, els arguments assentats en dades o els fenòmens que les persones poden trobar en diversos contextos
- b) Capacitat per discutir o comunicar les seves opinions respecte a tals informacions estadístiques.

Troblem avui dia, una quantitat important de conceptes relacionats amb la probabilitat i l'estadística dins el currículum actual de matemàtiques, fins i tot la creació de blocs diferenciats i conceptes clau que fan referència clarament a la probabilitat i l'estadística. I la introducció d'aquests ha estat motivada per la necessitat d'entendre el món que ens envolta.

Diguem que no parlem d'una "moda", no és un canvi de mentalitat o el intent d'induir una ampliació de coneixement, sinó una necessitat primordial.

El terme “statistical literacy” ha sorgit de manera espontània entre educadors estadístics els darrers anys, i ve a dir que l'estadística es considera avui dia part de l'herència cultural necessària per a qualsevol ciutadà educat.

“En l'àmbit internacional, la UNESCO implementa polítiques de desenvolupament econòmic i cultural per a totes les nacions, que inclouen no només l'alfabetització bàsica, sinó la numèrica. Per això els estadístics senten la necessitat de la difusió de l'estadística, no només com una tècnica per tractar les dades quantitatives, sinó com una cultura, en termes de capacitat de comprendre l'abstracció lògica que fa possible l'estudi quantitatiu dels fenòmens col·lectius”.¹

Al següent apartat estudiarem en detall la inclusió de conceptes estadístics dins el currículum actual educatiu. En resum, no només es fa referència a conceptes i procediments, sinó que s'emfatitza tot el procés de raonament i la interpretació de les dades obtingudes.

També, basant-nos en l'estadística, s'observa un gran canvi quant al punt de vista matemàtic: molt més pràctic, centrat en les aplicacions i mostrant la seva utilitat a partir de diverses matèries.

¹Ottaviani, M. G. (1998). Developments and perspectives in statistical education. *Proceedings of the Joint IASS/IAOS Conference. Statistics for Economic and Social Development.*

CAPÍTOL 3:

La probabilitat i l'estadística dins el currículum actual

Per introduir el següent apartat, primerament definirem el que és el currículum i les competències i quina és la relació entre ambdós conceptes.

D'una banda, el currículum d'una etapa educativa esdevé la guia de les activitats educatives escolars, explicita les intencions i proporciona línies d'acció adequades als mestres com a responsables últims de la seva concreció. Engloba els objectius, les competències bàsiques, els continguts, els mètodes pedagògics i els criteris d'avaluació de l'ensenyament.

D'altra banda, s'entén per competència, la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva, en contextos i situacions que requereixen la intervenció de coneixements vinculats a diferents sabers, cosa que implica la comprensió, la reflexió i el discerniment tenint en compte la dimensió social de cada situació.

La idea de competència se sustenta en els diferents tipus de continguts (conceptuals, procedimentals i actitudinals) i està relacionada amb la capacitat d'activar-los per fer front a situacions diverses, donant solució a problemes reals i actuar-hi de forma eficaç en diversos contextos.

A més de desenvolupar els coneixements, capacitats, habilitats i actituds necessaris (el saber, saber fer, saber ser i saber estar), els nois i les noies han d'aprendre a mobilitzar tots aquests recursos personals (saber actuar) per assolir la realització personal i esdevenir així persones responsables, autònomes i integrades socialment, per exercir la ciutadania activa, incorporar-se a la vida adulta de manera satisfactòria i ser capaços d'adaptar-se a noves situacions i de desenvolupar un aprenentatge permanent tota la vida.

Així doncs, els currículums inclouen les competències bàsiques, eix del procés educatiu, que ha d'assolir l'alumnat per tal d'arribar als objectius.

El currículum està orientat a l'adquisició de competències. Els continguts dins les diferents àrees del currículum, contribueixen a l'adquisició de competències bàsiques. Un currículum per competències significa ensenyar per aprendre i seguir aprenent al llarg de tota la vida.

Dins el següent bloc, trobareu fragments publicats pel Departament d'Ensenyament. Aquests documents són de fàcil accés, necessari per a tot educador, i una eina que serveix de base teòrica i punt de partida per a la creació dels seus recursos propis i les programacions. Es poden trobar a la pàgina web de l'xtec (Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya).

3.1. Educació primària

Atès que el treball pretén ser d'utilitat en la posterior tasca docent, l'extensió d'aquest s'ha vist afectada, dotant el treball d'una càrrega d'informació molt ampla i detallada.

Per tal de facilitar la tasca al lector, cal esmentar d'avançat el que trobareu en aquest primer subapartat del tercer capítol.

En primer lloc trobareu la definició dels blocs importants en la creació d'un currículum de primària: aspectes bàsics, estructuració de continguts, estratègies i metodologia, i avaluació.

En segon lloc, hi trobareu un ampli desenvolupament de les deu competències bàsiques, dividides en les quatre dimensions: resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació, i representació. Si voleu fer una lectura ja sintetitzada d'aquestes competències, podeu dirigir-vos a la pàgina 85 on, trobareu una llista d'aquestes deu competències.

I, en tercer lloc, trobareu un estudi dels continguts de primària, organitzats en els cinc blocs: numeració i càlcul, relacions i canvi, espai i forma, mesura, i estadística i atzar. Podeu accedir directament a aquest últim bloc, dirigint-vos a les pàgines 38(primer cicle), 42(segona cicle) i 46(tercer cicle).

3.1.1 Sobre el currículum actual

El decret 142/2007, de 26 de juny (DOGC núm. 4915), d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària, estableix que correspon als centres docents el desenvolupament del currículum, i el defineix com el conjunt de competències bàsiques, objectius, continguts, mètodes pedagògics i criteris d'avaluació.

El desenvolupament del currículum a cada centre i a cada aula implica disposar d'autonomia curricular, és a dir, que l'equip docent responsable de la seva aplicació pugui adaptar el currículum a les característiques del grup de nens i nenes i a la situació socioeconòmica i lingüística del centre i del seu entorn social.

Els aspectes bàsics de la proposta curricular competencial són:

1. La idea d'integració de coneixements, tant els propis d'una àrea com aquests amb els d'altres àrees, tant els conceptuals com els procedimentals i actitudinals.
2. La funcionalitat dels aprenentatges (aplicació dels coneixements en diferents situacions i contextos) ha de tenir en compte que l'organització dels diversos tipus de continguts (conceptes, procediments i actituds) és el mitjà a través del qual es poden comprendre i interpretar fets, situacions i problemes.
3. L'autonomia personal (adquisició de les eines per aprendre, prenent consciència del propi procés d'aprenentatge, tan individual com col·lectiu) ha de fomentar que l'alumnat prengui consciència del propi procés d'aprenentatge i també que aquest aprenentatge s'enriqueix en la mesura que es comunica i es comparteix amb els altres.

Quant a l'**estructuració de continguts curriculars**, la primera percepció és que són molts i que no hi ha prou temps per aconseguir que la majoria de l'alumnat els aprengui de manera significativa. I, tot i així, moltes vegades es constata que encara la llista s'hauria d'ampliar.

Per tant, la feina de seleccionar, distribuir i organitzar els continguts al llarg del cicle és molt necessària i important. Comporta tenir en compte que no tots els continguts tenen la mateixa rellevància. A més, un canvi de currículum no significa que s'hagin de canviar totalment els programes, sinó que el que cal és que les noves propostes siguin el marc per a afavorir l'aprenentatge significatiu i la millora educativa.

Si parlem de les **estratègies i la metodologia**, atès que l'eix del procés educatiu són les competències, s'han de seleccionar les estratègies necessàries perquè l'alumnat aprengui a utilitzar els recursos necessaris, els coneixements, les habilitats i les actituds, d'una manera flexible, adequada i en tota la seva complexitat, en contextos i situacions canviants i diversos.

Aprendre no és la simple adquisició de coneixements, sinó el desenvolupament de la capacitat d'utilitzar-los, és molt important prendre com a punt de partida, d'una banda, els coneixements que ja té l'alumnat i, d'una altra, fer referència a dubtes i problemes rellevants, i a situacions que tinguin, personalment i socialment, sentit per a qui aprèn.

Però, si es vol que l'alumnat desenvolupi aquestes competències, caldrà una coordinació eficaç:

- posar-se d'acord en la metodologia que entre tots es treballarà (molt especialment en allò que fa referència a les estratègies d'aprenentatge);
- treballar articuladament les diferents estratègies i tècniques d'aprenentatge, les habilitats comunicatives, i els diferents tipus de text i les habilitats cognitivo-lingüístiques (descriure, explicar, argumentar...);
- acordar l'avaluació que es farà i com es tindran en compte, en aquesta, els aspectes transversals.

L'**avaluació** és una eina bàsica que ha de permetre determinar el grau en què es van aconseguir les intencions educatives i ha de donar elements per a la reflexió i revisió de la pràctica docent per aconseguir canvis i millores en el procés d'ensenyament i d'aprenentatge. Ha de ser una part fonamental en la programació, en el disseny i la realització de les activitats d'aprenentatge.

Així doncs, existeix **certa autonomia curricular dels centres docents**, facilitant un marge força ampli per a la definició de projectes propis i contextualitzats, i reforçant l'autonomia de centres cap a la definició del seu propi projecte educatiu.

Per últim, cal citar que la **programació** consisteix en la planificació de la tasca educativa adreçada a l'alumnat de cada cicle de l'etapa, i comporta la necessitat de prendre decisions en relació amb les opcions metodològiques, organitzatives i d'avaluació, concretant les activitats que es faran, la seva distribució i temporització al llarg dels cursos. La programació, que es formalitza en un document, permet fer el seguiment de les actuacions previstes per tal de modificar-les, adaptar-les i millorar-les, quan calgui.

3.1.2. Classificació competències primària

Dins el currículum de d'educació Primària, trobem els següents àmbits:

- Àmbit lingüístic (Llengües estrangeres)
- Àmbit lingüístic (Llengua catalana i castellana)
- Àmbit de coneixement del medi
- Àmbit digital
- Àmbit matemàtic
- Àmbit educació física
- Àmbit artístic
- Àmbit d'educació en valors

En un currículum de matemàtiques basat en competències bàsiques més enllà dels blocs de **continguts** tradicionals (*numeració i càlcul; canvi i relacions; espai i forma; mesura; estadística i atzar*), adquireixen una especial importància els **processos** que es desenvolupen al llarg de tot el treball matemàtic (*resolució de problemes; raonament i prova; connexions; comunicació i representació*).

Tenim deu competències bàsiques dins l'àmbit matemàtic. I aquestes estan dividides en les quatre dimensions:

- Resolució de problemes
- Raonament i prova
- Connexions i comunicació
- Representació

3.1.2.1 Dimensió resolució de problemes

Un problema és una proposta d'enfrontament amb una situació desconeguda que es planteja a través d'un conjunt de dades dins d'un context, per a la qual, en principi, no es disposa d'una resposta immediata i que requereix reflexionar, prendre decisions i dissenyar estratègies.

Cal distingir bé entre un problema i un exercici. L'exercici és una activitat que pot portar-se a terme mitjançant la simple aplicació de tècniques, algorismes o rutines més o menys automatitzades. Un problema sempre convida a la recerca i, en resoldre'l, hi ha una espurna de descobriment que permet experimentar l'encant d'assolir la solució.

La resolució de problemes no és una tasca per fer al final d'un trajecte d'aprenentatge sinó que pot ser el desencadenant del procés. No tan sols cal ensenyar matemàtiques per resoldre problemes, sinó també ensenyar matemàtiques a partir i a través de la resolució de problemes. Una metodologia centrada en la resolució de problemes dóna l'oportunitat de desvetllar en l'alumnat el gust per enfrontar-se a un repte, lluitar-hi de manera tenaç, experimentar, cercar ajut adequat, si cal, assaborir l'èxit i adquirir confiança en les pròpies capacitats.

En el procés de resolució d'un problema hi ha diverses etapes:

- Entendre bé el que el problema demana, les dades que aporta i el context on es planteja.
- Fer un dibuix, un gràfic, una taula, un esquema...
- Experimentar, estimar, temptejar, conjecturar...
- Recordar problemes semblants que puguin resultar més familiars i idees matemàtiques que puguin ser útils.
- Planificar estratègies de resolució.
- Aplicar conceptes i eines matemàtiques per desenvolupar aquestes estratègies.
- Comprovar la correcció de la solució respecte al plantejament matemàtic i la seva raonabilitat en el context.
- Comunicar adequadament el resultat i el procés seguit.
- Prendre consciència del procés seguit i incorporar-lo al seu bagatge d'estratègies resolutives.

Aquestes etapes no es desenvolupen necessàriament en aquest ordre, a vegades l'estimació o l'experimentació fan entendre millor el problema. En general, a primària, quan hi ha dificultats de resolució l'alumne/a torna a iniciar el problema. Aquesta dimensió està integrada per tres competències:

Competència 1. Traduir un problema a una representació matemàtica i emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre'l.

Davant d'un problema el primer que cal és comprendre l'enunciat a partir d'imaginar o visualitzar la situació, d'identificar les dades i les relacions entre elles destriant les importants de les irrelevantes. Després cal traduir-ho a llenguatge matemàtic, emprant des de representacions personals fins a d'altres de més abstractes.

Un cop traduït el problema cal estimar possibles resultats i aleshores resoldre'l utilitzant les estratègies més adients: codificació, inducció (experimentar i treure pautes), analogia (relacionant amb problemes semblants), inversió (començar el problema per darrere), tempteig i les eines matemàtiques com ara representacions geomètriques, nombres i operacions, taules, diagrames, material manipulable, tot raonant els passos seguits de forma oral o escrita. La diversitat de maneres d'abordar un problema pot comportar l'ús de models materials o d'eines tecnològiques que permetin experimentar, fer simulacions i realitzar descobertes.

Continguts clau

- Significat de les operacions, de les propietats i les seves relacions entre elles.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Patrons.
- Magnituds mesurables. Unitats estàndards.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Obtenció, representació i interpretació de les dades estadístiques.
- Taules i gràfiques.

Competència 2. Donar i comprovar la solució d'un problema d'acord amb les preguntes plantejades.

Aquesta competència pretén potenciar la utilització de la solució d'un problema com l'oportunitat de validar i comprovar tot el procés realitzat. Abans de donar per resolt el problema, cal valorar la raonabilitat de les solucions, és a dir, si són lògiques atenent al context i descartar les que convingui, cosa que pot portar a refer el procés de resolució. Així mateix l'alumne/a ha de comprovar la correcció matemàtica de les solucions trobades.

Un cop comprovada la raonabilitat i la correcció de la solució, amb la seva expressió oral o escrita no finalitza la resolució del problema fins que s'explora l'existència o no de més solucions.

La comunicació de les solucions ha de transmetre clarament el resultat en el seu context.

Continguts clau

- Nombres. Relacions entre nombres.
- Significat de les operacions, de les propietats i les seves relacions entre elles.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Magnituds mesurables. Unitats estàndards.
- Relacions espacials.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Transformacions geomètriques.

Competència 3. Fer preguntes i generar problemes de caire matemàtic.

Formular-se preguntes de caire matemàtic va més enllà de respondre les que vénen donades. Requereix conèixer quins són els aspectes que la matemàtica estudia i els instruments que ofereix per investigar i trobar respostes i implica poder associar conceptes i procediments a situacions diverses.

Les situacions de la vida quotidiana ofereixen moltes ocasions per formular-se preguntes. En el treball escolar, en totes les àrees es presenten oportunitats per fer-ho. La mateixa àrea de matemàtiques és un context en el qual es poden formular preguntes, especialment durant la resolució d'un problema o durant una recerca.

Continguts clau

- Nombres. Relacions entre nombres.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Patrons.
- Equivalència.
- Tècniques, instruments de mesura.
- Relacions espacials.
- Transformacions geomètriques.
- Obtenció, representació i interpretació de dades estadístiques.

3.1.2.2 Dimensió raonament i prova

El raonament és consubstancial a la construcció del coneixement matemàtic i per tant ha d'estar present en l'aprenentatge de les matemàtiques. Provar, conjuntament amb raonar, permet donar sentit i validar el coneixement matemàtic.

El desenvolupament de la capacitat de raonar que es fa dins de l'educació matemàtica hauria de tenir com a objectiu que l'alumne/a l'apliqui a tots els àmbits de la seva vida quotidiana amb prou precisió lògica. Quan el raonament fet es pot comprovar augmenta la confiança i seguretat en la resolució de situacions, siguin matemàtiques o no.

L'alumne/a ha d'entendre que refusar un raonament té un aspecte positiu, el de cercar unes altres vies i, també, que la validació d'una afirmació no és el final sinó l'obertura cap a noves argumentacions.

Utilitzar el raonament matemàtic comporta:

- Analitzar situacions, per comparació i per contrast.
- Fer conjectures adaptades a la situació.
- Comprovar, validar o refutar conjectures.
- Precisar i ampliar conjectures.
- Generalitzar, establint models i patrons.
- Particularitzar models generals a casos concrets.
- Argumentar per comunicar i validar processos i resultats.

Aquests aspectes es poden presentar de forma conjunta.

El raonament i la prova han de poder aplicar-se a la vida quotidiana en entorns no necessàriament matemàtics i contribuir als raonaments propis de les altres àrees de coneixement.

El disseny i la gestió de les activitats ha de permetre a l'alumnat: fer i fer-se preguntes, tenir una visió global del procés seguit des de la situació inicial fins al resultat final, admetre que la solució potser no existeix o que no és única, admetre que l'error forma part del procés, adonar-se que la resolució és un pas per continuar resolent més situacions i tenir sentit crític.

Aquesta dimensió està integrada per dues competències matemàtiques:

Competència 4. Fer conjectures matemàtiques adients en situacions quotidianes i comprovar-les
--

La conjectura s'entendrà com una anticipació dels fets. A partir de l'observació i de l'exploració i la recerca de fets matemàtics sorgeixen afirmacions basades en suposicions.

Fer conjectures forma part del procés d'abstracció que implica la descoberta i expressió de relacions, propietats i, en particular, de patrons, és a dir, de regularitats.

Per comprovar que una conjectura no és certa cal trobar casos concrets on no es compleix (contraexemples). Aquesta constatació pot comportar modificar-la o canviar el conjunt d'elements on és vàlida.

Continguts clau

- Significat de les operacions, de les propietats i les seves relacions entre elles.
- Patrons.
- Equivalència.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Taules i gràfics.

Competència 5. Argumentar les afirmacions i els processos matemàtics realitzats en contextos propers.

Donar raons lògiques i matemàtiques per fonamentar conclusions i defensar-les és un pas important per arribar a comprendre que el raonament és més fiable que la intuïció, tot i que aquesta ens porti a resultats correctes en algunes ocasions. És important entendre que l'error és font de coneixement més que un obstacle o dificultat.

L'argumentació ha d'estar prou organitzada i ha de ser comprensible. És cabdal per comprendre els nombres i les operacions, per relacionar figures, per justificar algorismes mentals o escrits, per constatar equivalències de nombres, en la tria de les unitats de mesura, en el contrast entre l'estimació prèvia i el resultat obtingut, per distingir allò que és aleatori del que no ho és i per interpretar dades estadístiques.

Continguts clau

- Nombres. Relacions entre nombres.
- Significat de les operacions, de les propietats i les seves relacions entre elles.
- Equivalència.
- Transformacions geomètriques.
- Taules i gràfiques.

3.1.2.3 Dimensió connexions

La primera connexió que cal considerar és la dels processos del currículum de matemàtiques amb els de continguts. Per tant, caldrà preveure'ls de manera integrada en la planificació i el disseny de l'activitat matemàtica.

La majoria dels conceptes estan connectats amb altres conceptes, tant en el mateix bloc de continguts com amb d'altres blocs. També els algorismes i les tècniques matemàtiques s'han de relacionar amb els conceptes i propietats en què es basen, per tal de veure que formen un tot coherent i fortament lligat.

Hi ha idees transversals que són presents en diversos blocs de continguts, com ara quantitat, patró, equivalència, canvi, mesura... Hi ha connexions entre els diversos processos. Per exemple, el raonament i la representació són cabdals en la resolució de problemes. Conèixer aquestes relacions proporciona un saber més profund i aplicable. És important que es tingui consciència que els aprenentatges adquirits són útils i són font de nous sabers. D'altra banda, les idees matemàtiques s'apliquen a un gran ventall de fenòmens (altres àrees de coneixement, vida quotidiana...).

Els alumnes han de veure que les matemàtiques són quelcom més que un seguit de temes aïllats i que les poden usar en multitud d'ocasions en els contextos més diversos, i arribar a considerar-les útils i rellevants per a la seva vida més enllà de l'escola. Ser capaç de descriure el món real usant les matemàtiques permet comprendre'l millor i preveure resultats i conseqüències.

Qualsevol tema i situació implica connectar idees matemàtiques. Trobar i aplicar relacions entre els conceptes dona major coneixement sobre el que s'està treballant, en particular, és important connectar el nou coneixement amb el que ja es té.

El/la mestre/a ha de fer possible que s'adquireixi el coneixement de manera integrada més que no pas fragmentat. El món real i les altres àrees tenen tant un paper de contextos on descobrir matemàtiques com el de llocs on es poden aplicar.

Aquesta dimensió està integrada per dues competències:

Competència 6. Establir relacions entre diferents conceptes, així com entre els diversos significats d'un mateix concepte.

La relació entre conceptes i representacions, en matemàtiques, facilita la comprensió i ajuda a la resolució de problemes.

Establir aquestes relacions fomenta la concepció de les matemàtiques com un cos integrat capaç d'oferir diferents alternatives per resoldre una mateixa situació.

Connexions clau a emprar són:

- Diversos significats d'un mateix concepte, per exemple el concepte de fracció com a part de la unitat, com a part d'un grup o com a divisió.
- Entre conceptes d'un mateix bloc de continguts.
- Entre conceptes i representacions corresponents a blocs de continguts diferents.
- I entre representacions diverses d'un mateix concepte, com ara la representació dels nombres.

Continguts clau

- Nombres. Relacions entre nombres.
- Sistema de numeració decimal.
- Significat de les operacions, de les propietats i les seves relacions entre elles.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Patrons.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Transformacions geomètriques.

Competència 7. Identificar les matemàtiques implicades en situacions quotidianes i escolars i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.

Identificar quantitats (naturals, fraccionàries, decimals), figures geomètriques, magnituds, patrons i relacions i recollir dades, en situacions quotidianes així com en les diverses àrees de coneixement escolars, és molt important per poder usar les matemàtiques per resoldre problemes, i per comprendre millor la realitat.

No es tracta només de reconèixer els símbols, signes o figures, cal saber adonar-se si en una situació cal usar nombres, quina mena de nombres, quines magnituds relacionades amb la situació, etc. També cal adonar-se que en situacions de no-exactitud cal usar fraccions o decimals, i en situacions d'agrupació pot ser útil multiplicar, dividir o comparar. Igualment reconèixer patrons permet anticipar resultats o fer prediccions.

Continguts clau

- Nombres. Relacions entre nombres.
- Sistema de numeració decimal.
- Significat de les operacions, de les propietats i les seves relacions entre elles.
- Patrons.
- Magnituds mesurables. Unitats estàndards.
- Relacions espacials.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Obtenció, representació i interpretació de dades estadístiques.

3.1.2.4 Comunicació i representació

Les matemàtiques aporten un llenguatge formal que, a més del propi coneixement matemàtic, ens procura eines per a la comprensió del nostre entorn. La complexitat del llenguatge matemàtic resideix sobretot en l'abstracció. En aquest sentit és desitjable que aquest llenguatge esdevingui una forma natural d'expressió dins de la classe entre el mestre/a i els nens i les nenes. Una via per assolir aquest objectiu és potenciar la conversa sobre les matemàtiques, primer mitjançant el llenguatge verbal, i de forma progressiva anar-hi introduint els termes i formes pròpies del llenguatge matemàtic. Els nens i les nenes, quan poden donar sentit al llenguatge simbòlic, ben aviat s'adonen de l'estalvi que suposa el seu ús.

La pràctica habitual de l'expressió d'idees matemàtiques entre companys, tant oralment com per escrit, ajuda els estudiants a organitzar i refinar aquestes idees, i a ser clars, convincents i precisos en l'ús del vocabulari i símbols matemàtics. L'escolta atenta dels arguments dels companys proporciona oportunitats de reflexió i millora del propi coneixement.

La representació és una eina per construir, estructurar i comunicar idees matemàtiques. La comunicació matemàtica, des dels esbossos més simples fins al llenguatge simbòlic més elaborat, sempre implica representació. Les representacions sovint parteixen de models informals (dibuix, construccions amb materials manipulables) per evolucionar cap a models més formals: igualtats, taules, gràfiques. Alhora també tenen el seu espai de recursos TIC que faciliten la representació matemàtica.

Les múltiples varietats de representació proporcionen, a més de diverses possibilitats de mostrar idees matemàtiques, diferents vies d'aproximar-se a aquestes idees, d'organitzar-les i de comprendre-les. Un bon indicador del grau de comprensió d'una idea matemàtica és la capacitat de relacionar les diferents representacions d'aquesta idea i triar la forma de representació més adequada a la situació i propòsit plantejat.

El mestre/a ha de procurar que l'alumnat parli de matemàtiques, escolti i llegeixi reflexions i propostes matemàtiques, i escrigui matemàtiques, aprofitant el potencial de les diverses formes de representació de les més informals a les més estructurades fins arribar, de manera progressiva, al llenguatge simbòlic.

Aquesta dimensió està integrada per tres competències:

Competència 8. Expressar idees i processos matemàtics de manera comprensible tot emprant el llenguatge verbal (oral i escrit).

El llenguatge verbal esdevé una primera forma de representació del pensament matemàtic per als nens i nenes d'educació primària i permet elaborar el llenguatge matemàtic, més abstracte i sintètic.

Tant la comunicació oral com l'escripta sovint incorpora expressions pròpies del llenguatge matemàtic. L'ús del llenguatge verbal es relaciona de forma molt estreta amb la incorporació del llenguatge simbòlic per tal d'expressar el coneixement matemàtic.

Continguts clau

- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Equivalència.
- Magnituds mesurables. Unitats estàndards.
- Tècniques, instruments de mesura.
- Relacions espacials.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Obtenció, representació i interpretació de dades estadístiques.

Competència 9. Usar les diverses representacions dels conceptes i relacions per expressar matemàticament una situació.

Materials manipulables, dibuixos, imatges, figures geomètriques, eines TIC, esquemes, paraules, taules, gràfics, signes i símbols són representacions que expressen i comuniquen idees matemàtiques. Els diferents tipus de representacions mostren diverses interpretacions i nivells d'abstracció dels conceptes i les relacions per part dels alumnes.

La representació té diverses funcions en l'aprenentatge de les matemàtiques:

- Recollir i organitzar dades i informació.
- Esquematitzar una situació, prescindint de detalls concrets.
- Mostrar diversos exemples o situacions i relacionar-los, copsant els aspectes comuns i generalitzar.
- Resoldre problemes o analitzar situacions.
- Comunicar resultats o troballes.
- Destacar algun/s aspecte/s del concepte.

Continguts clau

- Sistema de numeració decimal.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Equivalència.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Obtenció, representació i interpretació de dades estadístiques.
- Taules i gràfiques.

Competència 10. Usar les eines tecnològiques amb criteri, de forma ajustada a la situació, i interpretar les representacions matemàtiques que ofereixen.

A causa de la gran quantitat d'eines tecnològiques existents per representar idees i relacions matemàtiques es fa necessari que els alumnes en coneguin algunes i siguin capaços de triar-ne d'adients en cada situació de treball matemàtic.

