Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADE

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

FORMACIÓ DE COALICIONS EN CONTEXTOS DE COOPERACIÓ RESTRINGIDA; APLICACIÓ A LA FORMACIÓ DE COALICIONS POST ELECTORALS.

Autora: Nuria Nievas Viñals

Director: Dr. Josep Vives
Dr. Mikel Alvarez
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Departament de Matemàtica Econòmica Financera i Actuarial

Barcelona, 16 de gener de 2018

Abstract

The main idea of this project is to find a way to represent mathematically different situations where various agents are involved to take each of them a decision. The decision taken by each agent will affect the others results. This is the reason why we need to consider the others strategies by the time we choose our own game strategy.
In this project we will study what is a cooperative game in game theory, and how we can restrict this cooperation by introducing some affinities and incompatibilities between the players. This restrictions are represented by communication graphs where the vertices represent the players and the edges show the connexions between them.
Finally, we will apply the graph-restricted cooperation games to a real case, in order to do a research of the possible post-election coalitions that can be formed between the players, after some political elections and by the initial situation where none of the electoral parties have got an absolute majority of votes.

Resum

La idea és buscar la forma de representar matemàticament diverses situacions on interactúen varis agents que han de prendre una decisió. Les decisions preses per cada un dels agents afecten els resultats dels altres; és per això que en el moment d'elegir una estratègia de joc s'han de considerar les estratègies dels altres jugadors.
En aquest treball estudiem que és un joc cooperatiu i com podem restringir aquesta cooperació introduïnt afinitats i incompatibilitats entre els jugadors. Aquestes restriccions són introduïdes al joc mitjançant grafs, on els vèrtexs representen els jugadors i les arestes les connexions entre ells.
Finalment, apliquem la cooperació restringida mitjançant grafs d'afinitats i incompatibilitats a l'estudi de les possibles coalicions post electorals que es poden formar, donada la situació inicial que cap dels partits ha obtingut la majoria absoluta dels vots en les eleccions.

Agraïments

Vull donar els meus sincers agraïments als meus tutors Josep Vives i Mikel Alvarez; al Marc, per la seva paciència; i finalment a tots aquells amics i familiars, que m'han escoltat parlar d'aquest treball durant mesos i m'han donat tot el seu suport i confiança.

Índex

1 Introducció

La Teoria de Jocs és la part de les matemàtiques que s'ocupa de l'anàlisi rigorosa i sistemàtica de les situacions en les quals un cert nombre d'agents interactúen estratègicament amb interessos normalment contraposats, havent de prendre decisions que els afecten mútuament. Així doncs, aquesta interacció estratègica apareix quan el benefici o utilitat d'un agent depèn no només de les seves pròpies accions sinó també de les accions d'altres agents.

Aquestes situacions estratègiques es catacteritzen pels següents elements:

- Un grup d'agents que interactúen.

- Cada agent ha de prendre una decisió.

- Benefici o utilitat obtingut en funció de les decisions de tots els agents.

- Cada agent té les seves pròpies preferències en relació al benefici o utilitat obtingut.

És important distingir entre dos tipus diferenciats de jocs: Els jocs cooperatius i els jocs no cooperatius.

- Jocs cooperatius: Existeix la possibilitat d'arribar a acords vinculants entre els agents. Als jocs cooperatius trobarem coalicions i distribucions, considerant grups de jugadors que es repartiran els beneficis obtinguts conjuntament.

- Jocs no cooperatius: No existeix la possibilitat d'arribar a acords vinculants entre els agents. Aquests poden ser estàtics (les accions o estratègies es prenen de forma simultànea sense saber el que han elegit els demés) o bé dinàmics (on els jugadors elegeixen accions de forma dinàmica i durant el transcurs de la presa de decisions poden transmetre informació total o parcial als altres agents). Als jocs no cooperatius els jugadors buscaran aquella estratègia que els maximitzi el seu benefici individual sense preocupar-se pels interessos dels altres, en canvi en els jocs no cooperatius els jugadors no podran trencar els acords vinculants establerts entre ells.

Definim els principals elements de la Teoria de Jocs:

- Jugadors: Són els agents que intervenen prenent accions i estratègies.

- Accions: Són les decisions que pren cada agent en un moment donat del joc.

- Estratègies: És un pla complet d'accions per a un agent donat.

- Perfil estratègic: És un conjunt d'estratègies per a cada jugador.

- Pagaments: Són les valoracions numèriques per part de cada agent dels possibles resultats del joc.

Exemple 1.1. Dilema dels presos.
Dos delinqüents són detinguts i acusats de cometre un crim. Tot i això la policia no pot empresonar-los més d'un any a cadascun si cap d'ells confessa, per falta

de proves suficients que els incriminin. Els sospitosos són tancats en habitacions diferents i interrogats individualment. Si els dos confessen, ambdós seran empresonats durant 5 anys. Si només confessa un d'ells, el que ha confessat serà posat en llibertat mentre que l'altre quedarà empresonat durant 10 anys.
Sembla bastant immediat que en conjunt és preferible no confessar, ja que només que un d'ells confessi l'altre s'endurà un mínim de 5 anys de presó. En canvi si cap dels dos ho fa, el càstig serà d'un any cadascú. Anem a representar el joc en forma de taula per tal de visualitzar-lo millor.

	Jug 2: Confessa	Jug 2 : No Confessa
Jug 1: Confessa	$(5,5)$	$(0,10)$
Jug 1: No Confessa	$(10,0)$	$(1,1)$

El primer valor del parèntesi representa els anys de presó que obté el jugador 1 en cada situació i el segon els anys que obtindrà el segon.
Si ens situem en la casella on cap dels dos jugadors confessa, el jugador 1, per exemple, tindrà incentius a canviar d'estratègia, ja que si decideix confessar (considerant que el jugador 2 no confessa), es lliurarà de l'empresonament. Ara, el jugador 2 en la situació en la que el primer confessa i ell no, tindrà incentius a confessar també per tal de reduir la condemna de 10 a 5 anys. Finalment en la situació en que els dos decideixen confessar, ningú tindrà incentius a canviar la seva estratègia, ja que es perjudicaria a sí mateix passant de 5 anys de presó a 10.
En jocs no cooperatius, l'equilibri de Nash; aquell en el qual cap dels jugadors tindrà incentius a canviar unilateralment la seva estratègia, serà $EN = \{$Jug 1 confessa, Jug 2 confessa$\}$ amb uns resultats de 5 anys de presó per a cadascú.
Si analitzem aquest joc des d'un punt de vista cooperatiu; els jugadors, en vista del resultat obtingut sense cooperar, preferiran posar-se d'acord a no confessar obtenint el resultat d'un únic any d'empresonament.

No cooperar pot resultar perjudicial per als jugadors participants en el joc; aleshores considerant la possibilitat d'establir acords entre els agents es pot aconseguir un augment del benefici no només col·lectiu, sinó també individual a partir de la repartició del benefici del grup.
En aquest treball ens centrem en els jocs cooperatius considerant la possibilitat d'afegir certes restriccions a la cooperació entre els jugadors. Les restriccions que considerarem a la cooperació es basaran en incompatibilitats que puguin tenir de cara a l'establiment d'acords entre ells o bé a certes afinitats alhora d'establir grups de cooperació en el joc.

2 Jocs cooperatius.

El conjunt dels jugadors els denotarem com $N := \{1, ..., n\}$. Anomenem coalició a tot subconjunt $S \subseteq N$. Una coalició té $|S|$ jugadors, on $|S|$ és el cardinal de S. Ens referim a la coalició N com la gran coalició que engloba a tots els jugadors.
Ens referim a $\mathbb{R}^{|S|}$ com $\mathbb{R}^S$, $\forall\ S \subseteq N$.

Donat $S \subseteq N$ i un conjunt $A \subset \mathbb{R}^S$ direm que A és complet si $\forall x, y \in \mathbb{R}^S$ tal que $x \in A$ i $y \leq x$ aleshores tenim que $y \in A$.

Donat un conjunt $A \subset \mathbb{R}^S$ el conjunt complet més petit contenint A s'anomena casc integral.

Definició 2.1. *Els jocs d'utilitat transferible són aquells formats pel parell* (N, v) *on:*
- N és un conjunt finit de n jugadors, on $n = |N|$.
- v és la funció característica del joc. Aquesta funció representa el pagament obtingut per a cada $S \subseteq N$. Posteriorment aquest pagament s'haurà de dividir entre els membres de S. Sigui 2^N l'espai dels subconjunts $S \subseteq N$.
La funció característica v és una funció,

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

i tal que $v(\emptyset) = 0$.

Notació 2.2. .
(1)*Anomenem jocs TU als jocs d'utilitat transferible. En aquests jocs es considera la utilitat mínima que cada coalició pot aconseguir i es descriu mitjançant un únic nombre real.*
(2) *Anomenem G^N a la classe de jocs d'utilitat transferible amb n jugadors.*

En altres tipus de jocs cooperatius la utilitat pot representar preferències personals sobre els possibles resultats del joc i les possibilitats de cada coalició es descriuen a partir d'un subconjunt que conté totes les utilitats que una coaclició pot garantir als seus membres. Veiem-ho:

Definició 2.3. *Un joc d'utilitat no transferible (joc NTU) està format pel parell (N, V) on:*
- N és el conjunt de jugadors.
- V és una funció que assigna a cada coalició $S \subseteq N$ un conjunt $V(S) \subset \mathbb{R}^S$, tal que es compleix $V(\emptyset) := \{0\}$ per definició.
A més a més, $\forall\ S \subseteq N$, $\forall\ S \neq \emptyset$:
(1) *$V(S) \neq \emptyset$.*
(2) *$V(S)$ és un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^S$.*

(3) *$V(S)$ és complet. A més $\forall i \in N$, $V(\{i\}) \neq \mathbb{R}$, i per tant $\exists v_i \in \mathbb{R}$ tal que $V(\{i\}) = (-\infty, v_i]$.*

Notació 2.4. *Representarem $v(\{i\})$ com $v(i)$, així com $v(\{i,j\})$ com $v(i,j)$.*

En aquest treball ens centrarem en l'anàlisi dels jocs cooperatius TU.

Exemple 2.5. Suposem el següent joc cooperatiu amb tres jugadors. Un d'ells (el jugador 1) és propietari d'una vaca que pot vendre al mercat més pròxim per una unitat monetària de benefici, però per tal d'accedir al mercat ha de passar per les terres d'algun dels altres 2. Si no coopera amb algun d'ells no podrà accedir al mercat per vendre el seu animal.
Tenim que $N = \{1,2,3\}$ i $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que compleix que $v(i) = 0$, $\forall i \in \{1,2,3\}$, ja que el propietari de la vaca no li podrà treure cap benefici a aquesta si no aconsegueix passar per les terres d'algun dels veïns. Al mateix temps, aquests veïns sense cooperar amb el propietari de la vaca no tindran l'opció d'obtenir cap benecifi. La funció característica $v \in G^N$ que descriu el joc és la següent:

$$v(1) = 0,\ v(2) = 0,\ v(3) = 0,\ v(1,2) = 1,\ v(1,3) = 1,\ v(2,3) = 0,\ v(1,2,3) = 1.$$

Cooperant com a mínim un dels propietaris de les terres juntament amb el propietari de la vaca és l'única manera d'aconseguir vendre la vaca al mercat; aleshores s'hauran de repartir el benefici obtingut entre els participants en la col·laboració.

Exemple 2.6. [2]
Considerem tres empreses que produeixen el mateix bé. Donades les seves tecnologies, cada empresa pot produir:
Empresa 1: $0, 8$ o 16 unitats de output al cost unitari de 2 unitats monetàries.
Empresa 2: $0, 4$ o 12 unitats de output al cost unitari de 2 unitats monetàries.
Empresa 3: $0, 8$ o 12 unitats de output al cost unitari de 2 unitats monetàries.
La inversa de la funció de demanda del bé es coneguda per les tres empreses: $p(x) = 35 - 0,75x$, on x és quantitat total de producte al mercat i p representa el preu de mercat del producte.

En primer lloc tenim $N = \{1,2,3\}$ on el jugador i representa l'empresa i, $\forall i \in N$. D'altra banda tenim les següents estratègies pures per a cada jugador:

$$S_1 = \{0,8,16\},\ S_2 = \{0,4,12\},\ S_3 = \{0,8,12\}.$$

Es complirà que: $x = x_1 + x_2 + x_3$, on $x_i \in S_i$, $\forall i \in N$.
La funció del benefici (o utilitat) per a cada jugador i dependrà de x_i i x, i vindrà representada com l'ingrès obtingut per cada jugador menys el cost de producció.

$$u_i(x_1,x_2,x_3) = p(x)x_i - 2x_i,\ i = 1,2,3.$$

Podem representar el joc de la forma següent:

J3: $x_3 = 0$	J2: $x_2 = 0$	J2: $x_2 = 4$	J2: $x_2 = 12$
J1: $x_1 = 0$	$(0, 0, 0)$	$(0, 120, 0)$	$(0, 288, 0)$
J1: $x_1 = 8$	$(216, 0, 0)$	$(192, 96, 0)$	$(144, 216, 0)$
J1: $x_1 = 16$	$(336, 0, 0)$	$(288, 72, 0)$	$(192, 144, 0)$

J3: $x_3 = 8$	J2: $x_2 = 0$	J2: $x_2 = 4$	J2: $x_2 = 12$
J1: $x_1 = 0$	$(0, 0, 216)$	$(0, 92, 192)$	$(0, 216, 144)$
J1: $x_1 = 8$	$(168, 0, 168)$	$(144, 72, 144)$	$(96, 144, 96)$
J1: $x_1 = 16$	$(240, 0, 120)$	$(192, 48, 96)$	$(96, 72, 48)$

J3: $x_3 = 12$	J2: $x_2 = 0$	J2: $x_2 = 4$	J2: $x_2 = 12$
J1: $x_1 = 0$	$(0, 0, 288)$	$(0, 84, 252)$	$(0, 180, 180)$
J1: $x_1 = 8$	$(144, 0, 216)$	$(120, 60, 180)$	$(72, 108, 108)$
J1: $x_1 = 16$	$(192, 0, 144)$	$(144, 36, 108)$	$(48, 36, 36)$

A partir de l'expressió anterior del benefici en aquestes taules hem resumit els beneficis que obtindria cada jugador per a cada combinació de x_1, x_2, x_3.
Anem ara a calcular el benefici mínim que obtindria cada jugador individualment i per a cada coalició per tal de visualitzar el joc cooperatiu.

