Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

Cadenes de Markov aplicades als Sistemes Bonus-Malus.

Autor: Weiyi Xu Wang

Director:	**Dr. Josep Vives**
	Dra. M. Mercè Claramunt Bielsa
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica**
	Departament de Matemàtica Económica Financiera i Actuarial

Barcelona, 19 de gener de 2018

Abstract

Insurance world is reinventing itself every time there are new technologies or people meet new needs. People want fair prices in accordance with their needs, but is it easy to give a price of a service that none knows how much could cost?

This degree project studies Markov chains to apply them in Bonus-Malus Systems (BMS). Firstly, we will study how BMS works. Secondly, an analysis of some tools to compare different BMS will be carry out. Finally, we will see some doubts and questions that professionals face when they create and optimize it.

Resum

El món de les assegurances s'està reinventant cada vegada que sorgeixen noves tecnologies o noves necessitats. Les persones volen preus justos d'acord a les seves necessitats. Però és tan fàcil donar un preu a un servei que no es sap el cost que podria arribar a tenir?

En aquest treball s'estudia les cadenes de Markov per després poder-les aplicar als sistemes Bonus-Malus (SMB). Estudiarem el funcionament del SBM i algunes eines per comparar diferents SBMs. Per acabar veurem alguns dels problemes i dubtes que s'han trobat mentre es creaven i s'optimitzaven.

Agraïments

Vull agrair el suport que m'han donat els meus tutors Josep Vives i M. Mercè Claramunt per la seva paciència.

Vull agrair als meus companys i superiors de les pràctiques per tot el que m'han ensenyat aquests mesos.

Vull agrair a la meva familia i als meus amics totes les experiències que he viscut fins ara.

Índex

Índex de taules

1 Introducció

L'utilització dels processos estocàstics permet el càlcul de probabilitats al llarg del temps. Sabent la informació del passat i del present podem extreure una informació de com pot ser el futur. Les cadenes de Markov es caracteritzen per ser processos estocàstics discrets que només necessiten la informació de l'estat actual per calcular la probabilitat de l'estat futur. Aquest fet permet l'ús en diferents camps com la biologia, la química i l'economia.

En aquest projecte es separa en dos grans blocs.

Primerament es realitzarà un estudi de les cadenes de Markov. Es definiran uns quants conceptes bàsics, principalment de probabilitats. Seguidament s'introduiran les cadenes de Markov. Veurem les seves propietats i com es classifiquen els estats entre recurrents i transitiu. Per acabar aquest primer bloc, veurem algunes propietats dels estats recurrents definint l'estat estacionari i realitzarem una breu introducció als estats transitius.

El segon bloc tracta d'una de les aplicacions de les cadenes de Markov, els sistemes Bonus-Malus (SBM). Donarem una segona introducció quan parlem del SBM i veurem com les cadenes de Markov han millorat els sistemes de tarificació de les assegurances.

2 Desenvolupament

2.1 Conceptes bàsics

Definició 2.1. ***Espai de probabilitats***
Un espai de probabilitats és una terna (Ω, F, P) *on:*
-Ω *és un conjunt no buit d'esdeveniments anomenat espai mostral.*
-F *és una* σ*-àlgebra sobre* Ω.
-P *és una funció sobre* F *que compleix:*

$$P : F \to \{0, 1\}$$
$$A \to P(A)$$

i verifica els axiomes de Kolmogorov:
-$P(\Omega)=1$
-$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \{n\}_{i=1}^{A_i} \subset F$ *disjunts dos a dos, llavors,*
-$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Definició 2.2. ***Espai mesurable***
Un espai mesurable és el doblet (Ω, F) *descrit en la definició anterior.*

Definició 2.3. σ***-àlgebra***
Una σ*-àlgebra soble* Ω *és una familia* $\sum$ *no buida de subconjunts de* ω *que compleix:*
$-\phi \in \sum$ $-\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \sum, \cup_{i=1}^{\infty} A_i) \subset \sum$.

Definició 2.4. ***Probabilitat condicionada***
La probabilitat condicionada d'un esdeveniment A condicionat per B es defineix com

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definició 2.5. ***Esdeveniments independents***
Dos esdeveniments A i B són independents si i només si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observació 2.6.
Si dos esdeveniments són independents, llavors,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Definició 2.7. ***Variable aleatòria***
Una variable aleatòria és una funció $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $\forall a \in \mathbb{R}$, *l'esdeveniment* $\{X \leq A\} = \{\omega; X(\omega) \leq a\}$ *se li pot assignar una probabilitat.*
Aquesta variable aleatòria pot ser discreta o contínua però suposarem que serà discreta en aquesta memòria.

Definició 2.8. ***Esperança matemàtica***
L'esperança matemàtica d'una variable aleatòria discreta X, es defineix com:

$$E\{X\} = \sum_{x \in X} x \cdot P(X = x)$$

Definició 2.9. ***Esperança condicionada***
Siguin X i Y dos variables aleatòries. L'esperança matemàtica de X condicionada per Y=y es defineix com:

$$E\{X|Y = y\} = \sum_{x \in X} x \cdot P(X = x, Y = y)$$

Definició 2.10. ***Graf***
Un graf està format per un conjunt V d'elements anomenats vèrtexs i un conjunt de A de parells d'elements de V, anomenats arcs.
Es diu que existeix un camí del vèrtex i al vèrtex j si existeix un conjunt de vèrtexs $i_1, ..., i_n \in V$ *tal que* $(i, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_n, j)$ *són arcs d'A.*

Definició 2.11. ***Test χ^2 de Pearson***
El test de χ^2 de Pearson és una prova no paramètrica que medeix la discrepància entre una distribució observada i una distribució teòrica mitjançant un test d'hipòtesis amb

H_0 *: Les distribucions són iguals.*
H_1 *: Les distribucions són diferents.*

Sigui $N = (n_1, \ldots, n_n)$ *la distribució d'unes observacions i* $NP = (np_1, \ldots, np_n)$ *l'estimació realitzada sobre les observacions definida per una probabilitat que ve donada en funció de k variables. El estadístic del test ve donat per*

$$\chi^2 = (\sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i(i = x_1; x_2, \ldots, x_k)^2}{np_i(i = x_1; x_2, \ldots, x_k)}) \cdot (n-1) \cdot (k-1)$$

on

$$NP(\cdot; x_2, \ldots, x_k) : F \subset \mathbb{N} \rightarrow [0, \sum_{i=1}^{n} n_i]$$

$$NP(i = x_1; x_2, \ldots, x_k) = np_i(i; x_2, \ldots, x_k) = p(x = i|x_2, \ldots, x_k)(\sum_{j=1}^{n} n_j)$$

Observació 2.12.
L'hipòtesis nula s'acceptarà quan l'estadístic χ^2 sigui menor a un valor $\chi^2_{gl;0.95}$ amb un error del 5% en funció dels graus de llibertat definits per

Graus de llibertat:=gl=(n-1)·(k-1)

gl	$\chi^2_{gl;0.95}$
1	3.841
2	5.991
3	7.815
4	9.488
5	11.07
6	12.592
7	14.067
8	15.507
9	16.919
10	18.307
11	19.675
12	21.026

Taula 1: χ^2 en funció dels gl
Font: "*http://labrad.fisica.edu.uy/docs/tabla_chi_cuadrado.pdf*"

2.2 Cadenes de Markov-Introducció

Definició 2.13. ***Procés estocàstic***
Un procés estocàstic es defineix com una colecció de variables aleatòries $\{X(t) : t \in T\}$ *en un espai de probabilitats* (Ω,F,P) *on* T *és un subconjunt de* $[0,\infty)$*. Si* T *és homeomorf a un subconjunt de* $\mathbb{N}$ *es diu que* $\{X(t) : t \in T\}$ *és un procés discret en el temps mentre que si* T *és homeomorf a* $[0,\infty)$ $\{X(t) : t \in T\}$ *és un procés continu en el temps.*

Definició 2.14. ***Cadena de Markov***
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un procés estocàstic discret que pren valors un conjunt finit o numerable. Llavors es diu que és una cadena de Markov si i només si*

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P_{ij}(n+1)$$

Definició 2.15. ***Cadena de Markov homogènia***
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una cadena de Markov. Llavors es diu que és homogènia si i només si és independent de n. Llavors*

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comentari.
En cas de que no es digui el contrari, a partir d'ara considerarem tots els estats es troben en una cadena de Markov homogènia.

Observació 2.16. Matriu de transició
Sigui S=$\{k_i; i = 1, 2, ...\}$ el conjunt finit o numerable de possibles estats de X_n. Llavors podem veure que podem representar el conjunt de probabilitats $p_{k_ik_j}$ en una matriu de transició. La definim com la matriu P.

Definició 2.17. ***Equacions de Chapman-Kolmogorov***
La probabilitat d'arribar a un estat j començant des d'un espai i en n transicions es defineix com

$$P^n_{ij} = P(X_{n+k} = j|X_k = i)$$

Per calcular aquesta probabilitat definim les equacions de Chapman-Kolmogorov on

$$P^{n+m}_{ij} = \sum_{k\in S} P^n_{ik}P^m_{kj}, \ \forall i, j \in S.$$

Observació 2.18. Cadenes de Markov aplicades a grafs
Podem definir un graf en una cadena de Markov on els vèrtexs són el conjunt d'estats i els arcs són el conjunt de parelles d'estats accessibles.

2.3 Cadenes de Markov-Classificació

Definició 2.19. ***Accessibilitat***
Un estat j es diu que és accessible per un estat i si i només si existeix un $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $P_{ij}^n > 0$.