Les eines tecnològiques ofereixen representacions visuals (tridimensionals o planes) que cal interpretar per poder utilitzar-les per aprofundir els conceptes i les relacions matemàtiques. El coneixement i la correcta utilització de les eines tecnològiques, conjuntament amb els materials manipulables i visuals, són cabdals per a l'aprenentatge matemàtic ja que faciliten els processos de càlcul, de simulació, de representacions de nombres i dades, de representació de figures geomètriques i de visualització de patrons.

Continguts clau

- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb eines TIC).
- Tècniques, instruments de mesura.
- Relacions espacials.
- Les figures geomètriques: elements, característiques (2D i 3D) i propietats.
- Transformacions geomètriques.
- Obtenció, representació i interpretació de dades estadístiques.
- Fenòmens aleatoris.
- Taules i gràfiques.

3.1.3. Continguts primària

Tenint clars que els quatre processos són:

1. Resolució de problemes
2. Raonament i prova
3. Comunicació i representació
4. Connexions

Podem classificar els continguts de matemàtiques en els tres cicles de primària.

En tots ells trobarem els cinc blocs:

- Numeració i càlcul
- Relacions i canvi
- Espai i Forma
 - Mesura
- Estadística i atzar

3.1.2.1. Primer Cicle

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Comprensió dels nombres, de les seves formes de representació i del sistema de numeració.
 - Comprensió i ús del comptatge amb significat de quantitats discretes.
 - Ús de diferents llenguatges: verbal, gràfic, simbòlic, per representar els nombres fins a 3 xifres. Posada en comú de les diferents representacions.
 - Ús dels nombres naturals per a resoldre problemes dins de contextos significatius. Reconeixement dels nombres en situacions quotidianes. Lectura i escriptura dels nombres fins a 999.
 - Ús de diferents models per comparar i ordenar els nombres fins a 999. Situació dels nombres sobre la recta numèrica. Aproximació als nombres rodons.
 - Ús de les fraccions un mig i un quart en contextos significatius.
 - Ús dels sistema monetari en contextos reals. L'euro €.
 - Interpretació dels nombres com identificadors en situacions properes.
 - Classificació dels nombres segons diferents criteris, d'una xifra, de dues, de la família del 10,...

- Comprensió dels significats de les operacions i de les relacions que hi ha entre unes i altres.
 - Comprensió dels diferents significats de la suma i la resta amb nombres naturals, així com de la relació que hi ha entre elles.
 - Comprensió de les situacions d'agrupament com a multiplicació i les accions de repartiment com a divisió.
- Comprensió de la funcionalitat del càlcul i l'estimació.
 - Desenvolupament de l'agilitat mental en descompondre additivament els 20 primers nombres naturals.
 - Inici en l'elaboració d'estratègies de càlcul mental. Explicació verbal i escolta de les estratègies emprades.
 - Establiment d'analogies entre càlculs (ex. $4+3$; $40+30$; $400+300$).
 - Estimació raonable dels resultats de les sumes i restes.
 - Realització de la suma i la resta utilitzant algorismes.
 - Ús de les TIC i calculadores per desenvolupar el càlcul i per explorar els nombres i les operacions.

RELACIONS I CANVI

- Comprensió i anàlisi dels patrons, relacions i canvis.
 - Selecció classificació i ordre d'objectes segons diferents criteris.
 - Seguiment de sèrie de sons, numèriques, geomètriques,...
 - Descripció canvis qualitatiu i quantitatiu entre dues situacions.
- Ús de models i expressions matemàtiques per representar les relacions.
 - Representació material, verbal i gràfica d'una sèrie.
 - Escripció i lectura de frases matemàtiques amb significat propi.
 - Modelització amb objectes o gràficament de situacions relacionades amb la suma i la resta.

ESPAI I FORMA

- Anàlisi de les característiques i propietats de les figures de dues i tres dimensions.
 - Reconeixement, nominació i construcció de figures de dos i tres dimensions: triangle, cercle, rectangle, quadrat, circumferència, esfera, prisma, cilindre, cub.
 - Coneixement i ús del vocabulari adequat per descriure les figures i els seus elements.
 - Comparació i classificació de figures segons les seves semblances i diferències: cares planes, cares corbes, tenen vèrtexs, nombre de costats, angles...
 - Composició i descomposició de figures tridimensionals i planes amb materials i TIC. Verbalització de les propietats de les figures.

- Localització i descripció de relacions espacials.
 - Descripció, nominació i interpretació de posicions relatives a l'espai, referent a un mateix i a altres punts de referència.
 - Descripció i interpretació de la direcció en els desplaçaments a l'espai. Representació i elaboració d'itineraris senzills, laberints o mapes.
 - Ús del vocabulari bàsic (a prop, lluny, sobre, sota, darrere, davant, entre...) i de recursos TIC per orientar-se a través de laberints i mapes.
- Identificació i aplicació de transformacions geomètriques.
 - Reconeixement de desplaçaments, simetries i girs.
 - Exploració de moviments utilitzant materials (tessel·les, miralls, plegat de paper...) i TIC.
 - Reconeixement i creació de figures que tinguin simetries.
- Utilització de la visualització i models geomètrics per resoldre problemes
 - Creació d'imatges mentals de figures geomètriques utilitzant la memòria i la visualització espacial.
 - Utilització de recursos TIC per girar, reduir i deformar figures de dues i tres dimensions.
 - Reconeixement i representació de figures des de diferents perspectives.
 - Visualització i descripció del camí seguit en un itinerari senzill abans de realitzar-lo.
 - Reconeixement de formes i d'estructures geomètriques a l'entorn.

MESURA

- Comprensió de les magnituds mesurables, de les unitats i del procés de mesurar.
 - Reconeixement de les magnituds de longitud, capacitat, massa, àrea i temps, en contextos significatius.
 - Comparació directa i indirecta i ordenació de mesures de les diferents magnituds.
 - Mesura de les diferents magnituds utilitzant unitats no convencionals i convencionals (longitud, capacitat, temps,...).
 - Selecció de la unitat i de l'instrument adequats.
 - Lectura i escriptura de mesures en contextos reals.
- Aplicació de tècniques i instruments adequats per mesurar.
 - Aplicació correcta del procés de mesurar, tot utilitzant una unitat de forma repetida i el instrument adequat: cinta mètrica, regle, rellotge analògic, balança de plats.
 - Desenvolupament de referents comuns que facilitin la comparació, la mesura i l'estimació.
 - Descripció oral del procés de mesura i d'estimació.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Elaboració de preguntes que es puguin respondre amb dades. Recollida, organització i representació de dades.
 - Formulació de preguntes sobre temes propers a l'experiència dels alumnes i recollida de les respostes donades.
 - Planificació senzilla de recollida de dades amb mostres més petites de 30. Lectura de la freqüència absoluta.
 - Organització i representació de dades per categories a partir d'experiències informals d'ordenació, mitjançant objectes concrets, dibuixos i gràfics.
 - Utilització d'un vocabulari per descriure els atributs i per classificar segons alguns criteris
- Selecció i ús de mètodes estadístics per analitzar dades.
 - Comparació quantitativa de dades numèriques.
 - Elecció del tipus de gràfic o representació més convenient per resoldre un problema.
 - Plantejament de qüestions relatives al comptatge i aplicació a la resolució de problemes.
- Treure conclusions i fer prediccions basades en dades.
 - Discussió elemental sobre quan es poden aplicar o no les conclusions obtingudes de les dades d'una població, a una altra població.
- Comprensió i aplicació de conceptes bàsics d'atzar.
 - Ús del vocabulari de l'alumne per introduir nocions d'atzar.
 - Resposta a preguntes relacionades amb les experiències dels alumnes sobre la probabilitat de successos utilitzant expressions com possible o impossible.
 - Coneixement de l'atzar mitjançant la realització d'experiments amb materials (extracció de fitxes de colors d'una bossa, tirar daus, ruletes...).
 - Resolució de problemes senzills on intervinguin factors d'atzar.

3.1.2.2.Segon Cicle

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Comprensió dels nombres, de les seves formes de representació i del sistema de numeració.
 - Comprensió del Sistema de Numeració Decimal. Valor posicional.
 - Ús de diferents llenguatges: verbal, gràfic, simbòlic..., per representar el sistema de numeració decimal. Contrast de diferents representacions.
 - Reconeixement i ús de representacions equivalents d'un nombre. Lectura i escriptura dels nombres fins al milió.
 - Ús i contrast de diferents model per comparar i ordenar els nombres fins al milió.
 - Reconeixement de la fracció com a part d'una unitat i col·lecció.
 - Ús de diferents models de representació de les fraccions. Situació dels nombres naturals i fraccionaris, més comuns ($1/2, 1/4, 1/3$), sobre la recta numèrica. Aproximació als nombres rodons.
 - Ús dels nombres decimals en contextos reals. Coneixement i ús del sistema monetari: l'euro i els cèntims.
 - Cerca de peculiaritats dels nombres: parells, senars, ...
 - Interpretació dels nombres naturals i de codis numèrics dins de taules i gràfics.

- Comprensió dels significats de les operacions i de les relacions que hi ha entre unes i altres.
 - Comprensió dels diferents significats de la multiplicació i divisió amb nombres naturals així com de la relació que hi ha entre elles.
 - Identificació i ús de les operacions inverses: suma i resta; multiplicació i divisió.
 - Exploració de les propietats de les operacions.

- Comprensió de la funcionalitat del càlcul i l'estimació.
 - Desenvolupament de l'agilitat mental per descompondre els nombres additivament i factorialment. Automatització de taules de multiplicar.
 - Ús de les relacions entre les operacions per agilitar el càlcul mental. Establiment d'analogies entre càlculs.
 - Explicació i contrast de les estratègies de càlcul mental.
 - Estimació raonable dels resultats de les operacions amb naturals.
 - Realització de restes portant-ne, multiplicacions i divisions amb nombres naturals amb algorismes estàndard.
 - Realització de sumes i restes amb fraccions senzilles acompanyades de diferents formes de representació gràfica.

- Ús de les TIC i calculadores per desenvolupar el càlcul i per explorar els nombres i les operacions.
- Selecció adequada del tipus de càlcul segons la situació: càlcul mental, càlcul escrit i calculadora.
- Càlcul amb la moneda: euros i cèntims.

RELACIONS I CANVI

- Comprensió i anàlisi dels patrons, relacions i canvis.
 - Seguiment de sèries numèriques, geomètriques i descoberta del patró.
 - Creació de sèries numèriques i geomètriques.
 - Descripció de situacions en les que es produeixen canvis o altrament es mantenen constants.
- Ús de models i expressions matemàtiques per representar les relacions.
 - Expressió del patró d'una sèrie verbalment o gràficament.
 - Modelització de situacions problema mitjançant objectes, gràfics (fletxes), signes matemàtics.
 - Lectura i escriptura de frases amb 0 , $>$, $<$

ESPAI I FORMA

- Anàlisi de les característiques i propietats de les figures de dues i tres dimensions.
 - Identificació i descripció verbal de les propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions: poliedres i cossos rodons; polígons.
 - Coneixement i ús del vocabulari especialitzat per descriure propietats de les figures.
 - Representació, construcció i comparació de figures de dues i tres dimensions amb materials i TIC.
 - Classificació segons les seves propietats.
 - Investigació de la relació entre figures a partir de la seva composició, descomposició i transformació.
 - Exploració i reconeixement de figures congruents i semblants
- Localització i descripció de relacions espacials
 - Descripció de la localització i el moviment d'un objecte utilitzant el vocabulari adequat.
 - Utilització d'adreces o punts de referència per moure's en l'entorn.
 - Creació i ús dels sistemes de coordenades per localitzar distàncies entre dos punts i descriure camins.
 - Realització, interpretació i ús de plànols d'itineraris coneguts.

- Identificació i aplicació de transformacions geomètriques.
 - Realització de simetries, desplaçaments i girs en figures de dues dimensions. Predicció i descripció dels resultats.
 - Descripció d'un o varis moviments que mostrin que dues figures són congruents.
 - Identificació i descripció de les simetries axial i central en figures de dues i tres dimensions.
 - Utilització de recursos TIC per realitzar i predir moviments de figures
- Utilització de la visualització i models geomètrics per resoldre problemes
 - Identificació de les vistes parcials d'una figura.
 - Construcció i representació sobre paper de políedres i polígons.
 - Creació i descripció d'imatges mentals d'objectes, patrons i camins.
 - Identificació i construcció d'una figura de tres dimensions a partir de representacions en dues dimensions d'aquesta figura (i a l'inrevés).
 - Ús de regle, escaire i recursos TIC per ampliar la capacitat de raonament espacial.

MESURA

- Comprensió de les magnituds mesurables, de les unitats i del procés de mesurar.
 - Reconeixement de les magnituds de longitud, massa, capacitat, àrea, temps i amplitud d'angles.
 - Comparació directa d'angles i d'àrees.
 - Comprensió de la mesura com aproximació. Ús de múltiples i submúltiples de la unitat.
 - Ús de les unitats més comuns del Sistema Internacional: longitud (km,m,cm i mm); massa (kg,g); capacitat (l, ml).
 - Comprensió i ús de les unitats de temps (any, mes, setmana, dia, hora, minut) i de les seves relacions.
 - Lectura i interpretació de taules de mesura d'ús comú.
- Aplicació de tècniques i instruments adequats per mesurar.
 - Desenvolupament d'estratègies d'estimació en les magnituds.
 - Selecció de la unitat més adequada i de l'instrument per realitzar una mesura. Ús de regle i cinta mètrica i balances.
 - Disseny d'activitats de mesura dins d'un context significatiu.
 - Descripció oral i escrita del procés de mesura.
 - Interpretació i expressió d'interval de mesures.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Elaboració de preguntes que es puguin respondre amb dades. Recollida, organització i representació de dades.
 - Formulació de preguntes basades en fets i interessos propers als alumnes.
 - Recollida de dades mitjançant observacions, enquestes i experiments amb mostres més petites de 50. Interpretació de la freqüència absoluta.
 - Lectura, interpretació i utilització de diverses representacions de dades, com pictogrames i diagrames de barres.
 - Utilització de recursos TIC per representar dades.
 - Reconeixement de les diferències en la representació de dades qualitatives (dades que poden classificar-se) i quantitatives (dades que poden ordenar-se numèricament).
 - Lectura i comprensió de dades estadístiques extretes de llibres, diaris, Internet i altres mitjans.
- Selecció i ús de mètodes estadístics per analitzar dades.
 - Descripció de la forma i de les característiques importants d'un conjunt de dades.
 - Anàlisi de les característiques d'una col·lecció de dades quantitatives ordenades.
 - Identificació i comprensió de les nocions de moda i mediana.
 - Aplicació a la resolució de problemes.
 - Introducció a la noció de mitjana aritmètica.
- Treure conclusions i fer prediccions basades en dades.
 - Distinció entre el que mostren les dades i el que podrien esperar dels resultats.
 - Comprensió que molts dels conjunts de dades són mostres de poblacions més grans. Aplicació a la resolució de problemes.
 - Descripció oral d'una situació a partir de l'anàlisi de les dades.
- Comprensió i aplicació de conceptes bàsics d'atzar.
 - Descripció de successos i discussió del seu grau de probabilitat utilitzant expressions com segur, possible, impossible.
 - Inici a la quantificació de la probabilitat que un succés sigui segur, possible o impossible.
 - Predicció de la probabilitat de resultats d'experiments senzills i comprovació d'aquestes prediccions.
 - Exploració de la probabilitat mitjançant experiments que produeixin pocs resultats.
 - Resolució de problemes on intervinguin factors d'atzar

3.1.2.1 Tercer Cicle

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Comprensió dels nombres, de les seves formes de representació i del sistema de numeració.
 - Ús i comprensió de les fraccions i dels decimals per mesurar quantitats continues en contextos significatius.
 - Reconeixement i ús de les relacions entre fraccions decimals i percentatges més senzills.
 - Ús i contrast de diferents models per representar les relacions entre decimals fraccionaris i percentatges.
 - Reconeixement i cerca de fraccions equivalents.
 - Diferents models per comparar i ordenar fraccions i decimals.
 - Situació dels nombres decimals, fraccionaris i percentatges sobre la recta numèrica. Aproximació dels nombres decimals.
 - Cerca de característiques dels nombres: primers, compostos, múltiples de, divisors de... Elaboració de conjectures.
 - Interpretació i representació, utilitzant diferents models, dels nombres quadrats i cúbics.
 - Interpretació dels nombres grans expressats com a producte d'una potència en contextos significatius.
 - Interpretació dels nombres negatius en contextos irrealis.
 - Interpretació dels nombres naturals, decimals i fraccionaris dins de taules i gràfics. Creació de codis numèrics.

- Comprensió dels significats de les operacions i de les relacions que hi ha entre unes i altres.
 - Comprensió i ús dels diferents significats de les operacions amb nombres decimals. Multiplicació i divisió per nombres inferiors a 1.
 - Comprensió i ús de la suma i resta de fraccions mitjançant representacions gràfiques i aritmètiques.
 - Reconeixement de la potenciació i radicació com operacions inverses.
 - Exploració i comprensió de les propietats de les operacions i elaboració de conjectures.

- Comprensió de la funcionalitat del càlcul i l'estimació
 - Desenvolupament d'estratègies de càlcul mental amb nombres naturals, fraccionaris i decimals. Establiment d'analogies entre nombres naturals i decimals. Descripció oral i escrita d'estratègies
 - Ús de les propietats de les operacions, i de les relacions entre elles per agilitar el càlcul mental.
 - Estimació raonable dels resultats de les operacions amb nombres naturals, decimals i fraccionaris.

- Realització amb nombres decimals dels algorismes de la suma, resta, multiplicació i divisió amb decimals al dividend. Percentatge d'una quantitat .
- Ús de les TIC i calculadores per desenvolupar el càlcul i per explorar els nombres i les operacions.
- Selecció adequada del tipus de càlcul segons la situació: càlcul mental, càlcul escrit i calculadora.

RELACIONS I CANVI

- Comprensió i anàlisi dels patrons, relacions i canvis.
 - Seguiment de sèries numèriques, geomètriques i descoberta del patró. Creació de sèries numèriques i geomètriques.
 - Exploració de la dependència de variables en contextos significatius.
 - Ús de gràfics i de taules per analitzar constants i canvis entre situacions.
- Ús de models i expressions matemàtiques per representar les relacions.
 - Interpretació i expressió de funcions lineals conegudes (creixement, temperatura...).
 - Modelització i contrast de situacions problema mitjançant gràfics (fletxes, taules doble entrada, diagrames arbre...), i frases matemàtiques.

ESPAI I FORMA

- Anàlisi de les característiques i propietats de les figures de 2D i 3D.
 - Descripció amb precisió, classificació i comprensió de les relacions entre diferents figures de dues i tres dimensions, utilitzant les propietats que les defineixen. Coneixement i ús del vocabulari adequat per descriure les propietats de les figures.
 - Creació de figures tridimensionals usant materials i recursos TIC.
 - Relacions entre algunes figures geomètriques a partir de les seves característiques. Interpretació i elaboració de definicions basades en les propietats d'algunes figures.
 - Elaboració de conjectures sobre propietats geomètriques.
- Localització i descripció de relacions espacials
 - Representació de figures geomètriques sobre eixos de coordenades: polígons regulars, paral·lelograms... Anàlisi i interpretació gràfica de les propietats d'aquestes figures.
 - Utilització d'escala sobre mapes per calcular distàncies reals.
 - Localització de punts, creació de camins i determinació de la distància entre punts situats en un sistema de coordenades.

- Identificació i aplicació de transformacions geomètriques.
 - Descripció de transformacions: distàncies, angles i direccions.
 - Obtenció d'imatges de figures geomètriques utilitzant superfícies reflectores, recursos TIC i altres materials.
 - Anàlisi de les característiques de simetries, girs i translacions.
 - Reconeixement i construcció d'angles a partir de girs.
- Utilització de la visualització i models geomètrics per resoldre problemes.
 - Representació sobre paper de figures geomètrics amb propietats fixades, com les longituds dels costats o les mesures dels angles.
 - Ús de representacions planes d'objectes tridimensionals per visualitzar i resoldre problemes d'àrees i volums.
 - Ús del compàs, el transportador d'angles i recursos TIC per ampliar la capacitat de raonament espacial.
 - Aplicació d'idees i conceptes geomètrics a problemes de la vida diària i de l'entorn.

MESURA

- Comprensió de magnituds mesurables, d'unitats i del procés de mesurar.
 - Magnituds de capacitat, volum, àrea, amplitud d'angles.
 - Comparació i ordenació de mesures de volum, àrea i amplitud d'angles. Selecció i ús de les unitats adequades per mesurar-les. Comprensió i ús del Sistema Internacional i de les unitats de temps. Equivalència d'unitats.
 - Lectura de taules de mesura i d'escala en contextos reals.
 - Descripció oral, gràfica i escrita de la mesura de les diferents magnituds. Contrast i anàlisi de diverses estratègies de mesura.
- Aplicació de tècniques i instruments adequats per mesurar.
 - Desenvolupament d'estratègies d'estimació en les diferents magnituds, tot utilitzant referents comuns.
 - Anticipació i interpretació de l'error d'una mesura
 - Selecció amb criteri dels instruments i les tècniques apropiades per trobar la longitud, l'àrea, el volum i l'amplitud dels angles amb la precisió adequades. Ús del transportador d'angles.
 - Disseny de l'estratègia adequada per realitzar una mesura en un context significatiu. Crear i resoldre problemes.
 - Disseny d'escala i d'interval de mesura per interpretar dades. Comprovació de les mesura realitzada i contrast amb l'estimació. Descripció acurada oral i escrita del procés de mesura realitzat.
 - Inferència de fórmules per determinar les àrees del quadrat, rectangle i triangle. Inferència del volum del cub. Interpretació de la fórmula de l'àrea del cercle i del perímetre de la circumferència.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Elaboració de preguntes que es puguin respondre amb dades. Recollida, organització i representació de dades.
 - Formulació de preguntes i dissenys d'experiments o enquestes per recollir dades i poder comparar característiques..
 - Utilització de dades recollides per altres o generades a partir de simulacions (Internet, premsa escrita...). Obtenció de la freqüència absoluta en un conjunt de dades no superior a 50.
 - Utilització de freqüències, diagrames de barres i histogrames per a representar les dades obtingudes. Determinació del tipus de representació més apropiada al resoldre problemes.
 - Registre de dades i representació en gràfics en la resolució de problemes, utilitzant recursos TIC.

- Selecció i ús de mètodes estadístics per analitzar dades.
 - Comparació de conjunts de dades que tinguin alguna relació..
 - Coneixement i utilització de la mitjana aritmètica i ús de la mediana i la moda en un conjunt de dades no superior a 50.
 - Utilització de la calculadora i de recursos TIC per elaborar taules de valors i calcular la mediana i la mitjana aritmètica. Aplicació a la resolució de problemes.

- Treure conclusions i fer prediccions basades en dades.
 - Realització d'observacions, formulació de conjeitures i proposta de noves preguntes basades en les diferències entre dues mostres.
 - Utilització de diagrames de punts per analitzar la relació entre dues característiques en poblacions diferents. Aplicació a la resolució de problemes
 - Comprensió que hi ha maneres de quantificar el grau de certesa dels resultats estadístics.
 - Descripció oral i escrita a partir de l'anàlisi de les dades.

- Comprensió i aplicació de conceptes bàsics d'atzar.
 - Comprensió i utilització de la terminologia probabilística apropiada per descriure successos complementaris i mútuament excloents.
 - Comprensió que la mesura de la probabilitat d'un succés pot representar-se per un nombre comprès entre 0 i 1.
 - Realització de prediccions i discussió si els resultats obtinguts concorden o no amb les prediccions. Predir i comprovar la solució d'un problema.
 - Ús dels recursos TIC per treballar amb mostres grans. Aplicació a la resolució de problemes.

3.2. E.S.O

Dins el currículum de l'Educació Secundària Obligatòria, trobem els següents àmbits:

- Àmbit lingüístic
- Àmbit matemàtic
- Àmbit científicotecnològic
- Àmbit social
- Àmbit artístic
- Àmbit de l'educació física
- Àmbit de cultura i valors

La competència matemàtica, dins l'àmbit matemàtic, és l'habilitat per desenvolupar i aplicar el raonament matemàtic per tal de resoldre problemes diversos en situacions quotidianes. Més enllà dels coneixements, situa l'èmfasi en els processos i l'activitat. La seva adquisició comporta la capacitat i la voluntat d'utilitzar formes matemàtiques de pensament (pensament lògic i espacial) i de representació (fórmules, models, construccions, gràfics i diagrames). Tenim dotze competències bàsiques dins l'àmbit matemàtic.

Per a l'àmbit matemàtic s'han establert setze continguts clau (CC), que es distribueixen en funció de la seva relació amb cada competència.

Avanço al lector que a les següents pàgines trobarà, de nou, un ampli desenvolupament de les dotze competències bàsiques, i que podeu dirigir-vos a la pàgina 85 on, trobareu una llista d'aquestes així com una taula que les relaciona amb els continguts clau.

També trobareu un estudi dels continguts d'E.S.O., organitzats igual que en la primària (per blocs) i que podeu accedir al bloc estadística i atzar dirigint-vos a les pàgines 62(primer curs), 65 (segon curs), 67(tercer curs) i 69(quart curs).

Abans de començar, cal notar que la competència digital és una competència transversal que s'adquireix a través de diverses matèries, i considerant que la competència 12 de l'àmbit matemàtic esmenta l'ús de tecnologies diverses, s'han incorporat referències a l'àmbit digital en els continguts clau (CCD) i els continguts per cursos.

Les dotze competències així com els setze continguts clau, estan dividits en el currículum en 4 dimensions diferents (resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació i representació)

3.2.1. Classificació competències E.S.O.

3.2.1.1 Dimensió resolució de problemes

Aquesta dimensió està integrada per quatre competències:

Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.

Aquest primer pas en la resolució d'un problema comporta:

- La comprensió del problema assumint el contingut, simplificant el que calgui i determinant la informació que aporta i la que demana.
- La identificació dels aspectes matemàtics que conté.
- El reconeixement d'estructures matemàtiques que s'hi adaptin, com ara regularitats o relacions de tipus aritmètic, geomètric o funcional.
- L'elecció de maneres de representació eficients.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC11. Magnituds i mesura.

CC13. Sentit de l'estadística.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.

Aquesta competència, central en la resolució de problemes, fa referència a la capacitat d'aplicar tot el bagatge de coneixements matemàtics de què disposa l'alumnat amb l'objectiu de resoldre problemes prèviament formulats matemàticament. És una competència que requereix:

- Emprar amb agilitat continguts matemàtics adequats.
- Posar en joc estratègies resolutives a partir d'experiències prèvies en resolució de problemes però adaptant-les al cas plantejat i ajustant-les progressivament en un procés, sovint cíclic, d'assaig i millora, de replantejament, de revisió de decisions preses...
- Mantenir el sentit del context en què el problema està plantejat, no oblidar que els models matemàtics que s'utilitzen representen la realitat que el problema descriu.

Continguts clau

CC2. Raonament proporcional.

CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.

CC11. Magnituds i mesura.

CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.

Aquesta competència està directament relacionada amb la competència bàsica d'autonomia i iniciativa personal, ja que té un component essencial d'autogestió del coneixement combinat amb la confiança en les pròpies possibilitats.

Però per assolir-la no n'hi ha prou a mantenir l'actitud de no rendir-se davant dels obstacles i de practicar un treball metòdic, cal ser conscient que sempre hi ha diversos mètodes correctes de resolució dels problemes, que el camí cap a la solució no és únic, i que la majoria de situacions en què ens trobem en la vida permeten una gran diversitat d'abordatges.

Continguts clau

CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.

Per poder generar preguntes rellevants des d'un punt de vista matemàtic, cal que l'alumnat sàpiga destriar quines admeten un tractament matemàtic i quines no. És a dir, quins són els tipus de respostes que les matemàtiques poden oferir en funció de la situació tractada.