Jugador 1:

- Si decideix produir 0 unitats obtindrà un benefici de 0 facin el que facin els altres jugadors.
- Si decideix produir 8 unitats obtindrà un benefici en funció de les estratègies dels altres jugadors de: 216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120 o bé 72. Per tant es podrà garantir com a mínim un benefici de:

$$\min\{216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72\} = 72.$$

- Si decideix produir 16 unitats obtindrà un benefici en funció de les estratègies dels altres jugadors de: 336, 288, 192, 240, 192, 96, 192, 144 o bé 48. Per tant es podrà garantir com a mínim un benefici de:

$$\min\{336, 288, 192, 240, 192, 96, 192, 144, 48\} = 48.$$

Per tal de garantir-se un mínim de benefici i d'acord amb la definició anterior de jocs TU,

$$v(1) = \max\{0, 72, 48\} = 72, \text{ elegint l'estratègia } x_1 = 8.$$

Jugador 2:

Seguint el mateix procediment que en el cas anterior obtenim:

$$v(2) = \max\{0, 36, 36\} = 36, \text{ elegint l'estratègia } x_2 = 4 \text{ o bé } x_2 = 12.$$

Jugador 3**:**

$$v(3) = \max\{0, 48, 36\} = 48, \text{ elegint l'estratègia } x_3 = 8.$$

Anem ara a calcular la funció característica per a cada coalició considerant com a benefici conjunt la suma dels beneficis individuals.

Coalició 1 **i** 2**:**

x_1	x_2	**Benefici mínim obtingut per a cada** x_3
0	0	$\min\{0, 0, 0\} = 0$
0	4	$\min\{120, 96, 84\} = 84$
0	12	$\min\{288, 216, 180\} = 180$
8	0	$\min\{216, 168, 144\} = 144$
8	4	$\min\{288, 216, 180\} = 180$
8	12	$\min\{360, 240, 180\} = 180$
16	0	$\min\{336, 240, 192\} = 192$
16	4	$\min\{360, 240, 180\} = 180$
16	12	$\min\{336, 184, 84\} = 84$

$$v(1, 2) = \max\{0, 84, 180, 144, 180, 180, 192, 180, 84\} = 192, \text{ jugant l'estratègia } x_1 = 16 \text{ i } x_2 = 0.$$

De la mateixa manera obtenim:

$$v(1, 3) = 192, \text{ jugant l'estratègia } x_1 = 8 \text{ i } x_3 = 8.$$
$$v(2, 3) = 144, \text{ jugant l'estratègia } x_2 = 12 \text{ i } x_3 = 0, \text{ o bè } x_2 = 4 \text{ i } x_3 = 8, \text{ o bè } x_2 = 0 \text{ i } x_3 = 12, \text{ o bè } x_2 = 4 \text{ i } x_3 = 12, \text{ o bè.}$$

Finalment només ens falta calcular el valor de la funció característica en la coalició dels tres jugadors, és a dir, els beneficis que obtindrien si cooperessin els tres: $v(1, 2, 3)$.
Realitzem els càlculs del benefici obtingut conjuntament en cada cas com la suma dels beneficis individuals en les taules següents.

Coalició 1**,** 2 **i** 3**:**

J3: $x_3 = 0$	J2: $x_2 = 0$	J2: $x_2 = 4$	J2: $x_2 = 12$
J1: $x_1 = 0$	0	120	288
J1: $x_1 = 8$	216	288	360
J1: $x_1 = 16$	336	360	336

J3: $x_3 = 8$	J2: $x_2 = 0$	J2: $x_2 = 4$	J2: $x_2 = 12$
J1: $x_1 = 0$	216	288	360
J1: $x_1 = 8$	336	360	336
J1: $x_1 = 16$	360	336	216

J3: $x_3 = 12$	J2: $x_2 = 0$	J2: $x_2 = 4$	J2: $x_2 = 12$
J1: $x_1 = 0$	288	336	360
J1: $x_1 = 8$	360	360	288
J1: $x_1 = 16$	336	288	120

Els jugadors en la cooperació elegiran aquelles estratègies que maximitzin el benefici conjunt.
$v(1,2,3) = \max\{0, 120, 216, 288, 336, 360\} = 360$, jugant qualsevol de les estratègies següents:

$$\begin{gathered} x_1 = 8,\ x_2 = 12,\ x_3 = 0 \\ x_1 = 16,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0,\ x_2 = 12,\ x_3 = 8 \\ x_1 = 8,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8 \\ x_1 = 16,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8 \\ x_1 = 0,\ x_2 = 12,\ x_3 = 12 \\ x_1 = 8,\ x_2 = 8,\ x_3 = 12 \\ x_1 = 8,\ x_2 = 4,\ x_3 = 12 \end{gathered}$$

La representació d'aquest joc seria:

$$G = (N, v),\ N = \{1, 2, 3\},\ v : S \to \mathbb{R},\ S \subseteq N$$

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	72	36	48	192	192	144	360

En aquest exemple es compleix que:

$$\begin{gathered} v(1) + v(2) \leq v(1,2),\ v(1) + v(3) \leq v(1,3),\ v(2) + v(3) \leq v(2,3), \\ v(1) + v(2,3) \leq v(1,2,3),\ v(2) + v(1,3) \leq v(1,2,3),\ v(3) + v(1,2) \leq v(1,2,3). \end{gathered}$$

I per tant els jugadors tindran incentius a cooperar. Ara la gràcia està en veure com es reparteixen els beneficis obtinguts en la cooperació per tal que tots els jugadors en surtin beneficiats.

2.1 Jocs Cooperatius d'utilitat transferible.

Definició 2.7. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU. Direm que v és superadditiu si $\forall$ S, $T \subseteq N$, complint-se que $S \cap T = \emptyset$, aleshores $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.*

En aquest tipus de jocs TU els jugadors tindran incentius per a cooperar degut a que qualsevol unió disjuntiva de jugadors obtindrà com a mínim el mateix benefici en conjunt que individualment.

En el cas de tres jugadors, $N = \{1, 2, 3\}$ la superadditivitat es concretarà en la verificació de les següents desigualtats:

$$v(1)+v(2) \leq v(1,2),\ v(1)+v(3) \leq v(1,3),\ v(2)+v(3) \leq v(2,3),$$
$$v(1)+v(2,3) \leq v(1,2,3),\ v(2)+v(1,3) \leq v(1,2,3),\ v(3)+v(1,2) \leq v(1,2,3).$$

L'exemple 2.5 tracta d'un joc TU superadditiu de tres jugadors.

Notació 2.8. *Anomenem SG^N al conjunt de jocs superadditius de n jugadors dintre dels jocs TU.*

Definició 2.9. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU.*

(1) *Direm que v és dèbilment superadditiu si $\forall\ i \in N$ i $\forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, aleshores $v(S)+v(i) \leq v(S \cup i)$.*

(2) *Direm que v és additiu si $\forall\ i \in N$ i $\forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, aleshores $v(S)+v(i) = v(S \cup i)$. Concretament es complirà $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.*

(3) *Direm que v és monòton si $\forall\ S,\ T \subseteq N$ on $S \subseteq T$, aleshores $v(S) \leq v(T)$.*

(4) *Direm que v és convex si $\forall\ S,\ T \subseteq N$ es compleix que $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)+v(S \cap T)$.*

(5) *Direm que v és còncau si $\forall\ S,\ T \subseteq N$ es compleix que $v(S)+v(T) \geq v(S \cup T)+v(S \cap T)$.*

Definició 2.10. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU. Direm que v és un joc simple si és monòton i es compleix que $\forall\ S \subset N$, $v(S) = 0$ o 1 i $v(N) = 1$.*

Notació 2.11. *Anomenem S^N la classe de jocs simples amb n jugadors.*
Sigui $W := \{S \subseteq N : v(S) = 1\}$ el conjunt de coalicions guanyadores per a $v \in S^N$.
Sigui $W^m := \{S \in W,$ tal que $\forall\ T \in W,$ si $T \subseteq S,$ aleshores $T = S\}$ el conjunt de coalicions guanyadores minimals.

Definició 2.12. *Suposem la classe de jocs-TU G^N. Donat el subconjunt $S \subseteq N$, definim u^S com el joc d'unanimitat de la coalició tal que $\forall\ T \subseteq N$:*

$$u^S(T) = \begin{cases} \text{si } T \subseteq S & 1 \\ \text{altrament} & 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Qualsevol joc cooperatiu $v \in G^N$ de n jugadors es pot escriure com a combinació lineal dels jocs d'unanimitat. Veure referència [7].

Definició 2.13. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU. Anomenem conjunt de preimputacions del joc al següent conjunt de vectors de distribució de pagaments:*

$$PI(v) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N, \textit{ tal que } \sum_{i=1}^{i=n} x_i = v(N)\}.$$

Diem que una distribució de pagaments $x \in \mathbb{R}^N$, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, *és una* ***distribució eficient*** *si* $x \in PI(v)$.
Diem que una distribució de pagaments $x \in \mathbb{R}^N$, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, *compleix la* ***racionalitat individual*** *si* $v(\{i\}) \leq x_i$, $\forall i \in N$.

Definició 2.14. *Sigui* $v \in G^N$ *un joc TU. Definim* $I(v)$ *com el conjunt d'imputacions de v:* $x \in I(v) \Leftrightarrow x$ *és una distribució eficient en pagaments complint la racionalitat individual.*

$$I(v) := \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \textit{ complint-se que, } \forall i \in N,\ x_i \geq v(i)\}.$$

El conjunt d'imputacions per una funció característica donada pot tenir infinits punts, un sol punt, o bé no tenir-ne cap. Si $v \in SG^N$ és un joc TU superadditiu, aleshores $I(v) \neq \emptyset$.

Concretament,

$$I(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow \sum_{i \in N} v(i) \leq v(N).$$

Definició 2.15. *Sigui* $v \in G^N$ *un joc TU. Diem que una distribució de pagaments* $x \in \mathbb{R}^N$, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ *compleix la* ***racionalitat coalicional*** *si,* $\forall S \subseteq N$, $v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$.

Definició 2.16. *Sigui* $v \in G^N$ *un joc TU. El nucli de v, representat com* $C(v)$ *el definirem com,*

$$C(v) = \{x \in I(v) : \forall S \subseteq N,\ v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i\} \tag{2.2}$$

És a dir, una distribució x pertany al nucli si es compleix:

- Eficiència: $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

- Racionalitat individual: $v(i) \leq x_i$, $\forall i \in N$.

- Racionalitat coalicional: $v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$, $\forall S \subseteq N$.

3 Valor de Shapley.

Definició 3.1. *Una regla d'assignació per un joc TU de n jugadors és una funció:*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

que assigna per a cada $v \in G^N$ un vector $x \in \mathbb{R}^N$.

Definició 3.2. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU.*

- Un jugador $i \in N$ és un jugador nul si, $\forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.
- Dos jugadors $i,\ j \in N$ són jugadors simètrics si $\forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Definició 3.3. *Sigui φ una regla d'assignació. Definim les propietats següents:*

(1) ***Eficiència:***
La regla d'assignació φ és eficient $\Leftrightarrow \forall v \in G^N$, aleshores $\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = v(N)$.
Aquesta propietat reparteix el benefici obtingut mitjançant la cooperació de tots els jugadors; $v(N)$, entre ells.

(2) ***Jugador Nul:***
La regla d'assignació φ satisfà la propietat de jugador nul $\Leftrightarrow \forall v \in G^N$ i considerant un jugador nul $i \in N$, aleshores $\varphi_i(v) = 0$.
Aquesta propietat ens diu que aquells jugadors que no aporten cap benefici afegit a cap grup no han rebre res del repartiment de benefici en la cooperació.

(3) ***Simetria:***
La regla d'assignació φ és simètrica $\Leftrightarrow \forall v \in G^N$ i per a cada parella $i,\ j \in N$ de jugadors simètrics, aleshores $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.
Aquells jugadors que aporten el mateix benefici en totes les coalicions, mereixen rebre el mateix pagament.

(4) ***Additivitat:***
La regla d'assignació φ és additiva $\Leftrightarrow \forall\ v,\ w \in G^N$, aleshores $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

Definició 3.4. *El Valor de Shapley, Φ, es defineix per a cada joc-TU, $v \in G^N$ i per a cada jugador $i \in N$ com:*

$$\Phi_i(v) := \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \tag{3.1}$$

Observació 3.5. El Valor de Shapley és una regla d'assignació.

$$\Phi : G^N \to \mathbb{R}^N.$$

Exemple 3.6. Sigui $v \in G^N$ un joc TU on $n = 3$. El Valor de Shapley per a cada jugador serà el següent:

(1) Jugador 1: $\Phi_1(v) := \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{6}[v(12) - v(2)] + \frac{1}{6}[v(13) - v(3)] + \frac{1}{3}[v(123) - v(23)]$.
(2) Jugador 2: $\Phi_2(v) := \frac{1}{3}v(2) + \frac{1}{6}[v(12) - v(1)] + \frac{1}{6}[v(23) - v(3)] + \frac{1}{3}[v(123) - v(13)]$.
(3) Jugador 3: $\Phi_3(v) := \frac{1}{3}v(3) + \frac{1}{6}[v(23) - v(2)] + \frac{1}{6}[v(13) - v(1)] + \frac{1}{3}[v(123) - v(12)]$.

El Valor de Shapley no sempre pertany al nucli de v. Resulta senzill deduir-ho, ja que el aquest valor sempre existeix, en canvi, tal i com hem comentat anteriorment, pot donar-se el cas que $C(v) = \emptyset$.
Per tal que es trobi al nucli el repartiment de Shapley haurà de complir les propietats de racionalitat individual i racionalitat coalicional definides anteriorment:

i) $v(i) \leq \Phi_i(v), \forall\ i \in N$.

ii) $v(S) \leq \sum_{i \in S} \Phi_i(v), \forall\ S \subseteq N$.

La propietat d'eficiència sempre es compleix com veurem més endavant:

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N), \forall\ v \in G^N.$$

Definició 3.7. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU i sigui $\pi \in \Pi(N)$ una permutació de N, on $\Pi(N)$ es refereix a les permutacions dels elements de N.*
El vector de les contribucions marginals associades a π es defineix com:

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)),$$

on $P^\pi(i)$ denota el conjunt de predecessors d'i sota l'ordre donat per π, és a dir,

$$j \in P^\pi(i) \Leftrightarrow \pi(j) < \pi(i).$$

Aleshores podem definir també el Valor de Shapley per a cada jugador com

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v) \tag{3.2}$$

Observació 3.8. Per obtenir la segona definició,

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{T = combinacions\ de\ S,\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(T \cup \{i\}) - v(T)),$$

i podem considerar els conjunts de jugadors T, que representen les combinacions dels elements de S, $\forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, com precedessors de i en cada permutació dels elements de N, obtenint fàcilment la definició (3.7).

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} m_i^\pi(v)$$

Proposició 3.9. *El Valor de Shapley Φ és una regla d'assignació a G^N que satisfà les propietats d'eficiència, jugador nul, simetria i additivitat.*

Demostració.

