Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

L'ombra del programa de Hilbert

Autor: Jordi Bargalló Jiménez

Director: Dr. Joan Bagaria
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2018

Índex

Agraïments

Voldria mencionar en primer lloc al Dr. Bernat Coromines, a ell li dec el meu interès per aquest tema. Ja fa alguns anys em va regalar un llibre divulgatiu anomenat *Logicomix, Una búsqueda épica por la verdad* escrit per Apostolos Doxiadis i Christos H. Papadimitriou. El llibre es centra bàsicament en la vida de Bertrand Russell i amb aquesta es capaç de narrar, de forma a vegades no estrictament lligada a la realitat, tots els esdeveniments lògics que van tenir lloc a finals de segle XIX i principis del XX, i fer aparèixer les grans figures d'aquests esdeveniments com Hilbert, Frege, Cantor, Gödel, etc. dins del mateix relat.

En aquell moment em va cridar molt l'atenció la famosa paradoxa del barber de Russell i l'interès de Hilbert de trobar una base sòlida per a les matemàtiques lliure d'aquestes paradoxes, però sobretot els resultats que impliquen els teoremes de Gödel. Aquests deixen descol·locat qualsevol estudiant de matemàtiques que pensava que les matemàtiques no deixen lloc a indecisions.

En segon lloc vull agrair la dedicació del meu tutor el Dr. Joan Bagaria per oferir-me tots els recursos necessaris i guiar-me en aquest treball. Gràcies a ell he passat de tenir una petita idea divulgativa de la importància de tots aquests resultats en el món de les matemàtiques a tenir-ne una de consistent, amb dades exactes i raonaments lògics més elaborats.

Per últim, agrair a totes aquelles persones que, d'una manera o d'una altra, m'han ajudat i m'han proporcionat tot el seu suport en l'elaboració d'aquest Treball Final de Grau. En especial a la meva família que m'ha donat l'oportunitat de poder realitzar els meus estudis i a les bones amistats que m'han motivat dia rere dia, sempre al meu costat.

Resum

El programa de Hilbert és un dels programes més importants sobre la fonamentació de la matemàtica. Hilbert buscava amb el seu programa formalitzar de manera exacta i precisa els fonaments de les matemàtiques. No ho va aconseguir, però les preguntes que es va plantejar van motivar a grans ments matemàtiques, com la de Kurt Gödel o Alan Turing, entre altres, a aconseguir contribucions immenses en aquest camp.

Gödel, amb els seus teoremes d'incompletesa, va posar fi al programa de Hilbert, o si més no a l'enfocament que Hilbert i els seus deixebles estaven perseguint fins aleshores.

Turing va definir la noció de computabilitat d'una forma clara i rigorosa amb les seves màquines, després conegudes arreu del món com màquines de Turing.

Dos personatges amb histories i teories diferents que es van tenir una admiració mútua intel·lectual però que mai van coincidir físicament, ni per correspondència. El pas del temps ha demostrat que hi havia molts aspectes en comú en les seves teories.

Actualment el programa de Hilbert segueix ocupant un lloc important en la recerca lògica matemàtica moment. La importància de tenir una base sòlida per a la construcció de la nostre ciència no solament és un tema que preocupa a molts matemàtics, sino que és de fet un tema imprescindible pel pensament filosòfic, ja que la filosofia i la lògica van molts cops de la mà en aquest camí de la ment humana.

Abstract

The Hilbert's program is one of the most important contributions of on the foundations of mathematics. Hilbert was looking with his program to formalize in a exact and precise way the foundations of mathematics. He did not get with the results but all of the questions that arose led to great math minds, like de Kurt Gödel o Alan Turing among other people, to get huge contributions in this field.

Gödel's incompleteness theorems changed the thinking of Hilbert and put an end to the Hilbert program, or at least to the approach that he and his disciples were chasing until then.

Turing defined the notion of Computability in a clear and rigorous way with his machines later known around the world as Turing machines.

Two very different characters,with different histories and theories, that had mutual intellectual admiration but never agreed physically or by correspondence. The passage of time has proved that there were many things in common in their teories.

Currently, the Hilbert's program continues to occupy an important place in the search for mathematical logic at the moment. The importance of having a solid foundation for the construction of our science is not just an issue that worries many mathematicians, but that is actually an essential topic for philosophical thought as the philosophy and logic go many times hand in hand in this path to the human mind.

Capítol 1

Programa de Hilbert

1.1 Inici històric

1.1.1 Treball anterior sobre fonaments

El treball de Hilbert sobre els fonaments de les matemàtiques té les seves arrels en el seu treball sobre la geometria dels anys 1890, que culmina el 1899 en el seu influent llibre de text *Fonaments de la geometria*. Hilbert creia que la forma adequada de desenvolupar qualsevol subjecte científic requeria un enfocament axiomàtic rigurós. En proporcionar un tractament axiomàtic, la teoria es desenvoluparia independentment de qualsevol necessitat d'intuïció, i facilitaria una anàlisi de les relacions lògiques entre els conceptes bàsics i els axiomes. Per a Hilbert, la investigació de la independència i, sobretot, de la consistència dels axiomes són d'una importància bàsica per a un tractament axiomàtic.

Per als axiomes de la geometria, la consistència es pot provar proporcionant una interpretació del sistema en el pla real, i així, la consistència de la geometria es redueix a la consistència de l'anàlisi. El fonament de l'anàlisi en si mateix requereix una axiomatització i una prova de consistència. Hilbert va proporcionar tal axiomatització però de seguida es va veure que la consistència de l'anàlisi afrontava dificultats significatives, en particular perquè la manera predilecta de proporcionar una base per a l'anàlisi era la de Dedekind i aquesta es va basar en suposicions dubtoses semblants a les que van conduir a les paradoxes de la teoria de conjunts i de la coneguda paradoxa de Russell, derivada del sistema lògic de Frege per a la fonamentació de l'aritmètica.

Hilbert va veure que es necessitava una prova de consistència directa d'anàlisi, és a dir, una no basada en la reducció d'una altra teoria. Va proposar el problema de trobar una prova en el segon dels seus 23 problemes matemàtics en el seu discurs al Congrés Internacional de Matemàtics, el 1900 a París, i va presentar un esbós d'aquesta prova a la seva conferència de Heidelberg. Hilbert es va adonar que les investigacions axiomàtiques requerien un formalisme lògic ben treballat. En aquell moment es basava en una concepció de la lògica basada en la tradició algebraica, en particular en l'obra de Schröder, que no era especialment adequada com un formalisme per a l'axiomatització de les matemàtiques.

1.1.2 Principia Mathematica

Entre 1910 i 1913 es va publicar *Principia Mathematica*, un conjunt de tres llibres escrits per Russell i Whitehead que van proporcionar la base lògica necessària per a un nou atac sobre els problemes de la fonamentació. Hilbert va tornar a treballar en qüestions fundacionals el 1917 i el setembre d'aquell mateix any va pronunciar una adreça a la Societat Matemàtica Suïssa titulada *Pensament Axiomàtic*. Aquesta fou la seva primera contribució publicada sobre fonaments matemàtics des de 1905. En ella, insisteix novament en el requisit de proves de consistència per als sistemes axiomàtics. Hi deia que l'objectiu principal de l'axiomatització no era simplement evitar paradoxes conegudes, i que de fet, l'eliminació completa de les paradoxes era absolutament impossible. Sosté que la prova de la consistència de l'aritmètica i de la teoria de conjunts són els principals problemes oberts, i que no hi ha res més fonamental al qual es podria reduir la consistencia, a banda de la mateixa lògica. Hilbert va pensar que el problema havia estat resolt essencialment per l'obra de Russell i Whitehead. No obstant això, altres problemes fonamentals de l'axiomàtica van quedar sense resoldre, incloent el problema de la decidibilitat de cada pregunta matemàtica, que també es remunta a l'adreça de Hilbert de 1900 i de la que en parlarem més endevant en aquest treball.

