UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

LINEARITZACIÓ CONFORME DE PUNTS FIXOS EL·LÍPTICS

Autor: Joan Maria Camps Pallarès

Director: Dra. Núria Fagella Rabionet
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

The study of dynamics of holomorphic functions near a fixed point has led to numerous works since the end of the nineteenth century, and the *Siegel linearization problem* plays an important role in this branch of the theory of dynamical systems in one complex variable. The natural way of studying the dynamics of a system near a fixed point is finding a local change of cordinates to represent this system in a simpler way. If f is a holomorphic function with a fixed point $z_0 = f(z_0)$, and multiplier $\lambda = f'(z_0) \in S^1$, $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ for an irrational number α, we say that f is *linearizable* if it's locally conjugated to the linear system $g(z) = \lambda z$. Then, Siegel's problem consists in describing completely the family of numbers α for which every local system f with multiplier λ is linearizable. The contributions of H. Cremer and, specially, of C.L. Siegel to the problem, represent a big step in understanding it's trickyness, as well as the importance of the role that the arithmetical nature of α plays in it. The techniques introduced by J.C. Yoccoz in his resolution of Siegel's problem, at the end of the past century, have inspired other results to help understanding the dynamics of f in the non-linearizable case, yet not fully understood nowadays.

Resum

L'estudi de la dinàmica de funcions holomorfes al voltant d'un punt fix ha motivat nombrosos treballs des de finals del segle XIX, i el *problema de linearització de Siegel* juga un paper important dins aquesta branca de la teoria de sistemes dinàmics de variable complexa. La forma natural d'estudiar la dinàmica d'un sistema al voltant d'un punt fix és buscar un canvi de variable local que representi aquest sistema de forma més simple. Si f és una funció holomorfa amb un punt fix $z_0 = f(z_0)$, i multiplicador $\lambda = f'(z_0) \in S^1$, $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ per un cert nombre irracional α, es diu que f és *linearitzable* si és localment conjugat a la sistema lineal $g(z) = \lambda z$. Aleshores, el problema de Siegel consisteix a determinar la família de nombres α pels que tot sistema local f amb multiplicador λ sigui linearitzable. Les contribucions de H. Cremer i, sobre tot, de C.L. Siegel al problema, representen un salt en la comprensió de la seva delicadesa, i de la importància del paper de l'aritmètica de α. Les tècniques introduïdes per J.C. Yoccoz en la seva resolució del problema de Siegel, a finals del darrer segle, han inspirat diversos resultats per la comprensió de la dinàmica de f en el cas no linearitzable, encara avui dia poc comprès.

Agraïments

A la Dra. Núria Fagella per la paciència, el seu temps i l'oportunitat de dur a terme aquest projecte.

A la meva família i a la Vanesa pel seu recolzament incondicional i el seu amor.

Índex

1 Introducció **1**

2 Preliminars **3**

2.1 El pla complex estès . . . 3

2.2 Conformalitat i transformacions de Möbius . . . 5

2.3 Famílies normals . . . 9

2.4 El teorema de representació conforme de Riemann . . . 17

3 Dinàmica holomorfa al voltant d'un punt fix **19**

3.1 El problema de classificació . . . 19

3.2 Punts fixos hiperbòlics i superatractors . . . 21

3.3 Punts fixos parabòlics . . . 24

3.4 Punts fixos el·líptics . . . 27

4 Nombres de Brjuno i existència de punts de Cremer i discs de Siegel **30**

4.1 Una família de funcions no linearitzables . . . 30

4.2 Aproximants . . . 31

4.3 Condicions diofantines i nombres de Brjuno . . . 34

5 El teorema de Siegel-Brjuno **36**

5.1 Introducció a la prova del teorema . . . 36

5.2 Renormalització . . . 39

5.3 Existència del disc de Siegel . . . 43

6 Optimitat de la condició de Brjuno i la família quadràtica **47**

6.1 Solució del problema de Siegel i altres aplicacions . . . 47

6.2 Optimitat de la família quadràtica . . . 47

7 Conclusions **52**

1 Introducció

Si $f : S \to S$ és una funció holomorfa en una superfície de Riemann S, considerarem el sistema dinàmic discret generat per iteració de f en S. L'estudi de la dinàmica de f consisteix, de forma molt simplificada, en l'anàlisi del comportament asimptòtic de les seqüències d'iterats $\{f^n(z)\}_{n\geq 0}$ per a tot $z \in S$. Una eina fonamental per la comprensió de la dinàmica d'un sistema és la teoria local de punts fixos, que analitza la dinàmica de f en un entorn d'un punt fix $z_0 = f(z_0)$. Una forma natural d'estudiar el sistema local $f : U \to S$, és relacionar-lo amb un altre de més simple, generat per una funció holomorfa g, conjugada a f en U a travès d'un canvi de variable ϕ i, per tant, amb una dinàmica equivalent a la de f. Un problema natural que sorgeix, per tant, és el de descriure una classificació completa de les diferents classes de conjugació, cercant formes normals.

Ja en els inicis de l'estudi de la iteració d'aplicacions holomorfes, certa atenció recau en trobar solucions a equacions funcionals que estableixin relacions entre sistemes. L'any 1871, Ernst Schröder introdueix l'equació

$$\phi(f(z)) = \lambda\, \phi(z). \tag{1.1}$$

Tot i que Schröder no analitza el problema en termes estrictament dinàmics, l'estudi de la seva equació funcional juga un paper important en el desenvolupament de la teoria local de punts fixos. Quan analitzem aquesta equació al voltant d'un punt fix z_0, el nombre complex λ és, necessàriament, el valor $f'(z_0)$. És a dir, resoldre l'equació de Schröder és veure que f és conjugada al sistema lineal $g(z) = \lambda z$. Aquesta és una idea que sorgeix de forma natural, al pensar que la dinàmica de f pot ser ben representada per un truncament del seu desenvolupament en sèries de potències en z_0.

L'any 1884, Gabriel Kœnigs prova que l'equació (1.1) té una solució, essencialment única, al voltant d'un punt fix z_0, sempre que la derivada, o *multiplicador*, $\lambda = f'(z_0)$ satisfaci $|\lambda| \neq 0, 1$ (cas *hiperbòlic*), de manera que la dinàmica al voltant de tal punt fix s'entén completament en termes de l'aplicació λz. Leopold Leau estudia, l'any 1897, el cas més complicat en que λ és una arrel de la unitat (cas *parabòlic*), i Lucjan Böttcher tracta el cas $\lambda = 0$, l'any 1904. Els seus resultats ofereixen una descripció completa de les dinàmiques en tots aquests casos, tot i que una classificació completa no apareixerà fins l'any 1981, quan Jean Écalle i Sergei Voronin resolen el cas parabòlic.

El cas $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, on $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (cas *el·líptic*) és molt més complicat i encara resta, avui dia, incomplert. En aquest context, direm que f és *linearitzable* si existeix una solució de l'equació de Schröder per f en un entorn del punt fix z_0. El *problema de linearització de Siegel* consisteix a determinar el conjunt de paràmetres $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pels que tota funció amb un punt fix el·líptic, de multiplicador λ, sigui linearitzable. L'interès d'aquest problema resideix en la importància del paper que hi juga la naturalesa aritmètica del paràmetre α. Concretament, existiran funcions amb multiplicador λ no linearitzables quan la successió racional d'aproximants de α, que depèn de la seva expansió en fraccions continuades, sigui una aproximació "massa bona" del paràmetre α.

La primera prova de l'existència de funcions no linearitzables es deu a George Pfeiffer, el 1917, però el primer resultat en el mateix sentit on es mostra la importància de l'aritmètica de α es deu a Hubert Cremer, el 1927. La demostració de l'existència de funcions linearitzables és una tasca més delicada, i el problema restarà un temps obert. Fins i tot, Gaston Julia conjectura erròniament la seva inexistència dins la família de funcions racionals de grau 2. Els primers exemples es deuen a Carl L. Siegel, l'any 1942, en demostrar que tot 'germ' de la forma $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ és linearitzable al voltant de l'origen quan α és un nombre diofantí, demostrant la convergència d'una sèrie de conjugació formal. Pels volts de l'any 1965, Alexander Brjuno millora la demostració de Siegel, fent vàlid el resultat sota la condició, menys restrictiva, que α sigui un nombre de Brjuno. Thomas M. Cherry conjectura que la condició de Brjuno és òptima, fet que Jean-Christophe Yoccoz demostrarà l'any 1987, resolent completament el problema de Siegel.

La demostració de Yoccoz de l'optimitat de la condició de Brjuno es basa en un esquema de renormalització que ell mateix introdueix en una prova alternativa del teorema de linearització sota la condició de Brjuno, basada en l'anàlisi de l'estabilitat del sistema. La possibilitat d'estendre les tècniques introduïdes per Yoccoz més enllà del problema de Siegel, com ara en l'anàlisi dels elements que obstrueixen la linearització, motiven el principal objectiu d'aquest projecte: exposar el problema de linearització de Siegel en termes de la demostració de Yoccoz del teorema de linearització de Siegel-Brjuno.

Aquest text és, per tant, un recull del treball dut a terme per poder comprendre amb prou profunditat un problema teòric de senzilla exposició, però de delicadesa i dificultat considerables.

El capítol 2 proporciona els elements bàsics i necessaris de l'anàlisi complexa per a l'exposició del tema. Inclou proves completes de resultats importants com el teorema de representació conforme de Riemann, o el teorema de Montel. En el capítol 3 s'introdueix el problema de Siegel, dins el marc del problema de classificació de les classes de conjugació local. Hi oferim també les demostracions d'alguns dels resultats clàssics de la teoria local de punts fixos que hem esmentat, com ara el teorema de Böttcher, o el teorema de linearització de Kœnigs. Per tal de tenir una profunda comprensió del paper de l'aritmètica de α, el capítol 4 conté els elements de teoria de nombres necessaris per descriure la família dels nombres de Brjuno. Aquest mateix capítol és un bon marc per discutir la no trivialitat del problema de Siegel, i hi oferim una prova de l'existència de funcions no linearitzables, així com una prova de la viabilitat de la condició de Brjuno.

Finalment, el capítol 5 és un anàlisi de la prova de Yoccoz del teorema de Siegel-Brjuno, amb una especial atenció a descriure l'esquema de renormalització en que es basa. El capítol 6 exposa diferents resultats relacionats, d'una manera o altre, amb el teorema d'optimitat de la condició de Brjuno de Yoccoz. En particular, es mostra una prova detallada d'un enunciat, on es reflecteix el paper especial que juga el polinomi $P_\alpha(z) = \lambda z + z^2$ en el problema de linearització.

2 Preliminars

Aquest capítol és un recull dels elements teòrics bàsics, principalment de l'anàlisi complexa, que utilitzarem al llarg projecte. Posarem especial atenció en els criteris de normalitat de Montel i Marty, així com en el teorema de representació conforme de Riemann.

Les principals fonts consultades per l'elaboració del tema són les obres [5], [7], [8] i [11] on el lector pot trobar una exposició més detallada de tots els temes tractats.

2.1 El pla complex estès

Denotarem $\widehat{\mathbb{C}}$ el *pla complex estès* o *esfera de Riemann* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que identifiquem amb $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, l'esfera unitària centrada a l'origen, a través de la projecció estereogràfica al pla $z = 0$ (com a pla complex) $P : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ amb $P(\infty) = (0, 0, 1)$. Hi introduïm la mètrica σ induïda de la usual a $\mathbb{R}^3$, que anomenarem *distància de cordes* o *mètrica esfèrica*. És senzill comprovar que $\forall z, \omega \in \mathbb{C}$

$$\sigma(z, \omega) = \frac{2|z - \omega|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)}}, \quad \sigma(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \tag{2.1}$$

Així com, si z i ω són diferents de 0,

$$\sigma\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\omega}\right) = \sigma(z, \omega), \quad \sigma\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = \sigma(z, 0). \tag{2.2}$$

Com S^2 és compacte, l'espai mètric $(\widehat{\mathbb{C}}, \sigma)$ és complet. És un exercici senzill veure que els oberts de $(\widehat{\mathbb{C}}, \sigma)$ es caracteritzen com els subconjunts $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ tals que $U \cap \mathbb{C}$ és obert en el sentit de la mètrica usual a $\mathbb{C}$, i tals que, si $\infty \in U$, existeix $r > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset U$.

Extensió del concepte de funció holomorfa

Estenem ara la noció de funció holomorfa a funcions amb domini o codomini a $\widehat{\mathbb{C}}$. Una *superfície de Riemann* és una varietat complexa de dimensió 1 on l'atles, format per cartes locals al pla complex $\mathbb{C}$, és tal que els mapes de transició son funcions holomorfes. Si S i S' són superfícies de Riemann, una funció contínua $f : S \to S'$ diem que és *holomorfa* si ho és en termes de les respectives cartes locals.

És clar que $\mathbb{C}$ amb $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ és superfície de Riemann, i que $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on U és obert, és holomorfa si, i només si, ho és en el sentit clàssic.

Considerem $\widehat{\mathbb{C}}$ amb la mètrica σ i hi definim les cartes $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \mapsto z \in \mathbb{C}$ i $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ (on enviem ∞ a 0), clarament homeomorfismes (amb les mètriques corresponents). Formen un atles $\mathcal{U}$ amb un únic mapa de transició $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, clarament holomorf. Així $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{U})$ és superfície de Riemann.

Observació 2.1. De la definició donada es desprèn la següent caracterització:

(i) Sigui U un obert de $\mathbb{C}$. Una funció contínua $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és holomorfa si, i només si

$$f|_{f^{-1}(\mathbb{C})} : f^{-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \quad i \quad (1/f)|_{f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})} : f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C},$$

on definim $1/f(z) = 0$ si $f(z) = \infty$, són holomorfes (en el sentit clàssic).

(ii) Sigui U un obert de $\widehat{\mathbb{C}}$. Una funció contínua $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és holomorfa si, i només si

$$f|_{U \cap \mathbb{C}} : U \cap \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \quad i \quad g : (1/U) \cap \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{definida} \quad g(z) = f(1/z),$$

on $1/U = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : 1/z \in U\}$ (amb el conveni habitual per a 0 i ∞), són holomorfes.

Observem que al punt (i) la continuïtat de la restricció de f en $f^{-1}(\mathbb{C})$ es dedueix de la continuïtat de f, tenint en compte la caracterització que hem comentat dels oberts de $(\widehat{\mathbb{C}}, \sigma)$. La de $1/f$ en $f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ es dedueix anàlogament, tenint en compte la igualtat (2.2). De fet, és clar que una funció f és contínua a $U \subseteq \mathbb{C}$ amb la distància euclidiana si, i només si, ho és amb la distància de cordes a U.

Funcions meromorfes com a funcions holomorfes

A continuació veiem com les funcions meromorfes s'estenen a funcions holomorfes amb codomini $\widehat{\mathbb{C}}$. Demostrem dos lemes previs on suposem conegut que el conjunt de funcions meromorfes en un obert connex U és una àlgebra, així com que l'obert on una funció meromorfa és holomorfa és connex.

Lema 2.2. *Sigui U un obert connex de $\mathbb{C}$ i $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ una funció holomorfa no idènticament ∞. Aleshores els punts de $f^{-1}(\infty)$ son aïllats.*

Demostració. Sabem que $1/f$ és holomorfa a l'obert $V = f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ de $\mathbb{C}$. Sigui $z_0 \in f^{-1}(\infty) \subseteq V$, i sigui $r > 0$ tal que $D = D(z_0, r) \subseteq V$. Si z_0 no és aïllat a $f^{-1}(\infty)$, aleshores és un zero no aïllat de $1/f$ a l'obert connex D. Pel principi de prolongació analítica $1/f$ és idènticament 0 en D, i per tant a la component connexa U_0 de z_0 a V. Així $f \equiv \infty$ en U_0, que és obert de V, i per tant de U. Ara, si $\{z_n\}_n$ és una successió en U_0 amb límit $z \in U$, per continuïtat de f és $f(z) = \infty$, i $z \in V$. Com U_0 és tancat en V, aleshores $z \in U_0$. En definitiva U_0 és no buit, obert en U, i tancat en U. Com U és connex, $U_0 = U$ i $f \equiv \infty$. $\square$

Lema 2.3. *Sigui U un obert connex de $\mathbb{C}$ i f una funció meromorfa a U no idènticament zero. Aleshores $1/f$ (amb $1/f(z) = \infty$ si $f(z) = 0$) és meromorfa a U, i té com a pols els zeros de f.*

Demostració. Anomenem P i Z els conjunts (tancats) de pols i de zeros de f respectivament. f és holomorfa a l'obert $U \setminus P$, i $1/f$ és holomorfa a l'obert $U \setminus (P \cup Z)$. Si $a \in Z$, considerem la sèrie de potències de f centrada en a en un disc $D = D(a, \delta) \subseteq U \setminus P$. Com $f(a) = 0$ i f no és idènticament zero, pel principi de prolongació analítica ($U \setminus P$ és connex), existeix un enter $m \geq 1$ tal que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ a D, on g és holomorfa en tal disc i $g(a) \neq 0$. Prenent δ més petit si cal, g no s'anul·la a D; de manera que $1/g$ és holomorfa a D i $D \cap Z = \{a\}$. Així $1/f(z) = (z - a)^{-m}(1/g(z))$ és holomorfa a $D \setminus \{a\}$ i té una singularitat aïllada a $z = a$, que és un pol. $\square$

Proposició 2.4. *Si $U \subseteq \mathbb{C}$ és obert i f és una funció meromorfa a U, podem definir una funció holomorfa $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ prenent $f(z) = \infty$ si z és un pol de f. Recíprocament, si $U \subseteq \mathbb{C}$ és obert connex i $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és holomorfa no idènticament ∞, aleshores f és funció meromorfa a U i té com a pols $f^{-1}(\infty)$.*

Demostració. Suposem f meromorfa. La continuïtat de l'extensió $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és immediata de la definició 2.1 de la mètrica cordal σ, tenint en compte que als pols z_0 tenim $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Com $f^{-1}(\mathbb{C})$ és el complementari del conjunt de pols de f a U, f és holomorfa a $f^{-1}(\mathbb{C})$. Finalment, com $1/f$ és meromorfa a cada component connexa de U (tret d'on sigui $f \equiv 0$, i per tant $1/f \equiv \infty$ holomorfa trivialment a tal component) amb els zeros de f com a pols, tenim $1/f$ holomorfa a $f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$. Recíprocament, si U és connex i $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ holomorfa no idènticament ∞, els punts de $f^{-1}(\infty)$ son aïllats (Lema 2.2), f és holomorfa en el sentit clàssic al complementari d'aquest conjunt en U i, per continuïtat de f, $\forall z_0 \in f^{-1}(\infty)$ és $0 = \lim_{z \to z_0} \sigma(f(z), f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} 2(1 + |f(z)|^2)^{-\frac{1}{2}}$, que implica $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. És a dir z_0 és un pol de f. $\square$

Així, en el cas de funcions definides en un domini $U \subseteq \mathbb{C}$ (obert connex), tenim una correspondència bijectiva (tret del cas $f \equiv \infty$) entre funcions meromorfes i holomorfes en el nou sentit. Per tal de ser concisos i evitar confusions, quan no indiquem expressament el codomini d'una funció, reservarem el terme "funció holomorfa" a les funcions que ho siguin en el sentit clàssic. Així, les funcions holomorfes $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ no idènticament ∞ seran "funcions meromorfes".

