

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: Análisis y aplicación del modelo Double Chain Ladder

Autoría: Cristian Angulo Gallego

Tutoría: Eva Boj del Val, M^a Mercè Claramunt Bielsa

Curso académico: 2017-2018

“El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto”.

RESUMEN

El trabajo se centra en el método de cálculo de provisiones Double Chain Ladder, que extiende el método clásico Chain Ladder con el uso de dos triángulos *run-off*: uno relativo a cuantías de pagos, igual que ocurre en Chain Ladder, y otro de frecuencias de siniestros. A diferencia del modelo Chain Ladder, Double Chain Ladder diferencia entre dos tipos de reservas, las referidas a siniestros de tipo Incurred But Not Reported, IBNR, y las referidas a siniestros de tipo Reported But Not Settled, RBNS. La reserva total es la suma de ambas estimaciones, lo que permite un valor más ajustado de los pagos futuros. El método se ilustra haciendo uso del paquete Double Chain Ladder haciendo uso del paquete Double Chain Ladder de R.

Palabras clave: Provisiones, Double Chain Ladder, IBNR, RBNS, paquete DCL de R.

Abstract

The work is focused on the method of calculating claim reserving Double Chain Ladder, which spreads the classical method Chain Ladder with the use of two run-off triangles: one of them relative to the amount of payments, the same as it happens in Chain Ladder; and the other relative to the frequency of the sinisters. As opposed to the Chain Ladder model, Double Chain Ladder distinguishes between two reserve's types: ones that refer to Incurred But Not Reported (IBNR) sinisters, and the others which refer to Reported But Not Settled (RBNS) sinisters. The total reserve is the addition of both estimations, what allows a more compliant value of the future payments. The method is illustrated by making use of the Double Chain Ladder from package R.

Key words: Claim Reserving; Double Chain Ladder, IBNR, RBNS, DCL package for R.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. PROVISIONES TÉCNICAS.....	3
2.1. Provisión para siniestros pendientes	4
2.1.1. Reservas de siniestros IBNR	5
2.1.2. Reservas de siniestros IBNER.....	6
2.1.3. Reservas de siniestros RBNS	6
3. MODELO DOUBLE CHAIN LADDER.....	8
3.1. Datos e hipótesis	8
3.2. Estimación de los parámetros	10
3.3. Estimación de las reservas IBNR y RBNS	12
3.3.1 Estimación de las reservas IBNR y RBNS ignorando el efecto cola	13
3.3.2 Estimación de las reservas IBNR y RBNS con efecto cola	14
4. APLICACIÓN DEL MODELO A DATOS REALES.....	15
4.1. El paquete DCL	15
4.2. Los datos de los triángulos.....	16
4.3. Estimación de los parámetros	17
4.4. Estimación de las reservas	21
4.4.1 Estimación de las reservas sin efecto cola	21
4.4.1.1 Estimación de las reservas ignorando el triángulo de frecuencia.....	21
4.4.1.2 Estimación de las reservas con parámetro π	23
4.4.1.3 Estimación de las reservas con parámetro p	24
4.4.2 Estimación de las reservas con efecto cola	25
4.4.2.1 Estimación de las reservas ignorando el triángulo de frecuencia.....	25
4.4.2.2 Estimación de las reservas con parámetro π	26
4.4.2.3 Estimación de las reservas con parámetro p	27
4.5. Método bootstrapping para el modelo DCL	28
4.5.1. Estimación de las reservas bajo el método bootstrapping.....	29
4.6. Calculo del valor actual actuarial de las reservas	34
5. CONCLUSIONES.....	37
6. REFERENCIAS	38
ANEXO	40

1. INTRODUCCIÓN

Para el cálculo de reservas en los seguros de No Vida se dispone de múltiples métodos estadísticos. Dentro de los métodos actuariales, el más popular y aplicado en las compañías aseguradoras es el conocido método Chain Ladder (CL) (Tarbell, 1934). Este método clásico es un método estadístico determinista y fue de los primeros propuestos en la literatura actuarial para el cálculo de provisiones. Este método sencillo se remonta a los años 70 y se calcula a partir del triángulo de pagos de siniestros. El modelo CL se basa en las reservas de tipos de siniestros Incurred But Not Reported, IBNR, que hacen referencia a siniestros que han ocurrido en el pasado, pero todavía no han sido reportados a la compañía. Para el cálculo de provisiones, la compañía debe estimar unas reservas para siniestros de tipo IBNR.

En Verrall *et al.* (2010) y Martínez-Miranda *et al.* (2011 y 2012), se propone el método Double Chain Ladder (DCL), al que se dedica este trabajo. Este método tiene sus bases en el clásico modelo CL, pero permite además distinguir entre dos tipos de reservas en función del tipo de siniestro. Las dos reservas son las reservas para tipos de siniestros IBNR, y las reservas para tipos de siniestros Reported But Not Settled, RBNS, que son reservas para un tipo de siniestros que han sido reportados a la compañía, pero que todavía no se han pagado. Otros trabajos de la literatura que modelan siniestros de tipo RBNS son por ejemplo Ayuso y Santolino (2008), Antonio y Plat (2014) y Boj y Esquinas (2016).

La principal diferencia del método DCL respecto del CL clásico es que en DCL se trabaja con dos triángulos: el relativo a los pagos agregados de los siniestros y el relativo a la frecuencia del número de siniestros. Al trabajar incorporando la frecuencia de siniestralidad, esta información aporta al modelo una ayuda para la estimación de unas reservas más ajustadas a la realidad de los pagos. En la literatura existen otras líneas de modelos que tratan también dos triángulos, pero no son métodos comparables a DCL, van en otras direcciones. Por ejemplo, el método Munich Chain Ladder utiliza dos triángulos, pero ambos son de cuantías (ver Quarg y Mack, 2004 para el detalle).

El método DCL también incorpora el efecto de inflación, que no se consideraba en el modelo CL clásico. Otros métodos que tratan el efecto de la inflación podrían ser los métodos de separación de Taylor (ver Taylor, 1977 y Björkwall, 2011), aunque son métodos que trabajan con el número de siniestros por año de origen y no con el triángulo completo de frecuencias de siniestros.

El método DCL ha sido tratado de forma amplia por sus autores realizando distintas extensiones y buscando diferentes funcionalidades. Este trabajo se centra en el modelo inicialmente propuesto en la literatura. Ampliaciones posteriores han sido el uso de información adicional en el modelo DCL, lo que permite una mejora con respecto a las predicciones obtenidas a partir de los triángulos y la incorporación de reclamaciones no resueltas. En particular, en Martínez-Miranda *et al.* (2013a) se propone un nuevo método de estimación de los parámetros combinando el método original con Bornhuetter-Ferguson. Otra línea posterior se encuentra en el artículo de Martínez-Miranda *et al.* (2015), dónde a partir de esta información adicional, se considera la posibilidad de que haya reclamaciones que se resuelvan sin que haya ningún pago, los llamados “*zero-claims*”.

En este trabajo se estudia el modelo DCL con el objetivo de entender sus características teóricas y tener la capacidad de interpretar los parámetros del método aplicándolo a unos datos reales. Es un método que tiene asociado un paquete de R (R Development Core

Team, 2018) llamado DCL (Martínez-Miranda *et al.*, 2013b) de libre uso para el actuario, igual que ocurre con el conocido paquete ChainLadder (Gesmann *et al.* 2017). Puesto que en la docencia de la asignatura Matemática Actuarial no se ha estudiado el modelo DCL, el reto en este trabajo es entender el método y los parámetros, y realizar una aplicación con triángulos de datos reales utilizando el paquete DCL de R. Otras referencias dónde se ha aplicado DCL a datos reales pueden ser Agbeko *et al.* (2014) y Haxhi *et al.* (2015).

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el apartado 2 se realiza una revisión del concepto de provisiones técnicas tanto desde el punto de vista de solvencia como contable. Dentro del mismo apartado se explican los diferentes tipos de siniestros RBNS y IBNR. Seguidamente, en el apartado 3, se explica el modelo DCL desde un punto de vista teórico. Finalmente, en el apartado 4 se realiza una aplicación práctica del modelo DCL a unos datos reales haciendo uso del paquete DCL de R. Para finalizar, en el apartado 5 se recogen las principales aportaciones y conclusiones.

2. PROVISIONES TÉCNICAS

Tal y como se detalla en Castañer y Claramunt (2017), en estos momentos, el cálculo y definición de las provisiones técnicas se encuentra en transición debido a la nueva legislación de solvencia en España, recogida fundamentalmente en la Ley 20/2015, 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, LOSSEAR, y en el Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, ROSSEAR. Así, hasta que se apruebe el nuevo Plan Contable, las entidades de seguros y reaseguros realizarán un doble cómputo de las provisiones técnicas: uno a efectos de solvencia y otro a efectos contables

Desde el punto de vista de la técnica actuarial, y centrándonos en los seguros distintos al de vida, en este trabajo se estudia un método para el cálculo de la provisión de prestaciones pendientes de declaración. Esta provisión se calcula ligeramente distinta según los dos enfoques (el de solvencia y el contable); aunque los métodos actuariales que se aplican para la determinación de los elementos básicos que permiten su cálculo son únicos y se aplican en ambos casos.

Según la normativa de solvencia, las provisiones técnicas estarán formadas por la suma de la mejor estimación y de un margen de riesgo (artículo 77 de la LOSSEAR):

- La mejor estimación se corresponderá con la media de los flujos de caja futuros ponderada por su probabilidad, teniendo en cuenta el valor temporal del dinero mediante la aplicación de la pertinente estructura temporal de tipos de interés sin riesgo, es decir, el valor actual esperado de los flujos de caja futuros.
- El margen de riesgo será tal que se garantice que el valor de las provisiones técnicas sea equivalente al importe que las entidades aseguradoras y reaseguradoras previsiblemente exigirían para poder asumir y cumplir las obligaciones de seguro y reaseguro.

Como regla general, ambas componentes de las provisiones técnicas se calcularán por separado, excepto cuando los flujos de caja futuros asociados a las obligaciones de seguro o reaseguro puedan replicarse con fiabilidad utilizando instrumentos financieros para los cuales exista un valor de mercado fiable; en este caso, el valor de las provisiones técnicas asociadas con esos flujos de caja futuros se determinará a partir del valor de mercado de dichos instrumentos financieros y no será necesario calcular por separado la mejor estimación y el margen de riesgo.

Si el margen de riesgo y la mejor estimación se calculan por separado, el margen de riesgo será igual al coste de financiar el capital de solvencia obligatorio exigible por asumir las obligaciones de seguro y reaseguro durante su período de vigencia (artículo 48 del ROSSEAR). Por lo tanto, para calcular el margen de riesgo es necesario haber calculado previamente el capital de solvencia obligatorio para diversos períodos futuros, con la complejidad que ello supone.

Desde un punto de vista contable, las provisiones técnicas son aquellas provisiones que se derivan inmediatamente de los contratos de seguro, pues se forman con una parte de las aportaciones de los asegurados y corresponden a la obligación futura que la compañía tiene con el asegurado.

Reflejan el valor cierto o estimado de las obligaciones contraídas por razón de los contratos de seguros y de reaseguros suscritos, así como el de los gastos relacionados con el cumplimiento de dichas obligaciones, y constituyen la partida más importante del pasivo de las entidades aseguradoras.

Las provisiones técnicas se invertirán en determinados activos aptos, cumpliendo los principios de congruencia, rentabilidad, seguridad, liquidez, dispersión y diversificación, teniendo en cuenta el tipo de operaciones realizadas, así como las obligaciones asumidas por la entidad.

Se incluirán en el balance de las entidades aseguradoras el importe de las obligaciones asumidas que se derivan de los contratos de seguros y reaseguros. Se constituyen por un importe suficiente para garantizar, atendiendo a criterios prudentes y razonables, todas las obligaciones derivadas de los referidos contratos, así como para mantener la necesaria estabilidad de la entidad aseguradora frente a oscilaciones aleatorias o cíclicas de la siniestralidad o frente a posibles riesgos especiales.

2.1. Provisión para siniestros pendientes

Una póliza de seguro proporciona, a cambio del pago de una prima, la aceptación de la obligación de realizar pagos a la persona asegurada en la ocurrencia de uno o más eventos especificados (reclamaciones de seguro) durante un período de tiempo específico. La ocurrencia de los eventos especificados y la cantidad del pago generalmente se modelan como variables aleatorias.

Las reservas de siniestros pendientes en el seguro general son un tipo de reserva técnica o provisión contable en los estados financieros de una aseguradora. La reserva técnica de una compañía de seguros está establecida para proporcionar una responsabilidad futura por las reclamaciones que se han producido pero que aún no se han liquidado.

Dentro del cálculo de provisiones para siniestros pendientes distintos al de Vida se encuentran dos tipos de reservas:

- Provisión para siniestros declarados pendientes de liquidación o pago, también conocidos como siniestros RBNS.
- Provisión para siniestros ocurridos pero no declarados, también conocidos como siniestros IBRN.