Aquests problemes axiomàtics no resolts van portar a Hilbert a dedicar esforços significatius a treballar sobretot en la lògica durant els anys següents. El 1917 Paul Bernays va començar a treballar amb ell com el seu assistent, a Göttingen. En una sèrie de cursos de 1917 a 1921, Hilbert, amb l'ajuda de Bernays, va fer importants contribucions significatives a la lògica formal. El curs de 1917, en particular, conté un sofisticat desenvolupament de la lògica de primer ordre i forma la base del llibre de text de Hilbert i Ackermann *Principis de lògica teòrica*, de 1928. Aquest llibre conté la primera exposició de lògica de primer ordre i planteja el problema de la seva consistencia i decidibilitat, el conegut com *Entscheidungsproblem* o problema de la decició.

1.1.3 Finitisme i Consistència

En els següents anys, Hilbert va rebutjar la solució lògica de Russell al problema de consistència de l'aritmètica. Al mateix temps, les matemàtiques intuicionistes de Brouwer van guanyar força. En particular, l'ex estudiant d'Hilbert, Hermann Weyl, es va convertir l'intuicionisme. L'article de Weyl *La nova crisi fundacional de les matemàtiques* va ser contestat per Hilbert en tres conferències a Hamburg a l'estiu de 1921. En aquestes Hilbert va presentar la seva pròpia proposta per a una solució al problema de la fonamentació de les matemàtiques. Aquesta proposta va incorporar les idees de Hilbert a partir de 1904 sobre proves de consistència directa, la seva concepció dels sistemes axiomàtics i també els avenços tècnics en l'axiomatització de les matemàtiques en el treball de Russell, així com els desenvolupaments posteriors realitzats per ell i els seus col·laboradors. El que era nou era la manera en què Hilbert volia impregnar el seu projecte de consistència amb la importància filosòfica necessària per respondre a les crítiques de Brouwer i Weyl, això és, el punt de vista finit.

L'objectiu de Hilbert era que les proposicions i proves matemàtiques es convertisin en fórmules i derivacions dels axiomes d'acord amb regles estrictament circumscrites de derivació. Les matemàtiques, per a Hilbert, es converteixen així en un inventari de fórmules demostrables. D'aquesta manera, les demostracions de les matemàtiques estan subjectes a una investigació. La meta del programa d'Hilbert és llavors donar una prova que no pot haver-hi una derivació d'una contradicció, és a dir, no hi ha derivacions formals d'una fórmula A i de la seva negació $\neg A$.

En els següents 10 anys Hilbert i els seus col·laboradors van continuar treballant en els objectius del programa. Pel costat conceptual, Hilbert va elaborar el punt de vista finit i l'estratègia per a una prova de consistència. L'article de Hilbert *On the infinite* (en el que més endavant entrem en detall) proporciona l'elaboració més detallada del punt de vista finit. En conferències pronunciades a Göttingen, Hilbert i Bernays van desenvolupar el ξ-càlcul com el seu formalisme definitiu pels sistemes d'axiomes per a l'aritmètica i l'anàlisi. Hilbert també va presentar el seu enfocament de donar proves de consistència amb el seu anomenat mètode de substitució ξ. Ackermann va intentar estendre la idea de Hilbert a un sistema d'anàlisi però la prova va resultar ser errònia. John von Neumann, després d'assistir a la conferència de Göttingen, va donar una prova de consistència corregida d'un sistema del $\xi-$formalisme el 1925. No obstant això, no incloïa l'axioma d'inducció. Partint de l'obra de von Neumann, Ackermann va idear un nou procediment de substitució ξ que va comunicar a Bernays. En el seu discurs *Problemes de la base de les matemàtiques* al Congrés Internacional de Matemàtics a Bolonya de 1928, Hilbert va afirmar amb optimisme que el treball d'Ackermann i von Neumann havia establert la consistència de la teoria de nombres i que la prova de consistència de l'anàlisi d'Ackermann era correcte en la mesura que l'única tasca restant consistia en la demostració d'un teorema d'elecció elemental, cosa que és purament aritmètica. Per tant arribem a un punt que tan sols queda demostrar la consistencia de la base axiomàtica de l'aritmètica.

1.1.4 La fi de l'objectiu de Hilbert

Els teoremes d'incompletesa de Gödel van demostrar que l'optimisme de Hilbert era indegut. Al setembre de 1930, Kurt Gödel va anunciar el seu primer teorema d'incompletesa en una conferència a Königsberg. Von Neumann, que era al públic, immediatament va reconèixer la importància del resultat de Gödel per al programa d'Hilbert, a ell se li atribueix la desanimadora frase que va cridar aixecant-se de la cadira en mig de la conferéncia de Gödel, afirmant que era la fi del programa de Hilbert, amb una expresió com "Tot està perdut".

Poc després de la conferència von Neumann li va escriure a Gödel dient-li que havia trobat un corol·lari al seu resultat. Gödel ja havia trobat el mateix resultat de forma independent: el segon teorema d'incompletesa, afirmant que el sistema de Principia no demostra la formalització de l'afirmació que el sistema de Principia és consistent (sempre que ho sigui). Per tant, si la consistència de Principia fos demostrable pels mètodes emprats en les proves d'Ackermann, hauria de ser possible formalitzar aquesta prova a Principia; però això és el que fa impossible el segon teorema d'incompletesa. Bernays també es va adonar de la importància dels resultats de Gödel immediatament després d'estudiar el seus teoremes al gener de 1931, escrivint a aquest que (sota la hipòtesi que el raonament finit es pot formalitzar en Principia) el teorema d'incompletesa mostra que una prova de consistència finitària de Principia és impossible. Poc després, von Neumann va demostrar que la prova de consistència d'Ackermann és defectuosa i va proporcionar un contraexemple del procediment de substitució ξ proposat. És a dir, tot el que Hilbert i amb ell molts altres matemàtics havien estat intentant construir es va començar a desmuntar. No obstant això tots els passos donats van contribuir a un gran avenç en aquesta branca de les matemàtiques.

1.2 L'article de Hilbert "Sobre l'infinit"(1925)

Aquest article potser és el que planteja més clarament les raons del programa de Hilbert per donar una fonamentació de la matemática.

Hilbert comença fent una menció al treball de Weierstrass i elogia la manera amb la que treballa amb l'infinit, en concret com l'utilitza en el càlcul infinitesimal. Això el porta a considerar el tema dels fonaments de l'anàlisi. Hilbert expressa que el motiu pel qual aquest problema continua obert és perquè no s'ha trobat un significat completament clar del concepte d'infinit en les matemàtiques. Valora de l'anàlisi de Weierstrass el fet que elimina el concepte d'infinitament gran i d'infinitament petit, però utilitza fórmules de deducció lògica on l'infinit entra en joc, és a dir, l'infinit apareix d'una forma diferent en la teoria de Weierstrass i, per tant, segueix sent un tema a tractar i resoldre.

En aquest punt Hilbert argumenta que l'infinit, en el sentit d'una totalitat infinita completa, és tan sols una il·lusió i afirma que els mètodes deductius basats en l'infinit han de ser canviats per procediments finits que produeixin el mateix resultat. Pretén així establir d'una vegada per totes la certesa dels mètodes matemàtics ja que veu que estan saturats d'absurds que tenen la seva font en l'infinit. Per abordar el problema de l'infinit es dedica a estudiar el que anomena la naturalesa de l'infinit, centrant-se en la física i la geometria.