Definició 2.20. ***Comunicació***
Dos estats es comuniquen si són accessibles entre ells.

Observació 2.21.
Un estat es comunica amb si mateix perquè $P^0 = Id$.

Proposició 2.22.
La relació de comunicació entre estats és una relació d'equivalència.

Demostració.
Reflexiva: Per l'observació anterior la relació és reflexiva.
Simètrica: Si un estat i es comunica amb un estat j llavors són accessibles entre si i per tant j es comunica amb i.
Transitiva: Si i es comunica amb j i j comunica a k, llavors i es comunica amb k com a mínim passant per j.

Definició 2.23. ***Estats recurrents i transitoris***
Sigui f_i *la probabilitat que començant per l'estat i torni a entrar a i en algun moment. Si* f_i*=1 es diu que i és un estat recurrent, mentre que si* f_i *<1 llavors i és un estat transitori.*

Proposició 2.24.
Un estat i és recurrent si i només si començant per l'estat i, el nombre de períodes esperat que es trobarà en l'estat i és infinit.

Demostració.
Suposem que l'estat i és recurrent i que el procés comença a l'estat i. Com que la probabilitat de tornar és 1 el procés eventualment tornarà a l'estat i. Per la definició de cadena de Markov el procés comença de nou en l'estat implicant que tornarà en algún moment a l'estat i. Per contínua repetició es té que tornarà a l'estat i infinitament.
Per altra banda suposem que l'estat i és transitori. Per cada vegada que el procés torna a l'estat i es té que la probabilitat que no torni mai més és 1-f_i. *Veiem que la probabilitat de que el procés torni a l'estat i exactament n vegades és* $f_i^{n-1}(1-f_i), n \geq 1$. *En altres paraules, si l'estat i és transitori, llavors el nombre de períodes que el procés està en l'estat i té una distribució geomètrica amb mitjana finita de valor* $f_i/(1-f_i)$.

Proposició 2.25.
Sigui $P_{ii} = P(X_{n+k} = i|X_k = i)$. *Un estat i és recurrent si* $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$ *i en canvi és transitiu si* $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$.

Demostració.
Definim

$$I_n = \begin{cases} 1 & si \quad X_n = i \\ 0 & si \quad X_n \neq i \end{cases}$$

On $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ *és el nombre d'instants que el procés es troba en l'estat i. Per altra banda*

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n|X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[I_n|X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P\left[X_n = i|X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \frac{f_i}{1-f_i}$$

On per la definió (2.21) s'ha demostrat l'enunciat.

Observació 2.26.
La proposició anterior ens demostra l'existència d'estats recurrents en tota cadena de Markov finita.
Si tots els estats d'una cadena de Markov finita fossin transitius, llavors al cap d'un número finit de instants cap estat seria visitat.

Corol·lari 2.27.
Un estat i és recurrent i es comunica amb un estat j. Llavors l'estat j és recurrent.

Demostració.
Per definició si l'estat i es comunica amb l'estat j, existeixen k, m$\in \mathbb{N}$ *tals que* $P_{ij}^k > 0$ *i* $P_{ji}^m > 0$. *Llavors, per les equaciones de Chapman-Kolmogorov:*

$$P_{jj}^{m+n+k} = \sum_{x=0}^{\infty} P_{jx}^m P_{xj}^{k+n} \geq P_{ji}^m P_{ij}^{k+n} = P_{ji}^m \sum_{x=0}^{\infty} P_{ix}^n P_{xj}^k \geq P_{ji}^m P_{ii}^n P_{ij}^k$$

Ara bé, per la proposició anterior tenim que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_{ji}^m P_{ii}^n P_{ij}^k = \infty$$

i per tant, j és un estat recurrent.

Observació 2.28. Cadena de Markov irreductible
Pel corol·lari anterior veiem que els estats són una propietat de classe. Si dos estats es comuniquen són els dos recurrents o els dos transitius. Llavors com que no tots els estats d'una cadena de Markov són transitius, es pot veure que al cap d'un cert instant de temps, tots els estats són recurrents. Diem que una cadena de Markov és irreductible si tots els estats es comuniquen entre ells.

Definició 2.29. ***Cadena de Markov és irreductible***
Una cadena de Markov és irreductible si tots els estats es comuniquen entre ells.

2.4 Cadenes de Markov-Probabilitats limitades

Definició 2.30. ***Període***
Un estat i té període d si per tot $n \in \mathbb{N}$, n no és divisible per d. Els estats amb període 1 es diuen estats aperiòdics.

Definició 2.31. ***Recurrencia positiva***
Un estat i recurrent és positivament recurrent si el temps esperat per tornar a l'estat i començant per l'estat i és finit.
Un estat i és ergòdic si es aperiòdic i positivament recurrent.

Observació 2.32.
En una cadena de Markov finita i irreductible tots els estats recurrents són positivament recurrents.

Teorema 2.33.
En una cadena de Markov finita, homogènia, irreductible i ergòdica, el $lim_{m\to\infty} P_{ij}^m$ existeix i és independent d'i. Definint

$$\pi_j = lim_{m\to\infty} P_{ij}^m, \quad j \geq 0$$

on π_j és la solució no negativa de

$$\pi = P\pi$$

$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1$$

Definim π l'estat estacionari de P.

Abans de començar amb la demostració veurem uns teoremes.

Proposició 2.34.
Sigui $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal i $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compacte. Llavors si $F(\Omega) \subset Int(\Omega)$, llavors $\forall x_0 \in \Omega$ $lim_{n\to\infty} x_n = 0$ definida per la successió $x_n = F(x_{n-1})$

Demostració.
$F(\Omega) \subset Int(\Omega) \Rightarrow \forall x \in \partial\Omega\ \exists \delta(x)$ *tal que* $F(x) \in (1-\delta)\Omega$.
Llavors sigui $L = max_{x\in\partial\Omega}\{\delta(x)\}$. *Al ser una aplicació lineal en un compacte,* $\forall x \in \Omega F(x) \in F(\Omega) \subset (1-L)\Omega$ *i* $lim_{n\to\infty} F^n(x) = 0$

Teorema 2.35. ***Teorema del punt fix de Brower***
Tota aplicació contínua d'un convexo compacto no buit K d'un espai euclidià a valors en K, admet un punt fix.

Demostració. *(2.33)*

Existència

Sigui $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n = 1\}$.

$$Px = (\sum_{i=1}^n P_{i1}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^n P_{in}x_i) = (y_1, \ldots, y_n)$$

on

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P_{ij}x_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n P_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 1 = 1$$

Llavors,

$$\forall x \in K,\ Px \in K$$

I pel teorema de Brower existeix un punt fix que és l'estat estacionari. Ara falta veure que π_j *és el límit de* P_{ij}^n.

Sigui

$$\Omega = \{x - \pi :\ x \in K\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n y_i = 0\}$$

Llavors,

$$\partial\Omega = \{x - \pi :\ x \in K,\ \exists\ i\ tal\ que\ x_i = 0\}$$

Com que P *és aperiòdic llavors* $\forall x \in K\ \exists n \in N$ *tal que* $P^n x \in\ Int(\Omega)$ *Per la proposició (2.34),* π *és el límit de la successió definida per* $x_n = Px_{n-1}$.

Unicitat

Suposem que $\exists\ \pi\ i\ \pi'$ *solucions del sistema diferents. Llavors sigui*

$$\delta = min\{\frac{\pi_j}{\pi'_j} : j \in \{1, ..., n\}\} > 0$$

Llavors

$$\pi* = \frac{\pi - \delta\pi'}{1 - \delta} \in [0, 1]^n$$

és solució del sistema. Però aquesta solució té un estat amb valor igual a 0. Això implica que aquest estat es troba incomunicat dels demés que es contradiu amb l'hipòtesis inicials. Per tant, π *és únic.*

Observació 2.36.

Podem veure que π és el vector propi de valor propi 1 i l'únic vector propi amb valor propi real perquè tots els estats es comuniquen entre ells i la norma vectorial-1 es manté constant. Pel teorema anterior el vector propi de valor propi 1 és constant.

2.5 Cadenes de Markov-Temps mig en estats transitius

Sigui $T = \{1, ..., t\}$, $t \in \{t \in \mathbb{N} : t < \infty\}$, el conjunt d'estats transitius d'una cadena de Markov finita (suposem que $\{t+1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, són els estats recurrents de la cadena de Markov).
Sigui P_T definit com

$$P_T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{t1} & P_{t2} & \cdots & P_{tt} \end{bmatrix}$$

Veiem que P_T només defineix probabilitats entre estats transitius i per tant almenys una de les files té suma menor a 1. Si no fos així, existiria algun estat recurrent. Definim s_{ij} com el nombre esperat de períodes que la cadena de Markov es troba l'estat j començant a l'estat i. Sigui δ_{ij}=1 quan i=j i 0 en cas contrari. Llavors

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} P_{ik} s_{kj} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{t} P_{ik} s_{kj} \tag{2.1}$$

En la segona part de l'equació diem que si k es recurrent, llavors s_{kj}=0 ja que és impossible d'anar des d'un estat recurrent a un estat transitiu.
Definim S la matriu de de valors s_{ij}

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt} \end{bmatrix}$$

que es pot escriure com

$$S = I + P_T S$$

on I és la matriu identit de tamany t. Arreglant l'equació tenim que

$$(I - P_T)S = I \Rightarrow S = (I - P_T)^{-1}$$

Donat que el determinant de P_T és més petit en valor absolut que 1, llavors podem afirmar l'existència de S.

