Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica i Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

DIFERENCIACIÓ DE PRODUCTE VIA COMPETÈNCIA ESPACIAL: El model de Hotelling

---

Autora: Carla Alcántara Román

Directors: Dr. Xavier Jarque i Dra. Marina Núñez
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

The Hotelling model was created in 1929 by Harold Hotelling, its purpose was to set which was the optimal product differentiation that two firms should achieve, using a parametrization of this product differentiation through a physical and linear distance between the two firms.

The present project follows an article published by d'Aspremont, Jaskold Gabszezwicz and Thisse in 1979, in which they analyze in detail the model, identify a contradictory output in the seminar Hotelling paper that results from a false premise and suggest a quadratic parametrization escaping from the previous difficulty.

The main goal of this project is to build an application which can give numeric solution for the revised Hotelling model and which allows to expand itself to new parametrizations getting over the analitic difficulty that can arise from them.

To do so, it is necessary to understand and explain the needed considerations to build a two-stage game model like this one and to find a subgame perfect equilibrium, considering price and localization.

Resum

El model de Hotelling va ser creat el 1929 pel mateix Harold Hotelling, el propòsit del model era determinar en quina mesura dues empreses haurien de diferenciar els seus productes, parametritzant la diferenciació del producte amb una distància física lineal entre ambdues empreses.

El present treball pren com a model un article publicat per d'Aspremont, Jaskold Gabszezwicz i Thisse el 1979, en el qual s'analitza amb detall el model en qüestió, s'hi identifica una contradicció que porta a una equivocació en el model inicial de Hotelling i es proposa una parametriztació quadràtica que defuig aquest error.

El principal objectiu d'aquest projecte és construir una aplicació que doni solució numèrica al model corregit de Hotelling i que, per tant, permeti expandir-lo a suposicions d'altres parametritzacions superant la dificultat analítica que aquestes poden comportar.

Per a fer-ho, és essencial entendre i explicar les consideracions necessàries per a construir un model de joc en dues etapes com aquest, per a la determinació d'un equilibri perfecte en subjocs, en termes de preu i localització.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A10, 91A80, 91B72

Agraïments

Vull agrair als meus tutors Marina Núñez i Xavier Jarque el temps, la dedicació i la il·lusió que s'encomana. Per la comprensió i el recolzament, dono les gràcies a la meva família, als meus amics, que són família, i als meus companys, que, inevitablement, són amics.

Als professors que en algun moment van fer que recórrer aquest camí valgués la pena. I a totes aquelles persones que van confiar en mi molt abans que jo ho fes en mi mateixa, com el Pedro.

"Truth is much too complicated to allow anything but approximations"

John von Neumann

Índex

Part I

Introducció

Abans de la definició formal de teoria de jocs, altres matemàtics i economistes ja havien determinat models que contemplaven escenaris similars als que es definirien com a jocs més endavant. Alguns d'aquests models, que mencionaré a continuació, estudiaven la competència no cooperativa amb productes homogenis de dues o més empreses en termes de quantitats, preus, o localització.

El 1938, Antoine Augustin Cournot va publicar *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* [3] on formalitzava el model de competència en quantitats en què les empreses escullen alhora i independentment una quantitat a produir, la qual determina el preu de venda. Observant i reaccionant a la situació de mercat que es dóna, les empreses arriben a una situació la qual cap de les dues vol defugir. Gairebé cinquanta anys més tard, el 1883, Joseph Louis François Bertrand va rectificar-lo en la publicació *Théorie des Richesses: revue de Théories mathématiques de la richesse sociale par Léon Walras et Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot* [2] justificant que en aquest escenari, les empreses competeixen en preus i no en quantitats, com deia Cournot. De la mateixa manera, les empreses determinen preus alhora i reaccionen a la situació de mercat, de forma que s'acaba arribant a una situació estabilitzada. Més endavant, Bertrand també va definir models que permetien la diferenciació de productes on les empreses juguen amb rols diferents envers el consumidor segons les característiques dels seus productes i, per tant, poden determinar preus diferents sense que la seva quota de mercat es vegi dràsticament afectada.

Anys més tard, el 1929, Harold Hotelling [6] va descriure un model innovador que permetia diferenciar els productes mitjançant la quantificació del cost psicològic o de desplaçament que suposava la compra del producte de cadascuna de les empreses per al consumidor. Per a fer-ho, es plantejava un joc en dues etapes per a determinar les localitzacions d'equilibri, en la primera etapa, i els preus d'equilibri, en la segona. Tot i així, aquests conceptes de *joc* i *equilibri* no van ser definits fins anys després, amb la formalització de la teoria de jocs.

La teoria de jocs és una àrea de la matemàtica aplicada que estudia el comportament dels diferents agents implicats en una situació de presa de decisions, que anomenem joc, analitzant estratègies òptimes i esperades, basant-se en pagaments i incentius.

L'any 1944, precedit per un article conjunt de dos autors, es va publicar el que ara coneixem com el primer manual de la teoria de jocs. En els anys previs i durant la Guerra Freda, John von Neumann i Oskar Morgenstern van concebre una idea sobre la organització econòmica i social que es definia a través dels jocs d'estratègia: *Theory of Games and Economic Behavior* [16]. En els seus inicis, es tractava d'una formalització de, principalment, l'estratègia militar que els concernava en aquell moment, tot establint les bases dels jocs d'estratègies de dos jugadors i suma zero.

Però finalment, es va convertir en l'obra clàssica sobre la qual es basa la teoria de jocs actual. Aquesta publicació no va ser únicament una revolució pels pensadors de la teoria econòmica, sinó que va donar una nova perspectiva als camps d'investigació que estudiaven diversos fenòmens del món real en diverses àrees, com poden ser el disseny industrial, la investigació operativa, les ciències polítiques, la psicologia, la sociologia, l'estratègia militar o, fins i tot, àmbits com la biologia evolutiva o les ciències de la computació i la lògica.

Quan parlem de teoria de jocs, no podem oblidar mencionar les aportacions de John Forbes Nash Jr. qui, inspirat pel seu professor John von Neumann, el 1950 va definir el que coneixem, pel seu nom, com equilibri de Nash [11]. Nash va ser posteriorment guardonat en diverses ocasions; en el 1978 amb el *Premi de Teoria de John von Neumann* per la seva contribució a la investigació operativa, branca de les matemàtiques que usa models matemàtics, estadística i algoritmes per a estudiar el procés de presa de decisions, i en el 1994 amb el *Premi Nobel d'Economia* pel constant anàlisi de la teoria de jocs i de l'equilibri de Nash [11] [12] [13] [14], que va suposar un gran avenç per a aquesta branca. Posteriorment, va rebre més guardons en relació a les seves aportacions a les matemàtiques, com el *Premi Abel* el 2015, i també per la seva participació en causes socials relacionades amb la malaltia que va patir gran part de la seva vida, l'esquizofrènia paranoide.

Amb els anys, la teoria de jocs ha esdevingut una eina imprescindible per a la teoria econòmica. És per això, perquè va definir un model complex sobre unes bases que no estaven totalment establertes, que es considera que el model de Hotelling va ser un model avançat al seu temps. Harold Hotelling (Fulda, 1895 - Chapel Hill, 1973) va ser un matemàtic, estadístic i economista reconegut. Hotelling va estudiar a les universitats de Washington i Princeton, on va trobar la inspiració per als seus propers treballs, i va ser professor a la Universitat de Stanford, la Universitat de Columbia i la Universitat del Nord de California, a Chapel Hill, on va restar fins al final de la seva vida. En tots aquests anys, va fer aportacions que li donarien un reconeixement en els camps mencionats anteriorment: l'economia i l'estadística. Els seus resultats més rellevants són:

- *La llei de Hotelling* [6], 1929: la qual es treballa i desenvolupa en aquest treball.
- *La regla de Hotelling* [7], 1931: regla que determina la forma més rendible d'explotació d'un recurs no renovable.
- *Distribució T-quadrat de Hotelling* [8], 1931: resultat de l'estudi i la generalització de la distribució T de Student.
- *El lema de Hotelling* [9], 1932: resultat microeconòmic que relaciona l'oferta d'un bé amb els beneficis dels seus productors.
- *Anàlisi de components principals (PCA)* [10], 1933: mètode usat en estadística i ciències de la computació.

El que presentava el model de Hotelling el 1929 era una continuació del que Bertrand havia definit anteriorment en els seus models. Com hem vist, els estudis de Bertrand se centraven en la competència en preus. El model per a producte homogenis, per a dues empreses, on l'empresa amb el preu més baix es queda la totalitat del mercat, té com a resultat que aquestes baixen el preu per sota del preu del competidor fins que ambdues el determinen igual al cost marginal, l'anomenada 'guerra de preus'. Models posteriors proposen la diferenciació de productes, plantejant la variant que si les característiques dels productes són diferents, els consumidors estaran disposats a pagar més o menys per un producte similar, segons les seves preferències. És a dir, les característiques del producte, en alguns casos, permeten a l'empresa augmentar el preu sense perdre la totalitat del mercat, com passa per als productes homogenis.

Amb el seu model, Hotelling introdueix la idea que aquesta diferenciació de productes pot no ser reproduïda per les seves característiques, sinó per la localització del punt de venda, és a dir mitjançant la diferenciació espacial. En aquest escenari, les dues empreses venen el mateix producte, però els consumidors tenen el cost afegit de desplaçar-se fins a una o altra. El consumidor, aleshores, no només s'ha de plantejar si està disposat a pagar un preu o altre, sinó si, a més a més, està disposat a desplaçar-se fins a l'empresa escollida. Per tant, en aquest joc de dues etapes, les empreses competeixen en preus i en localització; en la primera etapa, decideixen localització i, en la segona, preus. En particular, Hotelling va proposar quantificar el cost addicional de desplaçament mitjançant l'expressió lineal de la distància entre el consumidor i l'empresa:

Siguin A i B dues empreses d'un mercat qualsevol, amb productes homogenis i cost de producció nul, distribuïdes al llarg d'un segment de línea de longitud l a distància a i b, respectivament, dels extrems d'aquest segment, tals que $a + b \leq l$, $a \geq 0$ i $b \geq 0$. Les localitzacions, doncs, són una parella (a, b) dins del conjunt $P = \{(a, b) \in [0, l] \times [0, l] \mid a + b \leq l\}$. Els consumidors del mercat corresponent es distribueixen uniformement sobre el segment i cadascun d'ells consumeix una única unitat de producte, independentment del preu. Donats els preus de venda unitaris de cada empresa $p_A, p_B \in [0, \infty]$, cada consumidor escollirà aquella empresa que li suposi un cost total més baix: considerant el preu de venda i el cost de desplaçament fins arribar-hi. El 1929, Harold Hotelling va definir aquest darrer cost amb una funció lineal respecte la distància entre el consumidor i el punt de venda, amb una ràtio $c > 0$ de transport; de forma que, per a un consumidor $x \in [0, l]$, el cost de comprar a l'empresa A i B, respectivament, és $p_A + c|x - a|$ i $p_B + c|l - b - x|$.

A més a més, va demostrar l'existència de l'equilibri per a aquest joc de dues etapes, determinant que la tendència de les empreses és de localitzar-se al centre del segment, és a dir, diferenciar-se mínimament, i va donar l'expressió dels preus que en resultaven. Aquest resultat es coneix com la *Llei de Hotelling* o el *Principi de diferenciació mínima*.

Tot i així, cinquanta anys després de la seva publicació revolucionària, d'Aspremont, Jaskold Gabszezwicz i Thisse [1] van analitzar-lo i van descobrir que les conclusions a les quals Hotelling havia arribat eren incongruents respecte les hipòtesis del model. És a dir, les localitzacions que ell havia determinat com equilibri, al centre del segment, no satisfeien el que ell mateix havia considerat a l'inici del model com condicions d'a i b necessàries per a l'existència d'equilibri en aquest tipus de jocs. Aquest fet, va posar en evidència que no per a qualsevol parell de localitzacions existia un equilibiri en preus, fet indispensable per a la resolució del joc en dues etapes. Així doncs, van proposar una modificació en la funció de costos del model que corregia aquesta errada i permetia resoldre el joc en dues etapes arribant a un resultat d'equilibri ben definit. Més concretament, quantificava el cost addicional per al consumidor mitjançant l'expressió quadràtica de la distància entre el aquest i l'empresa. De forma que, per a un consumidor $x \in [0, l]$, el cost de comprar a l'empresa A i B, respectivament, és $p_A + c(x-a)^2$ i $p_B + c(l-b-x)^2$.

A nivell teòric, l'objectiu d'aquest treball és estudiar l'article en què es revisa el model de Hotelling i explicar quins són els factors que el diferencien del seu model revisat. A més a més, vull exposar aquest darrer model i provar la seva validesa, per a després usar-lo de base a l'hora de plantejar la part pràctica del projecte. Així doncs, l'objectiu és demostrar el teorema que resulta de la proposta de d'Aspremont, Jaskold Gabszezwicz i Thisse:

Teorema d'existència i unicitat de l'equilibri perfecte en subjocs en el model de Hotelling amb funció de costos quadràtics

Per a qualsevol parell de localitzacions (a, b) dins del conjunt $P = \{(a, b) \in [0, l] \times [0, l] \mid a + b \leq l\}$, existeix un equilibri de segona etapa: una parella de preus $(p_A^*(a, b), p_A^*(a, b))$. Per tant, pot existir un equilibri perfecte en subjocs en el joc definit de dues etapes.

En particular, existeix i és únic: $(a, b) = (0, 0)$ amb preus $(p_A^*(0, 0), p_A^*(0, 0)) = (cl^2, cl^2)$.

Per a fer-ho, serà necessari introduir els conceptes bàsics de la teoria de jocs que utilitzarem per a treballar aquests models, i serà també indispensable veure els models clàssics que hem esmentat anteriorment, els models de Cournot i Bertrand. Amb aquests preliminars, serem capaços d'identificar els factors que determinen l'existència d'equilibris en els jocs de dues etapes que plantegem i de veure què mancava en el model original de Hotelling.

A nivell pràctic, l'objectiu és construir un programa informàtic que permeti resoldre el model de costos quadràtics per numèricament. Com veurem, en aquest cas, podem arribar també a una solució exacta de forma analítica i comparar-la amb l'aproximació que en resulti del programa. Aquest fet, però, no el podem extendre a altres models de costos en què la resolució analítica és més complicada o algebraicament impossible. Volem veure que, aleshores, és possible aplicar la nostra aproximació numèrica a aquests altres models de costos dels quals no coneixem la solució analítica. Poder aplicar el programa a altres quantificacions del cost de desplaçament del consumidor trencaria la barrera que ha fet que els estudis en aquest àmbit siguin escassos, durant un llarg període de temps. Superar aquesta limitació ens permetrà estudiar l'existència d'equilibris per a molts més casos de costos i variacions de les hipòtesis del model.

La idea del programa es basa en construir un camí de reaccions de les empreses a la situació del mercat, és a dir, pujades i baixades de preu o canvis de localització, segons el que els doni un millor benefici. Per a fer-ho, haurem de considerar una discretització de preus, localitzacions i consumidors, prou gran perquè l'aproximació s'ajusti, amb un marge d'error, a la solució real.

Per a començar, volem resoldre la segona etapa del joc per a qualsevol parell de localitzacions a i b que es puguin donar en la primera etapa. Per tant, fixades a i b, volem trobar els preus d'equilibri que els corresponen. Així doncs, començarem amb un preu específic per part d'una empresa, per exemple p_A d'A, i veurem quina serà la reacció de l'empresa B que optimitza el seu benefici, comparant totes les opcions possibles. El procés consisteix en estudiar, per a cada preu p_B possible, els beneficis associats, per tal de poder escollir aquell amb què l'empresa B obtingui un major benefici. Per a trobar els beneficis associats, és necessari trobar la demanda que obtindrà cada empresa per a cada parell de preus que estudiem. Per a fer-ho, fixarem els dos preus a estudiar i mirarem, per a cada consumidor de la discretització escollida, si $p_A + c(x-a)^2 > p_B + c(l-b-x)^2$ o bé $p_A + c(x-a)^2 < p_B + c(l-b-x)^2$. D'aquesta forma, obtindrem una a una, les decisions de compra dels consumidors i, per tant, les demandes de cadascuna de les empreses. Amb aquestes dades, podrem calcular els beneficis associats a cada parella de preus i comparar-los entre tots els p_B de la discretització de preus escollida, per a determinar una reacció de B al primer preu p_A. Un cop identificada aquesta reacció, la fixarem com a p_B i farem el mateix per a l'empresa A, estudiant, de totes les seves opcions, quin p_A optimitza el seu benefici. Repetirem el procés successivament fins a veure que s'estabilitza en els preus d'equilibri, per a les localitzacions fixades a i b.

Un cop som capaços de trobar els preus d'equilibri per a cada parell de localitzacions — sota l'assumpció que, per a totes elles existeix un equilibri, pels resultats del model teòric —, podem trobar l'equilibri del joc en dues etapes. El procés serà similar al definit per als preus, consistirà en determinar una localització inicial d'una de les empreses, per exemple a, i trobar la resposta de l'empresa B. Aquesta resposta, dependrà dels preus d'equilibri i els beneficis associats que resultin de la iteració definida anteriorment. Així doncs, per a comparar totes les localitzacions possibles de b , haurem de calcular els preus d'equilibri per a a fixada i totes les b ($b \leq l - a$) de la discretització. Un cop haguem escollit la localització b que dóna un millor benefici a l'empresa B, la fixarem com a resposta i repetirem el procés per a trobar la resposta d'A a aquesta b fixada. De la mateixa manera, repetirem el procés successivament fins a la seva estabilització en el parell de localitzacions d'equilibri $(0, 0)$.