Funcions racionals

Veiem ara que les funcions racionals caracteritzen les funcions holomorfes de l'esfera de Riemann en ella mateixa.

Observació 2.5. Considerem les *funcions racionals* $r(z) = p(z)/q(z)$, on p i q són polinomis no nuls i sense factors comuns. Clarament r és meromorfa en $\mathbb{C}$ amb els zeros de q com a pols. Definint $r(z) = \infty$ si $q(z) = 0$, $r : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ esdevé una funció contínua en termes de la mètrica esfèrica i holomorfa (Proposició 2.4). Considerem la funció racional $s(z)$ definida formalment com

$$s(z) = \frac{z^m \cdot p(1/z)}{z^m \cdot q(1/z)},$$

on m és el màxim dels graus de p i q. També $s(z)$ s'estén a una funció $s : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ holomorfa, complint a més $s(z) = r(1/z)$ per tot $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definint $r(\infty) = s(0)$, aleshores

$$\lim_{z\to\infty} r(z) = \lim_{z\to 0} r(1/z) = \lim_{z\to 0} s(z) = s(0) = r(\infty),$$

on els límits són en termes de la mètrica esfèrica, que compleix la igualtat (2.2). Així, hem estès r a una funció $r : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ contínua i, de fet, holomorfa (Observació 2.1).

Proposició 2.6. *Tota funció $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ holomorfa no idènticament ∞ és racional.*

Demostració. Comencem veient que $f^{-1}(\infty)$ és finit. En cas contrari, i com $\widehat{\mathbb{C}}$ és compacte, existiria una successió de $f^{-1}(\infty)$ convergent (prenent parcials si fos necessari) a cert $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, per la continuïtat de f obtindrem $z_0 \in f^{-1}(\infty)$, en contradicció amb el lema 2.2. Si $z_0 = \infty$, el mateix argument és aplicable fent un canvi per 0 mirant $f(1/z)$. Els punts $a \in f^{-1}(\infty)$ son els pols de f com a funció meromorfa, en un entorn $D(a, \delta_a) \setminus \{a\}$ dels quals podem considerar-hi la sèrie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-p_a}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

on p_a és l'ordre de a com a pol de f. La suma dels termes amb exponent negatiu de la sèrie s'anomena la *part principal* de f en a. La suma (finita) de les parts principals de f als diferents pols és una funció racional $r(z)$. Aleshores $f - r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és holomorfa (en un entorn de cada pol de f existeix la sèrie de potencies de $f - r$), i per tant és una sèrie de potències centrada a l'origen en tot el pla complex. Com $g(z) = f(1/z) - r(1/z)$ és holomorfa com a funció de $\mathbb{C}$ a $\widehat{\mathbb{C}}$, és meromorfa a $\mathbb{C}$ i en un entorn de $z = 0$ la seva sèrie de Laurent és la sèrie de potències de $f - g$ substituint z per $1/z$. Com $z = 0$ és un pol o una singularitat evitable de g, la sèrie té part principal finita. És a dir $f - r = s$ és un polinomi, i per tant, $f = s - r$ és racional. $\square$

D'aquest fet en deduïm la següent versió del principi de prolongació analítica al pla complex estès.

Corol·lari 2.7. *Siguin $f, g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ funcions holomorfes. Si f i g coincideixen en un nombre infinit de punts, aleshores $f = g$.*

2.2 Conformalitat i transformacions de Möbius

En aquest apartat establim les definicions que utilitzarem a l'hora de parlar de conformalitat. Caracteritzarem els automorfismes conformes en $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ (el disc unitat), i veurem algunes propietats bàsiques del cas particular de les transformacions de Möbius.

Conformalitat

Diem que una funció f definida en un obert $U \subseteq \mathbb{C}$ és *conforme en* $z_0 \in U$ si és holomorfa en z_0 i $f'(z_0) \neq 0$. Diem que f és *conforme en* U si ho és en tot $z_0 \in U$.

No és complicat veure (tot i que no ho farem) que, de fet, les funcions conformes en un obert U són exactament les funcions de classe $\mathcal{C}^1$ en U, vistes com a funcions de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, que preserven angles en tot punt de U.

Recordem que una funció f holomorfa en un obert $U \subseteq \mathbb{C}$ és *univalent* si, a més, és injectiva. El següent resultat ens mostra que si f és univalent en U aleshores és conforme en U. També direm que f és una *representació conforme de* U.

Proposició 2.8. *Sigui f una funció univalent en un obert $U \subseteq \mathbb{C}$. Aleshores*

(i) *$f'(z) \neq 0$ per tot $z \in U$. En particular, els zeros de f tenen multiplicitat $m = 1$.*

(ii) *$f^{-1} : f(U) \to U$ és holomorfa amb $(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z)$ per tot $z \in U$.*

Demostració. Comencem veient (i). Suposem $f'(a) = 0$ per cert $a \in U$. Com f és no constant, de la sèrie de potències de f en un entorn $D(a, R) \subseteq U$ de a obtenim

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m h(z) \quad \forall z \in D(a, R),$$

on $m \geq 2$ i h és una funció holomorfa en $D(a, R)$ amb $h(a) \neq 0$. Prenent $0 < r < R$ tal que h no tingui zeros en $D(a, r)$, aleshores existeix una determinació del logaritme de h en tal disc (és simplement connex) i, per tant, existeix una determinació de l'arrel m-èsima de h en $D(a, r)$. Per tant, podrem escriure

$$f(z) - f(a) = (g(z))^m \quad \forall z \in D(a, r),$$

on g és holomorfa no constant en $D(a, r)$. En particular, pel teorema de l'aplicació oberta, g és oberta. Per tant existeix un entorn $D(0, r_0) \subseteq g(D(a, r))$ de $g(a) = 0$. Prenent $0 < \rho < r_0$ i ζ una arrel m-èsima de la unitat diferent de 1, tindrem $\rho, \rho\zeta \in g(D(a, r))$ i $\rho^m = (\rho\zeta)^m$, contradient que f sigui injectiva.

L'apartat (ii) és conseqüència del teorema de la funció inversa. Si considerem f com a funció diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tenint en compte que per f es satisfan les equacions de Cauchy-Riemann, és immediat comprovar que el determinant de la diferencial de f és $|f'(z)|^2$, diferent de 0 en tot U tal com hem vist en (i). Així, com f és injectiva, obtenim que f és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ en la seva imatge. A més, la diferencial $D(f^{-1})$ de f^{-1} satisfà $D(f^{-1})(f(z)) = (Df)^{-1}(z)$ per tot $z \in U$, d'on deduïm que per a f^{-1} també es satisfan les equacions de Cauchy-Riemann, i (amb una senzilla comprovació) que $(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z)$ per tot $z \in U$. □

Observació 2.9. L'argument basat en el teorema de la funció inversa utilitzat en la demostració de *(ii)* ens permet afirmar que en un punt z_0 on una funció f és holomorfa i satisfà $f'(z_0) \neq 0$ podem definir una inversa local f^{-1}, també holomorfa.

Donats oberts $U, V \subseteq \mathbb{C}$, una *transformació conforme* entre U i V és una aplicació $f : U \to V$ bijectiva i holomorfa en U. Acabem de veure que tal funció f és, en efecte, conforme en U, i que f^{-1} també és transformació conforme. A més, és immediat que la composició de dues transformacions conformes també ho és. En el cas $U = V$ diem que f és un *automorfisme conforme.* Hem vist, per tant, que el conjunt d'automorfismes conformes en un obert $U \subseteq \mathbb{C}$, que notarem $\mathcal{G}(U)$, és un grup amb la composició de funcions i la identitat en U com a element neutre.

Parlarem també de transformacions i automorfismes conformes considerant oberts $U, V \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ i funcions holomorfes $f : U \to V$. Tenint en compte que, en tal cas, f és holomorfa si ho és en termes de les respectives cartes locals (Observació 2.1) és immediat que f^{-1} també és una transformació conforme, i que les definicions són consistents si prenem $U, V \subseteq \mathbb{C}$.

Automorfismes conformes

A continuació determinarem els conjunts d'automorfismes conformes de $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ i $\widehat{\mathbb{C}}$. Comencem recordant que les *transformacions de Möbius* són les funcions racionals $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Observem que, si $c = 0$, aleshores $a, d \neq 0$ i ϕ és no constant en $\widehat{\mathbb{C}}$ amb $\phi(z) = (az + b)/d$ i $\phi(\infty) = \infty$. Si $c \neq 0$, la condició $ad - bc \neq 0$ ens assegura que numerador i denominador no tenen factors comuns, i per tant ϕ és racional no constant en $\widehat{\mathbb{C}}$, amb $\phi(-d/c) = \infty$ i $\phi(\infty) = a/c$. En tot cas ϕ és una funció holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ (Observació 2.5). Un simple càlcul mostra que la transformació de Möbius

$$\psi(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

satisfà $(\psi \circ \phi)(z) = (\phi \circ \psi)(z) = z$ per tot $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. En definitiva, les transformacions de Möbius són automorfismes conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.10 (Automorfismes de $\widehat{\mathbb{C}}$)**.** *El grup $\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$ dels automorfismes del pla complex estès és el conjunt de les transformacions de Möbius.*

Demostració. Només queda demostrar que tot element de $\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$ és una transformació de Möbius. Si $g \in \mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$, g és holomorfa i per tant racional (Proposició 2.6). Posem $g(z) = p(z)/q(z)$ on p i q són polinomis no nuls sense factors comuns. Aleshores, si P i Q són els conjunts de zeros de p i q respectivament, les restriccions de g en $\mathbb{C} \setminus Q$, i de $(1/g)(z) = q(z)/p(z)$ en $\mathbb{C} \setminus P$ són funcions univalents en els respectius dominis, i els seus zeros són exactament els de p i els de q respectivament. Aleshores, per la injectivitat de tals restriccions, p i q tenen, com a molt, un zero cada un. A més, tals zeros tenen multiplicitat 1 (Proposició 2.8), de manera que p i q són polinomis de grau 0 o 1. Així, podem escriure $p(z) = az + b$ i $q(z) = cz + d$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Finalment, com p i q no poden ser de grau 0 simultàniament i, en cas de ser tots dos de grau 1, no tenen factors comuns, obtenim $ad - bc \neq 0$. □

Del següent teorema es segueix la descripció de $\mathcal{G}(\mathbb{C})$.

Teorema 2.11 (Teorema de Cassorati-Weierstrass). *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularitat aïllada essencial d'una funció f. Aleshores per tot $\omega_0 \in \mathbb{C}$ existeix una successió $\{z_n\}_n$ de nombres complexos amb $z_n \to z_0$ tal que $f(z_n) \to \omega_0$.*

Demostració. Argumentem per contrarecíproc. Suposem que existeix un nombre complex ω_0 tal que per cap successió $\{z_n\}_n$ amb $z_n \to z_0$ es satisfà $f(z_n) \to \omega_0$. Aleshores existeixen constants $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ tals que per tot $z \in D' = D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ (on suposem f holomorfa) es compleix $|f(z) - \omega_0| > \varepsilon$. Així $h(z) = 1/(f(z) - \omega_0)$ és acotada en D' i té una singularitat aïllada en z_0. Pel teorema de les singularitats evitables de Riemann, sabem que z_0 és una singularitat evitable de h, i per tant h és holomorfa en $D = D(z_0, \delta)$. Així $f = 1/h + \omega_0$ és meromorfa en D, de manera que z_0 és un pol o una singularitat evitable de f. □

Corol·lari 2.12. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularitat aïllada essencial d'una funció f. Aleshores f no és injectiva en cap entorn de z_0.*

Demostració. Sigui $D = D(z_0, R)$ tal que f sigui holomorfa en $D' = D \setminus \{z_0\}$. Donat $a \in D'$ qualsevol, podem prendre $\varepsilon > 0$ prou petit tal que els oberts $U = D(z_0, \varepsilon)$ i $V = D(a, \varepsilon)$ siguin disjunts, i $V \subseteq D'$. Pel teorema de l'aplicació oberta $f(V)$ és obert, i pel teorema de Cassorati-Weierstrass $f(U)$ és dens en $\mathbb{C}$, de manera que $f(V) \cap f(U) \neq \emptyset$. □

Teorema 2.13 (Automorfismes de $\mathbb{C}$). *El grup $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ dels automorfismes del pla complex és el conjunt de les* transformacions afins

$$f(z) = \lambda z + c, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda, c \in \mathbb{C}.$$

Per tant, és el subgrup de $\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$ format per les transformacions de Möbius que deixen fix ∞.

Demostració. Que les transformacions afins són automorfismes de $\mathbb{C}$ és evident. Recíprocament, si $f \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$, és una sèrie de potències centrada a l'origen en tot el pla complex. Aleshores $f(1/z)$ és injectiva i holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, i és la sèrie de Laurent centrada a l'origen obtinguda substituint z per $1/z$ en la sèrie de potències de f. Pel teorema de Cassorati-Weierstrass, 0 és un pol de $f(1/z)$ i f és un polinomi amb $\deg f \geq 1$ ja que f és no constant (Corol·lari 2.12) i, de fet, també per injectivitat deduïm que $\deg f = 1$. □

Acabem amb la descripció de $\mathcal{G}(\mathbb{D})$, que ens serà d'utilitat en la demostració del teorema de representació conforme de Riemann que veurem al final del capítol. La deduirem del següent teorema.

Teorema 2.14 (Lema de Schwarz). *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ és una funció holomorfa amb $f(0) = 0$, aleshores $|f'(0)| \leq 1$. Si es satisfà la igualtat $|f'(0)| = 1$, aleshores f és una rotació del disc al voltant de 0. Això és, $f(z) = cz$ en $\mathbb{D}$, on c és la constant $c = f'(0)$ de mòdul 1. Per altra banda, si $|f'(0)| < 1$, aleshores $|f(z)| < |z|$ per tot $z \neq 0$.*

Observem que, en les hipòtesis del teorema, si $|f'(0)| = 1$ aleshores f és un automorfisme conforme del disc unitat. Ara bé, si $|f'(0)| < 1$ aleshores f no pot ser un automorfisme de $\mathbb{D}$, ja que la composició de f amb qualsevol funció holomorfa $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ amb $g(0) = 0$ tindria derivada amb mòdul $|g'(0)||f'(0)| < 1$, de manera que f no pot tenir inversa holomorfa.

Demostració. Considerem la funció $g(z) = f(z)/z$, ben definida i holomorfa en $\mathbb{D}$ com es dedueix dividint per z la sèrie de potències de f centrada en 0 en $\mathbb{D}$. Com $|q(z)| = |f(z)/z| < 1/r$ quan $|z| = r < 1$, aplicant el Principi del Mòdul Màxim deduïm que $|q(z)| < 1/r$ per tot z en el disc tancat $\overline{D(0,r)}$. Com això és cert per tot $0 < r < 1$, si fem tendir r a 1 aleshores $|q(z)| \leq 1$ per tot $z \in \mathbb{D}$ i, en particular, com $f'(0) = q(0)$, tenim $|f'(0)| \leq 1$. De nou pel Principi del Mòdul Màxim, si es satisfà la igualtat $|q(z)| = 1$ per cert $z \in \mathbb{D}$, aleshores q és constant amb $q(z) = c$ en $\mathbb{D}$, d'on es dedueix que $f(z) = cz$ en $\mathbb{D}$. Així, si $|q(0)| = |f'(0)| < 1$, necessàriament $|f(z)/z| = |q(z)| < 1$ i $|f(z)| < |z|$ per tot $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Teorema 2.15 (Automorfismes de $\mathbb{D}$)**.** *El grup $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ dels automorfismes del disc unitat és el conjunt de les transformacions de Möbius de la forma*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \quad e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}.$$

En particular, és subgrup de $\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Demostració. En efecte, la funció f definida en l'enunciat és una transformació de Möbius. És senzill comprovar que

$$\begin{aligned} |f(z)| < 1 &\iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \\ &\iff (1-z\overline{z})(1-a\overline{a}) > 0 \iff |z| < 1, \end{aligned}$$

de manera que la restricció de f a $\mathbb{D}$ és un automorfisme conforme de $\mathbb{D}$. Recíprocament, sigui $g \in \mathcal{G}(\mathbb{D})$, i sigui $a \in \mathbb{D}$ l'única solució de l'equació $g(a) = 0$. Aleshores $f(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ és un automorfisme de $\mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$, de manera que $g \circ f^{-1}$ és un automorfisme de $\mathbb{D}$ que deixa fix el 0. Pel lema de Schwarz (Teorema 2.14), és de la forma $(g \circ f^{-1})(z) = e^{i\theta}z$, i per tant $g(z) = e^{i\theta}f(z)$. $\square$

Transformacions de Möbius

A continuació mostrem algunes propietats bàsiques de les transformacions de Möbius, de les que ja hem parlat a la secció anterior.

Comencem observant que la composició de transformacions de Möbius també és transformació de Möbius, com es dedueix de l'estructura de grup de $\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$ (Teorema 2.10). Un càlcul senzill mostra que, si ϕ i ψ són transformacions de Möbius amb matrius de coeficients

$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \psi(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

respectivament, la composició $\phi \circ \psi$ té matriu de coeficients

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}.$$

De fet, ja havíem vist que la funció inversa d'una transformació de Möbius ϕ admet com a matriu de coeficients la matriu inversa de la de ϕ. La condició $ad - bc \neq 0$ és que les matrius de coeficients siguin invertibles. És senzill veure que, a més, una transformació de Möbius queda determinada pels coeficients complexos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tret del producte simultani dels quatre per una constant diferent de 0. Amb això, podrem identificar el grup $\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{C}})$ amb el grup projectiu lineal $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ de matrius 2×2 a coeficients complexos amb determinant 1 mòdul el subgrup $\{\pm\,\mathrm{id}\}$.

La següent proposició mostra com podem descriure de forma única una transformació de Möbius determinant la imatge de tres punts.