El domini d'aquesta competència implica reconèixer i identificar oportunitats del nostre entorn en les quals es poden aplicar i utilitzar les matemàtiques per respondre a problemes diversos i interpretar les possibles respostes en el context d'aquest problema, determinant si són raonables en la situació objecte d'estudi.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

CC11. Magnituds i mesura.

CC13. Sentit de l'estadística.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

3.2.1.2. Dimensió raonament i prova

Aquesta dimensió està integrada per dues competències matemàtiques:

Competència 5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.

Un fet essencial de les matemàtiques és saber utilitzar la seva estructura lògica i, generalment mitjançant demostracions, validar la raonabilitat de les afirmacions prèviament fetes.

Aquesta competència implica:

- Fer argumentacions sobre:
 - propietats de nombres, figures geomètriques, construccions geomètriques, funcions, dades obtingudes en una anàlisi estadística;
 - relacions entre conceptes per comprovar i demostrar la seva equivalència.
- Utilitzar patrons, proporcions, construccions, algorismes, ús de contraexemples com a eines per a les demostracions.
- Usar processos de raonament recursiu, deductiu, inductiu, relacional, que mitjançant taules, gràfics, símbols, anàlisi de dades... permetin precisar, contrastar, comprovar i demostrar les afirmacions fetes.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC2. Raonament proporcional.

CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.

CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

CC13. Sentit de l'estadística.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.

Transferir l'ús del raonament matemàtic a entorns no necessàriament matemàtics (escolar, familiar, de carrer, administratiu, econòmic, etc.) facilita el creixement i el coneixement en altres àmbits.

Aquesta competència implica:

- Utilitzar els raonaments numèrics, algebraics, mètrics, estadístics, i usar el llenguatge matemàtic en situacions properes, com per exemple variació de temperatures, superfícies i volums en edificis i donar noms matemàtics a objectes i situacions properes.
- Ampliar el raonament matemàtic, utilitzar el llenguatge matemàtic i fer ús de representacions de funcions, càlculs, taules, fórmules, mètodes estadístics a altres disciplines, per fer de forma natural un ús integrador del raonament matemàtic dins de cada matèria.
- Usar el raonament matemàtic per col·laborar en l'obtenció de coneixements més aprofundits a les altres àrees.
- Fer servir raonament matemàtic amb argumentacions reflexives i crítiques en àmbits no necessàriament matemàtics, com per exemple interpretar la variació d'un procés si s'altera un dels factors que hi intervenen.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.

CC13. Sentit de l'estadística.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

3.2.1.3 Dimensió connexions

Aquesta dimensió està integrada per dues competències:

Competència 7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.

Arribar a veure les matemàtiques com un tot integrat facilita la flexibilitat en el raonament i en l'anàlisi de les noves situacions problemàtiques. La transferència dels coneixements que es tenen sobre una part de les matemàtiques cap a d'altres parts contribueix a promoure aquesta visió i facilita la comprensió dels continguts.

Això vol dir:

- Relacionar conceptes dels temes clau, com ara fraccions, decimals i percentatges.
- Relacionar els procediments amb els conceptes implicats.
- Integrar conceptes que tenen aspectes rellevants en comú, com per exemple integrant sota el raonament proporcional els conceptes de raó, proporció, percentatge, escala, figures semblants, pendents, probabilitat, distribucions estadístiques i, en general, les comparacions multiplicatives.
- Connectar les idees transversals, com ara la d'equivalència, relacionant l'equivalència de fraccions amb l'equivalència d'àrees i l'equiprobabilitat, etc.
- Relacionar els blocs de continguts:
 - àlgebra i geometria;
 - nombres i geometria a través de la mesura geomètrica;
 - nombres, estadística i geometria;
 - relacions i canvi amb nombres, com en el cas dels patrons numèrics de divisibilitat, decimals periòdics, potències, notació científica;
 - relacions i canvi i geometria, com el cas de les transformacions geomètriques.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC2. Raonament proporcional.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.

CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.

Competència 7. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.

Es demana associar models o estructures matemàtiques a contextos diaris, de l'entorn o d'altres disciplines, més enllà de la resolució de problemes extrets del món real. Per exemple: la identificació dels nombres enters com a model de situacions de mesura de temperatures, altituds relatives, fusos horaris, dades econòmiques, etc., permetrà aplicar a aquests contextos les propietats i representacions simbòliques dels enters per obtenir més informació sobre el context.

Tenir coneixement conscient de models matemàtics diversos possibilita usar-los en contextos disciplinaris, com en el cas de les funcions en les ciències naturals o les socials. Més enllà de l'ús instrumental de les matemàtiques, possibilita una millor comprensió dels conceptes de les altres disciplines.

Continguts clau

CC2. Raonament proporcional.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC11. Magnituds i mesura.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

3.2.1.4 Comunicació i representació

Aquesta dimensió està integrada per quatre competències:

Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.

Les formes de representació de conceptes i relacions matemàtiques, enteses en el sentit més ampli, són necessàries per a la comunicació matemàtica. Els alumnes poden generar noves formes de representació o versions de les estàndards que proposa el professorat. La representació ha de permetre plasmar:

- Conceptes matemàtics.
- Relacions entre conceptes.
- Els procediments algorísmics o els de resolució de situacions.

Les representacions tenen diferents nivells d'abstracció, des de les més concretes, com ara un dibuix o un esquema, fins a les més genuïnament matemàtiques, com ara els símbols, les taules, les figures geomètriques i els gràfics. En alguns casos, una representació d'alguna situació matemàtica pot prendre diferents formes i el pas de l'una a l'altra o l'elecció de la més adequada en cada cas fa avançar cap a la seva resolució.

Continguts clau

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.

CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.

Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.

L'alumnat ha de ser capaç d'expressar i comprendre idees matemàtiques tant oralment com per escrit. Expressar idees matemàtiques comporta la capacitat de descriure (el què), d'explicar (el perquè), de justificar (el perquè del perquè), d'interpretar (jo crec que...), d'argumentar (és així perquè...). Aquesta expressió cal que sigui clara, és a dir, que s'entengui i sigui precisa, que s'utilitzi un llenguatge adequat amb els termes pertinents.

En un primer estadi, la comunicació d'idees matemàtiques pot ser en llenguatge verbal, però a mesura que es va avançant en el procés s'afegeix l'ús del llenguatge matemàtic, és a dir, les formes de representació pròpies de les matemàtiques com ara els símbols, els gràfics, les figures, les taules, els esquemes, etc. L'assoliment d'aquesta competència es culmina quan, de manera natural en la vida quotidiana, s'utilitza la terminologia matemàtica apresada.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.

CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.

La comunicació és fonamental en el procés de construcció col·lectiva del coneixement, així com en la transmissió de les idees ja elaborades. Quan s'ha entès un concepte matemàtic o s'ha superat el repte de resoldre un problema, s'ha de ser capaç de presentar la solució en públic i oferir-ne una explicació o justificació.

Per fer-ho, cal:

- Construir i comunicar explicacions i arguments en el context propi de la situació o del problema, tot reflexionant sobre el procés i la solució.
- Identificar i criticar els límits del model utilitzat i el seu grau de precisió.
- Generar preguntes que permetin avançar en el procés de construcció i ampliació del pensament matemàtic.

Aquesta competència requereix una participació personal directa i activa, però és amb la cooperació, l'ajuda mútua i el treball en equip com s'arriba a cotes més altes en la construcció del coneixement. La interacció necessària per al treball col·laboratiu es veu reforçada per les possibilitats de comunicació i compartició que facilita la tecnologia web i els entorns virtuals d'aprenentatge.

Continguts clau

CC1. Sentit del nombre i de les operacions.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

La competència matemàtica està molt relacionada amb la capacitat d'emprar les tecnologies en general i la tecnologia informàtica en particular. Les tecnologies faciliten el càlcul i els processos repetitius, cosa que permet alliberar recursos cognitius per centrar-se en el contingut.

Transformar la informació en coneixement exigeix el domini de les destreses relacionades amb el raonament per cercar, organitzar, relacionar, analitzar, sintetitzar i fer inferències i deduccions. En definitiva, comprendre i integrar la informació en els esquemes previs del coneixement matemàtic amb criteris d'idoneïtat, tot valorant les seves potencialitats i limitacions.

Aquesta competència requereix:

- Emprar eines de mesura, cercadors d'Internet, editors d'equacions i de diagrames.
- Usar calculadores i fulls de càlcul per treballar els continguts relatius al càlcul (mental, estimatiu, algorísmic i algebraic).
- Utilitzar programes per a la creació de gràfics estadístics i funcionals que, a més de millorar les representacions gràfiques, permeten la interactivitat i evidencien la connexió entre fórmula, taula i gràfica.
- Dominar programes de geometria dinàmica que facilitin l'estudi de les figures geomètriques de dues i tres dimensions: característiques, propietats i processos de construcció.

Continguts clau

CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.

CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.

CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

CCD9. Eines d'edició de documents de text, presentacions multimèdia i processament de dades numèriques.

CCD24. Aprenentatge permanent: entorns virtuals d'aprenentatge, recursos per a l'aprenentatge formal i no formal a la xarxa...

3.2.2. Continguts E.S.O.

De nou, necessitem tenir clar que els quatre processos són:

1. **Resolució de problemes**
2. **Raonament i prova**
3. **Comunicació i representació**
4. **Connexions**

Es classifiquen els continguts per cursos (primer, segon, tercer i quart d'E.S.O.). I també en tots ells trobarem els cinc blocs:

- **Numeració i càlcul**
 - **Canvi i relacions**
 - **Espai i Forma**
 - **Mesura**
 - **Estadística i atzar**

3.2.2.1. Primer curs

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Nombres naturals i enters.
 - Significat en contextos diversos.
 - Expressió de valors o variacions (quantitats, valor monetari, temps, temperatures...).
 - Comparació i ordenació.
 - Els nombres indoaràbics, la introducció del zero i els nombres negatius en la història de les matemàtiques.
 - Representació gràfica (recta numèrica).
 - Factorització, múltiples i divisors.
- Fraccions
 - Significat en contextos diversos.
 - Representació gràfica (recta numèrica).
 - Comparació i ordenació.
 - Aproximació amb nombres decimals.
 - Operacions (regles de càlcul i interpretació gràfica).
 - Recursos digitals (calculadores i GeoGebra) per a la realització i comprovació de càlculs numèrics.
 - Estratègies numèriques per resoldre problemes.
- Càlcul mental.
 - Amb enters i fraccions.
 - Operacions inverses (sumes i restes; multiplicació i divisió).
 - Estimació de resultats.

CANVI I RELACIONS

- Patrons per expressar regularitats entre magnituds i quantitats.
- Taules i gràfics per expressar relacions.
 - Relacions quantitatives entre magnituds i quantitats.
 - Recursos digitals per a la representació de taules i gràfics.
 - Diferents formes de representació: expressions verbals, taules i gràfics.
 - Ús d'expressions, taules i gràfics per resoldre problemes.
 - Ús de programari lliure de geometria dinàmica, tipus GeoGebra, per representar taules i gràfiques.

ESPAI I FORMA

- Figures geomètriques de dues dimensions.
 - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models.
 - Classificació i propietats.
 - Posició i orientació de les figures.
 - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat).
- Simetria.
 - Identificació en entorns propers (natura, construccions, fotografies...).
 - Representació i construcció.
- Eines i instruments.
 - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats).
 - Instruments de dibuix (regle, escaire, compàs i transportador).
 - Eines digitals (*applets* diversos i programari lliure de geometria dinàmica, tipus GeoGebra).

MESURA

- Unitats de mesura de magnituds, longituds, angles i d'àrees.
 - Selecció de les unitats adequades a cada situació.
 - Relació entre unitats i conversió entre unitats.
 - Història del metre com a unitat de mesura universal.
- Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions.
 - Estimació a vista de mesures d'objectes de l'entorn.
 - Ús dels instruments adequats en les mesures d'objectes.
 - Presa de mesures de longituds.
 - Càlcul de longituds, angles, perímetres i àrees.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Estudis estadístics
 - Disseny d'investigacions.
 - Recollida de dades (observacions, enquestes i experiments).
 - Dades qualitatives i quantitatives.
- Gràfics estadístics.
 - Diagrames de punts, de barres i de sectors.
 - Característiques i classificació.
 - Full de càlcul i recursos TAC.
- Eines d'anàlisi de dades.
 - Full de càlcul i recursos TAC.
 - Mesures de centralització: mitjana, mediana i moda.
- Conceptes bàsics de probabilitat.
 - Successos probables o no probables, grau de probabilitat (qualitatiu).
 - Vocabulari: segur, igualment probable i improbable.
 - Predicció de la probabilitat de resultats d'experiments senzills.
 - Comprovació de les prediccions amb proves reiterades.
 - Identificació de la probabilitat d'un succés amb un nombre comprès entre 0 i 1.
 - Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats.

3.2.2.2. Segon curs

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Nombres racionals.
 - Significat en contextos diversos.
 - Expressió: fracció, decimal, percentatge (tria de l'adequada a la situació).
 - Representació gràfica (recta numèrica).
 - Operacions (regles de càlcul i interpretació gràfica).
 - Origen i utilització de les fraccions a l'antiguitat (Egipte, Índia, Grècia).
 - Ús de fraccions (com a divisió, com a operador i com a raó) per resoldre problemes en contextos diversos.
 - Eines digitals (calculadores i programari lliure, tipus GeoGebra).
- Percentatges.
 - Càlcul. Augments i disminucions percentuals.
 - Ús dels percentatges per resoldre problemes en contextos diversos.
- Càlcul mental.
 - Amb fraccions.
 - Amb percentatges senzills.
 - Operacions inverses (potències i arrels).
 - Estimació de resultats.

CANVI I RELACIONS

- Proporcionalitat directa i inversa.
 - Raons i proporcions per representar relacions entre quantitats.
 - Representació (enunciat, expressió verbal, taula, gràfica, fórmula).
 - Resolució de situacions amb magnituds proporcionals.
- Funcions.
 - Generals (sense fórmula).
 - Taxa de variació.
 - Lineals o no lineals (enunciat, expressió verbal, taula, gràfica).
 - Recursos digitals interactius per a la representació de taules i gràfics, tipus GeoGebra.
 - Resolució de problemes amb funcions (sense fórmula) o lineals.
- Equacions de 1r grau.
 - Regles de l'àlgebra.
 - Orígens de l'àlgebra simbòlica.
 - Càlculs algebrics amb calculadora o GeoGebra.
 - Resolució de problemes amb equacions.

ESPAI I FORMA

- Figures i cossos geomètrics.
 - Identificació en objectes de dues i tres dimensions (descripció i propietats que les defineixen).
 - Construcció, composició i descomposició d'objectes de dues i tres dimensions (materials manipulables, instruments de dibuix i eines digitals, tipus GeoGebra).
 - Grandària, posició i orientació de figures planes en mosaics i elements de l'entorn real.
 - Representació plana d'objectes de tres dimensions.
 - Desenvolupament pla de cossos geomètrics.
- Proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions.
 - Angles, longituds i àrees.
 - Escales.
 - Proporcions geomètriques rellevants (fulls DIN A4 i proporció àuria).
 - Ús de la proporcionalitat per a la resolució de problemes.
- Teoremes de Tales i de Pitàgores.
 - Raonament i prova.
 - Demostracions dels teoremes en diferents contextos històrics.
 - Ús dels teoremes per a la resolució de problemes sobre triangles rectangles.

MESURA

- Unitats de mesures d'àrees i volums.
 - Selecció de les unitats adequades a cada situació.
 - Relació entre unitats i conversió entre unitats.
- Longituds, perímetres i àrees de figures planes.
 - Mesures directes.
 - Mesures indirectes (semblança, Tales i Pitàgores).
 - Ús de les relacions entre longituds, perímetres i àrees per a la resolució de problemes en contextos diversos.
- Superfícies i volums de cossos de l'espai.
 - Estratègies per calcular les mesures de prismes, cilindres, piràmides, cons i esferes.
 - Representació plana d'objectes tridimensionals en la resolució de problemes de càlcul d'àrees i volums.
 - Ús de la relació entre longituds, superfícies i volums per a la resolució de problemes.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Estudis estadístics.
 - Disseny d'investigacions i recollida de dades.
 - Població i individu, mostra i variables estadístiques.
 - Taules, freqüències absolutes i relatives, ordinàries i acumulades.
- Gràfics estadístics.
 - Diagrames de barres, de línies i de sectors.
 - Full de càlcul i eines TAC.
- Eines d'anàlisi de dades.
 - Mesures de centralització: mitjana, mediana i moda.
 - Mesures de dispersió: valor màxim, mínim i rang.
- Conceptes bàsics de probabilitat.
 - Predicció de resultats en experiments aleatoris.
 - Proporcionalitat per assignar probabilitats a resultats d'experiments aleatoris.
 - Simulacions i comprovació de les prediccions.
 - Eines TAC per a les simulacions i el càlcul de probabilitats, calculadores i GeoGebra.
 - Història dels jocs d'atzar en diferents cultures.

3.2.2.3. Tercer curs

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Nombres racionals.
 - Relació i transformació entre fracció i decimal.
 - Aproximació per excés i per defecte.
 - Representació gràfica sobre la recta.
 - Càlcul mental: estimació i estratègies de càlcul.
 - Ús dels nombres racionals per a la resolució de problemes en contextos diversos.
- Nombres grans i nombres petits.
 - Significat en contextos diversos.
 - Representació gràfica i simbòlica (notació científica).
 - Potències d'exponent enter i operacions.
 - Recursos digitals per a la realització i comprovació de càlculs numèrics, calculadores i GeoGebra.
 - Càlcul mental, estimació i ordre de magnitud.
- Successions numèriques.
 - Progressions aritmètiques.
 - Progressions geomètriques.
 - Introducció a l'infinit.
 - Successió de Fibonacci

CANVI I RELACIONS

- Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa.
 - Relació entre quantitats variables.
 - Expressió simbòlica.
 - Creixement/decreixement.
 - Punts de tall amb els eixos.
 - Pendent i ordenada a l'origen (en gràfiques i fórmules).
 - Ús d'entorns gràfics digitals, calculadores CAS i GeoGebra.
 - Ús de les funcions per a la resolució de problemes.
- Equacions de 1r i 2n grau i sistemes d'equacions de 1r grau.
 - Regles de càlcul de l'àlgebra per a la resolució d'equacions i sistemes. Interpretació gràfica de la resolució de sistemes.
 - Història de la resolució de les equacions de 2n grau.
 - Resolució d'equacions i sistemes amb calculadora interactiva.
 - Càlcul mental (resolució d'equacions senzilles i validació de resultats).
 - Ús de les equacions i els sistemes per a la resolució de problemes en contextos diversos.

ESPAI I FORMA

- Proporcionalitat i semblança.
 - Figures semblants de tres dimensions.
 - Ampliacions i reduccions; factor escala.
- Transformacions geomètriques.
 - Translacions, girs i simetries.
 - Programes de geometria dinàmica, tipus GeoGebra.
 - Ús de les transformacions geomètriques per a la resolució de problemes en contextos diversos.

MESURA

- Mesures directes.
 - Instruments de mesura d'angles i longituds.
 - Nombres decimals per expressar mesures (nombre de decimals, precisió de la mesura).
- Mesures indirectes.
 - Estimació.
 - Precisió, exactitud i error.
 - Història de la mesura del cel (radi de la Terra, distància Terra-Lluna...).
 - Ús de les mesures indirectes per a la resolució de problemes en contextos diversos.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Estudis estadístics.
 - Mostres.
 - Variables discretes i contínues.
 - Agrupació de dades en intervals.
- Gràfiques estadístiques.
 - Histogrames i polígons de freqüències.
 - Eines d'anàlisi de dades.
 - Mesures de centralització: mitjana, moda, quartil i mediana.
 - Mesures de dispersió: rang i desviació típica,
 - Full de càlcul i recursos TAC.
- Conceptes bàsics de probabilitat.
 - Successos i espai mostral.
 - Vocabulari bàsic.
 - Càlcul de probabilitats de successos compostos en casos senzills (taules de contingència i diagrames d'arbre).
 - Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats.
 - L'origen de la teoria de probabilitats.

3.2.2.4. Quart curs

NUMERACIÓ I CÀLCUL

- Nombres racionals i irracionals.
 - Necessitat dels nombres irracionals.
 - Aproximació per excés i per defecte.
 - Representació gràfica sobre la recta.
 - Operacions: potències d'exponent fraccionari, relació amb el càlcul amb radicals en la resolució d'equacions.
 - Recursos digitals per a la realització i comprovació de càlculs numèrics..
 - Càlcul mental: estimació i estratègies de càlcul.
 - Història de les matemàtiques: mètodes per calcular aproximacions d'arrels quadrades.

CANVI I RELACIONS

- Funció quadràtica, exponencial i (*) logarítmica.
 - Diverses formes de representació i canvis de representació.
 - Funcions inverses.
 - Taxa de variació.
 - Recursos digitals interactius per a la representació de funcions, calculadores CAS i GeoGebra.
 - Ús de les funcions per a la resolució de problemes en contextos diversos.
- Funcions definides a trossos.
 - Recursos digitals interactius per a la representació de funcions, calculadores CAS i GeoGebra.
 - Ús de les funcions definides a trossos per a la resolució de problemes en contextos diversos.
- Equacions de grau superior o igual a 2.
 - Resolució per descomposició.
 - Càlculs algebriacs amb calculadora CAS i GeoGebra.
 - Interpretació gràfica de la resolució d'equacions de 2n grau.
 - El triangle aritmètic en la història de les matemàtiques.
- Inequacions lineals.
 - Resolució.
 - Interpretació gràfica.
 - Càlculs algebriacs amb calculadora interactiva.
 - Càlcul mental: resolució d'inequacions i validació de resultats.
 - Ús de les inequacions lineals per a la resolució de problemes en contextos diversos.

ESPAI I FORMA

- Trigonometria.
 - Mesura d'angles (unitats sexagesimals i radiants).
 - Raons trigonomètriques.
 - Resolució de triangles rectangles.
 - Ús de programes de geometria dinàmica.
 - Naixement i desenvolupament de la trigonometria històricament.
 - Ús de la trigonometria per a la resolució de problemes.
- Geometria analítica en el pla
 - Coordenades i vectors.
 - Equació de la recta.
 - Paral·lelisme i perpendicularitat.
 - Història de la introducció a les coordenades cartesianes.

MESURA

- Mesures indirectes.
 - Semblança i trigonometria.
 - Unitats de mesura.
 - Aproximacions per excés i per defecte. Precisió, exactitud i error.
 - La mesura de la distància Terra-Sol i Terra-Lluna.
 - Resolució de problemes relatius a mesures indirectes.

ESTADÍSTICA I ATZAR

- Estudis estadístics.
 - Disseny, mostres i aleatorietat de les respostes i experiments.
 - Dades quantitatives i qualitatives, unidimensionals i bidimensionals.
 - Història de l'estadística aplicada a les ciències socials.
- Gràfics estadístics.
 - Histogrames, diagrames de caixa, núvols de punts, coeficients de correlació.
- Eines d'anàlisi de dades.
 - Mesures de centralització i de dispersió.
 - Full de càlcul i recursos digitals per a l'estadística.
 - Inferència i predicció.
- Conceptes bàsics de probabilitat.
 - Probabilitat condicionada i successos independents.
 - Càlcul de probabilitats de successos compostos (taules de contingència i diagrames d'arbre).
 - Combinatòria (variacions, permutacions i combinacions) per quantificar.
 - Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats.

3.3 Batxillerat

En la formació matemàtica de l'alumnat hi ha un període on ha de predominar el seu caràcter educatiu, anant més enllà del caràcter instrumental que predomina en l'ensenyament de la matemàtica a primària, però sense arribar al caràcter professional propi de la fase universitària. Aquest període no té perquè coincidir exactament amb l'etapa secundària, però és al llarg d'aquesta etapa on és predominant. Un cop superada la fase més instrumental, que prioritza l'aprenentatge d'uns certs continguts fonamentals per a la vida en la nostra societat, la formació en l'ensenyament secundari prioritza la formació humana i creativa dels alumnes, així com el seu pensament crític.

L'ensenyament de la matemàtica al batxillerat ha de permetre que l'estudiant copsi aspectes estructurals de la disciplina i els relacioni amb d'altres, però el mer assoliment d'uns objectius i unes competències, com els que es presenten en el currículum, no és suficient. Cal, a més, afavorir la més correcta elecció en el futur educatiu, formatiu o professional de l'estudiant.

Tot i que el que s'accepta en matemàtiques és el que està provat, la matemàtica en el seu procés de gestació està formada per experiències, observacions i intuïcions que, en alguns casos, condueixen a descobriments plausibles. Contrastar aquests descobriments a través de l'estudi de casos concrets conduirà a modificar-los, rebutjar-los o acceptar-los. Posar a prova les conjetures descobertes i potser refutar-les és una activitat que facilita una correcta interpretació de l'error, forma part del procés de millora del raonament i educa el pensament crític dels nostres alumnes. La necessitat del rigor quedarà justificada quan l'alumne/a descobreixi i defensi, oralment i per escrit, conjetures que posteriorment ell mateix pugui refutar.

Aquest procés de gestació de la matemàtica ha de ser viscut per l'alumnat. Plantejar problemes, experimentar-los, comprendre'ls, establir plans de treball, descobrir invariants, conjeturar resultats, generalitzar casos observats, suggerir altres problemes anàlegs, reconèixer conceptes matemàtics de situacions concretes, errar i corregir per experimentar i conjeturar de nou fins a obtenir resultats plausibles, proposar solucions als problemes plantejats, cercar arguments per consolidar els resultats conjeturals, redactar les conclusions, exposar-les en públic, defensar-les i acceptar els suggeriments i les crítiques dels altres, són activitats pròpies d'una dinàmica de treball que fa de la matemàtica una matèria útil en la formació integral de tots els alumnes i necessària en el batxillerat com a etapa terminal per a una part de l'alumnat.

L'estructura de matèries al batxillerat és la següent:

- Matèries comunes:
 - Àmbit de llengües (llengua catalana i literatura, llengua castellana i literatura, llengües estrangeres)
 - Educació física
 - Filosofia
 - Ciències per al món contemporani
 - Història
 - Història de la filosofia
 - Treball de recerca
- Matèries comunes d'opció:
 - **Modalitat de ciències i tecnologia**
 - Matemàtiques
 - **Modalitat d'humanitats i ciències socials**
 - Llatí
 - Matemàtiques aplicades a les ciències socials
 - **Modalitat d'arts**
 - Història i fonaments de les arts
- Matèries de modalitat i específiques:
 - **Modalitat de ciències i tecnologia**
 - Biologia
 - Ciències de la Terra i del medi ambient
 - Dibuix tècnic
 - Electrotècnia
 - Física
 - Química
 - Tecnologia industrial
 - **Modalitat d'humanitats i ciències socials**
 - Economia
 - Economia de l'empresa
 - Geografia
 - Grec
 - Història de l'art
 - Història del món contemporani
 - Literatura castellana
 - Literatura catalana
 - Literatura universal
 - **Modalitat d'arts**
 - Anàlisi musical
 - Anatomia aplicada
 - Arts escèniques
 - Cultura audiovisual
 - Dibuix artístic
 - Dibuix tècnic
 - Disseny
 - Història del món contemporani
 - Literatura castellana
 - Literatura catalana
 - Literatura universal
 - Llenguatge i pràctica musical
 - Volum
 - **Matèries específiques**
 - Llengua i cultura occitanes
 - Història de la música i de la dansa
 - Psicologia
 - Segona llengua estrangera
 - Sociologia
 - Tècniques d'expressió gràficoplàstica
 - Religió
 - Estada a l'empresa

Per tal de reduir l'abast d'aquest treball, aquest està centrat únicament en la matèria comuna de matemàtiques dins la modalitat de ciències i tecnologia.