Ens marquem com a objectiu que la realització d'aquest programa suposi una resolució eficient del joc de dues etapes, tenint en compte que tan sols calcularem aquells equilibris en preus, és a dir, equilibris de segona etapa, quan la resolució de la primera etapa ho requereixi. Així doncs, el nivell de discretització de preus i localitzacions, no afectarà excessivament a l'eficiència del programa, perquè no haurem de calcular totes les combinacions possibles, sinó només aquelles necessàries per a la recursió. Aquest fet ens permetrà ser acurats en la discretització dels diferents elements, sense renunciar a la senzillesa relativa del programa.

Com hem vist, la utilitat del programa resideix en poder-lo aplicar a altres situacions que no podem abordar mitjançant la resolució analítica. El primer exemple que hem plantejat és considerar diferents funcions de costos més complexes que la quadràtica. Però, seria també interessant treballar, en termes de localització, amb funcions de costos asimètriques que representin les preferències dels consumidors. És a dir, cobrir els casos en què es consideri més costós comprar a una empresa que a una altra, quan la distància física és la mateixa, només pel fet que els consumidors la prefereixen; per exemple, per factors com: reputació, oferta o marca. Fins i tot, es podrien considerar diferents distribucions dels consumidors al llarg del segment, per a representar mercats en què els consumidors no es distribueixen uniformement, sinó que s'aglomeren segons les característiques del producte, el mercat i el propi consumidor.

Amb aquesta proposta, el treball es divideix en cinc parts. La primera i present part, on s'exposen les raons, la motivació i la metodologia de la realització del projecte, així com el fons històric que envolta el camp a treballar. En la segona part, s'ofereix una introducció teòrica a la teoria de jocs, centrant-se en els jocs no cooperatius estàtics i dinàmics i la seva resolució. Després, s'hi troben els models clàssics de competència en quantitats, de Cournot, i en preus, de Bertand, que serveixen per a introduir el model de competència en preus i localització de Hotelling i la seva versió revisada, de d'Aspremont, Jaskold Gabszezwicz i Thisse. Per últim, trobarem el programa definit aplicat al model revisat de Hotelling i els resultats que se n'obtenen. Així doncs, finalitzarem amb les conclusions que obtenim en donar per acabat aquest projecte i amb les perspectives que ens marquem per a un futur.

Part II

Preliminars

Abans de començar a parlar sobre les qüestions que s'inclouen en aquest treball, és important fer una introducció a la *teoria de jocs*. Per a familiaritzar-nos amb els conceptes que tractarem, com els de *joc*, *equilibri de Nash* o *equilibri perfecte en subjocs*, utilitzarem i ens basarem en les definicions i especificacions de la monografia de Robert Gibbons del 1992 [5].

1 Jocs no cooperatius estàtics

Per tal de poder entendre els models més complexos que veurem durant aquest mateix apartat, comencem definint aquells conceptes més bàsics i essencials de la teoria de jocs, com *joc*, *estratègia estrictament dominada* o *equilibri de Nash*.

1.1 Què és un joc?

Per a donar la definició formal d'un *joc*, cal especificar quins són els elements que, segons Gibbons, s'hi consideren i què representen. N'hi ha tres:

1. Els jugadors.
2. Les estratègies que cada jugador pot desenvolupar.
3. Els guanys de cada jugador, per a cada combinació possible. d'estratègies

Determinarem el nombre de jugadors amb n i el conjunt de possibles estratègies de cada jugador arbitrari i com S_i, que denominem el seu *espai d'estratègies*. Una estratègia $s_i \in S_i$ és un element arbitrari de S_i i $(s_1, ..., s_n)$ és una combinació d'estretègies de cadascun dels n jugadors. Sigui u_i la funció de guanys de cada jugador i: aquesta depèn de les estratègies escollides per la resta de jugadors $(s_1, ..., s_n)$, és a dir: $u_i = u_i(s_1, ..., s_n)$.

Els jocs es poden classificar segons la disposició d'informació per part dels jugadors: poden ser amb informació completa o incompleta, perfecta o imperfecta, i segons el seu desenvolupament en el temps: poden ser simultanis o seqüencials.

En aquest apartat, considerarem jocs amb informació completa, és a dir, on els jugadors saben quines seran les possibilitats i quins seran els guanys de tots els jugadors per a cada elecció de cada jugador, i simultanis, és a dir, on els jugadors escullen una estratègia sense saber què han escollit la resta de jugadors, per tant amb informació imperfecta.

La definició que correspon, doncs, és la següent:

Definició. La ***representació en forma normal*** d'un joc amb n jugadors especifica els espais d'estratègies dels jugadors $S_1, ..., S_n$ i les seves funcions de guanys $u_1, ..., u_n$. Es denota com $G = \{S_1, ...S_n; u_1, ..., u_n\}$.

A més a més, a l'hora de representar un joc, es poden utilitzar dues variants. Per una banda, la *forma normal*, que, en general, s'utilitza quan el joc té dos jugadors, els jocs que veurem en aquest treball. En aquest cas, es construeix una bimatriu amb dues entrades a cada element, que representen les utilitats generades per a cada jugador segons l'estratègia fixada per columna i fila, cadascuna per un dels jugadors. Per altra banda, en especial per a jocs dinàmics, tenim la *forma extensiva*, en la qual es construeix un arbre, on cada branca representa una possible decisió, i al final d'una seqüència de branques la utilitat que hi resulta.

Un exemple clàssic de joc és el famós *dilema dels presoners*, on dos sospitosos són arrestats i acusats d'un delicte. La condemna dels sospitosos depèn exclusivament de les seves confessions, perquè la policia no té suficients proves per a condemnar-los. La policia els tanca en cel·les diferents i, abans d'interrogar-los, els presenten les opcions que tenen: confessar o no confessar, que són les estratègies possibles a utilitzar pels presoners; i quines seran les conseqüències per a ambdós en cada cas. Si cap dels dos confessa, seran condemnats a un any de presó. Si els dos confessen, seran condemnats a 5 anys de presó cadascun. I si només un dels dos confessa, aquest quedarà en llibertat i el que no hagi confessar serà condemnat a 10 anys de presó. Aquestes penes les definim com les utilitats possibles: $\{0, -1, -5, -10\}$.

Per tant, la representació en forma normal que definíem anteriorment, en aquest cas, quedaria d'aquesta forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Presoner I}\backslash\text{Presoner II} & \begin{array}{cc} \text{Callar} & \text{Confessar} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Callar} \\ \text{Confessar} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

Com veiem, a cadascun dels elements de la bimatriu apareixen els resultats que obtenen els presos quan escullen les estratègies corresponents a cada columna i fila; per exemple, a l'element de fila *Callar*, el Presoner I calla, i columna *Callar*, el Presoner II calla, els dos jugadors obtenen -1 any de llibertat. Així doncs, omplim la matriu amb les condicions determinades anteriorment.

Vist des del punt de vista d'eficiència, si es poguessin coordinar, la solució seria clara: cap dels dos presoners confessa i obtenen la pena mínima que poden obtenir els dos de forma igual. Tot i així, la simultaneïtat amb què juguen no permet que la solució sigui una decisió acordada. Encara que prèviament a l'interrogatori hagin acordat callar, a l'hora de la veritat, si qualsevol d'ells creu que l'altre callarà, la seva resposta racional és delatar i, així, obtenir un resultat millor.

1.2 Què és un equilibri de Nash?

Un cop definit el joc, volem trobar quina serà l'estratègia definitiva que escolliran els jugadors jugant de forma simultània, és a dir, resoldre el joc. Per a fer-ho, cal veure quina preferència tenen els jugadors sobre les estratègies, observant les conseqüents utilitats.

En l'exemple del *dilema dels presoners*, si un dels dos presoners decideix confessar, les opcions de l'altre presoner són més clares: confessant reduiria la seva pena de 10 a 5 anys de presó amb tan sols el fet de confessar en comptes de callar. En el cas contrari, si un dels presoners decideix callar, l'altre seguirà preferint confessar a callar, ja que així s'estalvia 1 any de presó. Així doncs, per al presoner I, l'estratègia de callar és dominada per l'estratègia confessar, és a dir, per a cada estratègia que utilitzi el presoner II, la pena del presoner I és major si calla que si confessa i per tant la seva utilitat és menor si calla que si confessa. El mateix passa per al jugador II, sigui quina sigui l'estratègia escollida pel jugador I.

Aquesta dominació ens pot ajudar a entendre la forma en què els jugadors descarten estratègies i duen a terme les seves decisions: cap jugador no escollirà una estratègia dominada, perquè sota cap combinació d'estratègies de la resta de jugadors, l'estratègia dominada és preferible.

Definició. En el joc de forma normal $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, siguin s_i' i s_i'' possibles estratègies del jugador i (s_i' i s_i'' són elements de S_i). L'estratègia s_i' està ***estrictament dominada*** per l'estratègia s_i'' si per a cada combinació possible de les estratègies de la resta de jugadors, el guany de i per haver utilitzat s_i' és estrictament menor que el guany de i per utilitzar s_i':

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, ..., s_n)$$

per a cada $(s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ que pot ser construida a partir dels espais d'estratègies dels altres jugadors $S_1, ..., S_{i-1}, S_{i+1}, ...S_n$.

Per tant, en l'exemple que tractàvem, com és un joc amb tan sols dues possibles estratègies per cada jugador i hem vist que l'estratègia de callar és estrictament dominada per l'estratègia de confessar en ambdós casos, és fàcil veure quina serà la solució d'aquest joc: $(Confessar, Confessar)$, amb unes penes de $(-5, -5)$. Com hem comentat abans, la decisió final dels jugadors no coincideix amb la millor opció que podem veure dins de la matriu, la simultaneïtat del joc i la falta de certesa sobre el que farà l'altre jugador fa que ambdós actuïn de forma individual i no col·lectiva.

En aquest cas, hem resolt el joc mitjançant un procés anomenat *eliminació iterativa de les estratègies estrictament dominades*, tot i així, no qualsevol joc es pot resoldre utilitzant aquesta tècnica, perquè un joc pot no tenir estratègies dominades. Així doncs, existeix una procés que dóna solucions de forma molt més precisa i per a una classe de jocs molt àmplia: l'*equilibri de Nash*. Aquest és més poderós que l'eliminació iterativa, perquè les estratègies que resulten de fer un equilibri de Nash han sobreviscut també a l'eliminació iterativa, però no a la inversa.

En què es basa l'equilibri de Nash? Si podem determinar una única combinació d'estratègies dels jugadors, aquestes estratègies escollides han de ser les millors respostes del jugadors a les estratègies escollides pels altres jugadors. En aquest cas, la solució es pot denominar *estratègicament estable*, perquè cap dels jugadors no voldrà desviar-se unilateralment de l'estratègia escollida. Aquesta solució que definim és precisament l'equilibri de Nash:

Definició. En el joc en forma normal de n jugadors, $G = \{S_1, ...S_n; u_1, ..., u_n\}$, les estratègies $(s_1^*, ..., s_n^*)$ formen un ***equilibri de Nash*** si, per a cada jugador i, s_i^* és la millor resposta del jugador i (o com a mínim una d'elles) a les estratègies dels altres $n-1$ jugadors, $(s_1^*, ...s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$:

$$u_i(s_1^*, ...s_{i-1}^*, s_i^* s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, ...s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

per a cada possible estratègia $s_i \in S_i$; és a dir, s_i^* és solució de:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, ...s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

Exemple. Per a posar en pràctica el que hem vist fins ara, plantegem un joc en què poguem aplicar el procés esmentat anteriorment. En aquest joc, tenim dos jugadors

- El jugador I té 3 estratègies: $S_I =$ (Alta, Mitjana, Baixa)
- El jugador II té 3 estratègies: $S_{II} =$ (Esquerra, Centre, Dreta)

i els seus pagaments queden de la següent forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Jug I}\backslash\text{Jug II} & \begin{array}{ccc} \quad\text{E} & \quad\text{C} & \quad\text{D} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{M} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,4) & (4,0) & (5,3) \\ (4,0) & (0,4) & (5,3) \\ (3,5) & (3,5) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Comencem el procés per a trobar l'equilibri de Nash, trobant les millors respostes de cada jugador. Comencem pel jugador I:

- Fixada l'estratègia E del jugador II, el jugador I pot escollir A $\rightarrow$ 0, M $\rightarrow$ 4 o bé B $\rightarrow$ 3. Si comparem els tres pagament associats, la millor estratègia és la M.
- Fixada l'estratègia C del jugador II, el jugador I pot escollir A $\rightarrow$ 4, M $\rightarrow$ 0 o bé B $\rightarrow$ 3. En aquest cas, la millor estratègia és la A.
- Fixada l'estratègia D del jugador II, el jugador I pot escollir A $\rightarrow$ 5, M $\rightarrow$ 5 o bé B $\rightarrow$ 6. Per tant, la millor estratègia és la B.

Representant aquestes millors respostes en la matriu:

$$\begin{array}{ll} \text{Jug I}\backslash\text{Jug II} & \begin{array}{ccc} \quad\text{E} & \quad\text{C} & \quad\text{D} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{M} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,4) & (4,0) & (5,3) \\ (4,0) & (0,4) & (5,3) \\ (3,5) & (3,5) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ara fem el mateix pel segon jugador:

- Fixada l'estratègia A del jugador I, el jugador II pot escollir E $\rightarrow$ 4, C $\rightarrow$ 0 o bé D $\rightarrow$ 3. Si comparem els tres pagament associats, la millor estratègia és la E.
- Fixada l'estratègia M del jugador I, el jugador II pot escollir E $\rightarrow$ 0, C $\rightarrow$ 4 o bé D $\rightarrow$ 3. Per tant, la millor estratègia és la C.
- Fixada l'estratègia M del jugador I, el jugador II pot escollir E $\rightarrow$ 5, C $\rightarrow$ 5 o bé D $\rightarrow$ 6. Ara, la millor estratègia és la D.

Afegint la representació d'aquestes millors respostes a la matriu anterior, obtenim:

$$\begin{array}{ll}
\text{Jug I}\backslash\text{Jug II} & \begin{array}{ccc}\quad\text{E} & \quad\text{C} & \quad\text{D}\end{array} \\
\begin{array}{l}\text{A}\\ \text{M}\\ \text{B}\end{array} & \begin{pmatrix} (0,4) & (4,0) & (5,3) \\ (4,0) & (0,4) & (5,3) \\ (3,5) & (3,5) & (6,6) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Veiem clarament que l'equilibri de Nash correspon a les estratègies (D,D) amb pagaments $(6,6)$. L'equilibri del joc fa coincidir les millors respostes dels jugadors; és a dir, en aquest cas, quan I escull B, la millor resposta de II serà escollir D, i quan II escull D, la millor resposta de I serà escollir B. Per tant, cap dels dos jugadors té incentius a desviar-se de l'estratègia escollida, com hem comentat anteriorment a la definició d'equilibri de Nash.

2 Jocs no cooperatius dinàmics o en etapes

Un cop definida la base, fem una passa endavant per a veure un concepte que ens apropa al que volem tractar en aquest treball, els *jocs no cooperatius en etapes*. En aquest apartat, veurem conceptes com *jocs en etapes*, *inducció cap a enrere* i *equilibri perfecte en subjocs*.

2.1 La inducció cap enrere

En aquest apartat incloem un nou tipus de joc. Anteriorment, hem tractat el joc de forma estàtica, on els jugadors actuaven simultàneament. Existeixen jocs, però, en què els jugadors actuen seqüencialment; en aquest cas, la informació pot ser, de totes formes, completa, tots els jugadors poden saber quines opcions tenen i quins seran els pagaments associats. En aquest tipus de jocs d'informació completa, distingim entre d'informació perfecta i imperfecta. En un joc d'informació perfecta, cada jugador ha vist les decisions que han pres els seus predecessors en el joc. Ens centrem per ara en jocs dinàmics d'informació completa i perfecta. Per a un joc de dos jugadors, amb dues etapes, la seqüència és la següent:

1. Primera etapa del joc: El jugador 1 escull una acció: $a_1 \in A_1$, valorant la reacció del jugador 2 a cada acció possible i els pagaments associats a les combinacions d'aquestes.

2. Segona etapa del joc: El jugador 2, sabent quina ha estat l'elecció del jugador 1, escull una acció: $a_2 \in A_2$.

3. Resultat del joc: Els guanys obtinguts són: $u_1(a_1, a_2)$ i $u_2(a_1, a_2)$.

És per això que una estratègia d'un jugador es pot definir com un pla d'acció complet del jugador en el joc: contenint totes les accions escollides en qualsevol contingència del joc. Per tant, en aquest joc, les estratègies s_i del jugador 1 coincideixen amb les seves accións $a_1 \in A_1$ i, així, el seu conjunt d'estretègies coincideix amb el conjunt d'accions $A_1 = S_1$.

En el cas del jugador 2, però, una estratègia és una funció $s : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que per a $a_1 \in A_1$, $s(a_1)$ determina una acció en A_2 del jugador 2 respecte la tria a_1 del jugador 1. El conjunt de totes les possibles estretègies del jugador 2 es denota per S_2. Si els conjunts A_1 i A_2 són grans, el conjunt d'estratègies del segon jugador creix molt, dificultant la respresentació del joc en forma normal.