Proposició 2.16. *Donats $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ punts diferents, i $\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ valors diferents, existeix una única transformació de Möbius ϕ complint $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = \beta$ i $\phi(c) = \gamma$.*

Demostració. Per veure l'existència és suficient demostrar que, donats $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ diferents, existeix una transformació de Möbius que els envia a 0, 1 i ∞ respectivament. Donem tal transformació explícitament distingint casos.

$$\phi(z) = \frac{z-a}{z-c} \cdot \frac{b-c}{b-a} \quad \text{si} \quad a,b,c \in \mathbb{C};$$

$$\phi(z) = \frac{b-c}{z-c} \quad \text{si} \quad a = \infty;$$

$$\phi(z) = \frac{z-a}{z-c} \quad \text{si} \quad b = \infty;$$

$$\phi(z) = \frac{z-a}{b-a} \quad \text{si} \quad c = \infty.$$

Així, prenent tal transformació ϕ, i prenent ψ definida de manera que envii α, β i γ a 0, 1 i ∞ respectivament, tindrem que la transformació $\psi^{-1} \circ \phi$ satisfà la tesi de la proposició.
Per veure la unicitat, suposem que ϕ és una transformació de Möbius que deixa fixos els punts 0, 1 i ∞. Com $\phi(\infty) = \infty$ ha de ser $\phi(z) = \lambda z + \mu$ per certs $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Com $\phi(0) = 0$ i $\phi(1) = 1$ obtenim $\mu = 0$ i $\lambda = 1$, de manera que $\phi = \mathrm{id}$.
Finalment, suposem que ϕ i ψ són transformacions de Möbius enviant de forma respectiva els punts diferents a, b, i c als valors diferents α, β i γ. Sigui τ una transformació de Möbius que envia a, b i c a 0, 1 i ∞. Aleshores la transformació $\tau \circ \psi^{-1} \circ \phi \circ \tau^{-1}$ deixa fixos 0, 1 i ∞, de manera que és la identitat i $\phi = \psi \circ \tau^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \tau = \psi$. □

2.3 Famílies normals

En aquesta secció s'introdueix el concepte de normalitat d'una família de funcions meromorfes i s'ofereixen criteris de normalitat que seran d'utilitat. Començarem veient algunes definicions i resultats que ens permetran desenvolupar el tema. Si no indiquem el contrari, U serà un domini del pla complex $\mathbb{C}$ en tota la secció.

Convergència uniforme, equicontinuïtat i famílies localment acotades

Comencem recordant alguns teoremes bàsics sobre convergència uniforme en compactes.

Teorema 2.17 (Teorema de Weierstrass). *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions holomorfes en un domini U que convergeix uniformement sobre compactes de U a una funció f. Aleshores f és holomorfa a U i les successions de derivades $\{f_n^{(k)}\}_n$ convergeixen uniformement sobre compactes de U a $f^{(k)}$ per a $k = 1, 2, 3, \ldots$ respectivament.*

Demostració. La obviem. □

Teorema 2.18 (Teorema de Hurwitz). *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions holomorfes en un domini U que convergeix uniformement sobre compactes de U a una funció f no constant, i suposem que $z_0 \in U$ és un zero de f d'ordre N. Aleshores existeix $\rho > 0$ tal que, per n prou gran, f_n té exactament N zeros al disc $D(z_0, \rho)$ (amb multiplicitat), i aquests convergeixen a z_0 quan n tendeix a ∞.*

Demostració. Prenem ρ prou petit de manera que f no s'anul·li a $\overline{D(z_0, \rho)} \setminus \{z_0\}$. Per continuïtat de f, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > \delta$ per tot $z \in \partial D(z_0, \rho)$. Com f_n convergeix uniformement a f sobre $\partial D(z_0, \rho)$, tenim $|f_n(z) - f(z)| < \delta < |f(z)|$ per tot $z \in \partial D(z_0, \rho)$ per a n prou gran. Que f_n i f tenen el mateix nombre de zeros és la tesi del teorema de Rouché. La convergència dels zeros a z_0 es deu a que el mateix argument serveix prenent valors de ρ més petits. □

Corol·lari 2.19. *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions univalents en un domini U que convergeix uniformement sobre compactes de U a una funció no constant f. Aleshores f és univalent.*

Demostració. Suposem que $f(z_0) = f(\zeta_0) = \omega_0$ per certs $z_0, \zeta_0 \in U$. Són zeros d'ordre finit de la funció $g(z) = f(z) - \omega_0$. Pel teorema de Hurwitz, existeixen successions de zeros de g, $z_k \to z_0$ i $\zeta_k \to \zeta_0$, i.e. $f(z_k) = f(\zeta_k) = \omega_0$ per tot k. Com les funcions f_k són univalents, ha de ser $z_k = \zeta_k$ i per tant, passant al límit, ha de ser $z_0 = \zeta_0$. □

Per poder introduir les famílies normals de funcions meromorfes necessitem parlar de convergència de successions de funcions que puguin prendre el valor ∞. Direm que una successió de funcions $\{f_n\}_n$ definides en un conjunt $E \subseteq \mathbb{C}$ (i que pren valors a $\mathbb{C}$ o $\widehat{\mathbb{C}}$) *convergeix esfèricament uniformement en* E a una funció f si convergeix uniformement en E a f segons la mètrica esfèrica. Normalment obviarem el terme "esfèricament" quan especifiquem que el codomini de les funcions és $\widehat{\mathbb{C}}$, o quan parlem de funcions meromorfes. Per poder parlar de normalitat ens interessa veure la relació entre els dos tipus de convergència.

Proposició 2.20. *Si la successió $\{f_n\}_n$ convergeix esfèricament uniformement a una funció acotada f en $E \subseteq \mathbb{C}$, aleshores tal successió també convergeix uniformement (segons la mètrica usual) a f en E.*

Observem que no hem pres com a hipòtesi que les funcions f_n siguin acotades: en particular estem dient que per n prou gran les funcions f_n passaran a ser acotades en E.

Demostració. Suposem $|f(z)| \leq M$ en E. Aleshores

$$\sigma(0, f(z)) \leq \sigma(0, M) = \frac{2M}{\sqrt{1+M^2}} =: M_0 < 2$$

en E. Prenent $\varepsilon < 2 - M_0$, existeix n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $\sigma(f(z), f_n(z)) < \varepsilon$ en E, aleshores

$$\frac{2|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} = \sigma(0, f_n(z)) \leq \sigma(0, f(z)) + \sigma(f(z), f_n(z)) < M_0 + \varepsilon =: m < 2.$$

Deduïm que $\forall n \geq n_0$

$$|f_n(z)| < \frac{m}{\sqrt{4-m^2}} =: M_1 \quad \text{i} \quad |f(z) - f_n(z)| < \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+M^2}\sqrt{1+M_1^2}\right) \sigma(f(z), f_n(z))$$

en E, d'on es segueix la convergència uniforme. $\square$

En ocasions parlarem d'espais de funcions holomorfes en termes topològics. En l'espai vectorial $H(\Omega)$ de les funcions holomorfes en un domini $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, hi considerem la mètrica

$$d(f,g) := \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{2^\nu} \inf\left(1, \sup_{z \in K_\nu} |f(z) - g(z)|\right) \quad \forall f, g \in H(\Omega),$$

on $\{K_\nu\}_{\nu \geq 1}$ és una exhaustió per compactes de Ω. És a dir, $K_\nu \subseteq \Omega$ compacte, $K_\nu \subseteq K_{\nu+1}$ per tot $\nu \geq 1$ i, per tot compacte $K \subseteq \Omega$, es satisfà $K \subseteq K_\nu$ per cert $\nu \geq 1$. És immediat que d és una distància.

Proposició 2.21. *La convergència uniforme sobre compactes de Ω és equivalent a la convergència en la mètrica d. Així, la convergència uniforme sobre compactes defineix una topologia en $H(\Omega)$.*

Demostració. Suposem que la successió $\{f_n\}_n$ convergeix en la mètrica d a f. Sigui $K \subseteq \Omega$ un compacte i K_μ un membre de l'exhaustió de manera que $K \subseteq K_\mu$. Donat $0 < \varepsilon < 1$, prenem $\delta > 0$ de manera que $2^\mu \delta < \varepsilon$. Aleshores, per cert enter n_0, $d(f_n, f) < \delta$ per tot $n \geq n_0$. En particular,

$$\inf\left(1, \sup_{z \in K_\mu} |f_n(z) - f(z)|\right) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

fet que conclou aquest sentit de la demostració. Per altra banda, si la convergència és uniforme sobre compactes de Ω, com els termes de la sèrie que defineix la distància d són dominats per $1/2^\nu$ (independentment de f i f_n), el criteri M de Weirstrass ens diu que existeix un enter ν_0, independent de n, tal que que la suma dels termes $\nu \geq \nu_0$ de la sèrie que defineix $d(f_n, f)$ és dominada per $\varepsilon/2$. La part restant de la sèrie (de finits termes), es pot dominar per $\varepsilon/2$ prenent n prou gran, fet que finalitza la prova. $\square$

A continuació parlarem de famílies localment acotades i de famílies equicontínues (en un punt o un domini). Veurem algunes propietats i relacions d'ambdós conceptes, que jugaran un paper important en les consideracions que fem de normalitat.

Definició 2.22. *Una família de funcions $\mathcal{F}$ és* localment acotada *(o* localment uniformement acotada*) en un domini U si, per tot $z_0 \in U$ existeixen $r > 0$ i $M > 0$ tals que $|f(z)| < M$ per tot $z \in D(z_0, r) \subseteq U$ i per tota $f \in \mathcal{F}$.*

Amb un senzill argument de compacitat es dedueix que una família $\mathcal{F}$ és localment acotada si, i només si, és *uniformement acotada en compactes de U.*

En el context de funcions holomorfes en un domini U, el fet que una família sigui localment acotada va lligat al fet que ho sigui la família de derivades en el següent sentit.

Proposició 2.23. *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en un domini U, i $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ la família de derivades. Si $\mathcal{F}$ és localment acotada, aleshores $\mathcal{F}'$ és localment acotada. Recíprocament, si $\mathcal{F}'$ és localment acotada i existeix $\omega_0 \in U$ tal que $|f(\omega_0)| \leq M < \infty$ per tota $f \in \mathcal{F}$, aleshores $\mathcal{F}$ és localment acotada.*

Demostració. Suposem $\mathcal{F}$ localment acotada. Donat $z_0 \in U$, i un entorn $\overline{D(z_0, r)} \subseteq U$ on $|f(z)| < M$ per tota $f \in \mathcal{F}$. Aleshores, si $z \in D(z_0, r/2)$ i $\zeta \in \partial D(z_0, r)$ tenim $|\zeta - z| > r/2$, per la fórmula integral de Cauchy

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| < \frac{4M}{r}$$

per tot $f' \in \mathcal{F}'$. Recíprocament, prenem $z_0 \in U$ i $C \subseteq U$ un camí de z_0 a ω_0. Pel teorema fonamental del càlcul

$$|f(z_0)| \leq |f(\omega_0)| + \left| \int_C f'(\zeta)\, d\zeta \right| \leq M + M_0\, \ell(C) =: M_1$$

per tot $f \in \mathcal{F}$, on $M_0 > 0$ és tal que $|f'(\zeta)| < M_0$ sobre el compacte C per tot $f' \in \mathcal{F}'$. Ara, siguin $r > 0$ i $M_2 > 0$ tals que $|f'(z)| < M_2$ en $D(z_0, r) \subseteq U$ per tota $f' \in \mathcal{F}'$. Aleshores, si $z \in D(z_0, r)$, i $[z, z_0]$, tenim

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| + \left| \int_{[z,z_0]} f'(\zeta)\, d\zeta \right| < M_1 + M_2\, r$$

per tot $f \in \mathcal{F}$. □

Definició 2.24. *Una família $\mathcal{F}$ de funcions en un domini U diem que és* equicontínua *en un punt $z' \in U$ si, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta = \delta(z', \varepsilon) > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ si $|z - z'| < \delta$, per tota $f \in \mathcal{F}$. Direm que és* equicontínua *en U si, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta = \delta(U, \varepsilon) > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ per $z, z' \in U$ qualssevol tals que $|z - z'| < \delta$, per tota $f \in \mathcal{F}$.*

Un senzill argument de compacitat ens permet afirmar que, si $\mathcal{F}$ és equicontínua en un compacte $K \subseteq \mathbb{C}$ aleshores és equicontínua en tot $z' \in K$.

La definició de família equicontínua es generalitza a famílies en espais mètrics més generals. Així, parlarem d'*equicontinuïtat esfèrica* si substituïm $|f(z) - f(z')|$ per $\sigma(f(z), f(z'))$ en la definició. Quan parlem d'equicontinuïtat esfèrica amb $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ hi substituïm $|z - z'|$ per $\sigma(z, z')$. Observem també que, de la desigualtat $\sigma(z, \omega) \leq 2|z - \omega|$ quan $z, \omega \in \mathbb{C}$, es dedueix que equicontinuïtat implica equicontinuïtat esfèrica. El següent resultat és vàlid en tots els casos comentats.

Proposició 2.25. *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions contínues convergint uniformement a f en un compacte K. Aleshores, $\{f_n\}_n$ és equicontínua en K.*

Demostració. La successió és uniformement de Cauchy. Per tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall z \in K$ és $|f_n(z) - f_{n_0}(z)| < \varepsilon/3$. Per $i = 1, ..., n_0$ tenim f_i uniformement contínua. Podem prendre $\delta > 0$ tal que $|f_i(z) - f_i(\omega)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$ si $|z - \omega| < \delta$ per tot $i = 1, ..., n_0$. Ara, si $n > n_0$

$$|f_n(z) - f_n(\omega)| \leq |f_n(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(\omega)| + |f_{n_0}(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Això és, la successió $\{f_n\}_n$ és equicontínua en K. □

En el context de funcions holomorfes, la relació entre els dos darrers conceptes exposats és la següent proposició (el recíproc de la qual és fals).

Proposició 2.26. *Una família localment acotada $\mathcal{F}$ de funcions holomorfes en un domini U és equicontínua en compactes de U.*

Demostració. Segons hem vist (Proposició 2.23), $\mathcal{F}'$ és uniformement acotada en compactes de U. Per tot disc tancat $K \subseteq U$ tenim $|f'(z)| \leq M$ per tot $z \in K$ i $f' \in \mathcal{F}'$ per cert $M > 0$. Donats qualssevol dos punts $z, z' \in K$ i $f \in \mathcal{F}$, integrant sobre el segment que els uneix obtenim

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_{[z,z']} f'(\zeta)\, d\zeta \right| \leq M|z - z'|.$$

Donat $\varepsilon > 0$, prenent $\delta < \varepsilon/M$, si $|z - z'| < \delta$ aleshores $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. Recobrint un compacte qualsevol per un nombre finit de discs, i prenent el "mínim δ" completem la prova. □

Normalitat

Introduïm el concepte de normalitat d'una família de funcions meromorfes. El reformularem en el cas de famílies de funcions holomorfes.

Definició 2.27. *Una família $\mathcal{F}$ de funcions meromorfes en un domini U és* normal *en U si tota successió $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$ té una parcial que convergeix (esfèricament) uniformement sobre compactes de U.*

Ens interessa veure com són les funcions límit, i en particular en el cas que la família sigui holomorfa. Veiem un lema previ.

Lema 2.28. *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions meromorfes en un domini U. $\{f_n\}_n$ convergeix esfèricament uniformement sobre compactes de U a f si, i només si, per tot $z_0 \in U$ existeix un disc $K = \overline{D(z_0, r)} \subseteq U$ tal que $\{f_n\}_n$ convergeix uniformement a f en K, o $\{1/f_n\}_n$ convergeix uniformement a $1/f$ en K (segons la mètrica usual).*

De nou, estem dient implícitament que f (o $1/f$) és acotada en tal disc K, i que f_n (o $1/f_n$) ho és també per n prou gran.

Demostració. Les desigualtats

$$\sigma(z,\omega) \leq 2|z - \omega| \quad \text{si} \quad z, \omega \in \mathbb{C}, \qquad \sigma(z,\omega) \leq 2\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{\omega}\right| \quad \text{si} \quad z, \omega \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$$

mostren que la convergència uniforme de f_n o $1/f_n$ en un disc tancat $K = \overline{D(z_0, r)}$ implica la convergència esfèricament uniforme de f_n en K. Com existeix tal disc a cada $z_0 \in U$, deduïm la convergència esfèricament uniforme de f_n en compactes de U. Per veure el recíproc distingim dos casos.

Suposem $f(z_0) \neq \infty$. Com $f_n : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és contínua $\forall n \geq 1$ (respecte la mètrica esfèrica), i tenim convergència esfèricament uniforme, també $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és contínua. Aleshores existeix un entorn tancat $K = \overline{D(z_0, r)}$ on f és diferent de ∞ i per tant acotada, de manera que $\{f_n\}_n$ convergeix uniformement en K (Proposició 2.20). Notem que f és holomorfa a l'interior del disc K (Teorema de Weierstrass 2.17).

Suposem $f(z_0) = \infty$. Aleshores $1/f(z_0) = 0 \neq \infty$, i com $1/f_n$ són meromorfes en U i convergeixen esfèricament uniformement sobre compactes de U a $1/f$, com es dedueix de (2.2), podem raonar com en el cas $f(z_0) \neq \infty$. També $1/f$ és holomorfa a l'interior del disc K corresponent. □

Teorema 2.29. *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions meromorfes en un domini U que convergeix esfèricament uniformement sobre compactes de U a f. Aleshores, f és meromorfa en U o bé $f \equiv \infty$. Si la successió és de funcions holomorfes en U, aleshores f és holomorfa en U o bé és $f \equiv \infty$.*

Demostració. Comencem pel cas meromorf. De les observacions fetes al lema anterior es desprèn que f és holomorfa a $f^{-1}(\mathbb{C})$, i que $1/f$ és holomorfa a $f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$. És a dir, $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ és holomorfa (Observació 2.1) i per tant f és o bé meromorfa, o bé idènticament ∞ (Proposició 2.4), tenint en compte la connexió de U. En cas que la successió sigui de funcions holomorfes, si existeix $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = \infty$ hem vist al lema previ que en un entorn $\overline{D(z_0, r)}$ de z_0 on $1/f$ és acotada, per n prou gran $1/f_n$ també són funcions acotades i, per tant, holomorfes a $D(z_0, r)$, complint de fet $1/f_n(z) \neq 0$ a $D(z_0, r)$ en ser f_n holomorfes.