3.3.1. Competències

Les matèries del batxillerat s'orienten i estructuren, en coherència amb les etapes educatives anteriors i els ensenyaments superiors, a partir del concepte de competència, entesa com a l'aplicació de coneixements i destreses en la resolució de problemes i en situacions complexes, mobilitzant recursos diversos adquirits en diferents moments del trajecte acadèmic, que sovint depenen de diverses disciplines o de l'experiència adquirida

Al batxillerat, a diferència de primària i E.S.O trobem dos tipus de competències, les competències generals i les competències específiques de cada matèria. El currículum considera que les aquestes competències són els eixos del procés educatiu. Les competències generals es defineixen per al conjunt de l'etapa i en cada matèria es descriuen les competències específiques que cal assolir.

3.3.1.1 Competències generals

Les sis competències generals continuen el desenvolupament de les competències bàsiques de l'educació obligatòria i preparen per a la vida activa i per actuar de manera eficient en els estudis superiors.

- Competència comunicativa
- Competència en gestió i tractament de la informació
- Competència digital
- Competència en recerca
- Competència personal i interpersonal
- Competència en el coneixement i interacció amb el món

A continuació es descriuen els aspectes nuclears de les competències generals del batxillerat, que cal exercitar en tots dos cursos i des de totes les matèries, la tutoria i les diferents activitats del centre per aconseguir un aprenentatge competencial global.

Competència 1. Competència comunicativa.

Facultat de mobilitzar diferents dominis de llengües, tant oralment com per escrit, en múltiples suports i amb el complement, quan calgui, d'altres llenguatges (audiovisual, corporal, musical, plàstic, etc.) en varietat de contextos i finalitats, com a eina per aprendre a aprendre, per relacionar-se i per interaccionar amb el món.

És una competència de totes i cadascuna de les matèries del batxillerat, ja que totes les disciplines utilitzen necessàriament l'expressió oral i escrita com a instrument per comunicar la informació i per transformar aquesta informació en coneixements cada cop més complexos. Aquesta competència suposa que al final del batxillerat l'alumnat sap relacionar-se amb els altres en català i castellà, i almenys també en una llengua estrangera, oralment, per escrit i també a través de l'ús dels llenguatges audiovisuals, tot fent servir, quan calgui, la comunicació no verbal i les tecnologies de la informació i la comunicació.

Posseir la competència comunicativa significa ser capaç de mobilitzar totes les capacitats d'expressió quan cal en els diversos contextos acadèmics i socials. En algunes circumstàncies caldrà expressar fets, conceptes, idees i pensaments i, en altres, convindrà expressar correctament emocions i sentiments. La competència comunicativa implica també una actitud d'estimació de la creativitat implícita en l'expressió d'idees, experiències o sentiments.

Competència 2. Competència en gestió i tractament de la informació

Capacitats i destreses que permeten mobilitzar recursos per trobar, reunir, seleccionar i analitzar informacions procedents de fonts diverses i en diferents suports, tant en l'àmbit acadèmic com en la vida quotidiana. Constitueix una competència important per obtenir coneixements útils o, en la seva pràctica inicialment guiada, arribar al punt de ser autònom en els processos d'aprenentatge al llarg de la vida.

Aquesta competència inclou la capacitat de distingir entre els diferents tipus de fonts i suports i de fer ús de les biblioteques tradicionals o electròniques, incloent-hi les destreses de cerca d'informació a les xarxes de tota mena (Internet i intranets). També inclou la capacitat de valorar si la informació obtinguda és pertinent d'acord amb les preguntes formulades o en funció dels objectius proposats, com la facultat de convertir-la en coneixement.

En el batxillerat les activitats centrals per a l'adquisició d'aquesta competència són les que es desenvolupen d'una manera especial en les activitats experimentals o de recerca de cada matèria i en tota mena de treballs acadèmics autònoms, en particular tot el potencial que es vehicula per mitjà del treball de recerca.

Competència 3. Competència digital.

L'alfabetització digital constitueix avui una necessitat prioritària. El seu dèficit o absència contribueix a l'empobriment de les possibilitats personals tant en el món acadèmic, en què el coneixement digital ja resulta pràcticament imprescindible, com en el personal i, sobretot, en el laboral. En l'anomenada societat del coneixement, la ignorància digital pot provocar situacions de marginació i d'injustícia social.

La competència digital és la facultat de mobilitzar en situacions singulars diverses, de caràcter acadèmic, social o personal, el conjunt de capacitats i destreses derivades dels coneixements teòrics i pràctics bàsics de la societat de la informació, de la seva cultura i dels seus productes, així com de les bones pràctiques del seu entorn.

Per al desenvolupament d'aquesta competència digital cal que les activitats d'aprenentatge de les diverses matèries del batxillerat emprin i actualitzin els aspectes bàsics de les eines tecnològiques, el tractament de la informació i les possibilitats comunicatives i creatives de les xarxes virtuals. Per assolir aquesta competència cal disposar de capacitat i recursos tecnològics i utilitzar-los en el tractament i la gestió de la informació.

Competència 4. Competència en recerca.

S'entén per competència en recerca la facultat de mobilitzar els coneixements i els recursos adients per aplicar un mètode lògic i raonable per tal de trobar respostes a preguntes o per resoldre problemes rellevants que encara no s'han solucionat en el nivell i en l'àmbit adequat als coneixements, destreses i actituds que es posseeixen.

Aquesta competència implica la construcció, dins l'epistemologia de cada matèria del batxillerat, de la capacitat d'elegir amb criteri propi, d'imaginar projectes i de portar endavant les accions necessàries per desenvolupar les opcions i els plans, en el marc dels projectes individuals o col·lectius, amb responsabilitat, rigor i perseverança. La capacitat creativa i de recerca per imaginar projectes i desenvolupar-los amb l'ús de les tècniques adequades comporta un grau d'autonomia que s'adquireix dins el marc de l'etapa del batxillerat i amb l'orientació i guia del professorat.

La competència en recerca està íntimament relacionada amb les competències comunicatives i de tractament i gestió de la informació, ja que inclou el desenvolupament de la creativitat i l'esperit de recerca, que equival a imaginar i formular-se preguntes, ser emprenedor i prendre decisions, planificar la metodologia de recerca, actuar, avaluar i autoavaluar-se, i extreure'n conclusions.

Competència 5. Competència personal i interpersonal.

La competència personal i interpersonal és la facultat de mobilitzar el conjunt de capacitats i destreses que permeten, d'una banda, l'autoconeixement i el coneixement dels altres i, d'una altra, treballar en entorns col·laboratius.

El desenvolupament de la competència personal i interpersonal resulta imprescindible en la concepció de l'educació per a tota la vida, ja que en el món d'avui les persones han d'adquirir flexibilitat i versatilitat per adaptar-se a entorns d'aprenentatge canviants, han de mostrar autocontrol, creativitat i esperit emprenedor, han de saber treballar en equip i disposar d'habilitats dialògiques i de mediació i, finalment, han d'exercir la ciutadania activa, és a dir, actuar amb compromís per millorar l'entorn des de la seva acció individual.

Es tracta d'una competència que es relaciona de manera significativa amb la competència comunicativa i també amb la competència de recerca, en tant que desenvolupa la capacitat de l'alumnat per treballar de manera autònoma juntament amb la presa conscient de decisions. Igualment, proporciona la dimensió ètica de la resta de competències: aprenem a ser, estar, fer i actuar per viure en comunitats més justes i equitatives. Aquesta competència s'adquireix en el marc de totes les matèries, de la tutoria i de les activitats dins i fora del centre.

Competència 6. Competència en el coneixement i interacció amb el món.

Aquesta competència general està relacionada amb les diferents àrees de coneixement, ja que regula els sabers que es consideren bàsics de cada camp d'estudi, matèria o grup de matèries i que es vehiculen, en gran part, per mitjà de fets i conceptes, però també de bases metodològiques i valors i actituds

És la capacitat de mobilitzar diferents sabers escolars, referits, d'una banda, al món físic i a la interacció entre les persones i la naturalesa; i, d'una altra, a la societat i als valors de la ciutadania. Aquests sabers tenen per objecte la comprensió i interacció amb la societat i el món on es viu i es creix, per tal de dirigir reflexivament les accions cap a la seva millora.

La competència inclou la construcció d'un sistema de valors propi, d'acord amb un model de societat plural, democràtica i solidària, el compromís social i ètic, i la valoració crítica de les diferents manifestacions culturals i artístiques, evitant tota mena d'estereotips i prejudicis.

3.3.1.2. Competències específiques de la matèria de matemàtiques.

Els currículums de les matèries expliciten les competències específiques que s'hi treballen, així com la contribució de la matèria al desenvolupament de les competències generals.

Ser competent en matemàtiques requereix tenir uns coneixements, capacitats i habilitats que han de facilitar que l'alumne/a pugui i vulgui afrontar els reptes que se li plantegin. Amb el tipus de treball exposat, centrat en la resolució de problemes, es desenvolupen i són objectiu d'atenció del treball docent a l'aula els cinc vessants següents de l'activitat matemàtica:

- Resoldre problemes matemàtics.
- Comunicar-se matemàticament.
- Raonar matemàticament.
- Valorar la matemàtica i la seva construcció.
- Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

Aquests vessants han de ser sempre presents en l'activitat matemàtica i per això conformen els processos que caldrà desenvolupar de manera general al llarg de tota l'etapa.

Com ja s'ha esmentat en les anteriors etapes educatives, la **competència matemàtica** és l'habilitat per desenvolupar i aplicar el raonament matemàtic amb la finalitat de resoldre problemes en situacions diverses. L'adquisició de coneixements matemàtics a partir de la resolució de problemes integrats dins l'univers d'interessos de l'alumne/a és necessària, però no suficient. Cada alumne/a ha de tenir, a més, l'oportunitat de posar en acció el coneixement adquirit en la resolució de problemes que siguin un repte per a ell, problemes actuals o històrics però culturalment significatius, situacions no aïllades que tenen un reflex sobre el seu món, que requereixen tractaments heurístics i que faciliten la interpretació de la realitat.

Les competències matemàtiques són una combinació de coneixements, capacitats i actituds adequades al context que presenten diverses dimensions que sovint s'entrellacen.

Durant el batxillerat, tenim en compte, a més a més, altres competències relacionades amb matemàtiques i que explicaré a continuació.

La **competència en modelització matemàtica** s'entén com el procés pel qual s'interpreta matemàticament una determinada situació per tal de conèixer el seu comportament i controlar-la.

La capacitat de modelitzar una determinada situació està vinculada amb la possibilitat de considerar relacions lligades al comportament d'una o diverses variables i a la possibilitat d'establir relacions sistemàtiques entre diferents sistemes de representació. La comprensió del món real està lligada, en gran mesura, al coneixement de la matemàtica. S'entén gràcies a les matemàtiques i a models matemàtics de la ciència que en fan ús.

La **competència en contextualització** és consubstancial al treball matemàtic en el batxillerat. L'aprenentatge de la matemàtica a l'ensenyament obligatori es produeix en contextos específics i a través de problemes concrets. Les activitats són properes al context de la vida personal dels alumnes, el context públic i el context científic. Aquests tipus d'activitats s'han presentat al llarg de l'ensenyament obligatori vinculades a situacions contextualitzades en la vida real. En el batxillerat els entorns d'aprenentatge han de facilitar que, a partir d'aquestes situacions vinculades amb la realitat de l'estudiant, es puguin generar entorns d'aprenentatge que permetin l'establiment de resultats útils més enllà dels models concrets emprats. L'aprenentatge de la matemàtica possibilita, per tant, que l'alumne/a sigui competent en contextualització fent-li veure que és necessària aquesta competència, però no suficient. Cal que el coneixement matemàtic construït sigui útil dins els models concrets contextualitzats emprats, però també fora d'ells.

La **competència en experimentació** impregna tot el treball científic. Si l'alumne/a no crea no genera coneixement. En aquest cas hi pot haver assimilació de continguts però no necessàriament evolució intel·lectual. L'ensenyament de la matemàtica pot contribuir a un dels grans objectius del batxillerat: la formació de persones autònomes i crítiques que sàpiguen acceptar els propis errors i, alhora, les virtuts de les altres persones. Mitjançant la resolució de problemes, la matemàtica ensenya a saber actuar quan ens equivoquem, i a no mantenir una postura inflexible a causa de no voler assumir els errors comesos. Ensenyar una fórmula o un algorisme i resoldre exercicis que són aplicació immediata hauria de requerir poc temps. Ara bé, experimentar, plantejar problemes, comprendre'ls, establir plans de treball, conjecturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjecturar de nou fins a obtenir-ne una que sigui plausible, proposar la solució, redactar les conclusions i exposar-les en públic requereix temps per al qual cal una bona planificació. La presència de calculadores i ordinadors en el context educatiu de la matemàtica permet les proves i els assajos en la cerca de patrons de comportament matemàtic, anàlogament al que es realitza en les ciències experimentals.

Contribució de la matèria a les competències generals del batxillerat

L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes contribueix decisivament a l'assoliment de la competència comunicativa. Aquest tipus d'ensenyament parteix de l'experimentació i l'observació, i facilita el descobriment de l'establiment de conjetures. La intuïció de l'alumne/a li diu si són certes i el seu contrast a través de l'estudi de casos li diu si les pot refutar. Defensar, oralment o per escrit, un resultat que s'obté per aplicació d'una fórmula o d'un algorisme té un efecte ben diferent a no defensar una conjectura. Aquesta darrera opció porta l'alumne a exposar els arguments que l'han conduït a establir-la però sabent que no té la seguretat que sigui certa. Aquesta incertesa és molt més propera a allò que succeeix en la vida real. Aquest enfocament metodològic participa en l'assoliment de la competència comunicativa més enllà de l'àmbit d'acció disciplinària.

L'experimentació, l'observació, l'establiment de resultats conjeturals (hipòtesis), l'estudi de casos concrets sobre aquests tot acceptant-los o refutant-los, són activitats que participen en l'adquisició la competència en recerca. Les capacitats que potencia el currículum de matemàtiques faciliten l'establiment de raonaments quantitius sobre situacions de la vida real i sobre el món que ens envolta. L'apartat d'estadística constitueix el marc teòric que dóna solidesa a tota recerca quantitativa. Des de la recollida de dades fins a la seva anàlisi i presentació de resultats, aquesta branca de la matemàtica constitueix el punt de suport de tota recerca empírica quantitativa.

Pel que fa a l'assoliment de la competència en gestió i tractament de la informació, la cerca d'informació a través de fonts diverses (tradicionals o electròniques), i la seva posterior estructuració, és una competència necessària per a tot alumne/a en el món actual, i les activitats obertes com les que es proposen en aquest currículum requereixen sovint recursos tecnològics que fomenten l'autoaprenentatge de l'alumne/a. Això fa que, en el treball matemàtic del batxillerat, aquesta competència estigui fortament enllaçada amb la competència digital. En la realitat d'aquest moment, l'alumne empra aparells tecnològics amb facilitat i freqüència; per tant, i a fi que en faci un ús correcte cal que disposi de la guia i l'orientació del professorat. Hem d'orientar la seva utilització per tal que estiguin al servei de l'alumne/a i no aquest a disposició d'elles.

L'activitat matemàtica que genera la resolució de problemes ofereix una intensa contribució a la formació integral de l'alumne/a més enllà de l'àmbit disciplinari, en particular a l'assoliment de la competència personal i interpersonal.

Cal dissenyar entorns d'aprenentatge en els quals, amb la guia del professorat, els alumnes observin comportaments, intueixin regularitats i descobreixin patrons generals, conjeturin resultats, els contrastin i refutin o consolidin, argumentin els seus raonaments, presentin el treball efectuat, defensin les activitats emprades, les construccions realitzades i conclusions obtingudes, per arribar a aplicar el coneixement construït a aquest i d'altres àmbits. Cal que prenguin decisions, discernixin allò que és essencial d'allò que és prescindible i aprenguin dels propis errors. És fonamental que l'error sigui una font d'aprenentatge i l'estil d'ensenyament i aprenentatge ha de facilitar la seva acceptació i superació.

Si a l'alumne li diem que un problema no té solució, poc haurà après. Si a més fem que experimenti (amb un paper essencial de les TIC) i que descobreixi la utilitat de les diverses eines, haurà après molt més. Si un problema no es pot resoldre, potser variant les condicions o emprant més recursos, sí que serà resoluble. I aquesta dinàmica no és d'aplicació exclusiva a la matemàtica, sinó traslladable a altres àmbits, ja que l'alumne/a aprèn a no limitar la presa de decisions a unes condicions i recursos estàtics. La proactivitat inclou la capacitat per determinar els punts forts i febles d'un mateix, d'assumir riscos, així com d'avaluar les capacitats pròpies.

En definitiva, l'activitat matemàtica associada a la resolució de problemes no només permet validar l'aprenentatge de l'alumne, sinó que participa plenament en els processos de creixement personal i de relació amb els altres i permet incrementar la motivació de l'alumnat.

El treball matemàtic de resolució de problemes en entorns d'aprenentatge propers i significatius contribueix a l'assoliment de la competència en el coneixement i interacció amb el món. L'ensenyament de la matemàtica ha de facilitar entorns d'aprenentatge que facilitin un pensament matemàtic que no sigui purament formal i prou: la generalització de casos observats, el replantejament de problemes per analogia, l'extracció o reconeixement de conceptes matemàtics a partir d'una situació concreta, etc.

3.3.2 Continguts Batxillerat

3.3.2.1 Primer curs

Processos que es desenvolupen durant el curs per mitjà dels diferents continguts

- La resolució de problemes, entesa com un estil d'ensenyament i aprenentatge que facilita la construcció de coneixement matemàtic a partir de l'experimentació, la cerca de patrons i regularitats i la formulació de resultats conjecturals.
- El raonament i la prova, que pren sentit quan l'alumne/a ha descobert la necessitat de consolidar resultats prèviament conjecturats, pel fet d'haver-ne descobert prèviament d'erronis.
- La defensa oral i per escrit dels propis raonaments, l'acceptació dels errors comesos i la comprensió davant els errors dels altres. Es tracta d'establir plans de treball individuals o en grup que facilitin la comunicació entre els estudiants.
- La utilització de diferents recursos tecnològics (ordinadors, calculadores, recursos audiovisuals, etc.) que facilitin el descobriment d'invariants, la cerca de patrons i regularitats, la representació i interpretació de les dades, l'observació, exposició, contrast i, si escau, la consolidació de propietats que s'obtenen de les seccions o manipulacions de diferents figures, etc.
- La integració de la cultura matemàtica en el procés d'ensenyament i aprenentatge, entesa com una activitat que permet que l'alumnat conegui moments històrics rellevants connectats amb els continguts que es desenvolupen en cada moment. Els apartats epistemològics que es tractin no s'haurien de limitar a una exposició purament anecdòtica.

A continuació, i classificats en blocs:

- Aritmètica i Àlgebra
- Geometria
- Anàlisi
- Probabilitat i estadística

Trobareu els continguts del primer curs de batxillerat.

A diferència del primer curs, al segon curs no trobarem el bloc probabilitat i estadística.

ARITMÈTICA I ÀLGEBRA

Classificació i representació dels conjunts numèrics

- Ampliació dels conjunts numèrics dels naturals als reals: problemes i equacions en cada conjunt. Nombres reals sobre la recta.
- Els nombres complexos com a solucions d'equacions quadràtiques que no tenen arrels reals. Diferents representacions.

El càlcul amb nombres decimals: notacions, aproximacions i errors en funció de la situació objecte del càlcul

- La notació científica, amb calculadora i/o ordinador.
- Les aproximacions i els errors en la mesura i en el càlcul.
- Resolució de problemes que impliquin desigualtats amb una incògnita. L'ús dels intervals com una manera d'expressar-ne els resultats.

El càlcul amb polinomis: la transformació d'expressions algèbriques, per aplicar a l'estudi de funcions

- La simbologia dels polinomis i les seves operacions.
- Arrels. Descomposició en factors.
- Alguns càlculs senzills amb fraccions algèbriques.

Les progressions: un model per a l'estudi de l'interès simple i del compost. El comportament a l'infinit d'una successió: un pas previ a l'estudi en una funció

- Col·leccions ordenades. Regles de recurrència i termes generals.
- Les progressions aritmètiques i geomètriques. Interès simple i interès compost.
- El comportament a l'infinit en casos elementals. Suma dels termes d'una progressió geomètrica decreixent.

GEOMETRIA

Les funcions circulars en l'estudi de fenòmens periòdics i la trigonometria per resoldre problemes mitjançant triangulació

- L'angle com a gir. Unitats de mesura d'angles. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Sinus, cosinus i tangent.
- Resolució gràfica i analítica de triangles: els teoremes del sinus i del cosinus.

Els vectors, una nova eina per resoldre problemes de geometria.

- Els vectors com a manera de representar una magnitud i una direcció. Els vectors lliures com a translacions en el pla.
- Equacions de la recta. Direcció i pendent. Problemes d'incidència i paral·lelisme. Angles i distàncies.
- Llocs geomètrics: les còniques. Les còniques en l'art i l'arquitectura.

ANÀLISI

Estudi de les característiques de certs tipus de funcions que poden ser models de fenòmens científics, tecnològics i socials

- Funcions a partir de taules i gràfics. Aspectes globals d'una funció. Utilització de les funcions per a la interpretació de fenòmens científics.
- Funcions a trossos. Una primera idea de continuïtat, en contextos que comporten salts. La funció valor absolut.
- Les funcions de proporcionalitat inversa en fenòmens físics. Comportament asimptòtic.
- Les propietats de la funció exponencial. El creixement exponencial enfront d'altres models de creixement. La funció logarítmica: aplicació a l'estudi de fenòmens científics o tecnològics.

Interpretació física i geomètrica de les taxes de canvi en contextos científics diversos

- Càlcul gràfic del pendent d'una corba en un punt a partir del pendent de la recta tangent: construcció gràfica de la funció derivada.
- Càlcul de funcions derivades: derivades de les funcions elementals, les derivades i les operacions amb funcions. Derivades successives. Recta tangent a una corba en un punt: aproximació lineal a una corba.
- Ús de calculadores i/o programes informàtics que faciliten tant el càlcul simbòlic com la representació gràfica.

PROBABILITAT I ESTADÍSTICA

Anàlisi del tipus i grau de relació entre dues variables en contextos científics i socials

- Distribucions bidimensionals. Relació entre variables qualitatives: taules creuades. Interpretació de fenòmens socials i econòmics en els quals intervenen dues variables i estudi del grau de relació que tenen: núvols de punts, correlació i regressió, interpolació i extrapolació mitjançant la recta de regressió.
- Ús de les calculadores i fulls de càlcul o programes estadístics per al càlcul dels paràmetres i les representacions gràfiques.

Aplicació de les tècniques de recompte i del càlcul de probabilitats per resoldre situacions i problemes en àmbits tant científics com socials.

- Tècniques de recompte en casos senzills: de les llistes ordenades i els diagrames en arbre a l'estudi de les combinacions.
- Independència d'esdeveniments. Experiències successives i proves repetides. Probabilitat condicionada.
- L'ajust d'una distribució estadística a un model de probabilitat: la llei normal.

3.3.2.1 Segon curs

Processos que es desenvolupen durant el curs per mitjà dels diferents continguts

- La resolució de problemes, entesa com un estil d'ensenyament i aprenentatge que facilita la construcció de coneixement matemàtic a partir de l'experimentació, la cerca de patrons i regularitats i la formulació de resultats conjecturals.
- El raonament i la prova, que pren sentit quan l'alumne/a ha descobert la necessitat de consolidar resultats prèviament conjecturats, pel fet d'haver-ne descobert prèviament d'erronis.
- La defensa oral i per escrit dels raonaments propis, l'acceptació dels errors comesos i la comprensió davant els errors dels altres. Es tracta d'establir plans de treball individuals o en grup que facilitin la comunicació entre els estudiants.
- La utilització de diferents recursos tecnològics (ordinadors, calculadores, recursos audiovisuals, etc.) que facilitin el descobriment d'invariants, la cerca de patrons i regularitats, la representació i interpretació de les dades, l'observació, exposició, contrast i, si escau, consolidació de propietats que s'obtenen de les seccions o manipulacions de diferents figures, etc.
- La integració de la cultura matemàtica en el procés d'ensenyament i aprenentatge, entesa com una activitat que permet que l'alumne/a conegui moments històrics rellevants connectats amb els continguts que es desenvolupen en cada moment. Els apartats epistemològics que es tractin no s'haurien de limitar a una exposició purament anecdòtica.

ÀLGEBRA LINEAL

El llenguatge matricial com a eina per expressar i resoldre problemes relacionats amb l'organització de dades

- Les matrius com a eina per resoldre sistemes, representar algunes transformacions geomètriques i, en general, per treballar amb dades estructurades en taules.
- Operacions amb matrius. Aplicació a contextos reals.

Els sistemes lineals, una eina per plantejar i resoldre problemes

- Determinants d'ordre 2 i 3. Rang d'una matriu. Càlcul de la matriu inversa.
- Discussió i resolució de sistemes d'equacions lineals (amb un paràmetre com a màxim). Plantejament de problemes.

GEOMETRIA A L'ESPAI

La interpretació geomètrica dels sistemes lineals amb tres incògnites

- Vectors lliures a l'espai. Dependència i independència lineal.
- Equacions del pla i de la recta. Posicions relatives. Interpretació geomètrica de sistemes lineals amb tres incògnites.

El plantejament i la resolució de problemes mètrics a l'espai

- Producte escalar. Perpendicularitat i angles.
- Producte vectorial i mixt. Interpretació geomètrica i aplicacions al càlcul d'àrees i volums.
- Càlcul de distàncies.

ANÀLISI

L'aplicació de l'estudi local i global d'una funció a situacions geomètriques, científiques i tecnològiques

- Una aproximació al concepte de límit d'una funció en un punt i a l'infinit. Asímtotes verticals i horitzontals.
- Continuitat. Classificació dels punts de discontinuïtat.
- El teorema de Bolzano: un mètode per aproximar arrels.
- Estudi, amb ordinador, dels punts de no derivabilitat d'una funció.
- Estudi de funcions: domini i recorregut, signe, punts de tall amb els eixos, simetries, límits a l'infinit, asímtotes, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatiu, màxims i mínims absoluts, concavitat i convexitat, punts d'inflexió. Representacions gràfiques. Aplicació a situacions geomètriques, científiques i tecnològiques.
- Ús de calculadores i/o programes informàtics que faciliten tant el càlcul simbòlic com la representació gràfica.
- Problemes d'optimització.

El càlcul d'àrees planes, una de les situacions que requereixen el càlcul integral

- Antiderivades o primitives d'una funció. Càlcul de primitives quasi immediates que es puguin fer directament aplicant les dues regles bàsiques del càlcul integral o amb canvis de variable senzills, i el mètode d'integració per parts.
- Introducció al concepte d'integral definida a partir de l'aproximació del càlcul de l'àrea sota una corba. Aplicació al càlcul d'àrees.

3.4 Resum competències

COMPETÈNCIES PRIMÀRIA		
Resolució de problemes	Competència 1	Traduir un problema a una representació matemàtica i emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre'l.
	Competència 2	Donar i comprovar la solució d'un problema d'acord amb les preguntes plantejades.
	Competència 3	Fer preguntes i generar problemes de caire matemàtic.
Raonament i prova	Competència 4	Fer conjectures matemàtiques adients en situacions quotidianes i comprovarles.
	Competència 5	Argumentar les afirmacions i els processos matemàtics realitzats en contextos propers.
Connexions	Competència 6	Establir relacions entre diferents conceptes, així com entre els diversos significats d'un mateix concepte.
	Competència 7	Identificar les matemàtiques implicades en situacions quotidianes i escolars i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.
Comunicació i representació	Competència 8	Expressar idees i processos matemàtics de manera comprensible tot emprant el llenguatge verbal (oral i escrit).
	Competència 9	Usar les diverses representacions dels conceptes i relacions per expressar matemàticament una situació.
	Competència 10	Usar les eines tecnològiques amb criteri, de forma ajustada a la situació, i interpretar les representacions que ofereixen.