És per això que, en aquesta classe de jocs, necessitem un procediment que consideri les etapes per les quals el joc passa i que potser no ens doni tots els equilibris però almenys aquells consistents en totes les etapes del joc. Aquest procediment l'anomenem *inducció cap enrere*. Com podem deduïr del seu nom, la inducció cap enrere comença pel final del joc seguint el següent camí:

1. A l'hora d'escollir l'estratègia, en la segona etapa del joc, el jugador 2 observarà l'elecció $\overline{a_1}$ del jugador 1 i prendrà la següent decisió:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(\overline{a_1}, a_2)$$

   En aquest cas, la decisió del jugador 1 ha estat fixada, a l'hora de fer el procés d'inducció cap enrere, però, no sabem quina ha estat l'elecció del jugador 1, per tant, l'hem de determinar com el màxim de la utilitat del jugador 2 per $a_2 \in A_2$ per a cada $a_1 \in A_1$. Amb això, obtenim la solució al procés d'optimització del jugador 2, amb les millors reaccions o respostes a les accions del jugador 1, que denotem com $R_2(a_1) \in S_2$ i anomenem estratègia (o estratègies) de millor resposta del jugador 2.

2. Un cop obtingudes aquestes millors respostes que, recordant que es tracta d'un joc d'informació completa, el jugador 1 també coneix, hem de veure quina serà l'estratègia escollida pel jugador 1 en la primera etapa. El jugador 1 螺 compararà la seva utilitat tenint en compte les reaccions que tindrà el jugador 2 a les seves estratègies i escollirà:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1)) \tag{2.1}$$

   Determinant la seva acció escollida i per tant, en aquest cas, la seva estratègia.

3. La solució del joc, doncs, serà la combinació d'estratègies $(a_1^*, R_2(a_1))$ on a_1^* és la solució del problema d'optimització (2.1). Per tant, el resultat que es produirà serà $(a_1^*, R_2(a_1^*))$

Com veiem, per a resoldre aquest tipus de joc, cal començar per l'ultima etapa i tenir en compte els resultats de la darrera etapa per prendre les decisions en les etapes anteriors. Aquest és un cas senzill de dues etapes i dos jugadors, podríem afegir jugadors i etapes, a mida que ho fessim, la complexitat de la optimització de respostes augmantaria, perquè aquesta arrossegaria un major nombre de factors a considerar.

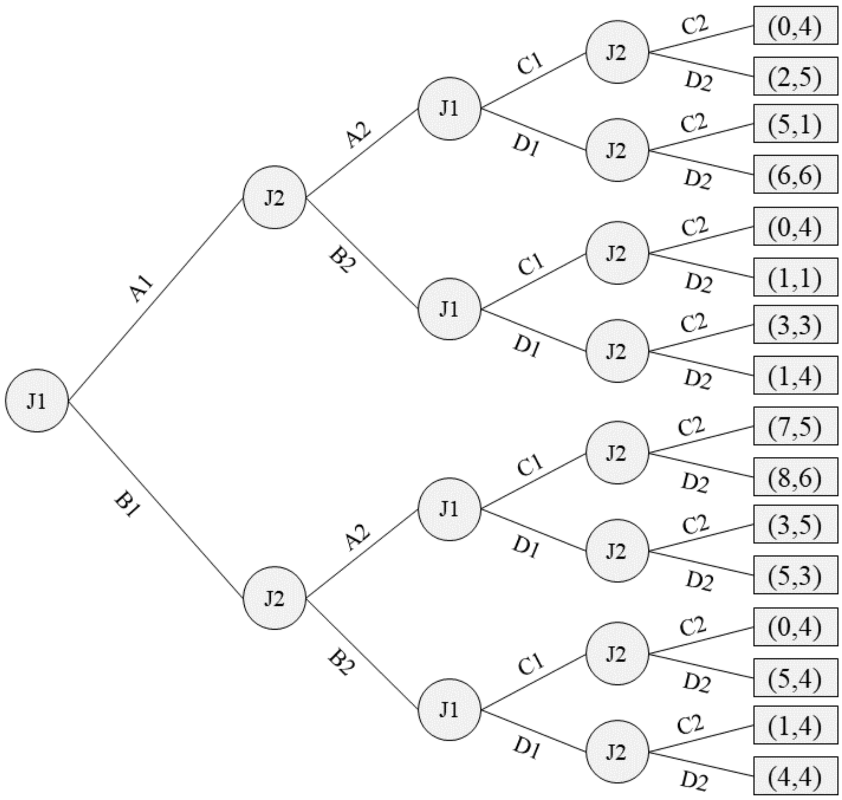
Per la seva naturalesa, aquesta classe de jocs, quan el nombre d'accions disponibles és finit, es veu més clarament representada quan ho fem de forma extensiva, mitjançant un arbre. El diagrama en forma d'arbre es composa de nodes i branques: cada node representa el punt de decisió d'un dels jugadors, per tant, n'hi ha tants com decisions que han de prendre durant el joc, i cada branca representa una de les decisions possibles sortint d'un dels nodes. Al final de cada camí de decisió composat de branques i nodes, trobarem els pagaments que s'obtenen seguint el camí indicat.

Exemple. Suposem un joc de quatre etapes i dos jugadors: jugador 1 (J1) i jugador 2 (J2); amb 4 accions possibles cadascun, 2 per etapa.

- El jugador 1, en la primera etapa pot escollir entre A1 i B1 i, en la tercera, entre C1 i D1.

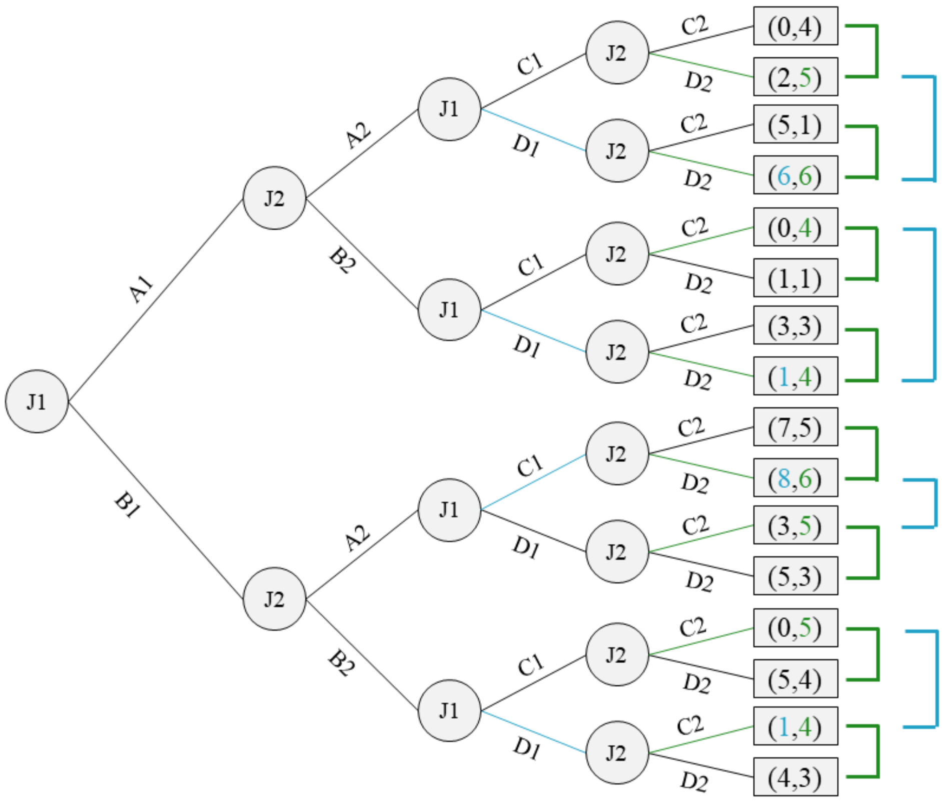
- El jugador 2, en la segona etapa pot escollir entre A2 i B2 i, en la quarta, entre C2 i D2.

Com que volem representar totes les etapes un un mateix diagrama, el farem en forma d'arbre que, com hem dit anteriorment, és la forma més adeqüada per a aquest tipus de jocs.



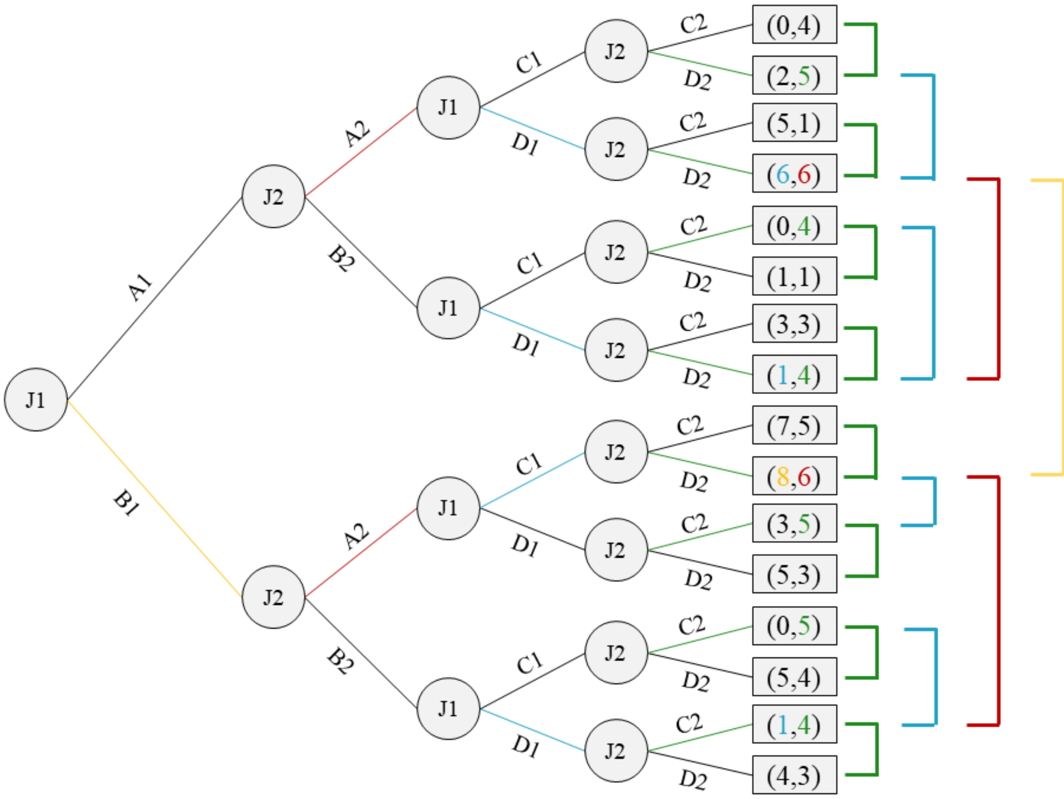
Ara, resoldrem el joc. Relitzem la inducció cap enrere començant per la quarta etapa: comencem comparant la utilitat aconseguida per al jugador 2 a partir de cadascun dels nodes de decisió terminals. És a dir, comparem els pagament del jugador 2 quan escull C2 o D2 i marquem els òptims (en color verd).

Un cop coneixem la decisió que prendria el jugador 2 en la quarta etapa, per a cada acció possible del jugador 1, en la tercera etapa veiem quina es la preferència del jugador 1: comparant les utilitats quan escull C1 o D1 i marcant els òptims (en color blau).



Així doncs, hem marcat quatre equilibris de Nash, corresponents a cada subjoc que comença en la tercera etapa. A partir d'aquí, però, cal continuar aplicant el procés de la inducció cap enrere per a resoldre les etapes anteriors. Per a fer-ho, tornem a comparar les utilitats del jugador 2, tenint en compte totes les estratègies que han sobreviscut fins ara, segons si escull A2 o B2 en la segona etapa del joc i marquem els òptims (en color vermell).

Finalment, tenim dos parells d'utilitats en els quals el pagament del jugador 2 està marcat en vermell en la següent figura. Aquest parells d'utilitats corresponen al final dels dos possibles camins del jugador 1 en la primera etapa. Un dels camins correspon a l'estratègia A1 del jugador 1 i l'altre correspon a l'estratègia B1. Per tant, l'únic que hem de fer es comparar els dos pagaments i marcar l'òptims (en color groc).



Finalment, el resultat de l'inducció cap a enrere és: (B1,A2,C1,D2), que representa el camí d'accions seguit. Però les estratègies, tria d'una acció en cada node de decisió del jugador, que resulten de l'inducció cap enrere són:

$$s_1 = [B1, (D1, D1, C1, D1)]$$

$$s_2 = [(A2, A2), (D2, D2, C2, D2, D2, C2, C2, C2)]$$

i formen un equilibri de Nash amb $(u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)) = (8, 6)$. Com veiem, el nombre d'estratègies per al jugador 1 és de 2^5 i de 2^{10} per al jugador 2. Amb això provem que la representació en forma normal no resulta ideal per a aquesta classe de jocs.

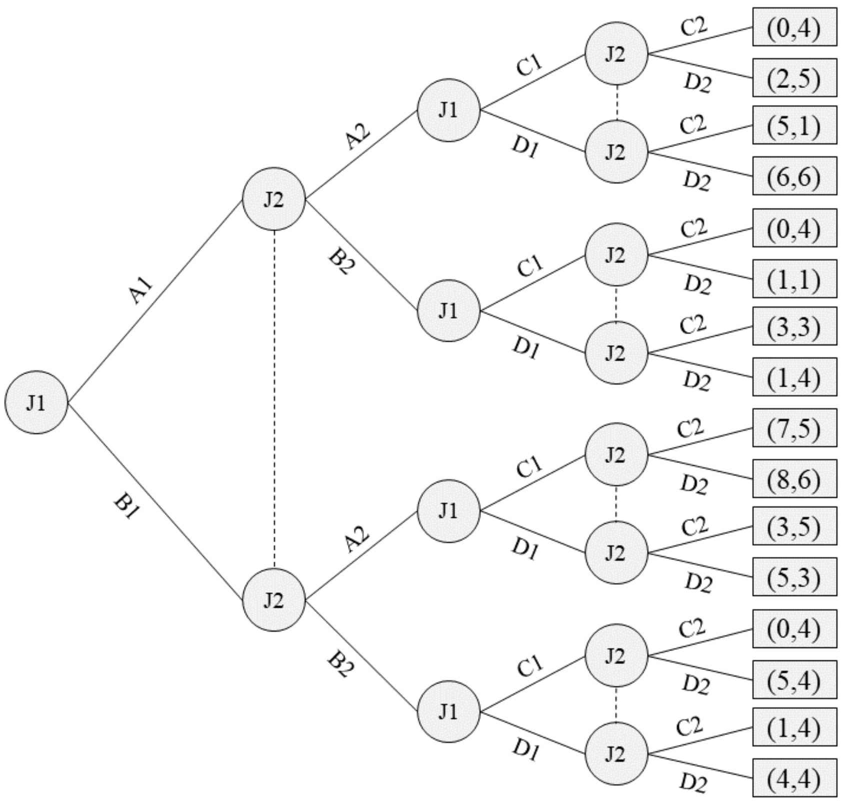
Aquest equilibri que hem obtingut a partir de la inducció cap enrere s'anomena equilibri perfecte en subjocs, com explicarem a l'apartat següent.

2.2 L'equilibri perfecte en subjocs

Fins ara hem vist jocs en etapes en els quals els jugadors escullen individualment, i de forma alterna, una acció per etapa. Podem ampliar aquest tipus de joc afegint simultaneïtat en cada etapa, és a dir, fent que tots els jugadors escullin alhora una estratègia en cada etapa sense saber què estan escollint la resta de jugadors.

Aíxi doncs, ens trobem amb diverses etapes amb un joc a cadascuna d'elles que anomenarem *subjoc*. La informació entre etapes continua sent perfecta, tots els jugadors saben què ha passat a l'etapa anterior, quines opcions tenen tots els jugadors i quins seran els guanys conseqüents, però amb informació imperfecta dins de cada etapa, perquè cap d'ells sap el que estan decidint la resta dels jugadors en el joc simultani.

Per a entendre millor la següent definició, prenem un joc similar al darrer vist a l'apartat anterior, però amb simultaneïtat a cada etapa: afegint el que anomenem un *conjunt d'informació*, representat per una línia de punts. Així doncs, queda un joc en dues etapes. En la primera etapa, el jugador 1 pot escollir entre les accions A1 i B1, simultàniament, el jugador 2 pot escollir entre les accions A2 i B2. En la segona etapa, el jugador 1 escollirà entre les accions C1 i D1, simultàniament, el jugador 2 ho farà entre les accions C2 i D2.



El que volem expressar amb aquesta línia de punts és que, tot i que els nodes units per aquesta estan diferenciats en la representació de l'arbre, el jugador, a l'hora de prendre la decisió corresponent, no pot diferenciar entre els dos nodes.

A continuació, definim el concepte de subjoc:

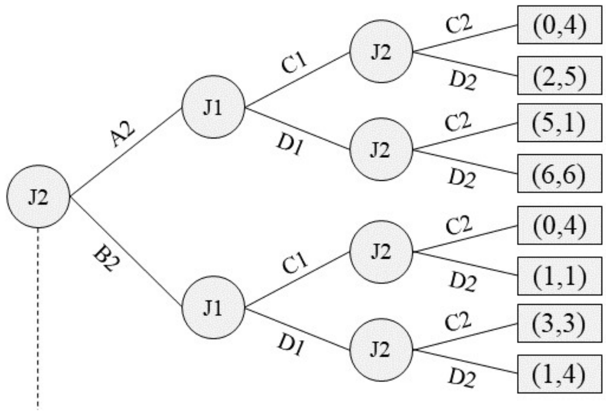
Definició. Un ***subjoc*** és una secció d'un joc que satisfà les següents característiques:

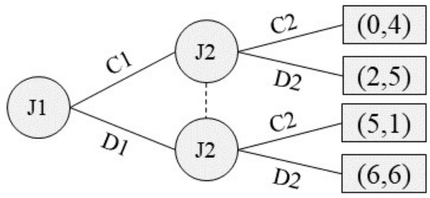
1. Comença en un node de decisió unitari.