Com en el mateix disc tenim convergència uniforme de $1/f_n$ a $1/f$, es dedueix del teorema de Hurwitz (Teorema 2.18) que z_0 no és un zero d'ordre finit de $1/f$ i, per tant $1/f \equiv 0$ i $f \equiv \infty$ a $D(z_0, r)$. Com f ha de ser meromorfa o idènticament ∞ en U, deduïm $f \equiv \infty$. Així, si $f \not\equiv \infty$, $f(z) \neq \infty$ per tot $z \in U$ i, com és meromorfa, és holomorfa. □

Corol·lari 2.30. *Una successió $\{f_n\}_n$ de funcions holomorfes en un domini U convergeix uniformement en compactes de U a f, que pot ser $f \equiv \infty$ (i en tal cas volem dir que $\forall K \subseteq U$ compacte, i $\forall M > 0$ existeix n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ és $|f_n(z)| > M$ per tot $z \in K$), si, i només si, $\{f_n\}_n$ convergeix esfèricament uniformement en compactes de U a f.*

Demostració. Suposem $f \not\equiv \infty$. Que la convergència uniforme implica convergència esfèrica uniforme és immediat. Recíprocament, si la convergència és esfèrica, com f és holomorfa (Teorema 2.29), és acotada en tot compacte $K \subseteq U$ i en tal cas ja hem vist que la convergència en K és també en la mètrica usual (Proposició 2.20). El cas $f \equiv \infty$ és immediat de la definició de $\sigma(z, \infty)$, en la igualtat (2.1). □

Observació 2.31. Així, en el cas holomorf podem prendre la mètrica usual a l'hora de parlar de famílies normals, tenint en compte que s'admet la convergència uniforme d'una successió a ∞. Sovint, aquest cas no s'admet en la definició de normalitat en el cas holomorf; nosaltres l'admetrem per consistència.

Teoremes d'Arzelà-Ascoli, Montel i Marty

Estem en condicions de demostrar dos criteris de normalitat d'ús molt estès. El teorema de Montel dóna la normalitat per a famílies de funcions holomorfes localment acotades. El teorema de Marty caracteritza les famílies normals de funcions meromorfes segons sigui la família de derivades esfèriques (que introduirem seguidament) localment acotada, o no.

Comencem veient les següents versions del teorema d'Arzelà-Ascoli.

Teorema 2.32 (Teorema d'Arzelà-Ascoli)**.** *Considerem $\mathcal{F} = \{f_\alpha : U \to \widehat{\mathbb{C}}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una família de funcions (esfèricament) contínues en un domini U. Són equivalents*

(i) Tota successió $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$ té una parcial que convergeix uniformement sobre compactes de U.

(ii) $\mathcal{F}$ és esfèricament equicontínua en tot punt de U.

Demostració. Prenem (i) com a hipòtesi i suposem que $\mathcal{F}$ no és equicontínua en algun punt $z_0 \in U$. Aleshores existeixen $\varepsilon > 0$ i successions $\{z_n\}_n$ de U, amb $z_n \to z_0$, i $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$ tals que

$$\sigma(f_n(z_0), f_n(z_n)) > \varepsilon \quad \forall n \geq 1. \tag{2.3}$$

Per hipòtesi podem extreure una parcial $\{f_{n_k}\}_k$ de $\{f_n\}_n$ que convergeixi esfèricament uniformement sobre compactes de U, i en particular sobre algun compacte K que contingui $\{z_n\}_n$ (i per tant z_0). Ara, $\{f_{n_k}\}_k$ és esfèricament equicontínua a K (Proposició 2.25). Així, existeix $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, $z \in K$, aleshores $\sigma(f_{n_k}(z_0), f_{n_k}(z)) < \varepsilon$ per tot $k \geq 1$. En particular, com $z_{n_k} \to z_0$, prenent k prou gran tindrem $\sigma(f_{n_k}(z_0), f_{n_k}(z_{n_k})) < \varepsilon$, en contradicció amb (2.3). Així doncs, $\mathcal{F}$ és equicontínua en tot punt de U.

Recíprocament, suposem que $\mathcal{F}$ és equicontínua en tot punt de U. Sigui $\{z_n\}_n$ un subconjunt numerable dens en U (com ara els punts de U amb parts real i imaginària racionals). Donada una successió qualsevol $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$, considerem la successió $\{f_n(z_1)\}_n$ de $\widehat{\mathbb{C}}$. Com $(\widehat{\mathbb{C}}, \sigma)$ és un espai mètric compacte en podem extreure una parcial convergent $\{f_{n_k}(z_1)\}_k$, de manera que $\{f_n^1\}_n$, on $f_k^1 := f_{n_k}$, convergeix en z_1. De nou, de la successió $\{f_n^1(z_2)\}_n$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ podem extreure una parcial convergent $\{f_{n_k}^1(z_2)\}_k$, i la successió $\{f_n^2\}_n$, on $f_k^2 := f_{n_k}^1$ convergeix en z_1 i z_2. Seguint amb aquesta idea obtenim successions $\{f_n^p\}_n$ que convergeixen en $z_1, z_2, ..., z_p$. Aleshores la successió diagonal $\{g_n\}_n$, definida $g_k := f_k^k$, convergeix en tot $\{z_n\}_n$. De fet, veiem que convergeix uniformement en compactes de U. En efecte, si $K \subseteq U$ és compacte, com $\mathcal{F}$ és equicontínua en K, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$\sigma(g_n(z), g_n(z')) < \varepsilon/3$$

per tot $n \geq 1$ i $z, z' \in K$ sempre que $|z - z'| < \delta$. Per densitat de $\{z_n\}_n$ i compacitat de K tenim (reindexant si cal) $K \subseteq \cup_{k=1}^{k_0} D(z_k, \delta)$. Així, existeix n_0 tal que per tot $n, m \geq n_0$ és

$$\sigma(g_n(z_k), g_m(z_k)) < \varepsilon/3$$

per $k = 1, ..., k_0$. Finalment per tot $z \in K$, com $z \in D(z_i, \delta)$ per cert $1 \leq i \leq k_0$, per tot $n, m \geq n_0$ tenim

$$\sigma(g_n(z), g_m(z)) \leq \sigma(g_n(z), g_n(z_i)) + \sigma(g_n(z_i), g_m(z_i)) + \sigma(g_m(z_i), g_m(z)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

És a dir, $\{g_n\}_n$ és uniformement de Cauchy en K, i per tant uniformement convergent. □

Obtenim la següent caracterització, de gran importància, de les famílies normals de funcions meromorfes.

Corol·lari 2.33 (Teorema d'Arzelà-Ascoli)**.** *Una família $\mathcal{F}$ de funcions meromorfes en un domini U és normal si, i només si $\mathcal{F}$ és (esfèricament) equicontínua en tot punt de U.*

Observació 2.34. Notem que el teorema d'Arzelà-Ascoli es pot reformular per a funcions contínues en espais mètrics més generals. En principi, però, no podem prescindir de la compacitat del codomini de les funcions de $\mathcal{F}$, que hem utilitzat per trobar la successió diagonal que esdevé la parcial convergent. Per exemple, si calquem l'enunciat prenent una família de funcions contínues respecte la mètrica euclidiana (i eliminant la paraula "esfèrica" allà on toqui) la implicació $(ii) \Rightarrow (i)$ és, de fet, falsa (si no admetem la convergència a $f \equiv \infty$). Ara bé, si afegim la hipòtesi que $\mathcal{F}$ sigui localment acotada, aquesta ens permet calcar la demostració donada (utilitzant que $\mathcal{F}$ sigui localment acotada on hem usat la compacitat de $\widehat{\mathbb{C}}$). Amb això hem demostrat el següent.

Teorema 2.35 (Teorema de Montel)**.** *Si $\mathcal{F}$ és una família localment acotada de funcions holomorfes en un domini U, aleshores $\mathcal{F}$ és una família normal en U.*

Demostració. Es dedueix del que hem vist a les observacions 2.34 i 2.31, i el fet que, en el cas holomorf, si $\mathcal{F}$ és localment acotada aleshores és equicontínua en cada punt (Proposició 2.26). □

En les hipòtesis del teorema de Montel sabem, a més, que la funció límit de cada parcial convergent serà una funció holomorfa (es desprèn de la demostració del Teorema 2.32). Així, l'enunciat és vàlid si prenem la definició de famílies normals de funcions holomorfes en la que descartem que les funcions límit puguin ser $f \equiv \infty$.

Per tal de seguir amb el teorema de Marty convé introduir la *derivada esfèrica* d'una funció meromorfa en un domini U.

Donat un camí $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, l'identifiquem amb la corba parametritzada $\beta = P^{-1}(\gamma)$ a l'esfera unitària $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, on P és la projecció estereogràfica introduïda a l'inici del capítol. La *longitud esfèrica* $L(\gamma)$ és la longitud $\ell(\beta)$ de β. Aleshores $\sigma(\gamma(a), \gamma(b)) \leq L(\gamma)$ i, si f és holomorfa en un domini U contenint $\gamma([a, b])$, fent alguns càlculs veurem que

$$L(\gamma) = 2\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2}\, dt, \quad \text{i} \quad L(f \circ \gamma) = 2\int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1 + |f(\gamma(t))|^2} |\gamma'(t)|\, dt. \tag{2.4}$$

Definirem la *derivada esfèrica* d'una funció meromorfa f en un domini U com

$$f^{\#}(z) := \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \quad \text{si} \quad f(z) \neq \infty, \quad \text{i} \quad f^{\#}(z) := (1/f)^{\#}(z) \quad \text{si} \quad f(z) = \infty.$$

Sempre que $z \in U$ no sigui ni un zero ni un pol de f tenim

$$(1/f)^{\#}(z) = \frac{2\left|-f'(z)/f(z)^2\right|}{1 + |1/f(z)|^2} = f^{\#}(z),$$

d'on deduïm que $f^{\#} : U \to [0, +\infty)$ és contínua i $(1/f)^{\#}(z) = f^{\#}(z)$ a tot U.

En prendre f meromorfa, si $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, és un camí en U, com a molt passarà per un nombre finit de pols i de zeros de f (per compacitat i el fet que els pols i els zeros de f són aïllats). Trencant γ en un nombre finit de camins γ_i, $i = 1, ..., n$, de manera que cada fragment no contingui un zero i un pol a la vegada, tindrem que per $i = 1, ..., n$, $(f \circ \gamma_i)$ o bé $((1/f) \circ \gamma_i)$ és un camí a $\mathbb{C}$; com $L(f \circ \gamma_i) = L((1/f) \circ \gamma_i)$ per definició de L, podrem calcular $L(f \circ \gamma)$ sumant les longituds de cada fragment mitjançant la igualtat (2.4). Si, a més, tenim en compte que $(1/f)^{\#} = f^{\#}$ aleshores

$$L(f \circ \gamma) = \int_a^b f^{\#}(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt.$$

Lema 2.36. *Siguin $\{f_n\}_n$ funcions meromorfes en un domini U que convergeix esfèricament uniformement en compactes de U a f. Aleshores la successió de derivades esfèriques $\{f_n^{\#}\}_n$ convergeix uniformement en compactes de U a $f^{\#}$.*

Demostració. Sigui $K \subseteq U$ compacte. Per tot $z_0 \in K$, existeix un disc tancat $C_r = \overline{D(z_0, r)} \subseteq U$ on $\{f_n\}_n$ o $\{1/f_n\}_n$ convergeix uniformement a f o $1/f$ respectivament (Lema 2.28). En el primer cas estem dient que f i les funcions f_n (per n prou gran) son acotades en C_r, i per tant holomorfes a $D(z_0, r)$, amb $\{f_n'\}_n$ convergint uniformement a f' en, per exemple, $C_{r/2} = \overline{D(z_0, r/2)}$ (Teorema de Weierstrass 2.17). Veiem que aleshores també $\{f_n^{\#}\}_n$ convergeix uniformement a $f^{\#}$ en $C_{r/2}$. En efecte, sigui $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ i $|f'(z)| < M$ en $C_{r/2}$ i suposem n prou gran per que $|f_n(z)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f(z)| < 2M$ en tal disc. Aleshores $\forall z \in C_{r/2}$ és senzill obtenir

$$\begin{aligned} \left|f_n^{\#}(z) - f^{\#}(z)\right| &\leq 2\left|(1 + |f(z)|^2)|f_n'(z)| - |f'(z)|(1 + |f_n(z)|^2)\right| \\ &\leq 2(1 + M^2)\,|f_n'(z) - f'(z)| + 6M^2\,|f_n(z) - f(z)|\,, \end{aligned}$$

d'on deduïm la convergència uniforme de $f_n^{\#}$ a $f^{\#}$ en $C_{r/2}$. Si és el cas que $\{1/f_n\}_n$ convergeix uniformement a $1/f$ en C_r, deduïm el mateix tenint en compte que $g^{\#} = (1/g)^{\#}$ per tota funció g. Prenent un recobriment finit de K format per tals discs obtenim la convergència uniforme de $f_n^{\#}$ a $f^{\#}$ en K. $\square$

Teorema 2.37 (Teorema de Marty)**.** *Una família $\mathcal{F}$ de funcions meromorfes en un domini U és normal si, i només si la família $\mathcal{F}^{\#} = \{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ és localment acotada en U.*

Demostració. Suposem que la família $\mathcal{F}^{\#}$ és localment acotada. Sigui $z_0 \in U$, i prenem un disc tancat $K = \overline{D(z_0, r)} \subseteq U$. Per tot $z \in K$, sigui $\gamma(t) = (1 - t)z_0 + tz$, $0 \leq t \leq 1$, el segment de recta unint z_0 i z. Si $M > 0$ és tal que $f^{\#}(z') \leq M$ per tot $z' \in K$ i $f \in \mathcal{F}$, aleshores

$$\sigma(f(z_0), f(z)) \leq L(f \circ \gamma) = \int_0^1 f^{\#}(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt \leq M|z - z_0|,$$

d'on deduïm que $\mathcal{F}$ és equicontínua en z_0. Hem vist que $\mathcal{F}$ és normal (Corol·lari 2.33).

Per veure el recíproc suposem que $\mathcal{F}$ és normal, però que existeix un compacte $K \subseteq U$ on $\mathcal{F}^{\#}$ no és uniformement acotada, de manera que existeixen successions $\{z_n\}_n$ de K i $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$ tals que $f_n^{\#}(z_n) \to \infty$ quan $n \to \infty$. Per normalitat podem prendre una parcial $\{f_{n_k}\}_k$ que convergeixi esfèricament uniformement en compactes de U a una funció meromorfa f. Així, $\{f_{n_k}^{\#}\}_k$ convergeix uniformement en compactes de U a $f^{\#}$ (Lema 2.36). Per continuïtat de $f^{\#}$, existeix $M' > 0$ tal que $f^{\#}(z) < M'$ per tot $z \in K$. Aleshores existeix k_0 tal que $\forall k \geq k_0$ és $f_{n_k}^{\#}(z) \leq |f_{n_k}^{\#}(z) - f^{\#}(z)| + f^{\#}(z) < 2M'$ en K, contradient $f_n^{\#}(z_n) \to \infty$. $\square$

Diem que una família $\mathcal{F}$ de funcions meromorfes en un domini U és *normal en un punt* $z \in U$ si ho és en un entorn de z. Una conseqüència directa del teorema de Marty és que una família de funcions meromorfes en un domini U és normal en U si, i només si ho és en cada punt $z \in U$ (de nou fent servir un simple argument de compacitat); és a dir, la normalitat és una propietat local.

Ens interessa també parlar de normalitat en cas que tinguem famílies en un domini $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$.

Definició 2.38. *Diem que una família $\mathcal{F} = \{f_\alpha : U \to \widehat{\mathbb{C}}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de funcions holomorfes en un domini $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ és* normal *en U si tota successió $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$ té una parcial esfèricament uniformement convergent en compactes de U.*

Resulta immediat que tal família és normal en U si, i només si les famílies de funcions meromorfes

$$\{\, f|_{U \cap \mathbb{C}} : U \cap \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \text{ tals que } f \in \mathcal{F}\} \quad \text{i} \quad \{f(1/\cdot) : (1/U) \cap \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \text{ tals que } f \in \mathcal{F}\}$$

són normals en els respectius dominis. Així diversos resultats de normalitat, com ara els teoremes de Montel i Marty, o el Test Fonamental de Normalitat (que veurem tot seguit), tenen extensions immediates a famílies en un domini $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$.

El Test Fonamental de Normalitat de Montel

Com a conseqüència del teorema de Marty veurem ara un criteri de normalitat basat en el nombre de valors omesos per la família de funcions. Comencem amb el següent lema.

Teorema 2.39 (Lema de Zalcman). *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions meromorfes en un domini U. Si $\mathcal{F}$ no és normal, aleshores existeixen punts $z_n \in U$ que convergeixen a $z_0 \in U$, nombres $\rho_n > 0$ que convergeixen a 0, i funcions $f_n \in \mathcal{F}$ tals que les funcions $g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ (definides en els dominis adequats) convergeixen uniformement sobre compactes a una funció g meromorfa en $\mathbb{C}$ que satisfà $g^{\#}(0) = 1$ i $g^{\#}(\zeta) \leq 1$ per tot $\zeta \in \mathbb{C}$.*

Demostració. Pel teorema de Marty (Teorema 2.37) existeix una successió $\{\omega_n\}_n$ de punts en un compacte de U, i una successió $\{f_n\}_n$ de $\mathcal{F}$ tal que $f_n^{\#}(\omega_n) \to \infty$ quan $n \to \infty$. Podem suposar (prenent parcials si cal) que $\omega_n \to \omega_0$.

Podem reduir el problema al cas $\omega_0 = 0$, i podem suposar que $\overline{\mathbb{D}} \subseteq U$. En efecte, si $r > 0$ és tal que $\overline{D(\omega_0, r)} \subseteq U$, les funcions $h_f(z) := f(rz + \omega_0)$, on $f \in \mathcal{F}$, formen una família de funcions meromorfes en $V := (1/r)(U - \omega_0)$. Aleshores $\overline{\mathbb{D}} \subseteq V$, la successió de punts $v_n := (\omega_n - \omega_0)/r$ convergeix a 0, i per la regla de la cadena $h_{f_n}^{\#}(v_n) = r f_n^{\#}(\omega_n) \to \infty$ quan $n \to \infty$. En cas de complir-se el teorema per la família de funcions h_f, les funcions g_k corresponents satisfan $g_k(\zeta) = h_{f_k}(z_k + \rho_k \zeta) = f_k((rz_k + \omega_0) + (r\rho_k)\zeta)$, amb $rz_k + \omega_0$ convergent en U, i $r\rho_k > 0$ convergent a 0 quan $k \to \infty$.