(1) **Eficiència:** Volem veure que

$$\sum_{i\in N} \Phi_i(v) = \sum_{i\in N} \sum_{\pi\in\Pi(N)} \frac{1}{n!} [\ v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))\ ].$$

Ara,

$$\sum_{i\in N} \sum_{\pi\in\Pi(N)} \frac{1}{n!} [\ v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))\ ] =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} \sum_{i\in N} [\ v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))\ ] =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} [\ v(N) - v(\emptyset)\ ] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} v(N) = \frac{1}{n!}\ n!\ v(N) = v(N).$$

(2) **Jugador Nul:** Sigui $i \in N$ un jugador nul d'un joc-TU $v \in G^N$. Aleshores considerant que $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$, $\forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$ obtenim

$$\Phi_i(v) := \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) = 0.$$

(3) **Simetria:** Siguin i, $j \in N$ dos jugadors simètrics, aleshores el valor afegit que aporten a cada coalició és el mateix i per tant es compleix:

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} [v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))] =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi(N)} [v(P^\pi(j) \cup \{j\}) - v(P^\pi(j)] = \Phi_j(v).$$

(4) **Additivitat:** Siguin v, $w \in G^i$ dos jocs TU. Aleshores $\forall\ i \in N$,

$$\Phi_i(v + w) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} ((v + w)(S \cup \{i\}) - (v + w)(S)) =$$

$$\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) + w(S \cup \{i\}) - v(S) - w(S)) =$$

$$\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} (v(S\cup\{i\}) - v(S)) + \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} (w(S\cup\{i\}) - w(S)) =$$

$$\Phi_i(v) + \Phi_i(w).$$

Teorema 3.10. *El Valor de Shapley és l'única regla d'assignació en G^N que satisfà les quatre propietats anteriors: eficiència, jugador nul, simetria i additivitat.*

Demostració. [1]

Ja hem vist que el Valor de Shapley compleix les 4 propietats definides. Ara falta veure que és l'única regla d'assignació que ho fa.
Anem a suposar que φ és una regla d'assignació que compleix les quatre propietats. Sigui $v \in G^N$. El podem veure també com un vector

$$\{v(S)\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$$

i aleshores podem identificar G^N com un espai vectorial de dimensió $2^n - 1$.

Sigui $U(N) := \{w^S \text{ tal que } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$ el conjunt de jocs d'unanimitat com a base de l'espai vectorial, i per tant $U(N)$ és un conjunt de vectors linealment independents.
Definim $\{\alpha_S\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \subset \mathbb{R}$ tal que compleixi $\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w^S = 0$ existint $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\alpha_T \neq 0$. Suposem que $\nexists\ Q \subsetneq T$, tal que $\alpha_Q \neq 0$.
Ara,

$$0 = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w^S(T) = \alpha_T \neq 0$$

i arribem a una contradicció. Donat que φ satisfà les propietats d'eficiència, jugador nul i simetria, tenim que $\forall\ i \in N$, $S \subseteq N$, tal que $S \neq \emptyset$, i $\alpha_S \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_i(\alpha_S w^S) = \begin{cases} \text{si } i \in S & \frac{\alpha_S}{|S|} \\ \text{altrament} & 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Ara, si φ també satisfà l'additivitat, aleshores aquest ha de ser únic ja que $U(N)$ és una base de G^N.

Proposició 3.11. *Cap dels axiomes utilitzats per caracteritzar el Valor de Shapley al teorema anterior és superflu.*

Demostració. [1]

Per veure-ho posarem un exemple de regla d'assignació diferent del Valor de Shapley que satisfaci 3 de les propietats. Considerem en cada cas una regla d'assignació que no satisfaci una i només una de les propietats.

(1) **Eficiència:** Definim la regla d'assignació ρ, tal que per a cada $v \in G^N$ tenim: $\rho(v) := 3\Phi(v)$ que satisfà les altres 3 propietats.

(2) **Jugador Nul:** Definim la regla d'assignació ρ, tal que $\rho_i(v) = v(N)/n$, $\forall\ i \in N$, $\forall v \in G^N$. Aquesta regla satisfà les altres tres propietats.

(3) **Simetria:** Definim la regla d'assignació ρ, tal que per a cada $v \in G^N$ i per cada $i \in N$ tenim: $\rho_i(v) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\pi \in \Pi^1(N)} m_i^\pi(v)$, on $\Pi^1(N)$ representa el conjunt de permutacions on el jugador 1 sempre està a la primera posició i per tant, $\pi \in \Pi^1(N) \Leftrightarrow \pi(1) = 1$. Aquesta regla satisfà les altres tres propietats.

(4) **Additivitat:** Definim la regla d'assignació ρ, tal que per a cada $v \in G^N$ i per cada $i \in N$ tenim:

$$\rho_i(v) = \begin{cases} \text{si } i \text{ es jugador nul} & 0 \\ \quad \text{altrament} & \frac{v(N)}{n-d} \end{cases} \tag{3.4}$$

on d és el nombre de jugadors nuls que hi ha al joc v. Aquesta regla satisfà les altres tres propietats.

Corol·lari. *Sigui $v \in SG^N$. Aleshores, per a cada $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$, es compleix que $m_i^\pi(v) \geq v(i)$ i doncs:*

$$\Phi_i(v) = \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v) \geq \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\pi \in \Pi(N)} v(i) = v(i).$$

És a dir, si v és superadditiu, obtenim que el valor que Shapley assigna a cada jugador en la cooperació és superior al valor obtingut individualment. D'aquesta manera els agents tindran incentius a cooperar.

4 Índexos de poder.

Recordem la classe de jocs simples S^N, el conjunt de coalicions guanyadores $W \subseteq S^N$ i el conjunt de coalicions guanyadores minimals $W^m \subseteq W \subseteq S^N$.

$$W = \{S \subseteq N \text{ tal que } \exists\, T \in W^m \text{ tal que } T \subseteq S\}.$$

Propietats:

Sigui $v \in S^N$ un joc simple.

(1) $\emptyset \notin W \Rightarrow \emptyset \notin W^m$.

(2) Siguin S, $T \in S^N$. Aleshores si $S \in W$ i $S \subseteq T \Rightarrow T \in W$.

(3) $\forall\, S, T \in W^m$, $S \neq T$, es compleix que $T \not\subset S$ ni $S \not\subset T$.

Definició 4.1. *Sigui $v \in S^N$ un joc simple. v serà un joc de majories ponderades si existeix $q \in \mathbb{R}^+$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ tal que $p_i \geq 0$, $\forall\, i \in N$ i tal que*

$$v(S) = 1 \Leftrightarrow \textstyle\sum_{i \in S} p_i \geq q.$$

Exemple 4.2. Recordem l'exemple 2.5 on teníem:

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(2,3) = 0,\ v(1,2) = 1,\ v(1,3) = 1,\ v(1,2,3) = 1.$$

El conjunt de coalicions guanyadores és: $W = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.
El conjunt de coalicions guanyadores minimals és: $W^m = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$.
Podríem ponderar aquest joc de la manera següent, complint-se la definició anterior: $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $q = 4$.

Observació 4.3. [1]
No tots els jocs simples són jocs de majories ponderades.
Suposem el joc simple: $N = \{1,2,3,4,5\}$ on $W^m = \{\{1,2,3\}, \{4,5\}\}$. Si aquest joc fos de majories ponderades existirien $q > 0$, $p_1, p_2, p_3, p_4\ p_5 \geq 0$, tal que:
$p_1 + p_2 + p_3 \geq q$, $p_4 + p_5 \geq q$.
Aleshores, com $\{1,2,4\}$ no és una coalició guanyadora s'ha de complir que $q > p_1 + p_2 + p_4$.
Ara, com $p_1 + p_2 + p_3 \geq q$, restant p_3 i sumant p_4 als dos costats i juntant-ho amb la inequació anterior obtenim:

$$q > p_1 + p_2 + p_4 \geq q - p_3 + p_4.$$

Aleshores, $q > q - p_3 + p_4 \Rightarrow p_3 > p_4$. Finalment es dedueix $p_3 + p_5 > p_4 + p_5 \geq q$ arribant a una contradicció ja que $\{3,5\}$ no és una coalició guanyadora.

Definició 4.4. *Anomenem índex de Shapley-Shubik a la restricció del Valor de Shapley a la classe dels jocs simples.*

5 Cooperació restringida.

Al parlar de jocs cooperatius normalment considerem totes les coalicions possibles en l'estudi. Tot i això ens podem trobar en la situació en que hi hagin certes restriccions a les coalicions.

Definició 5.1. *Un graf $G = (V, E)$ està format per dos conjunts finits; V que correspon als vèrtexs (per nosaltres en un joc cooperatiu seran els jugadors) i E que correspon a les arestes. Cada aresta unirà dos vèrtexs, és a dir, dos jugadors.*

Definició 5.2. *Sigui G^N un joc cooperatiu on N representa el conjunt de tots els jugadors. Definim g^N com el graf complet amb totes les arestes i expressarem aquestes mitjançant ":"; per tant, si i, j són dos jugadors diferents de N, l'aresta que els uneix serà $i : j$. És a dir,*

$$g^N = \{i : j, \text{ tal que } i, j \in N, i \neq j\}.$$

5.1 Afinitats.

Per explicar la cooperació parcial entre els jugadors mitjançant un graf que representa els acords bilaterals entre els jugadors utilitzarem el mètode de Myerson.

Definició 5.3. *Definim GR com el conjunt de tots els possibles grafs g a N, és a dir, totes les estructures de cooperació i restriccions possibles entre aquests jugadors en un joc cooperatiu.*

$$GR = \{g, \text{ tal que } g \subseteq g^N\}.$$

Definició 5.4. *Sigui G^N, $S \subseteq N$, $g \in GR$, i, $j \in S$. Direm que i, j estan connectats per $g \Leftrightarrow \exists$ un camí en g que va de i a j dintre de S.*

El camí $i : j$ pot ser:
(1) Si $i = j$ en S no hi ha camí ja que es tracta d'un mateix vèrtex.
(2) Si $i \neq j$ en S, aleshores $\exists\ k \geq 1$ i una seqüència de vèrtexs $(m^0, m^1, ..., m^k)$ de manera que $i = m^0$, $j = m^k$ i tal que $m^{l-1} : m^l \in g$, $\forall\ l \in \{1, ...k\}$ i $m^l \in S$, $\forall\ l \in \{1, ..., k\}$.

Sigui G^N. Donat $g \in GR$ i $S \subseteq N$, $\exists$ una única partició de S que agrupa els jugadors $\Leftrightarrow$ aquests estan connectats en S a través de g.

$$S/g = \{\{i \text{ tal que } i, j \text{ estan connectats en } S \text{ per } g\} \text{ tal que } j \in S\}.$$

Sigui G^N. GR seran el conjunt de les possibles estructures de cooperació $\forall\ v \in G^N$.

Definim la funció característica v que assignarà la utilitat obtinguda per cada coalició possible considerant les estructures de cooperació.
Ara, donat un joc $v \in G^N$ repartirem el benefici obtingut per a cada grup considerant la utilitat individual per a cada jugador i les estructures de coalició.

$$Y : GR \to \mathbb{R}^N,$$

on $Y_i(g)$ es refereix a la utilitat percebuda pel jugador $i \in N$ en el joc v i on $g \in GR$ representa un patró d'acords de cooperació entre els jugadors.

Definició 5.5. *Considerem G^N. Sigui GR el conjunt dels possibles grafs en N. Definim una regla d'assignació per $v \in G^N$ com qualsevol funció $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ tal que $\forall g \in GR$, $\forall S \in N/g$, es compleix*

$$\sum_{i \in S} Y_i(g) = v(S) \tag{5.1}$$

Aquesta regla d'assignació s'aplicarà a aquelles coalicions possibles, és a dir, a aquells jugadors connectats per l'estructura de cooperació definida en g per a $S \in N/g$.

Exemple 5.6. Suposem $v \in G^N$, $N = \{1,2,3,4,5\}$ i els grafs següents: $g_1 = \{1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5\}$ i $g_2 = \{1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5\}$. Ambdós grafs uneixen tots els jugadors però no amb els mateixos nexes. Tal i com hem definit anteriorment es complirà que $\sum_{i=1}^{5} Y_i(g_1) = \sum_{i=1}^{5} Y_i(g_2) = v(1,2,3,4,5)$. Tot i que cada $Y_i(g_j)$, per $i \in \{1,2,3,4,5\}$, considerant ambós grafs: $j \in \{1,2\}$ pot ser diferent. Efectivament, no tindrà la mateixa importància el jugador 1 en g_1 que en g_2, ja que en el primer graf aquest jugador és el que uneix a tots els altres.
Sigui $S = \{2,3,4,5\} \subset N$,

$$S/g_1 = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$$
$$S/g_2 = \{\{2,3,4,5\}\}$$

I per tant la possible cooperació en el cas de g_1 entre els jugadors dependrà del jugador 1 qui mereixerà segurament una assignació d'utilitat superior en g_1 que en g_2.

Definició 5.7. *Diem que una regla d'assignació en cooperació restringida $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ és estable $\Leftrightarrow \forall g \in GR$, $\forall\ i : j \in g$, es compleix $Y_i(g) \geq Y_i(g \setminus i : j)$ i $Y_j(g) \geq Y_j(g \setminus i : j)$.*
On definim $g \setminus i : j = \{k : l \in g$, tal que $k : l \neq i : j\}$.

I per tant dos jugadors sempre es beneficiaran de la possibilitat de coalicionar entre ells. Si totes les regles d'assignació fossin estables, tots els jugadors $i \in N$ voldrien cooperar amb el màxim nombre de jugadors possible per tal d'obtenir un major benefici individual Y_i en el repartiment. En aquestes situacions esperaríem la cooperació completa: g^N com a estructura de cooperació del joc.

Una regla d'assignació és estable quan tot jugador surt beneficiat d'acords bilaterals entre ells.
D'altra banda per tal de fer-ho igualitari, dos jugadors haurien de beneficiar-se per igual del seu acord bilateral.

Definició 5.8. *Diem que una regla d'assignació en cooperació restringida* $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ *és justa* $\Leftrightarrow \forall g \in GR,\ \forall\ i : j \in g,$ *es compleix* $Y_i(g) - Y_i(g \setminus i : j) = Y_j(g) - Y_j(g \setminus i : j)$.

Definició 5.9. *Sigui* $v \in G^N$, *GR els grafs en N i* $g \in GR$. *Definirem* v/g *com la funció característica que* $\forall S \subseteq N$, $(v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T)$.

Aquesta definició serà útil quan només es puguin considerar coalicions entre els jugadors units per g.

Teorema 5.10. *Donada una funció característica* $v \in G^N$, *existeix una única regla d'assignació* $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ *justa (definició* 5.8*) complint la propietat d'eficiència (definició* 5.5*) i tal que*

$$Y(g) = \Phi(v/g),\ \forall g \in GR,$$

on Φ *és el Valor de Shapley.*
Si v *és una funció característica superadditiva, aleshores la regla d'assignació definida també compleix la propietat d'estabilitat.*

Observació 5.11. Si considerem g^N, (el graf complet), aleshores $Y(g^N) = \Phi(v/g^N) = \Phi(v)$ considerant que $v/g^N = v$ degut a que tota coalició d'acord amb g^N és possible i no es restringeix v. Aleshores la regla d'assignació Y coincideix amb el Valor de Shapley.