Hilbert explica que no s'ha demostrat que l'univers sigui infinit i que les observacions científiques del moment porten a pensar més aviat el contrari, però encara no descarta que l'infinit pugui ocupar un lloc justificat en el nostre pensament i es disposa a veure el seu paper en les matemàtiques.

Comença per la teoria de nombres considerant una fórmula de la rica varietat de fórmules elementals de la teoria de nombres, com ara la següent:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/6(n+1) * (2n+1)$$

Aquesta fórmula conté implícitament infinites proposicions ja que podem canviar n per qualsevol nombre enter. Aquesta característica és essencial per la fórmula ja que permet que aquesta representi la solució d'un problema aritmètic i necessita una idea per a la seva demostració. Per altre banda les equacions numèriques individuals es solucionen simplement a través del càlcul, per exemple el cas concret $n = 2$ el podem solucionar calculant $1^2 + 2^2 = 1/6 + 2 + 3 + 5$ i comprovant que en els dos costats de la fórmula el resultat és 5, per tant individualment no té cap interès especial.

Tot seguit passa a parlar d'una concepció diferent i original de la noció d'infinit: els nombres ideals. Posa dos exemples on aquests entren en joc:

1. En la geometria plana, citant l'axioma de connexió que diu que una i tan sols una línia recta passa a través de dos punts. D'aquest axioma es dedueix que dues línies rectes es creuen com a màxim en un punt. No existeix el teorema que ens digui que dues línies rectes es creuen sempre en un punt ja que dues línies rectes podrien ser paral·leles. Tot i això amb l'introducció d'elements ideals, en aquest cas línies infinitament llargues i punts en l'infinit, podem fer que el teorema de que dues línies rectes sempre es creuen en un i tan sols un punt sigui universalment verdader. Aquests ideals infinits tenen l'avantatge de fer que el sistema de lleis de connexió sigui el més simple possible.

2. En l'àlgebra l'ús d'elements ideals complexos i família de magnituds imaginaries que serveixen per simplificar els teoremes sobre l'existència i número d'arrels d'una equació.

Hilbert afirma que aquesta aplicació del principi dels elements ideals és la més enginyosa de totes i si apliquem aquest principi sistemàticament a través d'una àlgebra obtenim exactament les mateixes lleis de divisió simples i familiars que s'apliquen als números enters, per tant, ja estem en el domini de l'aritmètica superior.

Hem arribat a l'estructura més estètica i delicada construïda per les matemàtiques, l'anàlisi, i ja sabem que l'infinit hi juga un paper principal. Hilbert fins hi tot s'atreveix a escriure que, en cert sentit, l'anàlisi matemàtic és una "simfonia de l'infinit".

Tot i això Hilbert diu que l'anàlisi per si sol no ens proporciona la visió més profunda de la naturalesa de l'infinit, aquesta l'hem d'anar a buscar a la disciplina creada per Georg Cantor, una disciplina que s'apropa més a una forma filosòfica general de pensament i que va ser creada per generar noves respostes a totes les preguntes sobre l'infinit. En concret ens interessa d'aquesta teoria de conjunts de Cantor la teoria dels números transfinits.

Frege i Dedekind, dos dels matemàtics més cèlebres pels seus treballs en fonaments de les matemàtiques, van fer servir l'infinit actual[1] per proporcionar, independentment, una fonamentació per a l'aritmètica. Aquestes fonamentacions eren independents tant de l'intuïció com de l'experiència, es basaven solament en la lògica pura i tan sols utilitzaven deduccions que eren purament lògiques. Però va ser Cantor qui va desenvolupar sistemàticament el concepte d'infinit actual.

El progrés realitzat en el càlcul infinitesimal resulta principalment d'operar amb sistemes matemàtics d'infinits elements però aviat van sorgir inconsistències anomenades paradoxes del càlcul infinitesimal. Aquestes preguntes van ser aclarides, com s'ha comentat al inici de l'article, pel treball de Weierstrass.

Tenint en compte el treball de Cantor, Hilbert es pregunta si realment es poden comptar aquells conjunts que no es poden comptar de la manera ordinària. Cantor va desenvolupar la teoria de nombres transfinits amb força èxit i va donar un càlcul complet per a ells. D'aquesta manera i amb les aportacions dels treballs de Frege i Dedekind l'infinit va assolir una sòlida base dins de les matemàtiques.

Hilbert escriu a continuació que amb l'alegria de descobrir resultats nous alguns matemàtics van prestar poca atenció a la veracitat dels seus mètodes deductius i les contradiccions van començar a aparèixer gradualment, les anomenades paradoxes de la teoria de conjunts. En particular, la contradicció descoberta per Zermelo i Russell va tenir un efecte francament catastròfic quan es va conèixer en tot el món de les matemàtiques. Davant d'aquestes paradoxes Dedekind i Frege van abandonar per complet el seu punt de vista. La doctrina de Cantor també va ser atacada i fins i tot els conceptes més comuns i els mètodes deductius més simples i importants de les matemàtiques es van veure amenaçats.

En aquest punt Hilbert intenta mostrar la gravetat del problema i diu que és dramàtic que les definicions i mètodes deductius que s'aprenen, s'ensenyen i s'utilitzen en matemàtiques a tot el món portin a contradiccions. Es pregunta on anar a trobar la veritat i la certesa si el pensament matemàtic és defectuós.

Però tot seguit Hilbert es tranquil·litza enunciant una forma completament sa-

[1]Quan considerem la totalitat dels números $1, 2, 3, 4$... en si mateixa com una unitat completa o quan considerem els punts d'un interval com una totalitat de coses que existeix a la vegada ens trobem amb el que es coneix com infinit actual.

tisfactòria d'evitar les paradoxes. Planteja dos objectius:

1. Seguir amb el mètode de Cantor, investigant cuidadosament las definicions fructíferes i els mètodes deductius, enfortint i fent-los útils per tornar a una teoria sòlida.

2. Establir a través de les matemàtiques la mateixa certesa per les nostres deduccions que existeix en la teoria numèrica elemental ordinària, de la qual ningú dubta.

Afegint que aquests objectius tan sols poden assolir-se després d'haver aclarit completament la naturalesa del infinit. En aquest moment Hilbert es torna a preguntar si realitat i pensament estan tan allunyats quan parlem d'infinit.

En aquest moment es centra en la lògica i menciona les ensenyances del filòsof Kant que diuen que les matemàtiques tracten un objecte que es dóna independentment de la lògica i afirma que aquesta és la causa del fracàs dels intents de Frege i Dedekind per assolir la fonamentació de les matemàtiques. Afegeix que la filosofia bàsica de tota ciència, i en concret de la deducció lògica, és veure tots els aspectes dels seus objectes i propietats de forma que no es pugui reduir a altre cosa. Considerant la naturalesa i els mètodes de la teoria numèrica fintaria ordinària, diu que les matemàtiques, quan s'apliquen a enters, sempre produeixen equacions numèriques correctes.

Al principi els únics objectes eren símbols numèrics, 1, 11,... Si introduïm la formula $a+b=b+a$ aquesta no significa res per ella mateixa és només una comunicació d'enunciats finits. Per tant Hilbert classifica les fórmules matemàtiques en dos tipus diferents, les que corresponen a comunicacions significatives d'enunciats finitaris i les que no signifiquen res, simplement són l'estructura ideal de la nostre teoria. Les primeres contenen símbols numèrics i des del punt de vista finitari són immediatament intuïtives. Es pot aplicar la lògica aristotèlica sense restriccions. El principi de no contradicció val per elles. Una declaració o la seva negació és certa. En canvi per a les lleis de la lògica utilitzem enunciats ideals i hem d'introduir certs símbols lògics, variables matemàtiques i proposicionals per traduir les relacions lògiques en fórmules. Des del punt de vista finitari de Hilbert aquests símbols lògics també estan buits de significat. Aquest llenguatge simbòlic de la lògica pot ser transformat en formules matemàtiques, i algunes d'aquestes fórmules corresponen als axiomes matemàtics.