2. Conté tots els nodes successius.

3. No trenca cap conjunt d'informació.

En el joc que estem tractant, podem separar nodes, per exemple, de les següents formes:





Tot i així, si repassem les tres condicions, el cas de l'esquerra, comença en un node de decisió unitari, conté tots els nodes successius però trenca un conjunt d'informació: ho veiem clarament perquè es trenca la línia de punts. El cas de la dreta, en canvi, satisfà la definició de subjoc: comença en un node de decisió unitari, conté tots els nodes successius i no trenca cap conjunt d'informació.

Per a resoldre'l, adaptarem la inducció cap a enrere passant pels diferents subjocs; d'aquesta forma, arribarem a un *equilibri perfecte en subjocs.*

Definició. Un ***equilibri perfecte en subjocs*** és una combinació d'estratègies que constitueix un equilibri de Nash en cada subjoc del joc original.

Cerquem primer els equilibris de Nash dels quatre subjocs de la segona etapa. Ho farem de forma normal:

$$\begin{array}{c c} \text{J1}\backslash\text{J2} & \begin{array}{cc} \text{C2} & \text{D2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{C1} \\ \text{D1} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,4) & (2,5) \\ (5,1) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} \text{J1}\backslash\text{J2} & \begin{array}{cc} \text{C2} & \text{D2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{C1} \\ \text{D1} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,4) & (1,1) \\ (3,3) & (1,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

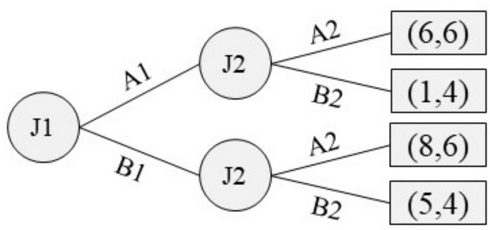
Com veiem en aquest darrer subjoc, quan el jugador 2 fixa l'acció D2, el jugador 1 es troba indiferent davant l'elecció entre C1 i D1, perquè ambdós pagaments són iguals. Per tant, hem marcat totes dues accions com millor resposta.

$$\begin{array}{c c} \text{J1}\backslash\text{J2} & \begin{array}{cc} \text{C2} & \text{D2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{C1} \\ \text{D1} \end{array} & \begin{pmatrix} (7,5) & (8,6) \\ (3,5) & (5,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} \text{J1}\backslash\text{J2} & \begin{array}{cc} \text{C2} & \text{D2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{C1} \\ \text{D1} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,4) & (5,4) \\ (1,4) & (4,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

En aquest darrer cas, ens trobem amb una situació particular: faci el que faci el jugador 1, al jugador 2 li és indiferent escollir qualsevol de les seves opcions. Aquesta situació ens porta a obtenir dos equilibris de Nash: aquells determinats per les respostes del jugador 1 a les accions del jugador 2. Per a continuar amb el procés, podem escollir qualsevol dels dos equilibris, escollirem (C1, D2) amb pagaments $(5, 4)$.

Així doncs, l'arbre reduït a un únic subjoc és de la següent forma: colocant els pagaments dels equilibris obtinguts anteriorment en el lloc dels subjocs de segona etapa.



Ara només queda resoldre aquest joc, que col·locarem en forma normal, com hem fet amb la resta:

$$\begin{array}{c c} \text{J1}\backslash\text{J2} & \begin{array}{cc} \text{A2} & \text{B2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A1} \\ \text{B1} \end{array} & \begin{pmatrix} (6,6) & (1,4) \\ (8,6) & (5,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Aquest joc de primera etapa, amb la informació incorporada dels equilibris de la segona etapa, té equilibri (B1,A2).

Així doncs, l'equilibri perfecte en subjocs és [(B1,(D1,D1,C1,C1),(A2,(D2,D2,D2,D2)] i els seus pagaments són $(8, 6)$.

Part III
Jocs de competència en mercats

En aquesta part estudiarem els models de competència clàssics. Aquests models defineixen diferents tipus de competència en duopolis i oligopolis, formes de mercat en què aquest està dominat per un número reduït de dues o més empreses, respectivament.

Existeixen diferents enfocaments de la competència, en funció de les característiques del producte, les empreses competeixen en quantitats o en preus. Un exemple molt clar és la diferència entre la forma de competència dels fabricants de cereals i les companyies aèries. En el cas dels cereals, les empreses s'esforcen en augmentar l'oferta i el percentatge de les seves marques respecte a la resta de productors en els prestatges dels supermercats. En el cas de les aereolínies, tot i que la presència a nivell global, les connexions i la freqüència de vols són factors importants a considerar, el factor clau de decisió entre una companyia o una altra per al comprador és el preu. En el primer cas, les empreses competeixen en quantitats i, en el segon, en preus.

Per això, veiem que l'objectiu de la competència no és sempre el mateix en tots els mercats. A continuació, veurem el model de competència en quantitats, de Cournot, i els models de competència en preus, per a productes homogenis i heterogenis, de Bertrand.

3 Competència en quantitats: model de Cournot

El 1838, més d'un segle abans que Nash, Cournot va definir el que ara coneixem com equilibri de Nash en el context d'un model concret de duopoli. Així doncs, veurem un exemple molt simple del model de Cournot, extret també de la monografia de Gibbons [5], que ens permetrà entendre la traducció a un joc com els que hem vist en apartats anteriors d'un model de mercat continu.

Siguin q_1 i q_2 les quantitats produïdes per les empreses 1 i 2, respectivament, productores d'un producte homogeni. Definim el preu d'equilibri del mercat, amb $Q = q_1 + q_2$, de la forma:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{si } Q < a \\ 0 & \text{si } Q \geq a \end{cases} \tag{3.1}$$

Definim $C_i(q_i) = cq_i$ com el cost total de producció de la quantitat q_i per l'empresa i; és a dir, no existeixen costos fixos i el cost marginal és constant i igual a c, suposant que $c < a$. El model de Cournot, doncs, és un model de competència en quantitats i suposa que les empreses les escullen de forma simultània.

Per a veure la relació amb el que hem vist fins ara i poder trobar l'equilibri de

Nash, traduirem aquest problema a un joc en forma normal. Per a fer-ho, hem de determinar:

1. Els jugadors: són les dues empreses 1 i 2 que hem definit.
2. Les estratègies que cada jugador pot desenvolupar: en aquest cas, les empreses poden escollir entre un gran ventall de possibilitats, tots els possibles valors de q_i. Considerant que el producte es contínuament divisible i que, evidentment, no poden escollir una quantitat negativa, podem representar el conjunt total de quantitats a escollir i, per tant, conjunt d'estratègies com $S_i = [0, \infty)$. Tot i així, en la majoria de casos, existeix un valor per a q_i que no es pot superar i, per tant, podríem excloure totes les quantitats superiors a aquest. No obstant, com que a (3.1) hem vist que $P(Q) = 0$ si la quantitat supera el valor a, cap empresa no produirà per sobre d'aquest valor.
3. Els guanys de cada jugador, per a cada combinació possible d'estratègies: els definim pel benefici de cada empresa en cada cas que, per definició és:

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i[P(q_1 + q_2) - c] = \begin{cases} q_i[a - (q_1 + q_2) - c] & \text{si } q_1 + q_2 < a \\ -cq_i & \text{si } q_1 + q_2 \geq 0 \end{cases}$$

Amb aquestes definicions i seguint la definició d'equilibri de Nash, les quantitats (q_1^*, q_2^*) són un equilibri si per a cada empresa i, q_i^* és solució de:

$$\max_{0 \leq q_i < \infty} \pi_i(q_i, q_j) = \max_{0 \leq q_i < \infty} q_i[a - (q_i + q_j^*) - c].$$

Resolent aquest problema d'optimització, obtenim:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\big(q_i[a-(q_i+q_j^*)-c]\big) = 0 \Rightarrow a-(q_i+q_j^*)-c+q_i(-1) = 0 \Rightarrow q_i = \frac{1}{2}(a-q_j^*-c) \quad (3.2)$$

que és un màxim perquè $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i^2} = -2 < 0$.

Així doncs, si (q_1^*, q_2^*) és un equilibri de Nash, les quantitats escollides per les empreses han de satisfer:

$$\left.\begin{aligned} q_1^* &= \frac{1}{2}(a - q_2^* - c) \\ q_2^* &= \frac{1}{2}(a - q_1^* - c) \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$$

L'equilibri $(q_1^*, q_2^*) = \left(\dfrac{a-c}{3}, \dfrac{a-c}{3}\right)$ té com a pagaments $\left(\dfrac{(a-c)^2}{9}, \dfrac{(a-c)^2}{9}\right)$.

Podem comprovar, com ja havíem vist en el cas del Dilema del Presoner, que l'equilibri no té perquè ser sempre l'opció de major pagament per a ambdues empreses; en aquest cas, existeixen altres quantitats que ofereixen major benefici a ambdues empreses, però que no construeixen un equilibri.

Per exemple:

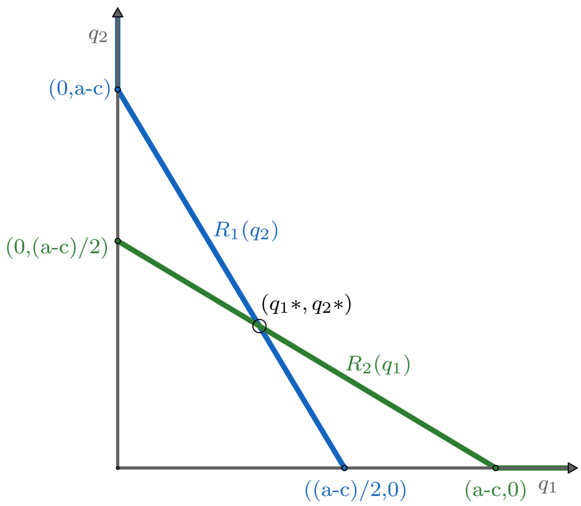
$$(q_1, q_2) = \left(\frac{a-c}{4}, \frac{a-c}{4}\right) \text{ amb pagaments } \left(\frac{(a-c)^2}{8}, \frac{(a-c)^2}{8}\right).$$

En aquest model, l'equilibri de Nash també es pot trobar de forma gràfica, representant les funcions de millor resposta que hem trobat fent (3.2):

$$q_i = R_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - q_j - c) & \text{si } q_1 + q_2 < a \\ 0 & \text{si } q_1 + q_2 \geq 0 \end{cases}$$

és la millor resposta del jugador i per a una estratègia q_j del jugador j.

La imposició d'ambdues equacions de millor resposta ens porta gràficament al punt en què ambdues equacions es satisfan, de forma que el punt de tall (q_1^*, q_2^*) satisfà que q_1^* és la millor resposta de l'empresa 1 quan l'empresa 2 escull q_2^*, i q_2^* és la millor resposta de l'empresa 2 quan l'empresa 1 escull q_1^*.



4 Competència en preus

Un cop vist el model de Cournot, en què veiem la competència en quantitats i el seu funcionament, ens centrarem en models de competència en preus, que són els que treballarem teòrica i pràcticament en la resta del treball.

4.1 El model de Bertrand per a productes homogenis

Així com hem vist a l'apartat anterior, en el model de Cournot, dues empreses competeixen en quantiats (q_1 i q_2) i el preu es determina per la demanda total en relació a la oferta total. La proposta de Bertrand, en canvi, contempla que les empreses competeixen en preus (p_1 i p_2) i que, conseqüentment, produeixen la quantitat que els preus determinats poden absorvir. Presentem el model que apareix a l'estudi de Martin J. Osborne [15].

L'escenari que es planteja és el mateix, per a dues empreses amb productes homogenis: cadascuna pot produir q_i quantitat a un cost $C_i(q_i) = cq_i$. Ara, doncs, hem de determinar una funció de demanda $Q(P)$, on P és el preu del mercat. Hem de tenir en compte que el preu P és el de l'empresa amb preu més baix, que cobrirà el total del mercat, donat que, en aquest cas, els consumidors només escullen segons el preu; més endavant veurem casos més complexos. Així com hem fet donant la forma inversa de la funció de demanda, $P(Q)$, en el model de Cournot, utilitzarem la mateixa expressió adaptant-la a la nova situació:

$$Q(P) = \begin{cases} a - P & \text{si } P < a \\ 0 & \text{si } P \geq a \end{cases} \tag{4.1}$$

Com en el cas de Cournot, si traduïm aquest joc a un joc de forma normal, tenim els següents elements:

1. Els jugadors: són les dues empreses 1 i 2 que hem definit.
2. Les estratègies que cada jugador pot desenvolupar: tots els possibles valors de p_i, $S_i = [0, \infty)$. Tot i així, com amb el cas de les quantiats, existeix un valor per a p_i que no es pot superar i, per tant, podríem excloure tots els preu superiors a aquest. No obstant, com que a (4.1) hem vist que $Q(P) = 0$ si el preu supera el valor a, cap empresa no determinarà un preu per sobre d'aquest valor.
3. Els beneficis de cada empresa expressats en funció de preus ($p_1 i p_2$) i costos c, que, tenint en compte que la quantitat és $Q(P) = a - P$ on $P = \min\{p_1, p_2\}$ i tota aquesta demanda és per a l'empresa amb el preu més baix, són:

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)(a - p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(a - p_i) & \text{si } p_i = p_j \\ \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

En el cas en què $p_i = p_j$, dividim la demanda entre dos perquè quan els preus coincideixen, els consumidors es reparteixen entre les dues empreses de forma igual; és a dir, les empreses es reparteixen la demanda a parts iguals.

Si volem determinar l'equilibri de Nash, hem de trobar les funcions de millor resposta d'ambdues empreses. Analitzant la situació, podem pensar que si l'empresa j fixa el preu p_j, l'empresa i voldrà determinar sempre un preu una mica per sota de p_j per a poder quedar-se tot el mercat i que, si i determina un p_i igual o per sobre de p_j, haurà de compartir el mercat o quedar-se sense, respectivament.

Tot i així, existeixen altres casos que estudiarem a continuació. Denotem com p^m el preu que maximitza l'expressió de benefici $(p-c)(a-p)$. En el cas de monopoli, l'única empresa d'aquest fixaria p^m per a obtenir benefici màxim. Suposem que l'empresa j fixa un preu p_j i estudiem els següents casos:

- Si $p_j < c$, les opcions per a i són:

  – Fixar un preu per sota o igual a p_j i obtenir un benefici negatiu.

  – Fixar un preu per sobre de p_j i obtenir un benefici nul.

  En aquest cas, doncs, l'empresa i fixarà un preu per sobre de p_j per així no haver d'absorbir la demanda, venent el producte a un preu inferior el cost i tenint pèrdues. La millor resposta és $R_i(p_j) = \{p_i \in S_i; p_i > p_j\}$.

- Si $p_j = c$, les opcions per a i són similars a les anteriors:

  – Fixar un preu per sota de p_j i obtenir un benefici negatiu.

  – Fixar un preu per sobre o igual p_j i obtenir un benefici nul, perquè o bé haurà de compartir el mercat a $p_i = c$ o bé es quedarà sense mercat per tenir un preu superior al de j.

  Així doncs, la millor resposta de i a p_j és: $R_i(p_j) = \{p_i \in S_i; p_i \geq p_j\}$

- Si $c < p_j \leq p^m$, és a dir, p_j és major que el cost però no arriba a ser el preu de maximització de benefici del mercat, aleshores l'empresa i no té una millor resposta. Això passa perquè a mida que p_i augmenta cap a p_j, el seu benefici augmenta fins que, de cop, en passar de $p_i = p_j - \delta$, amb delta molt petit, a $p_i = p_j$ el benefici disminueix d'un valor molt proper al benefici de monopoli fins al benefici que obté quan comparteix el mercat amb j. Així doncs, l'empresa i vol determinar un preu per sota de p_j però molt proper a aquest. Per a qualsevol preu $p_i < p_j$, existeix un p_i' tal que $p_i < p_i' < p_j$, per la continuitat dels possibles preus a determinar. Per tant, no podem definir una millor resposta.

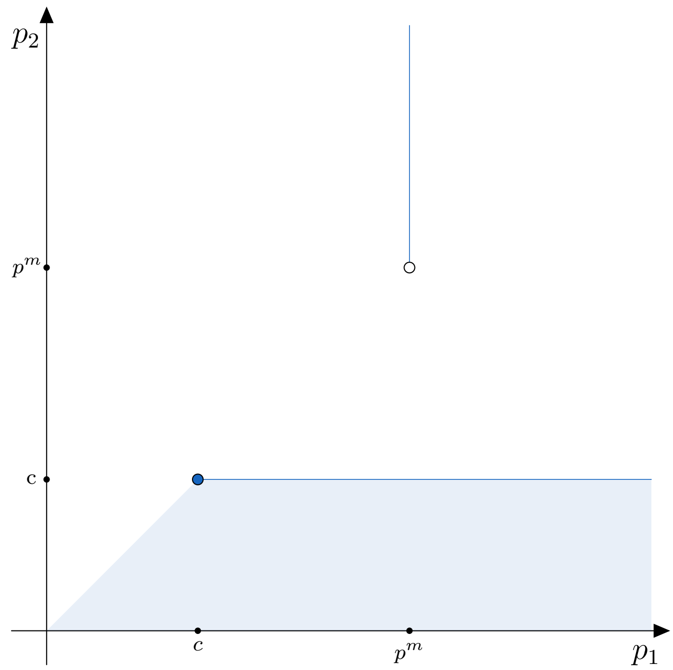
- Si $p_j > p^m$, la millor resposta de l'empresa i és clarament p^m.