3 Bonus-Malus

3.1 Introducció

En aquest últim segle, la tecnologia ha evolucionat exponencialment. Un clar exemple és l'evolució dels automòbils que dels milers que existien a principis del segle XX han passat a més de 400 milions a finals del segle XX. Desafortunadament com a conseqüència d'aquest increment també ha incrementat el nombre d'accidents i morts. Aquest fet ha donat lloc a l'obligatorietat per llei de contractar una pòlissa a tercers en la majoria dels països desenvolupats, on actuaris de tot el món intenten disenyar la millor estructura de tarificació per tal de distribuir el cost dels sinistres entre tots els assegurats.

La tarifació es defineix com el procés de determinació de primes per tal que es corresponguin als sinistres a pagar. La tarifació constitueix una de les activitats més importants del sector assegurador. S'entén per tarifa les primes comercials que paga l'assegurat i inclou:

- Prima pura o tècnica: Definida com el cost que pot suposar els sinistres de l'assegurat amb les condicions que s'han declarat en la pòlissa. Inclou tant el cost mateix del sinistre com tots aquells relacionats com els que ocasionen els pèrits i el procediment.
- Despeses internes: Provenen de l'administració de l'activitat asseguradora. Inclou els salaris i les despeses d'oficina, entre altres.
- Despeses externes: Provenen de les despeses relacionades amb l'activitat comercial. Inclouen tant les depeses per arribar al client com els descomptes comercials.
- Impostos i altres recàrrecs complementaris a pagar a entitats públiques.

La suma de la prima tècnica i les despeses internes i externes es coneix com la prima neta o de tarifa.

L'objectiu de la tarifació és aconseguir una prima equitativa per a cada risc tenint en compte la solvència i la solidaritat entre els asseguradors. Això implica:

- Equitat: Cada assegurat pagua el risc que li pertoca.
- Solvència: Les primes han de ser suficients per a que l'empresa sigui rentable.
- Solidaritat: Un repartiment del risc on la gent amb menys risc paguin una mica més per tal de que la gent amb més risc paguin una prima més baixa. En determinades ocasions els objectius d'equitat i solidaritat entren amb conflicte com és el cas de les pòlisses d'automòbils i motocicletes.

La tarifació es pot classificar en:

A priori o *Class-rating*: Cada risc es separa en diferents classes donada una sèrie de característiques i se li assigna una prima en funció d'aquestes essent la prima el resultat de la sinistralitat esperada. No es té cap experiència sobre la sinistralitat d'aquest risc excepte en alguns casos com és el fitxer SINCO.

A posteriori o *Experience-rating*: Aquella que suposa l'existència d'una prima inicial que es va modificant en base a l'experiència de sinistralitat d'aquella pòlissa per a donar a lloc a la prima dels períodes successius.

3.1.1 Tarificació a priori

En els països més desenvolupats s'han utilitzat diferents classificacions a l'hora de donar una prima a un assegurat. Aquests criteris han de ser suficients per ser considerats equitatius i a la vegada evitar una selecció adversa del risc. Un exemple és el cas de les assegurances de vida on s'utilitzen variables com l'edat, el gènere (en 2012 la UE va prohibir el seu us com a variable tarificadora), l'ocupació i els hàbits de vida entre altres.

En el procés de tarificació podem distingir tres fases, més una inicial.

- Fase 0: Homogeneïtzació i depuració de dades. Normalment les dades obtingudes per l'aplicació d'un mètode estadístic-matemàtic són de poca qualitat i per tant un mètode sotisficat es poc eficient.
- Fase 1: Definir els factors de risc i seleccionar les variables tarificadores y les classes de tarifa.
- Fase 2: Obtenció dels grups de tarifa.
- Fase 3: Estimació de les primes.

Aquestes fases no són independents, de forma que hi han models i mètodes que serveixen per a totes les fases o diverses al mateix temps.

3.1.2 Tarificació a posteriori

En alguns casos la tarificació a priori no és suficient per ser justos amb cada assegurat ni pot evitar una selecció adversa del risc. Un cas clar són les assegurances d'automòbils, on les asseguradores no han pogut influir en gran mesura a una reducció dels accidents en carretera. S'ha demostrat que les pòlisses de tot risc tenen una freqüencia més alta que les pòlisess a tercers. En aquests casos el millor indicador de la classe pertinent d'un assegurat són els sinistres que ha tingut en el passat.

3.1.3 Sistemes Bonus-Malus

Els sistemes Bonus-Malus de classes tractats amb cadenes de Markov, constitueixen un dels mètodes més usuals d'introduir modificadors en la tarifa en funció de l'experiència sinistral del propi assegurat. En aquest apartat estudiarem els principals aspectes d'aquests sistemes Bonus-Malus (SBM).

Des d'un punt de vista pràctic els SBM de classes consisteixen en un sistema de rebaixes i increments que depenen del número de sinistres que ha tingut l'assegurat. Es denominen classes perquè defineixen un conjunt d'estats per on pot passar l'assegurat. L'objectiu d'aquest sistema és penalitzar als assegurats que han tingut sinistres amb un increment en la prima o *malus* i premiar als assegurats que no han tingut cap sinistre amb un descompte en la prima o *bonus*. L'objectiu, a part de incentivar una millor atenció al conduir, és estimar de la millor manera a llarg termini una prima que es correspongui al risc de cada assegurat.

Per poder estudiar els SBM, farem una sèrie de suposicions per tal de poder comparar models i sistemes de diferents països al llarg del temps.

- Suposarem SBM aplicats les pòlisses d'automòbils perquè és el mercat més estudiat en SBM.
- Únicament es tindrà en compte l'assegurança a tercers i la garantia de responsabilitat civil perquè poden variar respecte a les pòlisses de tot risc o pòlisses amb assistència a la carretera,... La raó principal és que tenen funcions de probabilitat diferent i ens obligaria a buscar funcions de probabilitat diferents. El conductor és únic i és considerat l'habitual en la pòlissa.
- Es consideraran únicament a vehicles normals (turismes de gama mitjana-baixa) ja que en alguns països existeixen SBM especialitzats per altres vehicles com taxis, ciclomotors i ambulàncies.
- Quan un assegurat té un accident aquest es declararà i no es tindrà en compte l'import del sinistre. Ademés suposarem que tant la probabilitat de tenir un sinistre com l'estructura dels SBM no varia en el temps. Les suposicions d'aquest punt es comentaran en les seccions successives.

Els SBM no són perfectes i l'idea d'utilitzar-los té grans inconvenients. El principal problema és que van en contra d'alguns principis del significat d'una assegurança:

- **Garantia d'estabilitat econòmica:** L'objectiu de les assegurances és protegir el risc de tenir un accident definit per una variable aleatòria a canvi de pagar una prima fixa. El punt dèbil dels SBM és que es substitueix una variable aleatòria per un altra amb una dispersió més petita.
- **Cooperació i solidaritat:** Els assegurats amb poc sinistres ajuden a pagar els sinistres dels assegurats que sí en tenen. Amb la tarificació a posteriori aquesta ajuda es menys significativa.

- **Llei dels grans nombres:** En un principi les pòlisses s'ajunten formant una cartera. Teòricament, el que una pòlissa tingui un sinistre és insignificant perquè s'ha tingut en compte dintre de la variable aleatòria que defineix el risc.

Però gràcies als avantatges que té i a la gran acceptació per part de la població, la majoria de països ha introduït el SBM. La tarificació a priori que realitzen les asseguradores són molt exhaustives per tal de no perdre bons clients o tenir una selecció adversa. Aquest fet implica que els sistemes a posteriori en països desenvolupats no necessitin ser molt sofisticats.

3.2 Definició i exemples de sistemes Bonus-Malus

Per l'aplicació del SBM ens situem dintre d'un mateix grup de tarifa a priori, amb una determinada prima de referència o prima base. Dintre d'aquest grup de tarifa els assegurats es classifiquen dintre d'un nombre finit de classes corresponent cada una a un nivell de prima anual, que s'expressa com un percentatge de la prima inicial de referencia.

Un SBM queda definit per:

1. El nombre de classes finit: s
2. El vector de nivells de prima b=($b_1, ..., bs$), on b_i és la prima.
3. La classe d'entrada: i_0
4. Les regles de transisió d'una classe o un altra en funció del nombre de sinistres que ha tingut.

Aquests elements d'un SBM es poden resumir el taula

Classe	Nivell de primes	Classe després de ... siniestres				
i	b_i	0	1	2	$\dots$	+n
s	b_s	a_{s0}	a_{s1}	a_{s2}	$\dots$	a_{sn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i_0	b_{i_0}	a_{i_00}	a_{i_01}	a_{i_02}	$\dots$	a_{i_0n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
1	b_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}

Taula 2: Canvi de classe
Font: Boj, Claramunt, Costa (2017)

on $\exists$ n$\in \mathbb{N}$ tal que

- $\{a_{ij} : i \in \{0, ..., s\},\ j \in \{1, ..., n-1\}\} \subset \{1, ..., s\}$
- $\forall i \in \{1, ..., s\}$ $a_{in} = s$ i normalment $a_{i0} = max\{1, i-1\}$
- $a_{1(n-1)} \neq s$
- $\forall i \in \{0, ..., s\}$ $\forall j_1 < j_2 \in \{1, ..., n\}$ $(a_{ij_1} < a_{ij_2}$ o $a_{ij_1} = a_{ij_2} = s)$
- $\forall i_1 < i_2 \in \{0, ..., s\}$ $j \in \{0, ..., n\}$ $b_{i_1} \leq b_{i_2}$ i $a_{i_1j} \leq a_{i_2j}$

Sigui N la variable aleatòria del nombre de sinistres en un període. La matriu de transició M es defineix com:

$$M = \{p_{ij}\} \in M_{s\ x\ s}(\mathbb{R}),$$

on si $\exists$ k $\in \{1, ..., n\}$ tal que $a_{kj} = i$ llavors $p_{ij} = P(N = k)$ o $p_{ij} = P(N > n)$ $(si\ k = n)$. En cas contrari $p_{ij} = 0$.