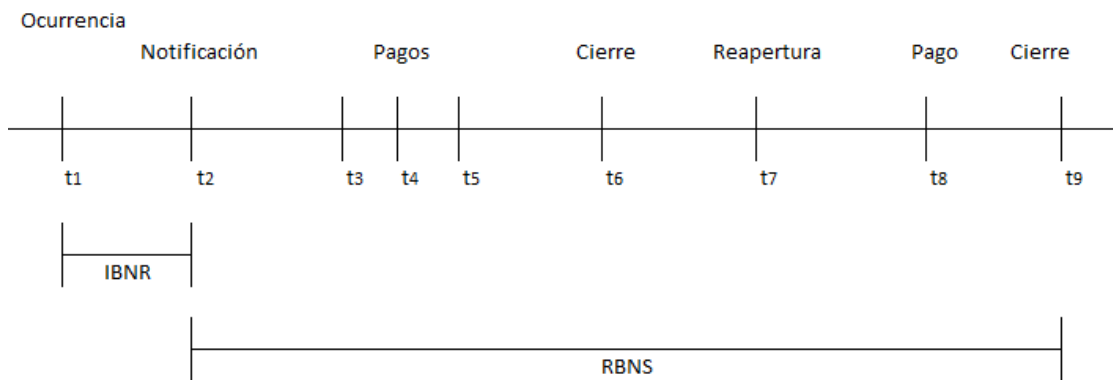
En general, hay un retraso en la liquidación de la reclamación por parte de la aseguradora; las razones típicas son:

- Retraso en la presentación de informes (intervalo de tiempo entre la ocurrencia de las reclamaciones y el informe de las reclamaciones en la compañía de seguros).
- Retraso en la liquidación porque generalmente lleva tiempo evaluar el tamaño total de la reclamación.

La diferencia de tiempo entre la ocurrencia de reclamaciones y el cierre de reclamaciones (liquidación final) puede demorar días (por ejemplo, en un seguro de propiedad) pero también puede demorar años (generalmente en un seguro de responsabilidad civil).

En la Figura 1 se describen las diferentes fases a las que se puede enfrentar una compañía de seguros desde la ocurrencia de un siniestro hasta la finalización o cierre de su pago. Según el esquema de la Figura 1, la ocurrencia de un siniestro tiene lugar en el momento del tiempo t_1 y posteriormente es notificado a la compañía en t_2 . En este recorrido de tiempo, a este tipo de siniestros se les llama IBNR. Seguidamente, la compañía efectúa uno o varios pagos, t_3 , t_4 , t_5 , hasta el cierre del siniestro en t_6 . Puede ser que, según el tipo de siniestro y los resultados de los procesos judiciales, los siniestros sean reabiertos en t_7 con el objetivo de efectuar pagos adicionales en t_8 , para que finalmente se realice el cierre definitivo del siniestro en t_9 . El periodo de tiempo entre que se ha notificado el siniestro (t_2) y su cierre definitivo (t_9), hace referencia a los tipos de siniestros RBNS.

Figura 1. Fases de la evolución de los pagos de un siniestro.



Fuente: Elaboración propia a partir de la publicación de Antonio y Plat (2014).

Estimar las reservas de siniestros IBNR y RBNS es uno de los trabajos más importantes que un actuario tiene en una compañía de seguros. Estas estimaciones afectan a la rentabilidad de la compañía, y las malas estimaciones podrían tener graves consecuencias. Si el actuario sobreestima, podría llevar a que la compañía de seguros tenga menos dinero para invertir en el mercado. También podría hacer que parezca que la empresa no se está desempeñando bien, lo que podría llevarlos a aumentar el precio de sus productos de seguros. Si el actuario subestima, puede parecer que la empresa está funcionando bien, y puede que bajen los precios. Esto los haría mal equipados para reclamaciones imprevistas de accidentes pasados, lo que podría tener graves consecuencias para la compañía de seguros. El peor de los casos sería su insolvencia.

2.1.1. Reservas de siniestros IBNR

El término IBNR responde a la abreviación inglesa "*Incurred But Not Reported*". Como se ha definido anteriormente, se trata de aquellos siniestros que, habiendo ocurrido, no han sido comunicados a la entidad aseguradora durante la anualidad de su ocurrencia, por lo que son desconocidos para el asegurador directo y el reasegurador.

Tal y como se detalla en Antonio y Plat (2014) y en Boj y Esquinas (2016), los siniestros IBNR se corresponden con siniestros que se producen antes del momento actual de cálculo de reservas, pero su declaración, y, en consecuencia, el pago correspondiente, tiene lugar en un momento futuro. Es el caso en que el momento del cálculo de reservas está situado en el intervalo $[t_1, t_2)$.

Para este tipo de siniestros no se dispone de la información en el momento de ocurrencia ni de los factores de riesgo individuales, únicamente se dispone de información histórica agregada de los últimos periodos que se suele recoger en un triángulo de desarrollo. De este modo, su predicción se realiza a partir de la cuantía total de los siniestros por año de ocurrencia y por año de desarrollo.

A continuación, se muestran algunos de los posibles motivos para la ocurrencia de siniestros IBNR:

- Avisos tardíos.
- Tramitación retrasada.
- Reconocimiento tardío.
- Sentencias judiciales.

2.1.2. Reservas de siniestros IBNER

La palabra IBNER son las siglas que se corresponden a la expresión inglesa “*Incurred But Not Enough Reserved*”, que significa siniestros ocurridos, pero no comunicados correctamente, bien por falta de datos, o bien por estar mal valorados.

Esta palabra se utiliza en el caso del encarecimiento de siniestros conocidos que sobrepasan la reserva originalmente constituida para dichos siniestros, es decir, pérdidas sobre la liquidación de siniestros conocidos.

Algunos de los posibles motivos para la ocurrencia de los siniestros IBNER son los siguientes:

- Incremento de precios.
- Incremento de los salarios.
- Sentencias judiciales.
- Factores médicos.
- Reservas de renta.

La diferencia principal entre los siniestros IBNR y los siniestros IBNER es que mientras los primeros nunca han sido notificados a la compañía, los segundos sí que lo han sido, pero no correctamente por lo que se tiene que volver a calcular el valor total del siniestro.

2.1.3. Reservas de siniestros RBNS

Las reservas de siniestros RBNS, cuyas siglas corresponden a “*Reported But Not Settled*”, son las reservas que se calculan para siniestros cuya ocurrencia tienen lugar antes del momento de cálculo de reservas, aunque la totalidad de su pago (τ) se efectúe en un momento futuro, por ejemplo, en el período $t_2 \leq \tau \leq t_6$ o bien $t_2 \leq \tau \leq t_9$, según la Figura 1. En este tipo de reservas se incluye una estimación de los pagos de aquellos siniestros que han ocurrido y se han comunicado a la compañía pero que aún no se han terminado de pagar. Para esta clase de siniestros se conoce el momento de ocurrencia y se dispone de información relativa a los factores de riesgo del objeto asegurado, del tomador de la póliza y del entorno.

Por lo tanto, para realizar la predicción de los pagos futuros se puede utilizar la información individual del entorno del siniestro que vendrá explicada por los factores de riesgo, los cuáles aportarán la información predictora de la siniestralidad del coste del siniestro.

Para el cálculo de este tipo de siniestros se requiere una comprensión de dónde están situadas en el tiempo las reclamaciones en el proceso de liquidación. El cálculo es una estimación basada en la información que tiene una aseguradora a mano, incluida la información de los documentos judiciales.

Según el modelo que se esté utilizando, en muchos casos puede ser difícil para un actuario distinguir la diferencia entre los siniestros IBNR y RBNS.

3. MODELO DOUBLE CHAIN LADDER

El modelo DCL es un modelo paramétrico propuesto por Martínez-Miranda *et al.* (2012) para la estimación de las provisiones técnicas de los seguros de No Vida. Este modelo es una extensión del modelo presentado por Verrall *et al.* (2010) y Martínez-Miranda *et al.* (2011).

Los autores se basan en el clásico algoritmo CL para la estimación de los parámetros involucrados en el modelo. Este algoritmo se utiliza dos veces, una para el triángulo de frecuencias de reclamaciones de siniestros y otra para el triángulo de reclamaciones pagadas. Por este motivo, este modelo se denomina Double Chain Ladder.

3.1. Datos e hipótesis

Para este modelo se necesitan dos triángulos definidos de la siguiente manera:

- Triángulo de frecuencias de siniestros: $\aleph_m = \{N_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m - 1; i + j \leq m\}$, donde N_{ij} es el número total de reclamaciones de siniestros ocurridas en el año i y notificadas en año $i + j$.
- Triángulo de pagos agregados: $\Delta_m = \{X_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m - 1; i + j \leq m\}$, donde X_{ij} es el total pagado por reclamaciones ocurridas en el año i y liquidadas con j periodos de retraso desde el año i .

El modelo está construido considerando tres componentes estocásticos que son:

- El retraso de liquidación.
- Los pagos individuales.
- El número de siniestros reportados.

Los triángulos de frecuencia (\aleph_m) y de pagos (Δ_m) nos muestran datos reales que habitualmente están disponibles en la mayoría de las líneas de negocio de las aseguradoras. Con este modelo se puede definir un nuevo triángulo no observado entre esos dos, el cual sería el triángulo de reclamaciones pagadas $\aleph_m^{paid} = \{N_{ij}^{paid} : i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m - 1; i + j \leq m\}$. N_{ij}^{paid} es el número total de reclamaciones de siniestros ocurridos en el año i pero que se liquidan en el año $i + j$. Este retraso de liquidación, o también conocido como retraso RBNS, es una componente estocástica que se modeliza mediante la variable N_{ij}^{paid} . Asumiendo que d es el mayor periodo de retraso, con $d \leq m - 1$,

$$N_{ij}^{paid} = \sum_{l=0}^{\min\{j,d\}} N_{i,j-l,l}^{paid},$$

donde N_{ijl}^{paid} muestra el número de pagos futuros que se originan a partir de los siniestros ocurridos en el año i , notificados en el año $i + j$ y que finalmente se liquidan en el año $i + j + l$.

El modelo también define otra variable que representa los pagos realizados por cada reclamación individual. Esta variable, $Y_{ij}^{(k)}$, denota los pagos individuales que surgen de las N_{ij}^{paid} reclamaciones ocurridas en el año i y reportadas en el año $i + j$. A partir de $Y_{ij}^{(k)}$, los pagos agregados se pueden describir como:

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}^{paid}} Y_{ij}^{(k)}.$$

El modelo esta formulado bajo las siguientes hipótesis:

1. Independencia.

Las variables $Y_{ij}^{(k)}$ son independientes del número de siniestros de N_{ij} , y también de los retrasos RBNS e IBNR. Además, se supone que las reclamaciones se liquidan con un solo pago o, tal vez, como sin ningún pago (“reclamaciones nulas”).

2. El retraso RBNS.

Dado N_{ij} , la distribución de los números de reclamaciones pagadas sigue una distribución multinomial, de modo que el vector aleatorio denota las probabilidades de retraso tales que $\sum_{l=0}^d p_l = 1$ y $0 < p_l < 1$, para $\forall l$.

3. Los pagos.

Los pagos individuales $Y_{ij}^{(k)}$ son mutuamente independientes con media μ_i y varianza σ_i^2 para cada $i = 1, \dots, m$.

$$E[Y_{ij}^{(k)}] = \mu_i \cong \mu \gamma_i,$$

$$\text{Var}[Y_{ij}^{(k)}] = \sigma_i^2 \gamma_i^2 = \sigma^2.$$

Se supone que μ_i y σ_i^2 son los factores media y varianza comunes a todos los años de origen i . El parámetro γ_i es la inflación asociada a los años de accidente. A diferencia de Verrall *et al.* (2010), donde se asume que $\gamma_i = 1$, ($\forall i = 1, \dots, m$), aquí la distribución depende del año de accidente.

4. La frecuencia de los siniestros.

Las frecuencias de notificación N_{ij} son variables aleatorias independientes que se distribuyen según una Poisson con parametrización multiplicativa:

$$E[N_{ij}] = \alpha_i \beta_j, \quad \text{donde} \quad \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j = 1.$$

Si se utilizan las hipótesis citadas anteriormente, la media condicional de X_{ij} se puede describir como:

$$E[X_{ij} | \aleph_m] = \sum_{l=0}^{\min(j,d)} N_{i,j-l} p_l \mu \gamma_i, \quad (1)$$

y la media incondicional como:

$$E[X_{ij}] = \alpha_i \mu \gamma_i \sum_{l=0}^{\min(j,d)} \beta_{j-l} p_l. \quad (2)$$

La varianza condicional de X_{ij} , bajo las hipótesis del modelo, es aproximadamente proporcional a la media. En este caso se muestra como:

$$V[X_{ij} | \aleph_m] = \varphi_i E[X_{ij} | \aleph_m],$$

donde $\varphi_i = \gamma_i \varphi$ y $\varphi = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu}$.