Recopilant tots els casos, obtenim la funció de millor resposta de l'empresa i a un preu p_j de l'empresa j:

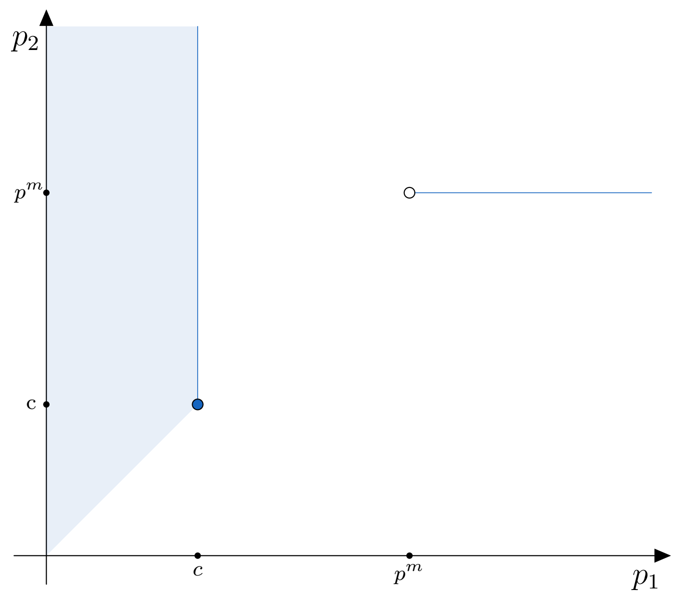
$$R_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i \in S_i; p_i > p_j\} & \text{si } p_j < c \\ \{p_i \in S_i; p_i \geq p_j\} & \text{si } p_j = c \\ \emptyset & \text{si } c < p_j \leq p^m \\ p^m & \text{si } p_j > p^m \end{cases}$$

La representació gràfica d'ambdues funcions de millor resposta és:

$R_1(p_2)$



$R_2(p_1)$



Per definició, un equilibri de Nash (p_1^*, p_2^*) és una combinació de preus tal que p_1^* és la millor resposta al preu p_2^* i p_2^* és la millor resposta a p_1^*; és a dir, $p_1^* \in R_1(p_2^*)$ i $p_2^* \in R_2(p_1^*)$. Aleshores, hem d'imposar les dues millors respostes per a trobar l'equilibri, que es trobarà, gràficament, en la intersecció de les seves representacions gràfiques. En aquest cas, tenim un únic punt de intersecció (c, c) i que, per tant, és l'únic equilibri de Nash del nostre joc $(p_1^*, p_2^*) = (c, c)$.

Com sembla lògic, les empreses lluiten per a obtenir tot el mercat baixant progressivament els seus preus fins a arribar a c, del qual no volen baixar per a no tenir pèrdues. Per tant, el resultat analític que hem obtingut coincideix amb el resultat que obtenim aplicant la lògica: les empreses determinen en equilibri un preu igual al cost marginal c.

4.2 El model de Bertrand per a productes diferenciats

Per a evitar les conseqüències de la competència així com l'hem vist en els models de Cournot i Bertrand, les empreses utilitzen la diferenciació del producte per a crear preferències en els consumidors envers el seu producte. Aquesta estratègia de diferenciació els permet poder determinar un preu per sobre del d'equilibri sense perdre la totalitat de les vendes.

Com que parlem en termes de preu, modelitzem aquest cas a la Bertrand. És a dir, descriurem el model de Bertrand per a productes diferenciats. En aquest cas, ens fixarem en la descripció del model de Roy Gardner [4].

Tenim dues empreses 1 i 2 amb funcions de demanda:

$$q(p_i) = \begin{cases} a - p_i - (p_i - p_M) & \text{si } p_i < \dfrac{a - p_M}{2} \\ 0 & \text{si } p_i \geq \dfrac{a - p_M}{2} \end{cases} \tag{4.2}$$

Amb el p_M denotem el preu mitjà de mercat, l'incloem a la funció de demanda per a representar el risc de pèrdua d'una part del mercat en cas de determinar un preu major a p_M. En aquest cas, el preu mitjà de mercat, com que tractem únicament amb dues empreses, serà la mitjana $\frac{p_1 + p_2}{2}$. És a dir, en el cas en què $p_i > p_M$, alguns clients començaran a buscar alternatives més barates, però no ho faran tots de cop, gràcies a la diferenciació del producte, la demanda es reduirà contínuament a mida que augmenti el preu. Per exemple, en el cas del mercat de telèfons mòbils, si una una empresa augmenta el preu en 100 euros per sobre del preu de mercat, encara hi haurà consumidors disposats a pagar la diferència de preu, per les característiques úniques del producte.

Un cop definida la demanda en funció del preu, definirem les funcions de benefici, tal i com hem fet en models anteriors; amb costos marginals equivalents c.

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)(a - \dfrac{3p_i}{2} + \dfrac{p_j}{2}\Big) & \text{si } p_i < \dfrac{a - p_M}{2} \\ 0 & \text{si } p_i \geq \dfrac{a - p_M}{2} \end{cases}$$

Prenent les derivades de les dues funcions π_1 i π_2, podem trobar l'equilibri de Bertrand.

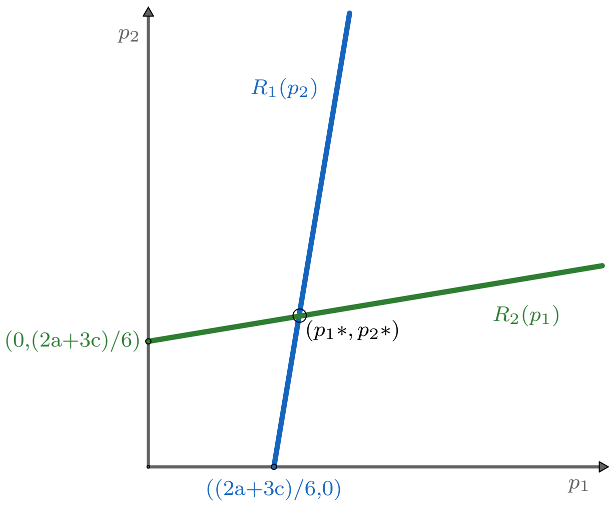
$$\frac{\delta \pi_i}{\delta p_i}(p_1, p_2) = \begin{cases} \left(a - \dfrac{3p_i}{2} + \dfrac{p_j}{2}\right) - \dfrac{3}{2}(p_i - c) & \text{si } p_i < \dfrac{a - p_M}{2} \\ 0 & \text{si } p_i \geq \dfrac{a - p_M}{2} \end{cases}$$

Simplificant les expressions i imposant les condicions de maximització de beneficis per a les dues empreses, tenim les següents expressions:

- Per a l'empresa 1: $a - 3p_1 + \frac{p_2}{2} + \frac{3c}{2} = 0$. D'això resulta una funció de millor resposta: $R_1(p_2) = \frac{a}{3} + \frac{p_2}{6} + \frac{c}{2}$.

- Per a l'empresa 2: $a - 3p_2 + \frac{p_1}{2} + \frac{3c}{2} = 0$, amb funció de millor resposta $R_2(p_1) = \frac{a}{3} + \frac{p_1}{6} + \frac{c}{2}$.

La representació gràfica d'aquestes funcions de millor resposta és:



Amb aquestes podem trobar l'equilibri, imposant que ambdues equacions es compleixin podem plantejar el següent sistema:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a}{3} + \frac{p_2}{6} + \frac{c}{2} \\ p_2 = \frac{a}{3} + \frac{p_1}{6} + \frac{c}{2} \end{cases}$$

Obtenim un equilibri en preus de $p_1^* = p_2^* = \frac{14a + 21c}{35}$, que està per sobre del valor de c a diferència del cas de productes homogenis. Per a aquests preus, les quantitats són: $q_1^* = q_2^* = \frac{21(a-c)}{35}$, amb un benefici final de

$$\pi_i(p_1^*, p_2^*) = \frac{6(a-c)^2}{25}.$$

5 Diferenciació de producte via competència espacial

Una altra manera de diferenciar dos productes és per la localització espacial del seu punt de venda. Un cas senzill de competència espacial és el de dos venedors de gelats $N = \{1, 2\}$ que col·loquen el seu lloc de venda independenment al llarg d'una platja de longitud l. Suposem que els compradors es distribueixen uniformement en l'interval $[0, l]$. Per tant, les estratègies del jugador i són $x_i \in S_i = [0, l]$, que representen la distància respecte els extrems oposats, amb $x_1 + x_2 \leq l$. El repartiment del mercat corresponent és: $q_i(x_i, x_j) = x_i + \frac{1}{2}(l - x_2 - x_1)$.

Per exemple, si $x_1 = 0.3$ i $x_2 = 0.2$, $q_1 = 0.55$ i $q_2 = 0.45$. Però és fàcil veure que l'equilibri de Nash es troba a $x_1^* = x_2^* = 0.5$, és a dir, que totes dos se situïn al punt mig de la platja. En efecte, en aquest cas, si $x_i = 0.5$, el venedor j no té incentius a moure's perquè, així, perdria el 50% de la distància entre ell i el venedor j.

Aquest model es coneix sovint com a model de Hotelling, tot i que el treball de Hotelling és més complex, com veurem a continuació.

Com hem vist a l'apartat anterior, diferenciar el producte respecte la resta del mercat pot afectar positivament al preu i, per tant, al benefici. Tot i així, en el cas del model de Bertrand, veiem com aquesta diferenciació es representa en la quantitat a través de la desviació del preu respecte el preu mitjà del mercat. En el model de Hotelling, en canvi, es proposa una nova forma de representar la diferenciació del producte: via la competència espacial. Hotelling diferencia el producte col·locant les empreses al llarg d'un segment i quantificant l'esforç del consumidor de recórrer la distància fins a l'empresa venedora, a través d'un cost extraordinari que s'afegeix al preu per al consumidor, representant el cost físic o psicològic de comprar un producte en comptes d'un altre.

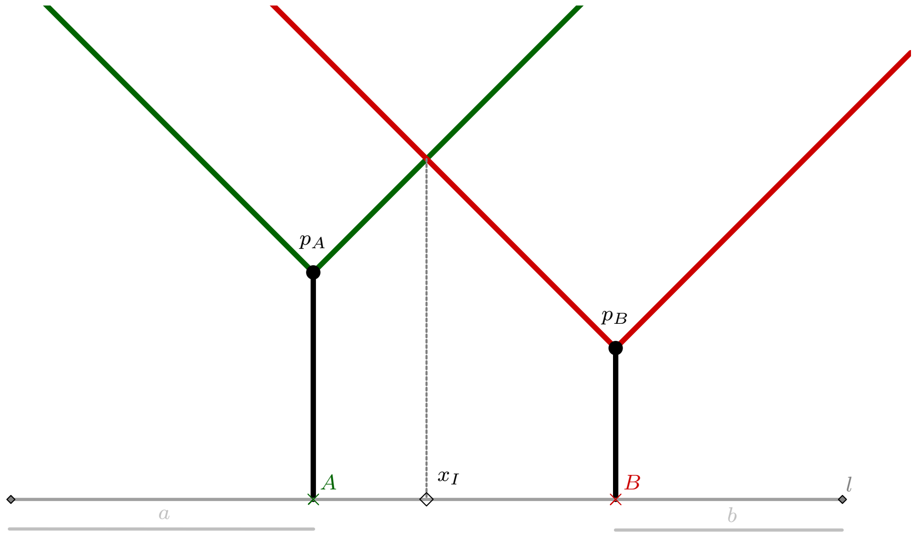
A continuació, presentem aquest model original de Hotelling [6] que combina per cada jugador la tria d'una localització amb l'elecció d'un preu de venda del seu producte, és a dir, construint un joc de dues etapes. De totes formes, mostrarem la versió que apareix a l'article de d'Aspremont, Jaskold Gabszewicz i Thisse [1].

5.1 Model de Hotelling

Definirem el model per a un cas general de dues empreses en un mercat qualsevol. Siguin A i B dues empreses d'un mercat qualsevol, amb productes homogenis i cost de producció nul, distribuïdes al llarg d'un segment de línea de longitud l a distància a i b, respectivament, dels extrems d'aquest segment, tals que $a + b \leq l$, $a \geq 0$ i $b \geq 0$. Les localitzacions, doncs, són una parella (a, b) dins del conjunt $P = \{(a, b) \in [0, l] \times [0, l] \mid a + b \leq l\}$. Els consumidors del mercat corresponent es distribueixen uniformement sobre el segment i cadascun d'ells consumeix una única unitat de producte, independentment del preu. Donats els preus de venda unitaris de cada empresa $p_A, p_B \in [0, \infty]$, cada consumidor escollirà aquella empresa que li suposi un cost total més baix: considerant el preu de venda i el cost de desplaçament fins arribar-hi. El 1929, Harold Hotelling va definir aquest darrer cost amb una funció lineal respecte la distància entre el consumidor i el punt de venda, amb una ràtio $c > 0$ de transport; de forma que, per a un consumidor $x \in [0, l]$, el cost de comprar a l'empresa A i B és:

- Per a productes de l'empresa A: $p_A + c|x - a|$.
- Per a productes de l'empresa B: $p_B + c|l - b - x|$.

Ho podem veure gràficament en la següent figura:



El consumidor x escollirà comprar a una empresa o altra segons quin dels dos costos totals és menor. Tot i així, com podem veure a la figura, existeix un individu indiferent x_I respecte les dues empreses, pel qual es compleix la relació $p_A + c|x_I - a| = p_B + c|l - b - x_I|$. Com que l'individu indiferent, per la linealitat de les funcions, només es pot trobar entre A i B, podem simplificar l'expressió prescindint dels valors absoluts.

$$p_A + c(x_I - a) = p_B + c(l - b - x_I) \tag{5.1}$$

Per a definir les funcions de demanda de A i B, distingim tres casos:

- Si $p_A + c(l - a - b) < p_B$, l'empresa A s'emporta tot el mercat.
- Si $p_B + c(l - a - b) < p_A$, l'empresa B s'emporta tot el mercat.
- Si $|p_B - p_A| \leq c(l - a - b)$, les dues empreses es reparteixen el mercat segons el valor de x_I de forma que la demanda d'A és x_I i la de B és $l - x_I$.

Resolent l'equació (5.1), tenim:

$$p_A - p_B = cl - cb - cx_I - cx_I + ca \Rightarrow p_A - p_B - cl + cb - ca = 2cx_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_I = \frac{p_A - p_B - cl + cb - ca}{2c}$$

Així obtenim $x_I = \dfrac{p_B - p_A}{2c} - \dfrac{1}{2}(b - a - l)$.

Per tant, la funció de benefici per a l'empresa A, $\pi_A(p_A, p_B)$, és:

$$\begin{cases} p_A x_I = ap_A + \frac{1}{2}(l-a-b)p_A + \frac{1}{2c}p_A p_B - \frac{1}{2c}{p_A}^2 & \text{si } |p_B - p_A| \leq c(l-a-b) \\ lp_A & \text{si } p_A + c(l-a-b) < p_B \\ 0 & \text{si } p_A - c(l-a-b) > p_B \end{cases} \tag{5.2}$$

En el cas de l'empresa B, el seu benefici $\pi_B(p_A, p_B)$ és:

$$\begin{cases} p_B(l - x_I) = bp_B + \frac{1}{2}(l-a-b)p_B + \frac{1}{2c}p_A p_B - \frac{1}{2c}{p_B}^2 & \text{si } |p_B - p_A| \leq c(l-a-b) \\ lp_B & \text{si } p_B + c(l-a-b) < p_A \\ 0 & \text{si } p_B - c(l-a-b) > p_A \end{cases} \tag{5.3}$$

Aquesta situació es pot descriure com un joc de dues etapes entre les empreses A i B. En la primera etapa, trien simultàniament les localitzacions $a \in [0, l]$ i $b \in [0, l]$, respectivament, i, en la segona, els preus $p_A \in [0, \infty)$ i $p_B \in [0, \infty)$.

Resolent aquest joc com hem vist en apartats anteriors, usant una adaptació de la inducció cap a enrere, cerquem primer un equilibri del joc de la segona etapa per a cada possible elecció de a i b en la primera. És a dir, determinem un equilibri en la segona etapa en funció d'a i de b.

Proposició 5.1. *Per a $a + b = l$ es dóna un únic equilibri $p_A^* = p_B^* = 0$. Per a $a + b < l$, si existeix un equilibri (p_A^*, p_B^*), ha de ser dins de l'interval definit per $|p_B^* - p_A^*| < c(l - a - b)$.*

Demostració. El cas $a + b = l$ és trivial, doncs les dues empreses estan situades en el mateix punt de la línia, per tant, com hem vist anteriorment en el model de Bertrand, aquestes competeixen en preus fins que el preu és igual al cost marginal, en aquest cas nul, per a ambdues.

Per al cas $a + b < l$, suposem el contrari del que volem veure: (p_A^*, p_B^*) és un equilibri però $|p_B^* - p_A^*| > c(l - a - b)$. En aquest cas, l'empresa que té el major preu, té benefici nul, però si el redueix, com a mínim, fins a igualar-lo al de l'altra empresa, obté un guany; contradient això el fet que (p_A^*, p_B^*) és un equilibri.

Suposem ara que $|p_B^* - p_A^*| = c(l - a - b)$ i que $p_B^* - p_A^* = c(l - a - b)$ (sent el cas $p_B^* - p_A^* = c(l - a - b)$ anàleg). Per tant, tenim $p_A^* = p_B^* - c(l - a - b)$.