Tot seguit, Hilbert explica breument com formalitza les demostracions matemàtiques a partir dels axiomes. Cada premissa d'una deducció ha de ser un axioma o resultar d'un axioma. L'objectiu de Hilbert queda reduït dons a trobar un número finit d'axiomes per la teoria de la demostració. Separa els axiomes en grups:

1. Implicació

2. Negació
3. Transfinit
4. Identitat
5. Per número

Amb aquestes famílies d'axiomes Hilbert pretén construir la seva teoria de la demostració i el sistema de fórmules comprovables.

Per últim, Hilbert acaba el seu article dient que ha resolt el problema de demostrar la consistència dels axiomes de l'aritmètica. En la geometria i la teoria de la física, la prova de consistència es redueix a la dels axiomes de l'aritmètica, però òbviament no podem utilitzar aquests per demostrar la consistència de l'aritmètica en si mateixa. Aquesta teoria de la demostració basada en el mètode dels elements ideals permet donar aquest últim pas important. Per tant, la teoria mencionada en aquest article proporciona una base sòlida pels fonaments de les matemàtiques i un mètode general pel tractament de preguntes matemàtiques fonamentals que fins aquell moment els matemàtics no havien pogut aclarir.

Finalment l'article conclou afirmant una vegada més que l'infinit no es troba a la realitat, no es troba a la natura ni proporciona una base legítima pel pensament racional. Per tant, el paper en el que queda l'infinit només és el d'una idea, és a dir, un concepte de raó que tracendeix tota experiència i que completa el concret com una totalitat.

Però el que nosaltres extraiem d'aquest article no és tan aquesta conclusió final de si l'infinit existeix o no, sinó la idea de Hilbert de poder trobar una base axiomàtica finita amb la qual fonamentar les matemàtiques.

Capítol 2

Els Teoremes d'incompletesa de Gödel

Kurt Gödel va néixer el 18 d'abril de 1906 a Brno, Moravia, per aquella època província Austro-Hongaresa que avui pertany a la República Txeca. De seguida va mostrar una gran intel·ligència i una aptitud rellevant vers les matemàtiques. El 1924 Gödel va seguir al seu germà gran, Rudolf que estudiava medicina, a la Universitat de Viena amb la intenció de cursar la carrera de física. Des de la universitat va accedir a reunions de l'anomenat Cercle de Viena, un grup de científics que es reunien setmanalment per trobar, tant per a la física com per a les matemàtiques, una base filosòfica ferma. Assistint en aquelles reunions Gödel va passar de l'interès de la física al de la lògica.

Gödel va resoldre completament el segon problema de Hilbert enunciat al 1900 en el Congres Internacional de Matemàtiques de París:

El 1929 va acabar la seva tesis doctoral, la qual conduïa a un doble resultat:

- La completesa del càlcul de predicats, és a dir, totes les proposicions vàlides poden ser demostrades.
- La consistència del càlcul de predicats, és a dir, només les proposicions vàlides poden ser demostrades.

El teorema de completesa va donar cert reconeixement a Gödel, però per entrar a la universitat no en tenia prou en ser doctor, va haver de fer un treball addicional d'investigació. Gödel va buscar un repte més gran, que era demostrar els axiomes de l'aritmètica, la base de les matemàtiques. Seguint l'exemple de Hilbert, va utilitzar els axiomes de Peano com a base de l'aritmètica formal dels números naturals. En el treball final Gödel demostrava:

- La incompletesa de l'aritmètica formal. Gödel va demostrar que en qualsevol sistema formal consistent que contingui l'aritmètica de Peano existeix sempre un enunciat que no pot ser demostrat dins del sistema tot hi ser verdader.

- Que si l'aritmètica formal és consistent, aquesta consistència no pot ser demostrada dins de la mateixa aritmètica formal, com Hilbert havia pensat en el seu programa.

Aquests descobriments van revolucionar la comprensió de las matemàtiques i la lògica així com també hi ha hagut intents d'aplicar-los a altres camps de la filosofia i de la física.

2.1 Primer teorema d'incompletesa

Teorema 1: *Qualsevol sistema formal consistent F dins del qual es pot portar a terme certa quantitat d'aritmètica elemental és incomplet, és a dir, hi ha un enunciat aritmètic tal que ni ell ni la seva negació són demostrables en el sistema.*

La demostració de Gödel produeix explícitament una oració aritmètica particular que no es pot demostrar ni refutar en F. L'oració en qüestió és una declaració relativament simple de la teoria de nombres.

Tal i com hem dit anteriorment el primer Teorema d'incompletesa va ser enunciat per Gödel sense ser gaire conscient de tota la repercussió que tindria en la historia de les matemàtiques. Gödel en aquell moment encara era jove no gaire conegut.

Per a les teories de primer ordre habituals de l'aritmètica i la teoria de conjunts, el primer teorema és un corol·lari fàcil del segon.

2.2 Segon teorema d'incompletesa

Teorema 2: *Per qualsevol sistema consistent F dins del qual es pot portar a terme certa quantitat d'aritmètica elemental, la consistència de F no es pot demostrar en F.*

En aquest teorema, F ha de contenir una mica més d'aritmètica que en el cas del primer teorema, que val per a sistemes molt dèbils. És un teorema sobre la capacitat de demostració formal, o derivabilitat. No diu res sobre si, per a una teoria particular T que satisfà les condicions del teorema, l'afirmació "T és consistent"es pot provar en el sentit de demostrar ser certa mitjançant un argument concloent o mitjançant una prova generalment acceptable per matemàtics. El que diu és, simplement, que no es pot demostrar dins del sistema.

Aquest teorema és el que veritablement dóna un cop final al programa de Hilbert i és a partir de la formulació d'aquest que fins i tot els més fidels al programa començen a explorar altres posibilitats. El programa de Hilbert no desapareixerà però es deixaran de buscar resultats de consistència que Gödel ha demostrat que eren imposibles.

2.3 Sobre la demostració

Com ja hem explicat anteriorment Gödel no necessitava fixar-se en totes les matemàtiques, simplement en l'aritmètica. Amb l'aritmètica va intentar dur a terme el programa de Hilbert i va comprovar que és impossible. Gödel va considerar el llenguatge de primer ordre amb els símbols $+, *, S$ y 0. És evident que en aquest llenguatge es pot estudiar l'aritmètica. Dins d'aquest llenguatge considerem els axiomes de Peano, que formalitzen l'aritmètica elemental, o de primer ordre.

És evident que qualsevol conjunt d'axiomes que pretengui formalitzar l'aritmètica ha d'incloure els axiomes de Peano, però Gödel va veure que el conjunt d'axiomes que buscava havia de complir una altra condició més. Si tinguéssim un conjunt Σ que fos *el dels enunciats verdaders en N amb la interpretació estàndard dels símbols comuns* seria trivial demostrar quins són els enunciats verdaders de l'aritmètica, però no tenim cap idea efectiva sobre quin pot ser aquest conjunt. Per tant Gödel va exigir l'existència d'un algorisme que en un número finit de passos permetés saber si un enunciat és un axioma o no. És a dir, el conjunt d'enunciats Σ que buscava per axiomatitzar l'aritmètica havia de ser computable. Així doncs, la demostració del teorema de Gödel el va portar a donar la primera noció formal de computabilitat, tot hi que ell utilitzés el terme de funcions recursives.