Exemples

SBM d'Irlanda
La taula recull les característiques d'un SBM d'Irlanda, on la classe d'entrada és la 6.

Classe	Nivell de primes	Classes després de ... sinistres		
i	b_i	0	1	2+
6	100	5	7	7
5	90	4	6	7
4	80	3	5	7
3	70	2	5	7
2	60	1	4	6
1	50	1	4	6

Taula 3: SBM clàssic d'Irlanda
Font: Boj, Claramunt, Costa (2017)

SBM el Regne Unit
La taula recull les característiques d'un SBM del Regne Unit, on la classe d'entrada és la 7.

Classe	Nivell de primes	Classes després de ... sinistres			
i	b_i	0	1	2	3+
7	100	6	7	7	7
6	75	5	7	7	7
5	65	4	6	7	7
4	55	3	5	7	7
3	45	2	5	7	7
2	40	1	4	6	7
1	35	1	4	6	7

Taula 4: SBM clàssic del Regne Unit
Font: Boj, Claramunt, Costa (2017)

SBM de Brasil

La taula recull les característiques d'un SBM de Brasil, on la classe d'entrada és la 7.

Classe	Nivell de primes	Classes després de ... sinistres						
i	b_i	0	1	2	3	4	5	6+
7	100	6	7	7	7	7	7	7
6	75	5	7	7	7	7	7	7
5	65	4	6	7	7	7	7	7
4	55	3	5	6	7	7	7	7
3	45	2	4	5	6	7	7	7
2	40	1	3	4	5	6	7	7
1	35	1	2	3	4	5	6	7

Taula 5: SBM clàssic SBM de Brasil
Font: Boj, Claramunt, Costa (2017)

3.3 Distribució estacionaria d'un SBM

Un element crucial per un SBM és el comportament asimptòtic de les probabilitats de que un assegurat que entri avui estigui en les diferents classes al cap de n períodes. Tornem primer a les cadenes de Markov en general.

El nombre de sinistres que pot tenir un assegurat en un període (normalment d'1 any) ha de complir les següents suposicions:

1. $P(N_{n,n+1} = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$,on $\lambda > 0$ i $N_{n,n+1}$ és el nombre de sinistres entre el període n i el període n+1.
2. $P(N_{n,n+1} > 2) = o(\Delta t)$
3. $\forall \tau, \tau'$ intervals disjunts de temps, $P(N_\tau = k \cap N_{\tau'} = k')$=$P(N_\tau = k) \cdot P(N_{\tau'} = k')$

Que volen expressar:

1. El nombre de sinistres és directament proporcional al període de temps.
2. La probabilitat de tenir dos o més sinistres és insignificant.
3. Els sinistres són independents entre els períodes de temps.

Llavors la millor distribució que determina el nombre de sinistres és la Poisson. Recordem que la distribució d'una Poisson és:

$$P(N = k) = p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

on λ és la mitjana de sinistres.

És correcte considerar que els sinistres segueixen una distribució Poisson? Per comprovar-ho es va agafar la cartera de pòlisses a tercers d'una companyia asseguradora de Bèlgica (Lemaire, J. (1995)) amb una mitjana de sinistres de 0.1010806.

k	n_k
0	96978
1	9240
2	704
3	43
4	9
>4	0
Total	106974

Taula 6: Distribució observada del nombre de sinistres per pòlissa d'una cartera. Font: Lemaire, J. (1995)

I desprès es va realitzar un test de chi-quadrat amb hipòtesis nula que les dades segueixen una Poisson amb mitjana 0.1010806.

k	n_k	np_k
0	96978	96689.6
1	9240	9773.5
2	704	493.9
3	43	16.6
4	9	0.4
>4	0	0
Total	106974	106974

Taula 7: Distribució observada del nombre de sinistres per pòlissa d'una cartera
Font: Lemaire, J. (1995)

En aquestes distribucions (Taula 7) la probabilitat és fa molt petita a partir de cert n. Per tant, només és necessari calcular la probabilitat de tenir 0,1,...,n-1 sinistre (on la probabilitat de tenir n sinistres o més és la part restant.

L'estimació va ser molt pobre amb $\chi^2_{calc} = 1680 > \chi^2_{5;0.95} = 11.07$. Visualment veiem que ens falta massa a la cua. Aquest fet ens pot indicar que probablement un conductor que ha tingut sinistres és més propens a tenir més sinistres en un futur.

D'aquest fet van aparèixer diferents models de Poisson mixtes on λ no és una constant sinó una variable aleatòria. Llavors

$$p_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot u(\lambda) d\lambda$$

i la funció u està definida per dos variables, una de les quals és la mitjana λ i un altre estimador a que és en funció de la variança. De les diferents funcions u trobades, algunes probabilitats resultants són:

1. Binomial negativa

$$p_k(a, \tau) = \binom{k+a-1}{k} p^a q^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

on p=$\dfrac{\tau}{1+\tau}$, q=1-p, â=$\dfrac{\overline{x}^2}{s^2 - \overline{x}}$ i t̂=$\dfrac{a}{\overline{x}}$.

2. Inversa Gaussiana
$$p_0 = exp\{\frac{g}{h}(1-(1+2h)^{1/2})\}$$
$$p_1 = gp_(1+2h)^{-1/2}$$
$$(1+2h)k(k-1)p_k = h(k-1)(2k-3)p_{k-1} + g^2 p_{k-2}$$
i $\hat{\text{g}}$=$\overline{x}$ i $\hat{\text{h}}$=(s^2/x)-1 amb la condició que $\hat{\text{h}}>0$

3. Model del bon i del mal risc. Aquí considerem que un percentatge a_1 de la cartera són bons assegurats (o conductors) amb freqüència λ_1 i la resta ($a_2 = 1 - a_1$) són mals conductors amb freqüència λ_2.
$$p_k(a_1, \lambda_1, \lambda_2) = a_1 \cdot \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} + a_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^k}{k!}$$
on $\overline{x} = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$, $s^2 = a_1\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_1 - \overline{x}^2$ i $\mu_3 = E[(x-\overline{x})^3] = a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_2^3 + 3(a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2) + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 - 3\overline{x}(a_1\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_1) + 2m^3$.

Un cop definida la distribució dels sinistres, anem a veure quina és la seva prima base. La distribució estacionaria permet veure si el sistema està equilibrat en prima monetària. Suposem com a unitat monetària el cost mig d'un sinistre. Sigui:

- P_b la prima pura de referència (sobre la que s'aplica els percentatges).
- P_m la prima pura mitjana amb la distribució estacionaria:
$$P_m = (\sum_{i=1}^{s} \pi_i \cdot \frac{b_i}{100}) \cdot P_b$$

El sistema està equilibrat en prima pura si la prima mitjana equival a la prima a priori:
$$E(N) = P_m = (\sum_{i=1}^{s} \pi_i \cdot \frac{b_i}{100}) \cdot P_b$$

Llavors:
$$P_b = \frac{100 \cdot E(N)}{\sum_{i=1}^{s} \pi_i \cdot b_i}$$

3.4 Anàlisis dels SBM

Els SBM entre països han sigut sempre molt diversos degut al marc reglamentari de cada país i a la freqüència dels conductors. Es considera que la freqüència a nivell mundial és el 10% però hi han discrepàncies en funció de la zona estudiada. Per exemple la freqüència en els països nòrdics es situa sobre el 5% mentre que alguns països mediterranis tenen freqüències superiors al 20%.

Un altre factor a tenir en compte és qui realitza l'anàlisis l'assegurat o l'assegurador. La classe d'entrada és un factor important perquè en la gran majoria de casos la prima que paga un assegurat durant el seu primer any és substancialment més alta que la prima mitjana, on els assegurats nous ajuden a pagar el risc dels assegurats antics. En alguns països la classe d'entrada depén de variables externes com l'edat del conductor o l'antiguitat del vehicle.

Un altre factor a tenir en compte és la facilitat d'evitar el malus mitjançant un canvi de companyia.

Pels nostres anàlisis suposarem que els sinistres segueixen una Poisson amb una freqüència de λ=10%.

Al llarg de la literatura actuarial s'han proposat diferents criteris de comparació lligats a la distribució estacionària. Aquí es proposaran uns quants:

1. El nivell estacionari mig relatiu.
2. El coeficient de variació.
3. Eficiencia de Loimaranta.

Estrictament parlant, l'estacionarietat de la cartera s'arriba a temps infinit. En la realitat una cartera es considera estacionaria en sentit feble, on la mitjana i la variança es mantenten més o menys constants.

3.4.1 Nivell estacionari mig relatiu

Amb anglès es denominat *Relative Stationay Average Level* (RSAL). Aquesta mesura ens dona la posició d'un asegurat mig, en l'estat estacionari, en una escala normalitzada de 0 a 1:

$$RSAL = \frac{\overline{b} - b_1}{b_s - b_1}$$

on la $\overline{b} = \sum_{i=1}^{s} \pi_i \cdot b_i$ el nivell mig.