Existe una ligera variación en el modelo con las formulas (1) y (2) que proporciona un enlace con el método CL. Este modelo es muy similar, con la pequeña diferencia que sustituye las $p = (p_0, \dots, p_d)$ por los valores sin restricciones $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{m-1})$.

$$E[X_{ij} | \aleph_m] = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l} \pi_l \mu \gamma_i, \quad (3)$$

$$E[X_{ij}] = \alpha_i \mu \gamma_i \sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l. \quad (4)$$

Los valores de p y π suelen ser muy similares, por lo que la predicción también lo será.

3.2. Estimación de los parámetros

Los parámetros involucrados en el modelo DCL son los siguientes:

- Las probabilidades de retraso que son parámetros asociados al retraso del pago desde la notificación del siniestro.

$$p_0, \dots, p_d.$$

- Los parámetros de la distribución de los pagos individuales como son la media, la varianza y el parámetro inflación.

$$\mu, \sigma^2, \{\gamma_i: i = 1, \dots, m\}.$$

- Los parámetros que describen la media de la distribución de las frecuencias de los siniestros notificados donde α_i es el parámetro fila CL asociado al triángulo de frecuencias y se interpreta como el número total de reclamaciones notificadas originadas en el año i , y β_j es el parámetro columna CL y se interpreta como la proporción de reclamaciones que se notifican con j años de retraso desde que han sido originadas (desde el año del accidente).

Para el cálculo de todos estos parámetros se puede aplicar el algoritmo del modelo CL. En el caso del cálculo de las probabilidades de retraso, el modelo DCL utiliza los parámetros CL estimados que se obtienen a partir de los triángulos de frecuencia y de pagos. Los dos conjuntos de estimadores serán $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j)$, que se consiguen a partir de aplicar el algoritmo CL al triángulo de pagos de reclamaciones Δ_m , y, (α_i, β_j) , que se obtienen con el triángulo de frecuencias.

Aplicando el algoritmo CL, se produce la estimación de los factores de desarrollo $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, m - 1$, los cuales se pueden convertir en estimaciones de α_i y β_j con las siguientes formulas:

$$\beta_0 = \frac{1}{\sum_{l=2}^{m-1} \lambda_l},$$

$$\beta_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\sum_{l=j}^{m-1} \lambda_l}, \quad j = 1, \dots, m - 1,$$

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{n-i} N_{ij} \prod_{j=n-i+1}^{m-1} \lambda_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Estas expresiones se pueden utilizar también para el cálculo de los estimadores del triángulo de pagos de reclamaciones para obtener $\tilde{\alpha}_i$ y $\tilde{\beta}_j$.

A partir de la obtención de estos conjuntos de estimadores conseguidos a partir de la aplicación del algoritmo CL a los triángulos de frecuencia y de pagos, se puede estimar el parámetro π del retraso en la notificación. Este estimador se puede calcular resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \beta_{m-1} & \dots & \beta_0 & \beta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Con lo que se obtiene la solución para los elementos individuales de $(\pi_l = 0, \dots, m - 1)$. Cabe destacar que los valores de π_l pueden ser negativos y que la suma de todos ellos sea mayor a 1.

Una vez calculados los valores de π , para encontrar las probabilidades de retraso (\hat{p}) es necesario estimar el máximo periodo de retraso d a partir de la suma del número sucesivo de $\hat{\pi}_l \geq 0$ dado que $\sum_{l=0}^{d-1} \hat{\pi}_l < 1 \leq \sum_{l=0}^d \hat{\pi}_l$, es decir, a partir de qué probabilidad la suma de todas ellas es mayor que 1. Una vez conseguido el máximo periodo ya se puede definir el parámetro \hat{p} :

$$\hat{p}_l = \hat{\pi}_l, \quad l = 0, \dots, d - 1,$$

$$\hat{p}_d = 1 - \sum_{l=0}^{d-1} \hat{p}_l.$$

Así, el vector de probabilidad de retraso será igual a $\hat{p} = (\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_{d-1}, 1 - \sum_{l=0}^{d-1} \hat{p}_l)$. Este parámetro es muy similar al calculado anteriormente $\hat{\pi}$ con la única diferencia que la suma de todas las probabilidades del vector \hat{p} siempre será igual a 1.

Para la estimación de los parámetros de la distribución de los pagos individuales se basa en la siguiente relación que surge del método CL:

$$\alpha_i \mu \gamma_i = \tilde{\alpha}_i. \quad (5)$$

A partir de (5), se puede obtener la siguiente relación para el cálculo del parámetro inflación:

$$\gamma_i = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\alpha_i \mu}, \quad \text{donde } i = 1, \dots, m.$$

Por supuesto, el modelo está técnicamente sobre-parametrizado ya que hay demasiados parámetros de inflación, así que la forma más sencilla es establecer que $\gamma_1 = 1$, para luego poder estimar la μ .

$$\mu = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\alpha_1}.$$

Finalmente, se puede estimar el parámetro de la varianza con la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \mu \varphi - \mu^2.$$

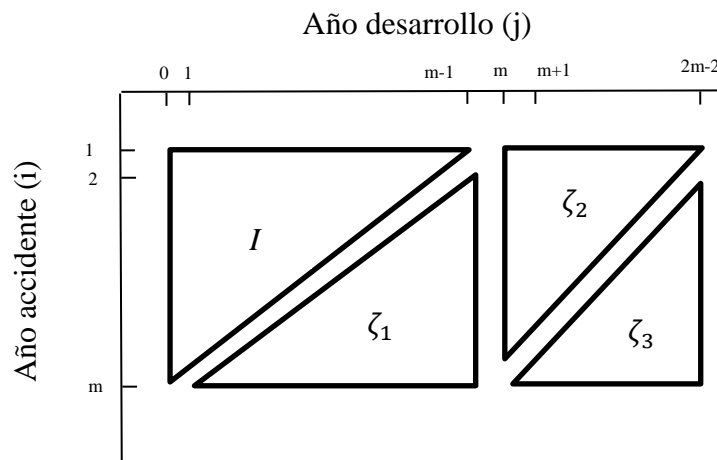
donde el parámetro φ es un parámetro de sobredispersión.

3.3. Estimación de las reservas IBNR y RBNS

Una vez se estiman los parámetros del modelo DCL, se puede pasar al cálculo de las reservas donde se pueden diferenciar entre las reservas para tipos de siniestros RBNS y IBNR. La suma de los dos tipos de reservas forma el total de las reservas.

A diferencia del modelo CL, donde solo se pueden calcular predicciones de las reservas dentro del triángulo inferior ζ_1 , el modelo DCL permite calcular predicciones fuera del triángulo (ζ_2 y ζ_3), es decir, predicciones con cola.

Figura 2. Dimensiones del triángulo de pagos agregados.



Fuente: Elaboración propia a partir del artículo DCL de Martínez-Miranda *et al.* (2012).

Los conjuntos ζ_1 , ζ_2 y ζ_3 de la Figura 2 se definen de la siguiente manera:

$$\zeta_1 = \{i = 2, \dots, m; j = 1, \dots, m - 1; i + j = m + 1, \dots, 2m - 1\},$$

$$\zeta_2 = \{i = 1, \dots, m - 1; j = m, \dots, 2m - 2; i + j = m + 1, \dots, 2m - 1\},$$

$$\zeta_3 = \{i = 2, \dots, m; j = m, \dots, 2m - 2; i + j = 2m, \dots, 3m - 2\}.$$

3.3.1 Estimación de las reservas IBNR y RBNS ignorando el efecto cola

Según el parámetro de retraso que se escoja, la estimación de las reservas de los siniestros se obtiene a partir de dos fórmulas distintas.

En el caso de usar el parámetro π , en la estimación de las reservas RBNS se sustituyen los parámetros estimados del modelo DCL en la expresión (3):

$$E[X_{ij} | \mathfrak{N}_m] = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l} \pi_l \mu \gamma_i,$$

por lo que el estimador de las reservas RBNS viene dado por:

$$\hat{X}_{i,j}^{RBNS} = \sum_{l=i-m+j}^j N_{i,j-l} \pi_l \mu \gamma_i.$$

De forma similar, el estimador de las reservas IBNR es:

$$\hat{X}_{i,j}^{IBNR} = \sum_{l=0}^{i-m+j-1} N_{i,j-l} \pi_l \mu \gamma_i.$$

En el caso de usar el parámetro p , se sustituyen los parámetros estimados en la expresión (1):

$$E[X_{ij} | \mathfrak{N}_m] = \sum_{l=0}^{\min(j,d)} N_{i,j-l} p_l \mu \gamma_i,$$

por lo que el estimador de las reservas RBNS viene dado por:

$$\hat{X}_{i,j}^{RBNS} = \sum_{l=i-m+j}^{\min(j,d)} N_{i,j-l} p_l \mu \gamma_i,$$

y el estimador de las reservas IBNR es:

$$\hat{X}_{i,j}^{IBNR} = \sum_{l=0}^{\min(i-m+j-1,d)} N_{i,j-l} p_l \mu \gamma_i.$$

3.3.2 Estimación de las reservas IBNR y RBNS con efecto cola

Como se ha dicho anteriormente, el modelo DCL permite calcular las predicciones de la cola. Aunque el modelo CL no incluye estimaciones para años de desarrollo más allá del máximo ya observado, es necesario incluirlas al establecer una reserva. En el contexto del CL, esto a menudo se hace ajustando una curva de alguna forma a los parámetros del año de desarrollo. La cola consiste en la estimación de las reservas de los triángulos (ζ_2 y ζ_3) de la Figura 2.

La estimación de las reservas para la cola, según la fórmula (1), viene dada por:

$$\hat{R}^{tail} = \sum_{(i,j) \in \zeta_2 \cup \zeta_3} \sum_{l=0}^{\min(j,d)} N_{i,j-l} p_l \mu \gamma_i,$$

por lo que solo se puede estimar reservas en la cola para siniestros IBNR.

Si, por el contrario, se usa el modelo que reproduce las estimaciones del modelo CL, la estimación de la cola será:

$$\hat{R}^{tail} = \sum_{(i,j) \in \zeta_2 \cup \zeta_3} \sum_{l=0}^{\min(j,d)} N_{i,j-l} \pi_l \mu \gamma_i.$$

4. APLICACIÓN DEL MODELO A DATOS REALES

4.1. El paquete DCL

El modelo DCL tiene un paquete en el programa informático R llamado DCL que fue creado por Martínez-Miranda *et al.* (2013b). Este paquete proporciona una serie de funciones para el modelado estadístico y la previsión en la reserva de reclamaciones en seguros de No Vida bajo el modelo de DCL. Utilizando distintas funciones específicas, se pueden estimar de diferente manera los resultados de las reservas según nuestro criterio, se pueden generar gráficos para visualizar y obtener intuición sobre los datos (triángulos *run-off*), descomponer el método CL bajo el modelo DCL, visualizar la función de retraso y la inflación, introducir conocimiento experto sobre la inflación de gravedad, las reclamaciones nulas, etc.

El paquete DCL ofrece la posibilidad de cargar los datos de tres tipos diferentes de triángulos para poder aplicarlos en las distintas funciones y ver los resultados. Estos tres tipos de triángulos son los siguientes:

- Triángulo de frecuencia de reclamaciones de siniestros: Contiene datos reales con la cantidad de siniestros reportados de una importante compañía aseguradora.
- Triángulo de pagos agregados: Contiene datos reales de una importante compañía con la cantidad de las reclamaciones pagadas.
- Triángulo de datos incurridos: Contiene estimaciones subjetivas sobre los pagos RBNS futuros.

A continuación, se destacan las principales funciones que se utilizan para la aplicación del modelo:

- `dcl.estimation`

Esta función calcula los distintos parámetros del modelo DCL. El resultado que se obtiene es la estimación de los parámetros de retraso π y p , el parámetro de inflación γ , la media μ y la varianza σ^2 , los parámetros α y β para los triángulos de pagos y de número de siniestros, y los dos triángulos completos.

- `dcl.predict`

Esta función permite calcular las predicciones de las reservas. Las predicciones se dividen entre reservas RBNS y IBNR.

En esta función se pueden añadir distintos argumentos:

- **Model:** Se puede definir con un 0, 1 o 2. En el caso de `Model = 0` o `1`, se utilizan las probabilidades de retraso generales, es decir, las probabilidades π . En el caso de fijar un `2`, se consideran las probabilidades de retraso ajustadas (p). Por último, añadir que cuando `Model = 0` no se tiene en cuenta el número actual de reclamaciones del triángulo de frecuencia de siniestros, por lo que reproduce los resultados del método CL distinguiendo entre reservas RBNS y IBNR.
- **Tail:** Hace referencia a la cola, es decir, si se desea que calcule predicciones más allá de la longitud del triángulo de datos o no.
- **Summ.by:** Se puede escoger `summ.by = "diag"`, para calcular los pasivos pendientes previstos en los periodos de calendario futuros (sumas diagonales), `summ.by = "fila"` para sumas por periodos de suscripción (sumas de fila); o `summ.by = "celda"` para obtener solo las predicciones de celdas individuales.