La clau de la demostració de Gödel es troba en la recursió. A mode d'exemple, perquè s'entengui el mecanisme de la demostració de Gödel, podem pensar en el llenguatge comú. Es pot pensar en aquest com un sistema formal que té una sèrie d'axiomes que són les paraules i una sèrie de lleis que són les regles gramaticals que ens permeten construir enunciats. Els enunciats poden ser qualificats de verdaders o falsos: "El grau de matemàtiques s'imparteix a la Universitat de Barcelona", "La Universitat de Barcelona es va fundar el 1450",... El llenguatge ordinari és recursiu, permet construir frases relatives a altres frases, "Les dues frases citades abans entre cometes són certes". Aquesta frase també es pot qualificar de verdadera o falsa. Se l'anomena *metallenguatge* a un llenguatge que és capaç de produir declaracions sobre un altre. Per tant, el llenguatge comú és metallenguatge de sí mateix i quan un llenguatge posseeix aquesta capacitat automàticament apareixen problemes. Per exemple de l'afirmació "Aquesta frase és falsa"és evident que no se'n pot veure la veracitat o falsedat, aquesta frase produeix el que s'anomena una paradoxa.

El que Gödel va fer és reproduir l'argument anterior en la aritmètica en comptes de en el llenguatge comú. Gödel va trobar un mètode que permet a l'aritmètica fer declaracions sobre ella mateixa i un cop trobat aquest mètode va construir l'enunciat que afirma d'ell mateix que és indemostrable.

2.3.1 Demostració

La idea del mètode que va utilitzar Gödel recau en associar a cada successió de símbols φ un número natural $[\varphi]$ conegut com a número de Gödel de φ. A cada símbol se li associa un numero natural.

0 3	(13	$\rightarrow$ 23	x_1 33
S 5	) 15	$\neg$ 25	x_2 35
+ 7	, 17	< 27	x_3 37
$*$ 9	$\forall$ 19	$\in$ 29	$\cdots$
= 11	$\exists$ 21	x_0 31	

Aquesta codificació de símbols permet codificar qualsevol successió formada per ells. Utilitzem nombres senars perquè és més senzill justificar que els nombres que codifiquen els símbols, successions de símbols i demostracions són tres conjunts diferents. L'expressió $\forall x_0 x_1 * \exists$ es codifica per la successió 19 31 33 9 21. Ara la clau està en utilitzar la successió dels nombres primers per codificar tota la successió en un sol nombre, de manera que l'expressió anterior ens queda codificada pel nombre $2^{19} * 3^{31} * 5^{33} * 7^{9} * 11^{21}$. Com que la factorització per nombres primers és única s'obté que donat un nombre natural es pot recuperar l'expressió que codifica.

Ara passem a associar nombres de Gödel a les demostracions. Una demostració formal és una successió de fórmules φ_1, φ_2, φ_3, ... que compleix certes condicions. Aquesta quedarà codificada pel número $2^{[\varphi_1]} * 3^{[\varphi_2]} * 5^{[\varphi_3]} * \ldots$.

Gödel va trobar una successió de símbols que li permetia reproduir els nombres naturals de la següent manera, al numeral 0 se li assigna l'expressió 0, al numeral 1 se li assigna l'expressió $S(0)$, al numeral 2 se li assigna l'expressió $S(S(0))$ i així successivament. En general el numeral de n es denota com $\bar{n}$.

Una relació numèrica es un subconjunt de N^k amb $k \in \mathsf{N}$. Una relació numèrica es diu que es computable si existeix un algoritme que donada una llista ordenada d'elements permet saber amb un numero finit de passos si la llista ordenada d'elements és de la relació o no.

Ara enunciem el lema que Gödel va utilitzar per realitzar declaracions de l'aritmètica sobre ella mateixa.

Lema 1: Sigui R una relació $(k+1)-$aria computable i sigui Σ un conjunt d'enunciats que inclou els axiomes de l'aritmètica de Peano. Aleshores existeix una fórmula $\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ que compleix:

a) Si $(n_0, n_1, \ldots, n_k) \in \mathsf{R}$ aleshores $Dem_\Sigma \Psi(\bar{n_0}, \bar{n_1}, \ldots, \bar{n_k})$.

b) Si $(n_0, n_1, \ldots, n_k) \notin \mathsf{R}$ aleshores $Dem_\Sigma \neg\Psi(\bar{n_0}, \bar{n_1}, \ldots, \bar{n_k})$.

Arribat en aquest punt Gödel va buscar la relació computable adequada per poder construir l'enunciat que indiqués que no pot ser demostrable. Per fer-ho es defineixen les següents relacions. Suposem que Σ és un conjunt d'enunciats:

- $F(k)$ on k és número de Gödel d'una fórmula.
- $Sent(k)$ on k és número de Gödel d'una sentencia.
- $Num(k)$ on k és número de Gödel d'un numeral.
- $D(k, m, n)$ on m és número de Gödel d'una fórmula $\varphi(x_0), k$ és el número de Gödel de la sentencia $\varphi(\bar{n})$.
- $G_\Sigma(k)$ on k és número de Gödel d'una sentencia de Σ.
- $Dem_\Sigma(k, m)$ on k és número de Gödel d'una demostració formal a partir de Σ de la sentencia de número de Gödel n.
- $R_\Sigma(t, m, n)$ on m és un número de Gödel d'una fórmula $\varphi(x_0)$, t és número de Gödel d'una demostració a partir de Σ de la sentencia $\varphi(\bar{n})$.

Amb aquesta notificació és fàcil demostrar el següent lema.
Lema 2: Es compleixen les següents afirmacions:

a) Las relacions F, $Sent$, Num i D són totes elles computables.

b) Si Σ és un conjunt de sentencies tal que G_Σ és computable, aleshores les relacions Dem_Σ i R_Σ són computables.

Suposem ara que es té un conjunt Σ complint les hipòtesis del teorema de Gödel, aleshores pel segon lema s'obté que R_Σ és una relació computable. Així dons, pel primer lema existeix una fórmula $\Psi(x_0, x_1, x_2)$ que complirà les dos condicions per la relació de R_Σ. Sigui g el número de Gödel de la formula $\neg\exists x_1 \Psi(x_1, \bar{g}, \bar{g})$. Ara només queda comprovar que φ és una sentencia indecidible. Per definició tenim que $(t, g, g) \in R_\Sigma$ si i només si t és el número de Gödel d'una demostració formal de φ a partir de Σ. Així dons, l'enunciat φ en el metallenguatge ens diu que no existeix una demostració de la fórmula φ, és a dir, no és demostrable.

Demostrem ara que φ no es pot demostrar a partir de Σ:
Suposem que sí que es pot demostrar φ. Sigui h un numero de Gödel d'una demostració formal de φ a partir de Σ. Aleshores $(h, g, g) \in R_\Sigma$. Com a conseqüència del primer lema es té que $Dem_\Sigma \Psi(\bar{h}, \bar{g}, \bar{g})$. Per tant, $Dem_\Sigma \exists x_1 \Psi(x_1, \bar{g}, \bar{g})$, d'on s'extreu immediatament que $Dem_\Sigma \neg\varphi$ Així dons, es pot demostrar a partir de Σ tant φ com $\neg\varphi$. Y això és absurd suposant que Σ és consistent.

Demostrem ara que $\neg\varphi$ no es pot demostrar a partir de Σ:
Suposem que si que es pot demostrar $\neg\varphi$. Aleshores aprofitant que Σ és consistent tenim que no es pot demostrar φ a partir de Σ. Per tant, per tot numero

natural h es compleix que $(h, g, g) \notin R_\Sigma$. Conseqüentment, a partir del primer lema, per tot numero natural h es te que $Dem_\Sigma \neg\Psi(\bar{h}, \bar{g}, \bar{g})$. D'aquí s'extreu que $Dem_\Sigma \exists x_1 \Psi(x_1, \bar{g}, \bar{g})$ és fals, és a dir, que $\neg\varphi$ no es pot demostrar a partir de Σ i això és clarament absurd amb la hipòtesi inicial.