Suposem doncs $\omega_0 = 0$ i $\overline{\mathbb{D}} \subseteq U$. Definirem

$$R_n := \max_{|z| \leq 1} f_n^{\#}(z)(1 - |z|).$$

Com $\omega_n \to 0$ i $f_n^{\#}(\omega_n) \to \infty$, tenim $R_n \to \infty$. Suposem que els màxims s'assoleixen a $z_n \in \overline{\mathbb{D}}$ per cada n, és a dir $R_n = f_n^{\#}(z_n)(1 - |z_n|)$. Com $0 \leq 1 - |z_n| \leq 1$, tenim $R_n \leq f_n^{\#}(z_n)$ i per tant també $f_n^{\#}(z_n) \to \infty$. Podem suposar que $z_n \to z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ per compacitat i prenent parcials si és necessari. Definim $\rho_n := 1/f_n^{\#}(z_n)$, de manera que $\rho_n \to 0$, i $1 - |z_n| = \rho_n R_n$. El disc $\overline{D(z_n, \rho_n R_n)}$ està contingut en $\overline{\mathbb{D}}$, i per tant en U. Parametritzem tal disc fent $\zeta \mapsto z_n + \rho_n \zeta$, amb $|\zeta| < R_n$, i definim les funcions g_n com

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n \zeta) \quad \forall \zeta \in D(0, R_n).$$

Com $R_n \to \infty$, les funcions g_n estan definides, per n prou gran, en qualsevol compacte de $\mathbb{C}$. Fixant $R > 0$, i prenent n_0 prou gran tal que $R_n > R$ (i $R_n > 1$) si $n \geq n_0$, aleshores les funcions g_n son definides i meromorfes en $D(0, R)$ per $n \geq n_0$. Observem que, per la regla de la cadena, $g_n^{\#}(\zeta) = \rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \zeta)$, i com $f_n^{\#}(z_n + \rho_n \zeta)(1 - |z_n + \rho_n \zeta|) \leq R_n$ i $|z_n + \rho_n \zeta| \leq |z_n| + \rho_n R$ si $|\zeta| < R$, tenim

$$\begin{aligned} g_n^{\#}(\zeta) &\leq \frac{\rho_n R_n}{1 - |z_n + \rho_n \zeta|} \leq \frac{\rho_n R_n}{1 - |z_n| - \rho_n R} \\ &= \frac{\rho_n R_n}{\rho_n R_n - \rho_n R} = \frac{1}{1 - R/R_n} \leq \frac{1}{1 - R} \quad \text{si} \quad |\zeta| < R. \end{aligned}$$

Pel teorema de Marty, les funcions g_n formen (per n prou gran) una família normal de funcions meromorfes en el disc $D(0, R)$. Tenim (prenent una successió parcial si cal) que $\{g_n\}_n$ convergeix uniformement sobre compactes de $D(0, R)$. Fent anar aquest argument prenent $R = 1, 2, 3, ...$, prenent una parcial de l'anterior en cada pas i construint la successió diagonal, podem suposar que $\{g_n\}_n$ convergeix uniformement sobre compactes de $\mathbb{C}$ (prenent n prou gran en cada compacte) a una funció g meromorfa en $\mathbb{C}$. Finalment, per tot $\zeta \in \mathbb{C}$, si $R > |\zeta|$ i n és prou gran, hem vist $g_n^{\#}(\zeta) \leq 1/(1 - R/R_n) \to 1$. Per la convergència de les derivades esfèriques (Lema 2.36), tenim $g^{\#}(\zeta) \leq 1$ per tot $\zeta \in \mathbb{C}$, i com $g_n^{\#}(0) = \rho_n f_n^{\#}(z_n) = 1$ per tot n, tenim $g^{\#}(0) = 1$. $\square$

Teorema 2.40 (Test Fonamental de Normalitat de Montel). *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions meromorfes en un domini U. Si $\mathcal{F}$ omet tres valors diferents $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$, aleshores és normal.*

Demostració. Suposarem, sense pèrdua de generalitat, que el domini de $\mathcal{F}$ és $U = D(0,1)$. En efecte, com la normalitat és una propietat local, és suficient veure que $\mathcal{F}$ és normal en tot disc obert $D(z_0, r) \subseteq U$; si considerem les funcions $f(rz + z_0)$, on $f \in \mathcal{F}$, definides en $(1/r)(U - z_0)$, aquestes formen una família de funcions meromorfes que omet tres valors de $\widehat{\mathbb{C}}$ i és normal en $D(0,1)$ si, i només si ho és $\mathcal{F}$ en $D(z_0, r)$.

Podem suposar també que $a = 0$, $b = 1$ i $c = \infty$. Només cal prendre una transformació de Möbius ϕ complint $\phi(a) = 0$, $\phi(b) = 1$ i $\phi(c) = \infty$ (Proposició 2.16). La família formada per les funcions meromorfes $\phi \circ f$, on $f \in \mathcal{F}$, omet els valors 0, 1 i ∞, i és normal si, i només si ho és $\mathcal{F}$, ja que ϕ i ϕ^{-1} són continues.

Amb aquestes suposicions, les funcions de $\mathcal{F}$ són holomorfes i diferents de 0 en tot punt de $D(0,1)$, i per tant admeten arrels de qualsevol ordre. Sigui $\mathcal{F}_k$ la família de les arrels 2^k-èsimes de les funcions de $\mathcal{F}$. Observem que si $\mathcal{F}_k$ és normal també ho és $\mathcal{F}$, ja que la convergència uniforme en un compacte es preserva per continuïtat (uniforme). Observem també que la família $\mathcal{F}_k$ omet els valors 0, ∞ i totes les arrels 2^k-èsimes de la unitat.

Acabarem fent reducció a l'absurd: suposem que $\mathcal{F}$ no és normal. Per tant, tampoc ho és $\mathcal{F}_k$. Sigui $G_k(\zeta)$ la funció meromorfa en $\mathbb{C}$, i de fet entera (Teorema 2.29), que ens proporciona el lema de Zalcman per a la família $\mathcal{F}_k$ (Teorema 2.39), complint $G_k^{\#}(\zeta) \leq 1$ i $G_k^{\#}(0) = 1$. G_k és límit (uniforme sobre compactes) no constant de restriccions convenientment escalades de funcions de $\mathcal{F}_k$, i per tant tals restriccions també ometen les arrels 2^k-èsimes de la unitat. Pel teorema de Hurwitz (Teorema 2.18) G_k també les omet. Pel teorema de Marty (Teorema 2.37), com $G_k^{\#}(\zeta) \leq 1$ per tot $\zeta \in \mathbb{C}$ i $k \geq 1$, $\{G_k\}_k$ és normal. Sigui G un límit (uniforme sobre compactes) d'una parcial de $\{G_k\}_k$. Aleshores $G^{\#}(0) = 1$ (Lema 2.36), de manera que G és entera i no constant; de nou pel teorema de Hurwitz (i tenint en compte que una arrel 2^k-èsima de la unitat és també arrel 2^{k+1}-èsima), tenim que G omet totes les arrels 2^k-èsimes de la unitat per tot $k \geq 1$. Pel teorema de l'aplicació oberta, com G és entera i no constant, és oberta. Aleshores, com la unió per tot $k \geq 1$ de les arrels 2^k-èsimes de la unitat és un conjunt dens en l'esfera unitària $S^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$, necessàriament G omet S^1. Per tant $|G| > 1$ o bé $|G| < 1$ en $\mathbb{C}$. Aplicant el teorema de Liouville a G o a $1/G$ en cada cas, obtenim que G és constant. Contradicció. □

2.4 El teorema de representació conforme de Riemann

Diem que dos dominis U, V del pla complex estès són *conformement equivalents* si existeix una transformació conforme $f : U \to V$. És clar que es tracta d'una relació força restrictiva, fet pel que es destaca el teorema de representació de Riemann, que afirma que tot domini simplement connex del pla complex que no sigui el propi pla és conformement equivalent al disc unitat. Veurem que tals hipòtesis són, de fet, necessàries, d'on deduirem una versió del teorema d'uniformització per a dominis simplement connexos del pla complex estès.

Teorema 2.41 (Teorema de representació conforme de Riemann). *Sigui $U \subseteq \mathbb{C}$ un domini simplement connex. Si $U \neq \mathbb{C}$, aleshores per tot $z_0 \in U$ existeix una única transformació conforme $f : U \to \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) \in \mathbb{R}$, $f'(z_0) > 0$.*

En la demostració usarem la notació ϕ_a per referir-nos a l'automorfisme conforme de $\mathbb{D}$

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}.$$

Observem que satisfà $\phi_a(a) = 0$, i $\phi_a^{-1} = \phi_a$.

Demostració. Per veure la unicitat, suposem que f i g són transformacions que satisfan la tesi del teorema. Aleshores $h = g \circ f^{-1}$ és automorfisme conforme de $\mathbb{D}$ i satisfà $h(0) = 0$. Pel lema de Schwarz (Teorema 2.14) h és una rotació del disc unitat, $h(z) = \lambda z$ amb $|\lambda| = 1$ i, per la regla de la cadena, $\lambda = h'(0) = g'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = g'(z_0)/f'(z_0) > 0$, de manera que $\lambda = 1$, h és la identitat i $f = g$.

Veurem l'existència a travès del problema d'extrems que descriurem tot seguit. Observem primer que és suficient demostrar que existeix una transformació conforme $f : U \to \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$. En efecte, si f és tal transformació, és $f'(z_0) = re^{i\theta}$ amb $r > 0$, ja que f és univalent en U (Proposició 2.8). Aleshores $g = e^{-i\theta} f$ és univalent en U, $g(U) = \mathbb{D}$, $g(z_0) = 0$ i $g'(z_0) = r > 0$.

Considerem la família $\mathcal{F}$ de funcions $f : U \to \mathbb{D}$ univalents tals que $f(z_0) = 0$. Veurem que tal família és no buida, que existeix una funció $\varphi \in \mathcal{F}$ que maximitza $|\varphi'(z_0)|$ en $\mathcal{F}$, i veurem que tal funció $\varphi : U \to \mathbb{D}$ és exhaustiva, amb el que haurem acabat la demostració.

Veiem primer que $\mathcal{F}$ és no buida. Prenent $a \in \mathbb{C} \setminus U$, $g(z) = z - a$ és univalent i diferent de 0 en tot U, de manera que existeix una determinació $h(z)$ de l'arrel quadrada de g. És immediat que h també és univalent en U i que, si $\omega_0 \in h(U)$, necessàriament $-\omega_0 \notin h(U)$. Prenent $\omega_0 \in h(U)$ i un disc tancat $K = \overline{D(\omega_0, \varepsilon)}$ contingut en $h(U)$, el seu negatiu $-K$ és disjunt a $h(U)$, de manera que per tot $z \in U$ és $|h(z) + \omega_0| > \varepsilon$. La funció $\psi(z) = \varepsilon/(h(z) + \omega_0)$ és univalent en U, i $|\psi(z)| < 1$ per tot $z \in U$. Finalment, si $\psi(z_0) = c$, la composició $\phi_c \circ \psi : U \to \mathbb{D}$ és univalent amb $(\phi_c \circ \psi)(z_0) = 0$. Això és $\phi_c \circ \psi \in \mathcal{F}$.

Considerem ara el problema de maximitzar $|f'(z_0)|$ en $\mathcal{F}$. Definim

$$A = \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} > 0.$$

Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de $\mathcal{F}$ tal que $|f_n'(z_0)| \to A$. Pel teorema de Montel (Teorema 2.35) podem suposar, prenent parcials si cal, que la successió $\{f_n\}_n$ és uniformement convergent sobre compactes de U a una funció φ holomorfa en U (Teorema de Weierstrass 2.17). Clarament $|\varphi(z)| \leq 1$ per tot $z \in U$ i $\varphi(z_0) = 0$. La successió de derivades $\{f_n'\}_n$ convergeix (uniformement sobre compactes de U) a φ', de manera que $|\varphi'(z_0)| = A > 0$ i, en particular, φ és no constant. Aleshores, pel teorema de la funció oberta, φ és oberta i per tant $|\varphi(z)| < 1$ per tot $z \in U$. A més, com les funcions f_n són univalents, pel teorema de Hurwitz (Corol·lari 2.19) φ és univalent. En definitiva, $\varphi \in \mathcal{F}$.

Finalment, veiem que $\varphi(U) = \mathbb{D}$. Ho fem per reducció a l'absurd. Suposem $\varphi(U) \neq \mathbb{D}$, i prenem $a \in \mathbb{D} \setminus \varphi(U)$. Aleshores $\phi_a \circ \varphi : U \to \mathbb{D}$ és univalent i diferent de 0 en tot U, i podem prendre una determinació $h(z)$ de l'arrel quadrada de $\phi_a \circ \varphi$, de manera que $h^2 = \phi_a \circ \varphi$. Clarament h és univalent en U, i $h(U) \subseteq \mathbb{D}$. Si $h(z_0) = b$, aleshores $g = \varphi_b \circ h : U \to \mathbb{D}$ és univalent en U i satisfà $g(z_0) = 0$, de manera que $g \in \mathcal{F}$. Es satisfan les igualtats

$$\varphi = \phi_a \circ h^2 = \phi_a \circ (\phi_b \circ g)^2 = (\phi_a \circ \phi_b^2) \circ g.$$

Definim $F = \phi_a \circ \phi_b^2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa en $\mathbb{D}$, que satisfà $F(0) = F(g(z_0)) = \varphi(z_0) = 0$. Com $\phi_b^2 = \phi_a \circ F$ no és injectiva, F no és un automorfisme conforme de $\mathbb{D}$, i pel lema de Schwarz $|F'(0)| < 1$. Aleshores

$$|\varphi'(z_0)| = |F'(g(z_0))||g'(z_0)| = |F'(0)||g'(z_0)| < |g'(z_0)|,$$

contradient que φ maximitzi $|\varphi'(z_0)|$ en $\mathcal{F}$. $\square$

Observem que totes les hipòtesis en el teorema de Riemann són, de fet, necessàries. El pla complex $\mathbb{C}$ no admet cap transformació conforme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, en virtut del teorema de Liouville. Com $\mathbb{D}$ és simplement connex, i aquesta és una propietat invariant per equivalència topològica, tot domini del pla complex conformement equivalent al disc unitat és simplement connex. En cas que tinguem $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ un domini simplement connex del pla complex estès, hi ha tres possibilitats. En efecte, si $U \neq \widehat{\mathbb{C}}$ podem moure un punt del complementari de U a ∞ mitjançant una transformació de Möbius, reduint al cas d'un domini en el pla complex. Finalment, és clar que $\widehat{\mathbb{C}}$ no és homeomorf a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{D}$, i hem demostrat el següent.

Corol·lari 2.42. *Tot domini $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ simplement connex, o bé és el pla complex estès $\widehat{\mathbb{C}}$, o bé és conformement equivalent al pla complex $\mathbb{C}$, o bé es conformement equivalent al disc unitat $\mathbb{D}$.*

3 Dinàmica holomorfa al voltant d'un punt fix

Considerem un sistema dinàmic discret, és a dir, una aplicació $f : X \to X$ d'un espai en ell mateix. L'estudi de la dinàmica de f consisteix, dit de manera simple, en comprendre l'evolució dels iterats $\{f^n(x)\}_n$ de tot punt $x \in X$. En dinàmica holomorfa l'espai X té estructura complexa i aquesta estructura es preserva per f. En una variable complexa, X és una superfície de Riemann i f una funció holomorfa.

Aquest treball s'aproxima a la dinàmica holomorfa a travès de l'estudi de la dinàmica d'un sistema al voltant d'un punt fix. En aquest capítol descriurem la manera natural d'aproximar el problema, generalment buscant formes més simples d'expressar els sistemes i buscant objectes invariants que ens permetin fer una classificació. Finalment, analitzarem breument els casos més senzills i introduirem el cas el·líptic, que desenvoluparem amb detall els capítols posteriors.

Entre la bibliografia consultada, destaquem els treballs [4], [6], [1] i [5], on podem trobar exposicions alternatives d'aquest tema. Citarem fonts més concretes en diversos dels resultats que comentarem.

3.1 El problema de classificació

Sistemes dinàmics locals, 'germs' i classes de conjugació

Definició 3.1. *Donada una superfície de Riemann S (generalment $\widehat{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{C}$), i un punt $p \in S$, anomenarem* sistema dinàmic local holomorf *en p (o simplement* sistema local*) a una funció holomorfa $f : U \to S$ tal que $f(p) = p$, on $U \subseteq S$ és un entorn obert de p.*

Estem interessats en el comportament de f prop de p, així que substituirem f per la seva restricció en un entorn de p més petit quan sigui necessari. Aquesta idea, es formalitza en termes de 'germs' de funcions holomorfes i 'germs' d'oberts centrats en p. Un *'germ'* o *'jet'* $f : (S, p) \to (S, f(p))$ de funció holomorfa en un punt $p \in S$ és una classe d'equivalència per la relació $\sim$ definida en el conjunt de les funcions holomorfes en un entorn obert (arbitrari) de p, de manera que $f \sim g$ si f i g coincideixen en un entorn de p. Per tant, un 'germ' f en $(\mathbb{C}, p)$ és definit per una sèrie de potències convergent en algun disc centrat en p.

Donat un sistema local $f : U \to S$, hem de definir els seus iterats. Observem que el segon iterat $f^2 = f \circ f$ és només definit en $U \cap f^{-1}(U)$ (en el sentit que volem que les seqüències observades siguin en U), que també és un entorn obert de p. Més generalment, l'iterat k-èsim $f^k = f \circ f^{k-1}$ és definit en $U \cap f^{-1}(U) \cap \cdots \cap f^{-(k-1)}(U)$. Això motiva la següent definició.

Definició 3.2. *El* conjunt estable *de f és el subconjunt de U*

$$K_f \coloneqq \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U).$$

Així, K_f és el conjunt de punts $z \in U$ tals que la seva òrbita es manté en U, mentre que els punts $z \in U \setminus K_f$ escapen. Clarament $p \in K_f$, de manera que $K_f \neq \emptyset$.

Diem que un conjunt $K \subseteq S$ és *completament invariant* per f si $f^{-1}(K) = K$. De fet, això implica que K és invariant per f, és a dir, $f(K) \subseteq K$. Clarament, el conjunt estable K_f és completament invariant per f, de manera que la parella (K_f, f) formen un sistema dinàmic discret. Lligada a la definició de K_f, ve la següent definició.

Definició 3.3. *Diem que p és* estable *pel sistema local $f : U \to S$ en $p \in S$ si p és interior a K_f. En altres paraules, p és estable si existeix un entorn obert $V \subseteq U$ de p on les funcions iterades f^n són definides $\forall n \geq 1$.*

Més endavant veurem que, en contexts més específics, podrem parlar de l'estabilitat de p per un 'germ' de funció holomorfa f en (S, p) fixant p.

Quina és l'estructura dinàmica del sistema (K_f, f), i com és el conjunt K_f són algunes de les preguntes que volem respondre. Per fer-ho, la idea és transformar un sistema f en un de més simple, g, que sigui "dinàmicament equivalent". En el nostre context, aquesta equivalència ve donada per la relació de conjugació formal.

Definició 3.4. *Donades funcions holomorfes $f : U \to S$, $g : V \to M$ definint sistemes dinàmics locals en $p \in S$ i $q \in M$ respectivament, direm que f i g són* conformement *(respectivament,* topològicament*)* localment conjugats *si existeixen entorns oberts $A \subseteq U$ de p, i $B \subseteq V$ de q, i una transformació conforme (respectivament, un homeomorfisme) $\varphi : A \to B$ amb $\varphi(p) = q$ tal que*

$$f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi \quad en \quad \varphi^{-1}(B \cap g^{-1}(B)) = A \cap f^{-1}(A).$$

En termes més generals, dos 'germs' f i g de funció holomorfa en (S, p) i (M, q) fixant p i q respectivament seran *conformement conjugats* si existeix un 'germ' de transformació conforme $\phi : (S, p) \to (M, q)$ tal que, prenent entorns i representants adequats, f i g són conformement localment conjugats per ϕ.