- Si $p_A^* = 0$, el seu benefici és nul però podria obtenir benefici positiu apujant el preu per sota de $p_B^* + c(l - a - b)$.
- Si $p_A^* > 0$, tenim dos casos:
  - O bé A s'emporta tot el mercat i per tant B obté benefici nul i té l'incentiu d'abaixar una mica el preu i obtenir benefici positiu, el que contradiu la definició d'equilibri.
  - O bé A s'emporta una fracció del mercat (per exemple, $q_A < l$) i amb una petita baixada de preu és capaç de capturar tot el mercat i augmentar el benefici. De fet, per a $0 < \epsilon < (l - q_A)\dfrac{p_A}{l}$ obté
  $$\pi_A(p_A^* - \epsilon, p_B^*) = l(p_A^* - \epsilon) > q_A p_A^* = \pi_A(p_A^*, p_B^*).$$

En qualsevol dels casos que hem vist, obtenim una contradicció, per tant, podem afirmar que si existeix un equilibri (p_A^*, p_B^*), ha de ser dins de l'interval definit per $|p_B^* - p_A^*| < c(l - a - b)$. □

Teorema 5.2. *Sota aquestes condicions, $|p_B^* - p_A^*| < c(l - a - b)$, només poden existir uns preus d'equilibri en la segona etapa si a i b satisfan les següent desigualtats:*

- $\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right)^2 \geq \dfrac{4}{3} l(a + 2b)$
- $\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right)^2 \geq \dfrac{4}{3} l(b + 2a)$

Si aquestes se satisfan, l'equilibri que resulta és

$$(p_A^*, p_B^*) = \left(c\left(l + \frac{a-b}{3}\right), c\left(l + \frac{b-a}{3}\right)\right).$$

Demostració. Suposem que, sense condicions, podem calcular els preus d'equilibri. Ho fem a partir de les derivades dels beneficis, obtenim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial p_A}(p_A, p_B) = a + \dfrac{1}{2}(l - a - b) + \dfrac{1}{2c} p_B - \dfrac{p_A}{c} \\ \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial p_B}(p_A, p_B) = b + \dfrac{1}{2}(l - a - b) + \dfrac{1}{2c} p_A - \dfrac{p_B}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_A^* = c\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right) \\ \\ p_B^* = c\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right) \end{cases}$$

Observem que aquests resultats són màxims perquè el signe de les seves derivades segones és negatiu: $\dfrac{\partial^2 \pi_A^2}{\partial p_A^2}(p_A, p_B) = \dfrac{\partial^2 \pi_B^2}{\partial p_B^2}(p_A, p_B) = \dfrac{-1}{c}$.

Per a qualsevol equilibri (p_A^*, p_B^*), p_A^* ha de maximitzar $\pi_A(p_A, p_B^*)$, no només en l'interval $]p_B^* - c(l-a-b), p_B^* + c(l-a-b)[$, sinó al llarg de tot el domini S. Podem afirmar que això és tan sols possible en el cas que, per a qualsevol $\epsilon > 0$:

$$\pi_A(p_A^*, p_B^*) = \frac{c}{2}\left[l + \frac{a-b}{3}\right]^2 \geq l[p_B^* - c(l-a-b) - \epsilon] \tag{5.4}$$

És a dir, el benefici en l'equilibri dins de l'interval

$$]p_B^* - c(l-a-b), p_B^* + c(l-a-b)[$$

ha de superar el possible benefici obtingut si abaixem una mica el preu i ens emportem tot el mercat.

Desenvolupant aquesta expressió, juntament amb el desenvolupament de l'expressió simètrica de (5.4) per a l'empresa B, s'obtenen les condicions indicades d'a i b.

$$\begin{cases} \left(l + \dfrac{a-b}{3}\right)^2 \geq \dfrac{4}{3}l(a+2b) \\ \\ \left(l + \dfrac{b-a}{3}\right)^2 \geq \dfrac{4}{3}l(b+2a) \end{cases} \tag{5.5}$$

Com volíem veure. □

Si ara volem acabar de resoldre el joc de dues etapes, hem de fer inducció cap enrera: per a cada localització (a, b) hem de calcular el benefici tenint en compte que en la segona etapa es determinen els preus d'equilibri calculats. Aplicant aquests preus a les funcions de benefici (5.2) i (5.3), obtenim les següents expressions:

$$\begin{cases} \pi_A(p_A^*(a,b), p_B^*(a,b)) = B_A(a,b) = \dfrac{c}{2}\left[l + \dfrac{a-b}{3}\right] \\ \\ \pi_B(p_A^*(a,b), p_B^*(a,b)) = B_B(a,b) = \dfrac{c}{2}\left[l + \dfrac{b-a}{3}\right] \end{cases}$$

Ens disposem a resoldre la primera etapa del joc, maximitzant les expressions anteriors en funció d'a i b.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta B_A}{\delta a}(a,b) = c\left[l + \dfrac{a-b}{3}\right]\dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{\delta B_B}{\delta b}(a,b) = c\left[l + \dfrac{b-a}{3}\right]\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

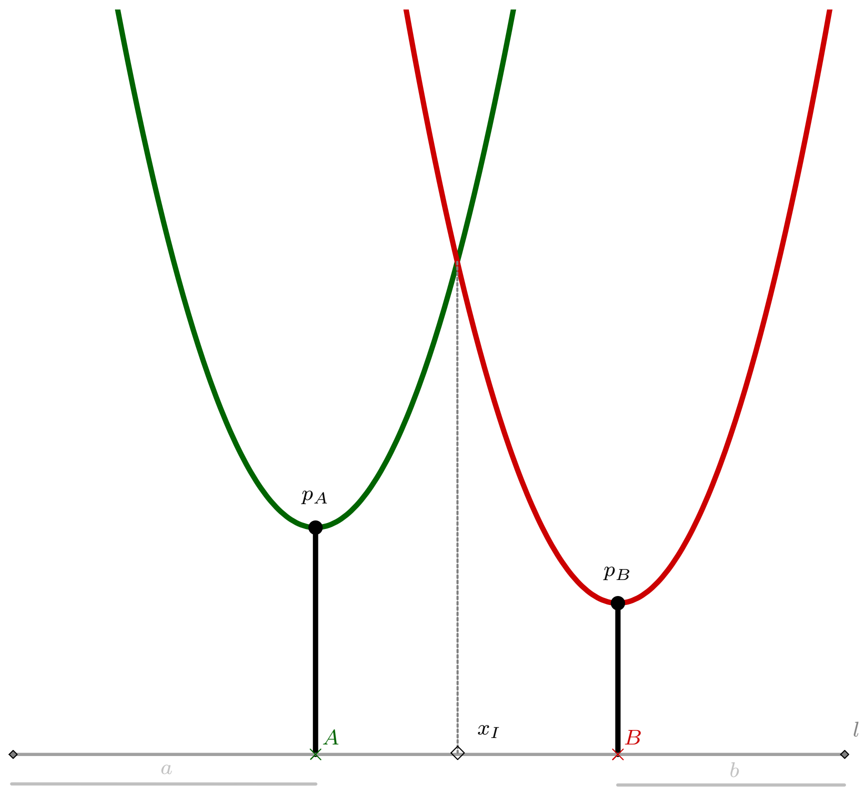
Les dues expressions són estrictament positives (perquè $a + b < l$ ens permet assumir que $\frac{a-b}{3} < l$ i que $\frac{b-a}{3} < l$) i, per tant, els beneficis augmenten a mida que augmenten a i b, respectivament. La tendència de les empreses, doncs, és d'allunyar-se dels extrems, és a dir, apropar-se al centre del segment $a = b = \frac{l}{2}$, tenint en compte que a no pot sobrepassar $l - b$. Aquest raonament el fem seguint els passos de Hotelling, que no va advertir que per als casos on les localitzacions són molt properes, però no coincidents, no se satisfan les condicions (5.5) que es determinen a l'hora de definir el model. Aleshores, no es pot parlar de consistència de $a = b = \frac{l}{2}$ com a equilibri perfecte en subjocs.

5.2 Model de costos quadràtics

A partir del model de Hotelling, volem trobar un exemple similar que no contingui la dificultat que aquest contempla, és a dir, la possible falta d'equilibri en la segona etapa. En la proposta de d'Aspremont, Jaskold Gabszewicz i Thisse [1], se substitueix la funció de cost linal que Hotelling proposava, per una funció quadràtica que s'aplica, de la mateixa forma que la lineal, a la distància entre el consumidor i l'empresa venedora. És a dir, donats els preus de venda unitaris de cada empresa $p_A, p_B \in [0, \infty]$ i les localitzacions d'ambdues empreses $(a, b) \in P$, on $P = \{(a, b) \in [0, l] \times [0, l] \mid a + b \leq l\}$, tenim que el cost per a un consumidor $x \in [0, l]$ de consumir un producte és:

- Per a productes de l'empresa A: $p_A + c(x - a)^2$.
- Per a productes de l'empresa B: $p_B + c(l - b - x)^2$.

Ho podem veure gràficament en la següent figura:



En aquest cas, per a trobar el consumidor indiferent, que coincideix amb l'abscissa del punt de tall entre les dues corbes, es calcula resolent[2] la següent igualtat:

$$p_A + c(x_I - a)^2 = p_B + c(l - b - x_I)^2 \tag{5.6}$$

[2] Notem que, en aquest cas, l'expressió que en resulta és senzilla perquè els termes quadràtics en x_I es cancel·len. Però, amb altres funcions de costos no quadràtics, és possible que l'equació que determina el consumidors indiferent presenti complicacions en la resolució analítica, que segurament es puguin abordar numèricament, com veurem més endavant.

i obtenim: $x_I = a + \dfrac{p_B - p_A}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2}$.

Així doncs, la funció de benefici per a l'empresa A, $\pi_A(p_A, p_B)$, és:

$$\begin{cases} p_A x_I = a p_A + \dfrac{p_B p_A - p_A^2}{2c(l-a-b)} + \dfrac{(l-a-b)p_A}{2} & \text{si } 0 \leq a + \dfrac{p_B - p_A}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} \leq l \\ l p_A & \text{si } a + \dfrac{p_B - p_A}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} > l \\ 0 & \text{si } a + \dfrac{p_B - p_A}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} < 0 \end{cases}$$

En el cas de l'empresa B, el seu benefici $\pi_B(p_A, p_B)$ és:

$$\begin{cases} p_B(l - x_I) = b p_B + \dfrac{p_A p_B - p_B^2}{2c(l-a-b)} + \dfrac{(l-a-b)p_B}{2} & \text{si } 0 \leq b + \dfrac{p_A - p_B}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} \leq l \\ l p_B & \text{si } b + \dfrac{p_A - p_B}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} > l \\ 0 & \text{si } b + \dfrac{p_A - p_B}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} < 0 \end{cases}$$

En aquest cas, no existeixen condicions a imposar, per la continuitat de la funció de benefici respecte el preu en tot el seu interval de definició. El que ens assegura que no existeixen salts bruscos en el benefici d'ambdues empreses siguin quins siguin els valors d'a i b i que, si existeix un equilibri en preus, existeix per a tota localització (a, b). Derivant les expressions de benefici, obtenim:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \pi_A}{\delta p_A}(p_A, p_B) = a + \dfrac{p_B - 2p_A}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} \\ \dfrac{\delta \pi_B}{\delta p_B}(p_A, p_B) = b + \dfrac{p_A - 2p_B}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_A^* = c(l-a-b)\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right) \\ p_B^* = c(l-a-b)\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right) \end{cases}$$

Un cop resolta aquesta segona etapa del joc, la de determinació de preus, per a resoldre la primera, a partir del mateix raonament que utilitzava Hotelling en el seu model, ens hem de fixar en la monotonia de les derivades del benefici en funció d'a i b.

Per a fer-ho, substituïm els preus d'equilibri trobats (en funció d'a i de b) a les funcions de benefici, obtenint:

$$\begin{cases} \pi_A(p_A^*(a,b), p_A^*(a,b)) = B_A(a,b) = \dfrac{1}{2}c(l-a-b)\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right)^2 \\ \pi_B(p_A^*(a,b), p_A^*(a,b)) = B_B(a,b) = \dfrac{1}{2}c(l-a-b)\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right)^2 \end{cases}$$

Per a trobar els valors d'a i b d'equilibri, cal derivar B_A i B_B respecte a i b respectivament.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_A}{\partial a} = c\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right)\left[-\dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(l-a-b)\right] \\ \\ \dfrac{\partial B_B}{\partial b} = c\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right)\left[-\dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(l-a-b)\right] \end{cases}$$

Veiem que aquestes derivades són negatives. En efecte, $c\left(l+\dfrac{a-b}{3}\right)$, pels arguments utilitzats en el model de Hotelling (perquè del fet que $a+b<l$ deduïm que $\dfrac{a-b}{3} < l$ i que $\dfrac{b-a}{3} < l$), és estrictament positiu i les expressions següents són negatives:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{a-b}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(l-a-b) = -\dfrac{l}{2} - \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{6} + \dfrac{l}{3} - \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{3} = -\dfrac{l}{6} - \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{6} < 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{b-a}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(l-a-b) = -\dfrac{l}{2} - \dfrac{b}{6} + \dfrac{a}{6} + \dfrac{l}{3} - \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{3} = -\dfrac{l}{6} - \dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{6} < 0 \end{cases}$$

El fet que aquestes derivades siguin negatives representa que, a mida que augmenten els valors d'a i b, el benefici d'aquestes es veu afectat negativament. Amb això, podem afirmar que la tendència de les empreses és de reduir els valors d'a i b, de forma que s'allunyen al màxim entre elles, col·locant-se, finalment, en els extrems del segment.

Així doncs, l'únic equilibri de Nash perfecte en subjocs per a aquest joc de dues etapes és: localitzacions $(a^*, b^*) = (0,0)$ i preus $(p_A^*, p_B^*) = (cl^2, cl^2)$ amb pagaments $(\pi_A, \pi_B) = \left(\dfrac{1}{2}cl^3, \dfrac{1}{2}cl^3\right)$.

El resultat del treball de d'Aspremont, Jaskold Gabszewicz i Thisse és el següent:

Teorema 5.3. *Sota aquestes consideracions, per a qualsevol parell de localitzacions (a,b) dins del conjunt $P = \{(a,b) \in [0,l] \times [0,l] \mid a+b \leq l\}$, existeix un equilibri de segona etapa: una parella de preus $(p_A^*(a,b), p_A^*(a,b))$. Per tant, pot existir un equilibri perfecte en subjocs en el joc definit de dues etapes. En particular, existeix i és únic:*

$$(a,b) = (0,0) \text{ amb preus } (p_A^*(0,0), p_A^*(0,0)) = (cl^2, cl^2).$$

Com hem vist demostrat en aquesta secció.

Part IV

Aproximació numèrica a l'equilibri

Històricament, la definició dels models que hem presentat anteriorment s'ha vist limitada per una qüestió analítica; aquesta no permet fer-ne versions més complexes que contemplin casos com, per exemple, el d'una distribució no uniforme dels consumidors al llarg del segment. Sense anar més lluny, funcions de costos lleugerament més complicades que les que hem presentat, poden fer el procés de resolució analítica del joc, tal i com l'hem mostrat, resulti impossible o complicada. Potser és per això, que al llarg dels anys, no han aparegut noves propostes per a modelitzar aquest joc en dues etapes.

Aquesta complicació a la qual em refereixo sorgeix en el moment en què, a partir de l'equació del consumidor indiferent (veure el cas del model de costos quadràtics (5.6)), volem trobar les funcions de benefici per a, així, poder-les optimitzar tot trobant les funcions de millor resposta. En el cas quadràtic, els elements de segon ordre de l'expressió desapareixen, deixant una equació lineal.

Recordem de l'apartat anterior quines són les funcions de millor resposta en el model de costos quadràtics aïllant, de les següents expressions, p_A en funció de p_B i p_B en funció de p_A, respectivament.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \pi_A}{\delta p_A}(p_A, p_B) = a + \dfrac{p_B - 2p_A}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\delta \pi_B}{\delta p_B}(p_A, p_B) = b + \dfrac{p_A - 2p_B}{2c(l-a-b)} + \dfrac{l-a-b}{2} = 0 \end{cases}$$

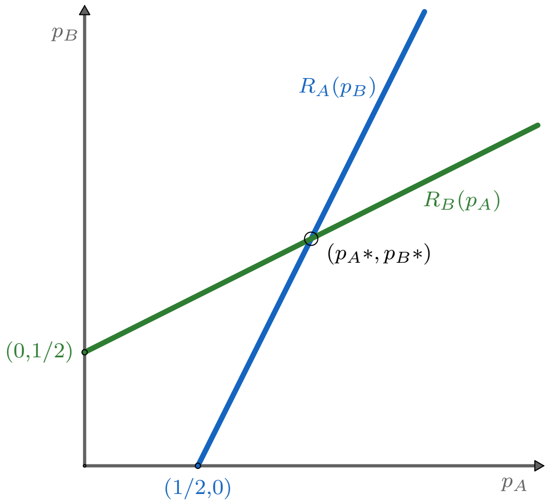
Obtenint:

$$\begin{cases} R_B(p_A) = \dfrac{1}{2}p_B + \left(a + \dfrac{l-a-b}{2}\right)c(l-a-b) \\[2ex] R_A(p_B) = \dfrac{1}{2}p_A + \left(b + \dfrac{l-a-b}{2}\right)c(l-a-b) \end{cases}$$

En particular, veiem quina és la situació per al cas $a = b = 0$, $c = 1$ i $l = 1$ del model de costos quadràtics. Les funcions de millor resposta són de la següent forma:

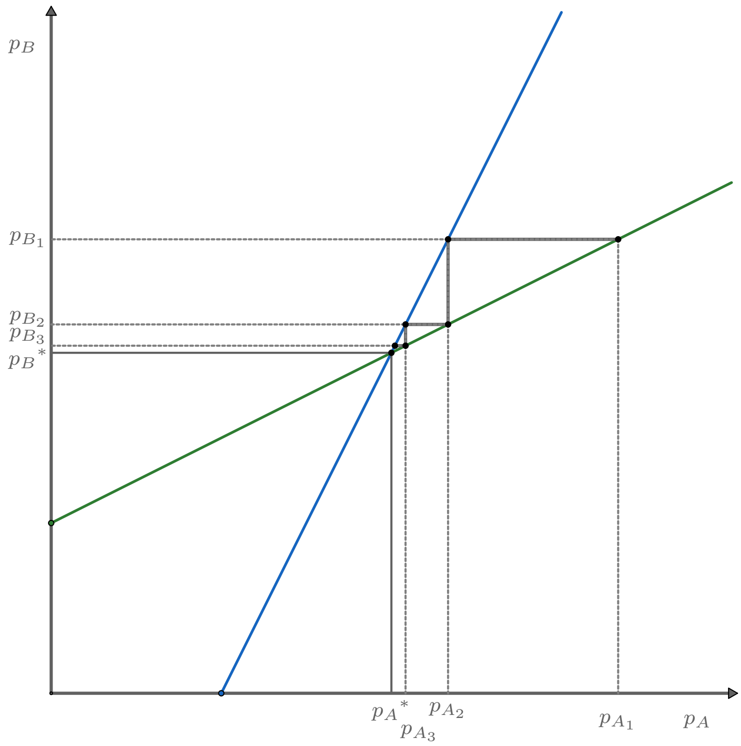
$$\begin{cases} R_B(p_A) = \dfrac{1}{2}p_A + \dfrac{1}{2} \\[2ex] R_A(p_B) = \dfrac{1}{2}p_B + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si les representem sobre els mateixos eixos:



Amb aquestes funcions, trobar l'equilibri de Nash és trivial, tan sols es tracta d'identificar el punt de tall entre les dues funcions de millor resposta.