Como resultado de esta función, se obtiene una tabla con las predicciones de las reservas RBNS, las IBNR, la suma total de las dos, y las reservas usando el método CL. También se muestra el triángulo completo de los pagos de las reservas RBNS, IBNR y su suma total.

- `dcl.boot`

Esta función proporciona la distribución de las reservas de IBNR, RBNS y total (RBNS + IBNR) por años de calendario y filas utilizando el método *bootstrapping*. La función permite escoger el número de simulaciones a realizar, aunque su valor por defecto es de 999.

El resultado muestra las matrices de las simulaciones de las reservas RBNS, IBNR y la suma total. Cada matriz está formada según el número de simulaciones que se otorgue a la función. También aporta un resumen con la distribución de cada tipo de reserva y el total.

Otras funciones a destacar, aunque no se tratan en este trabajo, son las predicciones de las reservas a partir del uso de información adicional. El paquete DCL nos permite calcular las predicciones de las reservas a partir del método BDCL (Bornhuetter Double Chain Ladder). Con la función *bdcl.estimation*, se calculan los parámetros del método BDCL. Este método, que combina el modelo DCL con Bornhuetter Ferguson, se explica con detalle en Martínez-Miranda *et al.* (2013a).

4.2. Los datos de los triángulos

Los datos utilizados para la aplicación del modelo DCL son de la base de datos “Meyers-Shi” que se reproducen en el Apéndice A de Taylor y Xu (2016). Estos datos hacen referencia al historial de reclamaciones del 31 de diciembre de 1997 respecto a los 10 años de accidentes desde el año 1988 hasta el 1997. Las cuantías se describen en Meyers & Shi (2011) y los dos triángulos de siniestros (pagos de reclamaciones y frecuencia de siniestros) se encuentran en Taylor y Xu (2016). Es de resaltar que la búsqueda de unos datos que incorporaran toda la información requerida para la aplicación del modelo DCL ha sido una tarea importante que complementa la parte de la investigación realizada en este trabajo.

La base de datos “Meyers-Shi” contiene historias de pérdidas pagadas respecto de seis líneas de negocios que son las siguientes:

1. Automóvil privado de pasajeros.
2. Auto comercial.
3. Compensación a los trabajadores.
4. Negligencia médica.
5. Responsabilidad del producto.
6. Otra responsabilidad.

En este trabajo se va a aplicar el modelo DCL a los datos de la compañía #1694. Se van a usar los siguientes triángulos de pagos de reclamaciones y de frecuencia de siniestros reportados, donde los datos de los triángulos están sin acumular. Las cantidades de los pagos están en dólares americanos (\$).

Figura 3. Triángulos de pagos de reclamaciones y frecuencias de siniestros.

Año de accidente	Cantidad de pagos de reclamaciones durante el año de desarrollo (\$)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1988	30515	38802	22027	14027	8984	4990	3034	2230	1173	817
1989	39708	45440	23634	15867	8236	6422	4398	2311	1896	
1990	46048	49806	28397	16800	9427	6885	3937	2731		
1991	48445	42578	25783	18192	10272	5330	3832			
1992	41470	40719	21793	12222	7492	5412				
1993	34998	27593	14256	8414	4734					
1994	25756	24086	11352	5085						
1995	23079	21427	10770							
1996	20902	18046								
1997	19712									

Año de accidente	Número de reclamaciones reportadas durante el año de desarrollo									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1988	38217	6364	673	183	92	45	12	12	7	8
1989	42362	6986	627	225	82	32	31	20	23	
1990	53186	4554	683	216	75	52	28	30		
1991	49899	4337	360	128	58	42	29			
1992	45517	3829	358	113	55	21				
1993	35630	2964	281	141	59					
1994	29286	2660	297	131						
1995	27468	2400	314							
1996	24791	1946								
1997	23925									

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de Taylor y Xu (2016).

4.3. Estimación de los parámetros

Se usa la función *dcl.estimation* para obtener la estimación de los parámetros asociados a los triángulos de pagos y de frecuencia de siniestros de la Figura 3.

En esta Tabla 1 se muestran los principales parámetros estimados del modelo para nuestros datos.

Tabla 1: Parámetros estimados.

Año de origen	α_i	β_j	$\tilde{\alpha}_i$	$\tilde{\beta}_j$	$\hat{\pi}_i$	\hat{p}_i	γ_i
1	45.613,00	0,89046	126.599,00	0,29363	0,3298	0,3298	1,0000
2	50.396,84	0,09265	148.872,74	0,29134	0,2929	0,2929	1,0643
3	58.852,71	0,00993	166.968,70	0,15923	0,1447	0,1447	1,0222
4	54.901,76	0,00343	159.872,53	0,09869	0,0912	0,0912	1,0492
5	49.961,19	0,00140	137.242,09	0,05854	0,0530	0,0530	0,9897
6	39.157,39	0,00073	99.831,79	0,03926	0,0363	0,0363	0,9186
7	32.488,12	0,00047	78.630,46	0,02523	0,0230	0,0230	0,8720
8	30.393,05	0,00040	74.273,83	0,01643	0,0149	0,0149	0,8805
9	27.195,95	0,00031	66.580,11	0,01114	0,0101	0,0101	0,8821
10	26.867,93	0,00017	67.131,10	0,00645	0,0056	0,0041	0,9002

Fuente: Elaboración propia.

Los parámetros α_i y β_j son los parámetros fila y columna respectivamente del triángulo de frecuencia de siniestros. En el caso de α_i , parámetro fila, nos indica el número total de reclamaciones notificadas originadas en el año i . Por ejemplo, el parámetro $\alpha_1 = 45.613$ es la suma de todas las reclamaciones que hacen referencia al año 1988. En el caso de β_j , parámetro columna, nos indica la proporción de reclamaciones que se notifican con j años de retraso desde el año del accidente. Como se puede apreciar en la tabla, casi un 90% de las reclamaciones se reportan en el mismo año del accidente, $\beta_1 = 0,8904$.

Para el caso del triángulo de pagos de reclamaciones también se obtiene los parámetros $\tilde{\alpha}_i$ y $\tilde{\beta}_j$. En este caso $\tilde{\alpha}_i$, hace referencia al total de pagos originados desde el año i . Para $\tilde{\beta}_j$, nos indica la proporción de la cantidad de pagos que se liquidan con j años de retraso desde el año del accidente. A diferencia del parámetro β_j , el porcentaje en la cantidad de pagos está mucho más repartido en los primeros años lo que significa que la compañía no paga siempre el siniestro en el mismo año de origen, sino que se suele retrasar en el pago.

Los parámetros de retraso, que se calculan a partir de resolver el sistema de ecuaciones lineal usando las β_j y $\tilde{\beta}_j$, nos indican el retraso del pago desde la notificación del siniestro. En los primeros 5 años existe una posibilidad de retraso en el pago ya que su porcentaje es superior a un 5% y a partir de los siguientes el porcentaje es casi nulo. El porcentaje p_l es similar al π_l con la única diferencia en el año de origen 10 debido a que la suma de todos los porcentajes debe ser igual a 1, por lo que $p_{10} = 1 - \sum_{l=0}^{d-1} p_l$.

Por último, el parámetro inflación γ_i representa la inflación en los pagos asociados a reclamaciones originadas en el año i . Para el primer año, como se ha descrito anteriormente, el modelo fija $\gamma_1 = 1$.

La media estimada del modelo DCL es de 2,7755, la cual se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$\mu = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{126.599}{45.613} = 2,7755.$$

Por otro lado, la varianza se obtiene de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \mu\varphi - \mu^2 = 2,7788 \cdot 144,3317 - 2,7788^2 = 393,34.$$

En este caso, para el parámetro μ se usa la media ajustada calculada en el modelo. El valor $\varphi = 144,3317$, es un parámetro de sobredispersión que se estima para poder calcular la varianza.

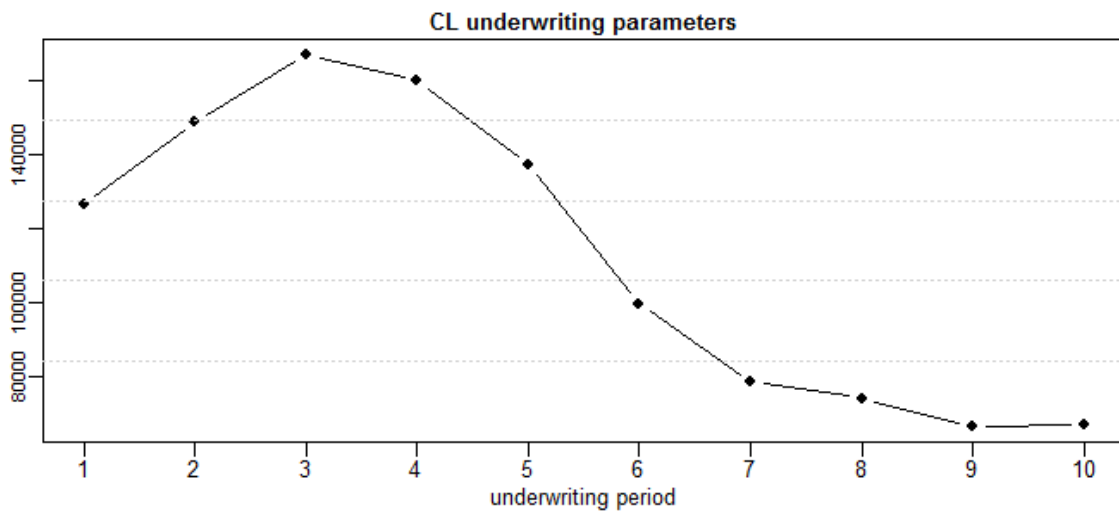
Tabla 2: Media y varianza.

μ	σ^2
2,7755	393,3411

Fuente: Elaboración propia.

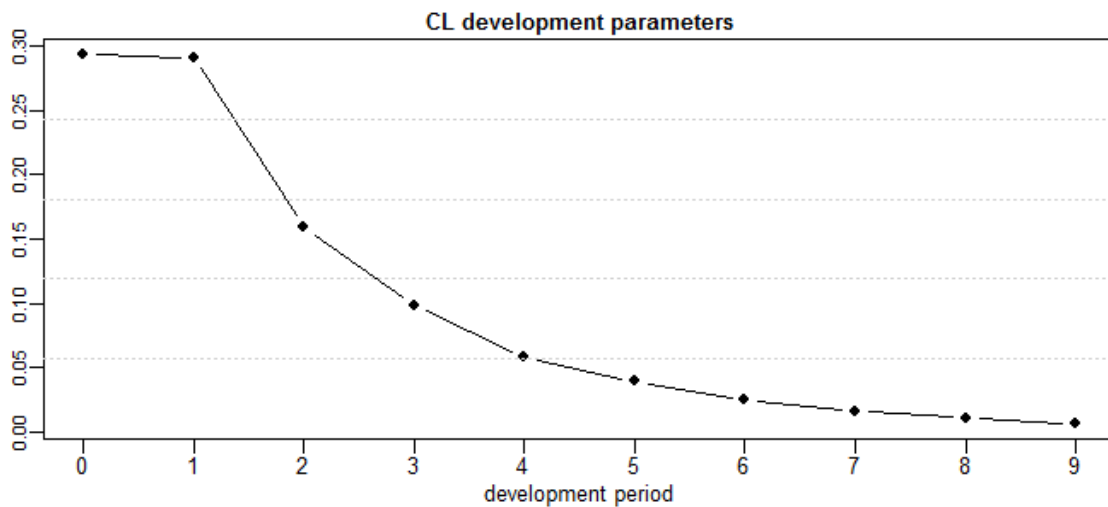
A continuación, se muestran los siguientes gráficos de los parámetros estimados:

Gráfico 1: Estimación del parámetro $\tilde{\alpha}_i$



Fuente: Elaboración propia.