Aquest criteri dona una estimació inicial d'on es situa el client mig en un SBM, podent realitzar comparacions a un primer nivell de la distribució dels diferents sistemes SBM.

Un RSAL al voltant del 0 indica una aglomeració de pòlisses en els nivells amb més descompte. En canvi, un RSAL alt indica una millor dispersió de la cartera. Idealment aquest factor s'hauria de situar sobre el 50%.

k	País	RSAL
1	Kènia	28.79%
2	Espanya	25.67%
3	Malasia	21.17%
4	Finlàndia	16.04%
5	Suècia	14.20%
6	Països Baixos	11.78%
7	Anglaterra	11.37%
8	Taiwan	9.55%
9	Hong Kong	8.35%
10	Tailàndia	8.03%
11	Portugal	6.75%
12	Suíssa	6.47%
13	Alemània	5.85%
14	Japó	4.63%
15	Bèlgica	4.05%
16	Dinamarca	3.78%
17	França	2.12%
18	Noruega	2.11%
19	Brasil	1.85%
20	Corea	1.37%
21	Luxemburg	1.36%
22	Itàlia	1.3%

Taula 8: RSAL de diferents països
Font: Lemaire, J. (1995)

En la taula veiem RSAL dels SBM de diferents països(Taula 8). El primer efecte d'un RSAL tan baix és una discrimicació cap als nous clients que generalment han de pagar més en mitjana que un client antic amb el mateix risc. Ademés si té un sinistre el primer any pagarà una prima més alta durant els anys següents en comparació a la mitjana.

3.4.2 Coeficient de variació

Es defineix com:

$$CV = \frac{\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{s} \pi_i \cdot (b_i - \bar{b})^2}}{\bar{b}}$$

L'objectiu de les assegurances és transferir el risc dels assegurats a les asseguradores. Des del punt de vista dels assegurats el coeficient de variació defineix el nivell de cooperació entre assegurats. Per valors propers a 0 la cooperació és plena, mentre que com més alt més efecte té la tarificació a posteriori. Des del punt de vista dels assegurats en cartera un baix coeficient de variació indica estabilitat a llarg termini i un afavoriment cap aquells que tenen un freqüència més alta. En canvi, valors alts mostren un sistema més just pels assegurats.

k	País	CV
1	Suíssa	0.4595
2	Kènia	0.3835
3	Finlàndia	0.3834
4	Suècia	0.3769
5	Països Baixos	0.3523
6	Japó	0.3283
7	Taiwan	0.3162
8	Malasia	0.3075
9	Dinamarca	0.3017
10	Alemània	0.2536
11	Hong Kong	0.2518
12	Luxemburg	0.2147
13	Bèlgica	0.2128
14	França	0.2049
15	Noruega	0.2049
16	Portugal	0.1956
17	Tailàndia	0.1925
18	Espanya	0.1533
19	Corea	0.1271
20	Anglaterra	0.1260
21	Itàlia	0.0934
22	Brasil	0.0304

Taula 9: Coeficient de variació de primes de diferents països
Font: Lemaire, J. (1995)

3.4.3 Eficiencia de Loimaranta

Per al seu càlcul es necessari suposar que el número de sinistres en la categoria de tarifa que estem analitzant és Poisson de paràmetre λ. A partir de les probabilitats $P(N=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$ es dedueix les expresions de les probabilitats estacionaries $\pi_i, i = 1, ..., s$ en funcio del paràmetre λ. Recordem que la prima mitjana d'un assegurat en l'estat estacionari és, expressada en tant percent:

$$P_m = (\sum_{i=1}^{s} \pi_i \cdot \frac{b_i}{100}) \cdot P_b$$

Es defineix l'elasticitat del sistema com:

$$\eta = \frac{\dfrac{dP_m(\lambda)}{P_m(\lambda)}}{\dfrac{d\lambda}{\lambda}} = \lambda \cdot \frac{P'_m(\lambda)}{P_m(\lambda)},$$

on $\eta(\lambda)$ és la variació relativa de la prima mitjana generada per una variació relativa de la freqüència mitjana d'un sinistre. Substituïnt l'expresió de la prima mitjana i de la seva derivada, tenim:

$$\eta = \lambda \cdot \frac{\sum_{i=1}^{s} \pi'_i(\lambda) \cdot b_i}{\sum_{i=1}^{s} \pi_i(\lambda) \cdot b_i}$$

Agafant certs valors de λ o per a un interval de λ. Un SBM serà perfectament elàstic si $\eta(\lambda)$=1. Per calcular $\eta(\lambda)$ és necessari les derivades de la distribució estacionaria respecte λ, $\pi'_i(\lambda)$, que es poden obtenir diferenciant el sistema que defineix la distribució estacionaria. El sistema és:

$$\pi = M^T \cdot \pi,$$

$$1 = e^T \cdot \pi,$$

que diferenciem donant el següent sistema lineal:

$$\frac{d\pi(\lambda)}{d\lambda} = M^T \cdot \frac{d\pi(\lambda)}{d\lambda} + \frac{dM^T(\lambda)}{d\lambda} \cdot \pi(\lambda) = (Id - M^T)^{-1}(\frac{dM^T(\lambda)}{d\lambda} \cdot \pi(\lambda)),$$

3.5 Tarificació en base a la quantia dels sinistres

Una de les hipòtesis inicials dels SBM és que el canvi de classes es realitza en funció del nombre de sinistres i no de la quantia del cost del sinistre. A excepció de Corea, ningun país utilitza un SBM que utilitzi el cost dels sinistres. La seva utilització porta grans inconvenients:

1. El risc que suposa un assegurat per l'assegurador no es pot reflectir en les assegurances d'automòbils. No pots controlar (o és molt més difícil de controlar) els danys que causes al contrari en un accident.

2. Increment de la dispersió de les primes quedant l'assegurat desprotegit del risc.

3. La impossibilitat de donar una quantia exacta del cost del sinistre en un marge curt de temps a tots els sinistres.

Diferents autors han buscat formes per utilitzar el cost del sinistres. Picard en 1976 (Lemaire, J. (1995)) dona un model on separa els sinistres en dos categories, sinistres grans i petits. Aquesta separació és pot realitzar

- Determinant un límit. Aquest mètode va quedar invalidat perquè portava grans inconvenients pràctics. El primer era el temps necessari per estimar el cost i el segon era les queixes que ocasionaven aquells assegurats amb sinistres una mica per sobre del límit. Ademés tampoc va portar bons resultats.

- Mitjançant la causa del sinistre sigui danys a la propietat o danys a la persona. Respecte al mètode anterior és fàcil distingir la causa i les mitjanes de cada tipus de sinistre són clarament diferents. Podríem excloure de danys personals quan únicament la persona afectada ha d'anar a fer revisions després d'un sinistre.

3.6 Fam de bonus i franquícies

En un principi suposàvem que tots els sinistres ocorreguts es declaren. Però que passa si un assegurat no declara un sinistre? Les raons que pot tenir són diverses encara que des del punt de vista monetari, la raó és que declarar un sinistre implica un increment de la prima del període següent. Aquest fenòmen es coneix com *Fam de Bonus*, que al conèixer el funcionament SBM, per tal de no canviar de classe i no pagar una prima superior, podrà preferir no declarar un sinistre.

A la vegada, les companyies asseguradores es beneficien d'aquest fenòmen perquè en sinistres petits, la relació entre despeses de gestió i el cost del sinistre és molt gran.

Ademés el fet de canviar de classe en un període implica ademés que en els períodes successius les classes probables que tindria serien més altes.

Per exemple, suposem un assegurat en el SBM d'Irlanda que es troba en la classe 2 i té un sinistre de valor X. Llavors:

- Si declara el sinistre, la companyia li pagarà X a l'assegurat. Al renovar la pòlissa pagaria un 80% de la prima de referència, pel fet de passar a la classe 4.
- Si no declara el sinistre, l'assegurat hauria de pagar l'import X del sinistre. Al renovar la pòlissa pagaria un 50% de la prima de referència, pel fet de passar a la classe 1.

Durant el primer any, veiem que si X $\leq$ 30% de la prima de referència, llavors no s'hauria de declarar el sinistre.

Ara suposem que durant el segon any no té cap sinistre, cas comú, tenint en compte que en les pòlisses a tercers la freqüència mitjana és entorn al 10%. Llavors:

- Si hagués declarat el sinistre, passarà a la classe 3 al renovar la pòlissa (70% de la prima de referència). Al començar el tercer anys hauria pagat un 150% de la prima de refereència.
- Si no hagués declarat el sinistre, al començar el tercer anys hauria pagat un 100% de la prima de refereència juntament amb el cost del sinistre.

En conclusió, en una visió a 2 anys hauríem de comparar el cost del sinistre amb el 50% de la prima de refència, o equivalentment, a la prima en la primera classe.

3.6.1 Estratègia òptima per declarar un sinistre

Un cop estudiada la repercusió de declarar o no un sinistre, llavors podem realitzar un estudi sobre quina és l'estratègia òptima de declaració, és a dir, per a partir de quina quantitat del cost d'un sinistre és òptim declarar-lo i així beneficiar-se del SBM.
Per determinar l'estratègia òptima de declació de sinistres es suposa:

- Els conductors són racionals i neutrals respecte al risc i el seu objectiu és minimitzar el cost de la pòlissa. Aquest valor ve donat per la suma entre el cost dels sinistres no declarats i el cost de les primes. Suposarem el cost del sinistre no declarat és un recàrrec de la prima del període vinent sense que comporti un canvi de classe.
- Suposarem en un inici un horitzó temporal de N i una taxa de descompte r.
- Es coneix la totalitat del cost del sinistre en el moment de la decisió de declarar o no el sinistre.