Exemple 5.12. [3]
Sigui $N = \{1, 2, 3\}$, i considerem $v \in G^N$ tal que:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,\ v(1,3) = v(2,3) = 6,\ v(1,2) = v(1,2,3) = 12.$$

Anem a calcular la regla d'assignació definida a partir d'aquesta funció característica v utilitzant les propietats que compleix.

Eficiència: $\forall g \in GR, \forall S \in N/g$, es compleix $\sum_{i \in S} Y_i(g) = v(S)$.
Justícia: $\forall g \in GR, \forall\ i : j \in g,\ \ Y_i(g) - Y_i(g \setminus i : j) = Y_j(g) - Y_j(g \setminus i : j)$.

A partir d'aquesta propietats obtenim ràpidament:

$$Y(\emptyset) = (0,0,0),\ Y(1:2) = (6,6,0),\ Y(1:3) = (3,0,3),\ Y(2:3) = (0,3,3).$$
$$Y(1:2, 1:3) = (7,4,1),\ Y(1:2, 2:3) = (4,7,1),\ Y(1:3, 2:3) = (3,3,6),$$
$$Y(1:2, 1:3, 2:3) = (5,5,2).$$

Anem a veure-ho.
Per obtenir $Y(1:2, 2:3)$, suposem que anteriorment ja hem calculat Y aplicada a $g \in GR$, per a $g \subset (1:2, 2:3)$.
Treiem l'aresta $2:3$ del graf. Aleshores sabem $Y_2(1:2) = 6$, $Y_3(1:2) = 0$. D'altra banda treient l'aresta $1:2$ del graf tenim: $Y_1(2:3) = 0$, $Y_2(2:3) = 3$. Ara a partir de la propietat de justícia i de l'eficiència sabem que:

$$Y_1(1:2, 2:3) - Y_1(2:3) = Y_2(1:2, 2:3) - Y_2(2:3).$$
$$Y_2(1:2, 2:3) - Y_2(1:2) = Y_3(1:2, 2:3) - Y_3(1:2).$$
$$Y_1(1:2, 2:3) + Y_2(1:2, 2:3) + Y_3(1:2, 2:3) = v(1,2,3) = 12.$$

Resolent aquest sistema de tres equacions i tres incògnites obtenim el resultat. Fem servir el mateix procediment per a cada graf partint de la base que sempre es compleix: $Y(\emptyset) = (0,0,0)$.

Observació 5.13. En l'exemple anterior veiem que la funció característica és superadditiva ja que:

$$\forall\ S, T \subseteq N, \text{ complint-se que } S \cap T = \emptyset, \text{ aleshores es compleix que}$$
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

$$v(1) + v(2) \leq v(1,2),\ v(1) + v(3) \leq v(1,3),\ v(2) + v(3) \leq v(2,3),$$
$$v(1) + v(2,3) \leq v(1,2,3),\ v(2) + v(1,3) \leq v(1,2,3),\ v(3) + v(1,2) \leq v(1,2,3).$$

En conseqüència es compleix també la propietat d'estabilitat tal i com podem observar en els resultats obtinguts:

$$\forall g \in GR, \forall i:j \in g, \text{ es compleix } Y_i(g) \geq Y_i(g \setminus i:j) \text{ i } Y_j(g) \geq Y_j(g \setminus i:j).$$

Finalment sabem que considerant el graf complet tenim $Y(g^N) = \Phi(v \setminus g^N) = \Phi(v)$ i per tant el Valor de Shapley d'aquesta regla d'assignació és el valor calculat anteriorment $\Phi(v) = (5,5,2)$.

Observació 5.14. Podem calcular els mateixos resultats obtinguts en l'exemple anterior a partir d'aplicar directament la definició del Valor de Shapley restringit a cada graf. Haver arribat al mateix resultat utilitzant les propietats d'aquesta regla d'assignació definida ens mostra la unicitat d'aquesta funció amb aquestes característiques, que demostrarem més endavant.

Observació 5.15. Si recordem la definició anterior de nucli, podem veure que el Valor de Shapley en aquest cas no es troba al nucli, ja que:

$$v(1,2) = 12 \geq 10 = Y_1(1:2, 2:3, 1:3) + Y_2(1:2, 2:3, 1:3) = 5 + 5$$

Aquests 5 + 5 són els pagaments que reben els jugadors 1 i 2 en el graf complet. Aleshores segons Shapley aquests jugadors obtindran més benefici actuant conjuntament sense cooperar amb el tercer jugador.

D'altra banda i tal i com hem vist, la regla d'assignació compleix la definició d'estabilitat i si algun dels tres jugadors decidís sortir de la coalició rebria un benefici inferior a l'anterior. Aquest fet és jutificació suficient per tal que ningú tingui incentius a trencar la coalició:

Jugador 1 surt de la coalició: $Y(2:3) = (0,3,3)$, $Y_1(1:2,2:3,1:3) \geq Y_1(2:3)$.
Jugador 2 surt de la coalició: $Y(1:3) = (3,0,3)$, $Y_2(1:2,2:3,1:3) \geq Y_2(1:3)$.
Jugador 3 surt de la coalició: $Y(1:2) = (6,6,0)$, $Y_3(1:2,2:3,1:3) \geq Y_3(1:2)$.

Demostració Teorema [3]**.**

Anem primer a veure que només pot existir una sola regla d'assignació justa i eficient per a qualsevol funció $v \in G^N$.
Suposem que n'existeixen dues: $Y^1 : GR \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i $Y^2 : GR \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfent les dues:

$$(1)\ \forall g \in GR,\ \forall S \in N/g, \text{ es compleix } \textstyle\sum_{i\in S} Y_i^k(g) = v(S),\ k = 1,2.$$

$$(2)\ \forall g \in GR,\ \forall\ i:j \in g,\ \ Y_i^k(g) - Y_i^k(g \setminus i:j) = Y_j^k(g) - Y_j^k(g \setminus i:j),\ k = 1,2.$$

Ara, sigui $g \in GR$ tal que g és el graf mínim que satisfà $Y^1(g) \neq Y^2(g)$.

Com considerem g el graf mínim que compleix la desigualtat $Y^1(g) \neq Y^2(g)$, si li treiem una aresta aleshores es complirà que $Y^1(g \setminus i:j) = Y^2(g \setminus i:j)$, on $i:j$ és l'aresta que hem suprimit. Aplicant també (2) tenim:

$$Y_i^1(g) - Y_j^1(g) = Y_i^1(g \setminus i:j) - Y_j^1(g \setminus i:j) = Y_i^2(g \setminus i:j) - Y_j^2(g \setminus i:j) =$$

$$Y_i^2(g) - Y_j^2(g).$$

Per qualsevols i, j que estiguin units en g i a més, que estiguin connectats per la mateixa component S de g.
Definim $d_S(g) = Y_i^1(g) - Y_i^2(g)$ depenent només de S i g, i en cap moment del jugador i aplicant el resultat anterior.
A partir de (1) obtenim:

$$v(S) = \textstyle\sum_{i\in S} Y_i^1(g) = \sum_{i\in S} Y_i^2(g) \Rightarrow$$

$$0 = \textstyle\sum_{i\in S}(Y_i^1(g) - Y_i^2(g)) = |S| d_S(g)$$

$$\text{Com } |S| \neq 0 \Rightarrow d_S(g) = Y_i^1(g) - Y_i^2(g) = 0 \Rightarrow$$

$$Y_i^1(g) = Y_i^2(g).$$

Arribem doncs a una contradicció, ja que inicialment havíem suposat $Y_i^1(g) \neq Y_i^2(g)$ i per tant com a molt només hi haurà una regla d'assignació amb aquestes propietats per v.
Ara falta veure que $Y(g) = \Phi(v/g)$ compleix (1) i (2), i la propietat d'estabilitat en el cas en que v és superadditiva, i per tant que aquesta és l'única regla d'assignació.
Anem a veure primer (1).
Sigui $g \in GR$. $\forall S \in N/g$, definim u^S com la funció característica tal que:

$$u^S(T) = \sum_{R \in (T \cap S)/g} v(R), \; \forall \; T \subseteq N.$$

Sabem que dos jugadors connectats a T per g estaran també connectats a N per g i per tant:

$$T/g = \bigcup_{S \in N/g} (T \cap S)/g.$$

Aleshores $v/g = \sum_{S \in N/g} u^S$. Pero S és portador de u^S, ja que $u^S(T) = u^S(T \cap S)$, i per tant utilitzant l'axioma de portabilitat de Shapley [1953], $\forall \; S \in N/g$, $\forall \; T \in N/g$:

$$\sum_{i \in S} \Phi_i(u^T) = \begin{cases} \text{si } S = T, & u^T(N) \\ \text{si } S \neq T, & 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Per linealitat de Φ, si $S \in N/g$, aleshores

$$\sum_{i \in S} \Phi_i(v/g) = \sum_{T \in N/g} \sum_{i \in S} \Phi_i(u^T) = u^S(N) = \sum_{R \in S/g} v(R) = v(S).$$

Anem ara a comprovar (2).

$\forall \; g \in GR, \forall \; i : j \in g$. Sigui $w = v/g - v/(g \backslash i : j)$. Observem que $S/g = S/(g \backslash i : j)$ si $(i : j) \nsubseteq S$. Aleshores si $i \notin S$ o bé $j \notin S$ tenim:

$$w(S) = \sum_{T \in S/g} v(T) - \sum_{T \in S/(g \backslash i:j)} v(T) = 0.$$

Per tant les úniques coalicions amb un pes diferent de 0 en w són aquelles contenint i, j conjuntament quan aquestes estan unides per g.
A partir de la propietat simètrica del Valor de Shapley, obtenim que $\Phi_i(w) = \Phi_j(w)$.
Per linealitat de Φ, $\Phi_i(v/g) - \Phi_i(v/g \backslash i : j) = \Phi_i(w) = \Phi_j(w) = \Phi_j(v/g) - \Phi_j(v/g \backslash i : j)$ i obtenim (2).
Finalment anem a demostrar que si v és superadditiu, aleshores es compleix la propietat d'estabilitat. Observem que $S/(g \setminus i : j)$ sempre refina S/g com una partició de S, i si $i \notin S$, aleshores $S/(g \backslash i : j) = S/g$. Per tant, si v és superadditiva:

$$(v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T) \geqslant \sum_{T \in S/(g \backslash i:j)} v(T) = (v/(g \setminus i : j))(S).$$

La igualtat es donarà quan $i \notin S$.
Aleshores si $w = v/g - v/(g \setminus i : j)$ tenim que $w(S) \geqslant 0$, $\forall S$ i $w(S) = 0$, si $i \notin S$.
Ara, $w(S \cup \{i\}) \geqslant w(S)$, $\forall S$, i $\Phi_i(w) \geqslant 0$, per representació del Valor de Shapley com la contribució marginal esperada. Aleshores $\Phi_i(v/g) - \Phi_i(v/g \setminus i : j)) = \Phi_i(w) \geqslant 0$, que demostra l'estabilitat.

5.2 Incompatibilitats.

Podem crear un graf d'afinitats tal i com hem vist anteriorment amb el model de Myerson, però a vegades voldrem imposar unes restriccions més fortes. Ara veurem com apliquem el Valor de Shapley introduint incompatibilitats entre els jugadors a l'hora de cooperar entre ells.
En aquest cas definim un graf que representi les incompatibilitats entre els jugadors, és a dir, aquells jugadors units pel graf no podran cooperar, ni pertànyer conjuntament a un mateix grup de cooperació.
Sigui $v \in G^N$ i B el graf d'incompatibilitats entre els jugadors en N. Definim aleshores el joc-TU d'incompatibilitats com la terna (N, v, B). Dos jugadors són incompatibles $\Leftrightarrow$ estan units per B.
Sigui GR el conjunt de tots els grafs en N. Donat $B \in GR$, definim el graf dual B^* com:

$$B^* = \{i : j, \text{ tal que } i,\, j \in N,\, i : j \notin B\}$$

Tal i com veiem en el graf de Myerson, per cada $S \subseteq N$, direm que i, $j \in S$ estan connectats per B si existeix un camí de i a j per B en S.

Notació 5.16. .
(1) Denotem S/B les components connectades de S associades al graf B creant una partició de S.
(2) Per a cada conjunt T, anomenem $P(T)$ al conjunt de particions en T.
(3) Anomenem $I(N)$ al conjunt de totes les situacions amb incompatibilitats amb el conjunt de jugadors N.

Definició 5.17. *Sigui $(N, v, B) \in I(N)$. Direm que $S \subseteq N$ és B-admissible $\Leftrightarrow$ $i : j \notin B$, $\forall\, i,\, j \in S$.*
Per a cada $S \subseteq N$ anomenem $P(S, B)$ al conjunt de totes les particions de S tal que les seves classes són B-admissibles.

Definició 5.18. *Sigui N/B^* una partició de N tal que si i, j formen part de classes diferents, aleshores són incompatibles.*

Volem trobar una regla d'assignació que es pugui aplicar en aquestes situacions d'incompatibilitats entre els jugadors.

$$\varphi : I(N) \to \mathbb{R}^N$$

Anem a definir propietats d'aquesta regla d'assignació. Sigui $(N,v,B) \in I(N)$.

(1) **Eficiència:** $\forall\ S \in N/B^*$, $\sum_{i\in S} \varphi_i(N,v,B) = \max_{P\in P(S,B)} \sum_{T\in P} v(T)$.

(2) **Justícia:** $\forall\ i:j \in B^*$,
$\varphi_i(N,v,B) - \varphi_i(N,v,B\cup i:j) = \varphi_j(N,v,B) - \varphi_j(N,v,B\cup i:j)$.

(3) **Estabilitat:** $\forall\ i:j \in B^*$,
$\varphi_i(N,v,B) \geq \varphi_i(N,v,B\cup i:j)$, $\varphi_j(N,v,B) \geq \varphi_j(N,v,B\cup i:j)$.

Definició 5.19. *Sigui* $(N,v,B) \in I(N)$.
Anomenem v^B *a la funció característica del joc-TU de* G^N *definida com:*

$$v^B = \max_{P\in P(S,B)} \sum_{U\in P} v(U),\ \forall\ S \subseteq N.$$

Observació 5.20. v^B és sempre superadditiva, $\forall\ v \in G^N$.