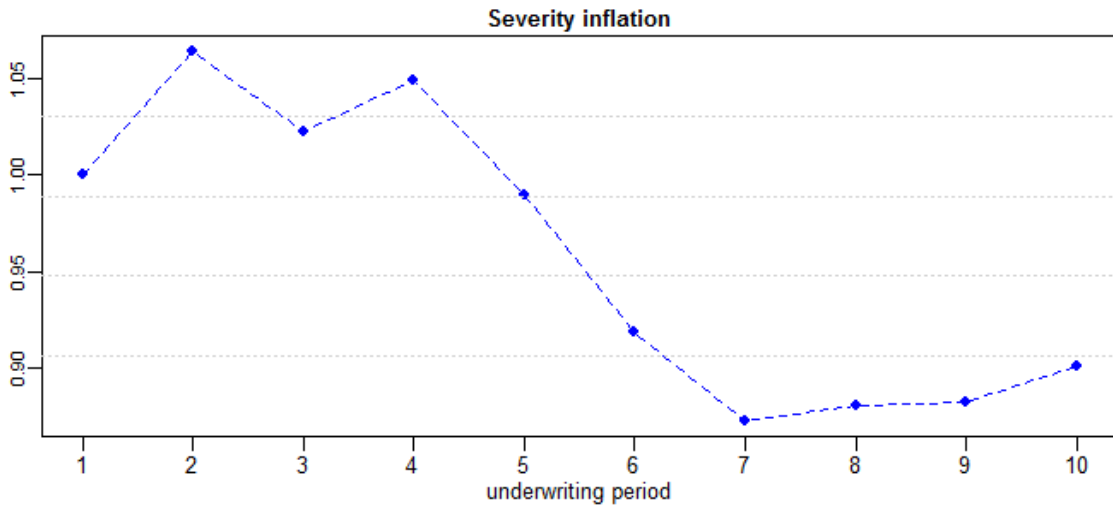
Gráfico 2: Estimación del parámetro $\tilde{\beta}_j$.



Fuente: Elaboración propia

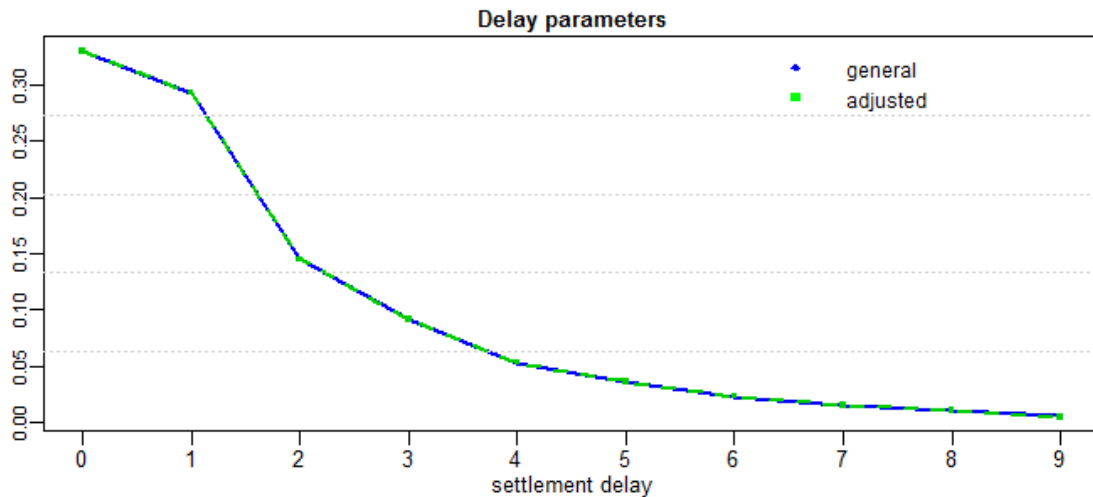
Estos dos gráficos representan los parámetros $\tilde{\alpha}_i$ y $\tilde{\beta}_j$. El Gráfico 1 muestra los valores del vector $\tilde{\alpha}_i$, para el cual se observa que, en los tres primeros años, la cantidad de pagos de las reclamaciones va en aumento, y a partir de allí, va disminuyendo. En el Gráfico 2 se hace referencia al vector $\tilde{\beta}_j$ donde se puede ver claramente como en el año de la notificación del accidente y en el siguiente, el porcentaje de los pagos de las reclamaciones es muy parecido. A partir de los siguientes años, el porcentaje se reduce exponencialmente hasta llegar a casi cero.

Gráfico 3: Estimación del parámetro de inflación.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4: Estimación de los parámetros de retraso p y π .



Fuente: Elaboración propia.

Los siguientes gráficos son los parámetros de inflación y de retraso. En el Gráfico 3, la inflación está por encima de 1 los primeros cuatro años y a partir de allí baja por debajo del 1. Respecto a los parámetros de retraso (π = general y p = adjusted), tienen una tendencia idéntica a excepción del último valor donde p es más pequeño a π debido a que la suma de todas las probabilidades de retraso p ha de ser igual a 1.

4.4. Estimación de las reservas

El siguiente paso es estimar las reservas RBNS y IBNR. La función del paquete *dcl.estimation* ofrece la posibilidad de estimar las reservas de distintas formas. Se va a proceder al cálculo de la estimación de las reservas, según el efecto cola o no, aplicando diferentes argumentos para poder comparar los diferentes resultados según lo que se utilice.

4.4.1 Estimación de las reservas sin efecto cola

En las siguientes estimaciones, no se va a tener en cuenta el efecto cola por lo que las predicciones serán hasta el tamaño del triángulo de pagos.

4.4.1.1 Estimación de las reservas ignorando el triángulo de frecuencia

La primera estimación que se realiza será la predicción de las reservas sin tener en cuenta el triángulo de frecuencia de siniestros. Como parámetro de retraso, se usa el parámetro π .

Se asume los parámetros de retraso π , por lo que se puede comprobar en la Tabla 3 que los resultados coinciden con el método CL, pero diferenciando entre reservas RBNS y IBNR.

Tabla 3: Estimación de las reservas sin triángulo de frecuencias.

Años futuros	RBNS	IBNR	Total (RBNS+IBNR)	Chain Ladder
1	52.444,59	2.482,58	54.927,17	54.927,17
2	29.725,24	2.606,05	32.331,29	32.331,29
3	18.020,07	1.606,28	19.626,35	19.626,35
4	10.633,70	1.075,82	11.709,52	11.709,52
5	6.381,10	676,21	7.057,31	7.057,31
6	3.664,80	458,67	4.123,47	4.123,47
7	2.027,72	296,74	2.324,46	2.324,46
8	994,53	183,04	1.177,57	1.177,57
9	332,40	100,83	433,23	433,23
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Total	124.224,15	9.486,22	133.710,37	133.710,37

Fuente: Elaboración propia.

Según se observa en la Tabla 3, el total de las reservas calculadas es de 133.710,37 \$. Estas reservas totales se dividen entre las reservas RBNS con 124.224,15 \$ y las IBNR con 9.486,22 \$. La repartición total de las reservas es de 92,91 % en las RBNS y 7,09% en las IBNR.

4.4.1.2 Estimación de las reservas con parámetro π

La segunda estimación de las reservas de nuestros datos será con el parámetro de retraso π . Los resultados son los siguientes:

Tabla 4: Estimación de las reservas usando π como parámetro de retraso.

Años futuros	RBNS	IBNR	Total (RBNS+IBNR)	Chain Ladder
1	52.059,97	2.482,57	54.542,54	54.927,17
2	29.503,90	2.606,05	32.109,95	32.331,29
3	17.879,02	1.606,28	19.485,30	19.626,35
4	10.560,72	1.075,82	11.636,54	11.709,52
5	6.341,57	676,21	7.017,78	7.057,31
6	3.645,34	458,67	4.104,01	4.123,47
7	2.016,65	296,74	2.313,39	2.324,46
8	988,18	183,04	1.171,22	1.177,57
9	332,40	100,82	433,22	433,23
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Total	123.327,75	9.486,20	132.813,95	133.710,37

Fuente: Elaboración propia.

Para la Tabla 4, el total de las reservas calculadas es de 132.813,95 \$. Estas reservas totales se dividen entre las reservas RBNS con 123.327,75 \$ y las IBNR con 9.486,20 \$. La repartición total de las reservas es de 92,85 % en las RBNS y 7,15% en las IBNR.

Como se ha dicho anteriormente, al no tener en cuenta el efecto cola, las predicciones se calculan hasta el año futuro 9, que es la dimensión de nuestro triángulo.

Por lo tanto, la estimación a partir del modelo DCL es inferior a la estimación con el método CL. Esta diferencia es de 900 \$.

4.4.1.3 Estimación de las reservas con parámetro p

La siguiente estimación de las reservas de nuestros datos será con el parámetro de retraso p . Los resultados son los siguientes:

Tabla 5: Estimación de las reservas usando p como parámetro de retraso.

Años futuros	RBNS	IBNR	Total (RBNS+IBNR)	Chain Ladder
1	51.956,26	2.485,48	54.441,74	54.927,17
2	29.339,84	2.609,10	31.948,94	32.331,29
3	17.708,69	1.608,16	19.316,85	19.626,35
4	10.408,50	1.077,08	11.485,58	11.709,52
5	6.229,41	677,00	6.906,41	7.057,31
6	3.556,30	459,21	4.015,51	4.123,47
7	1.930,64	297,09	2.227,73	2.324,46
8	909,43	183,26	1.092,69	1.177,57
9	254,10	100,94	355,04	433,23
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Total	122.293,17	9.497,32	131.790,49	133.710,37

Fuente: Elaboración propia.

La estimación de las reservas con este criterio es de 122.293,17 \$ para las reservas de tipos de siniestros RBNS y de 9497,32 \$ para las reservas de tipos de siniestros IBNR, formando un total de reservas totales de 131.790,49 \$. Por lo que la repartición en porcentaje de las reservas es de 92'79% en reservas RBNS y 7'21% en las IBNR.

Si se comparan los dos métodos, el método DCL estima unas reservas inferiores en 1.920 \$ respecto al método CL.

4.4.2 Estimación de las reservas con efecto cola

Si se tiene en cuenta el efecto cola, las predicciones se pueden calcular más allá de las dimensiones del triángulo, (ver Figura 2). Estas estimaciones de cola solo se hacen en las reservas IBNR. Se va a proceder a calcular los tres tipos de estimaciones con efecto cola para ver los resultados.

4.4.2.1 Estimación de las reservas ignorando el triángulo de frecuencia

Tabla 6: Estimación de las reservas sin triángulo de frecuencias.

Años futuros	RBNS	IBNR	Total (RBNS+IBNR)	Chain Ladder
1	52.556,51	2.482,57	55.039,08	54.927,17
2	29.877,07	2.613,69	32.490,76	32.331,29
3	18.193,50	1.626,18	19.819,68	19.626,35
4	10.800,97	1.108,48	11.909,45	11.709,52
5	6.525,51	716,77	7.242,28	7.057,31
6	3.771,43	501,75	4.273,18	4.123,47
7	2.106,02	340,36	2.446,38	2.324,46
8	1.056,50	230,16	1.286,66	1.177,57
9	374,83	155,20	530,03	433,23
10		92,66	92,66	
11		31,06	31,06	
12		15,10	15,10	
13		7,65	7,65	
14		3,90	3,90	
15		1,90	1,90	
16		0,84	0,84	
17		0,30	0,30	
18		0,07	0,07	
Total	125.262,34	9.928,64	135.190,98	133.710,37

Fuente: Elaboración propia.

Según los resultados de la Tabla 6, las reservas RBNS son de 125.262,34 \$ y las reservas IBNR son 9.928,64 \$. La suma de ambas reservas es de 135.190,98 \$, por lo que el porcentaje de reservas RBNS en el total es de 92,66% y el de reservas IBNR de 7,34%.

En este caso, se aprecia que se calculan reservas IBNR más allá de las dimensiones del triángulo. La suma de las reservas IBNR en el efecto cola es de 153,48 \$.

En la comparación con el método CL, los resultados de las estimaciones son superiores. Esto se debe a las reservas del efecto cola, ya que provocan un aumento en las reservas de cada año.

4.4.2.2 Estimación de las reservas con parámetro π

Tabla 7: Estimación de las reservas usando π como parámetro de retraso.

Años futuros	RBNS	IBNR	Total (RBNS+IBNR)	Chain Ladder
1	52.209,10	2.482,57	54.691,67	54.927,17
2	29.706,43	2.613,69	32.320,12	32.331,29
3	18.049,46	1.626,18	19.675,64	19.626,35
4	10.711,98	1.108,48	11.820,46	11.709,52
5	6.461,05	716,77	7.177,82	7.057,31
6	3.734,12	501,75	4.235,87	4.123,47
7	2.087,51	340,36	2.427,87	2.324,46
8	1.044,83	230,16	1.274,99	1.177,57
9	367,53	155,20	522,73	433,23
10		92,66	92,66	
11		31,06	31,06	
12		15,10	15,10	
13		7,65	7,65	
14		3,90	3,90	
15		1,90	1,90	
16		0,84	0,84	
17		0,30	0,30	
18		0,07	0,07	
Total	124.372,01	9.928,64	134.300,65	133.710,37

Fuente: Elaboración propia.

Para las reservas RBNS se estima una predicción de 124.372,01 \$ y para las reservas IBNR de 9.928,64 \$, por lo que las reservas totales son de 134.300,65 \$.