3.6.2 Funció valor del cost de la pòlissa

Com hem explicat anteriorment, el cost de la pòlissa equival a la suma entre les primes pagades i el cost dels sinistres no declarats.

Definim L $\in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ el llindar la quantitat pel qual es declara un sinistre si i només si el cost supera aquest llindar. Es podria definir aquest cost en funció del peride i del temps però suposem que és independent d'aquests factors.

Suposem que és independent del període perquè en principi l'assegurat seguirà contractant la pòlissa sense preveure quan pararà de contractar-la. En les assegurances d'automòbil, un conductor no sap quan pararà de conduir amb molts anys d'antelació.

Suposem que és independent de la classe en la que es troba l'assegurat perquè és un model preparat per assegurats amb freqüència baixa. En els casos dels assegurats amb freqüència alta (i amb cost superior a la franquícia si en tenen), saben perfectament que tenen una freqüència alta i es trobaran sempre en les classes superiors declarant tots els sinistres que tenen.

Per tant, el model a realitzar a continuació dona un valor en funció d'un llindar del que ha de pagar un asesegurat que es troba en més del 80% de la cartera en SBM. La raó principal per utilitzar un llindar s'explicarà més tard amb la introducció de les franquícies.

Tenint en compte la *Fam de Bonus* les probabilitats que conformen la matriu de transició varíen. Sigui:

-M la matriu de transició amb probabilitats

- P_k=P(N=k), k=0,...,n-1

- P_n=P(N≥n)

-ρ_L=P(Cost d'un sinistre $\leq$ L)

La probabilitat de tenir k sinistres amb un cost superior a L que formaran part de la nova matriu de trancisió $M(.) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow M_{nxn}(\mathbb{R})$ és:

$$P_k^L = \sum_{i=k}^{n} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_L^{i-k} \cdot (1-\rho_L)^k, k = 0, 1, ...n-1 \tag{3.1}$$

$$P_n^L = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k^L \tag{3.2}$$

Sigui E(L) el cost mig d'un sinistre amb cost inferior a L i $CS(L)$ cost dels sinistres no declarats en un període

$$CS(L) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k\ sinistres\ no\ declarats) \cdot E(L) \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_L^k \cdot (1-\rho_L)^{i-k} \cdot E(L) \cdot k$$

$$E(L) = \int_0^L x \cdot P(cost\ sinistre = x)\ dx$$

Per a calcular el valor de les primes utilitzarem la matriu de transició amb les probabilitats descrites en (3.1) i (3.2). Sigui M(L) la matriu de transició amb probabilitats P_k^L. La prima $P_t(L)$ a pagar en cada període és:

$$P_t(L) = P_m \cdot b^T \cdot M(L)^T \cdot v_t$$

on v_t és el vector de possibles classes en t.

Llavors el cost d'una pòlissa fins al període N és:

$$V(L) = \sum_{t=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^t} (CS(L) + P_t(L))$$

Ara be, ja que CS(L) és independent de t i $v_{t+1} = M(L)^T \cdot v_t$:

$$V(L) = \frac{1 - \left(\frac{1}{r+1}\right)^{N+1}}{\frac{r}{r+1}} CS(L) + P_m \cdot b^T \cdot (\sum_{t=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^t} \cdot (M(L)^T)^t) \cdot e_{i_0}$$

on i_0 és la classe on es troba l'assegurat inicialment. Com es pot veure aquest és el cas no estacionari on suposem una classe inicial i un període finit. En el cas estacionari, si agafem $\pi(L)$, la distribució estacionaria, en comptes de e_i, podem simplificar la fòrmula de tal manera que:

$$V(L) = \frac{r+1}{r} (CS(L) + P_m \cdot b^T \cdot \pi(L))$$

on hem aplicat que N=∞ i el Teorema (2.33) per demostrar que $M(L)^T \cdot \pi(L) = \pi(L)$.

Com es pot observar, a llarg termini, l'estratègia més òptima passa per minimitzar $CS(L) + P_m \cdot b^T \cdot \pi(L)$.

Els problemes d'aquest mètode són:

- Un assegurat generalment no pot accedir a la informació dels SBM de les empreses asseguradores.
- El valor dels danys és díficil d'estimar sense un pèrit. Si ademés no es vol contactar a l'asseguradora en una primera instància, aquest perit l'ha de pagar l'assegurat.
- En els sinistres que estem estudiant on únicament es té en compte la responsabilitat civil la decisió de declarar un sinistre és moltes vegades realitzada pel beneficiari i és diferent a l'assegurat.
- Un assegurat, generalment busca el cost a curt termini i per tant, si busqués reduir el cost de la pòlissa només compararia la diferència de primes amb el cost del sinistre.
- Els càlculs realitzats no tenen en compte el període en que es troba un assegurat i tampoc la seva classe. A classes més altes el llindar és alt per a poder reduir més la prima en els períodes futurs.

3.6.3 Franquícies

Una franquícia es defineix com un acord entre l'assegurador i l'assegurat que responsabilitza a l'assegurat a assumir una part del cost d'un sinistre en el cas en que es produís un. Com a inconvenient principal és el malestar que provoca haver de tenir que pagar un sinistre o una part del sinistre i pagar una prima a l'assegurador. Els avantatges són:

-Per part dels assegurats: Pagar una prima menor a canvi d'assumir part del risc.

-Per part de l'assegurador: L'assegurat és menys propens al risc al assumir-ne una part. Ademés al no declarar sinistres de cost baix, l'assegurador pot reduir en gran mesura les despeses de gestió. En termes tècnics implica una reducció de la freqüència, la sinistralitat i els les despeses internes.

Hi han diferents tipus de franquícia:

- Franquícies fixes: Són aquelles en l'assegurat està obligat a pagar una quantitat fixa en cada sinistre. Existeix una modalitat on l'assegurador paga la totalitat del sinistre si supera la quantitat marcada.
- Franquícies percentuals: En aquestes franquícies l'assegurat paga un percentatge del sinistre. Normalment tenen màxims i mínims fixes per tal de no

fer pagar massa a l'assegurat en cas d'un sinistre gran i perquè l'assegurat almenys pagui una quantitat predeterminada.

En les assegurances d'automòbils normalment tenen franquícies fixes on l'assegurat paga sempre un certa quantitat. Ara revisarem com afecta cada franquícia a la *Fam de Bonus*.

Franquícies fixes

El fet de tenir que assumir una quantitat F de cada sinistre implica un increment del nivell 0. En altres paraules, si tens una franquícia de 500 u.m. i consideraves inicialment declarar tots aquells sinistres superiors a 100 u.m., llavors declaràs en aquest cas tots aquells sinistres amb cost superor a 600 u.m..

Respecte als càlculs anteriors per a la funció de valor de la pòlissa el cost del sinistres no declarats és el mateix però amb un nivell superior. Tornant a calcular els cost de la pòlissa, recordem:

-M la matriu de transició amb probabilitats

- P_k=P(N=k), k=0,...,n-1
- P_n=P(N≥n)

-ρ_L=P(Cost d'un sinistre ≤ L)

-E(L)=Cost mig d'un sinistre amb cost inferior a L¿0.

Llavors, la probabilitat de tenir k sinistres amb un cost superior a L+F que formaran part de la nova matriu de trancisió $M(.) : \mathbb{R} \to M_{nxn}(\mathbb{R})$ és:

$$P_k^{L+F} = \sum_{i=k}^{n} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_{L+F}^{i-k} \cdot (1-\rho_{L+F})^k, k = 0, 1, ...n-1$$

$$P_n^{L+F} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k^{L+F}$$

El cost dels sinistres no declarats $CS(L+F)$ en un període equival a:

$$CS(L+F) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k\ sin\ no\ decl) \cdot E(L+F) \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_{L+F}^{k} \cdot (1-\rho_{L+F})^{i-k} \cdot E(L+F) \cdot k$$

Ara introudïm el cost dels sinistres declarats a causa de la franquícia:

$$CSD(F) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k\ sinistres\ declarats) \cdot F \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_{L+F}^{i-k} \cdot (1-\rho_{L+F})^{k} \cdot F \cdot k$$

I la prima a pagar en cada període és:

$$P_t(L+F) = P_m \cdot b^T \cdot (M(L+F)^T)^t) \cdot e_{i_0}$$

Llavors el cost d'una pòlissa en funció de franquícia i el llindar L és:

$$V(L,F) = V(L+F)+CSD(F) = \sum_{t=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^t}(CS(L+F)+CSD(F)+P_t(L+F)) =$$

$$= \frac{1-\left(\dfrac{1}{r+1}\right)^{T+1}}{\dfrac{r}{r+1}}(CS(L+F)+CSD(F))+P_m\cdot b^T\cdot(\sum_{t=0}^{N}\frac{1}{(1+r)^t}\cdot(M(L+F)^T)^t)\cdot e_{i_0}$$

Com es pot observar el pagament de la franquícia dels sinistres declarats és totalment independent de el llindar escollit. Per tant, les franquícies on l'assegurat no ha de pagar si el cost del sinistre supera la franquícia seríen molt acceptables per les asseguradores perquè acceptaria més risc amb la mateixa freqüència. El problema que té és que no necessàriament indueixen a baixar l'adversitat al risc de l'assegurat. L'assegurat pot agreujar l'objecte assegurat per tal d'arribar a superar la franquícia.