Teorema 5.21. *Sigui* $(N,v,B) \in I(N)$. *Existeix una única regla d'assignació* $\varphi^I \in I(N)$ *complint les propietats d'eficiència i justícia:*

$$\varphi^I(N,v,B) = \Phi(v^B),\ \forall\ (N,v,B) \in I(N) \tag{5.3}$$

Demostració Teorema [5]**.**

(a) **Unicitat:** Suposem que φ^1 i φ^2 són dos regles d'assignació diferents en $I(N)$, que compleixen les propietats d'eficiència i justícia. Aleshores $\exists\ v \in G^N$ i per aquest v, un graf d'incompatibilitats B amb el màxim nombre d'arestes, tal que $\varphi^1(N,v,B) \neq \varphi^2(N,v,B)$.
Si $B^* = \emptyset \Rightarrow \varphi^1 = \varphi^2$, com hem suposat que eren diferents i són eficients, sabem que $B^* \neq \emptyset$.
Ara, sigui $i:j \in B^*$. Com φ^1 i φ^2 compleixen la propietat de justícia i tenint en compte que B és el graf màxim tal que $\varphi^1 \neq \varphi^2$ obtenim que:

$$\varphi^1(N,v,B\cup i:j) = \varphi^2(N,v,B\cup i:j)$$

Aleshores aplicant la propietat de justícia tenim:

$$\varphi_i^1(N,v,B) - \varphi_j^1(N,v,B) = \varphi_i^1(N,v,B\cup i:j) - \varphi_j^1(N,v,B\cup i:j)$$

$$= \varphi_i^2(N,v,B\cup i:j) - \varphi_j^2(N,v,B\cup i:j) = \varphi_i^2(N,v,B) - \varphi_j^2(N,v,B)$$

$$\Rightarrow \varphi_i^1(N,v,B) - \varphi_i^2(N,v,B) = \varphi_j^1(N,v,B) - \varphi_j^2(N,v,B)$$

Extenent aquest argument veiem que $\forall S \in N/B^*$, $\forall i \in S$, $\varphi_i^1(N,v,B) - \varphi_i^2(N,v,B)$ depèn únicament de (N,v,B) i S, i per tant escriurem:

$$\varphi_i^1(N,v,B) - \varphi_i^2(N,v,B) = \rho_S(N,v,B).$$

Ara, considerant aquesta igualtat i la propietat d'eficiència tenim:

$$\forall S \in N/B^*,\ \sum_{i\in S}\varphi_i(N,v,B) = \max_{P\in P(S,B)}\sum_{T\in P} v(T),$$

$$\Rightarrow \max_{P\in P(S,B)}\sum_{T\in P} v(T) = \sum_{i\in S}\varphi_i^1(N,v,B) = \sum_{i\in S}\varphi_i^2(N,v,B)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i\in S}(\varphi_i^1(N,v,B) - \varphi_i^2(N,v,B)) = |S|\rho_S(N,v,B)$$

$$\text{Com } |S| \neq 0 \Rightarrow \rho_S(N,v,B) = \varphi_i^1(N,v,B) - \varphi_i^2(N,v,B) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_i^1(N,v,B) = \varphi_i^2(N,v,B)$$

Obtenim que necessàriament s'ha de complir $\rho_S(N,v,B) = 0$ i per tant, $\varphi^1(N,v,B) = \varphi^2(N,v,B)$, que prova la unicitat de la regla d'assignació amb aquestes propietats.

(b) **Existència:** És suficient veure que la regla d'assignació definida com: $\varphi^I(N,v,B) = \Phi(v^B)$, $\forall (N,v,B) \in I(N)$ verifica les propietats d'eficiència i de justícia. Sigui $(N,v,B) \in I(N)$ i considerem, $\forall S \in N/B^*$ el joc u^S tal que

$$u^S(T) = \max_{P\in P(T\cap S,B)}\sum_{U\in P} v(U),\ \forall T \subset N.$$

És fàcil veure que $v^B = \sum_{S\in N/B^*} u^S$ i que S és portador de u^S. Utilitzant l'axioma de portabilitat de Shapley [1953], $\forall\ S,T \in N/B^*$,

$$\sum_{i\in S}\Phi_i(u^T) = \begin{cases} \text{si } S = T, & u^T(N) \\ \text{si } S \neq T, & 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Sigui $S \in N/B^*$. Utilitzant l'additivitat del Valor de Shapley,

$$\sum_{i\in S}\Phi_i(u^B) = \sum_{i\in S}\sum_{T\in N/B^*}\Phi_i(u^T) = \sum_{T\in N/B^*}\sum_{i\in S}\Phi_i(u^T)$$

$$= u^S(N) = \max_{P\in P(S,B)}\sum_{U\in P} v(U).$$

Veiem que φ^I compleix l'eficiència.
Per veure que es compleix també la propietat de justícia agafem $i : j \in B^*$ i considerem el joc $w := v^B - v^{B\cup i:j}$. Resulta fàcil veure que $w(S) = 0$, $\forall\ S$ tal que $i \notin S$ o bé $j \notin S$.
Aleshores per simetria i additivitat tenim $\Phi_i(w) = \Phi_j(w)$ i per tant,

$$\Phi_i(v^B) - \Phi_i(v^{B\cup i:j}) = \Phi_j(v^B) - \Phi_j(v^{B\cup i:j}).$$

Teorema 5.22. *φ^I compleix la propietat d'estabilitat.*

Demostració [5].

Sigui $(N, v, B) \in I(N)$, $i : j \in B^*$. $\forall\ S \subseteq N$, $P(S, B \cup i : j) \subseteq P(S, B)$.
És més, si $i \notin S$ o bé $j \notin S$, aleshores es compleix la igualtat:

$$P(S, B \cup i : j) = P(S, B).$$

Tenim que $\forall\ S \subseteq N$,

$$v^B(S) = \max_{P \in P(S,B)} \sum_{U \in P} v(U) \geq \max_{P \in P(S,B \cup i:j)} \sum_{U \in P} v(U) = v^{B \cup i:j}(S).$$

Considerant el joc $w = v^B - v^{B \cup i:j}$, tenim $w(S) \geq 0$, $\forall\ S \subseteq N$ i $w(S) = 0$, si i o bé $j \notin S$.
Aleshores $w(S \cup \{i\}) \geq w(S)$ i $w(S \cup \{j\}) \geq w(S)$, $\forall S \subseteq N$.
Finalment, avaluant les contribucions marginals del Valor de Shapley,

$$\Phi_i(w) \geq 0,\ \Phi_j(w) \geq 0, \text{ i per tant } \Phi_i(v^B) \geq \Phi_i(v^{B \cup i:j}), \text{ i } \Phi_j(v^B) \geq \Phi_j(v^{B \cup i:j}).$$

Teorema 5.23. *Sigui (N, v) un joc-TU superadditiu. Aleshores es compleix que $\varphi^I(N, v, \emptyset) = \Phi(v)$.*

Demostració [5].

Sigui $v \in G^N$ superadditiu. Aleshores $v^\emptyset = \max_{P \in P(S,\emptyset)} \sum_{U \in P} v(U) = v(S)$, $\forall\ S \subseteq N$, i per tant veiem que $\varphi^I(N, v, \emptyset) = \Phi(v)$.

Un joc simple amb incompatibilitats és una terna (N, v, B) on $(N, v) \in S^N$ (és a dir, el conjunt de jocs simples de N jugadors), i $B \in GR$. Definim:

$$(W_B)^m = \{S \in W^m \text{ tal que } S \text{ és B-admissible}\}.$$

Lema 5.24. *Sigui $(N, v, B) \in I(N)$ i W el conjunt de coalicions guanyadores de v, aleshores la funció característica v_B del joc simple W_B ve donada com:*

$$v_B(S) = \max_{U \in S_B} v(U),\ \forall\ S \subseteq N,\ \text{on } S_B = \{U \subseteq S \text{ tal que } U \text{ és B-admissible}\}.$$

Demostració [5].

Per veure que v_B és la funció característica de W_B, s'ha de complir:
(1) Si $S \in W_B$, aleshores $v_B(S) = 1$.
Suposem $S \in W_B$. Aleshores existeix $U \subseteq S$ tal que $U \in (W_B)^m$. Tenim que $U \in W^m \cap S_B$ i doncs que $v(U) = 1$. Ara, $v_B(S) = \max_{U \in S_B} v(U) = 1$.
(2) Si $S \notin W_B$, aleshores $v_B(S) = 0$.
Suposem $S \notin W_B$. Aleshores $U \notin W$, $\forall\ U \subseteq S_B$ i per tant $v_B(S) = 0$.

5.3 Incompatibilitats i afinitats.

Considerant el graf d'afinitats de Myerson i el graf d'incompatibilitats, podem definir un mateix joc considerant els dos tipus de relacions entre els jugadors.
Sigui (N, v, A, B) un joc on (N, v) és un joc-TU, A i B són els grafs definits d'afinitats i d'incompatibilitats respectivament de N tal que $A \cap B = \emptyset$; ja que s'ha de complir la condició de consistència; si dos jugadors són incompatibles, no cooperaran i no seran afins.
Considerem $S \subseteq N$, anomenem $P(S, A, B)$ el conjunt de particions de S tal que les classes són coalicions A-connectades i B-admissibles.
Sigui $CI(N)$ el conjunt de jocs-TU de n jugadors amb els grafs d'afinitats i incompatibilitats.
Definim una regla d'assignació per a $(N, v, A, B) \in CI(N)$ com:

$$\gamma : CI(N) \to \mathbb{R}^N$$

Considerem les propietats següents per les regles d'assignació $\forall \ (N, v, A, B) \in CI(N)$:

(1) **Eficiència:** Sigui $S \in N/A$, aleshores $\sum_{i \in S} \gamma_i(N, v, A, B) = \max_{P \in P(S,A,B)} \sum_{T \in P} v(T)$.

(2) **Justícia per** A**:** $\forall \ i : j \in A$,
$\gamma_i(N, v, A, B) - \gamma_i(N, v, A \setminus i : j, B) = \gamma_j(N, v, A, B) - \gamma_j(N, v, A \setminus i : j, B)$.

(3) **Justícia per** B: $\forall \ i : j \in (A \cup B)^*$,
$\gamma_i(N, v, A, B) - \gamma_i(N, v, A, B \cup i : j) = \gamma_j(N, v, A, B) - \gamma_j(N, v, A, B \cup i : j)$.

Definició 5.25. *Sigui* $(N, v, A, B) \in CI(N)$. *Definim la funció característica* $v^{AB}(S)$ *com:*

$$v^{AB}(S) = \max_{P \in P(S,A,B)} \sum_{U \in P} v(U), \ \forall \ S \subseteq N.$$

Teorema 5.26. [5]
Sigui $(N, v, A, B) \in CI(N)$. *Existeix una única regla d'assignació* γ^{CI} *que compleix les tres propietats anteriors:*

$$\gamma^{CI}(N, v, A, B) = \Phi(v^{AB}), \ \forall (N, v, A, B) \in CI(N).$$

Demostració Teorema.

(a) **Unicitat:** Suposem que γ^1 i γ^2 són dos regles d'assignació diferents en $CI(N)$, que compleixen les propietats d'eficiència i justícia per A i B. Aleshores $\exists \ v \in G^N$ i per aquest v, un graf d'incompatibilitats B amb el màxim nombre d'arestes, un graf d'afinitats A amb el mínim nombre d'arestes i tal que es compleixi $\gamma^1(N, v, A, B) \neq \gamma^2(N, v, A, B)$.
Sigui $i : j \in B^*$. Com γ^1 i γ^2 compleixen la propietat de justícia i tenint en compte que B és el graf màxim d'arestes i A el mínim tal que $\gamma^1 \neq \gamma^2$ obtenim que:

$$\gamma^1(N, v, A \setminus i : j, B \cup i : j) = \gamma^2(N, v, A \setminus i : j, B \cup i : j)$$

Aleshores aplicant la propietat de justícia per B i A conjuntament tenim:

$$\gamma_i^1(N, v, A, B) - \gamma_j^1(N, v, A, B) = \gamma_i^1(N, v, A \setminus i : j, B \cup i : j) - \gamma_j^1(N, v, A \setminus i : j, B \cup i : j)$$

$$= \gamma_i^2(N, v, A \setminus i : j, B \cup i : j) - \gamma_j^2(N, v, A \setminus i : j, B \cup i : j) =$$

$$\gamma_i^2(N, v, A, B) - \gamma_j^2(N, v, A, B)$$

$$\Rightarrow \gamma_i^1(N, v, A, B) - \gamma_i^2(N, v, A, B) = \gamma_j^1(N, v, A, B) - \gamma_j^2(N, v, A, B)$$

Definim $\gamma_i^1(N, v, A, B) - \gamma_i^2(N, v, A, B) = \rho_S(N, v, A, B)$ depenent només de S i (N, v, A, B).

Ara, considerant aquesta igualtat i la propietat d'eficiència per $S \in N/A$ tenim:

$$\textstyle\sum_{i \in S} \gamma_i(N, v, A, B) = \max_{P \in P(S,A,B)} \sum_{T \in P} v(T),$$

$$\Rightarrow \textstyle\max_{P \in P(S,A,B)} \sum_{T \in P} v(T) = \sum_{i \in S} \gamma_i^1(N, v, A, B) = \sum_{i \in S} \gamma_i^2(N, v, A, B)$$

$$\Rightarrow 0 = \textstyle\sum_{i \in S} (\gamma_i^1(N, v, A, B) - \gamma_i^2(N, v, A, B)) = |S| \rho_S(N, v, A, B)$$

$$\text{Com } |S| \neq 0 \Rightarrow \rho_S(N, v, A, B) = \gamma_i^1(N, v, A, B) - \gamma_i^2(N, v, A, B) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_i^1(N, v, A, B) = \gamma_i^2(N, v, A, B)$$

Obtenim que necessàriament s'ha de complir $\rho_S(N, v, A, B) = 0$ i per tant, $\gamma^1(N, v, A, B) = \gamma^2(N, v, A, B)$, que prova la unicitat de la regla d'assignació amb aquestes propietats.