COMPETÈNCIES E.S.O.		
Resolució de problemes	Competència 1	Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
	Competència 2	Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
	Competència 3	Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
	Competència 4	Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.
Raonament i prova	Competència 5	Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.
	Competència 6	Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.
Connexions	Competència 7	Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.
	Competència 8	Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.
Comunicació i representació	Competència 9	Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
	Competència 10	Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
	Competència 11	Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
	Competència 12	Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Continguts clau E.S.O	Competències											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Sentit del nombre i de les operacions	■			■	■	■	■			■	■	
2. Raonament proporcional.		■			■		■	■				
3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).		■	■		■							■
4. Llenguatge i càlcul algebraic.	■	■			■	■	■	■	■	■	■	■
5. Patrons, relacions i funcions.	■		■	■	■	■	■					
6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.		■							■	■	■	■
7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.			■	■	■	■						■
8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	■		■	■		■		■	■			■
9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.					■				■	■		■
10. Relacions i transformacions geomètriques.			■	■	■		■			■	■	
11. Magnituds i mesura.	■	■		■				■				
12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.		■				■	■					
13. Sentit de l'estadística.	■			■	■	■						
14. Dades, taules i gràfics estadístics.							■		■	■		■
15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.		■	■					■			■	■
16. Sentit i mesura de la probabilitat.	■			■	■	■		■		■	■	

COMPETÈNCIES BATXILLERAT	
Competència 1	Competència comunicativa.
Competència 2	Competència en gestió i tractament de la informació.
Competència 3	Competència digital.
Competència 4	Competència en recerca.
Competència 5	Competència personal i interpersonal.
Competència 6	Competència en el coneixement i interacció amb el món.

3.5 Conclusions sobre el currículum

Hem pogut comprovar que tots els documents anteriors li donen importància al desenvolupament del raonament estadístic, que va més enllà del coneixement matemàtic i de la comprensió dels conceptes i procediments. La modelització, la valoració de l'ajust del model a la realitat, la formació de qüestions, la interpretació i la síntesi del resultat, l'elaboració d'informes, són també components essencials de les capacitats que volem desenvolupar als nostres alumnes.

Fem notar que, a més de les referències elementals sobre el mostreig, es contempla un raonament intuïtiu al treballar amb l'anàlisi de dades, realitzar prediccions o prendre decisions.

D'altra banda, es valora el nivell d'autonomia, rigor i sentit crític, assolit al analitzar la fiabilitat del tractament de la informació que fan els mitjans de comunicació i la publicitat, especialment a través d'informes relacionats amb fenòmens de rellevància social.

CAPÍTOL 4:

Desenvolupament dels projectes

Al capítol anterior, hem analitzat el marc curricular actual, per poder entendre quins són els objectius i no deixar de banda els continguts i coneixements que els alumnes han d'assolir.

L'objectiu d'aquest quart capítol és analitzar les metodologies d'educació, en particular, els projectes.

Cal esmentar, d'avançat, que treballar per projectes és un gran canvi respecte la metodologia tradicional. Però dins el que anomenem "projectes" hi ha tot un ventall d'interpretacions i de possibilitats alhora de dur-ho a terme. Des-de el temps dedicat (si temps parcial o a temps total dins l'aula), fins a les matèries (hi ha escoles que només realitzen projectes a determinades assignatures i d'altres que ho fan per totes), passant pels cursos (hi ha escoles on es treballa per projectes des d'un nivell fins a un altre determinat, i d'altres que ho fan en tota l'etapa educativa). S'intentarà doncs donar una idea global del que suposa aquesta metodologia, i alhora centrar l'atenció en l'estudi de la probabilitat i l'estadística mitjançant projectes.

En un primer apartat, es donarà a conèixer què són, quines característiques diferencien aquesta metodologia de les tradicionals, els aspectes a tenir en compte, el seu procés, els avantatges i el sistema d'avaluació.

En un segon apartat, més concretament, analitzarem l'ensenyança de la probabilitat i l'estadística a través dels projectes, tot donant arguments i motivacions d'aquesta metodologia. Argumentarem que el desenvolupament del raonament estadístic requereix de la integració de l'aprenentatge d'aquesta matèria dins petites investigacions o projectes.

A continuació, es presentaran també eines disponibles i recursos tant per l'elecció del conjunt de dades o temes de projectes, com pel propi càlcul estadístic.

4.1 Treball per projectes

El treball per projectes és una metodologia que es basa a oferir eines que puguin ajudar als alumnes a pensar per ells mateixos, a investigar, a aprendre dels seus errors i dels seus encerts i d'aquesta manera també a aprendre a ser crítics. Aquests projectes tenen aplicació en el món real més enllà de l'aula i busquen crear una educació interdisciplinària amb un significat, en comptes de lliçons curtes i aïllades com s'ha fet sempre a l'escola tradicional.

Avui en dia, el treball per projectes s'ha tornat molt important, ja que és una estratègia metodològica integral i no pas un complement. No hem d'oblidar que a la societat actual els/les mestres treballen amb grups de nens i nenes de cultures i de nivells d'habilitats i aprenentatges molt diferents. Aquesta metodologia els dona l'oportunitat d'escollir què volen treballar i què els interessa i això fa que tot el que aprenen tingui un significat per a ells. A més a més, també s'aconsegueix que hi hagi una gran motivació davant de cada aprenentatge.

Les **característiques** dels treballs per projectes són:

- Aprenentatge cooperatiu.
- Utilització d'un ampli ventall de recursos.
- Fomenta l'autonomia de l'individu.
- Aprenentatge significatiu.
- Els alumnes són el centre de l'aprenentatge.
- Contacte directe amb la realitat.

Abans de començar a treballar per projectes s'ha de tenir una concepció de l'alumnat com a éssers capaços de pensar, de ser crítics, reflexius... S'ha de tenir molt clar que no es pretén que els alumnes a final de curs hagin adquirit de forma mecànica cap contingut, sinó que haurem ajudat que per si mateixos arribin a les seves conclusions, és a dir, haurem ensenyat a pensar (i no pas a memoritzar).

És molt important el paper de l'educador/a que és molt diferent al de l'escola tradicional, ja que la seva tasca consisteix en guiar i generar situacions d'aprenentatge. El professor busca en tot moment estimular l'alumnat i proporcionar la informació necessària perquè siguin ells i elles els qui construeixin de forma autònoma els seus propis coneixements. A més a més, té una tasca molt important a fer abans d'endinsar-se a treballar el projecte, ja que ha d'identificar els objectius d'aprenentatge i el que es vol aconseguir. Aquesta manera de treballar se li dona molta importància al treball en grup i a la col·laboració.

Per entendre el **procés**, els passos a seguir per aconseguir un bon resultat en el treball per projectes són:

1. Es fa un debat a classe per escollir els temes que creen interès als alumnes.
2. Es fa una votació entre tots els temes, d'aquí sortirà ja el projecte de curs.
3. Es crea un mapa conceptual o índex de treball.
4. Es comença a cercar informació i treballar en el tema (la conversa és molt important).
5. Possibilitat que sorgeixin nous temes, idees, etc.
6. Es posen en comú els aprenentatges realitzats i s'avalua el treball que s'ha fet durant el curs a partir d'un treball final.

Quant als **avantatges** que aquest sistema proporciona, trobem que els alumnes són més autònoms en els seus aprenentatges, ja que poden extreure les seves pròpies conclusions. És una forma de treballar molt motivadora perquè se'ls dona l'oportunitat d'investigar i aprendre sobre els temes que ells prèviament han escollit o que els mestres han suggerit i ells han acceptat.

L'alumnat se sent part primordial i activa de l'activitat, això fa que la seva confiança i autoestima augmenti. Durant tot el procés, tots els continguts treballats estan contextualitzats i tenen un significat, això fa que els aprenentatges es retinguin amb més facilitat.

A l'hora d'**avaluar**, així com en altres aspectes de l'educació, no hi ha res establert ni unes normes a seguir. No obstant, s'hauria de tenir en compte que no podem tenir els mateixos criteris d'avaluació per a tots, ja que cada alumne parteix d'una base de coneixements i haurà viscut de manera diferent el projecte.

Un punt d'inflexió a l'hora d'avaluar amb aquesta metodologia, és que no només s'avaluen els conceptes. No es tracta de fer un examen i extreure'n una nota objectiva. Sinó que el professor/a haurà d'avaluar altres aspectes com la motivació, la implicació i l'evolució de l'alumne.

Cada projecte permet a l'alumne ser avaluat i és una bona oportunitat per aconseguir un bon resultat, independentment dels anteriors. Al ser treballs en grup, també permet la cooperació i companyonia dels estudiants.

Podem diferenciar tres tipus d'avaluació:

1. **Avaluació Inicial:** Aquesta es du a terme al principi del projecte, quan ja s'ha escollit el tema a treballar. Servirà per a tenir consciència dels coneixements previs dels alumnes.
2. **Avaluació del procés:** Una vegada començat el projecte tindrem en compte els nous aprenentatges que van sorgint a la vegada que el projecte avança. Aquests nous coneixements adquirits han de relacionar-se amb els previs.
3. **Avaluació final:** ha d'haver-hi una reestructuració dels coneixements previs i dels adquirits. Ha de quedar patent que els alumnes tenen consciència d'allò que s'ha après i s'ha treballat durant tot el curs.

Diferents instruments d'avaluació:

- El diari de classe: documents on es reculli tot el que es treballa a l'aula i a les conclusions a què s'arriba.
- Graelles d'avaluació: El/la mestre/a avaluarà tenint en compte un seguit d'ítems, com per exemple: mostra interès a adquirir nous coneixements, busca i aporta informació, és capaç de treballar en grup, etc.
- Porta folis o carpeta d'aprenentatges. Activitats pensades i problemes a resoldre.

4.2 Raonament estadístic per projectes

El raonament estadístic és una component essencial de l'aprenentatge. Segons Wild i Pfannkuck², aquest tipus de raonament inclou cinc components fonamentals:

- Reconèixer la necessitat de les dades: la base de la investigació estadística és la hipòtesi de que moltes situacions de la vida real només poden ser enteses a partir de l'anàlisi de les dades que han estat recollides de forma adequada i de manera objectiva.
- Modelització de les dades obtingudes: per captar característiques comunes, tabular o representar gràficament les dades i donar sentit a aquestes.
- Percepció de la variació: jutjar correctament l'anàlisi, extreure'n conclusions i buscar explicacions i causes per a poder fer prediccions.
- Raonament amb models estadístics: maneres de representar la realitat mitjançant models com poden ser un gràfic o una línia de regressió.
- Integració de l'estadística dins el context: dotar de tot aquest estudi un caire real i aplicable al món que ens envolta.

Per tots aquests motius, la introducció dels projectes dins l'aula podria ser una solució a l'hora de presentar les diferents fases d'una investigació: plantejament d'un problema, decisió sobre les dades a recollir, recollida i anàlisi de dades i obtenció de conclusions sobre el problema inicial. Fugint així, de la usual introducció de conceptes i tècniques descontextualitzades o aplicades únicament a problemes tipus.

D'una banda, l'estadística és inseparable de les seves aplicacions, i la seva utilitat final és la resolució de problemes externs a la pròpia estadística. La seva història ens demostra que aquesta rep idees i aportacions des d'àrees diverses i amb aplicacions variades (transmissió de caràcters hereditaris, mesura de la intel·ligència, etc.) i amb aquesta finalitat s'han creat conceptes i mètodes estadístics d'ús general (correlació, anàlisi factorial,...).

D'altra banda cal diferenciar entre el coneixement i l'aplicació d'aquest coneixement. L'habilitat per aplicar els coneixements matemàtics és més difícil perquè requereix no només de la tècnica (tal com representar una gràfica o calcular un promig), sinó també de coneixements d'estratègies per saber quan cal usar cada concepte o quan realitzar un o altre gràfic.

²Maxine Pfannkuch and Chris J. Wild són dos reconeguts especialistes didàctica de l'estadística. Ambdós nascuts a New Zeland, els seus treballs publicats daten des de 1999 a l'actualitat.

Els problemes i exercicis dels llibres de text acostumen a concentrar-se en els coneixements tècnics.

Al treballar amb projectes, es col·loca els alumnes en posició d'haver de pensar en preguntes com les següents:

- Quin és el meu problema?
- Necessito dades? Quines?
- Com puc obtenir aquestes dades?
- Què significa aquest resultat a la pràctica?

Els projectes estadístics augmenten la motivació dels estudiants. No és el mateix plantejar un problema descontextualitzat, on es demani a l'alumne calcular una mitjana o ajustar una recta de regressió a un conjunt de números, que plantejar una activitat que sigui d'interès per a aquest alumne, que trobi les dades prop seu i que pugui extreure'n les seves pròpies conclusions.

No hem d'oblidar que l'estadística és la ciència de les dades i les dades no són només números, sinó números en un context.

La principal característica d'un curs basat en projectes és que l'èmfasi que es dona a les tasques han de ser realistes.

Com deia Holmes³ si els estudiants treballen per mitjà de projectes s'aconsegueixen diversos punts positius:

- Els projectes permeten contextualitzar el problema i fer la matèria més rellevant. Si les dades sorgeixen d'un problema, són dades amb significat i han de ser interpretats.
- Els projectes reforcen el interès, sobretot si l'alumne tria el tema. És aquest qui vol resoldre'l, no com una imposició del professor, sinó motivat per la seva pròpia curiositat.
- S'aprèn millor què són les dades reals i s'introdueixen idees noves com la precisió, la fiabilitat, la possibilitat de mesurar, el biaix...
- Es mostra que la probabilitat i l'estadística no es redueixen a continguts matemàtics sinó que d'elles s'obtenen nous coneixements.

³P. Holmes, professor d'estadística i autor de nombrosos estudis sobre didàctica com: *Teaching Statistics (1980)*, *The assessment challenge in statistics Education (1997)* o *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics (2002)*.

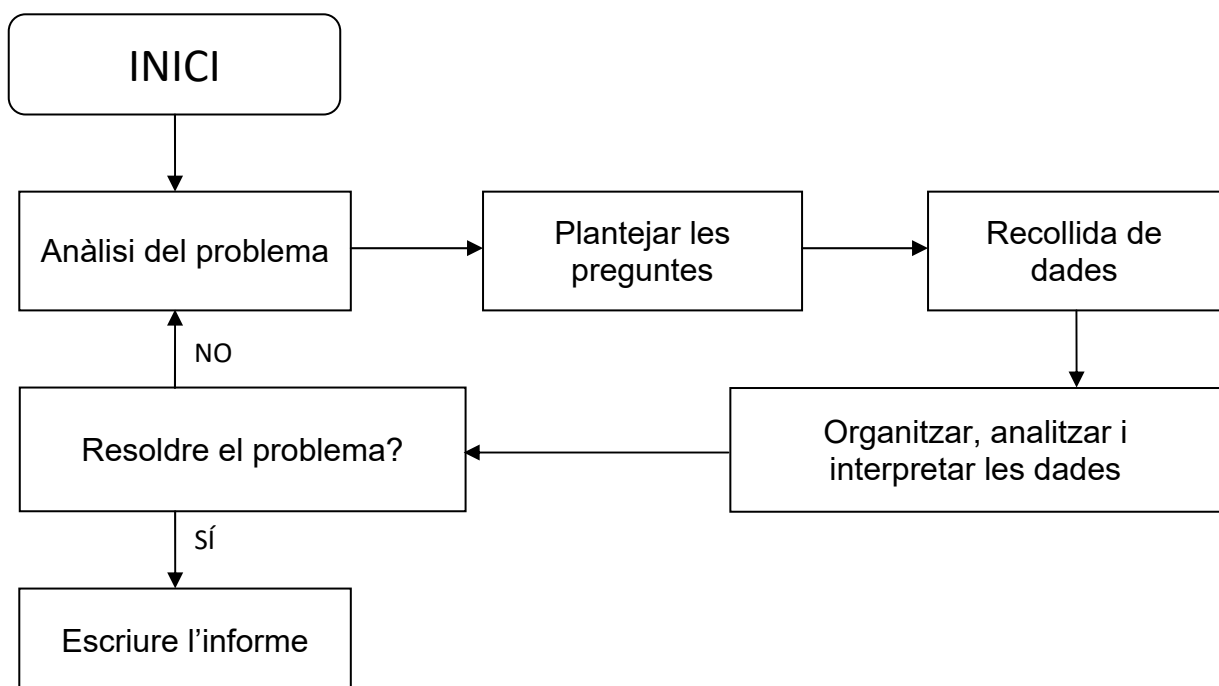
4.2.1 La tria del projecte

Dins els projectes, el què es pretén és integrar l'estadística i la probabilitat dins una investigació general. El tema principal del projecte ha de ser triat amb les característiques adients: realistes, obertes i apropiades al nivell.

Es comença plantejant un problema pràctic i s'utilitza després els coneixements teòrics per a resoldre'l. És a dir, els conceptes i el raonament són una eina per a resoldre el problema.

La següent figura conté una forma de treballar el projecte, un esquema del seu desenvolupament. Així, la part més purament matemàtica (la reducció, l'anàlisi i la interpretació de les dades) és només una de les fases. La fase de plantejar-se preguntes és sovint la més difícil, primerament perquè a l'inici les preguntes no són del tot definides i segon, perquè el paper del professor és guiar-los en aquesta tasca.

Han de passar d'un tema general a una pregunta que pugui ser contestada. El professor no ha de centrar-se en la terminologia i els conceptes, sinó proporcionar estratègies generals que puguin ser aplicades a altres dades i altres contextos.



Una llista de coses a tenir en compte a l'hora de plantejar preguntes de la investigació és la següent:

- Què vols provar? Què has de mesurar/observar/preguntar?
- Quines dades necessites? Com les trobaràs? Què faràs amb elles?
- Creus que podràs fer-ho? Trobaràs problemes? Quins?
- Amb tot, podràs contestar a la teva pregunta? Per a què serviran els resultats?

El treball per projectes dins la classe de matemàtiques planteja el problema de la gestió de la classe, de manera que cal orientar a l'alumne cap a l'aprenentatge de conceptes i gràfics, i exercitar les tècniques de càlcul, però també a millorar les seves capacitats d'argumentació, formulació de conjetures i creativitat.

Tot i que sovint l'estadística s'ensenyava separada de la probabilitat, aquesta separació és únicament artificial, donat que rere tot estudi estadístic hi ha una component aleatòria. És per això que cal intentar relacionar els dos àmbits quan sigui possible, i en particular, en els projectes.

4.2.2 Tipus de dades i fonts de dades

A diari ens trobem amb la necessitat de recollir, organitzar i interpretar sistemes de dades. Aquesta necessitat es veurà augmentada en el futur, gràcies al desenvolupament dels sistemes de comunicació i l'increment de les bases de dades.

El primer punt de partida de l'estadística ha de ser que l'alumne es trobi amb un volum de dades reals: resultats esportius dels seus equips preferits, mitjans de transport que utilitzen per anar a l'escola, temperatures màximes i mínimes de la seva població al llarg d'un cert període de temps, el color dels vehicles que passen pel carrer de davant, etc.

Cal dotar als alumnes de la capacitat per recollir, organitzar, "fer neteja", emmagatzemar, representar i analitzar sistemes de dades senzills. També han d'entendre primerament tot el que representa organitzar, en un sentit ampli, aquestes dades. D'aquesta manera, a part de fugir del càlcul rutinari amb unes dades ja donades, aprendran a apreciar més el treball de que comporta una estadística real i valoraran que les fonts han de ser fiables.

En la majoria de conjunts de dades hi ha tres components:

- la descripció de les variables,
- els valors de les variables (camps), que és el cos de les dades,
- resums estadístics de cada variable.

Els camps poden ser de longitud fixa o variable, i pot haver camps buits. Les variables les classifiquem segons diferents tipologies: qualitatives o quantitatives, discretes o contínues, nominals, ordinals, dades d'interval...

Sobre cada una d'aquestes components poden realitzar-se operacions o transformacions internes (classificació, codificació, agrupament) i externes (insertar, borrar, seleccionar).

També és possible determinar les relacions entre les components. Aquest tipus d'operacions cal presentar-les de manera senzilla, sense forçar la formalització del concepte, i que aquest neixi derivat d'un procés intuïtiu.

Aquest sistema de dades poden ser bases de treballs interdisciplinaris en geografia, ciències socials, història, esports... A més a més, si les dades les prenem com a resultat d'experiments aleatoris realitzats a classe, estarem integrant l'estudi de la probabilitat.

Resumint, el tipus de dades dins els projectes és molt ampli:

- La procedència de les dades: enquestes, experiments a classe, Internet, premsa, simulació,...
- Tècnica de recollida de dades: observació, enquesta, mesura,...
- Variables estadístiques incloses: qualitativa, quantitativa, contínua...

És important que al llarg de l'educació no universitària, l'alumne pugui apreciar aquesta diversitat de dades estadística i també saber localitzar-les de diferents fonts. Avui dia, Internet proporciona dades per a qualsevol tema que els alumnes necessitin, ja sigui a través de servidors estadístics específics on els professors d'estadística han posat dades al servei de l'educació, o bé accedint a organismes oficials tals com l'INE (Institut Nacional d'Estadística) .

A la taula següent trobem moltes més d'aquestes fonts de dades que podem trobar a Internet, amb les seves direccions web:

Australian CensusAtSchool	www.abs.gov.au/websitedbs/
Census at School Project	www.censusatschool.org.uk/
Census at School Canada	www.censusatschool.ca/r000-eng.htm
CensusAtSchool International	www.censusatschool.com/
The Data and Story Library	lib.stat.cmu.edu/DASL/
GAISE Reports	www.amstat.org/education/gaise/
IEA Instituto de Estadística de Andalucía	www.juntadeandalucia.es:9002/
INE Instituto Nacional de Estadística	www.ine.es/
INJUVE Instituto de la Juventud	www.injuve.mtas.es/injuve/
Instituto Nacional de Estadística y Geografía de Mexico	www.inegi.org.mx/
Journal of Statistical Education	www.amstat.org/publications/jse/
StatLib---Datasets Archive	lib.stat.cmu.edu/datasets/
UCLA Statistics Case Studies	www.stat.ucla.edu/cases/
UNESCO	www.uis.unesco.org
World Health Organization	www.who.int/

Actualment hi ha oficines i agències estadístiques que posen a disposició de la ciutadania tota classe de dades, i això requereix una necessitat de desenvolupar millor la comunicació entre els “productors d'estadístiques” i els “consumidors”.

L'objectiu, amb aquesta educació estadística, és que en el futur, qualsevol persona sigui capaç d'entendre les informacions que li arriben de forma quotidiana com, per exemple, als mitjans de comunicació, o a les factures de la llar.

Hem vist, doncs, la importància de fer una recollida de dades, i on o com trobar-les (en cas que sigui l'alumne qui les hagi de recopilar). No obstant, el professor també pot proporcionar aquests fitxers, ja sigui per presentar una situació particular, o bé perquè l'accés a aquestes dades sigui complicat.

El software utilitzat amb aquest fi ha de satisfer les següents característiques:

1. Alta qualitat de conjunts de dades disponibles i fiabilitat de les fonts d'informació que els proporcionen.
2. Alta qualitat de les representacions interactives que siguin apropiades per a les dades que estiguin representades.
3. Comentaris crítics sobre les dades, quan aquests continguin errors de raonament.
4. Revisió professional dels errors conceptuals mostrats als comentaris.
5. Facilitat de la cerca dels diferents conjunts de dades. Un bon buscador.

4.2.3 Calculadores i ordinadors

Les calculadores gràfiques és una de les eines físiques més utilitzades. Algunes de les possibilitats que ofereixen dins l'ensenyament de l'estadística i la probabilitat són:

- Transmissió de dades (es poden transferir a ordinadors). Es poden prendre dades d'Internet i transferir-les a la calculadora sense haver de ser introduïdes a ma.
- Possibilitat de transformació de les dades i tractament de les llistes.
- Càlculs estadístics i gràfiques bàsiques per una o varies variables
- Possibilitat de ser programades.
- Generador de nombres aleatoris i taules bàsiques.

Quan sigui possible, els alumnes poden usar ordinadors per desenvolupar els seus projectes, així com també per elaborar els seus informes. Avui dia, els processadors de textos són compatibles amb el software especialitzat d'estadística.

Així, el projecte esdevé a més un motiu per aprendre a utilitzar totes aquestes eines.

L'ús d'ordinadors dins l'aula és un tema de debat important, i que no entrarem en aquest treball. És clar, però, que han suposat una revolució sobre la manera en què aprenem. Les possibilitats i avantatges son immenses, aportant practicitat, rapidesa i precisió a moltes rutines a l'aula.

4.2.3.1 Càlcul i representació gràfica

L'ordinador ha d'usar-se com a eina de càlcul i representació gràfica, per analitzar les dades obtingudes per l'alumne/a o proporcionades pel professor. Antigament, diferia molt la part de comprensió d'un concepte envers els mitjans de càlcul per poder aplicar-los. És a dir, una cosa era saber el procediment i l'altra la facilitat o rapidesa de les eines de les que es disposava. La solució als problemes depenia en gran mesura de l'habilitat de càlcul de l'usuari.

Avui dia existeixen programes fàcilment manipulables, que no depenen de la formació o el nivell de matemàtiques. Per tant, s'ha reduït avui dia el temps en l'execució dels càlculs i es dedica aquest temps a la interpretació i la resolució de problemes.

La capacitat de graficació dels ordinadors permet incorporar l'anàlisi de les pròpies dades. I és important, doncs, triar una mostra significativa o accedir a les fonts adients.

Tant important és la recollida de dades, com la gestió d'aquestes. Existeixen molts programes (software estadístic), des de programes professionals, com SPSS o Statgraphics, fulls de gràfics d'Excel, o programes específics usats en educació, sovint de descàrrega lliure.

Alguns d'aquests recursos poden ser:

Tabla 1.3. Algunos programas de cálculo y exploración estadística en Internet

Cuwe statistics programs	www.stat.uiuc.edu/~stat100/cuwu
Elementary introduction to Bayesian statistics	bayes.bgsu.edu/nsf_web/jscrip_t_progs.htm
Gasp: The Globally Accessible Statistical Procedures,	www.stat.sc.edu/rsrch/gasp
Gráficos Interactivos	nces.ed.gov/nceskids/Graphing
R-web	www.math.montana.edu/Rweb/
Statiscope	www.df.lth.se/~mikaelb/statiscope/statiscope-enu.shtml
Stattucino Applet	www.berrie.dds.nl/
Vista - The Visual Statistical System	forrest.psych.unc.edu/research/index.html
WebStat	www.statcrunch.com/
Web Pages that Perform Statistical Calculations!	statpages.org/

4.2.3.2 Simulació

Un ús característic del material és la simulació. En ocasions, l'estudi d'un problema de probabilitat és complicat per a l'alumne, i una manera de fer menys difícil l'aprenentatge és simulant els resultats, ja sigui per mitjà de materials físics o bé usant ordinadors.

La simulació permet reproduir experiments aleatoris equivalents. A vegades, potser, és impossible simular una determinada variable però sí en podem simular una altra que és equiprobable. Al treballar mitjançant la simulació, estem modelitzant un problema, simplificant la realitat i fixant unes hipòtesis matemàtiques sobre el fenomen a estudiar. Així, a partir d'ara distingirem dos successos: el real i "l'inventat", al que anomenarem simulat.