En aquest cas, també es podria trobar l'equilibri usant el càlcul recursiu de millors respostes entre ambdues empreses. Prenent un valor inicial del preu de l'empresa A, p_{A_1}, arbitrari, calculem $p_{B_2} = R_B(p_{A_1})$. Per a aquest nou p_{B_2}, calculem $p_{A_2} = R_A(p_{B_1} = R_A(R_B(p_{A_1}))$. Realitzem aquests càlculs reiteradament fins a arribar a l'estabilització del procés en un punt: el punt d'equilibri. En la següent figura, s'il·lustra el procés iteratiu:



En altres casos, però, la falta d'aquesta expressió explícita pot resultar en que la cerca de l'equilibri no sigui tan trivial. És per això que la motivació final d'aquest treball és construir un programa que permeti trobar una aproximació numèrica de l'equilibri, per a jocs de dues etapes, definits sota les mateixes consideracions que el model corregit de Hotelling (costos quadràtics).

En aquests casos, podem treballar amb la condició que imposa la funció de millor resposta. Per això, les recuperem:

$$R_A(\overline{p_B}) = \max_{p_A} \pi_A(p_A, \overline{p_B}) \text{ i } R_B(\overline{p_A}) = \max_{p_B} \pi_B(\overline{p_A}, p_B)$$

D'imposar aquestes dues equacions alhora obtenim la condició fonamental de l'equilibri:

$$R_A({p_B}^*) = {p_A}^* \text{ i } R_B({p_A}^*) = {p_B}^* \tag{5.7}$$

A partir d'aquesta idea, podem trobar una aproximació de les millors respostes de les empreses, a través de la discretització dels preus, dels consumidors i de les possibles localitzacions de les empreses en l'espai. En aquest sentit, considerem un preu mínim i un màxim i que els consumidors es distribueixen uniformement al llarg d'un segment de llargada 1. L'agudesa de la discretització l'escollirem convenientment.

Així doncs, fixem dues localitzacions a i b de les empreses. Aleshores, prenent un p_A inicial (anàlogament per a p_B), considerem tots els possibles p_B entre el mínim i el màxim, segons la discretització escollida, i escollim aquell que dóna a l'empresa B un millor resultat. Aquest resultat depèn del preu escollit i de la conseqüent demanada que genera aquest preu. Per a calcular-la, estudiem, de la discretització de consumidors entre 0 i 1, quins són aquells que escolliran comprar a l'empresa A i aquells que ho faran a l'empresa B.

En altres paraules, cada consumidor $x \in [0, l]$ s'enfrontarà la següent desigualtat:

$$p_A + c(x - a)^2 > p_B + c(l - x - b)^2$$

on c és la ràtio de transport per a arribar a l'empresa. Si la desigualtat se satisfà, el consumidor, per a aquesta parella de preus, preferirà comprar a l'empresa B que a l'empresa A. Realitzant aquesta comprovació per a cada consumidor de la discretització escollida, obtindrem la demanda total de l'empresa B.

Amb aquesta informació, podem deduir la demanda de cada empresa i calcular els beneficis que corresponen al preu d'A fixat amb cadascun dels preus de B estudiats. D'entre aquests preus, escollim aquell que maximitzi el benefici de B. En definitiva, estem resolent el següent problema:

$$R_B(p_A) = \max_{p_B} \pi_B(p_A, p_B)$$

Un cop obtingut, el fixem com a p_B i considerem tots els possibles p_A, escollint, de nou, aquell que doni un millor resultat, en aquest cas, per a l'empresa A, i repetim el procés.

D'aquesta forma, hem obtingut una successió de parelles de preus $({p_A}^k, {p_B}^k)$. El nostre objectiu original és a arribar al punt en què la nostra parella de preus coincideix amb l'equilibri $({p_A}^*, {p_B}^*)$, de totes formes, no serà possible fer-ho de forma exacta, pel fet que, si resolem el problema des del punt de vista numèric basat en un nombre finit d'opcions, només podrem donar-li una solució aproximada. És a dir, ens plantegem obtenir una parella de preus tal que, per a un cert valor de k, $|{p_A}^k - {p_A}^*| < \varepsilon$ i $|{p_B}^k - {p_B}^*| < \varepsilon$, que és equivalent a dir que volem trobar un punt prou proper al punt d'equilibri, considerant $\varepsilon > 0$, prou petit, com la tolerància que assumim a l'hora d'acotar l'error de l'aproximació.

En particular, podem suposar que hem arribat a una aproximació prou bona, segons la nostra ε, quan $|{p_A}^k - {p_A}^{k+1}| < \varepsilon$ i $|{p_B}^k - {p_B}^{k+1}| < \varepsilon$. Aquests preus, satisfan aproximadament la condició d'equilibri, és a dir, si A determina ${p_A}^k$, B determina ${p_B}^k$, aleshores A determina ${p_A}^{k+1}$ que és proper a ${p_A}^k$ en termes de ε i, finalment, B determina ${p_B}^{k+1}$, que és proper a ${p_B}^k$ en termes de ε. Concloent que $R_B({P_A}^k) = {P_B}^{k+1} \approx {P_B}^k$ i $R_A({P_B}^k) = {P_A}^{k+1} \approx {P_A}^k$, que és la condició que necessitàvem (5.7) per a determinar l'equilibri aproximat.

Per a realitzar el programa, s'han de determinar les consideracions que hem esmentat anteriorment. En primer lloc, les discretitzacions de preus i consumidors han d'estar determinades de forma congruent. Si establim una distància entre preus menor que la distància entre consumidors, a l'hora de calcular la diferència de la demanda per a un preu o un altre, pot ser que aquesta no representi prou acuradament la variació, perquè el nombre de consumidors no seria prou representatiu respecte la tria de preus. En aquest cas, les dues distàncies les hem fixat en $5 \cdot 10^{-4}$. Respecte el preu, determinem un preu màxim i un preu minim de 2 i 0, respectivament (aquest preu màxim està relacionat amb el fet que la longitud del segment és 1). En general, el p_A inicial que prenem és indiferent, perquè, si existeix l'equilibri, aquesta recurrència hauria d'estabilitar-s'hi ràpidament. De totes formes, prenem un preu inicial proper al 0, 10^{-3} per a facilitar el procés en alguns casos que veurem més endavant. I, per últim, prenem una tolerància de $\varepsilon = 10^{-2}$.

Veiem que el programa dóna els resultats esperats, a continuació, donarem una sèrie de valors que ho proven. Prenem quatre valors de b aleatòriament: 0, 0.3, 0.5 i 0.8; i estudiem els equilibris que en resulten per a a's entre 0 i $1 - b$, en intervals de 0.1. Els presentem en quatre taules que mantenen la mateixa estructura: en la primera columna s'indiquen els valors d'a i de b, en la segona columna exposem els valors que el progama dóna com a preus aproximats d'equilibri amb la tolerància fixada i, en la tercera, s'exposen els valors reals calculats mitjançant l'expressió explícita d'equilibri que dóna el model de costos quadràtics. Per últim, a la quarta columna, mostrem quin és l'error, és a dir la diferència entre l'equilibri real i l'aproximat.

$b=0$	$({p_A}^k, {p_B}^k)$	$({p_A}^*, {p_B}^*)$	error
$a=0$	$(1.00100, 1.00125)$ (*)	$(1.00000, 1.00000)$	$(10^{-3}, 10^{-3})$
$a=0.1$	$(0.92750, 0.86900)$	$(0.93000, 0.87000)$	$(2.5 \cdot 10^{-3}, 10^{-3})$
$a=0.2$	$(0.85450, 0.74750)$	$(0.85333, 0.74667)$	$(1.16667 \cdot 10^{-3}, 8.83333 \cdot 10^{-4})$
$a=0.3$	$(0.77050, 0.62875)$	$(0.77000, 0.63000)$	$(5 \cdot 10^{-4}, 1.25 \cdot 10^{-3})$
$a=0.4$	$(0.67900, 0.52000)$	$(0.68000, 0.52000)$	$(10^{-3}, 0)$
$a=0.5$	$(0.58400, 0.41700)$	$(0.58333, 0.41667)$	$(6.66667 \cdot 10^{-4}, 3.33333 \cdot 10^{-4})$
$a=0.6$	$(0.48125, 0.32250)$	$(0.48000, 0.32000)$	$(1.25 \cdot 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-3})$
$a=0.7$	$(0.37000, 0.22975)$	$(0.37000, 0.23000)$	$(5.55112 \cdot 10^{-17}, 2.5 \cdot 10^{-4})$
$a=0.8$	$(0.25325, 0.14600)$	$(0.25333, 0.14667)$	$(8.33333 \cdot 10^{-5}, 6.66667 \cdot 10^{-4})$
$a=0.9$	$(0.13000, 0.07000)$	$(0.13000, 0.07000)$	$(2.7756 \cdot 10^{-17}, 2.7756 \cdot 10^{-17})$
$a=1$ (**)	$(0.00075, 0.00025)$	$(0.00000, 0.00000)$	$(7.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-4})$

(*) Marquem aquesta parella de preus en verd perquè corresponen als preus d'equilibri aproximats per a les localitzacions de l'equilibri de Nash perfecte en subjocs que estem estudiant. Més endevant mencionarem aquest fet.

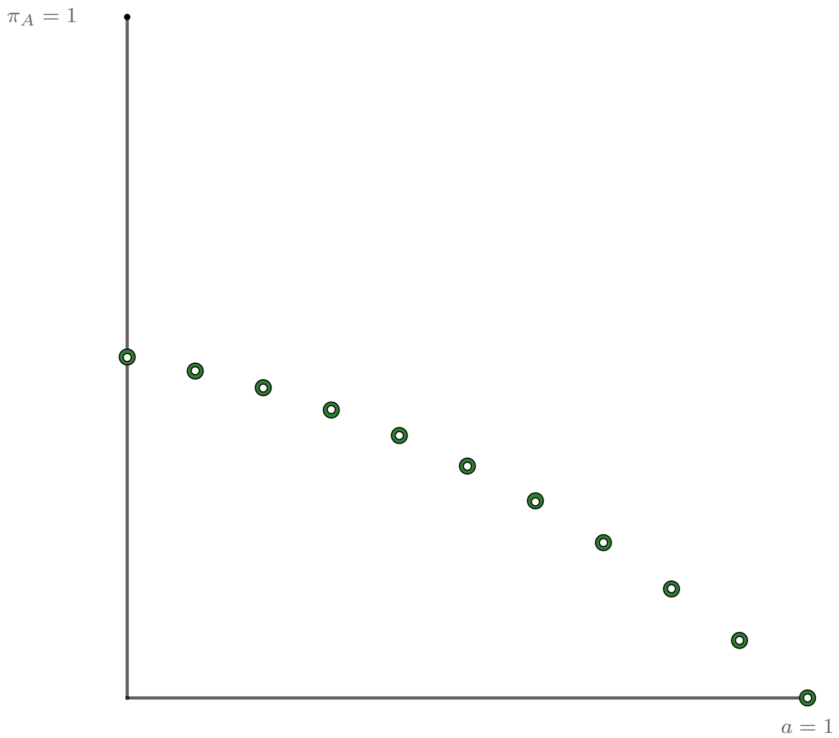
(**) En aquest darrer cas, notem que les dues empreses es localitzen en el mateix punt del segment. Així doncs, el cost per a qualsevol consumidor per a accedir a les dues empreses és el mateix. Per tant, en aquest punt, les empreses competeixen a la Bertrand (veure secció 4.1), el que, per definició, ens porta a un equilibri on els preus coincideixen amb el cost de producció, en aquest cas nul, per tant (0,0). Tenint en compte que les empreses competeixen baixant els preus a poc a poc per a quedar-se la totalitat del mercat, sense renunciar a una part significativa del preu, aquesta convergència és molt lenta. Per aquesta raó, anteriorment hem assignat un preu inicial proper a 0, per a afavorir la convergència en cas que la localització sigui la mateixa. És cert que podríem determinar directament $({p_A}^*, {p_B}^*) = (0, 0)$, però deixar que ho faci el programa és una forma de comprovar que funciona en tots els casos. Aquest cas el trobarem també a la darrera fila de les taules que trobem a continuació.

$b=0.3$	$({p_A}^k, {p_B}^k)$	$({p_A}^*, {p_B}^*)$	error
$a=0$	$(0.62725, 0.76900)$	$(0.63000, 0.77000)$	$(2.75 \cdot 10^{-3}, 10^{-3})$
$a=0.1$	$(0.56300, 0.64175)$	$(0.56000, 0.64000)$	$(3 \cdot 10^{-3}, 1.75 \cdot 10^{-3})$
$a=0.2$	$(0.48375, 0.51700)$	$(0.48333, 0.51667)$	$(4.16667 \cdot 10^{-4}, 3.33333 \cdot 10^{-4})$
$a=0.3$	$(0.39925, 0.39975)$	$(0.40000, 0.40000)$	$(7.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-4})$
$a=0.4$	$(0.30975, 0.29025)$	$(0.31000, 0.29000)$	$(2.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-4})$
$a=0.5$	$(0.21400, 0.18775)$	$(0.21333, 0.18667)$	$(6.66667 \cdot 10^{-4}, 1.08333 \cdot 10^{-3})$
$a=0.6$	$(0.11000, 0.09000)$	$(0.11000, 0.09000)$	$(4.1634 \cdot 10^{-17}, 4.1634 \cdot 10^{-17})$
$a=0.7$ (**)	$(0.00075, 0.00025)$	$(0.00000, 0.00000)$	$(7.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-4})$

$b = 0.5$	$({p_A}^k, {p_B}^k)$	$({p_A}^*, {p_B}^*)$	error
$a = 0$	$(0.41675, 0.58250)$	$(0.41667, 0.58333)$	$(8.33333 \cdot 10^{-5}, 8.33333 \cdot 10^{-4})$
$a = 0.1$	$(0.34675, 0.45325)$	$(0.34667, 0.45333)$	$(8.33333 \cdot 10^{-5}, 8.33333 \cdot 10^{-5})$
$a = 0.2$	$(0.27050, 0.33050)$	$(0.27000, 0.33000)$	$(5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$
$a = 0.3$	$(0.18625, 0.21250)$	$(0.18667, 0.21333)$	$(4.16667 \cdot 10^{-4}, 8.33333 \cdot 10^{-4})$
$a = 0.4$	$(0.09650, 0.10300)$	$(0.09667, 0.10333)$	$(1.66667 \cdot 10^{-4}, 3.33333 \cdot 10^{-4})$
$a = 0.5$ (**)	$(0.00075, 0.00025)$	$(0.00000, 0.00000)$	$(7.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-4})$

$b = 0.8$	$({p_A}^k, {p_B}^k)$	$({p_A}^*, {p_B}^*)$	error
$a = 0$	$(0.14650, 0.25300)$	$(0.14667, 0.25333)$	$(1.66667 \cdot 10^{-4}, 3.33333 \cdot 10^{-4})$
$a = 0.1$	$(0.07650, 0.12300)$	$(0.07667, 0.12333)$	$(1.66667 \cdot 10^{-4}, 3.33333 \cdot 10^{-4})$
$a = 0.2$ (**)	$(0.0005, 0.0005)$	$(0.00000, 0.00000)$	$(5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$

A més a més, si comparem els beneficis finalment calculats mitjançant el programa, per exemple, per a l'empresa A, veiem que són molt semblants als que resulten del model. A la següent gràfica, podem identificar en verd els valors aproximats i, en blanc, els beneficis reals, comprovant que, realment, no hi ha diferències significatives.



Un cop som capaços de trobar l'equilibri per a cada parell de localitzacions, podem usar aquest programa per a trobar les localitzacions d'equilibri del joc de dues etapes. El funcionament d'aquest segon programa és molt similar al de l'anterior.