(b) **Existència:** És suficient veure que la regla d'assignació definida com: $\gamma^{CI}(N, v, A, B) = \Phi(v^{AB})$, $\forall (N, v, A, B) \in CI(N)$ verifica les propietats d'eficiència i de justícia per A i B.
Sigui $(N, v, A, B) \in CI(N)$ i considerem, $\forall S \in N/A$ el joc u^S tal que

$$u^S(T) = \textstyle\max_{P \in P(T \cap S,A,B)} \sum_{U \in P} v(U), \; \forall T \subset N.$$

És fàcil veure que $v^{AB} = \sum_{S \in N/A} u^S$ i que S és portador de u^S. Utilitzant l'axioma de portabilitat de Shapley [1953], $\forall\, S, T \in N/A$,

$$\sum_{i \in S} \Phi_i(u^T) = \begin{cases} \text{si } S = T, & u^T(N) \\ \text{si } S \neq T, & 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Sigui $S \in N/A$. Utilitzant l'additivitat del Valor de Shapley,

$$\sum_{i\in S}\Phi_i(u^{AB}) = \sum_{i\in S}\sum_{T\in N/A}\Phi_i(u^T) = \sum_{T\in N/A}\sum_{i\in S}\Phi_i(u^T)$$

$$= u^S(N) = \max_{P\in P(S,A,B)}\sum_{U\in P} v(U).$$

Veiem que γ^{CI} compleix l'eficiència.
Per veure que es compleix la propietat de justícia per B agafem $i : j \in (A \cup B)^*$ i considerem el joc $w := v^{AB} - v^{A(B\cup i:j)}$. Resulta fàcil veure que $w(S) = 0$, $\forall\ S$ tal que $i \notin S$ o bé $j \notin S$.
Aleshores per simetria tenim $\Phi_i(w) = \Phi_j(w)$ i per tant utilitzant l'additivitat,

$$\Phi_i(v^{AB}) - \Phi_i(v^{A(B\cup i:j)}) = \Phi_j(v^{AB}) - \Phi_j(v^{A(B\cup i:j)}).$$

Per veure que es compleix la propietat de justícia per A agafem $i : j \in A$. Definim $w := v^{AB} - v^{(A\setminus i:j)B}$. Resulta fàcil veure que $w(S) = 0$, $\forall\ S$ tal que $i : j \subsetneq S$.
Aleshores si $i \notin S$ o bé $j \notin S$, tenim $w(S) = 0$, i per simetria i additivitat tenim $\Phi_i(w) = \Phi_j(w)$. Finalment,

$$\Phi_i(v^{AB}) - \Phi_i(v^{(A\setminus i:j)B}) = \Phi_j(v^{AB}) - \Phi_j(v^{(A\setminus i:j)B}).$$

6 Aplicació a l'estudi de formacions post-electorals.

Saber qui governarà després d'unes eleccions no resulta tan fàcil com comptar el nombre de vots obtinguts per a cada candidat i buscar qui n'ha obtingut més. Els resultats finals dependran del que passi entre els diferents partits i no sempre el "guanyador" serà el que ha obtingut més vots en les eleccions a la pràctica.
En aquestes situacions, la Teoria de Jocs proporciona noves idees per al tractament d'aquestes situacions.
La idea és aportar una component de racionalitat matemàtica a una secció important de l'anàlisi política. A partir dels resultats reals i dels teòrics es pot fer una comparació instructiva ja coincideixin o no els resultats obtinguts amb la realitat.
La finalitat ara, és estudiar, a partir de la Teoria de Jocs cooperatius i aplicant conceptes ja introduïts anteriorment que restringeixen la cooperació; la formació de coalicions de govern. Quines coalicions es poden formar? Anem a fonamentar el criteri utilitzat en la selecció de les possibles coalicions.
Es consideraran restriccions de caràcter ideològic en la distribució del poder i el resultat final de la negociació. Aquestes seran d'afinitat, generalitzant la idea de connexions ideològiques en un espectre unidimensional i situacions d'incomptibilitats, essent aquesta més radical que l'anterior. Les restriccions, tal i com hem vist, les representarem mitjançant grafs i introduirem aquesta informació externa modificant l'estructura formal original.
Es consideraran unes hipòtesis inicials en el joc:
(1) Perfecta disciplina de vot en cada grup parlamentari.
(2) Les decisions del cos colegiat són del tipus binari.
(3) S'exigeix majoria absoluta per l'aprovació.
(4) Els partits tendeixen a formar coalicions guanyadores minimals si cap d'ells aconsegueix la majoria absoluta.

El nostre joc serà un joc simple; si un partit o un conjunt de partits té poder de decisió assignarem el valor 1, i en canvi, si no el té, el valor 0.
Examinem primer el cas de les eleccions del parlament Basc després de les eleccions celebrades el 30 de novembre del 1986 estudiat per Francesc Carreras i Guillermo Owen com a exemple introductori i després apliquem el mateix procediment a altres casos més pròxims i actuals [6].

6.1 Parlament Basc 1986.

En els resultats electorals obtinguts després de les eleccions del 30 de novembre del 1986 amb la participació del 70% sobre un cens de 1.650.686 votants es distribueixen els 75 escons de la forma següent:

Partit	**Escons**
PSE	19
PNV	17
EA	13
HB	13
EE	9
CP	2
CDS	2

Donat que la majoria absoluta en aquest cas és 38 escons, l'estructura formal del Parlament basc és el joc de majories ponderades on:

$$N = \{\text{PSE,PNV,EA,HB,EE,CP,CDS}\}$$

$$[38; 19, 17, 13, 13, 9, 2, 2]$$

A partir de la taula amb els resultats d'escons obtinguts i analitzant totes les combinacions entre els partits, les coalicions guanyadores minimals d'aquest joc sense considerar cap tipus de restricció a la cooperació són les següents:

$$\{\text{PSE,PNV,EA}\},\ \{\text{PSE,PNV,HB}\},\ \{\text{PSE,PNV,EE}\},\ \{\text{PSE,PNV,CP}\},$$

$$\{\text{PSE,PNV,CDS}\},\ \{\text{PSE,EA,HB}\},\ \{\text{PSE,EA,EE}\},\ \{\text{PSE,HB,EE}\},\ \{\text{PNV,EA,HB}\},$$

$$\{\text{PNV,EA,EE}\},\ \{\text{EA,HB,EE,CP,CDS}\}$$

Anem primer a calcular el Valor de Shapley, per tal de veure la diferència entre el repartiment d'escons i el repartiment del poder segons Shapley.
Només caldrà considerar aquelles coalicions on l'adhesió del jugador i a la coalició la faci guanyadora i aquesta no ho era sense ell; ja que per a tota altra coalició:

(1) $T \subseteq N$ tal que $i \notin T$, i es compleix que $T \notin W$ i $T \cup \{i\} \notin W$, obtenim:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) = 0 - 0 = 0$$

(2) $T \subseteq N$ tal que $i \notin T$ que ja són guanyadores abans de l'adhesió del jugador i, és a dir, $T \in W$ i $T \cup \{i\} \in W$ obtenim:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) = 1 - 1 = 0$$

(3) L'opció $T \in W$ i $T \cup \{i\} \notin W$ no serà possible ja que el joc que estem considerant és un joc superadditiu.

Recordem la definició del Valor de Shapley:

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Finalment com $(v(S \cup \{i\}) - v(S)) = 0,1$

$$\Phi_i(v) := \sum_{T \subseteq N \setminus W,\ T \cup \{i\} \in W} \frac{|T|!(n-|T|-1)!}{n!},$$

només considerant aquelles coalicions $T \in N$ tals que $i \notin T$ les fa guanyadores.

Anem a calcular el cas $i =$CDS. Les coalicions $T \subseteq N$ que hem de considerar són:{PSE,PNV} i {EA,JB,EE,CP}. Ara,

$$\Phi_{CDS}(v) := 2\tfrac{2!4!}{7!} = 0,0190$$

Seguim el mateix procediment per CP. Les coalicions que considerem són: {PSE,PNV} i {EA,HB,EE,CDS}

$$\Phi_{CP}(v) := 2\tfrac{2!4!}{7!} = 0,0190$$

D'aquesta manera obtindríem els valors de Shapley per a cada partit. A l'establir les retriccions per tal d'obtenir el Valor Modificat considerem el comportament històric previ dels partits i les manifestacions efectuades pels seus líders als mitjans de comunicació durant el període de negociació.
Es consideren les següents incompatibilitats:

PSE/HB, PSE/CP, HB/EE, HB/CP,

assignant probabilitat nul·la a qualsevol coalició que contingui algun d'aquests parells. Ara, les coalicions guanyadores minimals que superen el test d'admissibilitat són:

{PSE,PNV,EA}, {PSE,PNV,EE}, {PSE,PNV,CDS}, {PSE,EA,EE},

{PNV,EA,HB}, {PNV,EA,EE}

Calculem de nou el Valor de Shapley incorporant la informació adicional incorporada a l'estudi.
Ara doncs, el calcularem sobre la regla d'assignació v^B, essent B el graf de les incompatibilitats definides.
Farem servir "Python" per confeccionar els càlculs, tant els del Valor de Shapley Formal com els del Valor Modificat amb el graf B. El codi confeccionat pels càlculs realitzats al llarg de l'estudi es troba en l'Annex 1.
Els resultats obtinguts en els càlculs són els següents:

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor Modificat
PSE	0,2533	0,2524	0,2333
PNV	0,2267	0,2524	0,3167
EA	0,1733	0,1524	0,2333
HB	0,1733	0,1524	0,0333
EE	0,1200	0,1524	0,1500
CP	0,0267	0,0190	0
CDS	0,0267	0,0190	0,0333

Podem veure com el nombre d'escons del PNV és menor al del PSE, però el valor afegit que aporten a coalicions segons el Valor de Shapley és el mateix. Finalment considerant les rectriccions definides i calculant de nou el Valor de Shapley observem com li pertoca més valor en la repartició del benefici al PNV que al PSE; d'aquesta manera tot i tenir inicialment menys escons, el seu potencial de poder és superior, passant a ser el partit principal.
També observem com tenint inicialment el mateix nombre d'escons els partit EA i HB, el seu Valor Modificat assigna un valor molt superior al primer, deixant a l'altre en possició inferior juntament amb el CDS.
El CP, tot i haver obtingut 2 escons en els resultats electorals, segons el Valor Modificat el seu poder és nul, degut a la impossibilitat de participació en coalicions guanyadores minimals.
Finalment el partit EE, tot i tenir menys escons que HB obté un Valor Modificat superior degut a la millor capacitat de negociació en el joc amb els altres jugadors.

Posteriorment Francesc Carreras i Guillermo Owen fan una anàlisi dels valors coalicionals per a cada coalició minimal resultant per tal d'obtenir la coalició més problable que es pugui donar.
En aquesta anàlisi es considera el repartirment del benefici entre els membres de cada coalició per tal de seleccionar per a cada partit aquella coalició que maximitzi la seva utilitat.
No entrarem en aquests resultats ja que en aquest treball ens centrem simplement en l'estudi dels grafs que defineixen l'estructura de cooperació entre els jugadors.

6.2 Eleccions Municipals, Lleida 2015

Davant la no obtenció de la majoria absoluta per part del PSC en els resultats de les eleccions municipals del 2015 a l'ajuntament de Lleida, anem a estudiar a partir dels resultats electorals les possibles coalicions post-electorals.

Partit	**Escons**
PSC	8
CiU	6
C's	4
ERC	3
CUP	2
PP	2
Comú de Lleida	2
Total	27

Definim el joc de majories ponderades següent:

$$N = \{\text{PSC, CiU, C's, ERC, CUP, PP, Comú de Lleida}\} \qquad [14; 8, 6, 4, 3, 2, 2, 2]$$

Ara, aplicant el mateix procediment que en el cas anterior, anem a comparar els escons obtinguts amb el Valor de Shapley Formal i a continuació el Valor de Shapley Modificat considerant certes restriccions a la cooperació en l'àmbit d'incompatibilitats.

Considerant que a Lleida el PSC està molt lluny de l'independentisme i recentment hi han hagut varies tensions amb els partits ERC i la CUP, establim la hipòtesi d'incompatibilitat entre el PSC i aquests dos partits.
Analitzem els partits participants en el joc segons 4 categories per establir les incompatibilitats: Corrupció, Idependentisme, Ideologia i Tradició històrica.

PSC- Partit dels Socialistes a Catalunya:
Corrupció- Sensació creixent d'insatisfacció per la gestió recent de les institucions.
Independentisme- No són independenstistes però encara no està clara la seva posició davant d'un conflicte d'aquest estil. Visió federal de l'Estat Espanyol.
Ideologia- Liberals en temes socials i social-demòcrates en temes econòmics.
Tradició històrica- No s'han fet gaires coalicions a nivell municipal, però s'han fet pactes puntuals amb CiU i amb el PP, exceptuant el temps del tripartit on els socis principals van ser Iniciativa per Catalunya Verds - Esquerra Unida i Alternativa (ICV - EUiA) i ERC.

CiU- Convergència i Unió:
Corrupció- Possiblement el partit amb més persones vinculades als casos de corrupció a Catalunya. Partit que es vincula amb la corrupció del 3% a Catalunya.
Independentisme- Independentisme moderat des del 2012.
Ideologia- Neoliberal en temes econòmics i conservadors en el sentit social.
Tradició històrica- Tradicionalment ha pactat amb el PP i amb el PSC.

C's- Ciutadans:
Corrupció- Partit amb poc bagatge i no està directament vinculat amb la corrupció.

Independentisme- Nacionalistes espanyols.
Ideologia- Neoliberalisme.
Tradició històrica- No tenen tradició històrica en aquest moment.

ERC- Esquerra Republicana de Catalunya:
Corrupció- Involucrats en alguns casos de corrupció a nivell local.
Independentisme- Independentistes amb llarga tradició.
Ideologia- Social-demòcrates i liberals.
Tradició històrica- Fora del cercle de poder exceptuant el tripartit (pacten amb ICV-EUiA i PSC).

CUP- Candidatura d'Unitat Popular:
Corrupció- Bagatge a nivell local no vinculat amb la corrupció.
Independentisme- Si.
Ideologia- Intenten promoure un canvi en el sistema actual.
Tradició històrica- No havien tingut mai representació a l'ajuntament de Lleida.

PP- Partit Popular:
Corrupció- Involucrats en casos de corrupció estatal.
Independentisme- Nacionalistes espanyols.
Ideologia- Neoliberalisme conservador.
Tradició històrica- Pactes a Catalunya amb CiU i PSC.

Comú de Lleida:
Corrupció- Partit de nova formació no implicat en casos de corrupció.
Independentisme- Bases indefinides.
Ideologia- Moviment que pretèn recullir les demandes del 15M.
Tradició històrica- No té tradició històrica.

Les incompatibilitats en relació a les 4 categories considerades en l'estudi són les següents:

PSC/ERC, PSC/CUP, PP/ERC, PP/CUP, C's/ERC, C's/CUP,

PP/Comú de Lleida, C's/Comú de Lleida, CiU/Comú de Lleida

Ara, anem a estudiar les coalicions guayadores minimals; primer, sense considerar el graf d'incompatibilitats definit i després afegint aquestes incompatibilitats al tractament del joc.