Un dels exemples més usats, consisteix en simular la distribució per sexe dels recent nascuts, mitjançant l'experiment aleatori consistent en llençar una moneda a l'aire. Del cas dels naixements, podem estudiar moltes més coses a banda del gènere, com el grup sanguini, el pes, l'alçada, etc, que amb l'experiment de la moneda no són possibles. Però podem suposar, a priori, equiprobabilitat de nen-nena (independentment d'antecedents familiars i altres factors) així com cara-creu. Podem operar i observar resultats de l'experiment de la moneda i aplicar-lo al cas dels naixements.

Per exemple, si volem saber quina és la probabilitat que entre 100 naixements, hi hagi més d'un 60% de nois, podem llençar per exemple 1000 vegades 100 monedes a l'aire, i estudiar en cadascun d'aquestes 1000 realitzacions si obtenim un 60% o més de cares.

Fer una simulació permet condensar un experiment en un espai i temps concret. És un model material (o bé algorítmic si usem un simulador d'una calculadora o ordinador), que ens permet reproduir físicament l'experiment i observar-lo i, per tant, permet un treball intuïtiu sobre el model.

Un altre exemple força usat és el llançament d'un dau. En aquest cas, es pressuposa que es treballa amb un dau perfecte, i s'obvien les condicions del llançament que puguin afectar a la aleatorietat. El paper del professor és induir un model teòric a través d'una situació que potser no és perfecta.

Un altre cas interessant són els treballs amb "urnes". En el cas del sexe dels naixements, podríem simular-lo també amb l'experiment que consisteix en triar a l'atzar amb reemplaçament una bola d'una urna en la que introduïm dues boles de diferents colors per a representar els dos sexes.

En cas que vulguem simular un altre experiment aleatori amb dos successos de forma que les seves probabilitats siguin p i q (amb $p+q=1$), només cal usar una urna en què es mantinguin aquestes proporcions p i q per als colors de les boles. El recurs de les urnes és vàlid per estudiar molts tipus de problemes o conceptes probabilístics.

D'altres materials manipulatius que es poden fer servir son, a banda de la moneda i la urna, els daus, les ruletes, les taules de nombres,... Sense oblidar que la majoria del software estadístic també proporciona generadors de nombres aleatoris, així com valors diferents de distribucions de probabilitat que puguin ser analitzats amb ajudes dels recursos de càlcul i representació.

No ens podem quedar només amb la possibilitat d'estudiar aquestes simulacions, sinó també cal fer inferència estadística.

4.2.4 Informes

És interessant animar a l'alumne/a a escriure un informe sobre el seu anàlisi, ja que l'habilitat per produir treballs comprensius i estructurats, on la informació recollida s'incorpori i es presenti de manera adequada per argumentar els resultats, serà també útil en la vida professional, sigui quina sigui, i pertanyi a qualsevol àmbit.

La creació d'aquest informe ha de ser clar i lògic, els apartats que podria contenir aquest informe corresponen a les fases de la investigació: problema, dades anàlisi i interpretació. Aquest treball pot anar-se realitzant mentre s'avança el projecte, de manera que l'alumne/a ha de pensar i planificar com seran els següents passos a seguir. A més a més, proporciona un resum de la feina realitzada.

Reforçarà el procés de raonament estadístic al haver de plasmar per escrit les seves idees, decisions, accions o interpretacions.

4.2.5 Recursos a Internet

Una nova dimensió en educació i pràctica estadística està condicionada per Internet. En aquesta secció trobareu un resum dels recursos disponibles online.

Cursos:

El curs Chance ha estat desenvolupat cooperativament per varies universitats americanes. Aquest curs presenta l'ús dels conceptes bàsics d'estadística a la premsa. Trimestralment, proporcionen resums d'articles que han usat dits conceptes i, en alguns casos, també contenen una planificació de cursos que han utilitzat aquell material i una guia pel professor.

Les classes d'un curs d'aquest tipus s'organitzen de la manera següent: es tria un article recent i es preparen algunes preguntes relacionades. Els estudiants, en grups, llegeixen l'article i intenten respondre a les preguntes donades o a d'altres que van sorgint. Tot això s'utilitza com a base per introduir un tema relacionat amb el contingut de l'article.

Revistes:

El professorat no només es manté al dia a partir de llibres, també existeixen revistes dirigides a professors. Per exemple, *The Journal of Statistics Education*, és una revista publicada des de 1993, electrònicament, i tracta sobre l'educació de l'estadística a nivell universitari. Els lectors poden enviar comentaris a un article, o fer cerques automatitzades d'articles sobre un tema.

Software didàctic a Internet (Applets)

Existeix una gran quantitat de software disponible, especialment per la simulació. La taula de la pàgina 102 n'és un bon exemple del ventall de possibilitats que tenim.

CAPÍTOL 5:

Exemples

En el següent apartat tractaré de simular dos projectes per realitzar a classe. El primer per estudiar la intuïció sobre l'atzar, tot fent llançament de monedes, i el segon sobre proves mèdiques. Aquests dos projectes representen la probabilitat i l'estadística, respectivament. I, en ambdós casos, ha estat clau adaptar els conceptes usats al grau de coneixement de l'alumne, a l'edat i curs pertinent.

Tots dos mantindran una mateixa estructura: objectius, dades, preguntes i activitats i gestió de la classe, dificultats i errors possibles i anàlisi del contingut estadístic.

L'elecció d'aquests dos tipus de projecte és representar la probabilitat i l'estadística. Alhora són projectes pensats per diferents cursos i es posa de manifest no només en el contingut, sinó també en la manera de realitzar les preguntes i també el material que es facilita a l'alumne. S'entén que els alumnes més grans tenen més autonomia.

Són projectes reals, pensats per professors, però adaptats al contingut d'aquest treball, buscant especialment les avantatges d'aquest sistema i tracten d'extreure el màxim profit.

5.1 Comprovar les intuïcions respecte l'atzar

5.1.1 Objectius

Aquest experiment té per objectiu comprovar si tenim bones intuïcions envers els experiments aleatoris. En concret, intentarem comprovar si som capaços de simular una seqüència de resultats aleatoris.

Mitjançant una moneda equilibrada, es proposa el següent experiment: comparar els resultats reals al llançar realment la moneda, amb els resultats d'una simulació prèvia.

El material el pot proporcionar o bé el professor o bé l'alumne. En qualsevol cas cal que quedi clar que ha de ser una moneda no trucada i, per tant, amb equiprobabilitat de cares/creus.

La finalitat principal és fer reflexionar l'alumne sobre el fet que les nostres intuïcions sobre atzar sovint ens enganyen i també mostrar la utilitat de l'estadística per tal de provar o refutar les nostres teories.

Atès que les variables que tractarem són variables discretes i els conceptes que introduïrem no són gaire complicats, aquest projecte podria ser adequat per alumnes a partir de 13-14 anys. És a dir, per alumnes de primer cicle d'E.S.O.

5.1.2 Les dades

Les dades són produïdes com a resultat de l'experiment que realitza cada alumne de la classe. És un projecte interdisciplinari, que es pot aplicar a la psicologia com a estudi de les intuïcions. Un cop realitzats els experiments individuals, es pot preguntar als alumnes si ells creuen que tenen bones intuïcions i per què, tot deixant que ells i elles posin exemples i es fomenti l'interès pel tema.

En aquest punt, és quan centrarem la discussió sobre l'aleatorietat i la intuïció sobre els fenòmens aleatoris. Es pot demanar als alumnes que posin exemples d'aquests fenòmens.

Cal esperar que la majoria de les respostes vindran relacionades amb jocs d'atzar, com la loteria, llançaments de daus o de monedes. El professor en pot donar d'altres exemples, com en meteorologia o en el gènere d'un nen que acaba de néixer.

Es pot continuar la sessió preguntant si és útil o no tenir bones intuïcions sobre aquests fenòmens i tenir els coneixements suficients per a que aquestes intuïcions siguin bones.

Es pot donar exemples de problemes com la ludopatia, la interpretació incorrecta de resultats de proves mèdiques, o les valoracions a judicis o altres situacions on s'han de prendre decisions.

Un cop tenim a l'alumnat motivat i centrat en el tema que ens correspon, podem realitzar preguntes a l'aire que motivin el debat, com per exemple:

1. *Com penses que haurien de ser els resultats de llançar una moneda 20 vegades seguides? Series capaç d'escriure 20 resultats que creus que sortiran (sense realitzar-ho realment, sinó com tu penses que sortirà)? Com faràs perquè sembli que real?*

L'experiment consisteix en inventar una seqüència de 20 possibles resultats al llançar una moneda equilibrada (sense llançar-la realment) de manera que la seqüència pugui passar com aleatòria per una altra persona i comparar amb els resultats de fer aquest llançament realment.

2. *Anem a comprovar què tal són les intuïcions respecte als resultats aleatoris. Davant teniu dues quadrícules. En la primera, heu d'escriure els 20 resultats sense realitzar l'experiment, i a la segona, heu de llançar la moneda 20 vegades i escriure els resultats que obteniu. Escriviu C per "cara" i + per "creu"*

Es dona als alumnes un full que contingui el següent:

Seqüència simulada

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Seqüència real

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Es demana als alumnes que completin la part de dalt inventant una seqüència de 20 llançaments de la moneda, repartint C i + com ells creguin que podrien aparèixer a l'atzar. A aquesta seqüència l'anomenem seqüència simulada.

Seguidament, cada estudiant realitzarà els 20 llançaments i anotarà els resultats reals que ha obtingut.

Un cop els alumnes ho hagin realitzat, cada alumne tindrà un full diferent, un exemple podria ser:

Seqüència simulada

C	C	+	C	+	+	+	C	C	+	C	+	C	+	+	C	C	C	+	+
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Seqüència real

+	C	+	C	+	+	C	+	C	C	C	C	+	+	+	+	+	C	+	+
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

5.1.3 Preguntes, activitats i gestió de la classe

Finalitzat l'experiment, el professor inicia la discussió sobre com comparem els resultats obtinguts per tots ells en les seqüències reals i en les simulades (inventades). Cal que sigui el professor qui generi les qüestions inicials, per iniciar el debat, i anar donant indicacions per a que els alumnes vagin trobant les respostes.

Per realitzar preguntes com:

3. *Com podem distingir una seqüència realment aleatòria de la que hem inventat?*

Es deixa un temps per pensar i s'organitza una discussió col·lectiva. Possiblement, algun alumne proposi comptar el nombre de cares i de creus, i que aquest haurà de ser aproximadament igual en la seqüència real, ja que hi ha les mateixes probabilitats de cara que de creu.

El professor comptarà els seus resultats i comunicarà als alumnes que ha obtingut 10 cares i 10 creus en la seqüència simulada, i en canvi 11 cares i 9 creus en la real. Cada alumne, doncs, es posa a comptar els seus resultats i els va comunicant.

4. Però, hem d'obtenir exactament 10 cares i 10 creus? Què passa si obtenim 11 i 9? I si obtenim 18 i 2? És possible? Què us sembla si comparem el nombre de cares en la seqüència real i simulada de tots els alumnes de classe conjuntament?

El professor pregunta si el fet d'obtenir 10 cares en la seqüència simulada indica o no bona intuïció. Alguns alumnes respondran afirmativament.

El professor demana que aixequi la mà qui hagi obtingut 10 cares a la simulació, i la majoria de la classe aixecarà la mà (doncs d'entrada era el que calia esperar). A continuació, es recullen les dades de tots els alumnes. Tant del nombre de cares en la simulació, com en la real de cada alumne. Es procedirà a l'anàlisi de cadascuna d'aquestes dues variables i després es realitzarà la comparació de les principals diferències en la seva distribució.

Posem per cas que estem realitzant aquest projecte en una classe de 27 alumnes, i el nombre de cares obtingudes per cadascun d'ells en la seqüència simulada és:

10	12	11	10	11	9	10	11	9	10
10	10	7	10	10	10	10	12	11	10
9	10	10	9	10	12	11			

5. Hem recollit el nombre de cares en la seqüència simulada de cada alumne. Com podríem organitzar i resumir aquestes dades? Quin són els valors màxims i mínims obtinguts? Com ho representem de manera que puguem veure quantes vegades apareix cada valor? Quin és el valor més freqüent?

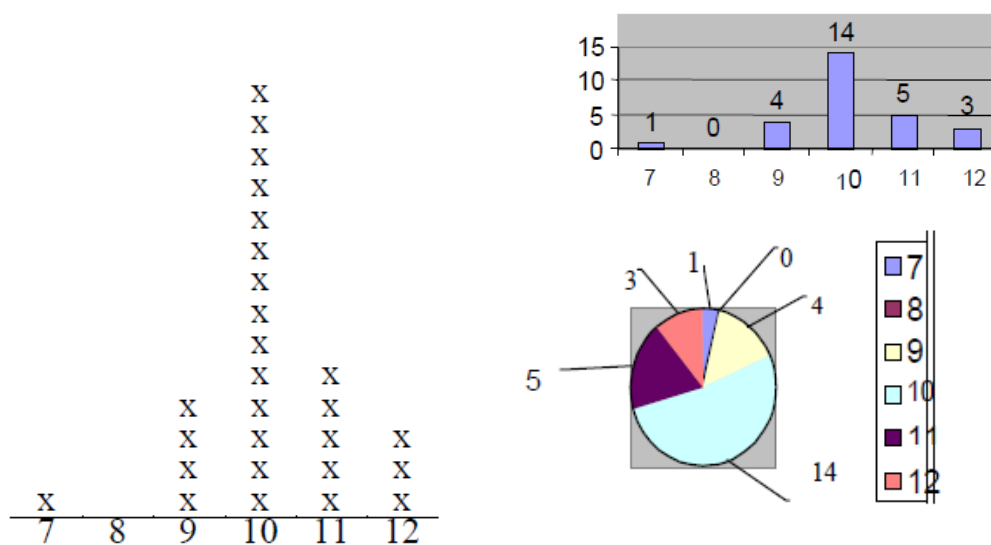
Nombre de cares en les seqüències simulades

Nombre de cares	Recompte	Freqüència
7	X	1
8		0
9	XXXX	4
10	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	14
11	XXXXX	5
12	XXX	3
Total		27

Aquesta taula es pot representar a la pissarra, tot nomenant un alumne que vagi representant les dades, o bé realitzant-ho mitjançant la pissarra digital.

El professor/a ajuda a identificar el valor màxim i mínim i a realitzar aquesta organització, fent veure a l'alumne la seva utilitat, i la capacitat de síntesi que obtenim (de totes les dades que teníem en totes les primeres caselles de cada alumne, han quedat resumides en una taula petita com aquesta).

Podem fer la representació del nombre de cares de les seqüències simulades mitjançant un gràfic de punts, i a continuació ho podríem fer també en un gràfic de barres o de sectors.



Un cop realitzada la taula de freqüències, el professor suggereix realitzar la representació gràfica. El primer, el gràfic de punts, és fàcil de construir mitjançant paper quadriculat i és el pas previ al gràfic de barres i de sectors. Mentre que en els dos primers es visualitza millor el caràcter numèric de la variable, la moda, la dispersió i la forma de la distribució, el gràfic de sectors representa millor la importància de cada valor respecte el conjunt de dades.

A més a més, es pot mostrar com una aplicació en tema de fraccions, i es poden repassar conceptes de sector circular així com aplicacions en temes de proporcionalitat.

De la mateixa manera que hem procedit amb l'estudi de les seqüències simulades, ho podem fer també amb les seqüències reals, per comparar ambdues distribucions i analitzar si existeixen algunes diferències importants que ens indiquin que la nostra intuïció respecte a l'aleatorietat era errònia.

Aquests són els valors dels nombres de cares en les seqüències reals, dels 27 alumnes:

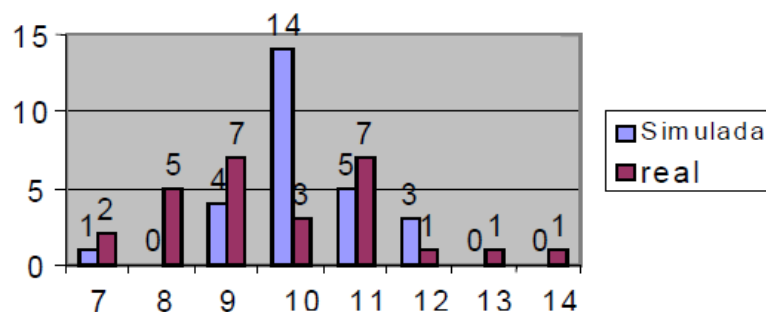
11	11	11	8	7	8	9	11	10	9
9	9	9	14	7	10	9	10	11	13
11	8	8	11	12	9	8			

6. *Compara ara els gràfics obtinguts de les seqüències reals i simulades? En què s'assemblen? En què es diferencien? El valor més freqüent és el mateix? Hi ha el mateix rang de valors? Quina de les dues variables té major variabilitat? Penses ara que les nostres intuïcions sobre el nombre de cares al llançar 20 vegades un moneda equilibrada és totalment correcta? Es pot idear un gràfic on es manifestin aquestes diferències?*

Una característica del nombre de cares en una seqüència real és que, en general, és més variable del que la intuïció ens deia, mentre que els valors mitjos coincideixen aproximadament.

Comparació del nombre de cares en seqüències reals i simulades

Simulada	Nombre de cares	Real
X	7	XX
	8	XXXXX
XXXX	9	XXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXX	10	XXX
XXXXX	11	XXXXXXXXX
XXX	12	X
	13	X
	14	X



En aquest últim gràfic de barres hem ajuntat el nombre de cares obtingudes en la seqüència real i en la simulada. Al estudiar els gràfics, s'observa que hem obtingut una distribució bimodal (seqüència real), la qual cosa suggereix la necessitat d'usar la mediana per a poder-los comparar.

Tenim que:

$$\bar{X} = 10,14 \text{ per seqüències simulades}$$

$$\bar{X} = 9,74 \text{ per seqüències reals}$$

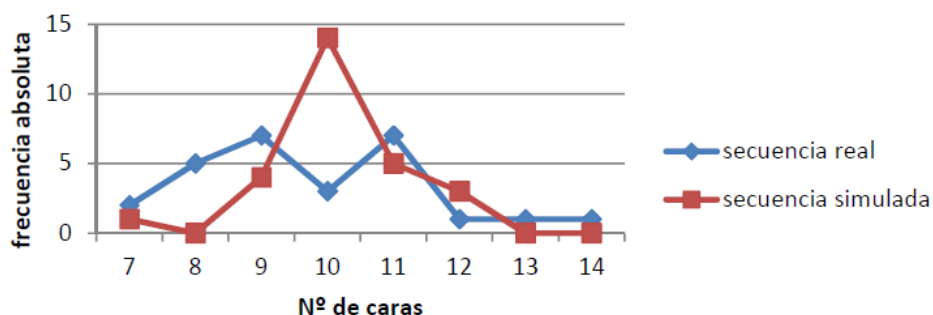
Els valors son semblants entre sí, i gairebé iguals al valor teòric $np=10$ de la variable aleatòria "nombre de cares en 20 llançaments d'una moneda equilibrada", que és una variable aleatòria Binomial.

Cal destacar, en aquest punt, que els conceptes teòrics que van apareixent ho fan de manera natural i a mida que els anem necessitant, no forcem la formalització del concepte, sinó deixem que aquest neixi per si sol.

Continuant amb l'anàlisi, les medianes són respectivament iguals a 10 i 9. Per tant, els estudiants han reproduït intuïtivament els promitjos de la variable "nombre de cares en 20 llançaments d'una moneda".

També podem fer sorgir en aquesta activitat la idea de dispersió. En el 50% dels casos centrals s'observa major dispersió en la seqüència real, on aquests es presenten en l'interval 9-11 i el recorregut és 7 (diferència entre nombre de cares màximes 14 i mínimes, 12), mentre que en la simulada el 50% dels casos centrals es redueix al valor 10 i el recorregut és 5 (diferència entre nombre de cares màximes 12 i mínimes, 7).

En el que resta d'activitat, serà molt útil treballar amb gràfics de línies o de barres, però sempre comparant ambdós variables. Per exemple, com en aquest gràfic de línies del nombre de cares en les dues seqüències.



La conclusió respecte les intuïcions és que els alumnes tenen una bona percepció del valor esperat del nombre de cares en els 20 llançaments (10 cares). En canvi, la variabilitat del nombre de cares no s'ha tingut en compte. És a dir, havien suposat una regularitat major a priori, que la que obtenim en l'experiment aleatori.

Es continua el projecte donant la següent pauta als alumnes i es discuteix a l'aula:

7. *Recollida de noves dades. El nombre de cares és només una de les variables que podem analitzar en una seqüència de resultats aleatoris. Pensem en altres possibles variables que podríem analitzar.*

Una d'aquestes possibles variables és la longitud de les ratxes, que intuïtivament esperem que siguin curtes. És ben coneguda la *fal·làcia del jugador*, per la que esperem que, rere una ratxa de cares, la probabilitat de que aparegui creu augmenta. Podem fer el símil amb una família, que ha tingut dos fills nens, i espera que el tercer sigui nena. I això no és cert, és a dir, els matrimonis que tenen ja dos fills de gènere masculí, tenen la mateixa probabilitat que el següent sigui un altre cop nen o bé nena (sense entrar en càrregues genètiques).

En aquesta nova part del projecte analitzarem dues noves variables: el nombre de ratxes i la longitud de la ratxa més llarga. Anomenarem ratxa a una seqüència de resultats iguals, de manera que si després d'una cara apareix una creu (o a l'inrevés), la ratxa té longitud 1. Tornem a l'exemple del principi i acolorim les ratxes. Mentre que a la seqüència simulada la ratxa més llarga és de longitud 3, i el nombre de ratxes és 12, a la real hi ha una ratxa de 5 creus i el nombre de ratxes és 11.

Seqüència simulada

C	C	+	C	+	+	+	C	C	+	C	+	C	+	+	C	C	C	+	+
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Seqüència real

+	C	+	C	+	+	C	+	C	C	C	C	+	+	+	+	+	C	+	+
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Per motivar l'estudi d'aquestes variables, el professor/a pot preguntar si el resultat obtingut a la seqüència real de 5 ratxes és raonable o no. Possiblement algun alumne suggereixi que la moneda no estava ben construïda. En aquest moment el professor pot recordar que, com la moneda no estava trucada, en tot moment suposàvem la equiprobabilitat de cares/creus.

El/la professor/a explicarà com identificar les ratxes i suggerirà als alumnes que busquin en els seus resultats quina és la ratxa més llarga en les seves dues seqüències, que comptin el nombre total de ratxes i novament es comparin els resultats d'aquestes dues variables en les dues seqüències, tal com hem fet amb el nombre de cares i finalitzar amb una discussió sobre les seves diferències i si les nostres intuïcions sobre les ratxes són correctes o no.

Seqüència simulada			Seqüència real		
Nombre de cares	Nombre de ratxes	Longitud major ratxa	Nombre de cares	Nombre de ratxes	Longitud major ratxa
10	14	4	11	9	
12	9	4	11	16	2
11	12	4	11	16	2
10	9	4	8	9	4
11	11	3	7	11	4
9	13	3	8	10	5
10	12	3	9	9	4
11	14	3	11	4	7
9	13	3	10	12	3
10	8	5	9	9	5
10	12	3	9	10	5
10	12	3	9	10	5
7	10	6	9	10	5
10	11	3	14	11	5
10	13	4	7	7	5
10	11	3	10	10	3
10	12	4	9	12	3
12	10	4	10	11	4
11	12	4	11	14	3
10	13	3	13	12	4
9	7	3	11	5	4
10	13	3	8	11	5
10	11	4	8	10	7
9	14	3	11	11	4
10	7	2	12	4	4
12	13	3	9	10	5
11	14	3	8	8	5

El professor pot usar un full de registre com el que acabem de reproduir i on cada nen anoti els seus resultats. Després el full es fotocopia i es reparteix un a cada alumne/a. Si disposem de poc temps, es pot distribuir la classe en dos grups i que cada grup analitzi una de les variables i després es realitza la discussió conjuntament.

També podem considerar la possibilitat de realitzar el projecte en dues sessions i que els alumnes analitzin a casa el contingut de la taula i a la propera sessió continuar el projecte en aquest punt.

8. Analitza ara la diferència entre el nombre de ratxes en les seqüències reals i les simulades.

Per analitzar el nombre de ratxes esperem que els estudiants identifiquin el valor màxim i el mínim del nombre de ratxes i preparin una taula per reduir la informació (com s'ha fet en la variable nombre de cares). Esperem també que calculin dades com la mitja i la mediana, la moda, etc.

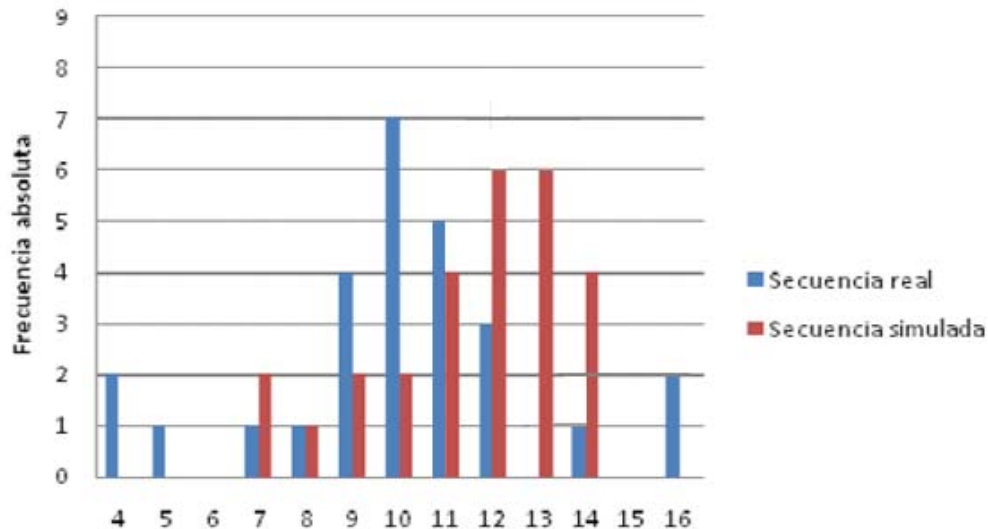
Nombre de ratxes en la seqüència simulada

Nombre de ratxes	Freqüència	Freqüència acumulada	Percentatge (%)
7	2	2	7,4%
8	1	3	11,1%
9	2	5	18,5%
10	2	7	25,9%
11	4	11	40,7%
12	6	17	62,9%
13	6	23	85,2%
14	4	27	100%
Total	27	27	100%

Nombre de ratxes en la seqüència real

Nombre de ratxes	Freqüència	Freqüència acumulada	Percentatge(%)
4	2	2	6,4%
5	1	3	11,1%
6	0	3	11,1%
7	1	4	14,8%
8	1	5	18,5%
9	4	9	33,3%
10	7	16	59,3%
11	5	21	77,8%
12	3	24	88,9%
13	0	24	88,9%
14	1	25	92,6%
15	0	25	92,6%
16	2	27	100%
Total	27	27	100%

S'espera que els alumnes construeixin també gràfics simultanis per a les dues distribucions, ja que això facilitaria la comparació de les dues. Per exemple, podrien representar en un gràfic de barres el nombre de ratxes de les dues seqüències. Cal mantenir present la idea de que les escales han de ser les mateixes i s'ha d'usar el mateix gràfic per comparar-les.



9. *Quines conclusions pots extreure sobre les diferències en el nombre de ratxes de les dues seqüències? Què en pots dir de la intuïció?*

Una característica del nombre de ratxes en una seqüència real és que, en general, és més petita del que pensem intuïtivament. Si ho calculem en l'exemple anterior, tenim una mitjana de 9,25 ratxes per a la seqüència real mentre que la seqüència simulada té una mitjana de 11,48 ratxes. També ho podem veure sense fer càlculs, observant els valors mitjans més elevats de les seqüències simulades. També la dispersió és més gran en les seqüències reals.