Observació 3.5. En el context de la definició, es compleix

$$f^k = \varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi \quad \text{en} \quad \varphi^{-1}(B \cap \cdots \cap g^{-(k-1)}(B)) = A \cap \cdots \cap f^{-(k-1)}(A)$$

per tot $k \geq 1$, de manera que $K_{g|_B} = \varphi(K_{f|_A})$. Així, la dinàmica local de f en p és, en tots els sentits, equivalent a la dinàmica local de g en q.

Observació 3.6. Prenent coordenades locals centrades en $p \in S$, és immediat que qualsevol sistema local en p és conformement localment conjugat a un sistema local $f : U \to \mathbb{C}$ en $0 \in \mathbb{C}$.

És clar que la relació de conjugació és relació d'equivalència. Per tant, un objectiu natural de la teoria local és classificar les classes de conjugació. Això és, intentar construir una família $\mathcal{F}$ de 'germs' en $(\mathbb{C}, 0)$ fixant l'origen on, donat un 'germ' $f : (S, p) \to (S, p)$ arbitrari, puguem prendre un (possiblement únic) representant de la seva classe de conjugació dins la família $\mathcal{F}$. Tal representant (en cas que en disposem) s'anomena *forma normal* de f. Part de la feina és buscar objectes invariants per la relació de conjugació.

Considerarem també la relació de conjugació formal, que ens permetrà entendre parcialment el problema de linearització en el cas el·líptic, del que parlarem més endavant. Ja hem vist que tot sistema local en $0 \in \mathbb{C}$ ve donat per un element de $\mathbb{C}_0\{z\}$, l'espai de sèries de potències (convergents) en la variable z sense terme constant. Aquest és, de fet, subespai de l'espai $\mathbb{C}_0[[z]]$ de *sèries de potències formals* sense terme constant.

Els elements de $\mathbb{C}_0[[z]]$ són successions $P = \{a_n\}_{n\geq 1}$ d'elements de $\mathbb{C}$, que disposarem segons la notació

$$P = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \tag{3.1}$$

on les sumes i el producte per les potències de z són merament formals i en cap cas ens hem de preocupar de la convergència de la sèrie. Per tal de parlar de conjugació formal hem de considerar la composició formal d'elements $P, Q \in \mathbb{C}_0[[z]]$, que notarem $P \circ Q$. Això és, substituir Q per z en P i reagrupar per obtenir quelcom de la forma de l'expressió (3.1). Aquesta operació podria donar problemes, en un principi, en aparèixer termes de $P \circ Q$ com a sèries infinites, possiblement no convergents; veiem que no és el cas, com es mostra en la següent llista de propietats.

Proposició 3.7. *(a) L'espai $\mathbb{C}_0[[z]]$ és un grup commutatiu amb la suma terme a terme, i és un semigrup amb el producte definit per la fórmula del producte de Cauchy.*

(b) La composició formal d'elements de $\mathbb{C}_0[[z]]$ és una operació interna.

(c) Un element $a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ de $\mathbb{C}_0[[z]]$ té un (únic) element invers en el mateix espai (per la composició formal) si, i només si $a_1 \neq 0$.

(d) El subconjunt $\{a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathbb{C}_0[[z]] : a_1 \neq 0\}$ de $\mathbb{C}_0[[z]]$ forma un grup amb la composició.

Les demostracions d'aquestes propietats són, bàsicament, problemes estàndard de determinació de coeficients. Un desenvolupament detallat del tema es pot trobar a [9].

Definició 3.8. *Diem que dos sistemes locals $f, g \in \mathbb{C}_0\{z\}$ són* formalment conjugats *si existeix una sèrie de potències formal invertible $\phi \in \mathbb{C}_0[[z]]$ tal que $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ en $\mathbb{C}_0[[z]]$.*

Clarament, dos sistemes conformement localment conjugats són formalment conjugats. Veurem, però, que el recíproc és fals en general. Les sèries de potències formals ens proporcionen una eina per demostrar la relació de conjugació conforme: si tenim dos sistemes formalment conjugats per $\phi \in \mathbb{C}_0[[z]]$, és suficient provar la convergència de ϕ com a sèrie de potències.

El multiplicador d'un punt fix

Definició 3.9. *Sigui $f : (S, p) \to (S, p)$ un 'germ' fixant p. Si $g : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ és un 'germ' fixant 0 conformement conjugat a f, definim el* multiplicador *de f en p, com $\lambda := g'(0)$.*

És conseqüència immediata de la regla de la cadena que el multiplicador no depèn de l'elecció de g. En efecte, si φ i ψ són cartes locals centrades en p, definides juntament amb f en un mateix entorn obert U de p, tenim que

$$f_\varphi = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \quad \text{i} \quad f_\psi = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

són funcions holomorfes en $A = \varphi(U \cap f^{-1}(U))$ i en $B = \psi(U \cap f^{-1}(U))$ respectivament, i es satisfà $f_\varphi(0) = f_\psi(0) = 0$. Així $h = \varphi \circ \psi^{-1} : B \to A$ és transformació conforme fixant 0, amb $f_\varphi = h \circ f_\psi \circ h^{-1}$, i per tant

$$f'_\varphi(0) = h'(f_\psi(h^{-1}(0))) \cdot f'_\psi(h^{-1}(0)) \cdot (h^{-1})'(0) = f'_\psi(0).$$

De fet, hem demostrat que el multiplicador d'un punt fix és invariant per conjugació conforme. És senzill veure que també és invariant per conjugació formal. En efecte, si $f_1(z) = \lambda_1 z + a_2 z^2 + \cdots$, $f_2(z) = \lambda_2 z + b_2 z^2 + \cdots$, i $\phi \in \mathbb{C}_0[[z]]$ invertible és una conjugació tal que $f_1 = \phi^{-1} \circ f_2 \circ \phi$ en $\mathbb{C}_0[[z]]$, aleshores $\phi = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ amb $c_1 \neq 0$ i

$$c_1 \lambda_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \cdots = \phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi = \lambda_2 c_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \cdots$$

en $\mathbb{C}_0[[z]]$ per certs $d_2, d_3, ... \in \mathbb{C}$, de manera que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Una primera classificació sorgeix de forma natural segons el valor del multiplicador d'un punt fix. Tenint en compte que és invariant per conjugació conforme, i que tot sistema local és conformement conjugat a una sèrie de potències centrada a l'origen, treballarem a partir d'ara sobre 'germs' en $(\mathbb{C}, 0)$ fixant 0. És a dir, sobre sèries de potències sense terme constant

$$f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \lambda z + \mathcal{O}(z^2),$$

on $\lambda = f'(0)$ és el multiplicador del punt fix 0. Com λz és la millor aproximació lineal de f, és d'esperar que la dinàmica local estigui fortament influenciada pel valor de λ.

Definició 3.10. *Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$ el multiplicador de f en p. Aleshores*

- *si $|\lambda| < 1$, diem que el punt fix p és* atractor*,*
- *si $\lambda = 0$, diem que el punt fix p és* superatractor*,*
- *si $|\lambda| > 1$, diem que el punt fix p és* repulsor*,*
- *si $|\lambda| \neq 0, 1$, diem que el punt fix p és* hiperbòlic*,*
- *si $|\lambda| = 1$ i λ és una arrel de la unitat, $\lambda = e^{2\pi i(p/q)}$ amb $p/q \in \mathbb{Q}$, diem que el punt fix p és* parabòlic *o* indiferent racional*,*
- *si $|\lambda| = 1$ i λ no és una arrel de la unitat, $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ amb $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, diem que el punt fix p és* el·líptic *o* indiferent irracional.

En el que queda de capítol es discuteixen amb més o menys detall tots els casos i es mostra com, tret de en el cas el·líptic, queda resolt el problema de classificació.

3.2 Punts fixos hiperbòlics i superatractors

Per definició, un punt fix p d'una funció contínua f és un *atractor topològic* si existeix un entorn obert U de p on els successius iterats f^n són definits, i tal que la successió $f^n|_U$ convergeix uniformement a la funció constant p. El següent lema dona sentit al fet que els punts fixos amb multiplicador $|\lambda| < 1$ s'anomenin atractors.

Lema 3.11 (Caracterització topològica dels punts fixos atractors). *Sigui $f : U \to S$ un sistema local en $p \in S$. Aleshores p és atractor topològic si, i només si el seu multiplicador satisfà $|\lambda| < 1$.*

Demostració. Podem suposar que $p = 0$ i $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$ en un entorn $U \subseteq \mathbb{C}$ de l'origen. Suposem primer que $|\lambda| < 1$. Podem escollir $0 < \delta < 1$ tal que $|\lambda| < \delta$. Escrivint $f(z) = \lambda z + z^2 r(z)$ per un 'germ' r de funció holomorfa adequat, podem prendre $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\lambda| + M\varepsilon < \delta, \quad \text{on} \quad M = \max\{|r(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon\}.$$

Per tant, si $|z| \leq \varepsilon$, tenim

$$|f(z) - \lambda z| \leq M|z|^2, \quad |f(z)| \leq (|\lambda| + M|z|)|z| \leq \delta|z| \quad \text{i} \quad |f^k(z)| \leq \delta^k |z| < \varepsilon \quad \forall k \geq 1.$$

Per tant $\mathbb{D}_\varepsilon \subseteq f^{-k}(\mathbb{D}_\varepsilon)$ per tot $k \geq 1$, el punt fix 0 és estable amb $\mathbb{D}_\varepsilon \subseteq K_f$ i els iterats f^k convergeixen uniformement a 0 en $\mathbb{D}_\varepsilon$.

Recíprocament, si el punt fix 0 és atractor topològic, prenent $\mathbb{D}_\varepsilon$ amb $\varepsilon > 0$ prou petit, existeix un iterat f^n tal que $f^n(\mathbb{D}_\varepsilon) \subsetneq \mathbb{D}_\varepsilon$. Com a conseqüència del lema de Schwarz (Teorema 2.14), $|\lambda|^n = |(f^n)'(0)| < 1$, de manera que $|\lambda| < 1$. □

Si, en canvi, 0 és un punt fix repulsor d'un sistema local $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$, aleshores és un punt fix atractor per la inversa (local) f^{-1} de f (Observació 2.9), ja que $|(f^{-1})'(0)| = |1/\lambda| < 1$. Amb això, és clar que per $\varepsilon > 0$ prou petit, el conjunt estable de $f|_{\mathbb{D}_\varepsilon}$ es redueix a l'origen: totes les òrbites no trivials escapen.

El cas hiperbòlic

És senzill determinar formes normals de sistemes locals amb punts fixos hiperbòlics, com es mostra en el següent teorema.

Teorema 3.12 (Teorema de Linearització de Kœnigs). *Sigui $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$ un sistema local amb un punt fix hiperbòlic en l'origen, amb multiplicador $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus S^1$. Aleshores f és conformement localment conjugat a la seva part lineal $g(z) = \lambda z$. La conjugació φ és única determinada per la condició $\varphi'(0) = 1$.*

Demostració. Suposem que $0 < |\lambda| < 1$. Escollim $0 < \delta < 1$ de manera que $\delta^2 < |\lambda| < \delta$. Com en la demostració del lema anterior, prenem constants $M > 0$ i $\varepsilon > 0$ tals que $|\lambda| + M\varepsilon < \delta$ i

$$|f(z) - \lambda z| \leq M|z|^2, \quad |f(z)| \leq \delta|z| \quad \text{i} \quad |f^k(z)| \leq \delta^k|z| < \varepsilon \quad \forall k \geq 1, \quad |z| \leq \varepsilon.$$

Definim $\varphi_k(z) := f^k(z)/\lambda^k$ en $\overline{\mathbb{D}}_\varepsilon$ per tot $k \geq 0$. Veiem que la successió de funcions $\{\varphi_k\}_k$ convergeix uniformement a una funció holomorfa $\varphi : \mathbb{D}_\varepsilon \to \mathbb{C}$. En efecte, per tot $k \geq 0$ i $z \in \overline{\mathbb{D}_\varepsilon}$

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z)| &= \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} |f(f^k(z)) - \lambda f^k(z)| \\ &\leq \frac{M}{|\lambda|^{k+1}} |f^k(z)|^2 \leq \frac{M}{|\lambda|} \left(\frac{\delta^2}{|\lambda|}\right)^k |z|^2 \leq \frac{M}{|\lambda|} \left(\frac{\delta^2}{|\lambda|}\right)^k \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pel criteri de Weierstrass, com $\delta^2/|\lambda| < 1$, la sèrie telescòpica $\sum_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ és uniformement convergent en $\mathbb{D}_\varepsilon$ a una funció $\varphi - \varphi_0$, on φ és limit uniforme de la successió $\{\varphi_k\}_k$. Com $\varphi_k'(0) = 1$ per tot $k \geq 0$, i en virtut del teorema de Weierstrass (Teorema 2.17), $\varphi'(0) = 1 \neq 0$, i per tant, prenent ε més petit si cal, podem suposar que φ és una transformació conforme en la seva imatge (Observació 2.9). Finalment, es compleix

$$\varphi(f(z)) = \lim_{k \to \infty} \frac{f^k(f(z))}{\lambda^k} = \lambda \lim_{k \to \infty} \frac{f^{k+1}(z)}{\lambda^{k+1}} = \lambda \varphi(z),$$

de manera que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$, com volíem demostrar.

Sigui ψ una altra transformació conforme local conjugant f amb g tal que $\psi'(0) = 1$. Aleshores, si $(\psi \circ \varphi^{-1})(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ es compleix $a_1 = 1$ i

$$\begin{aligned} \lambda z + a_2 \lambda z^2 + a_3 \lambda z^3 + \cdots &= \lambda(\psi \circ \varphi^{-1})(z) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})(\lambda z) = \lambda z + a_2 \lambda^2 z^2 + a_3 \lambda^3 z^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Igualant terme a terme els coeficients de les sèries de potències, obtenim $a_2 = a_3 = \cdots = 0$, de manera que $\psi \circ \varphi^{-1} \equiv \mathrm{id}$, i $\psi \equiv \varphi$.

Per últim, si $|\lambda| > 1$, aleshores f^{-1} té multiplicador $0 < |1/\lambda| < 1$, de manera que f^{-1} és conjugada a la seva part lineal, $g^{-1}(z) = (1/\lambda)z$, i es dedueix el resultat. $\square$

El cas superatractor

Si 0 és un punt fix superatractor per un 'germ' f en $(\mathbb{C}, 0)$, podem escriure

$$f(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots$$

on $r \geq 2$ i $a_r \neq 0$. Recordem que r és l'*ordre* de 0 com a zero de f, que també anomenarem *grau local* de f en 0. Podem determinar formes normals per a tals 'germs' de forma similar al cas hiperbòlic, com veiem tot seguit.

Teorema 3.13 (Böttcher)**.** *Sigui $f(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots$ un sistema local amb un punt fix superatractor en l'origen, d'ordre $r \geq 2$. Aleshores, f és conformement localment conjugat a la funció $g(z) = z^r$ per una transformació conforme ϕ. Tal transformació és única tret del producte per una arrel $(r-1)$-èsima de la unitat, i satisfà $\phi(0) = 0$. A més, dos sistemes locals amb un punt fix superatractor en l'origen són conformement localment conjugats si, i només si tenen el mateix grau local en l'origen.*

La demostració que segueix és, principalment, una revisió de les proves del mateix teorema en [4] i [1], on hem posat especial èmfasi en completar amb rigor els punts més tècnics.

Demostració. Escollim primer una solució μ de l'equació $\mu^{r-1} = a_r$. Aleshores la funció conjugada $\mu f(z/\mu)$ té z^r com a terme de grau r. Així, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a_r = 1$, i podem escriure $f(z) = z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots = z^r + g(z)$ amb $g(z) \in \mathcal{O}(z^{r+1})$.

De manera heurística, prendrem com a transformació una funció $\phi(z) = \lim_{n\to\infty} (f^n(z))^{1/r^n}$, de manera que

$$\phi(f(z)) = \lim_{n\to\infty} (f^{n+1}(z))^{r/r^{n+1}} = \phi(z)^r.$$

Ara bé, els termes en n de tal límit no són, a priori, ben definits: hem de salvar l'ambigüitat de les arrels. Encara de manera simbòlica, podem escriure

$$(f^n(z))^{1/r^n} = z \cdot \left[\frac{f(z)}{z^r}\right]^{1/r} \cdot \left[\frac{f^2(z)}{f(z)^r}\right]^{1/r^2} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{f^n(z)}{f^{n-1}(z)^r}\right]^{1/r^n}.$$

Així, hem de veure que, en un domini $\mathbb{D}_\varepsilon$ adequat, podem prendre determinacions de les arrels dels termes $f^m(z)/f^{m-1}(z)^r$ de manera que la cancel·lació sigui "correcta".

Sigui $0 < \delta < 1$. Escrivint $g(z) = z^{r+1} g_1(z)$ per un 'germ' g_1 adequat, podem prendre $\varepsilon > 0$ de manera que $M\varepsilon < \delta$, on definim $M = \max\{|g_1(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon\}$. Aleshores

$$|g(z)| \leq |z|^{r+1} M \leq |z|^r \delta \quad \forall z \in \mathbb{D}_\varepsilon.$$

Prenent ε més petit si cal, podem suposar que $f(\mathbb{D}_\varepsilon) \subseteq \mathbb{D}_\varepsilon$ (Lema 3.11). Així, per tot $n \geq 1$, les funcions $f^n(z)/f^{n-1}(z)^r$ són holomorfes en $\mathbb{D}_\varepsilon$ (prenent el límit en $z = 0$) i satisfan

$$\frac{f^n(z)}{f^{n-1}(z)^r} = 1 + \frac{g(f^{n-1}(z))}{f^{n-1}(z)^r}, \qquad \left|\frac{g(f^{n-1}(z))}{f^{n-1}(z)^r}\right| \leq \delta < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}_\varepsilon.$$

Prenem la determinació del logaritme de $1 + \omega$ donada per la sèrie de potències

$$\log(1+\omega) := \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \omega^{k+1} \quad \forall \omega \in \mathbb{D}.$$

Per tot $n \geq 1$, prenem la determinació de l'arrel n-èsima de $1 + \omega$ definida $(1+\omega)^{1/n} := e^{\log(1+\omega)/n}$, amb la respectiva determinació del logaritme $\log(1+\omega)^{1/n} := \log(1+\omega)/n$. Amb tals determinacions, per tot $n, m \geq 1$ definim en $\mathbb{D}_\varepsilon$ les funcions holomorfes

$$h_n(z) := \left[\frac{f^n(z)}{f^{n-1}(z)^r}\right]^{1/r^n}, \quad \phi_0(z) := z, \quad \phi_m(z) := z \prod_{n=1}^{m} h_n(z).$$

Clarament $\phi_{m+1} = \phi_m \cdot h_{m+1}$, i es satisfà $h_{m+1}(0) = 1$, $\phi_m(0) = 0$, i $\phi_0'(0) = 1$, de manera que les derivades compleixen $\phi_{m+1}'(0) = \phi_m'(0)$ i, inductivament, deduïm que $\phi_m'(0) = 1$ per tot $m \geq 0$.