Capítol 3

L'aportació de Turing

Alan Mathison Turing va néixer el 23 de juny de 1912 a Londres, Anglaterra. En el internat al que el van enviar de petit mai va destacar, excepte en les ciències i les matemàtiques, per les quals va despertar un fort interès. L'any 1931 es va matricular en el King's College de Cambridge, allà de seguida es va adaptar molt bé i sempre va destacar amb grans resultats. El 1936 va publicar l'article anomenat *Sobre nombres computables, amb una aplicació al entscheidungsproblem.*

El 1928 Hilbert va reenviar al món tres reptes ja llençats en el Congres de Matemàtics de Paris del 1900:

- Demostrar que tots els enunciats verdaders en matemàtiques poden ser demostrats, és a dir, la completesa de les matemàtiques.

- Demostrar que tan sols els enunciats verdaders poden ser demostrables, és a dir, la consistència de les matemàtiques.

- Demostrar la "decibilitat" de les matemàtiques, és a dir, l'existència d'un procediment de decisió per decidir la veritat o falsedat d'una proposició matemàtica donada.

Turing, al 1934, va descobrir que Gödel ja havia resolt negativament els dos primers reptes i es va decidir a trobar la resposta del tercer. Per oferir una solució necessitava primer precisar la noció de procediment de decisió. Necessitava formalitzar-ho, i potser inspirat per un interès d'infància per les màquines de escriure, Turing ho va fer expressant el concepte d'un procediment de decisió en termes de màquines, màquines avui conegudes com màquines de Turing.

No podem deixar de mencionar, com sempre que es parla de Turing, la seva aportació en facilitar la fi de la guerra a Europa gracies a la seva feina descodificant la màquina de encriptació nazi Enigma.

3.1 Màquines de Turing

Comencem parlant de les Màquines de Turing. El primer que hem de tenir en compte és que una màquina de Turing és més similar al que entenem ara com un programa d'ordinador que no pas un ordinador en sí mateix. Així, per a cada programa parlaríem d'una màquina de Turing diferent. Cada Màquina de Turing és una mena de màquina d'estats, en tot moment la màquina es troba amb una quantitat limitada d'estats i aquesta té instruccions sota les quals pot fer la transició entre un estat i un altre.

Turing va demostrar que era possible definir una única màquina que pogués ser utilitzada per computar qualsevol successió computable, aquesta màquina es coneix com a màquina universal de Turing.

Però anem a la base més pràctica de la definició de màquina de Turing:

> Una màquina de Turing té una cinta infinita unidimensional dividida en cel·les. La cinta conté cel·les disposades en una orientació d'esquerra a dreta. La cinta té un extrem a la part esquerra i s'estén infinitament cap a la dreta. Cada cel·la pot contenir un símbol ja sigui 0 o 1. La màquina té un capçal de lectura i escriptura que escaneja una sola cel·la de la cinta. L'acció d'una màquina de Turing està completament determinada per l'estat actual de la màquina, el símbol de la cel·la que esta escanejat actualment i una taula finita de regles de transició, determinat en cada màquina.

Hi ha un aspecte a destacar d'aquesta definició de màquina de Turing, la cinta de la màquina té una longitud infinita, aquest és un fet molt important. Això correspon a afirmar que cap funció computable deixarà de ser computable per Turing únicament perquè no hi hagi suficient memòria per completar el càlcul, ja que la cinta equival a la memòria actual d'un ordinador. Parlarem de la noció de computabilitat més extensament en la següent secció.

Una definició formalitzada de màquina de Turing és la següent:

- Un conjunt finit d'estats E amb un estat inicial determinat.
- Un conjunt finit de símbols ξ, en el cas original aquests eren $\{0, 1\}$

Un estat de càlcul descriu tot el que és necessari saber sobre la màquina en un moment donat de la seva execució. En qualsevol pas p donat de la seva execució.

- E_p és un membre de E, l'estat en què es troba la màquina de Turing en el pas p.
- ξ_p és un membre del conjunt ξ que descriu el contingut de cada cel·la que s'escaneja en el pas p.

- Un nombre natural n_p és l'índex de la cel·la que s'escaneja en el pas p.

Una funció de transició per la màquina γ és una funció que canvia els estats de càlcul de manera que si $\gamma(p) = t$ aleshores:

- ξ_t és igual que ξ_p a tot arreu excepte en n_s (on també pot coincidir).
- Si $\xi_p(n_p) \neq \xi_t(n_p)$ aleshores $n_t = n_p$.

La primera restricció diu que el contingut de les cel·les és el mateix en totes parts menys possiblement en la cel·la que està escanejada. La segona restricció ens indica que si la cel·la escanejada es modifica, la capçalera no s'ha de moure en la transició, en canvi si no es modifica, la capçalera està obligada a moure's una sola cel·la en qualsevol direcció.

Turing mai va discutir explícitament sobre la velocitat de les seves accions elementals però deixa implícit en el seu discurs mitjançant la paraula "mai"que no és possible realitzar infinits passos en temps finit. No obstant això al llarg del temps hi ha hagut persones que han enunciat altres definicions de la màquina de Turing, per exemple la d'una màquina amb un número infinit de parts que necessiti components arbitràriament petites i que funcioni a velocitats arbitràriament altes. Aquesta màquina és evident que no es podria construir en el món físic que coneixem però sí en un univers amb una física diferent. Però aquests ja són supòsits que s'escapen a l'objectiu d'aquest treball.

3.2 La Noció de computabilitat segons Turing

La gran aportació de Turing en les matemàtiques és la definició que va donar de ser computable. Va ser una definició clara i precisa que va merèixer el reconeixement de la societat matemàtica.

La formulació de la màquina de Turing va permetre aquesta definició i és que si una funció és computable, aleshores existeix una màquina de Turing que la pot computar de manera autònoma.

Una funció serà computable per Turing si existeix un conjunt d'instruccions que donen com a resultat que una màquina de Turing computi la funció independentment de la quantitat de temps que prengui. Això ho podem assumir ja que suposem que la cinta de la màquina de Turing és infinita com hem dit a la definició de l'apartat anterior.

Cap funció computable deixarà de ser computable per Turing ni per falta de temps ni per falta de memòria per completar el càlcul.

Es fàcil tenir una comprensió intuïtiva de que una funció és efectivament calculable si els seus valors es poden trobar mitjançant algun procés purament mecànic.

Però és necessari tenir una definició més definida i matemàtica d'aquesta idea. Turing va ser capaç d'enunciar una definició de computabilitat més lligada a aquesta idea intuïtiva. Una funció és efectivament calculable si els seus valors es poden trobar mitjançant un procés que pugui ser dut a terme per una màquina de Turing. El desenvolupament d'aquesta idea condueix a la definició de Turing de funció computable.

Més enllà de tots els resultats obtinguts, Turing va introduir les seves màquines inicialment amb la intenció de proporcionar una descripció idealitzada d'una determinada activitat humana, la computació numèrica. Fins que no van aparèixer les primeres màquines de computació automàtica, molta gent es dedicava a aquesta feina i s'invertien molts recursos en la creació de màquines capaces de optimitzar aquests esforços. De fet el significat literal de computable ve d'anomenar computadors a aquests treballadors mecànics que feien el treball de computació que actualment fan les màquines.