Basant-nos, de nou, en les condicions que determinen les funcions de millor resposta, en aquest cas, de localització, obtenim la condició d'equilibri.

$$r_A(\bar{b}) = \max_a \pi_A\big(p_A{}^*(a,\bar{b}), p_B{}^*(a,\bar{b})\big) \text{ i } r_B(\bar{a}) = \max_b \pi_B\big(p_A{}^*(\bar{a},b), p_B{}^*(\bar{a},b)\big)$$

I la condició d'equilibri que en resulta:

$$r_A(b^*) = a^* \text{ i } r_B(a^*) = b^* \tag{5.8}$$

De la mateixa manera, discretitzant els possibles valors d'a i de b al llarg del segment, prenem un valor inicial per a a (anàlogament per a b) i, passant per tots els valors escollits de b, tals que se satisfaci $a+b \leq l$, usant l'argument del programa anterior, escollim aquella localització que dóna el parell de preus d'equilibri més favorable per a l'empresa B, és a dir, el que té un major benefici. En particular, estem trobant la solució a:

$$r_B(a) = \max_b \pi_B\big(p_A{}^*(a,b), p_B{}^*(a,b)\big)$$

per al valor d'a determinat. Un cop trobada, fem el mateix per a trobar la següent localització a i així successivament.

D'aquesta forma, obtenim una successió de parelles de localitzacions (a^k, b^k) tal que, com en el cas dels preus, es va aproximant a les localitzacions d'equilibri (a^*, b^*). En aquest cas, definim un ε' tal que, per a una certa k, $|a^k - a^*| < \varepsilon'$ i $|b^k - b^*| < \lambda'$, de forma que podem suposar que $|a^k - a^{k+1}| < \varepsilon'$ i $|b^k - b^{k+1}| < \varepsilon'$ és una condició suficient de k per a afirmar que (a^k, b^k) és la nostra aproximació de l'equilibri. En efecte, si A es localitza en a^k, B respon localitzant-se b^k, aleshores A es localitza en a^{k+1} que és proper a a^k en termes de ε' i, finalment, B respon es localitza en b^{k+1}, que és proper a b^k en termes de ε'. Concloent que $r_B(a^k) = b^{k+1} \approx b^k$ i $r_A(b^k) = a^{k+1} \approx a^k$, que és la condició que necessitàvem (5.8) per a determinar l'equilibri aproximat.

Per a aquest programa, hem pres una discretització menys fina que en el cas anterior, per a agilitzar la convergència a l'equilibri. De totes formes, l'expectativa és d'afinar la discretització per tal d'aconseguir un resultat més fiable. En aquest cas, hem fixat una diferència entre localitzacions de $5 \cdot 10^{-3}$. Pel que respecta la tolerància, l'hem determinat d'acord amb el paràmetre anterior: $\varepsilon' = 10^{-2}$. Començant amb una $a = 0.4$ la convergència cap al punt $(a,b) = (0,0)$ és molt ràpida; tan sols amb dos càlculs d'a i de b, ja hem estabilitzat. En particular, el càlcul dels preus d'equilibri per a l'equilibri perfecte en subjocs està indicat a la primera taula de resultats en color verd (**). Podem comprovar que l'aproximació s'ajusta, en els termes definits al programa, a l'equilibri real del model $(p_A^*(0,0), p_B^*(0,0)) = (cl^2, cl^2) = (1,1)$.

Aquest programa, però, no el podem utilitzar directament per a qualsevol cas de costos. En el cas de costos quadràtics, hem demostrat analíticament que l'equilibri perfecte en subjocs existeix, en altres casos, hauríem de comprovar-ho. Per a ferho, passem per cadascuna de les combinacions de localitzacions a i b comprovant si la funcio d'equilibri que hem definit al principi ens dóna un equilibri per a cada cas, perquè per a poder assegurar l'existència d'un equilibri perfecte en subjocs consistent, hem de garantir l'existència de tots els equilibris de segona etapa. Si és així, podem continuar i trobar-lo, utilitzant la iteració que hem definit.

Aquest programa és només una comprovació de les portes que podem obrir en aquest àmbit utilitzant el càlcul numèric. Mentre que, en els models formals, no podem experimentar perquè tenim limitacions analítiques, en la resolució numèrica podem plantejar variacions amb les quals afegir nous punts de vista al problema. Amb el model clàssic, ens limitem a definir el joc de dues etapes entre dues empreses amb funció de costos quadràtica. Si creuem la barrera del càlcul numèric i fem un algorisme prou aproximat, és possible realitzar canvis en les funcions de costos sense considerar la seva complexitat algebraica, afegir asimetries en les mateixes funcions, de forma que un mateix consumidor consideri més costós arribar fins a una empresa que fins una altra que estigui a la mateixa distància física o, fins i tot, utilitzar diferents funcions de densitat per a representar la distribució dels consumidors al llarg del segment. Es donen casos en què, a part de la diferenciació del producte o la localització física real, els consumidors tenen preferències sobre unes empreses, ja sigui per la marca, la reputació o l'oferta de l'empresa, i, per tant, aquest consumidor pot preferir comprar el producte en una empresa tot i que l'altra sigui més propera o tingui un producte més adaptat a les seves necessitats. Un exemple clar d'aquest fet, en el qual podríem aplicar funcions de cost asimètriques, és el cas de les marques genèriques en els productes farmacèutics, que normalment generen menys confiança en els consumidors. Per altra banda, generalment, els consumidors d'un mercat no estan distribuïts de forma uniforme dins d'aquest; per aquesta raó, la utilitat de poder considerar altres funcions de densitat és veure que els equilibris en la localització poden dependre en un grau alt de la distribució dels consumidors dins del mercat. Per exemple, en el cas de la política, és senzill veure que la majoria dels ciutadans se situen al centre ideològic o al voltant d'aquest. Per tant, si consideréssim el cas polític, els partits haurien de tenir en compte que els extrems no solen atraure tants votants com les ideologies més cèntriques, és a dir, que aquests no es distribueixen uniformement al llarg del segment que connecta l'extrema dreta i l'extrema esquerra.

Part V
Conclusions

Al final dels meus estudis universitaris en els àmbits de les matemàtiques, l'economia i l'empresa, el meu contacte amb la teoria de jocs havia estat escàs. Amb prou feines havia conegut aquells conceptes més bàsics que s'hi contemplen. Amb aquest projecte, però, he pogut aprofundir en la matèria i conèixer tota la branca que s'origina en el model de Hotelling. Entendre la utilitat dels models clàssics de competència, com els de Cournot i Bertrand, per a la concepció de models més adaptats a situacions reals, ha estat un factor clau de la part teòrica d'aquest treball.

El plantejament del projecte m'ha permès connectar la teoria de jocs amb problemes de mercat que podem trobar a la vida real. A més a més, els resultats numèrics han donat peu a obrir nous horitzons per a l'estudi de models que, fins ara, no s'havien estudiat. Com he vist al llarg dels meus estudis, el càlcul numèric és una eina que pot servir per a abordar problemes sense haver d'introduir-nos en el procediment analític. En efecte, la conclusió més observable d'aquest treball és que l'aproximació numèrica a l'equilibri ens dóna un resultat prou bo per al model. Així doncs, podem trobar resultats adients per a models com els que es defineixen en aquest treball. En particular, ho hem fet per al model revisat de Hotelling.

En darrer terme, vull exposar que, a posteriori, l'objectiu és millorar el programa per a fer possible la seva aplicació a les alternatives que es plantegen al final del treball. Així doncs, aquest projecte ha estat només la prova que el càlcul numèric pot ser una opció a considerar en aquesta classe de models.

Referències

[1] d'Aspremont, C., Jaskold Gabszezwicz, J. i Thisse, J.-F. (1979). On Hotelling's "Stability in Competition". *Econometrica*, 47, 1145-1150.

[2] Bertrand, J.L.F. (1883). Théorie des Richesses: revue de Théories mathématiques de la richesse sociale par Léon Walras et Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot. *Journal des Savants*, 67, 499-508.

[3] Cournot, A.-A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.* Paris: L. Hachette.

[4] Gardner, R. (1999). *Juegos para empresarios y economistas.* Barcelona: Antoni Bosch, editor.

[5] Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de Teoría de Juegos.* Barcelona: Antoni Bosch, editor.

[6] Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *Economic Journal*, 39, 41-57.

[7] Hotelling, H. (1931). The Economics of Exhaustible Resources. *Journal of Political Economy*, 39, 137-175.

[8] Hotelling, H. (1931). The generalization of Student's ratio. *Annals of Mathematical Statistics*, 2, 360-378.

[9] Hotelling, H. (1932). Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions. *Journal of Political Economy*, 40, 577-616.

[10] Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24, 417–441 i 498–520.

[11] Nash, J.F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciencies*, 36, 48-49.

[12] Nash, J.F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica*, 18, 155-162.

[13] Nash, J.F. (1951). Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.

[14] Nash, J.F. (1950). Two-person cooperative games. *Econometrica*, 21, 128-140.

[15] Osborne, M.J. (2004). *An introducion to Game Theory.* Nova York: Oxford University Press.

[16] von Neumann, J. i Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton University Press.

A Annex

En aquest annex, exposem el codi del programa que constitueix la part pràctica del projecte. Presentem el programa complet que calcula l'equilibri perfecte en subjocs per al model corregit de Hotelling (model de costos quadràtics). Veiem que, dins d'aquest programa, la funció `equilibri` és la funció amb la que, per a dues localitzacions a i b, calculem el preu d'equilibri i, per tant, la que hem usat per a donar els valors de les taules de la darrera part del treball. A més a més, es dóna una proposta, al final d'aquest annex, de la comprovació d'equilibris per a tota localització de la discretització escollida.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double cost(double, double);
double beneficis(double, double);
int equilibri(double, double, double *);

int main(void){
        double *p, a, b, inc, ai, a1, a2, b1, b2, div_ab, tol, benefici;
        int i, j, it;
        p=(double *)calloc(4,sizeof(double));
        it=2;
        div_ab=5./1000;
        tol=2./100;

        a2=0.9;
        printf("\n---> L'EMPRESA A ES LOCALITZA A a=%1.2le\n", a2);
        for(i=0; i<it; i++){
                ai=a2;

                inc=(1-ai)/div_ab+1;
                benefici=0;
                for(j=0;j<inc;j++){
                        b=j*div_ab;
                        equilibri(ai,b,p);
                        if(beneficis(p[3], p[1])>benefici){
                                b1=b;
                                benefici=beneficis(p[3],p[1]);
                        }

                }
                printf("\n---> L'EMPRESA B ES LOCALITZA A b=%1.2le\n", b1);

                inc=(1-b1)/div_ab+1;
                benefici=0;
                for(j=0;j<inc;j++){
                        a=j*div_ab;
                        equilibri(a,b1,p);
                        if(beneficis(p[2], p[0])>benefici){
                                a1=a;
                                benefici=beneficis(p[2],p[0]);
```

```
				}
			}
			printf("\n---> L'EMPRESA A ES LOCALITZA A a=%1.2le\n", a1);

			inc=(1-a1)/div_ab+1;
			benefici=0;
			for(j=0;j<inc;j++){
				b=j*div_ab;
				equilibri(a1,b,p);
				if(beneficis(p[3], p[1])>benefici){
					b2=b;
					benefici=beneficis(p[3],p[1]);
				}
			}
			printf("\n---> L'EMPRESA B ES LOCALITZA A b=%1.2le\n", b2);

			inc=(1-b2)/div_ab+1;
			benefici=0;
			for(j=0;j<inc;j++){
				a=j*div_ab;
				equilibri(a,b2,p);
				if(beneficis(p[2], p[0])>benefici){
					a2=a;
					benefici=beneficis(p[2],p[0]);
				}
			}
			printf("\n---> L'EMPRESA A ES LOCALITZA A a=%1.2le\n", a2);

		}

		printf("---\n");

		if(fabs(a2-a1)<tol && fabs(b2-b1)<tol){
			a=(a1+a2)/2;
			b=(b1+b2)/2;
			printf("\n --> Les localitzacions d'equilibri són a=%1.2le i b=%1.2le\n", a, b);
		}

		return 0;
}

int equilibri(double a, double b, double *p){
		double sia, sib, PM, x, pa, pb, pa1, pb1, pa2, pai, pb2, tol, benefici,
		qa, qb, div_x, div_p, inc_p, inc_x, c;
		int it, i, j, k, consa=0, consb=0;
		it=5;
		c=1.;
		div_p=5./10000; /*distància entre preus*/
		div_x=0.25*div_p; /*distànciai entre consumidors*/
		PM=2.; /*preu màxim*/
		inc_p=PM/div_p+1; /*nombre de preus possibles*/
		inc_x=1./div_x+1; /*nombre de consumidors possibles*/
		pa2=2*div_x; /*El primer preu d'A*/
		tol=1./100;
```

```
	printf("\nL'empresa A comença determinant: pa = %1.2le\n\n", pa2);
	for(i=0; i<it; i++){
		pai=pa2;
		benefici=0;
		for(j=0; j<inc_p; j++){
			pb=j*div_p;
			consb=0;
			consa=0;
			for(k=0; k<inc_x; k++){
				x=k*div_x;
				if(pai+cost(x-a,c)>pb+cost(1.-b-x,c)){
					consb=consb+1;
				}else{
					consa=consa+1;
				}
			}
			qa=(double)consa/inc_x;
			qb=(double)consb/inc_x;
			if(beneficis(qb,pb)>benefici){
				benefici=beneficis(qb,pb);
				pb1=pb;
			}
		}
		printf("L'empresa B determina: pb = %1.8le\n \n", pb1);

		benefici=0;
		for(j=0; j<inc_p; j++){
			pa=j*div_p;
			consb=0;
			consa=0;
			for(k=0; k<inc_x; k++){
				x=k*div_x;
				if(pa+cost(x-a,c)>pb1+cost(1.-b-x,c)){
					consb=consb+1;
				}else{
					consa=consa+1;
				}
			}
			qa=(double)consa/(inc_x/1);
			qb=(double)consb/(inc_x/1);
			if(beneficis(qa,pa)>benefici){
				benefici=beneficis(qa,pa);
				pa1=pa;
			}
		}
		printf("L'empresa A determina: pa = %1.8le\n \n", pa1);

		benefici=0;
		for(j=0; j<inc_p; j++){
			pb=j*div_p;
			consb=0;
			consa=0;
			for(k=0; k<inc_x; k++){
				x=k*div_x;
```

```
                                if(pa1+cost(x-a,c)>pb+cost(1.-b-x,c)){
                                        consb=consb+1;
                                }else{
                                        consa=consa+1;
                                }
                        }
                        qa=(double)consa/inc_x;
                        qb=(double)consb/inc_x;
                        if(beneficis(qb,pb)>benefici){
                                benefici=beneficis(qb,pb);
                                pb2=pb;
                        }
                }
                printf("L'empresa B determina: pb = %1.8le\n \n", pb2);

                benefici=0;
                for(j=0; j<inc_p; j++){
                        pa=j*div_p;
                        consb=0;
                        consa=0;
                        for(k=0; k<inc_x; k++){
                                x=k*div_x;
                                if(pa+cost(x-a,c)>pb2+cost(1.-b-x,c)){
                                        consb=consb+1;
                                }else{
                                        consa=consa+1;
                                }
                        }
                        qa=(double)consa/inc_x;
                        qb=(double)consb/inc_x;
                        if(beneficis(qa,pa)>benefici){
                            benefici=beneficis(qa,pa);
                                pa2=pa;
                        }
                }
                printf("L'empresa A determina: pa = %1.8le\n \n", pa2);
        }

        if(fabs(pb2-pb1)<tol && fabs(pa2-pa1)<tol){
                p[0]=(pa1+pa2)/2;
                p[1]=(pb1+pb2)/2;
                consb=0;
                consa=0;
                for(k=0; k<inc_x; k++){
                        x=k*div_x;
                        if(p[0]+cost(x-a,c)>p[1]+cost(1-b-x,c)){
                                consb=consb+1;
                        }else{
                                consa=consa+1;
                        }
                }
                p[2]=(double)consa/inc_x;
                p[3]=(double)consb/inc_x;
                sia=c*(1-a-b)*(1+(a-b)/3);
                sib=c*(1-a-b)*(1+(b-a)/3);
```

```
                printf("\n --> Els darrers valors de pa són %1.8le i %1.8le.\n Els darrers valors de pb són %1.8le i %1.8le.\n --> Els preus d'equilibri aproximats per a a = %1.2le i b = %1.2le són (pa*, pb*) = (%1.8le, %1.8le), exactament: (%1.8le, %1.8le), amb error: (%1.8le, %1.8le)\n", pa1, pa2, pb1, pb2, a, b, p[0], p[1], sia, sib, fabs(p[0]-sia), fabs(p[1]-sib));
        }else{
                p[0]=-3;
                printf("Per a les localitzacions a=%1.2le i b=%1.2le, no hi ha equilibri\n", a, b);
        }
        return 0;
}

double cost(double x, double c){
        return c*x*x;
}

double beneficis(double q, double p){
        return q*p;
}
```

Per últim, presentem la proposta per a comprovar l'existència d'equilibris per a qualsevol parell de localitzacions a i b. En el cas que hem treballat, aquesta comprovació no és indispensable perquè el model teòric ens confirma l'existència — a més a més, si l'afegim, augmenta considerablement el temps que triga a donar un resultat —, però podria ser interessant per a acabar de provar el seu correcte funcionament. En altres casos, sí que serà necessari fer la comprovació, perquè no tindrem eines per a fer-la analíticament. Així doncs, afegint els paràmetres `double inc2;` i `int ok;`, podem incloure a l'inici del programa anterior les següents línies:

```
        inc=1/div_ab+1;
        printf("COMPROVACIÓ D'EXISTÈNCIA D'EQUILIBRI: ");
        ok=1;
        for(i=0; i<inc; i++){
                a=i*div_ab;
                inc2=inc-i;
                for(j=0; j<inc2; j++){
                        b=j*div_ab;
                        equilibri(a,b,p);
                        if(p[0]=-3){
                                ok=0;
                        }
                }
        }
        if(ok=1){
                printf("OK\n");
        }else{
                printf("Per a alguna localització no existeix l'equilibri ---> no existeix equilibri perfecte en subjocs\n");

        }
```