Les coalicions guanyadores minimals per al joc Formal són:

{PSC, CiU}, {PSC, C's, ERC}, {PSC, C's, CUP}, {PSC, C's, PP},

{PSC, C's, Comú de Ll.}, {PSC, ERC, CUP, PP},

$$\{\text{PSC, ERC, CUP, Comú de Ll.}\}, \{\text{PSC, ERC, PP, Comú de Ll.}\},$$

$$\{\text{ PSC, CUP, PP, Comú de Ll.}\}, \{\text{PSC, CUP, PP, Comú de Ll.}\},$$

$$\{\text{CiU, C's, ERC, CUP}\}, \{\text{CiU, C's, ERC, PP}\}, \{\text{CiU, C's, ERC, Comú de Ll.}\},$$

$$\{\text{CiU, ERC, CUP, PP, Comú de Ll.}\}.$$

Considerant les incompatibilitats definides en el graf B reduïm les coalicions guanyadores minimals a les següents i realitzem els càlculs del Valor Formal i Modificat:

$$\{\text{PSC, CiU}\}, \{\text{PSC, C's, PP}\}.$$

Partit	% **Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat**
PSC	0,2963	0,3619	0,5833
CiU	0,2222	0,2286	0,25
C's	0,1481	0,1619	0,0833
ERC	0,1111	0,0619	0,0
CUP	0,0741	0,0619	0,0
PP	0,0741	0,0619	0,0833
Comú de Lleida	0,0741	0,0619	0,0

El PSC apareix en les 2 úniques coalicions guanyadores minimals, de manera que es dedueix que aquest partit tindrà el poder o almenys una part important del poder en l'ajuntament de Lleida. Observant els valors obtinguts en la taula veiem que tot i tenir un nombre d'escons inferior al 30% del total d'escons, el Valor Modificat de Shapley ens dona un nombre d'escons superior al 50%, és a dir, a la pràctica actuarà com si hagués obtingut la majoria absoluta.

D'altra banda en el cas dels partits ERC, CUP i Comú de Lleida, el valor assignat per Shapley en el Valor Modificat és nul. Això és degut a la impossibilitat de formar coalicions minimals guanyadores a causa de les incompatibilitats definides en el graf B.

Finalment, comparant les 2 coalicions possibles, podríem suposar que el PSC no coalicionaria amb un partit que tingués gran part dels escons si no fos necessari, degut a que això podria limitar el seu poder. En aquest cas podent obtenir la majoria absoluta comptant amb partits de poca representació otorgaria més domini al PSC.
Contràriament sempre seran preferibles les coalicions amb el menor nombre de partits necessaris tal i com hem establert en les hipòtesis inicials del joc. Aleshores sembla coherent que el PSC coalicioni amb CiU per formar govern.

El resultat real donat a la ciutat de Lleida no ha estat cap govern de coalició; però tot i així el PSC obté el suport de C's i del PP. Aquests tres partits negocien un acord d'investidura però no de governabilitat. La negociació amb aquests partits enlloc de CiU, pot ser deguda al caire independentista d'aquest últim partit i a la polèmica actual respecte a aquesta temàtica.

6.3 Eleccions Parlamentàries, Catalunya 2015

A partir d'aquestes eleccions parlamentàries comença a crèixer amb més força el moviment independentista a Catalunya.
Els resultats de les eleccions són els següents:

Partit	**Escons**
JxSi	62
C's	25
PSC	16
PP	11
CSQP	11
CUP	10
Total	135

On:
JxSi representa el la candidatura "Junts pel Sí" formada per la coalició de Convergència Democràtica de Catalunya (CDC) i Esquerra Republicana de Catalunya (ERC).

CSQP representa la candidatura "Catalunya Sí que es Pot", integrada per la coalició de Podem, Iniciativa per Catalunya Verda (ICV), Esquerra Unida i Alternativa (EUiA) i Equo. Posteriorment a les noves eleccions al Parlament del 2017 la candidatura serà Catalunya en Comú - Podem.

Els altres partits de la taula han estat definits anteriorment en el cas de les eleccions municipals de Lleida.

Donat que cap de les candidatures obté la majoria absoluta considerem el joc de majories ponderades següent:

$$N = \{\text{JxSi, C's, PSC, PP, CSQP, CUP}\} \qquad [68; 62, 25, 16, 11, 11, 10]$$

En aquest joc tenim les següents coalicions guanyadores:

$$\{\text{JxSi, C's}\}, \{\text{JxSi, PSC}\}, \{\text{JxSi, PP}\}, \{\text{JxSi, CSQP}\}, \{\text{JxSi, CUP}\}$$

$$\{\text{C's, PSC, PP, CSQP, CUP}\}.$$

Definim el graf d'incompatibilitats entre els jugadors per tal de restringir les coalicions guanyadores minimals a aquelles possibles. Les incompatibilitats les considerem a partir d'una categoria clau en aquestes eleccions: el caràcter independentista de cada partit. Els partits independentistes per excel·lència són: JxSi i CUP.

JxSi/C's, JxSi/PSC, JxSi/PP, JxSi/CSQP, C's/CUP, PP/CUP, PSC/CUP

L'única coalició minimal resultant d'aplicar les restriccions definides és {JxSi, CUP}. Ara, aplicant els càlculs del Valor de Shapley Formal i el Valor Modificat obtenim els resultats expressats en la taula següent:

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat**
JxSi	0,4593	0,6667	0,5
C's	0,1852	0,0667	0,0
PSC	0,1185	0,0667	0,0
PP	0,0815	0,0667	0,0
CSQP	0,0815	0,0667	0,0
CUP	0,0741	0,0667	0,5

El Valor Formal reflexa com tot i haver obtingut diferents vots i en conseqüència diferents escons cada partit, tots ells exceptuant JxSi, tenen la mateixa aportació de valor a les coalicions que es poden realitzar i actuen amb un mateix perfil estratègic (sense considerar les restriccions). Les seves úniques coalicions que els permeten formar govern seria amb el partit guanyador: JxSi, i entre tots ells conjuntament excluïnt JxSi; (C's, PSC, PP, CSQP, CUP).
Aquest conjunt de jugadors acuten en el joc com a jugadors simètrics a l'hora de formar coalicions: (C's, PSC, PP, CSQP, CUP).
Afegint les imcompatibilitats observem com ara la coalició de tots ells ja no és possible i només CUP pot formar govern amb JxSi d'acord amb el graf B. Així doncs el Valor Modificat reparteix el poder al 50% entre els partits JxSi i CUP que són els únics que poden formar govern.

És curiós veure com tot i que en el Valor Formal la CUP obté el mateix resultat que tots els altres partits (exceptuant JxSi), indistintament del nombre d'escons aconseguits en les eleccions, i aquest valor és bastant reduït; a l'aplicar les incompatibilitats passa a tenir el 50% del poder. Tot i tenir un nombre reduït d'escons el valor afegit que aporta és molt alt.
Així és que la CUP va aprofitar aquest valor afegit davant de JxSi per tal d'imposar certes exigències que finalment i després de molta negociació JxSi accepta. Aleshores es forma la coalició JxSi i CUP quan Carles Puigdemont passa a substituir Artur Mas com a President de la Generalitat de Catalunya.

6.4 Eleccions Parlamentàries, Catalunya 2017

Analitzem el cas de les eleccions del 21 de desembre del 2017 a Catalunya.

Realitzada la declaració unilateral de independència a Catalunya, el president del Govern central ha decidit en virtut de l'aplicació de l'article 155 de la Constitució cessar tot el govern, disoldre el Parlament autonòmic i convocar eleccions autonòmiques pel dia 21 de desembre del 2017.

Els partits participants que són els següents: JuntsxCat (integrants dels partits PDeCat- Partit Demócrata Europeu Català i CDC-Convergència Democràtrica de Catalunya), CUP, Ciutadans, ERC-CatSi, PSC, PP, CeC (Catalunya en Comú) - Podem.

Els resultats electorals han estat els següents:

Partit	**Escons**
C's	36
JxCat	34
ERC	32
PSC	17
CeC	8
CUP	4
PP	4
Total	135

$$N = \{\text{C's, JxCat, ERC, PSC, CeC, CUP, PP}\} \qquad [68; 36, 34, 32, 17, 8, 4, 4]$$

Les coalicions guanyadores minimals són:

$$\{\text{C's, JxCat}\}, \{\text{C's, ERC}\}, \{\text{C's, PSC, CeC, CUP, PP}\}, \{\text{JxCat, ERC, PSC}\},$$

$$\{\text{JxCat, ERC, CeC}\}, \{\text{JxCat, ERC, CUP}\}, \{\text{JxCat, ERC, PP}\}$$

Realitzem els càlculs del Valor de Shapley i el Valor Modificat considerant les restriccions següents en funció principalment del caràcter independentista i ideològic de cada partit (graf B):

C's/JxCat, C's/ERC, C's/CUP, JxCat/PP, ERC/PP, PSC/CUP, CUP/PP

Ara, les coalicions minimals, considerant les incompatibilitats són:

$$\{\text{JxCat, ERC, PSC}\}, \{\text{JxCat, ERC, CeC}\}, \{\text{JxCat, ERC, CUP}\}.$$

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat B**
C's	0,2666	0,3524	0,0
JxCat	0,2519	0,2857	0,45
ERC	0,2370	0,2857	0,45
PSC	0,1259	0,019	0,0333
CeC	0,0593	0,019	0,0333
CUP	0,0296	0,019	0,0333
PP	0,0296	0,019	0,0

Observem en la taula que tot i haver guanyat les eleccions el partit C's una vegada aplicat el graf d'incompatibilitats al càlcul del Valor Modificat, aquest resulta ser nul. Això és degut a que amb les incompatibilitats considerades C's no pot formar coalicions guanyadores amb cap jugador i per tant se li otorga el valor 0. El mateix passa amb el PP.
Finalment, JxCat i ERC apareixen en les 3 úniques coalicions guanyadores minimals considerades i per tant es repartiran gran part del poder obtenint un mateix valor degut a la mateixa situació en l'àmbit de les coalicions. Entre el PSC, CeC i la CUP la situació és la mateixa i reparteixen el valor restant a parts iguals indiferentment dels escons obtinguts.

Definim ara el graf d'afinitats A.
Considerant que el PSC s'ha posicionat a favor de l'aplicació de l'article 155 davant la polèmica que s'ha generat amb l'independentisme a Catalunya, s'excluirà l'afinitat que els partits ERC i PSC han pogut tenir en altres situacions.
L'esquema de les afinitats considerades és el següent:

JxCat/ERC, CUP/JxCat, ERC/CUP, C's/PP, PSC/CeC, PSC/PP, PSC/C's,

CeC/JxCat, CeC/ERC

En aquest exemple les coalicions guanyadores minimals són:

{C's, JxCat, PSC, CeC}, {C's, ERC, PSC, CeC}, {JxCat, ERC, CeC},

{JxCat, ERC, CUP}

Al no considerar incompatibilitats, es dona el cas que partits que es troben units pel graf B anterior apareixen ara en una mateixa coalició guanyadora. Això és degut a l'afinitat d'aquests dos partits no afins amb un mateix partit. Aquest partit resulta ser CeC i en conseqüència obtindrà uns millors resultats en el repartiment del benefici.
Els resultats obtinguts dels càlculs són els següents:

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor Modificat B	Valor Modificat A
C's	0,2666	0,3524	0,0	0,1
JxCat	0,2519	0,2857	0,45	0,2667
ERC	0,2370	0,2857	0,45	0,2667
PSC	0,1259	0,019	0,0333	0,1
CeC	0,0593	0,019	0,0333	0,1833
CUP	0,0296	0,019	0,0333	0,0833
PP	0,0296	0,019	0,0	0,0

Al no considerar les incompatibilitats definides, els partits JxCat i ERC perden valor en el repartiment del benefici degut a que ara C's i PSC poden formar coalicions

guanyadores.
El PP segueix sense tenir la possibilitat de participar en alguna coalició minimal i aleshores mantenim el mateix valor modificar que se li otorgava a través del graf B.

Què passaria ara, si consideressim els dos grafs A i B conjuntament? En aquest cas reduïm les coalicions guanyadors minimals a aquestes dues, degut a que el PSC no és afí ni amb JxCat ni amb ERC segons el graf A:

$$\{\text{JxCat, ERC, CeC}\}, \{\text{JxCat, ERC, CUP}\}$$

Els resultats obtinguts ara són els següents:

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor M. B**	**Valor M. A**	**Valor M. A-B**
C's	0,2666	0,3524	0,0	0,1	0,0
JxCat	0,2519	0,2857	0,45	0,2667	0,4167
ERC	0,2370	0,2857	0,45	0,2667	0,4167
PSC	0,1259	0,019	0,0333	0,1	0,0
CeC	0,0593	0,019	0,0333	0,1833	0,0833
CUP	0,0296	0,019	0,0333	0,0833	0,0833
PP	0,0296	0,019	0,0	0,0	0,0

JxCat i ERC perden una possibilitat de coalició i en conseqüència perden valor assignat. D'altra banda ara es reparteixen el valor restant entre CeC i CUP.
Podríem qüestionar de decisió d'haver considerat afins els partits JxCat/CeC i ERC/CeC ja que d'entrada no seran incompatibles però la tendència inicial de cooperació per a JxCat i ERC serà CUP i no CeC. En aquest sentit podríem eliminar aquestes afinitats obtenint una única coalició guanyadora tant en el cas de considerar només al graf A, com considerant ambdós grafs: {JxCat, ERC, CUP}. Realitzem de nou els càluls mantenint el mateix graf B definit en el cas anterior:

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor M. B**	**Valor M. A**	**Valor M. A-B**
C's	0,2666	0,3524	0,0	0,0	0,0
JxCat	0,2519	0,2857	0,45	0,3333	0,3333
ERC	0,2370	0,2857	0,45	0,3333	0,3333
PSC	0,1259	0,019	0,0333	0,0	0,0
CeC	0,0593	0,019	0,0333	0,0	0,0
CUP	0,0296	0,019	0,0333	0,3333	0,3333
PP	0,0296	0,019	0,0	0,0	0,0

Considerant com única coalició guanyadora {JxCat, ERC, CUP}, els resultats per al Valor Modificat amb el graf d'afinitats és el mateix que afegint el grafs d'incompatibilitats als càlculs. El benefici queda repartit entre els tes partits participants en la coalició.

Ara bé, en quan a mètode d'actuació, la CUP és un partit que no té tendència a cooperar amb cap partit en concret degut a una ideologia molt pròpia. En aquest sentit, en una temàtica concreta podria cooperar amb jugadors espontàneament, com en aquest cas, amb ERC i JxCat per la búsqueda de la independència; però també podria donar-se el cas que decidís possicionar-se en contra o absternir-se afavorint en aquest cas els partits d'ideologies contraposades.
Intentem doncs expressar aquest possicionament de la CUP canviant totalment el punt de vista a partir de considerar-lo un partit afí amb qualsevol i sense cap incompatibilitat amb ningú. La idea de considerar-lo afí amb qualsevol partit va relacionada amb la idea que la CUP no té lligams especials amb cap jugador concret.

Graf B: C's/JxCat, C's/ERC, JxCat/PP, ERC/PP

Graf A: JxCat/ERC, CUP/JxCat, ERC/CUP, C's/PP, PSC/CeC, PSC/PP, PSC/C's, CeC/JxCat, CeC/ERC, CUP/PSC, CUP/PP, CUP/C's, CUP/CeC

Les coalicions guanyadores minimals són:

{C's, PSC, CeC, CUP, PP}, {JxCat, ERC, PSC},

{JxCat, ERC, CeC}, {JxCat, ERC, CUP}

Tots els jugadors participen com a mínim en una de les coalicions guanyadores minimals i per tant, en els resultats que s'obtindran cap d'ells tindrà assignat el valor 0.