La estimación divide las reservas en un 92'61% para las reservas RBNS y un 7'39% para las reservas IBNR.

Las provisiones IBNR calculadas debido al efecto cola son de 153'48 \$. A destacar que las reservas IBNR son idénticas a las calculadas ignorando el triángulo de frecuencias.

En este caso, para el modelo DCL, se estiman unas reservas superiores que en el caso CL. Como se ha dicho anteriormente, esto se debe principalmente al efecto cola, el cual no se puede calcular en el método CL.

4.4.2.3 Estimación de las reservas con parámetro p

Tabla 8: Estimación de las reservas usando p como parámetro de retraso.

Años futuros	RBNS	IBNR	Total (RBNS+IBNR)	Chain Ladder
1	52.082,31	2.485,48	54.567,79	54.927,17
2	29.512,98	2.616,76	32.129,74	32.331,29
3	17.859,21	1.628,09	19.487,30	19.626,35
4	10.539,54	1.109,77	11.649,31	11.709,52
5	6.332,52	717,61	7.050,13	7.057,31
6	3.633,00	502,34	4.135,34	4.123,47
7	1.991,18	340,76	2.331,94	2.324,46
8	956,45	230,43	1.186,88	1.177,57
9	280,95	155,38	436,33	433,23
10		82,86	82,86	
11		29,46	29,46	
12		14,42	14,42	
13		7,31	7,31	
14		3,70	3,70	
15		1,78	1,78	
16		0,76	0,76	
17		0,26	0,26	
18		0,05	0,05	
Total	123.188,14	9.927,22	133.115,36	133.710,37

Fuente: Elaboración propia.

Según se puede observar en la Tabla 7, las reservas RBNS son de 123.188'13 \$ y las reservas IBNR de 9.927'23 \$, lo que hacen un total de 133.115'36 \$ de reservas totales.

Esta estimación divide las reservas de manera que, el 92'54% son reservas calculadas para los siniestros RBNS y el 7'46% restante iría para los siniestros IBNR.

Se puede ver como dentro del cálculo de las reservas IBNR, 140'6 \$ son reservas para los próximos años a las dimensiones de los triángulos.

Si se compara el resultado total con el método CL, se puede observar que las reservas son inferiores en una cantidad cercana a los 600\$.

Tabla 9: Comparativa de los resultados.

		RBNS		IBNR		DCL (RBNS+IBNR)	Chain Ladder	Diferencia DCL-CL
		Total	%	Total	%			
Sin cola	DCL (π) sin frecuencias	124.224,15	92,91%	9.486,20	7,09%	133.710,35	133.710,35	0,00
	DCL (π)	123.327,75	92,86%	9.486,20	7,14%	132.813,95	133.710,35	-896,40
	DCL (p)	122.293,17	92,79%	9.497,32	7,21%	131.790,49	133.710,35	-1.919,86
Con cola	DCL (π) sin frecuencias	125.262,35	92,66%	9.928,64	7,34%	135.190,99	133.710,35	1.480,64
	DCL (π)	124.372,01	92,61%	9.928,64	7,39%	134.300,65	133.711,35	589,30
	DCL (p)	123.188,13	92,54%	9.927,23	7,46%	133.115,36	133.712,35	-596,99

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 9 muestra los diferentes resultados calculados a partir de los distintos criterios que se han ido aplicando al método DCL.

Como datos a destacar, cuando no se tiene en cuenta el efecto cola, la estimación de las reservas por el método DCL son inferiores respecto al método CL, con la excepción del caso en que se ignora el triángulo de frecuencias, donde se reproduce exactamente los resultados del método CL.

Cuando se tiene en cuenta el efecto cola, las reservas son superiores debido a que se estiman reservas para futuros años que no se encuentran en la dimensión del triángulo.

El método que estima las reservas más pequeñas es cuando se usa el parámetro de retraso p . Esto viene a causa de que la suma total ha de ser igual a 1, y en nuestro caso, el parámetro de retraso π es superior.

Por último, el reparto entre las reservas RBNS y IBNR es muy similar en todos los casos. Las reservas RBNS están cerca del 93% del total, y para las IBNR son un 7%.

4.5. Método *bootstrapping* para el modelo DCL

Una compañía de seguros necesita saber la cantidad de reclamaciones pendientes, pero solo tiene disponible un conjunto de datos de reclamaciones de su propia compañía, por lo que no es muy exacto calcular las reservas basándose únicamente en estos datos de muestra. La razón de esto es que no se sabe si esta muestra es una buena representación de todas las reclamaciones, por lo que las compañías usan el método *bootstrapping* para conseguir una predicción más acertada para el cálculo de sus provisiones.

El método *bootstrapping* es una técnica basada en la repetición de los cálculos de los datos para substituir los datos iniciales de la muestra. Con esta substitución, se consiguen obtener una gran cantidad de muestras. Este método usa la aproximación de Monte Carlo para obtener una distribución predictiva de las reclamaciones. Las ventajas del *bootstrapping* son las siguientes:

- Es un algoritmo muy simple y directo para estimar parámetros usando un pequeño conjunto de datos de muestra.
- Dado que genera una gran cantidad de muestras *bootstrap* para la estimación, los resultados son muy estables.
- El método *bootstrap* se usa comúnmente cuando la verdadera distribución de los datos es intratable o tiene una forma compleja.

Para que el método *bootstrapping* nos dé resultados coherentes, es necesario hacer un mínimo de simulaciones, usualmente alrededor de 1000 o más.

4.5.1. Estimación de las reservas bajo el método *bootstrapping*

Para el modelo DCL se tiene la posibilidad de estimar las provisiones mediante el método *bootstrapping*, detallado en Schoepf (2016). Este método se va a calcular teniendo en cuenta el efecto cola y usando el parámetro de retraso p .

El número de simulaciones *bootstrap* realizadas van a ser 999. A continuación, en la Tabla 10 se puede apreciar la distribución de las reservas donde se muestra la media, la desviación típica y los percentiles 1, 5, 50, 95 y 99.

Tabla 10: Estimación de las reservas RBNS mediante método *bootstrap*.

Años futuros	RBNS	mean RBNS	sd RBNS	Q1 RBNS	Q5 RBNS	Q50 RBNS	Q95 RBNS	Q99 RBNS
1	52.082,31	52.298,83	3.226,88	45.556,96	47.245,99	52.227,09	57.744,90	60.001,37
2	29.512,98	29.767,68	2.234,37	24.632,78	26.350,24	29.669,23	33.581,73	35.439,79
3	17.859,21	17.882,72	1.651,63	14.453,74	15.219,76	17.855,05	20.637,32	22.540,33
4	10.539,54	10.618,18	1.256,32	7.910,41	8.666,69	10.568,30	12.743,15	13.768,04
5	6.332,52	6.289,14	975,32	4.302,72	4.763,23	6.214,47	8.015,91	8.776,03
6	3.633,00	3.649,03	736,20	2.123,43	2.524,25	3.605,10	4.943,42	5.517,80
7	1.991,18	1.979,29	563,05	885,56	1.125,59	1.922,24	2.996,52	3.482,69
8	956,45	908,74	394,28	249,01	376,08	868,27	1.648,86	2.064,67
9	280,95	216,79	215,07			157,04	666,51	881,97
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
Total	123.188,14	123.610,40	7.233,45	107.938,36	112.197,08	123.249,13	135.775,93	140.591,08

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11: Estimación de las reservas IBNR mediante método *bootstrap*.

Años futuros	IBNR	mean IBNR	sd IBNR	Q1 IBNR	Q5 IBNR	Q50 IBNR	Q95 IBNR	Q99 IBNR
1	2.485,48	2.488,93	546,66	1.468,69	1.704,51	2.430,70	3.452,89	4.037,22
2	2.616,76	2.610,32	547,13	1.481,10	1.843,06	2.580,42	3.640,79	4.042,52
3	1.628,09	1.626,32	438,39	782,07	992,74	1.586,30	2.389,41	2.892,51
4	1.109,77	1.116,40	348,97	468,65	617,23	1.085,54	1.701,42	2.043,58
5	717,61	722,20	280,93	209,99	327,84	688,20	1.233,04	1.569,47
6	502,34	507,46	241,90	126,94	180,73	465,30	963,66	1.200,54
7	340,76	340,06	183,73	51,49	107,94	313,26	669,95	938,05
8	230,43	225,91	158,85	16,76	43,65	190,29	555,63	729,09
9	155,38	156,87	137,19	5,31	17,38	119,95	407,79	636,81
10	82,86	70,41	77,17	0,02	0,93	44,58	221,82	335,63
11	29,46	26,56	48,69	0,00	0,00	5,44	127,57	218,73
12	14,42	12,19	36,27	0,00	0,00	0,18	63,19	173,87
13	7,31	5,97	22,56	0,00	0,00	0,00	33,71	102,62
14	3,70	2,65	13,65	0,00	0,00	0,00	14,70	53,48
15	1,78	1,42	11,31	0,00	0,00	0,00	1,91	39,44
16	0,76	0,56	6,29	0,00	0,00	0,00	0,01	18,38
17	0,26	0,18	2,11	0,00	0,00	0,00	0,00	3,04
18	0,05	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	9.927,22	9.914,41	1.179,81	7.426,30	8.121,34	9.902,56	11.830,66	12.758,49

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12: Estimación de las reservas totales mediante método *bootstrap*.

Años futuros	Total	mean Total	sd Total	Q1 Total	Q5 Total	Q50 Total	Q95 Total	Q99 Total
1	54.567,79	54.787,76	3.355,25	47.834,64	49.368,09	54.728,71	60.467,06	63.233,63
2	32.129,74	32.378,00	2.374,47	27.223,35	28.564,48	32.371,32	36.405,19	38.467,73
3	19.487,30	19.509,04	1.769,11	15.775,07	16.664,27	19.505,82	22.494,45	24.309,43
4	11.649,31	11.734,58	1.318,10	8.978,81	9.636,64	11.684,81	13.913,62	15.053,16
5	7.050,13	7.011,34	1.020,18	4.952,90	5.409,50	6.937,66	8.785,63	9.619,03
6	4.135,34	4.156,49	773,66	2.559,55	2.944,27	4.130,37	5.512,52	6.109,32
7	2.331,94	2.319,35	593,32	1.148,41	1.428,67	2.265,99	3.357,78	4.044,70
8	1.186,88	1.134,66	432,93	342,45	514,28	1.074,21	1.933,80	2.410,75
9	436,33	373,66	247,46	26,31	67,34	322,68	842,67	1.065,81
10	82,86	70,41	77,17	0,02	0,93	44,58	221,82	335,63
11	29,46	26,56	48,69			5,44	127,57	218,73
12	14,42	12,19	36,27			0,18	63,19	173,87
13	7,31	5,97	22,56				33,71	102,62
14	3,70	2,65	13,65				14,70	53,48
15	1,78	1,42	11,31				1,91	39,44
16	0,76	0,56	6,29				0,01	18,38
17	0,26	0,18	2,11					3,04
18	0,05	0,00	0,02					0,00
Total	133.115,36	133.524,82	7.703,74	116.772,61	121.376,70	133.340,99	146.838,81	152.380,08

Fuente: Elaboración propia.

Según se puede apreciar en las Tablas 10, 11 y 12, el valor de la media total calculada, a partir de las 999 simulaciones ejecutadas con la función *bootstrapping*, se aproxima mucho al valor total calculado con nuestros parámetros.

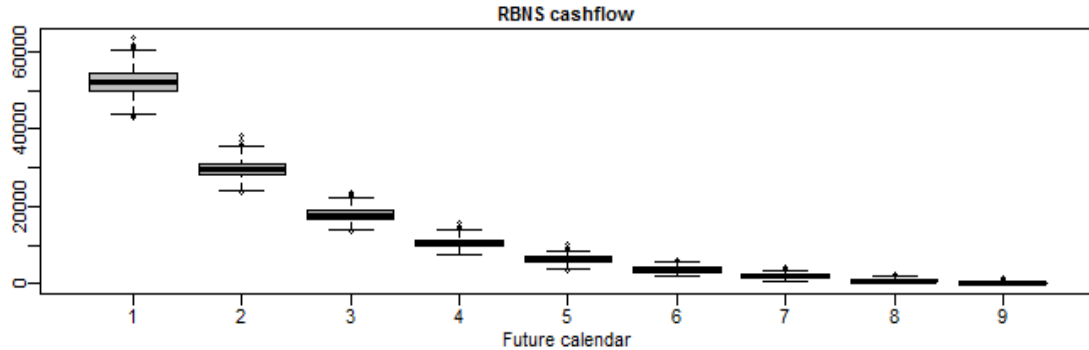
La estimación con el método *bootstrapping* para las reservas RBNS da un resultado de 123.610,40 \$ con una desviación típica de 7.233,145. En las reservas IBNR el resultado es de 9.914,41 \$ con una desviación típica de 1.179,81. Para las reservas totales (RBNS+IBNR), el resultado es de 133.524,82 \$ con una desviación típica de 7.703,74.