3.3 El *Entscheidungsproblem*

El problema de la decisió, l'"Entscheidungsproblem", proposat per Hilbert, també va trobar resposta en el treball de Turing. Tot i que la qüestió principal del programa de Hilbert de trobar una base axiomàtica consistent per totes les matemàtiques ja havia estat demostrada negativament per Gödel amb els seus teoremes d'incompletesa encara hi havien caps per resoldre. El Entscheidungsproblem, o problema de la decisió, formalment plantejava la possibilitat de trobar un algoritme general que determini si una fórmula ben formulada del càlcul de primer ordre és un teorema o no ho és. De manera més senzilla deia si podem trobar una única manera de saber si qualsevol problema té o no solució. Turing el va abordar de la manera següent:

- Poder trobar un procés per determinar si una funció donada del càlcul funcional és computable.

Al aplicar el seu concepte de màquina al Entscheidungsproblem, Turing va definir els números computables i va afirmar que té la mateixa dificultat que definir i investigar las funcions computables, però tractar amb els números computables implica tècniques més senzilles.

Aquests números computables són els números reals amb infinits decimals. Una màquina de Turing els pot calcular amb una cinta buida que va imprimint. Per exemple, una màquina de Turing que sempre imprimeixi el dígit 1 i que es mogui a la dreta cada cop acabaria calculant el número 11111..., una màquina de Turing més complicada podria acabar calculant, per exemple, l'expressió decimal infinita del número π.

És un descobriment no trivial veure que alguns nombres reals amb decimals infinits com per exemple el nombre π pot estar encapsulat en una taula finita de regles d'una Màquina de Turing però altres nombres reals amb decimals infinits no ho poden estar.

La taula de comportament d'una màquina de Turing ha de ser finita ja que Turing només permet un número finit de configuracions d'una màquina de Turing i només un repertori finit de símbols que es poden marcar en la cinta.

Calculable per mitjans finits va ser la principal caracterització de computació de Turing, que va justificar amb l'argument que la memòria humana és limitada. L'objectiu de la seva definició radica en codificar efectes potencials infinits en taules de conducta finites, de fet, no tindria sentit permetre màquines amb infinites taules de comportament. Es obvi, per exemple, que qualsevol número real podria imprimir-se mitjançant una màquina d'aquesta forma permetent que la n-èssima configuració sigui programada per imprimir el dígit enèssim, per exemple. Aquesta màquina també podria emmagatzemar qualsevol quantitat numerable d'enunciats sobre totes les expressions matemàtiques possibles.

Turing proposa com a criteri que sempre que una succesió infinita de dígits 0 i 1 sigui computable serà possible dissenyar una màquina de computació, ocupant un espai finit i amb parts de treball finites, que escriurà una seqüència a qualsevol número desitjat si es permet que s'executi durant un temps suficientment llarg. S'imposen certes restriccions addicionals al caràcter de la màquina però no causen pèrdua de generalitat. En particular, una calculadora humana amb llapis, paper i instruccions explícites es pot considerar en certa manera una màquina de Turing. Aquest contacte amb l'infinit està molt relacionat amb l'article de Hilbert del que hem parlat al principi del treball ja que el principal conflicte del problema de la decisió es genera un cop més incloent en les nostres suposicions l'infinit.

La part important de la demostració de Turing és la idea de l'autoreferència involucrada en les seves màquines, que operen amb símbols, que a la vegada es descriuen mitjançant aquests símbols i que poden tornar a operar amb la seva pròpia descripció.

És a dir, Turing troba i justifica per raons molt generals, una formulació matemàtica precisa del concepte de procés o mètode general. El seu treball dóna una formulació de computabilitat que inclou els possibles processos que es poden generar al computar un número.

D'aquesta manera Turing demostra que cap màquina de Turing pot decidir si una fórmula és o no un teorema matemàtic. Si existeix un mètode efectiu, aleshores podria ser programat en una de les seves màquines, es dedueix aleshores que aquest mètode no existeix.

3.4 Relació entre Gödel i Turing

A la dècada del 1930 matemàtics de tot el món van establir definicions precises i independents del que significa ser computable, algunes de les seves teories van influir d'una manera molt forta en el pensament matemàtic del moment, en concret en el que tractem en aquest treball, en el programa de Hilbert. Kurt Gödel va definir les funciones recursives, Alan Turing va definir màquines abstractes ara conegudes com màquines de Turing y Alonzo Church va definir el càlcul lambda.

Sorprenentment, tots aquests models són exactament equivalents: qualsevol funció computable en el càlcul lambda és computable per una màquina de Turing, i a la inversa. De forma similar per les funcions recursives de Gödel.

Històricament els treballs de Turing i Church són els més semblants, ja sigui degut a la seva proximitat temporal o a la seva proximitat física. Hem de recordar que Church va supervisar la tesis de Turing. Tot i això, tan Turing com Church van trobar els seus resultats sobre computabilitat de forma independent.

Però a nosaltres ens interessa analitzar la diferència entre els resultats de Gödel i els de Turing.

El concepte de funció recursiva va ser introduït per Gödel l'any 1934, el concepte de funció definida per lambda va se definit per Church el 1932. Church va demostrar el 1936 que la classe de funcions definides per lambda i la classe de funcions recursives són idèntiques. Turing va establir que el concepte de definibilitat per lambda i el seu concepte de computabilitat són equivalents. Per tant les "funcions recursives de enters positius" són equivalents a les "funcions definibles de lambda d'enters positius" que a la vegada són equivalents a les "funcions d'enters positius que són computables per una màquina de Turing".

Tot i no coincidir mai físicament, Turing i Gödel, es teníen un gran apreci intel·lectual.

Gödel no va utilitzar directament el concepte de computable. Ell parlava de conjunts recursius i utilitzava funcions recursives. Va ser Turing qui va donar la primera definició formal de computabilitat. El mateix Turing va justificar que la seva noció de computabilitat coincidia amb la recursivitat empleada per Gödel. Gödel va afirmar que gràcies als treballs de Turing és possible donar una definició precisa i indiscutible del concepte general de sistema formal.

Capítol 4

El programa de Hilbert en l'actualitat

En els primers dies del programa de Hilbert la diferencia entre finitisme i intuïcionisme no s'havia acabat de definir clarament i a vegades es confonia l'un amb l'altre. La naturalesa del intuïcionisme va ser aclarida en gran mesura per Brouwer, qui va buscar uns fonaments de les matemàtiques basant-se en la lògica intuïcioniste i sent molt crític amb les idees de Hilbert. Però no va ser fins el 1930, amb la formalització de la lògica de predicats intuïcionistes i l'aritmètica intuicïonista de Heyting, que va rebre un reconeixement més oficial. Al 1933 Gentzen i Gödel van proporcionar independentment resultats que aclarien la relació entre l'aritmètica clàssica i la intuïcionista. Amb aquests treballs podien considerar que l'aritmètica de Peano està continguda en l'aritmètica de Heyting i a més en formules que no continguin $\forall$ ni $\exists$ les demostracions en l'aritmètica de Peano i les de l'aritmètica de Heyting són iguals.

Ja que l'aritmètica de Heyting inclou només un fragment de l'intuïcionisme de Brouwer, es va fer evident que l'intuïcionisme té un recorregut molt més ampli que el finitisme si aquest es mira des del sentit més estricte de l'aritmètica recursiva primitiva.

El 1933, amb els seus teoremes d'incompletesa, Gödel va plantejar la idea d'una versió del programa de Hilbert revisada utilitzant métodes constructius que van més enllà dels limitats finitistes sense acceptar l'intuïcionisme totalment ja que ell considerava que era problemàtic, sobretot a causa de la impredicativa naturalesa de la implicació intuïcionista.

Arran dels resultats d'incompletesa demostrats per Gödel, Hilbert va fer canvis al seu programa i va considerar una forma ampliada de finitisme. Una de les idees més atractives era perseguir el programa de Hilbert respecte un punt de vista constructiu y determinar quines parts de la matemàtica clàssica són demostrablement consistents des d'aquest punt de vista.