En general, tenim tendència a produir ratxes curtes i això fa que augmenti el nombre de ratxes i això és degut a una percepció incorrecta de la independència de resultats en llançaments successius de la moneda. Tendim a considerar que cada tirada no és independent de l'anterior, quan òbviament sí ho és. Els alumnes poden extreure conclusions mirant els gràfics o bé fent càlculs.

Novament, podem concloure igual que en la variable nombre de cares, que la intuïció ens enganya, i que el nombre de ratxes és menor del que esperàvem.

10. Quines conclusions pots extreure sobre les diferències en la ratxa més llarga de les dues seqüències? Què ens diu això sobre la vostra intuïció?

Per tal d'analitzar la longitud de la ratxa més llarga, cal que els alumnes observin a la taula els valors màxims i mínims en les seqüències real i simulada i en realitzin dues de noves, que redueixin la informació obtinguda, semblant a les següents

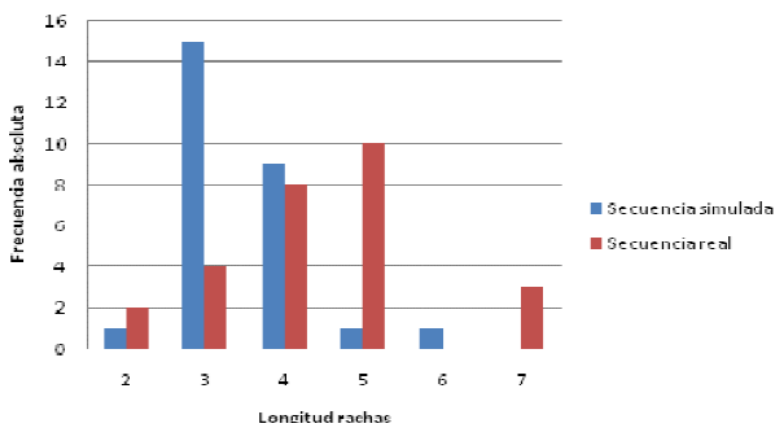
Nombre de cares en les ratxes de la seqüència simulada

Longitud	Freqüència	Freqüència acumulada	Percentatge(%)
2	1	1	3,7%
3	15	16	59,3%
4	9	25	92,6%
5	1	26	96,3%
6	1	27	100%
Total	27	27	100%

Nombre de cares en les ratxes de la seqüència real

Longitud	Freqüència	Freqüència acumulada	Percentatge(%)
2	2	2	7,4%
3	4	6	22,2%
4	8	14	51,9%
5	10	24	88,9%
6	0	24	88,9%
7	3	27	100%
Total	27	27	100%

A partir d'aquests també poden representar-ho gràficament, com en aquest gràfic de barres amb la informació concentrada.



En general, podem concloure que les ratxes són més llargues del que la nostra intuïció ens diu. Els alumnes tenen una mala percepció del valor esperat de la ratxa més llarga.

5.1.4 Activitats d'ampliació

Hi ha molts activitats que podem relacionar amb el tema anterior. Serà recomanable continuar la mateixa sessió amb altres qüestions que plantegin l'aleatorietat. Com, per exemple:

11. La probabilitat que un nen neixi mascle és aproximadament $\frac{1}{2}$. Quina de les següents seqüències de sexes és més probable?
- MMM.
 - VMM.
 - Les dues són igual de probables.

Si l'alumne pensa que b) és més probable, es poden realitzar a classe experiments de simulació amb ajuda de 3 monedes on la cara representi nen i la creu nena. També es poden realitzar diagrames en arbre per escriure totes les possibilitats en una família de 3 fills i representar així l'espai mostral.

Podem aprofitar també per explicar algunes propietats de la mitjana com:

1. La mitjana és un valor comprès entre els extrems de la distribució.
2. El valor mig es veu afectat pels valors de cada dada.
3. La mitjana no té per què ser igual a algun valor de les dades.
4. El valor obtingut de la mitjana de nombres enters pot ser decimal, com en aquest exemple (i que manca de sentit en el context de les dades).
5. Cal tenir en compte els valors nuls el càlcul de la mitjana.

5.1.5 Algunes dificultats i errors previsibles

5.1.5.1 Intuïció en probabilitat

En aquest experiment intervenen intuïcions incorrectes respecte l'atzar. Les intuïcions no són reflexives, sinó que sorgeixen de manera espontània.

Fischbein⁴ distingeix entre dos tipus d'intuïcions:

- Les *intuïcions primàries*, que s'adquireixen amb l'experiència, sense cap instrucció. Poden ser exemples el càlcul de distàncies, la localització d'objectes, etc.
- Les *intuïcions secundàries* es formen com a conseqüència de l'educació, principalment a l'escola. No es redueixen a fórmules sinó que aquestes es tradueixen en conviccions i creences. Una intuïció no es forma a partir d'una lectura o explicació teòrica sinó de la informació que l'alumne acaba usant en les seves pròpies accions i prediccions.

⁴Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.*

5.1.5.2 Percepció de l'aleatorietat

Piaget i Inhelder⁵ defensen que la comprensió de l'aleatorietat per part d'un/a nen/a és complementària a la relació causa-efecte. Els nens poden entendre l'atzar com a resultat d'unes causes independents, que porten a un valor inesperat.

Els alumnes atribueixen diferents significats a l'aleatorietat, per exemple:

- Aleatorietat com inexistència de causes o causa desconeguda.
- Aleatorietat com equiprobabilitat, es consideren aleatoris només els successos equiprobables.
- Aleatorietat com estabilitat de freqüències relatives. En aquest context, per a que un fenomen sigui aleatori s'ha de poder repetir indefinidament en les mateixes condicions.
- Aleatorietat com impredictibilitat: simplement no sabem el resultat de l'experiment.

5.1.5.3 Elaboració de gràfiques

Hem vist a l'exemple que la representació gràfica ens permet entendre millor el problema en qüestió. Cal notar que cal fer l'elecció del gràfic correcte i també que cal tenir en compte els següents elements:

- El *títol* i les *etiquetes* indiquen el contingut contextual del gràfic i les variables representades.
- El *marc* del gràfic inclou els eixos, les escales, i les marques a cada eix. Proporciona informació sobre les unitats de mesura de les magnituds representades.
- Els *especificadors* del gràfic, com els rectangles (histograma) o els punts (diagrama de dispersió) són els elements usats per visualitzar les dades.

Si fem gràfics en un estudi estadístic, cal que els elements estructurals es reconeguin fàcilment i que aquest tradueixi les dades que s'estudien i les representi i, reconegui quan un és més útil que un altre. Aquesta rigorositat en els gràfics dotarà als alumnes del sentit crític alhora d'interpretar d'altres gràfics que trobin en la vida quotidiana. Els alumnes poden tenir dificultats a l'hora de realitzar els gràfics, per exemple, construint escales no homogènies o obviant escales que identifiquin el propòsit del gràfic. És important que els alumnes entenguin que una gràfica mal elaborada proporciona una informació enganyosa. Una activitat complementària podria ser buscar exemples a premsa de taules estadístiques o gràfiques que presentin errors de construcció o que induïssin a conclusions equivocades i elaborar amb ells una llista dels errors detectats.

⁵Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*.

5.1.6 Anàlisi del contingut estadístic

En aquest projecte podem identificar, explícita o implícitament, els següents continguts:

1. Aplicacions de l'estadística:
 - Disseny d'un experiment.
 - Anàlisi de dades experimentals.
 - Comparació de dades experimentals amb patrons teòrics.
2. Conceptes i propietats:
 - Aleatorietat: experiment aleatori, seqüència de resultats aleatoris, successos equiprobables, ratxes.
 - Variable estadística discreta, freqüència absoluta, taula de freqüències, freqüència acumulada.
 - Variable aleatòria
 - Posició central, moda, mediana, mitjana.
 - Propietats de la mitjana aritmètica.
 - Dispersió: rang, casos centrals.
 - Agrupació en intervals, histograma.
3. Notacions i representacions:
 - Paraules com freqüència, moda, mediana i mitjana, recorregut, ...
 - Símbols com \bar{X} , Me, Mo.
 - Taules de freqüència, gràfiques de punts, barres, línies, sectors,...
4. Tècniques i procediments:
 - Recollida i registre de dades experimentals.
 - Elaboració de taules, recompte i càlcul de freqüència.
 - Elaboració de gràfiques de punts, diagrames de barres...
 - Interpretació de taules i gràfiques i elaboració de conclusions a partir del seu anàlisi.
 - Ús de calculadora gràfica, full de càlcul o software estadístic.
5. Actituds:
 - Reflexió sobre les pròpies intuïcions incorrectes en relació als experiments aleatoris.
 - Valoració de la utilitat de l'estadística per analitzar les dades obtingudes mitjançant l'experiment.
 - Valoració de la utilitat de l'estètica i la claredat en la construcció de taules i gràfics estadístics.

5.2 Proves mèdiques

5.2.1 Objectius

En aquest projecte s'utilitza el context de les proves mèdiques i el diagnòstic de malalties per treballar idees de probabilitat com la probabilitat simple, probabilitat composta i probabilitat condicionada; així com el teorema de Bayes.

Es farà veure a l'alumnat com el teorema de Bayes modifica el valor de les probabilitats quan disposem d'informació nova. En aquest sentit, formalitza la idea "d'aprendre de l'experiència".

Un altre objectiu important és posar de manifest algunes intuïcions errònies que tenim sobre la probabilitat condicionada, que pot donar a cometre errors importants en la presa de decisions en situacions freqüents de la vida quotidiana, com és la interpretació d'una prova mèdica.

Per alumnes universitaris, aquest enfocament es podria completar amb una introducció intuïtiva a algunes idees d'inferència bayesiana.

Els objectius que es plantegen amb aquest projecte són:

- Diferenciar entre probabilitats inicials i finals. Relacionar aquests conceptes amb probabilitat simple, condicional i composta.
- Identificar els successos de interès d'un experiment aleatori i les seves probabilitats inicials.
- Ús del teorema de Laplace per calcular probabilitats simples i condicionals.
- Analitzar el teorema de Bayes com a eina per transformar probabilitats inicials en finals.
- Organitzar les dades en una taula que faciliti el càlcul.

El projecte pot ser realitzat amb alumnes de Batxillerat (atès que els càlculs són senzills i els conceptes fàcils d'entendre) i alumnes universitaris en alguna assignatura obligatòria de probabilitats i estadística o bé en alguna optativa (com ja s'ha comentat, el projecte es podria ampliar amb inferència bayesiana). S'entén que els alumnes universitaris actualment no treballen per projectes, però podrien treballar el mateix projecte també amb nomenclatura d'estadística bayesiana (versemblança, probabilitats a priori i a posteriori...).

5.2.2 Les dades

En aquest projecte es treballa amb dades de proves mèdiques. Es poden treballar o bé amb dades hipotètiques, inventades pel professor, o bé obtenint-ne les dades reals sobre una certa malaltia, obtinguts a través d'Internet.

És interessant notar que aquest projecte pot motivar encara més els alumnes si la tria de les dades es fa sobre un tema d'interès general o particular de la classe. El tipus de dades que necessitem són: prevalença, falsos positius, falsos negatius, sensibilitat i especificitat d'una prova.

5.2.3 Preguntes, activitats i gestió de la classe

S'inicia el projecte realitzant una discussió sobre la importància que pot tenir la probabilitat en el diagnòstic mèdic, no només pel professional que el realitza sinó també pel malalt que rep el diagnòstic.

Es preguntarà als estudiants si pensen que la probabilitat és útil en aquestes situacions. Un cop hagin expressat les seves opinions compartit les seves experiències, es continua presentant la simptomatologia d'una malaltia o trastorn, com seria per exemple la narcolèpsia:

- 1. La narcolèpsia és un trastorn primari de la son. El símptoma principal és l'aparició d'atacs de son. Aquests atacs apareixen de cop i sense poder evitar-los. Les persones que el pateixen no descansen bé; per tant es tornen irritables i no rendeixen el què voldrien. Creus que és un trastorn freqüent? Quantes persones creus que el pateixen?*

Si els alumnes no coneixen la malaltia, prèviament es demanarà que s'informin. Un cop interessats en el tema de les proves mèdiques, es presenta el concepte de prevalença. La prevalença és la probabilitat de que una persona triada a l'atzar tingui la malaltia, però per no parlar de probabilitats tan aviat, la presentarem com el nombre total d'individus que presenten la malaltia entre el total d'habitants de l'àrea que s'estigui estudiant.

La prevalença sempre és un número entre 0 i 1, o bé un nombre expressat amb percentatge (%). En aquest punt, es demanarà als alumnes que busquin la prevalença de la narcolèpsia.

Sense desviar-nos massa del projecte, es pot fer notar que la prevalença d'altres malalties és més baixa o més alta, podem posar-ne exemples i parlar sobre malalties rares i freqüents.

2. *Suposem que una de cada 1000 persones pateix narcolèpsia. Si triéssim a l'atzar una persona de la ciutat, quina és la probabilitat que tingui narcolèpsia?*

Es recorda als estudiants els conceptes d'experiment aleatori o succés. Es pregunta pels casos favorables i possibles a tenir la malaltia, en la mostra donada. Els alumnes recordaran la regla de Laplace, que es pot aplicar en aquesta situació ja que, al no tenir cap altra informació, se suposa que tots els subjectes tenen la mateixa probabilitat de ser triats.

Per tant, la probabilitat de que la persona triada a l'atzar pateixi narcolèpsia és $1/1000$.

Continuem introduint conceptes sobre probabilitat bayesiana. La probabilitat inicial de patir narcolèpsia en una persona triada a l'atzar de la població seria en aquest cas igual a la prevalença. Ho escriurem com $P(N)=1/1000$.

Es farà veure als alumnes que la probabilitat inicial en aquest cas té caràcter subjectiu. Si ara estudiem la prevalença (o la probabilitat inicial) de narcolèpsia a altres països, o canviant l'edat de la mostra, possiblement el valor canviaria. De manera que diferents persones podrien assignar una probabilitat inicial diferent, depenent de la seva informació sobre el succés de interès.

3. *Suposa que tenim una prova que diagnostica la narcolèpsia. Com saps, les proves mèdiques no són infalibles. Saps què és un fals positiu? I un fals negatiu?*

Els alumnes definiran aquests conceptes. Es discuteix amb els estudiants el caràcter aleatori que sempre té una prova mèdica. Es discuteixen els avenços de la medicina i els esforços de la investigació per aconseguir proves segures. Es reflexionarà sobre les situacions en les que un test diagnòstic dona positiu, tot i que la persona no tingui tal malaltia (aleshores s'anomena fals positiu) i les situacions en les que el test no detecta la malaltia tot i la persona estar malalta (s'anomena fals negatiu).

Es farà veure que aquests conceptes en realitat són probabilitats condicionades.

Un fals positiu correspon a la probabilitat condicionada de que el test doni positiu sabent que la persona està sana i s'escriu com $P(+|sa)$.

Un fals negatiu correspon a la probabilitat condicionada de que el test doni negatiu sabent que la persona està malalta i s'escriu com $P(-|malalt)$.

Aquests dos casos són situacions en què les proves mèdiques no són exactes, per diferents motius, tals com el disseny de la prova, la confusió de resultats o bé que per un altre problema paral·lel a la prova aparegui un d'aquests fals positiu o negatiu.

També es poden definir els conceptes de sensibilitat i especificitat i els de índex predictiu positiu i índex predictiu negatiu d'una prova mèdica.

La sensibilitat correspon a la probabilitat condicionada de que el test doni positiu sabent que la persona està malalta i s'escriu com $P(+|malalt)$.

L'especificitat correspon a la probabilitat condicionada de que el test doni negatiu sabent que la persona està sana i s'escriu com $P(-|sa)$.

L'índex predictiu positiu correspon a la probabilitat condicionada de que la persona estigui malalta sabent que el test dona positiu i s'escriu com $P(malalt|+)$.

L'índex predictiu negatiu correspon a la probabilitat condicionada de que la persona estigui malalta sabent que el test dona positiu i s'escriu com $P(sa|-)$.

Resumint, hi ha sis valors importants a estudiar en una prova mèdica:

- Fals positiu: $P(+|sa)$
- Fals negatiu: $P(-|malalt)$
- Sensibilitat: $P(+|malalt)$
- Especificitat: $P(-|sa)$
- Índex predictiu positiu: $P(malalt|+)$
- Índex predictiu negatiu: $P(sa|-)$

El que interessa per considerar per bona una prova diagnòstica, és que tingui una sensibilitat i especificitat altes i que doni pocs falsos positius i negatius.

4. *Suposa que el test per la narcolèpsia és positiu en 99 de cada 100 persones malaltes i també 2 de cada 100 persones sanes. Quina és la proporció d'errades?*

Com ja hem dit, sempre hi ha una petita probabilitat d'error, bé pel disseny de la prova, per error humà en l'aplicació, o per defecte del material o altres causes. I per això sovint es fa més d'una prova a cada pacient (sobretot abans de recomanar certs tractaments o intervencions quirúrgiques).

Per un metge, a més de voler donar un diagnòstic correcte, també els interessa minimitzar els errors. I això requereix d'alguns càlculs de probabilitats.

En aquest punt estem fent notar la necessitat de les matemàtiques en altres àmbits i l'hem fet sorgir de manera natural.

Per resoldre aquesta necessitat, el primer que es calcula es la sensibilitat i l'especificitat d'un test.

Usant les dades de l'enunciat, calculem l'especificitat i sensibilitat del test de narcolèpsia, tindríem:

- Sensibilitat: $P(+|N)=99/100=0,99$
- Especificitat: $P(-|no N)=98/100=0,98$

5. *Completem la taula amb les dades que coneixem fins ara. Amb un total de 100.000 habitants.*

Es motiva als estudiants del interès de calcular d'un total de malalts, quants donarien resultats positius o negatius si tenen o no la malaltia.

Passarem als estudiants una taula com la següent i ells hauran de realitzar els càlculs pertinents:

Taula per un test diagnòstic			
	Test +	Test -	TOTAL
Pateixen narcolepsia			
No pateixen narcolepsia			
TOTAL			

La taula resultant completada pels alumnes hauria de ser:

Taula per un test diagnòstic			
	Test +	Test -	TOTAL
Pateixen narcolepsia	99	1	100
No pateixen narcolepsia	1998	97902	99.900
TOTAL	2097	97903	100.000

6. *En realitat el que ens interessa saber és si el test dona positiu, quina probabilitat hi ha de tenir narcolèpsia?*

Això és el que hem definit abans com índex predictiu positiu: probabilitat de patir narcolèpsia si el test ha donat positiu $P(N|+)$.

Per calcular aquesta probabilitat cal fer:

$$P(N / +) = \frac{99}{99 + 1998} = 0,0472$$

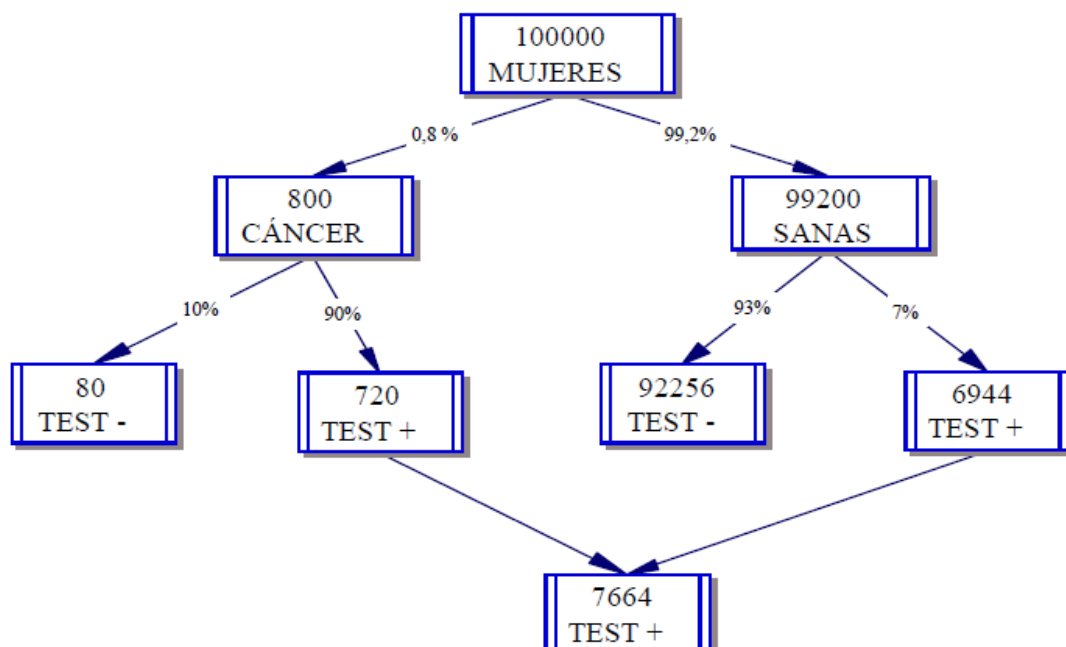
En aquest punt sorgirà una discussió sobre el resultat obtingut: pot semblar que les proves mèdiques són poc fiables. El que està passant és que el nombre de persones que tenen la malaltia en el total de la població és molt petit.

- La probabilitat que el test doni positiu si la persona està malalta, és molt alt. Gairebé totes són detectades amb el test (el test té molta sensibilitat).
- D'altra banda, la probabilitat de que doni un resultat positiu si la persona està sana (fals positiu) és molt petita (té una especificitat alta).

Ara bé, un succés amb poca probabilitat no és un succés impossible. A més a més, si la quantitat de persones que es fan la prova és molt gran, poden aparèixer més falsos positius que positius reals (com en el cas de l'exemple).

Fem un parèntesi de la malaltia de la narcolèpsia i considerem ara una prova que es realitza regularment per prevenir el càncer de pit. Aquestes proves, les mamografies, es realitzen anualment a dones a partir dels 40-50 anys.

En el següent esquema es representen els resultats esperats d'una mostra de 100.000 dones, suposant que 8 de cada 1000 tenen càncer i que la prova dona positiu en el 90% de les malaltes i el 7% de les sanes.



Si observem el nombre total de resultats positius, la majoria corresponen a persones sanes. Per la qual cosa, la probabilitat de tenir càncer si la prova és positiva és petita.

Convé que les persones entenguin com funcionen les probabilitats condicionades al interpretar un diagnòstic en casos com aquests, per tal que esperin a una segona prova abans de sotmetre's a un tractament agressiu o teràpia.

Sovint el que es fa per diagnosticar una malaltia, és fer una primera prova no invasiva i de fàcil realització a tothom. Només en els casos que ha donat positiu, realitzar una segona prova més cara. En aquest exemple, la mamografia es realitzaria a 100.000 dones. En cas de fer una segona prova, només la realitzarien a 7.664 dones.

7. Què passaria si, enlloc de narcolèpsia, aquest test (mateixa sensibilitat i especificitat) detectés el insomni? Busca la prevalença de l'insomni.

A continuació s'analitza amb els estudiants l'efecte que té canviar les probabilitats de la malaltia sobre les condicionades. La prevalença de l'insomni en la població és bastant més elevada que la narcolèpsia (un 15%). És a dir, la probabilitat inicial de el insomni es $P(I)=15/100$.

Per aquest motiu, la probabilitat d'un fals positiu serà molt més petita que en el cas de la narcolèpsia o del càncer de pit. I ho comprovarem a continuació.

8. La probabilitat de que el test doni positiu en una persona amb insomni és de 0,99 i la probabilitat que doni positiu en una persona sana és de 0,02. Calculem ara la probabilitat final de patir insomni si la prova és positiva. És a dir, calcular la probabilitat $P(I|+)$.

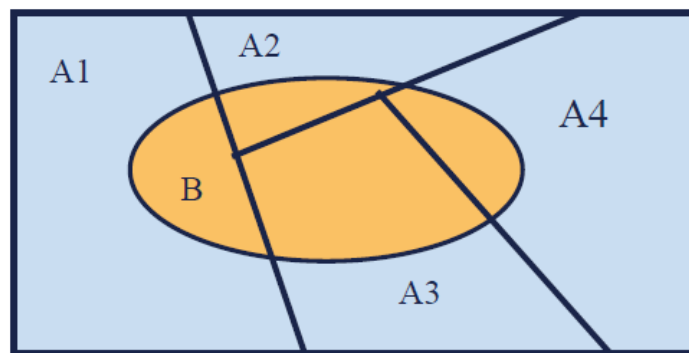
$$P(I|+) = \frac{P(I \cap +)}{P(+)} = 0,8973$$

Veiem que el resultat de la prova d'insomni és molt més satisfactòria, ja que la prevalença de el insomni en la població és molt més elevada que la narcolèpsia.

Com ja hem motivat als alumnes amb els exemples introduïts i la importància d'interpretar bé les probabilitats condicionades, a continuació els hi presentem el teorema de Bayes.

El teorema de Bayes permet passar calcular probabilitats condicionades quan ens interessa canviar l'ordre del condicionament. És a dir, ens permet obtenir $P(\text{malalt}|+)$, quan es coneixen $P(\text{malalt})$ i $P(+|\text{malalt})$.

Considerem un experiment aleatori i suposem que el seu espai mostral associat es E . Siguin els successos A_1, A_2, A_n una partició de E , les probabilitats dels quals són conegudes. Sigui B un succés qualssevol de l'espai mostral, del que coneixem les probabilitats $P(B|A_i)$. El següent esquema representa la partició de l'espai mostral:



El teorema de Bayes permet calcular les probabilitats $P(A_i|B)$, mitjançant la següent fórmula:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \times P(B / A_i)}{P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \times P(B / A_n)}$$

Aquest teorema es pot també expressar simplificadament de la següent manera:

$$P(A_i / B) = K \times P(A_i) \times P(B / A_i)$$

On K és la inversa de la probabilitat de B , que es calcula com:

$$K = \frac{1}{P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \times P(B / A_n)}$$

9. El teorema de Bayes permet calcular com es modifiquen les probabilitats en determinats successos, quan es coneix alguna informació addicional. Aquest teorema és de gran utilitat per diagnosticar diferents trastorns a partir de proves. Nosaltres podem pensar que la probabilitat de patir una malaltia és $P(\text{malalt})$, però una vegada hem realitzat un test i aquest ha donat positiu, la probabilitat és $P(\text{malalt}|\text{+})$. El teorema de Bayes ens permet calcular aquesta probabilitat, coneixent la primera. Però també es pot aplicar en altres situacions, on s'incorpora més informació.

Es reflexiona amb els alumnes sobre el paper del teorema de Bayes per actualitzar els valors de les probabilitats en funció de la recollida de noves dades i poder calcular probabilitats condicionades que no coneixia.

Continuem amb un altre exemple, el de la depressió post-part, per veure com es poden organitzar els càlculs en una taula.

10. Al voltant del 15% de les mares primerenques senten ansietat en els dies posteriors al part. En el 90% dels casos aquesta ansietat disminueix i en pocs dies desapareix, però en els casos restants pot aparèixer una depressió que necessiti tractament, anomenada depressió post-part. Un 2% d'aquestes mares que no van patir ansietat els primers dies, desenvolupa depressió post-part després de les primeres setmanes del naixement. Si una mare té una depressió post-part, identifica la probabilitat de tenir ansietat després del part.

Per a resoldre l'exercici, s'ensenya als alumnes a identificar les dades i saber el què es demana. Les dades són les següents:

- $P(\text{ansietat en les primeres setmanes})=0,15$.
- $P(\text{no patir ansietat les primeres setmanes})=0,85$.
- $P(\text{depressió}|\text{havent ansietat inicial})=0,10$.
- $P(\text{depressió}|\text{no havent ansietat inicial})=0,02$.