Para las reservas RBNS, en el 1% de los peores casos las reservas RBNS que se deben estimar serán superiores a los 140.591,08 \$. En el caso de las reservas IBNR, las reservas estimadas en el 1% de los peores casos serán superiores a los 12.758,49 \$. Por último, la estimación total de los dos tipos de reservas en el 1% de los peores casos serán superiores a los 152.380,08 \$.

Este método *bootstrapping* ayuda a la compañía aseguradora a ver y entender la distribución de sus reservas. A mayor número de simulaciones que se hagan, los valores calculados serán lo más cercanos posibles a la realidad y esto ayudará a la compañía a poder hacer frente a todos los posibles pagos.

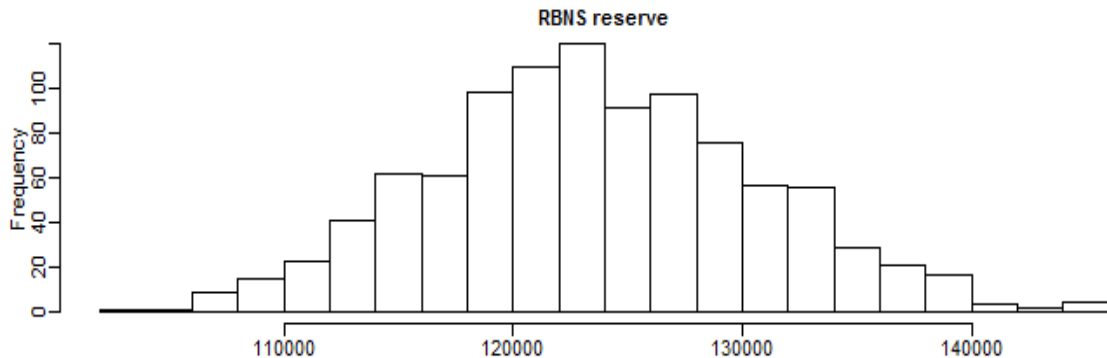
A continuación, se muestra la distribución de las diferentes reservas por el método *bootstrapp*.

Gráfico 5: Representación de la distribución de las reservas RBNS por el método *bootstrapping*.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 6: Representación de la distribución de las reservas RBNS por el método *bootstrapping*.



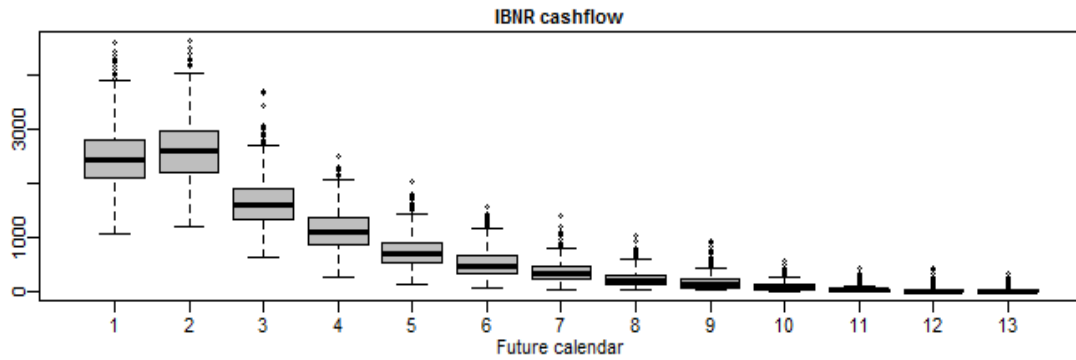
Fuente: Elaboración propia.

En los Gráficos 5 y 6, se puede ver la distribución de las reservas a partir de las 999 simulaciones aplicadas en el método *bootstrapping*.

En el Gráfico 5, se aprecia la cantidad media de reserva calculada según el periodo de tiempo, y su máximo y mínimo. En el primer periodo de tiempo, las reservas simuladas tienen mayor desviación debido a que los importes a pagar son mayores que en el resto de años, y puede haber más diferencia en las simulaciones. También se destaca que los pagos van disminuyendo con el paso de los años. Esto puede ser debido a que la compañía no suele retrasarse en la liquidación de los siniestros.

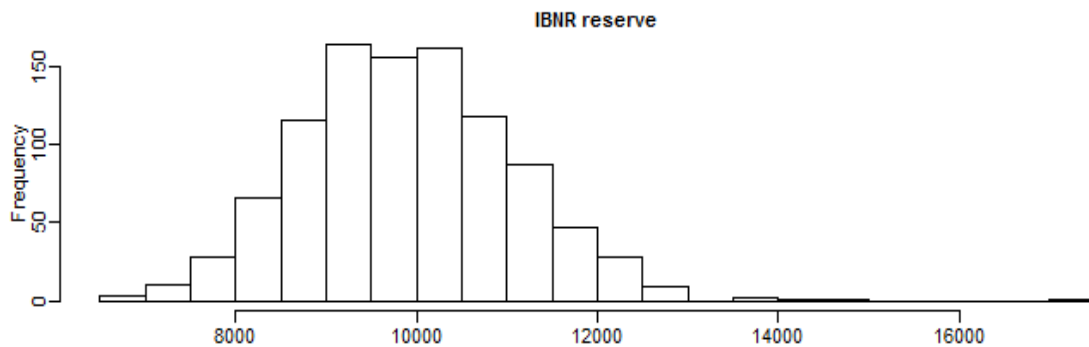
El Gráfico 6 muestra la distribución de las reservas RBNS y su frecuencia. El valor con más frecuencia calculado a partir de las simulaciones estaría situado en unos 124.000 \$.

Gráfico 7: Representación de la distribución de las reservas IBNR por el método *bootstrapping*.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 8: Representación de la distribución de las reservas IBNR por el método *bootstrapping*.

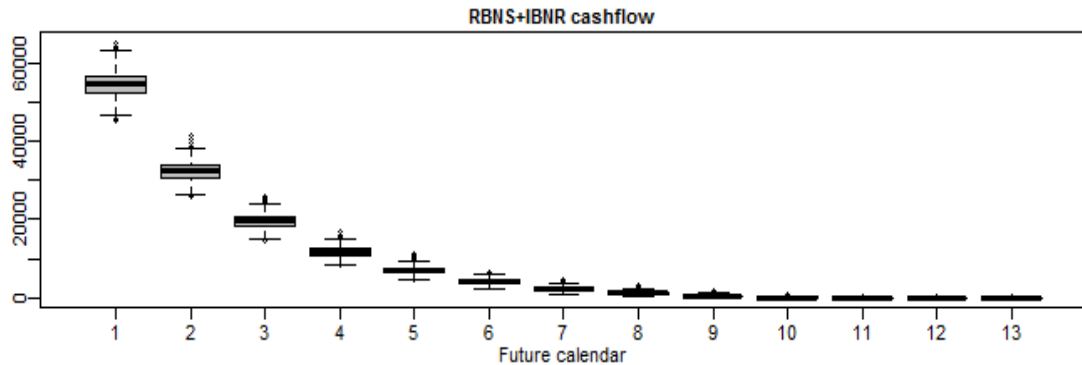


Fuente: Elaboración propia.

El Gráfico 7 también muestra la media, el máximo y el mínimo de las simulaciones producidas por cada periodo de año. Las reservas IBNR son muy inferiores respecto a las RBNS. A destacar que la media de los pagos para los siniestros IBNR sea mayor en el segundo año que en el primero, lo que nos indica que hay mayores pagos en el año siguiente de que ocurra el siniestro.

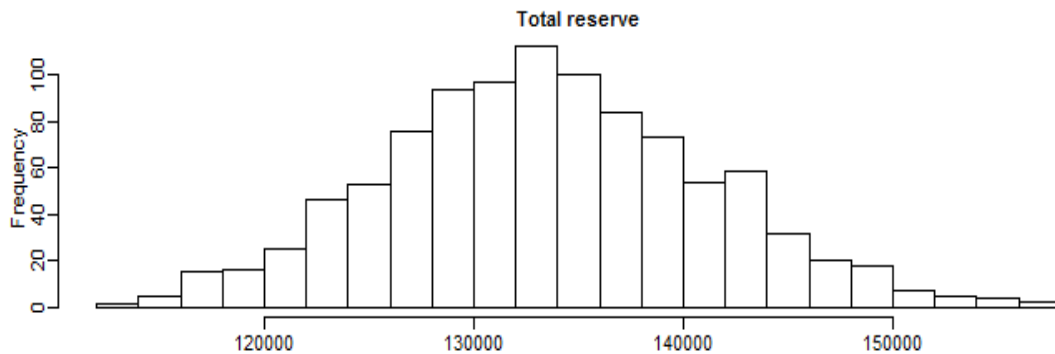
En el Gráfico 8 se aprecia la distribución del total de las reservas IBNR simuladas. Al ser valores más pequeños, los valores suelen ser más frecuentes.

Gráfico 9: Representación de la distribución de las reservas totales por el método *bootstrapping*.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 10: Representación de la distribución de las reservas totales por el método *bootstrapping*.



Fuente: Elaboración propia.

Por último, los Gráficos 9 y 10 hacen referencia a las reservas totales.

Para acabar, se muestra en la Tabla 13 todos los resultados obtenidos para compararlos entre ellos. Como se puede observar, la estimación de las reservas con el método CL es la mayor, aunque en este método no es posible diferenciar entre reservas RBNS y IBNR porque solo se usa el triángulo de pagos. Los valores calculados a partir del método DCL y usando *bootstrapping* son muy parecidos debido a que el número de simulaciones era bastante grande. Por último, se puede observar el 1% y 5% de los peores casos en la estimación de las reservas.

Tabla 13: Estimación de las reservas mediante el método *bootstrap*.

	Bootstrapping DCL				DCL	Chain Ladder
	μ (media)	σ (desv. Tip)	95%	99%		
RBNS	123.610,41	7.233,45	135.775,93	140.591,08	123.188,13	-
IBNR	9.914,41	1.179,81	11.830,66	12.758,49	9.927,23	-
TOTAL	133.524,82	7.703,74	146.838,81	152.380,08	133.115,36	133.710,35

Fuente: Elaboración propia

4.6. Calculo del valor actual actuarial de las reservas

Los métodos actuariales se aplican para la determinación del valor esperado, sin actualizar, de los pagos futuros. A efectos contables, no es necesario actualizar financieramente estos valores esperados de los pagos futuros. Sin embargo, a efectos de solvencia, es imprescindible la actualización financiera de los valores esperados de los pagos futuros utilizando además una estructura de tipos de interés básicos predeterminada y que cambia en el tiempo.

A partir de la estructura temporal de los tipos de interés libre de riesgo con ajuste por volatilidad en dólares extraída de la web de EIOPA, <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>, y publicada con fecha de 31-05-2018, se ha calculado el valor actual actuarial de las reservas del método DCL con cola y usando el parámetro p , y del método CL, tratando los pagos futuros como una renta y como un flujo. Esta actualización ayuda a situar correctamente el valor de los pagos de las reservas en el tiempo. Destacar que la curva de tipos de interés ETTI no hay ningún interés negativo.

En la Tabla 14 se muestran la estructura de los tipos de interés:

Tabla 14: Estructura de tipos de interés con fecha de 31-05-2018.

	ETI
1	0,02751
2	0,02924
3	0,03002
4	0,03042
5	0,03064
6	0,03082
7	0,03098
8	0,03116
9	0,03134
10	0,03151
11	0,03169
12	0,03182
13	0,03192
14	0,03200
15	0,03205
16	0,03210
17	0,03213
18	0,03214

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 15 se tratan los pagos futuros como una renta. Se ha calculado el valor actual de cada pago futuro según el año.

Tabla 15: Calculo de los pagos futuros como renta.

	DCL (con cola y p)	Valor actual actuarial	CL	Valor actual actuarial
1	54567,79	53106,82	54927,17	53456,58
2	32129,73	30330,09	32331,29	30520,36
3	19487,30	17832,60	19626,35	17959,84
4	11649,31	10333,40	11709,52	10386,80
5	7050,14	6062,66	7057,31	6068,82
6	4135,34	3446,79	4123,47	3436,89
7	2331,94	1883,50	2324,46	1877,46
8	1186,88	928,54	1177,57	921,25
9	436,32	330,51	433,23	328,17
10	82,86	60,76	133710,37	124956,17
11	29,46	20,90		
12	14,42	9,90		
13	7,31	4,86		
14	3,70	2,38		
15	1,78	1,11		
16	0,76	0,46		
17	0,26	0,15		
18	0,05	0,03		
Total	133115,35	124355,46		

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 16 se tratan los pagos futuros como un flujo:

Tabla 16: Calculo de los pagos futuros como flujo.