Actualment s'han proposat diferents marcs pel desenvolupament d'aquest camp de les matemàtiques, cadascun des del seu punt de vista. A continuació presentarem els que possiblement són els més importants en l'actualitat i en farem una breu descripció de cada un.

- Predicativisme aritmètic:

  Es va originar en els escrits de Poincaré i Russell com a resposta a las paradoxes. Es caracteritza per una prohibició de definicions impredicatives. Accepta el conjunt infinit de números naturals complet però tots els altres conjunts han de construir-se a partir d'ells en un procés autónom de definicions aritmètiques. Un primer intent sistemàtic en el desenvolupament de las matemàtiques predicatives es va fer en la monografia de Weyl el 1918 *Das Kontinuum*.

- Hilbert-Gentzen, punt de vista finitista de Takeuti:

  Per entendre el punt de vista finitista de Takeuti és important senyalar l'importància de la prova de consistència Gentzen. En la prova de Gentzen tenim una ordenació concreta dels nombres ordinals, utilitza una assignació d'ordinals a proves i proporciona un procediment de reducció de tal manera que qualsevol suposada prova incoherent es redueix a una altre prova inconsistent que s'assigna a un element més petit de l'ordenació. L'ordenació, l'assignació ordinal i el procediment de reducció són mètodes recursius i els passos descrits poden fer-se en un petit fragment de l'aritmètica recursiva primitiva.

  El principi addicional afegit a la consistència de l'aritmètica de Peano és el següent:

  > No hi ha seqüències recursives elementals infinites
  > $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ tal que $\alpha_n + 1 < \alpha_n$, per tot n.

  Espistemològicament, l'anunciat anterior és el punt de suport en qualsevol prova de consistència. La idea central de Takeuti és que podem dur a terme experiments de pensament (Gedankenexperimente) en seqüències concretament donades per arribar a la comprensió que obté d'aquest enunciat.

- La matemàtica explícita de Feferman:

  És una teoria que descriu un àmbit d'objectes concretament i explícitament donats, un univers U de símbols, equipat amb una operació d'aplicació de manera que donats dos objectes $a, b \in U$, es pot veure com un programa que es pot executar a l'entrada b i pot produir una sortida $a * b \in U$, o mai s'atura (aquestes estructures es coneixen com àlgebres de Schönfinkel). A més, alguns dels objectes de U representen conjunts d'elements de U. La construcció de nous conjunts de conjunts determinats és fa explícitament per comprensió elemental o per un procés de generació inductiva. Si també s'afegeixen principis a l'efecte que cada operació interna, que és monòtona en conjunts, té un punt mínim fix, s'arriba a una teoria notablement forta.

- Teoria intuïcionista de Martin-Löf:

  És una teoria intuicionista destinada a ser un sistema complet per formalitzar matemàtiques constructives. Els seus orígens es poden remuntar a *Principia Mathematica*, a l'article de Hilbert *Sobre l'infinit*, als sistemes de deducció natural de Gentzen, entre d'altres. Incorpora tipus de dades definides inductivament que, juntament amb la teoria de la reflexió interna a través d'universos li donen una força de consistència considerable.

- Teoria de conjunts constructius (Myhill, Friedman, Beeson, Aczel):

  Es disposa a desenvolupar una estructura per l'estil constructiu de *Foundations of constructive analysis* escrit per Bishop el 1967 en què va dur a terme un desenvolupament de l'anàlisi constructiu basant-se en nocions informals de funcions y conjunts constructius, que va ser el major progrés matemàtic que s'havia fet per constructivistes. El que era novetat sobre el seu treball era que també es podia llegir com una peça de la matemàtica clàssica.

Capítol 5

Conclusions

Han finalitzat tres mesos d'intensa feina, recorrent els recons més amagats de la lògica matemàtica, estudiant teories elaborades per grans ments de l'humanitat i perseguint respostes a tot de preguntes que se m'anaven plantejant, res estrany per un treball de final de grau. Puc dir que Hilbert va revolucionar les matemàtiques i amb aquesta revolució va fer partícips a molts altres matemàtics que van aportar de manera brillant el seu gra de sorra amb els seus resultats.

No ens hem de quedar amb l'idea de que els teoremes d'incompletesa de Gödel van destruir el programa de Hilbert, podem atrevir-nos a dir que simplement van ser una contribució més. És clar que amb aquests resultats la societat matemàtica va posar énfasi en l'equivocat punt de vista que havia estat perseguint Hilbert durant tots aquells anys però va ser ell qui es va plantejar la pregunta i per això un geni com Gödel va buscar i trobar la resposta. Una resposta que s'ha clarificat i constatat amb els treballs en lògica de Turing però ni tan sols aquests ens responen a la pregunta fonamental que s'està perseguint encara ara en l'actualitat.

És realment possible trobar uns fonaments consistents de les matemàtiques? Ara ja coneixem i entenem els resultats dels teoremes d'incompletesa de Gödel però els matemàtics no s'han detingut en trobar una resposta satisfactòria per culpa d'aquests. Ja hem vist en el capítol anterior els diferents marcs pel desenvolupament d'aquests nous camps. La varietat de tots ells és ran rica com les idees sorgides de la ment humana. Potser algun d'ells porti a trobar uns fonaments consistents de les matemàtiques tot i que aquests no siguin enfocats en l'aritmètica si no en una base més elevada.

M'agradaria destacar per acabar el meu treball una d'aquestes teories que van començar a sorgir després d'aquest desapassionant final del programa de Hilbert, prova de consistència Gentzen.

Gentzen publica al 1936 la demostració que el sistema format pels axiomes de Peano de l'aritmètica de primer ordre és consistent. Ho fa escapant del teorema de Gödel amb inducció transfinita fins l'ordinal ε_0.

Demostracions com aquesta fan avançar a aquest camp de les matemàtiques cap a una rica varietat de solucions molt interessants. Una porta oberta a investigació i una bona continuació a tots els resultats esmentats en aquest treball.

Bibliografia

[1] Joan Bagaria, *A short guide to Gödel's second incompleteness theorem,* Teorema: Revista Internacional de Filosofía, 2003.

[2] Joan Bagaria, *On Turing's legacy in mathematical logic and the foundations of mathematics,* ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura, vol. 189-764, 2013.

[3] José Ferreirós Domínguez, *Labyrinth of thought,* Birkhäuser Basel, 2007.

[4] Michael Rathjen, *Proof Theory: From arithmetic to set theory,* University of Leeds, 2014.

[5] Baltasar Rodríguez-Salinas, *Verdades no demostrables: Teoremas de Gödel y sus generalizaciones,* Real Academia de Ciencias, 2011.

[6] Comentado por Stephen Hawking, Traducido por Ubaldo Iriso Ariz, *Dios creó los números: Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia,* Crítica, 2011.

[7] Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931,* Harvard University Press, 1967.

[8] Richard Zach, *Hilbert's program then and now,* Elsevier BV, 2006.

[9] The Stanford Encyclopedia of Philosophy, *https://plato.stanford.edu/.*

[10] David Barker-Plummer, *Turing Machines,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 1995-2012.

[11] B. Jack Copeland, *The Church-Turing Thesis,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 1997-2017.

[12] Andrew Hodges, *Alan Turing,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002-2013.

[13] Juliette Kennedy, *Kurt Gödel,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2007-2015.

[14] Panu Raatikainen, *Gödel's Incompleteness Theorems,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2013-2015.

[15] Jan von Plato, *The Development of Proof Theory,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2008-2014.

[16] Richard Zach, *Hilbert's program,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2003-2015.