El que demana l'exercici és $P(\text{ansietat inicial}|\text{depressió})$ que caldrà calcular usant el teorema de Bayes. Una manera senzilla d'organitzar els càlculs per passar de les probabilitats inicials $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ a les probabilitats finals $P(A|D)$, $P(B|D)$, $P(C|D)$ és utilitzant una taula com la següent:

Organització de càlculs de probabilitat final				
Successos de interès (1)	Probabilitat ansietat (2)	Depressió havent patit ansietat (3)	Producte (4)	Probabilitat condicionada buscada (5)
Ansietat inicial	0,15	0,1		
No ansietat	0,85	0,02		
Suma				

- En la columna (1) posem els successos d'interès, en aquest cas, tenir o no ansietat els primers dies.
- En la columna (2) posem les probabilitats que coneixem i en la columna (3) la probabilitat condicionada que coneixem.
- Calculem ara els numeradors de la fórmula de Bayes (producte (2)x(3) i ho anotem en la columna (4))
- Sumem la columna (4) per obtenir el denominador de la fórmula de Bayes.
- En la columna (5) obtenim les probabilitats finals, dividint cada casella en la columna (4) entre la suma anterior.

La taula completa quedaria així:

Organització de càlculs de probabilitat final				
Successos de interès (1)	Probabilitat ansietat (2)	Depressió havent patit ansietat (3)	Producte (4)	Probabilitat condicionada buscada (5)
Ansietat inicial	0,15	0,1	0,015	0,4688
No ansietat	0,85	0,02	0,017	0,5313
Suma			0,032	1

És a dir,

$$P(A|D)=0,4688$$

$$P(\text{no } A|D)=0,5313$$

Veiem amb els resultats de la taula que gairebé la meitat de les depressions post-part venen d'una ansietat anterior.

5.2.4 Activitats d'ampliació

5.2.4.1 Les corbes ROC

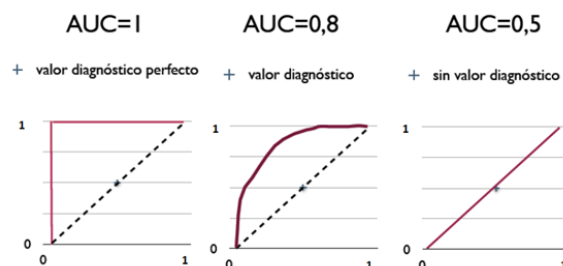
Per a l'elecció entre dues proves diagnòstiques diferents, es recorre a les corbes ROC, ja que és una mesura global i independent del punt de tall. Per això, en l'àmbit sanitari, les corbes ROC també es denominen **corbes de rendiment diagnòstic**.

Les corbes ROC representen la relació dels valors de sensibilitat i especificitat segons el nivell del positiu del test.

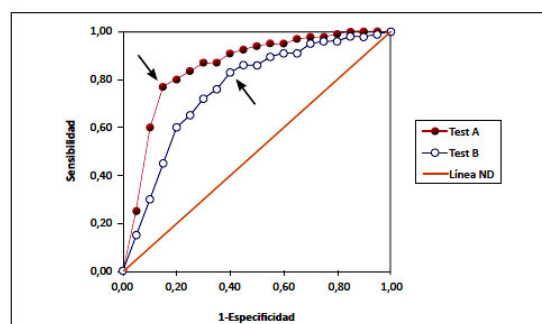
L'elecció es realitza mitjançant la comparació de l'àrea sota la corba (AUC) de dues proves. Aquesta àrea té un valor entre 0,5 i 1, on 1 representa un valor diagnòstic perfecte y 0,5 és una prova sense capacitat discriminatòria diagnòstica. És a dir, si AUC per una prova diagnòstica es 0,8 significa que existeix un 80% de probabilitat de que el diagnòstic realitzat a un malalt sigui més correcte que el d'una persona sana triada a l'atzar. Per això, sempre es tria la prova diagnòstica que presenti una àrea més gran sota la corba.

Para interpretar les corbes ROC s'han establert aquests criteris per intervals per als valors de AUC:

- [0.5, 0.6): Test dolent.
- [0.6, 0.75): Test regular.
- [0.75, 0.9): Test bo.
- [0.9, 0.97): Test molt bo.
- [0.97, 1): Test excel·lent.



Per comparar la capacitat discriminativa de dos tests diagnòstics és important verificar un concepte metodològic de molta importància: els tests a comparar han de ser mesurats simultàniament i aplicats sobre els mateixos pacients. Un cop tenim aquests requisits, per comparar la capacitat discriminativa de dos tests diagnòstics han de comparar-se els seus respectius AUC, (serà més discriminatiu el test amb major AUC).



5.2.4.2 Examen

Aquesta seria una pregunta d'examen (real) que serviria per avaluar el contingut d'aquest projecte en un examen.

EXERCICI: L'embolisme pulmonar és una condició relativament comú que necessita hospitalització i que sovint passa en pacients hospitalitzats. La pressió arterial menor de 90 mm HG és un dels criteris importants per a diagnosticar aquesta condició. Suposem que la sensibilitat del tests és del 95% i l'especificitat del test és del 75% i la prevalença de l'embolisme pulmonar és del 20%.

a) *Calcula el valor predictiu positiu del test.*

Malalt= Embolisme Pulmonar=EP

Test + = Pressió arterial menor de 90 mm/HG

Sens= $P(\text{Test+}/\text{EP}) = .95$

Esp = $P(\text{Test-}/\text{No EP}) = .75$

Prev= $P(\text{EP}) = .20$

Seguint el teorema de Bayes el Valor Predictiu Positiu (VPP) és:

$$VPP = P(\text{EP}/\text{Test+}) = \frac{P(\text{Test+}/\text{EP})P(\text{EP})}{P(\text{Test+})} = \frac{P(\text{Test+}/\text{EP})P(\text{EP})}{P(\text{Test+}/\text{EP})P(\text{EP}) + P(\text{Test+}/\text{EP-})P(\text{EP-})}$$

$$VPP = \frac{\text{sens} \times \text{prev}}{\text{sens} \times \text{prev} + (1 - \text{esp}) \times (1 - \text{prev})}$$

```
sens<- .95
```

```
esp<- .75
```

```
prev<- .20
```

```
vpp<- (sens*prev)/(sens*prev+(1-esp)*(1-prev))
```

```
cat("El VPP és " , vpp, "\n")
```

```
## El VPP és 0.4871795
```

b) *Calcula el valor predictiu negatiu del test.*

Seguint el teorema de Bayes el Valor Predictiu Negatiu (VPN) és:

$$VPN = P(\bar{\text{EP}}/\text{Test-}) = \frac{P(\text{Test-}/\bar{\text{EP}})P(\bar{\text{EP}})}{P(\text{Test-})} = \frac{P(\text{Test-}/\bar{\text{EP}})P(\bar{\text{EP}})}{P(\text{Test-}/\text{EP})P(\text{EP}) + P(\text{Test-}/\bar{\text{EP}})P(\bar{\text{EP}})}$$

$$VPN = \frac{\text{esp} \times (1 - \text{prev})}{(1 - \text{sens}) \times \text{prev} + \text{esp} \times (1 - \text{prev})}$$

```
vpn<- (esp*(1-prev))/((1-sens)*prev+esp*(1-prev))
```

```
cat("El VPN és " , vpn, "\n")
```

```
## El VPN és 0.9836066
```

c) Respon a las preguntes anteriors si la prevalença fos del 80%.

```
prev<- .80
vpp<- (sens*prev)/(sens*prev+(1-esp)*(1-prev))
cat("El VPP amb prevalença .80 és " , vpp, "\n")
```

```
## El VPP amb prevalença .80 és 0.9382716
```

```
vpn<- (esp*(1-prev))/((1-sens)*prev+esp*(1-prev))
cat("El VPN amb prevalença .80 és " , vpn, "\n")
```

```
## El VPN amb prevalença .80 és 0.7894737
```

Al augmentar la prevalença augmenta el valor del valor predictiu positiu a costa d'una reducció del valor predictiu negatiu

d) Es disposa d'una prova complementària que té un 99% de sensibilitat i un 95% de especificitat. Calcula els valors predictius positiu i negatiu si la prova complementària s'aplica a la vegada i es considera cas a aquell que doni les 2 proves positives.

Per resoldre aquest exercici només cal calcular la sensibilitat i l'especificitat de la nova estratègia diagnòstica

El test es positiu quan les dues proves a l'hora son positives

$$Sens = P(Test +/EP) = P(Test_1 = + \cap Test_2 = +/EP) = P(Test_1/EP) * P(Test_2 = +/EP) = 0.95 \times 0.99$$

El test es negatiu quan una o l'altra son negatives

$$Esp = P(Test - /EP) = P(Test_1 = - \cup Test_2 = -/EP) = P(Test_1 = -/EP) + P(Test_2 = -/EP) - P(Test_1/EP) * P(Test_2 = -/EP) = .75 + .95 - .75 \times .95$$

```
sens<- .95* .99
```

```
esp<- .75+.95-.75 *.95
```

```
prev<- .20
```

```
vpp<- (sens*prev)/(sens*prev+(1-esp)*(1-prev))
cat("El VPP és " , vpp, "\n")
```

```
## El VPP és 0.9495204
```

```
vpn<- (esp*(1-prev))/((1-sens)*prev+esp*(1-prev))
cat("El VPN és " , vpn, "\n")
```

```
## El VPN és 0.9851602
```

Al utilitzar una segona prova més sensible però molt més específica obtenim un millor VPP i VPN.

e) Respon a la pregunta anterior si només s'aplica la prova a aquells que tenen una pressió menor de 90 en la primera prova.

No cal fer cap càlcul. Donat que es consideren els casos en què les dues proves han donat positiu, és irrellevant el resultat del segon test si el primer ha donat positiu. Per tant, estem en el mateix cas que a l'apartat d).

5.2.5 Algunes dificultats i errors previsibles

5.2.5.1 Probabilitat condicionada

La probabilitat condicionada és fonamental en les aplicacions de l'estadística, perquè permet afegir canvis a mesura que tenim nova informació. És també un concepte teòric bàsic que es requereix en la construcció de l'espai mostral producte. Per tot això, és fonamental la seva comprensió per a l'estudi d'inferència estadística i en l'estudi d'associació de variables, regressió i models lineals.

També a la vida quotidiana i al terreny laboral, el fet de prendre decisions correctes en situacions de dubte es basa sovint en el raonament condicional. Què passa si faig això? O bé, què passarà si faig això, sabent que anteriorment havia passat això altre?

Tot i que és clar que és necessari realitzar aquests raonaments, també hi ha importants errors de comprensió i d'aplicació d'aquest concepte. Una de les dificultats es relaciona amb la confusió entre causalitat i condicionament. Des del punt de vista psicològic, la persona que avalua una probabilitat condicionada $P(A|B)$ percebrà dues relacions molt diferents entre A (succés avaluat) i B (succés condicionant).

- Si dins el context s'intueix que B és una causa de A , la persona estableix entre A i B una relació causal. En aquest cas, l'estudiant pot realitzar un raonament causal, i el que fent estimacions sobre l'efecte, coneixent les causes.
- Si dins el context s'intueix que A és una causa de B , la persona estableix entre A i B una relació diagnòstica. En aquest cas, l'estudiant pot realitzar un raonament diagnòstic, fent estimacions de la causa coneixent l'efecte.

Tot i que matemàticament els enunciats són equivalents, des del punt de vista de la comprensió individual de cada persona, no és igual.

Un fet curiós és que les persones consideren més probable l'afirmació "que una nena tingui els ulls blaus si la seva mare té els ulls blaus" que aquesta altra: "una mare tingui els ulls blaus si la seva filla té els ulls blaus".

Però tots dos successos són igual de probables:

$$\begin{aligned} P(\text{filla ulls blaus}|\text{mare ulls blaus}) &= \frac{P(\text{filla ulls blaus, mare ulls blaus})}{P(\text{filla ulls blaus})} \\ &= \frac{P(\text{mare ulls blaus, filla ulls blaus})}{P(\text{mare ulls blaus})} \\ &= P(\text{mare ulls blaus}|\text{filla ulls blaus}) \end{aligned}$$

Atès que el numerador és la probabilitat de la intersecció, no importa l'ordre mare/filla. La igualtat, doncs, ve donada perquè $P(\text{filla ulls blaus})=P(\text{mare ulls blaus})$.

Ens trobarem amb la mateixa situació sempre que els dos successos tinguin la mateixa probabilitat.

Gras i Totohasina⁶ identifiquen dos creences errònies sobre la probabilitat condicionada en els estudiants:

- En la *concepció cronològica*, els estudiants interpreten la probabilitat condicionada $P(A|B)$ com una relació temporal, on un esdeveniment condicionant B sempre precedeix al succés A .
- En la *concepció causal*, els estudiants interpreten la probabilitat condicionada $P(A|B)$ com una relació causal implícita, on el succés condicionant B és la causa i A és la conseqüència.

Una altra confusió, segons Falk⁷, és no distingir correctament $P(A|B)$ de $P(B|A)$ el que s'anomena *fal·làcia de la condicional transposada*. Sobretot s'observa aquest fet en problemes de context mèdic on es confon la probabilitat de tenir la malaltia quan el test ha donat positiu amb la probabilitat de que el test doni positiu, donat que es té la malaltia.

Un exemple: la probabilitat de que un nen afectat amb síndrome de Dawn presenti una amniocentesi prenatal positiva, és alta. Això es confon amb el fet que, essent la prova positiva, el nen realment tingui síndrome de Down (aquesta probabilitat és molt més baixa).

Per últim, també comentar la fal·làcia del fiscal. La *fal·làcia del fiscal* també és una fal·làcia del raonament probabilístic, i que succeeix per no interpretar bé la probabilitat condicionada.

⁶Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptionssources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilitéconditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématique*.

⁷Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*.

Normalment és usada per la fiscalia per argumentar a favor de la culpabilitat d'un acusat en un judici penal. Pot ser utilitzada pels advocats defensors que intenten demostrar la innocència del seu client . Consisteix a suposar que la probabilitat a priori d'un succés a l'atzar és igual a la probabilitat que l'acusat és innocent.

Vegem un exemple:

Suposem que s'ha produït un assassinat i que l'autor ha deixat algun tipus d'evidència a l'escena del crim, per exemple, una taca de sang a la catifa. Suposem que, segons patrons bioquímics, la sang trobada és tal que només 1 de cada 1000 persones coincideix amb aquesta. Tenim un possible culpable X, la sang del qual coincideix amb la trobada a l'escena del crim. És acusat d'assassinat i portat a judici. El fiscal, durant el judici, assegura el següent:

“La probabilitat de que la sang d'un innocent coincideixi amb la sang trobada a l'escena del crim és d'1 entre 1000. La sang de l'acusat coincideix amb la trobada a l'escena del crim. Aleshores, la probabilitat que sigui innocent és 0'001. És a dir, és culpable amb probabilitat 0'999”

Succés A: “Hi ha coincidència sang”	$P(A) = 1/1000 = 0'001$
Succés B: “L'acusat és innocent” (doncs la seva sang coincideix)	$P(B) = 0'001$
Succés C: “L'acusat és culpable”	$P(C) = P(\text{no B}) = 1-0'001 = 0'999$

Aquest raonament, que a simple vista sembla convincent, i pot concloure que l'acusat ha d'anar a presó, és, senzillament, fals. Vegem per què:

Imaginem que la població de possibles autors del crim és de 100.000 persones i que hi ha 100 persones que donen positiu en l'anàlisi de coincidència amb la sang trobada (o sigui, $100/100.000 = 0,001$). Una d'aquestes 100 persones és l'assassí. Agafem un d'ells a l'atzar.

Si no hi ha cap altra prova en contra de cap d'ells en concret, tots ells tenen la mateixa probabilitat de ser culpables, és a dir, el culpable és 1 dels 100, o sigui, la probabilitat de ser innocent és 0.99.

Succés A: “Hi ha coincidència sang”	$P(A) = 100/100.000 = 0'001$
Succés C: “L'acusat és culpable”	$P(C) = 1/100 = 0'01$
Succés B: “L'acusat és innocent”	$P(B) = P(\text{no C}) = 1-0'01 = 0'99$

Per tant, si fem cas del primer raonament, l'acusat serà culpable amb un 99'9% de probabilitat mentre que, si raonem de la segona manera, només ho serà amb un 1% de probabilitat.

¿Com expliquem aquest fet? És clar que alguna de les implicacions lògiques no ha estat correcta. El que ha passat és que no estem tenint en compte les probabilitats condicionades.

Anomenem, com abans, la hipòtesi $C = \text{"L'acusat és culpable"}$. Aquesta serà certa amb una probabilitat que expressarem com $P(C)$. Si la població era de 100.000 persones i hi ha 1 sol culpable, aquesta probabilitat val $P(C)=1/100.000=0'00001$

Sigui A la evidència: "La sang de l'acusat coincideix amb la de l'escena del crim". (Això els hi passa a 100 de les 100.000 persones, és a dir $P(A)=100/100.000=0,001$)

El que ens interessa conèixer és $P(C|A)$, és a dir, probabilitat que l'acusat sigui culpable sabent la evidència que la seva sang coincideix amb la trobada a la catifa de l'escena del crim.

El fiscal comet l'error de dir que aquesta probabilitat val 0'999. Perquè raona pensant que la probabilitat de ser culpable, sabent que la sang coincideix, i la probabilitat de ser culpable són iguals, $P(C|D)=P(C)$. És a dir, l'error ha estat pensar que, només si no hi ha coincidència de sang, el subjecte X és innocent (però com s'ha esmentat, 100 persones satifan aquesta condició i 99 d'elles són innocents).

Això ha portat a la discrepància de resultats quan hem tornat a calcular de la forma correcta.

Per a veure-ho més clar, si fem els càlculs corresponents, necessitarem també el càlcul de $P(A|C)$, que correspon la probabilitat que la sang de l'acusat coincideixi amb la prova del crim, però aquesta és trivialment 1 (obviament la sang de l'escena del crim és la sang del culpable). Per tant:

$$P(C|A) = \frac{P(A|C) \cdot P(C)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 0'00001}{0,001} = 0,01$$

És a dir, la manera correcta de calcular ha estat la segona.

És important que tant els científics forenses, com els advocats i els juristes, entenguin aquesta i altres fal·làcies i prenguin especial cura a l'hora de fer asseveracions o implicacions no del tot certes.

5.2.5.2 Teorema de Bayes

La competència en resolució de problemes bayesians ha estat investigada àmpliament i aquests problemes són difícils i contra intuïtius. Els alumnes sovint no tenen en compte les probabilitats a priori en el càlcul de probabilitat inversa.

Al presentar les dades en una taula de doble entrada es dificulta la percepció seqüencial d'alguns problemes, perquè el que queda més visible és la intersecció de dos successos i els alumnes poden confondre la probabilitat condicionada i la conjunta.

Els punts clau a l'hora d'abordar aquest problema són:

- Identificar les dades del problema: l'alumne ha de distingir probabilitat simple i composta, per poder realitzar correctament les particions de l'espai mostral i identificar quines dades es refereixen a cadascun dels conceptes de l'enunciat del problema.
- Construir una representació adequada: el segon pas és construir un diagrama en arbre adequat per representar l'experiment seqüencial i la partició de la població. Aquesta representació ha de servir a l'alumne per reconèixer el conjunt de successos possibles.
- Identificar la probabilitat condicionada: per continuar, els estudiants han de saber quina probabilitat se'ls demana i que aquesta és una probabilitat condicionada inversa.
- Calcular el denominador de la fórmula de Bayes: després d'identificar el problema com el càlcul d'una probabilitat condicionada i recordar el teorema de Bayes, l'estudiant ha de calcular el numerador i el denominador i aquest últim ha de ser calculat amb la regla de la probabilitat total (fent el producte de cada branca de l'arbre i sumant aquestes probabilitats conjuntes). Els alumnes han d'entendre que es tracta de successos independents (per poder aplicar el producte correctament).
- Calcular la probabilitat inversa (teorema de Bayes): finalment, l'estudiant ha de sintetitzar tots els passos anteriors i calcular el numerador (probabilitat conjunta) i el denominador (probabilitat total) per obtenir-ne la probabilitat inversa, aplicant així el teorema.

5.2.6 Anàlisi del contingut estadístic

En aquest projecte podem identificar, explícita o implícitament, els següents continguts:

1. Aplicacions de l'estadística:
 - Anàlisi de probabilitats.
 - Revisió de probabilitats amb informació nova.
 - Diagnòstic mèdic.
 - Sensibilitat i especificitat d'una prova.
2. Conceptes i propietats:
 - Experiment aleatori i succés. Casos favorables i possibles.
 - Assignació de probabilitats mitjançant la regla de Laplace.
 - Probabilitat inicial d'un succés.
 - Probabilitat simple, condicionada i composta.
 - Probabilitat final d'un succés.
 - Versemblança.
 - Teorema de Bayes. Aplicacions.
3. Notacions i representacions:
 - Paraules com probabilitat, versemblança, etc.
 - Símbols com $P(A)$, $P(A|B)$;
 - Taules.
4. Tècniques i procediments:
 - Recerca de dades mèdiques.
 - Interpretació de taules i elaboració de conclusions a partir del seu anàlisi.
 - Càlcul de probabilitats simples, condicionades i compostes.
 - Càlcul d'especificitat i sensibilitat en una prova.
5. Actituds:
 - Reflexió sobre la fiabilitat de les proves mèdiques i els falsos positius i negatius.
 - Actitud crítica i responsable en la interpretació de les dades de diagnòstic
 - Reflexió sobre les intuïcions enganyoses en el cas de la probabilitat condicionada.
 - Valoració de la utilitat de la probabilitat a l'hora de prendre decisions.
 - Reflexió sobre la possibilitat d'actualitzar les probabilitats quan disposem de noves dades.

CAPÍTOL 5:

Conclusions

En aquest apartat faré una valoració personal de l'evolució del treball. Des d'un primer moment tenia clar que hi hauria dos blocs clarament diferenciats: d'una banda, una part força teòrica (capítol 3) i d'altra, una part més pràctica (capítols 4 i 5).

Crec que la formació en continguts i competències és necessària per a tothom que s'hi vulgui dedicar a la docència. És una informació a l'abast de tothom i que s'utilitza per fer les programacions. Cal tenir clar el model de formació general i, a partir d'aquí cada escola té un projecte i un tarannà diferent. Crec que ha estat una part enriquidora i interessant, més del que imaginava en un principi.

Fer una programació no és fàcil, es tracta de gestionar tota aquesta informació i convertir-la en les sessions del curs. Les competències pretenen preparar l'alumnat per a una societat diversa, plural i canviant i això fa que el sistema d'ensenyament també comparteixi aquestes característiques. Atès que els alumnes no són iguals que fa vint anys, els mètodes i les eines s'han d'adaptar a l'alumnat que es prepara per accedir a aquesta nova societat i cal que les programacions siguin coherents amb allò que es demana al currículum, però també amb el que ens trobem a les aules. Cal que mostrin que tot allò que s'ensenyava a classe té aplicacions fora d'aquesta i que els serà d'utilitat en un futur.

Aquesta mentalitat per competències ha donat lloc a moltes metodologies diferents. Els projectes són un exemple d'aquesta metodologia. No totes les escoles treballen per projectes, i fer-ho, no significa que sigui de la mateixa manera. Hi ha una àmplia gama de treballar per projectes (només a certes edats, o només en certes assignatures, o només en certes activitats). Aquesta segona part del treball, on ens endinsem en els projectes, m'ha semblat més pràctica, i ha estat tota una aventura, amb descobriments i maneres de fer a les que no estava acostumada com alumne. No ha estat el meu primer contacte amb la docència (a banda de l'assignatura de Didàctica i de molts anys impartint formació, no només de matemàtiques).

Crec, però, que ha estat el meu primer contacte real amb professors, amb material actual i amb el dia a dia en una escola. He intentat escoltar i aprendre de molts mestres i crec que aquest treball em serà de molta utilitat en el futur. No només pels coneixements, sinó per la font d'idees, de recursos, d'una nova manera de pensar i educar. Crec que cal estar informat de totes les opcions i extreure'n de cadascuna d'elles la part que creiem més útil i factible.

Un dels meus primers objectius del treball era "posicionar-me" sobre els projectes. Avui dia puc dir que no he pogut. Treballar per projectes no és només una manera de fer. Tinc la total convicció de que el resultat depèn com a factors principals dels alumnes i del professor. No tots els alumnes són iguals. I sobretot, no totes les mestres gestionen igual aquestes diferències.

Diria que els projectes són un gran aliat, amb molta feina darrera de cada sessió, i molt enriquidora amb alumnes motivats i, sobretot, amb un tarannà autosuficient. No obstant, les mateixes avantatges es poden convertir en inconvenients, si ens trobem amb alumnes amb capacitats diferents, no coneixem suficient als alumnes o no fem un seguiment personalitzat. És possible que un alumne "es perdi" enmig l'explicació. Cal detectar-ho a temps, i reconduir la situació.

Cada cop és més freqüent la realització de projectes, en especial, de la matèria d'Estadística. La societat d'Estadística i Investigació Operativa i alguns instituts organitzen competicions de projectes estadístics i cada cop són més participants. Aquests varien des de problemes senzills de representació de dades fins la comprovació d'hipòtesi o l'ús de la simulació. Vaig triar fer aquest treball usant aquesta matèria i crec que ha estat una bona decisió. Crec que l'Estadística sempre apareix dins les matemàtiques, al final, i "si dóna temps...". He volgut presentar dos projectes curts, que es poden fer en un parell de sessions i que alhora es podrien ampliar i fer connexions amb altres matèries. He après també que amb el mateix projecte és possible treballar a diferents nivells educatius i he volgut utilitzar molts exemples i emfatitzar en la idea que l'estadística és una eina a l'hora de prendre decisions

En resum, crec que aquest treball m'ha fet progressar en el meu camí professional, essent conscient de la difícil tasca a la que vull dedicar-me i les dificultats i reptes amb què em trobaré.

BIBLIOGRAFIA

Llibres i documents:

- Apunts assignatura probabilitat i estadística [2014]. Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona
- Apunts assignatura mètodes estadístics [2015]. Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona.
- Examen Màster Bioinformàtica i Bioestadística [2017]
- Batanero, C., Díaz, C. (2011). Estadística con proyectos. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.
- Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones*, 41, 33-49
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel. Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11-16*. Sloug: Foulsham Educational.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- P. Holmes, professor d'estadística i autor de nombrosos estudis sobre didàctica com: *TeachingStatistics(1980)*, *Theassessment challenge in statisticsEducation (1997)* o *Proceedings of theSixth International Conference on Teaching of Statistic(2002)*.

Pàgines web:

- Competències bàsiques primària:
<http://ensenyament.gencat.cat/ca/departament/publicacions/colleccions/c/ompetencies-basiques/primaria/>
- Competències bàsiques E.S.O.:
<http://ensenyament.gencat.cat/ca/departament/publicacions/colleccions/c/ompetencies-basiques/eso/>
- Competències batxillerat:
http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0002/0d7a4dc8-f261-4128-a096-467a63afb11d/competencies_generals_batxillerat.pdf

- Currículum primària:
<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/primaria/>
- Currículum E.S.O.:
<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/>
- Currículum batxillerat:
<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/batxillerat/>
- ARC (aplicació de recursos al currículum)
<http://apliense.xtec.cat/arc/>
- Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques (CREAMAT):
<http://phobos.xtec.cat/creammat/joomla/>
- Journal of Statistical Education
<http://www.amstat.org/publications/jse/>
- INE Instituto Nacional de Estadística
<http://www.ine.es>

AGRAÏMENTS

A la Olga Julià De Ferran,
per endinsar-se amb mi en aquest projecte;
a la Marta Ballvé,
per permetre'm entrar a la realitat dins l'aula;
a la meva família,
per no deixar que em rendís durant el llarg camí;
a l'Alberto,
per existir, i per ser el meu projecte de vida que donarà un pas més
el proper 17 de setembre.