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor M. B	Valor M. A	Valor M. A-B
C's	0,2666	0,3524	0,0571	0,1762	0,0571
JxCat	0,2519	0,2857	0,3071	0,1429	0,1905
ERC	0,2370	0,2857	0,3071	0,1429	0,1905
PSC	0,1259	0,019	0,0905	0,0095	0,0571
CeC	0,0593	0,019	0,0905	0,0095	0,0571
CUP	0,0296	0,019	0,0905	0,5095	0,3905
PP	0,0296	0,019	0,0571	0,0095	0,0571

Aquestes consideracions del graf A on la CUP es afí amb qualsevol partit li donen una gran part del poder en relació als escons obtinguts.

En resum, i basant-nos en els grafs considerats i els resultats analitzats, l'única coalició guanyadora minimal, o almenys la més probable, és {JxCat, ERC, CUP}; en la qual depèn del tercer partit que es pugui o no formar govern i també d'aquest el triomf del sector independentista davant els partits en contraposició a aquesta ideologia. Com a mínim el el valor assignat a la CUP és d'un 33% del poder degut a la seva possició estratègica en relació amb els altres jugador en el joc; tot i no haver obtingut ni el 3% dels escons en els resultats electorals.

7 Conclusions

L'objectiu de l'estudi ha estat intentar calcular el resultat d'un joc considerant possibles cooperacions entre els jugadors i restriccions a aquestes cooperacions respresentades mitjançant grafs.

En els casos estudiats: Eleccions Municipals de Lleida i eleccions Parlamentàries de Catalunya dels anys 2015 i 2017, els resultats assolits coincideixen significativament amb la realitat. Tot i que els resultats de l'últim cas estan per veure, a través dels mitjans de comunicació es parla de la coalició entre els partits CUP, ERC, JxCat.

La restricció a la cooperació exemplificada mitjançant grafs resulta una forma útil d'estudi en jocs cooperatius. Poder comparar els resultats obtinguts a partir de les restriccions definides; el valor anomenat "Valor Modificat"amb el Valor de Shapley clàssic de la Teoria de Jocs, que hem anomenat "Valor Formal", permet comparar els efectes que produeixen les restriccions considerades. D'altra banda, també resulta força interessant comparar ambdós resultats amb els resultats reals del joc, és a dir, amb el nombre d'escons obtingut per a cada partit.

El resultat del joc que s'ha calculat a partir de considerar dos grafs: un d'ells d'afinitats entre els jugadors i tendència a cooperar entre ells i l'altre d'incompatibilitats entre ells i doncs, impossibilitat per a cooperar; i un joc simple de majories ponderades, suposa un exemple molt clar i senzill d'aplicació de la teoria estudiada en el treball.

No tots els jugadors tindran la mateixa tendència a cooperar amb cada un dels altres jugadors. A partir d'aquí la complicació es troba en establir bé les hipòtesis de cooperació inicialment, d'acord amb la situació real.
Ara bé, podríem seguir introduint restriccions a la cooperació de diferent caràcter, per tal d'intentar representar amb més exactitud la realitat i exemplificar altres jocs més sofisticats, o bé enfocar aquestes restriccions des d'un altre punt de vista. Un exemple a considerar podrien ser tendències de cooperació representades en un sol sentit. És a dir, es podria donar el cas que un partit concret tingués interès a cooperar amb un altre, però aquest no amb ell, establint cooperacions lligades amb unidireccionalitat.

Paral·lelament, les eines facilitades en el treball es poden aplicar, utilitzant un mateix mètode d'estudi de coalicions, en la predicció de possibles cooperacions enfocades a qualsevol altre joc fora de l'àmbit polític, on tingui sentit considerar la cooperació entre alguns dels jugadors participants.

El Valor Formal o Valor de Shapley aplicat, així com també el Valor Modificat introduït, ens informa del valor afegit que aporta cada jugador en coalicions, i per tant suposa una possible repartició del benefici obtingut en la cooperació justa i eficient. A més en el nostre exemple al tractar amb jocs superadditius també resulta ser una regla de repartiment del benefici estable. D'altra banda, el Valor Modificat a través d'establir restricions a la cooperació ens pot aportar una aproximació més encertada considerant la situació real.

En la realització d'aquest treball he pogut aprendre les moltes aplicacions que té la Teoria de Jocs. Qualsevol situació on es doni una lluita d'interessos entre agents pot tractar-se a partir de la Teoria de Jocs afegint al joc totes les restriccions necessàries per tal que la situació real quedi correctament descrita i es pugui estudiar obtenint uns resultats més pròxims a la realitat.

8 Annex 1

Codi "Python"per al càlcul del Valor de Shapley Formal i el Valor Modificat considerant les restriccions d'incompatibilitats, d'afinitats i ambdues alhora.

```
from itertools import combinations
import math as m

def sorted_k_partitions(seq, k):

    n = len(seq)
    groups = []  # a list of lists, currently empty

    def generate_partitions(i):
        if i >= n:
            yield list(map(tuple, groups))
        else:
            if n - i > k - len(groups):
                for group in groups:
                    group.append(seq[i])
                    yield from generate_partitions(i + 1)
                    group.pop()

            if len(groups) < k:
                groups.append([seq[i]])
                yield from generate_partitions(i + 1)
                groups.pop()

    result = generate_partitions(0)

    # Sort the parts in each partition in shortlex order
    result = [sorted(ps, key = lambda p: (len(p), p)) for ps in result
        ]
    # Sort partitions by the length of each part, then
        lexicographically.
    result = sorted(result, key = lambda ps: (*map(len, ps), ps))

    return result
```

```
DADES

#ENTRAR ELS ESCONS DE CADA PARTICIPANT
valor_escons = [36, 34, 32, 17, 8, 4, 4]

#ENTRAR LES INCOMPATIBILITATS DE CADA PARTICIPANT
B = {1:[2,3], 2:[1,7], 3:[1,7], 4:[0], 5:[0], 6:[0], 7:[2,3]}

#ENTRAR LES AFINITATS DE CADA PARTICIPANT
A = {1:[7,4,6], 2:[3,6], 3:[2,6], 4:[1,5,7,6], 5:[4,6],
    6:[1,2,3,4,5,7], 7:[1,4,6]}

"""Precalcul de les variables necessaries per dur a terme les funcions
    seguents"""

n = len(valor_escons) #nombre de participants

N = list(range(1, n+1)) #llista amb els participants
escons_totals = sum(valor_escons) # valor total dels escons

#calcul de tots els subconjunts de participants
s = []
for i in range(n):
    s.extend(list(combinations(N,i+1)))


def valor_v(partits):
    """partits: iterable amb els partits a puntuar junts
        -----
        retorna 0 si la suma dels escons dels partits no supera la 
    majoria i
        1 altrament"""

    escons = 0
    for p in partits:
        escons += valor_escons[p-1]
    if (escons >= (escons_totals//2)+1 ):
        return 1
    return 0


def valor_v_b(partits):
    """partits: iterable amb els partits a puntuar junts considerant
        incompatibilitats
        -----
        retorna 0 o 1 depenent de si alguna de les combinacions de 
    partits
        te valor 1 en la funcio valor_v() només per aquelles 
    combinacions B
        admisibles"""

    s_b = []
    n_participants = len(partits)
    #per a cada particio de partits p
    for k in range(1,n_participants+1):
```

```
        for p in sorted_k_partitions(list(partits), k):
            valid = True
            #per a cada agrupacio de partits dins de la particio p
            for group in p:
                #per a cada partit en l'agrupacio group dins la particio p
                for i in range(len(group)-1):
                    #comprobem la incopatibilitat amb la resta del seu grup en la particio p
                    if any(x in group for x in B[group[i]]):
                        valid = False
            #si tots els grups son valids afegim la particio per a ser tractada despres.
            if valid:
                s_b.append(p)
    m = []
    #per cada particio p
    for p in s_b:
        suma = 0
        #per cada grup k en la particio p
        for k in p:
            #calculem el valor V(k) i el sumem al valor de la particio
            suma += valor_v(k)
        m.append(suma)
    return max(m)

def valor_v_a(partits):
    solucio = []
    spartits = partits.copy()
    while(spartits):
        elem = spartits.pop()
        f = []
        f.append(elem)
        afins = []
        for k in A[elem]:
            if k in partits:
                afins.append(k)
        for afi in afins:
            if afi not in f and afi in partits:
                f.append(afi)
                spartits.remove(afi)
            for k in A[afi]:
                if k not in f and k not in afins and k in partits:
                    afins.append(k)
        solucio.append(f)
    suma = 0
    for parcial in solucio:
        suma += valor_v(parcial)
    return suma

def valor_v_ab(partits):
    """ partits: iterable amb els partits a puntuar junts considerant
       incompatibilitats
       ------
       retorna 0 o 1 depenent de si alguna de les combinacions de
```

```
    partits
␣␣␣␣␣␣␣␣te␣valor␣1␣en␣la␣funcio␣valor_v()␣només␣per␣aquelles␣
    combinacions␣B
␣␣␣␣␣␣␣␣admisibles"""

␣␣␣␣s_b␣=␣[]
␣␣␣␣n_participants␣=␣len(partits)
␣␣␣␣#per␣cada␣particio␣de␣partits␣p
␣␣␣␣for␣k␣in␣range(1,n_participants+1):
␣␣␣␣␣␣␣␣for␣p␣in␣sorted_k_partitions(list(partits),␣k):
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣valid␣=␣True
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣#per␣cada␣agrupacio␣de␣partits␣dins␣de␣la␣particio␣p
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣for␣group␣in␣p:
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣#per␣cada␣partit␣en␣l'agrupacio group dins la particio
     p
                for i in range(len(group)-1):
                    #comprobem la incopatibilitat amb la resta del seu
                        grup en la particio p
                    if any(x in group for x in B[group[i]]):
                        valid = False
            #si tots els grups son valids afegim la particio per a ser
                tractada despres.
            if valid:
                for k in p:
                    pro = list(k)
                    cua = []
                    cua = cua + A[pro.pop(0)]
                    while(pro and cua):
                        jugador = cua.pop(0)
                        if jugador in pro:
                            pro.remove(jugador)
                            cua = cua + A[jugador]
                    if pro:
                        valid = False
                if valid:
                    s_b.append(p)
    m = []
    #per cada particio p
    for p in s_b:
        suma = 0
        #per cada grup k en la particio p
        for k in p:
            #calculem el valor V(k) i el sumem al valor de la particio
            suma += valor_v(k)
        m.append(suma)
    return max(m)


def valor_shapley(jugador):
    s_subconjunt = []
    for t in s:
        if jugador not in t:
            s_subconjunt.append(t)
    n_fact = m.factorial(n)
    sumatori = 0
```

```
    for t in s_subconjunt:
        primer_terme = (m.factorial(len(t))*m.factorial(n-len(t)-1))/
            n_fact
        segon_terme = valor_v(t+(jugador,))-valor_v(t)
        sumatori += (primer_terme*segon_terme)
    return round(sumatori,4)


for i in range(n):
    print(valor_shapley(i+1))

def valor_shapley_b(jugador):
    s_subconjunt = []
    for t in s:
        if jugador not in t:
            s_subconjunt.append(t)
    n_fact = m.factorial(n)
    sumatori = 0
    for t in s_subconjunt:
        primer_terme = (m.factorial(len(t))*m.factorial(n-len(t)-1))/
            n_fact
        segon_terme = valor_v_b(t+(jugador,))-valor_v_b(t)
        sumatori += (primer_terme*segon_terme)
    return round(sumatori,4)

for i in range(n):
    print(valor_shapley_b(i+1))

def valor_shapley_a(jugador):
    s_subconjunt = []
    for t in s:
        if jugador not in t:
            s_subconjunt.append(t)
    n_fact = m.factorial(n)
    sumatori = 0
    for t in s_subconjunt:
        primer_terme = (m.factorial(len(t))*m.factorial(n-len(t)-1))/
            n_fact
        segon_terme = valor_v_a(list(t+(jugador,)))-valor_v_a(list(t))
        sumatori += (primer_terme*segon_terme)
    return round(sumatori,4)

for i in range(n):
    print("Jugador " + str(i+1) +": ",valor_shapley_a(i+1))

def valor_shapley_ab(jugador):
    s_subconjunt = []
    for t in s:
        if jugador not in t:
            s_subconjunt.append(t)
    n_fact = m.factorial(n)
    sumatori = 0
    for t in s_subconjunt:
        primer_terme = (m.factorial(len(t))*m.factorial(n-len(t)-1))/
            n_fact
```

```
        segon_terme = valor_v_ab(list(t+(jugador,)))-valor_v_ab(list(t
            ))
        sumatori += (primer_terme*segon_terme)
    return round(sumatori,4)

for i in range(n):
    print("Jugador " + str(i+1) +": ",valor_shapley_ab(i+1))

print("Valor de Shapley:")
for i in range(n):
    print("Jugador " + str(i+1) +": ",valor_shapley(i+1))
print("Valor de Shapley incompatibilitats:")
for i in range(n):
    print("Jugador " + str(i+1) +": ",valor_shapley_b(i+1))
print("Valor de Shapley afinitats:")
for i in range(n):
    print("Jugador " + str(i+1) +": ",valor_shapley_a(i+1))
print("Valor de Shapley modificat absolut:")
for i in range(n):
    print("Jugador " + str(i+1) +": ",valor_shapley_ab(i+1))
```

Referències

[1] González-Díaz, Julio; García-Jurado, Ignacio; Fiestras-Janeiro, M. Gloria: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, American Mathematical Society, 2010.

[2] Pérez, Joaquín; Jimeno, José Luis; Cerdá, Emilio: *Teoría de Juegos*, 2ª edició, Ibergarceta Publicaciones S.L., Madrid 2013.

[3] Myerson, Roger B.: *Graphs and cooperation in games* Northwestern University, Mathematics of Operations Research, 2 No 3, August 1977.

[4] Amer, Rafel; Carreras, Francesc: *Games and Cooperations Indices*, International Journal of Game Theory, 24: 239-258, 1995.

[5] Bergantiños, Gustavo; Carreras, Francesc; García-Jurado, Ignacio: *Cooperation when some players are Incompatible*, Methods and Models of Operation Research, 38: 187-201, 1993.

[6] Carreras, Francesc; Owen, Guillermo: *Valor Coalicional y estrategias Parlamentarias*, Reis: 157-176, 1995.

[7] Magaña, Antonio: *Els jocs cooperatius amb utilitat transferible.* Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques: 21-33, 1998.

[8] Monsalve, Sergio: *John Nash y la teoría de juegos.* Lecturas matemáticas, 24: 137-149, 2003.