Franquícies percentuals

En el cas de les franquícies percentuals, el valor de la franquícia variarà en funció del cost del sinistre i implica un càlcul més complex per tal d'arribar a el llindar òptim. Además s'ha de tenir en compte que en aquestes franquícies sempre hi ha un màxim i generalment un mínim.

Primerament, la probabilitat de tenir k sinistres amb un cost superior a L(1+f) és:

$$P_k^{L(1+f)} = \sum_{i=k}^{n} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_{L(1+f)}^{i-k} \cdot (1-\rho_{L(1+f)})^k, k = 0,1,...n-1$$

$$P_n^{L(1+f)} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k^{L(1+f)}$$

El cost dels sinistres no declarats $CS(L(1+f))$ en un període equival a:

$$CS(L(1+f)) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k\ sin\ no\ decl)\cdot E(L+F)\cdot k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} P_i \cdot \binom{i}{k} \cdot \rho_{L+F}^{k} \cdot (1-\rho_{L(1+f)})^{i-k} \cdot E(L(1+f)) \cdot k$$

En el cas del cost dels sinistres declarats a causa de la franquícia, la quantitat a pagar depén del cost del sinistre però podem extreure una estimació de l'esperança en funció de L anomenada f(L):

$$CSD(f) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k\ sinistres\ declarats)\cdot f(L)\cdot k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} P_i\cdot\binom{i}{k}\cdot\rho_{L(1+f)}^{i-k}\cdot(1-\rho_{L(1+f)})^k\cdot f(L)\cdot k$$

on

$$f(L)=\int_0^{min/f} min{\cdot}P(cost\ sin=x{\cap}x\geq L)dx+\int_{min/f}^{max/f} x{\cdot}f{\cdot}P(cost\ sin=x{\cap}x\geq L)dx$$

$$+\int_{max/f}^{\infty} max\cdot P(cost\ sin=x\cap x\geq L)dx$$

on max i min són la màxima i mínima quantitat que ha de pagar un assegurat en aquesta modalitat de franquícia.

La prima a pagar en cada període és:

$$P_t(L(1+f))=P_m\cdot b^T\cdot(M(L(1+f))^T)^t)\cdot e_{i_0}$$

Llavors el cost d'una pòlissa en funció de franquícia i el llindar L és:

$$V(L,f)=V(L(1{+}f)){+}CSD(f)=\sum_{t=0}^{N}\frac{1}{(1+r)^t}(CS(L(1{+}f)){+}CSD(f){+}P_t(L(1{+}f)))$$

Anàlisis de la *Fam de Bonus* amb les franquícies

Com hem comentat anteriorment, el problema principal de l'aplicació del fenòmen de la *Fam de Bonus* és la falta d'informació per part del assegurats. L'opció d'ensenyar el SBM crea una situació on la competència està informada dels preus i pot crear estratègies per guanyar quota de mercat i per tant no és favorable. En canvi, l'introducció d'una franquícia redueix el valor de les primes i a la vegada obliga a marcar un llindar mínim major a 0. D'aquesta manera es pot crear una *Fam de Bonus* sense la necessitat de que els assegurats entenguin el sistema. Els ingressos que té una empresa asseguradora són les primes dels assegurats mentre que les despeses que té en funció dels sinistres són els costos del propi sinistre i els costos per portar a tràmit les gestions del sinistre. Suposarem que els altres costos que té una empresa asseguradora són fixos. Sigui B(L) el benefici d'una pòlissa. Llavors:

$$B(L)=\sum_{t=0}^{N}\frac{1}{(1+r)^t}(P_t(L)-E^*(L)\cdot(CG_c(L)+CSD_c(L)))$$

on

$$E^*(L)=\int_L^{\infty} x\cdot P(cost\ sinistre=x)\ dx$$

, $P_t(L)$ és la prima guanyada en el període i $CG_c(L)$ i $CSD_c(L)$ són els costos mitjos de gestió i del sinistre d'un sinistre declarat per part de la companyia asseguradora. Un cop trobat el màxim de la funció on L¿0, aquest L seria la franquícia fixa on l'assegurat paga tots aquells sinistres per sota de L i l'assegurador tot el sinistre d'aquells sinistres que superen L.

En el cas de incluore una franquícia, suposem un percentatge sobre la franquícia (per exemple $F=L\cdot 0.95$) i llavors el benefici seria:

$$B(L,F)=\sum_{t=0}^{N}\frac{1}{(1+r)^t}(P_t(L)-E^*(L)\cdot(CG_c(L)+CSD_c(L)-F))$$

Les franquícies percentuals són més complexes per l'assegurat al ser un percentatge sobre el sinistre i tenir màxims i mínims. En comparació a les franquícies fixes, un avantatge seria l'intent de l'assegurat a minimitzar el cost encara que sàpiga que tindrà el sinistre.

3.7 SBM que no són cadenes de Markov

En els SBM, la probabilitat d'un assegurat comú de tenir una classe alta és molt baixa però no és nula. Per evitar algunes situacions, els SBM poden no només mirar un sol període sinó que necessiten informació d'alguns períodes anteriors.

Exemple 1: Dos assegurats (A i B) es troben en la mateixa classe i tenen 2 sinistres en 10 anys

- A declara sinistres durant el primer i el segon any.
- B declara sinistres durant el primer i el sisé any.

Per a qualsevol SBM, la prima que paga A sempre és més alta que la prima que paga B. Aquest exemple s'aplica generalment als conductors inexperts que tenen una alta freqüència a l'inici però que milloren en el temps.

Exemple 2:

Dos assegurats (A i B) es troben a la classe més baixa on

- A porta 10 anys seguits sense declarar cap sinistre.
- B porta 5 anys seguits sense declarar cap sinistre.

Tant A com B paguen la mateixa, però des del punt de vista de l'assegurador A és millor que B.

En alguns SBM amb moltes classes per evitar un tracte injust com l'explicat anteriorment, es creen mecanismes per tornar a la classe inicial si passat un període de temps no declara cap sinistre o compten els anys que porten en la classe més baixa com a forma de compensació.

Un cas molt clar és el SBM de Bèlgica (Taula 10)

Classe	Nivell de primes	Classes després de ... sinistres					
i	b_i	0	1	2	3	4	+5
22	200	21	22	22	22	22	22
21	160	20	22	22	22	22	22
20	140	19	22	22	22	22	22
19	130	18	22	22	22	22	22
18	123	17	22	22	22	22	22
17	117	16	21	22	22	22	22
16	111	15	20	22	22	22	22
15	105	14	19	22	22	22	22
14	100	13	18	22	22	22	22
13	95	12	17	22	22	22	22
12	90	11	16	21	22	22	22
11	85	10	15	20	22	22	22
10	81	9	14	19	22	22	22
9	77	8	13	18	22	22	22
8	73	7	12	17	22	22	22
7	69	6	11	16	21	22	22
6	66	5	10	15	20	22	22
5	63	4	9	14	19	22	22
4	60	3	8	13	18	22	22
3	57	2	7	12	17	22	22
2	54	1	6	11	16	21	22
1	54	0	5	10	15	20	22
0	54	0	4	9	14	19	22

Taula 10: SBM de Bèlgica 1
Font: Lemaire, J. (1995)

On la classe d'entrada és la 14 o la 11 en funció d'un criteri en la tarificació a priori. Ademés no pot haver cap pòlissa per sobre de la classe 14 si no ha tingut cap sinistre en els últims 4 períodes.

Com es pot veure existeixen 3 classes amb el mateix nivell de prima. En els primers exemples sempre observem com cada classe li correspon un nivell de primes diferent al de les altres classes. En el SBM belga, per tal de premiar als assegurats que mai tenen sinistres i no tenir que baixar més la prima creen classes per sota amb la mateixa prima. D'aquesta manera quan aquests assegurats tinguin un sinistre, l'increment de la prima és menor.

I així és com es transformen processos estocàstics no Markovians en cadenes de Markov. Ara anem a la condició especial del SBM belga. Per comptar si ha tingut algun sinistre en els últims 4 anys només es necessari crear classes amb el mateix nivell de prima. El SBM queda d'aquesta forma

Classe	Nivell de primes	Classes després de ... sinistres					
i	b_i	0	1	2	3	4	+5
22	200	21.1	22	22	22	22	22
21.0	160	20.1	22	22	22	22	22
21.1	160	20.2	22	22	22	22	22
20.0	140	19.1	22	22	22	22	22
20.1	140	19.2	22	22	22	22	22
20.2	140	19.3	22	22	22	22	22
19.0	130	18.1	22	22	22	22	22
19.1	130	18.2	22	22	22	22	22
19.2	130	18.3	22	22	22	22	22
19.3	130	14	22	22	22	22	22
18.0	123	17	22	22	22	22	22
18.1	123	17.2	22	22	22	22	22
18.2	123	17.3	22	22	22	22	22
18.3	123	14	22	22	22	22	22
17	117	16	21.0	22	22	22	22
17.2	117	16.3	21.0	22	22	22	22
17.3	117	14	21.0	22	22	22	22
16	111	15	20.0	22	22	22	22
16.3	111	14	20.0	22	22	22	22
15	105	14	19.0	22	22	22	22
14	100	13	18.0	22	22	22	22
13	95	12	17	22	22	22	22
12	90	11	16	21.0	22	22	22
11	85	10	15	20.0	22	22	22
10	81	9	14	19.0	22	22	22
9	77	8	13	18.0	22	22	22
8	73	7	12	17	22	22	22
7	69	6	11	16	21.0	22	22
6	66	5	10	15	20.0	22	22
5	63	4	9	14	19.0	22	22
4	60	3	8	13	18.0	22	22
3	57	2	7	12	17	22	22
2	54	1	6	11	16	21.0	22
1	54	0	5	10	15	20.0	22
0	54	0	4	9	14	19.0	22

Taula 11: SBM de Bèlgica 2
Font: Lemaire, J. (1995)

En les classes superiors a la 14 (Taula 11) s'assigna un decimal que indica el nombre de períodes seguits sense sinistres. Al arribar a 3 i no tenir sinistres es passa directament a la classe 14. Es pot veure que no totes les classes tenen tots els decimals i es degut a la impossibilitat o al no tenir la necessitat.