Veiem que la successió $\{\phi_m\}_m$ convergeix uniformement en $\mathbb{D}_\varepsilon$ a una funció holomorfa ϕ. En efecte, observem que per tot $n \geq 1$ i $z \in \mathbb{D}_\varepsilon$

$$|\log h_n(z)| = \frac{1}{r^n}\left|\log\left(1 + \frac{g(f^{n-1}(z))}{f^{n-1}(z)^r}\right)\right| \leq \frac{C}{r^n},$$

on definim $C = \max\{|\log(1+\omega)| : \omega \in \overline{\mathbb{D}}_\delta\}$, de manera que la sèrie $S(z) = \sum_{n\geq 1} \log h_n(z)$ és absolutament i uniformement convergent en $\mathbb{D}_\varepsilon$ en virtut del criteri de Weierstrass. A més, les sumes parcials i el límit $S(z)$ són acotats per la constant $K = \sum_{n\geq 1} C/r^n$. Pel teorema fonamental del càlcul, $|e^z - e^\omega| \leq e^K|z-\omega|$ per tot $z, \omega \in \overline{\mathbb{D}}_K$, d'on obtenim

$$\left|\phi_m(z) - ze^{S(z)}\right| \leq e^K|z|\left|\sum_{n=1}^{m}\log h_n(z) - S(z)\right| \leq \varepsilon e^K\left|\sum_{n>m}\log h_n(z)\right| \quad \forall z \in \mathbb{D}_\varepsilon,$$

i en deduïm la convergència uniforme de $\{\phi_m\}_m$ a una funció ϕ, que a més satisfà $\phi(0) = 0$ i $\phi'(0) = 1$ (Teorema 2.17). Prenent ε més petit si cal, podem suposar que ϕ és una transformació conforme en la seva imatge (Observació 2.9).

Finalment, veiem que ϕ satisfà la tesi del teorema. És clar, de la definició de h_n i les determinacions de l'arrel preses, que $h_{n+1}(z)^r = h_n(f(z))$ per tot $n \geq 1$. Aleshores, per tot $m \geq 1$ i $z \in \mathbb{D}_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\phi_{m+1}(z)^r &= z^r h_1(z)^r \prod_{n=2}^{m+1} h_n(z)^r \\ &= z^r \frac{f(z)}{z^r}\prod_{k=1}^{m} h_{k+1}(z)^r = f(z)\prod_{k=1}^{m} h_k(f(z)) = \phi_m(f(z)).\end{aligned}$$

Prenent límits quan $m \to \infty$, obtenim $g \circ \phi = \phi \circ f$, com volíem veure.

Per demostrar la unicitat, suposem que ψ és una transformació conforme, amb $\psi(0) = 0$, que conjuga f amb z^r. Aleshores

$$\psi \circ \phi^{-1}(z^r) = \psi(f(\phi^{-1}(z))) = \psi \circ \phi^{-1}(z)^r$$

en un entorn de l'origen. Tenim que $\psi'(0) = c \neq 0$ i $(\psi \circ \phi^{-1})'(0) = c$ (Teorema 2.8), i podem escriure $\psi \circ \phi^{-1}(z) = cz + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots$. Veurem que els coeficients c_n són tots 0 per reducció a l'absurd. Suposem que existeix $n \geq 2$ tal que $c_n \neq 0$ i prenem n mínim complint tal propietat. Aleshores $\psi \circ \phi^{-1}(z) = cz + c_nz^n + \cdots$ i deduïm

$$\begin{aligned}cz + c_nz^{nr} + \cdots &= \psi \circ \phi^{-1}(z^r) \\ &= \psi \circ \phi^{-1}(z)^r = c^rz^r + rc^{r-1}c_nz^{r+n-1} + \cdots\end{aligned}$$

Com $n, r \geq 2$, aleshores $rn > r + n - 1$, d'on obtenim que $c_n = 0$, que és una contradicció. Per tant, $\psi \circ \phi^{-1}(z) = cz$, i repetint el darrer argument obtenim que $c^{r-1} = 1$.

Finalment, és clar que z^r i z^s son topològicament localment conjugats si, i només si $s = r$, ja que l'ordre és el nombre de pre-imatges prop de l'origen. $\square$

3.3 Punts fixos parabòlics

Considerem ara 'germs' f en $(\mathbb{C}, 0)$ amb un punt fix parabòlic en l'origen. El problema de classificació de tals 'germs' s'estudia en tres nivells diferents: formal, topològic i conforme. Els dos primers són relativament senzills, mentre que a nivell conforme el problema és especialment complicat. L'exposició amb detall del tema és extensa, i no és l'objectiu d'aquest treball. Així, només esmentarem alguns dels principals resultats. Ens referim a les fonts [1] i [5] per una explicació detallada.

En cas que f no sigui lineal, podem escriure

$$f(z) = e^{2i\pi p/q}z + a_{r+1}z^{r+1} + a_{r+2}z^{r+2} + \cdots$$

amb $a_{r+1} \neq 0$. El nombre racional $p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ és el *nombre de rotació* de f, i el nombre $r+1 \geq 2$ és la *multiplicitat* de f en el punt fix. En cas que $p/q = 0$ (és a dir, el multiplicador de f és $\lambda = 1$), direm que f és *tangent a la identitat*. Una primera observació és que un sistema local com aquest no és mai localment conjugat a la seva part lineal tret que sigui d'ordre finit.

Proposició 3.14. *Sigui f un sistema local en $0 \in \mathbb{C}$ amb multiplicador $\lambda = e^{2i\pi p/q}$ una arrel primitiva q-èsima de la unitat. Aleshores f és conformement localment conjugada a la seva part lineal $g(z) = \lambda z$ si, i només si $f^q \equiv \mathrm{id}$.*

Demostració. Si $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = e^{2\pi i p/q} z$ aleshores $\phi^{-1} \circ f^q \circ \phi = \mathrm{id}$, i per tant $f^q = \mathrm{id}$.
Recíprocament, suposem que $f^q \equiv \mathrm{id}$ i definim

$$\phi(z) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^j(z)}{\lambda^j}.$$

Aleshores, com $(f^j)'(0) = \lambda^j$, tenim $\phi'(0) = 1$ i per tant ϕ admet una inversa holomorfa en un entorn de l'origen. A més $\lambda^q = \lambda^0 = 1$, de manera que, en un domini adequat

$$\phi(f(z)) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \lambda \frac{f^j(f(z))}{\lambda^{j+1}} = \lambda \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{f^k(z)}{\lambda^k} = \lambda \phi(z).$$

És a dir, f és conformement localment conjugada a la seva part lineal. $\square$

En particular, si $f \not\equiv \mathrm{id}$ és tangent a la identitat aleshores no és localment conjugada a la identitat. Veurem tot seguit que, de fet, el conjunt estable K_f de f no conté un entorn de l'origen. Per entendre perquè, considerem primer un sistema de la forma

$$f(z) = z(1 + az^r), \quad a \neq 0.$$

Sigui $\nu \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ de manera que $a\nu^r$ sigui real i positiu. Aleshores, per tot $c > 0$ tenim que

$$f(c\nu) = c(1 + c^r a\nu^r)\nu \in \mathbb{R}^+\nu, \quad \text{i} \quad |f(c\nu)| > |c\nu|.$$

En altres paraules, la semirecta $\mathbb{R}^+\nu$ és invariant per f i és repel·lida per l'origen, de manera que $K_f \cap \mathbb{R}^+\nu = \emptyset$. Si, en canvi, $a\nu^r$ és real i negatiu, aleshores el segment $[0, |a|^{-1/r}]\nu$ és invariant per f i és atret per l'origen. Així, K_f tampoc es redueix a $\{0\}$.

Aquest darrer exemple suggereix les següents definicions.

Definició 3.15. *Suposem que f és tangent a la identitat amb multiplicitat $r+1 \geq 2$, de manera que $f(z) = z + a_{r+1}z^{r+1} + \cdots$. Un vector unitat $\nu \in S^1$ és una* direcció atractora *(resp.* repulsora*) de f en l'origen si $a_{r+1}\nu^r$ és real i positiva (resp. negativa).*

És immediat veure que existeixen r direccions atractores equiespaiades, separades per r direccions repulsores també equiespaiades. A més, és clar que una direcció atractora (repulsora) per f és repulsora (atractora) per f^{-1} (prendrem, si cal, un domini més petit de f). A cada direcció atractora hi associem els següents subconjunts de $K_f \setminus \{0\}$.

Definició 3.16. *Sigui $\nu \in S^1$ una direcció atractora per f. La* conca centrada en ν *és el conjunt de punts $z \in K_f \setminus \{0\}$ tals que $f^k(z) \to 0$ i $f^k(z)/|f^k(z)| \to \nu$ (reduint el domini de f podem suposar que és diferent de* 0 *en $K_f \setminus \{0\}$). Si z pertany a la conca centrada en ν, diem que la seva òrbita* tendeix a 0 tangent a ν.

Definició 3.17. *Un* pètal atractor *centrat en una direcció atractora ν de f és un obert simplement connex $P \subseteq K_f \setminus \{0\}$ tal que un punt $z \in K_f \setminus \{0\}$ pertany a la conca centrada en ν si, i només si la seva òrbita interseca P. En altres paraules, l'òrbita d'un punt tendeix a* 0 *tangent a ν si, i només si és eventualment continguda en P. Un* pètal repulsor *és un pètal atractor per la inversa de f*

Succeeix que les conques centrades en les direccions atractores són exactament les components connexes de $K_f \setminus \{0\}$, com es mostra en el següent teorema. Aquest ens dóna una descripció completa de la dinàmica a l'entorn de l'origen en el cas tangent a la identitat.

Teorema 3.18 (Teorema de la flor de Leau-Fatou). *Sigui $f(z) = z + a_{r+1}z^{r+1} + \cdots$ un sistema local en $0 \in \mathbb{C}$ tangent a la identitat amb multiplicitat $r + 1 \geq 2$ en l'origen. Siguin $\nu_1^+, ..., \nu_r^+ \in S^1$ les r direccions atractores de f en l'origen, i $\nu_1^-, ..., \nu_r^- \in S^1$ les direccions repulsores. Aleshores*

(a) per cada direcció atractora (repulsora) $\nu_j^\pm$ existeix un pètal atractor (repulsor) $P_j^\pm$, de manera que la unió d'aquests $2r$ pètals juntament amb l'origen formen un entorn de l'origen. A més, els $2r$ pètals estan disposats cíclicament de manera que dos pètals es tallen si, i només si l'angle entre les seves direccions centrals és π/r.

(b) $K_f \setminus \{0\}$ és la unió disjunta de les conques centrades en les r direccions atractores.

(c) Si B és una conca centrada en una de les direccions atractores, aleshores existeix $\varphi : B \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi \circ f(z) = \varphi(z) + 1$ per tot $z \in B$. A més, si P és el corresponent pètal construït en (a), aleshores $\varphi|_P$ és una transformació conforme en la seva imatge, que conté un semiplà $\{\mathrm{Re}(z) > c\}$, de manera que $f|_P$ és conformement conjugada a la translació $z \mapsto z + 1$.

En quant al problema de classificació en el cas tangent a la identitat, el problema és resolt completament tant a nivell topològic (Camacho, 1978; Shcherbakov, 1982) com a nivell formal. Es demostra que tot sistema local f tangent a la identitat amb multiplicitat $r + 1$ en l'origen és topològicament localment conjugat a la funció

$$g(z) = z - z^{r+1},$$

mentre que és formalment conjugat a la funció

$$g(z) = z - z^{r+1} + \beta z^{2r+1}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - f(\zeta)},$$

on γ és un petit llaç (orientat positivament) al voltant de l'origen i β és un invariant per conjugació formal, que anomenem *índex* de f. A nivell conforme, Écalle i Voronin (1981) resolen el problema (de manera independent) demostrant que les classes de conjugació conforme són determinades per la multiplicitat de f, el seu índex, i un darrer invariant funcional anomenat *invariant sectorial*, prou complex de descriure com perquè només l'esmentem. Ens referim al treball [1] per als detalls d'aquest resultat, així com una prova del mateix.

Acabem comentant alguns resultats sobre 'germs' parabòlics no tangents a la identitat. Si f és tal sistema local, amb $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, aleshores clarament f^q és tangent a la identitat. D'aquesta manera podem aplicar els anteriors resultats a f^q i extreure'n informació de la dinàmica de f. El següent lema, de demostració immediata, és un nexe d'unió entre les dinàmiques de f i f^q.

Lema 3.19. *Siguin f i g dos sistemes locals en $0 \in \mathbb{C}$ amb el mateix multiplicador $\lambda = e^{2\pi ip/q} \in S^1$. Aleshores f i g són conformement localment conjugats si, i només si f^q i g^q ho són.*

Demostració. Un sentit és obvi. Per l'altre, suposem que φ és un 'germ' conjugant f^q i g^q. Aleshores $g^q = (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^q$. Per tant, podem suposar que $f^q = g^q$. Ara, només cal considerar

$$\psi = \sum_{k=0}^{q-1} g^{q-k} \circ f^k = \sum_{k=1}^{q} g^{q-k} \circ f^k.$$

El 'germ' ψ és una transformació conforme en un entorn de l'origen, ja que $\psi'(0) = q \neq 0$, i és senzill comprovar que $\psi \circ f = g \circ \psi$. □

Els resultats en el cas tangent a la identitat esmentats anteriorment s'estenen als següents. En tots els teoremes suposarem que f és un sistema local en $0 \in \mathbb{C}$ amb multiplicador $\lambda = e^{2\pi ip/q}$ una arrel q-èsima primitiva de la unitat. Suposarem també que $f^q \not\equiv \mathrm{id}$.

Teorema 3.20. *Existeixen $n \geq 1$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ tals que f és formalment conjugat a*

$$g(z) = \lambda z - z^{nq+1} + \alpha z^{2nq+1}.$$

El nombre n és invariant formal, i s'anomena *multiplicitat parabòlica de f*.

Teorema 3.21 (Camacho). *Si $n \geq 1$ és la multiplicitat parabòlica de f, aleshores f és topològicament conjugat a*

$$g(z) = \lambda z - z^{nq+1}.$$

Teorema 3.22 (Leau-Fatou). *Si $n \geq 1$ és la multiplicitat parabòlica de f, aleshores f^q té multiplicitat $nq+1$, i f actua sobre els pètals atractors (respectivament repulsors) de f^q com una permutació que és composició de n cicles disjunts. Finalment, $K_f = K_{f^q}$.*

Finalment, cal esmentar que el problema de classificació en aquest mateix context és completament resolt a nivell conforme. Tal resultat és també un anàleg del comentat en el cas tangent a la identitat, degut a Écalle i Voronin.

3.4 Punts fixos el·líptics

Finalment, parlem de 'germs' f holomorfs de la forma

$$f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + a_2z^2 + \cdots = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \tag{3.2}$$

En aquesta secció introduirem certa terminologia pròpia d'aquest escenari, així com algunes propietats i resultats bàsics, que utilitzarem al llarg dels propers capítols, i que també ens serviran com a introducció al problema de Siegel.

Definició 3.23. *Un sistema local f de la forma (3.2) és* (conformement) linearitzable *si és conformement localment conjugat a la seva part lineal, és a dir, a la rotació $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$. En tal cas, direm que* 0 *és un* punt de Siegel *per f. En cas contrari, direm que és un* punt de Cremer.

Definició 3.24. *Definim $\mathcal{L}$ com el conjunt de nombres $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pels que tot 'germ' de la forma $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ és linearitzable.*

Així doncs, el *problema de linearització de Siegel* consisteix en descriure totalment el conjunt $\mathcal{L}$.

Estabilitat i discs de Siegel

En aquest escenari, la noció d'estabilitat té un paper clau. La següent caracterització ens mostra una via per determinar si un sistema local és o no és linearitzable.

Proposició 3.25 (Caracterització dels sistemes locals linearitzables). *Sigui $f : \mathbb{D}_\varepsilon \to \mathbb{C}$ un sistema local en l'origen amb multiplicador $\lambda = f'(0)$ complint $|\lambda| = 1$. Aleshores, f és linearitzable si, i només si* 0 *és estable per f.*

Demostració. Suposem que f és linearitzable. Existeix un entorn obert de l'origen $U \subseteq \mathbb{D}_\varepsilon$ i una transformació conforme ϕ de U en la seva imatge fixant l'origen, de manera que $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ en $U \cap f^{-1}(U)$, on $g(z) = \lambda z$. Prenem $\mathbb{D}_\delta \subseteq \phi(U \cap f^{-1}(U))$, i definim $W := \phi^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$, que és un entorn obert i simplement connex de l'origen. Aleshores, $\phi|_W : W \to \mathbb{D}_\delta$ és una transformació conforme i $g|_{\mathbb{D}_\delta}$ un automorfisme conforme, ja que $|\lambda| = 1$, de manera que $f|_W$ també és un automorfisme conforme. En particular $W \subseteq f^{-k}(W) \subseteq f^{-k}(\mathbb{D}_\varepsilon)$ per tot $k \geq 0$.

Per veure el recíproc, suposem que existeix un entorn obert de l'origen $U \subseteq K_f$. Considerem la successió de funcions $\phi_n : U \to \mathbb{D}_\varepsilon$ definides per tot $n \geq 1$ com

$$\phi_n(z) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(z)}{\lambda^k}.$$

Com $|\lambda| = 1$, és immediat comprovar que $|\phi_n(z)| < \varepsilon$. Com $(f^k)'(0) = \lambda^k$, obtenim que $\phi_n'(0) = 1$. A més, per tot $z \in U$

$$\phi_n(f(z)) = \lambda\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k+1}(z)}{\lambda^{k+1}} = \lambda\phi_n(z) + \frac{\lambda}{n}\left[\frac{f^n(z)}{\lambda^n} - z\right]. \tag{3.3}$$

Les funcions ϕ_n són uniformement acotades per ε en U. Pel teorema de Montel (Teorema 2.35), formen una família normal en U. Substituint la successió $\{\phi_n\}_n$ per una parcial si fos necessari, podem suposar que convergeix uniformement sobre compactes a una funció holomorfa ϕ en U amb $\phi(0) = 0$ i $\phi'(0) = 1$ (Teorema 2.17), de manera que admet una inversa local. Ara, per tot $z \in U$

$$\left|\frac{f^n(z)}{\lambda^n} - z\right| \leq 2\varepsilon, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n}\left[\frac{f^n(z)}{\lambda^n} - z\right] = 0.$$

Prenent límits en (3.3), obtenim $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$ per tot $z \in U$. □

Aquesta caracterització ens permet introduir el següent element.