	DCL (con cola y p)	Valor actual actuarial	CL	Valor actual actuarial
1	54567,79	53834,00	54927,17	54188,55
2	32129,73	30771,40	32331,29	30964,43
3	19487,30	18098,95	19626,35	18228,09
4	11649,31	10489,78	11709,52	10544,00
5	7050,14	6155,07	7057,31	6161,33
6	4135,34	3499,63	4123,47	3489,59
7	2331,94	1912,52	2324,46	1906,40
8	1186,88	942,93	1177,57	935,53
9	436,32	335,66	433,23	333,29
10	82,86	61,71	133710,37	126751,21
11	29,46	21,23		
12	14,42	10,06		
13	7,31	4,94		
14	3,70	2,42		
15	1,78	1,13		
16	0,76	0,47		
17	0,26	0,15		
18	0,05	0,03		
Total	133115,35	126142,08		

Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

Después del estudio del modelo DCL se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El modelo DCL trata con dos triángulos de datos, uno de pagos y otro de frecuencia de siniestros, lo que permite poder diferenciar entre reservas de tipos de siniestros RBNS y IBNR.
- El modelo DCL tiene una conexión con el método CL. A partir de la sustitución del parámetro p por π , y del uso de los valores ajustados del componente RBNS, se puede reproducir exactamente los resultados del método CL.
- Este método proporciona un mejor enfoque para calcular las reservas, ya que se basa en cantidades que tienen una interpretación real en el contexto de los datos del seguro dado que se tiene en cuenta la inflación en los pagos.
- Con el método DCL es posible hacer predicciones para la cola, es decir, se puede predecir el cálculo de reservas para los años siguientes a nuestros datos del triángulo. Estas predicciones en la cola son para las reservas IBNR. Esto no se puede calcular en el método CL, ya que solo nos permite calcular las reservas para los años de la dimensión del triángulo.

A partir de los resultados obtenidos después de la aplicación del modelo DCL a los datos reales extraídos de Taylor y Xu (2016), las principales conclusiones son:

- Como hemos dicho en el párrafo anterior, el paquete DCL nos permite replicar los resultados de CL para el modelo DCL, distinguiendo entre reservas RBNS y IBNR.
- En la estimación de las reservas, la repartición entre los dos tipos suele ser de un 90% para las reservas RBNS y un 10% en las IBNR, lo que significa que la gran mayoría de siniestros ya han sido notificados a la compañía, pero hay un retraso en el pago.
- Los resultados de las estimaciones cuando se tiene en cuenta el efecto cola son mayores que cuando no se tiene en cuenta. Esto se debe a que se tiene en cuenta una mayor dimensión del triángulo, (ver Figura 2), por lo que el valor de las reservas de cada año aumenta.
- La aplicación del método *bootstrap* ayuda a ver y entender la distribución de las reservas, lo que permite a la compañía tener una visión más ajustada de la realidad.

6. REFERENCIAS

- Agbeko, T., Hiabu, M., Martínez-Miranda, M.D., Nielsen, J.P. and R. Verrall (2014). Validating the Double Chain Ladder Stochastic Claims Reserving Model. *Variance* 8:2, 138–160.
- Ayuso, M. and M.A. Santolino (2008). Prediction of individual automobile reported but not settled claim reserves for bodily injuries in the context of Solvency. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* 6, 23–41.
- Antonio, K. and H.J. Plat, H.J. (2014). Micro-level stochastic loss reserving for general insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* 7, 649–669.
- Björkwall, S., 2011. *Stochastic claims reserving in non-life insurance. Bootstrap and smoothing models*. Masters Theses. Stockholm University (Stockholm).
- Boj, E. y J. Esquinas (2016). Cálculo de reservas con modelos lineales generalizados mixtos haciendo uso del software R. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Tercera Época* 22, 73–109.
- Castañer, A. y Claramunt, M.M. (2017). *Solvencia II (2da Edición)*. Colección OMADO (Objetos y Materiales Docentes) de la Universidad de Barcelona. Publicaciones de la Universidad de Barcelona.
<http://hdl.handle.net/2445/107502>
- Gesmann, M., Murphy, D. and W. Zhang (2017). *ChainLadder: Statistical methods for the calculation of outstanding claims reserves in general Insurance*. Package on CRAN. Version 0.2.5. Published 2017-10-19.
<https://cran.r-project.org/package=ChainLadder>
- Haxhi, K, and B. Baholli (2015). Claims reserving for a DMTPL portfolio using Double Chain Ladder. *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology* 2:8, 2221–2224.
- Martínez-Miranda, M.D., Nielsen, B., Nielsen, J.P. and R. Verrall (2011). Cash flow simulation for a model of outstanding liabilities based on claim amounts and claim numbers. *ASTIN Bulletin* 41:1, 107–129.
- Martínez-Miranda, M.D., Nielsen, B., Nielsen, J.P. and R. Verrall (2012). Double Chain Ladder. *ASTIN Bulletin* 42:1, 59–76.
- Martínez-Miranda, M.D., Nielsen, J.P. and Verrall, R. (2013a). Double Chain Ladder and Bornhuetter-Ferguson. *North American Actuarial Journal* 17:2, 101–113.
- Martínez-Miranda, M.D., Nielsen, J.P. and R. Verrall (2013b). *DCL: Claims Reserving under the Double Chain Ladder Model*. Package on CRAN. Version 0.1.0. Published 2013-10-25.
<https://cran.r-project.org/package=DCL>

- Martínez-Miranda, M.D., Nielsen, J.P., Verrall, R. and M. Wüthrich (2015). Double Chain Ladder, claims development inflation and zero claims. *Scandinavian Actuarial Journal* 5, 383–405.
- Meyers, G. and P. Shi (2011). The retrospective testing of stochastic loss reserve models. *Casualty Actuarial Society E-Forum. Summer 2011*.
<http://www.casact.org/pubs/forum/11sumforum/Meyers-Shi.pdf>
- Quarg, G. and T. Mack (2004). Munich Chain Ladder: A reserving method that reduces the gap between IBNR projections based on paid losses and IBNR projections based on incurred losses. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*.
- R Development Core Team, 2018. R: a language and environment for statistical computing. Vienna (Austria).
<http://www.R-project.org/>.
- Schoepf, L. (2016) *On the Double Chain Ladder for reserve estimation with bootstrap application*. Masters Theses. Missouri University of Science and Technology (Missouri).
http://scholarsmine.mst.edu/masters_theses/7523
- Tarbell, T. (1934). Incurred but not reported claims reserves. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 20, 275–280.
- Taylor, G. (1977). Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays. *ASTIN Bulletin* 9, 217–230.
- Taylor, G. and J. Xu (2016). An empirical investigation of the value of claim closure count information to loss reserving. *Variance* 10:1, 75–120.
- Verrall, R., Nielsen, J.P. and A. Jessen (2010). Prediction of RBNS and IBNR claims using claim amounts and claim counts. *ASTIN Bulletin* 40:2, 871–887.

ANEXO

Código de R utilizado

```
R> install.packages("DCL")
```

```
R> library(DCL)
```

```
R> x0<-c(30515,38802,22027,14027,8984,4990,3034,2230,1173,817)
```

```
R> x1<-c(39708,45440,23634,15867,8236,6422,4398,2311,1896,NA)
```

```
R> x2<-c(46048,49806,28397,16800,9427,6885,3937,2731, NA,NA)
```

```
R> x3<-c(48445,42578,25783,18192,10272,5330,3832, NA,NA,NA)
```

```
R> x4<-c(41470,40719,21793,12222,7492,5412, NA,NA,NA,NA)
```

```
R> x5<-c(34998,27593,14256,8414,4734, NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> x6<-c(25756,24086,11352,5085, NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> x7<-c(23079,21427,10770, NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> x8<-c(20902,18046,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> x9<-c(19712, NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> X<-matrix(c(x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9),ncol=10)
```

```
R> Xtriangulo<-t(X);Xtriangulo
```

```
R> n0<-c(38217,6364,673,183,92,45,12,12,7,8)
```

```
R> n1<-c(42362,6986,627,225,82,32,31,20,23,NA)
```

```
R> n2<-c(53186,4554,683,216,75,52,28,30,NA,NA)
```

```
R> n3<-c(49899,4337,360,128,58,42,29,NA,NA,NA)
```

```
R> n4<-c(45517,3829,358,113,55,21,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> n5<-c(35630,2964,281,141,59,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> n6<-c(29286,2660,297,131, NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> n7<-c(27468,2400,314,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> n8<-c(24791,1946, NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> n9<-c(23925, NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA)
```

```
R> N<-matrix(c(n0,n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9),ncol=10)
```

```
R> Ntriangulo<-t(N);Ntriangulo
```

```

R> dcl.par<-dcl.estimation(Xtriangulo , Ntriangulo, adj=1, Tables=TRUE, num.dec=4)
R> Plot.dcl.par(dcl.par)

R> pred1<-dcl.predict(dcl.par , Ntriangulo , Model = 0 , Tail = FALSE ,Tables = TRUE)
R> pred2<-dcl.predict(dcl.par , Ntriangulo , Model = 1 , Tail = FALSE ,Tables = TRUE)
R> pred3<-dcl.predict(dcl.par , Ntriangulo , Model = 2 , Tail = FALSE ,Tables = TRUE)
R> pred4<-dcl.predict(dcl.par , Ntriangulo , Model = 0 , Tail = TRUE ,Tables = TRUE)
R> pred5<-dcl.predict(dcl.par , Ntriangulo , Model = 1 , Tail = TRUE ,Tables = TRUE)
R> pred6<-dcl.predict(dcl.par , Ntriangulo , Model = 2 , Tail = TRUE ,Tables = TRUE)

R> boot1<-dcl.boot(dcl.par, Ntriangle=Ntriangulo , boot.type = 2 , B = 999 , Tail = TRUE
, summ.by = "diag" , Tables = TRUE , num.dec = 2 , n.cal = NA);boot1
R> Plot.cashflow(boot1)

R> vpf1<-c(54567.79, 32129.73, 19487.3, 11649.31, 7050.14, 4135.34, 2331.94,
1186.88, 436.32, 82.86, 29.46, 14.42, 7.31, 3.7, 1.78, 0.76, 0.26, 0.05)

R> ETI.V1<-c(0.02751, 0.02924, 0.03002, 0.03042, 0.03064, 0.03082, 0.03098, 0.03116,
0.03134, 0.03151, 0.03169, 0.03182, 0.03192, 0.032, 0.03205, 0.0321, 0.03213, 0.03214)

R> i.rental<-numeric(length(ETI.V1))
R> for (i in 1:length(ETI.V1)) {i.rental[i]<-(1+ETI.V1[i])^(-i)}; i.rental
R> prov.rental<- vpf1*i.rental; prov.rental
R> prov.rental<- sum(vpf1*i.rental); prov.rental

R> f.fluxe1<-numeric(length(ETI.V1))
R> for (i in 1:length(ETI.V1)) {f.fluxe1[i]<-(1-((1+ETI.V1[i])^(-1)))/log(1+ETI.V1[i])}
R> f.fluxe1
R> i.fluxe1<-rep(1,length(ETI.V1))
R> for (i in 2:length(ETI.V1)) {i.fluxe1[i]<- (1+ETI.V1[i])^(-i+1)}
R> i.fluxe1
R> prov.fluxe1<-vpf1*i.fluxe1*f.fluxe1;prov.fluxe1
R> prov.fluxe1<-sum(vpf1*i.fluxe1*f.fluxe1);prov.fluxe1

```

```
R> vpf2<-c(54927.17, 32331.29, 19626.35, 11709.52, 7057.31, 4123.47, 2324.46,
1177.57, 433.23)
```

```
R> ETI.V2<-c(0.02751, 0.02924, 0.03002, 0.03042, 0.03064, 0.03082, 0.03098, 0.03116,
0.03134)
```

```
R> i.renta2<-numeric(length(ETI.V2))
```

```
R> for (i in 1:length(ETI.V2)) {i.renta2[i]<-(1+ETI.V2[i])^(-i)}; i.renta2
```

```
R> prov.renta2<-vpf2*i.renta2; prov.renta2
```

```
R> prov.renta2<-sum(vpf2*i.renta2); prov.renta2
```

```
R> f.fluxe2<-numeric(length(ETI.V2))
```

```
R> for (i in 1:length(ETI.V2)) {f.fluxe2[i]<-(-1-((1+ETI.V2[i])^(-1)))/log(1+ETI.V2[i])}
```

```
R> f.fluxe2
```

```
R> i.fluxe2<-rep(1,length(ETI.V2))
```

```
R> for (i in 2:length(ETI.V2)) {i.fluxe2[i]<- (1+ETI.V2[i])^(-i+1)}
```

```
R> i.fluxe2
```

```
R> prov.fluxe2<-vpf2*i.fluxe2*f.fluxe2;prov.fluxe2
```

```
R> prov.fluxe2<-sum(vpf2*i.fluxe2*f.fluxe2);prov.fluxe2
```