Per poder aplicar aquest mètode el procés estocàstic ha de complir que $\exists k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k < \infty$ *i* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i, ..., X_{n-k} = i_{n-k})$$

Significa que no podem observar infinits períodes anteriors. Aquest fet no suposa cap problema perquè la vida d'un conductor és finita. Es podria crear una cadena de Markov amb moltes subclasses (classes amb el mateix nivell de primes) per tal de tenir en compte més informació.

3.8 Definicions

Accident: Succés probable, fortuït i perjudicial.

Adversitat al risc: Desig de l'assegurat a evitar situacions amb risc.

Altres cobertures d'una pòlissa d'automòbils.: Altres garantíes que no s'aprofundeixen en aquest treball degut a que no guarden relació amb els SBM o perquè els costos dels sinistres que suposen són massa baixos.

Assegurat: Persona física o jurídica a qui es protegeix mitjançant una pòlissa. La protecció donada es defineix en la pòlissa.

Assegurador: Persona física o jurídica que mitjançant una pòlissa cobreix el risc d'un assegurat.

Beneficiari: Persona física o jurídica que rep una compensació econòmica, material o en forma de servei per part de l'assegurador a causa d'un sinistre.

Conductor: Persona que legalment habilitada per la conducció i amb autorització de l'assegurat, el propietari o té la possessió del vehicle, condueix o sigui responsable en el moment del sinistre. Aquest conductor pot ser el habitual o ocasional.

- **Conductor habitual**: Aquell declarat com a primer conductor en una pòlissa d'automòbils. Normalment és el propietari del vehicle.
- **Conductor ocasional**: Aquell declarat com a segon o n-èssim conductor en una pòlissa d'automòbils. En cas de voler declarar múltiples conductors com a mínim s'ha de declarar el segon conductor com aquell amb major risc. Depenent del risc que tingui un conductor ocasional en comparació al conductor habitual o en funció dels anys que tingui i els anys que ha tingut carnet de conduir no cal declarar cap conductor ocasional.

Freqüència: Estadístic definit per la divisió del nombre de sinistres entre el nombre de pòlisses en vigor imputables en un període.

Pòlissa: Document en el que es formalitza un contracte d'assegurança. En l'assegurança l'assegurador s'obliga a cobrir el risc de l'assegurat definit en les condicions de la pòlissa a canvi d'una prima.

- Pòlisses a tercers: Considerarem aquelles que només cobreixen la responsabilitat civil.
- Pòlisses a tot risc: Considerarem aquelles que cobreixen tant els danys del vehicle com la responsabilitat civil.

Prenedor: Persona física o jurídica que juntament amb l'assegurador subscriuen la pòlissa.

Prima: Preu de l'assegurança.

Selecció adversa: Fenòmen en el que a causa de definir unes determinades condicions o donar certes garantíes provoca l'entrada de clients no desitjats pel risc que suposen.

Risc: Succés perjudicial, aleatori, probable, concret, fortuït, futur i valorable econòmicament.

Responsabilitat civil: Garantia que cobreix el patrimoni de l'assegurat degut a tot fet que hagi produït un dany del que es pot resultar civilment responsable l'assegurat i, que es derivi necessàriament del risc concret declarat a l'assegurador, conforme a les condicions de la pòlissa.

Sinistralitat: Estadístic definit per la divisió dels costos dels sinistres en un període entre les primes pagades imputables al mateix període. Generalment es representa com a percentatge.

Sinistre Fet que hagi produït un dany que es derivi necessàriament del risc concret declarat a l'assegurador, conforme a les condicions de la pòlissa.

- Danys corporals: Lesions o morts causades a persones físiques.
- Danys materials: Destrucció, deteriorament, pèrdua o detriment d'un be o part del mateix. Inclou els danys corporals a animals.

Tercer: Persona física i jurídica diferent a

- Assegurat i familiars de primer grau.
- En alguns casos els treballadors on treballa l'assegurat.

Tot risc danys materials: Garantia que cobreix el dany que pot sofrir el vehicle assegurat com a conseqüència d'un accident per causa exterior, violenta, instantània i en contra de la voluntat de l'assegurat.

4 Conclusions

Les cadenes de Markov donen una forma de calcular les probabilitats tenint en compte el moviment entre estats. Al definir la cadena de Markov en un espai finit i homogeni podem expressar tot el procés probabilístic mitjançant una successió que comença amb un vector inicial de $\mathbb{R}^n$ i que cada terme de la successió era l'anterior multiplicada per la transposada de la matriu de transició. Si ademés la cadena és irreductible i ergòdica podem definir l'existència i unicitat de l'estat estacionari. El fet de no canviar simplifica tots els càlculs que es realitzin amb cadenes de Markov.

En alguns casos, la cadena de Markov inicial no és irreductible i saber quan s'arribarà. Primerament passaran un cert nombre de períodes fins que arribaràs a un estat recurrent. També s'ha de tenir en compte que la relació de comunicació crea grups d'estats recurrents i per tant en funció de la cadena de Markov i l'estat inicial es pot acabar en estats recurrents diferents. Al no poder trobar cap aplicació en els temes parlats a continuació no m'he extés en aquest tema.

Una de les aplicacions de les cadenes de Markov és el sistema Bonus-Malus o SBM. El SBM és un sistema a posteriori de tarificació, és a dir, és una correcció de la tarificació a priori. Aquesta correcció es realitza perquè no existeix una forma d'identificar el risc de l'assegurat amb pocs recursos. En les pòlisses d'automòbils existeix el fitxer SINCO però només és una base de dades de sinistres i per tant és insuficient. Ademés l'utilització d'aquest fitxer és costós i pot no ser rentable al llarg termini. S'ha de recordar que el mercat de les assegurances d'automòbils és amb primes baixes, molt alta demanda i amb molta competència. Els ajustaments de prima es realitzen en general i un error inicial pot provocar la pèrdua de clients o tenir pèrdues degut al volum dels siniestres.

Un cop definit el SBM i veure alguns exemples, veiem alguns estadístics que donen la base d'estar en l'estat estacionari. El problema és que una cartera tardarà un temps abans d'arribar amb aquest estat. Però al ser estadístics per comparar models aquests estadístics són molt útils. Si hi fixem es possible calcula el RSAL i el coeficient de variació substituïnt π per la successió d'estats.

Després de veure com comparar SBMs ens plantegem la perfecció dels models.

- Primerament s'ha vist, almenys en les pòlisses d'automòbils, perquè s'ha descartat l'utilització del cost dels sinistres.
- Seguidament s'ha analitzat el fenòmen conegut com la *Fam de Bonus* i una forma calcular per a quin cost declarar un sinistre. Com que actualment la societat en general està poc informada de com funcionen les assegurances aquest model només és útil pels asseguradors. Un cop trobat el llindar que maximitzi benefici només cal incloure una franquícia i així la *Fam de Bonus* apareix sense la necessitat de confiar en les decisions de l'assegurat.
- Per acabar, com una mesura de les empreses asseguradores de ser més competitius s'ha contemplat els casos que ajuden tant a assegurats amb inexperiència com als clients fidels que mai han tingut sinistres.

Per acabar, dir que el mercat de les assegurances és un mercat basat la prestació d'un possible pagament o servei futur que encara que tingui molta història, la veritat, és que mai es manté invariant a causa de les noves necessitats i sempre s'estan renovant tant tecnològicament com en les eines de càlcul. El SBM aquí tractat molt segurament serà substituït per altres sistemes un cop s'arribi a obtenir més informació dels assegurats o es creï un sistema que arregli els problemes dels SBMs.

Referències

[1] Sheldom M., R.(2010) *Introduction to Probability Models 10th edition.* Elseiver.
Pàgines referenciades: 5-10.

[2] Bremaud, P.(1999) *Markov Chains Gibs fields, Monte Carlo simulations and queues.* Springer.
Pàgines referenciades: 5-10.

[3] Lemaire, J. (1995) *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance* Kluwer academic Publishers Boston/Dordrecht/London.
Pàgines referenciades: 11-14,18-23,25,34-38.

[4] Boj, E., Claramunt, M.M., Costa, T. (2017). *Tarificación y provisiones.* Colección OMADO.
URL: `http://hdl.handle.net/2445/107124`
Pàgines referenciades: 11-12, 15-17, 21, 23, 24.

[5] Alejandre, E.(2017) *Análisis del "Hambre de Bonus"*
Pàgines referenciades: 26-27.

[6] Zurich Insurance plc Sucursal en España (2017) *Zurich Motor Flexible. Condiciones Generales de Garantías*
Pàgines referenciades: 39-40.

[7] Zurich Insurance plc Sucursal en España (2017) *Responsabilidad Civil General. Condiciones Generales de Garantías*
Pàgines referenciades: 39-40.