Definició 3.26. *Sigui $f : U \to \mathbb{C}$ un sistema local en $0 \in U$, on l'origen és un punt de Siegel. Anomenarem* domini de linearització de f en 0 *a tot entorn de l'origen V simplement connex que satisfaci $f(V) = V$, i tal que $f : V \to V$ sigui conjugada a la seva part lineal.*

En efecte, l'existència d'un domini de linearització per a f és desprèn de la primera part de la demostració de la proposició 3.25. Notem que la unió de dos dominis de linearització és, de nou, un domini de linearització de f. Així, té sentit la següent definició.

Definició 3.27. *Sigui $f : U \to \mathbb{C}$ un sistema local en $0 \in U$, on 0 és un punt de Siegel. Definirem el* disc de Siegel de f en 0 *com el domini de linearització maximal de f, que notarem Δ_f.*

Cal remarcar que, tal i com passa amb el conjunt estable d'un sistema local f (Definició 3.2), la definició del disc de Siegel Δ_f de f depèn clarament del domini que estiguem considerant.

Dit això, en el context de la proposició 3.25, observem que el disc de Siegel d'una funció linearitzable f definida en un disc admet la següent caracterització en termes del conjunt estable K_f de f.

Proposició 3.28 (Caracterització del disc de Siegel)**.** *Sigui $f : \mathbb{D}_\varepsilon \to \mathbb{C}$ un sistema local, amb un disc de Siegel Δ_f en l'origen. Aleshores, $\Delta_f = U_f$, on U_f és la component connexa de l'interior del conjunt estable K_f que conté l'origen.*

Demostració. Per una banda, és clar que $\Delta_f \subseteq U_f$, ja que Δ_f és un entorn connex de l'origen invariant per f. Per veure la inclusió contrària, demostrarem que U_f és un domini de linearització. És clar que $f(K_f) \subseteq K_f$ i, pel teorema de l'aplicació oberta, $f(\mathring{K}_f) \subseteq \mathring{K}_f$. Ara, com U_f és connex i $0 = f(0) \in U_f$, aleshores $f(U_f) \subseteq U_f$. Veiem ara que U_f és simplement connex. Sigui γ una corba de Jordan tal que $\gamma \subseteq \mathring{K}_f \subseteq \mathbb{D}_\varepsilon$, i sigui V_γ la component connexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, relativament compacta en $\mathbb{D}_\varepsilon$. Demostrem per inducció en n que, per tot $z \in V_\gamma$, l'iterat $f^n(z)$ és ben definit i $f^n(z) \in \mathbb{D}_\varepsilon$ per tot $n \geq 0$. El cas $n = 0$ és trivialment cert, mentre que, si $f^{n-1}(V_\gamma) \subseteq \mathbb{D}_\varepsilon$ per cert $n \geq 1$, aleshores $f^n : \overline{V}_\gamma \to \mathbb{C}$ és ben definida. Pel principi del mòdul màxim, tal restricció assoleix el màxim mòdul en γ, però $|f^n(z)| < \varepsilon$ per tot $z \in \gamma$, de manera que $f^n(V_\gamma) \subseteq \mathbb{D}_\varepsilon$. Així doncs, $V_\gamma \subseteq \mathring{K}_f$. Per l'arbitrarietat de la corba γ, hem demostrat que les components connexes de l'interior del conjunt K_f són, de fet, simplement connexes. En particular, U_f és un entorn simplement connex de l'origen. Per veure que $f : U_f \to U_f$ és conjugada a la seva part lineal, prenem una aplicació de Riemann $\phi : U_f \to \mathbb{D}$ tal que $\phi(0) = 0$ (Teorema 2.41). La conjugació $g \coloneqq \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa en $\phi(U_f \cap f^{-1}(U_f)) = \phi(U_f) = \mathbb{D}$, i pren valors en $\mathbb{D}$. A més, $g(0) = 0$ i té multiplicador $\lambda = g'(0) = f'(0)$, de manera que $|g'(0)| = 1$. Pel lema d'Schwarz, és $g(z) = \lambda z$ per tot $z \in \mathbb{D}$ (Teorema 2.14). □

Una breu descripció de la dinàmica local en el cas linearitzable

En cas que f sigui linearitzable, el següent teorema de Jacobi ens dóna certa informació sobre la dinàmica de f al voltant de l'origen. En particular, aquesta propietat ens indicarà que la presència d'òrbites periòdiques arbitràriament a prop del punt fix, és una obstrucció al fet que f sigui linearitzable.

Teorema 3.29 (Jacobi)**.** *Sigui $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i denotem $R_\alpha : S^1 \subseteq \mathbb{C} \to S^1$ la rotació d'angle $2\pi\alpha$, definida $R(z) = e^{2\pi i\alpha}z$. Per tot $z \in S^1$, l'òrbita $\{R^n(z)\}_{n\geq 0}$ és infinita i densa en S^1.*

Demostració. Fixem $z \in S^1$ i $\varepsilon > 0$. Que l'òrbita de z no és finita és evident. Com S^1 és compacte, existeixen $0 \leq l < k$ enters tals que $|R^k(z) - R^l(z)| < \varepsilon$. Com R és invertible i és clarament una isometria, tenim que $|R^m(z)-z|<\varepsilon$, on $m=k-l$ i, per tant, $|R^{nm}(z)-R^{(n-1)m}(z)|<\varepsilon$ per tot $n\geq 1$. En definitiva, per tot $x\in S^1$

$$B(x,\varepsilon)\cap\{R^n(z)\}_n\supseteq B(x,\varepsilon)\cap\{R^{mn}(z)\}_n\neq\emptyset.$$

Com l'elecció de ε i x és arbitrària, obtenim que l'òrbita de z per R és densa en S^1. □

Corol·lari 3.30. *Sigui $T(z)=e^{2\pi i\alpha}z$ la rotació d'angle $2\pi\alpha$ en el pla complex $\mathbb{C}$, amb $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Per tot $z\in\mathbb{C}$, si $|z|=c$ la seva òrbita és densa en el conjunt invariant $\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega|=c\}$. Si f és linearitzable, en un entorn de l'origen les òrbites per f són denses en corbes simples tancades al voltant de l'origen.*

Així, en cas que f sigui linearitzable, la dinàmica local és clara i prou simple. En cas contrari, si 0 és un punt de Cremer de f, les dinàmiques locals de f són complicades i encara avui dia no són descrites de forma completa.

Linearització formal i el problema de petits divisors

A continuació observem que, a nivell formal, una linearització sempre és possible. Sense masses detalls, mostrarem la forma dels coeficients de la sèrie de conjugació formal per poder analitzar-la, i obtenir una primera idea del paper que el paràmetre α jugarà en el problema de linearització.

Proposició 3.31. *Sigui $f(z)=\lambda z+a_2z^2+\cdots$ un 'germ' de funció holomorfa en $(\mathbb{C},0)$ on $\lambda\neq 0$ no és una arrel de la unitat. Aleshores f és formalment conjugada a la seva part lineal per una única sèrie de potències formal tangent a la identitat.*

Demostració. Veurem que podem determinar de forma única els coeficients d'una sèrie formal

$$h=z+h_2z^2+\cdots\in\mathbb{C}_0[[z]]$$

de manera que, formalment, es compleixi $h(\lambda z)=f(h(z))$. A partir de la fórmula del binomi de Newton, és senzill obtenir que

$$\begin{aligned} h(\lambda z)-f(h(z)) &= \sum_{j\geq 2}\left\{[(\lambda^j-\lambda)h_j-a_j]z^j-a_j\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}z^{l+j}\left[\sum_{k\geq 2}h_kz^{k-2}\right]^l\right\}\\ &= \sum_{j\geq 2}\left[(\lambda^j-\lambda)h_j-a_j-P_j(h_2,\dots,h_{j-1})\right]z^j, \end{aligned}$$

on P_j és un polinomi en $j-2$ variables amb coeficients que depenen de $a_2,\dots,a_{j-1}$. Deduïm per inducció que els coeficients de h són únicament determinats a partir de la fórmula

$$h_j=\frac{a_j+P_j(h_2,\dots,h_{j-1})}{\lambda^j-\lambda},$$

ja que $\lambda^j-\lambda\neq 0$ per tot $j\geq 2$. En particular, h_j només depèn de $\lambda,a_2,\dots,a_j$. □

Una possible aproximació per demostrar que f és conformement linearitzable és demostrar que la sèrie de conjugació formal és convergent. Aquesta és la forma en que Siegel i Brjuno van atacar el problema (hom pot trobar el seu treball en els documents originals en [12] i [13]), tot i que aquest també admet un punt de vista més geomètric, que serà el que desenvoluparem en aquest treball.

Per calcular els coeficients h_j de la sèrie formal hem dividit per $\lambda^j-\lambda$, de manera que obtindrem coeficient grans en la sèrie formal quan λ^{j-1} sigui proper a 1. Així, la convergència de la sèrie va lligada al creixement de $\lambda^j-\lambda$, que no convergirà si aquests termes es fan petits massa de pressa. En el context en que ens trobem, aquest és conegut com el *problema de petits divisors.*
Aquí comencem a intuir que la naturalesa aritmètica de α tindrà un paper principal. Més concretament, veurem que la pertinença de α al conjunt $\mathcal{L}$ depèn de forma molt delicada de cóm de bé la successió $\{p_n/q_n\}_n$ d'aproximants de α, donada per l'expansió de α en fraccions continuades, aproxima α. Desenvoluparem aquests darrers conceptes el proper capítol.

4 Nombres de Brjuno i existència de punts de Cremer i discs de Siegel

Aquest capítol té dos objectius. El primer, mostrar la no trivialitat del conjunt $\mathcal{L}$, definit en el capítol anterior (Definició 3.24). En un sentit, demostrant de forma abstracta l'existència d'un conjunt de nombres irracionals α pels que el polinomi quadràtic $P_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z + z^2$ és no linearitzable. En l'altre sentit, demostrant que el conjunt dels nombres de Brjuno té mesura total, de manera que la hipòtesi del teorema de Siegel-Brjuno és viable. En conseqüència, el segon objectiu del capítol és descriure aquesta família de nombres irracionals, també com a preparació per l'estudi del teorema de Siegel-Brjuno, el proper capítol. Les fonts utilitzades en l'elaboració del capítol són les obres [5] i [1].

4.1 Una família de funcions no linearitzables

Començarem mostrant que existeixen punts de Cremer. Ho farem donant una condició suficient per l'existència de 'germs' no linearitzables, i comprovant que tal condició és viable.

Definició 4.1. *Diem que un conjunt en un espai mètric (X, d) és G_δ* dens *si és intersecció numerable de conjunts oberts densos.*

Com a conseqüència del teorema de Baire, i sota certes hipòtesis sobre l'espai X, veurem que un conjunt G_δ dens és dens i no numerable. Aquesta propietat serà clau en la demostració de l'existència de punts de Cremer.

Teorema 4.2 (Teorema de Baire)**.** *Sigui (X, d) un espai mètric complet. La unió numerable de conjunts $\{F_n\}_{n\geq 1}$ tancats i amb interior buit, $F = \cup_{n\geq 1} F_n$ té interior buit.*

Demostració. Veurem que $X \setminus \mathring{F} = \overline{X \setminus F} = X$. Prenem $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ arbitraris i construïm per inducció successions $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{r_n\}_{n\geq 0}$ tals que

$$x_n \in X \setminus F_n, \quad d(x_{n-1}, x_n) < \frac{r_{n-1}}{2}, \quad 0 < r_n < \min\left\{\frac{r_{n-1}}{2}, d(x_n, F_n)\right\}.$$

Per a cada $n \geq 1$ usem el fet que $\overline{X \setminus F_n} = X$ i que $d(x_n, F_n) > 0$, ja que F_n és tancat. Aleshores, si $n < m$, tenim

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} \frac{r_0}{2^{k+1}},$$

d'on deduïm que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ és de Cauchy, i per tant convergeix a un cert $x \in X$. Per continuïtat,

$$d(x_n, x) < \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{r_n}{2^{k-n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^k} = r_n < d(x_n, F_n),$$

de manera que $x \notin F_n$ per tot $n \geq 0$. Així, $x \in X \setminus F$ i també $d(x_0, x) < r_0$, com volíem veure. $\square$

Corol·lari 4.3. *En un espai mètric complet (X, d) sense punts aïllats, un conjunt G_δ dens és, en efecte, dens i no numerable.*

Demostració. Sigui $O = \cap_{n\geq 0} O_n$, on els conjunts $\{O_n\}_{n\geq 0}$ són oberts densos en X. Els conjunts $F_n = X \setminus O_n$ són tancats amb interior no buit. Pel teorema de Baire, $F = \cup_{n\geq 0} F_n$ satisfà $\mathring{F} = \emptyset$, i per tant $\overline{O} = X \setminus \mathring{F} = X$. O és dens en X.

Veiem que O és no numerable per reducció a l'absurd. Suposem, doncs, que O és numerable. Podem construir una successió creixent de subconjunts finits $A_n \subseteq O$ de manera que $O = \cup_{n\geq 0} A_n$. Aleshores, els conjunts $\{O_n \setminus A_n\}_{n\geq 0}$ són oberts densos, ja que X no té punts aïllats, de manera que

$$\bigcap_{n\geq 0} (O_n \setminus A_n) = O \setminus \bigcup_{n\geq 0} A_n = \emptyset$$

és un conjunt dens, que és una contradicció. $\square$

Teorema 4.4 (Existència de punts de Cremer)**.** *Sigui* $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ *amb* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(a) El conjunt de nombres $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *pels que es satisfà*

$$\liminf_{n\to+\infty} |\lambda^n - 1|^{1/(2^n-1)} = 0 \tag{4.1}$$

és no buit. Concretament, el conjunt de paràmetres $\alpha \in \mathbb{R}$ *que satisfan tal condició conté un conjunt* G_δ *dens en* $\mathbb{R}$*, i per tant és no numerable.*

(b) Si el paràmetre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *satisfà la condició (4.1), el polinomi quadràtic* $f(z) = \lambda z + z^2$ *és no linearitzable en l'origen.*

Demostració. Considerem els punts periòdics de f de període $m \geq 2$, que són les solucions de l'equació

$$f^m(z) = z^{2^m} + \cdots + \lambda^m z = z.$$

Si descartem la solució trivial $z = 0$, ens queda l'equació

$$z^{2^m-1} + \cdots + (\lambda^m - 1) = 0.$$

El producte de les arrels d'un polinomi mònic és el seu terme constant, de manera que, existeix algun punt periòdic ζ_m tal que

$$|\zeta_m| \leq |\lambda^m - 1|^{1/(2^m-1)}.$$

Construïm així una successió $\{\zeta_m\}_{m\geq 2}$ de punts m-periòdics de f complint aquesta darrera propietat. Suposem que es satisfà la condició (4.1), de manera que podem prendre una parcial $\{\zeta_{n_j}\}_j$ que tendeix a 0. Aquest és un fet incompatible amb que P_α sigui linearitzable ja que, en tal cas, en un entorn de l'origen les òrbites per f no poden ser finites (Corol·lari 3.30).

Resta veure que el conjunt de paràmetres $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ satisfent (4.1) és no buit. Per tot $k \geq 1$, definim

$$O_k \coloneqq \bigcup_{n\geq 1} \left\{\alpha \in \mathbb{R} : |e^{2\pi i n\alpha} - 1|^{1/(2^n-1)} < 1/k\right\},$$

de manera que els conjunts O_k són oberts. A més, clarament $\mathbb{Q} \subseteq O_k$ per tot $k \geq 1$, de manera que O_k és dens en $\mathbb{R}$. Així, $O \coloneqq \cap_{k\geq 1} O_k$ és G_δ dens, i per tant és dens i no numerable, de manera que $O \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Finalment, és clar que els paràmetres $\alpha \in O$ satisfan la condició (4.1). ☐

En altres termes, $\mathcal{L} \subsetneq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Per altra banda, deduirem del teorema de Siegel-Brjuno que $\mathcal{L} \neq \emptyset$, demostrant que el conjunt dels nombres de Brjuno té mesura total en $\mathbb{R}$.

4.2 Aproximants

Per introduir i entendre rigorosament la hipòtesi del teorema de Brjuno, hem de parlar prèviament de com aproximar un nombre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a través de la seva successió d'aproximants. Aquesta successió de nombres racionals es defineix a partir de l'expansió de α en fraccions continuades.

Fraccions continuades

Donats enters $a_0, \ldots, a_k$ es defineix la *fracció continuada* $[a_0, \ldots, a_k]$ com el nombre racional

$$[a_0, \ldots, a_k] \coloneqq a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Donat un nombre real $a \in \mathbb{R}$, considerarem l'aplicació lineal

$$L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad L_a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Tal aplicació lineal es projecta a una transformació de Möbius $M_a : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$ a través del pas a coordenades projectives $(x_1, x_2) \mapsto x = x_1/x_2$. Es satisfà $M_a(x) = a + 1/x$, on $1/x = 0$ si $x = \infty$, de manera que

$$[a_0, \dots, a_k] = M_{a_0} \circ \dots \circ M_{a_k}(\infty).$$

Definició 4.5. *Sigui $\{a_k\}_{k\geq 0}$ una successió de nombres enters. Hi assignarem les successions de nombres enters $\{q_k\}_{k\geq -1}$, i $\{p_k\}_{k\geq -1}$, definides per*

$$p_{-1} := 1, \quad q_{-1} := 0, \quad \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} := L_{a_0} \circ \dots \circ L_{a_k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k \geq 0,$$

de manera que $p_k/q_k = M_{a_0} \circ \dots \circ M_{a_k}(\infty) = [a_0, \dots, a_k]$.

Tot seguit llistarem algunes propietats bàsiques d'aquestes successions. Observem primer que es satisfan les igualtats

$$L_{a_0} \circ \dots \circ L_{a_k} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = L_{a_0} \circ \dots \circ L_{a_{k-1}} \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = L_{a_0} \circ \dots \circ L_{a_{k-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{k-1} \\ q_{k-1} \end{bmatrix},$$

Per tant, l'aplicació lineal $L_{a_0} \circ \dots \circ L_{a_k}$ té per matriu

$$\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de la darrera igualtat, deduïm les fórmules de recurrència

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_k = a_k\, p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1, \quad\;\; q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Descomposant la matriu de $L_{a_0} \circ \dots \circ L_{a_k}$ en el producte de les matrius de $L_{a_0}, \dots, L_{a_k}$ i prenent determinants, obtenim

$$p_{k-1}\, q_k - q_{k-1}\, p_k = (-1)^k. \tag{4.3}$$

En particular, p_k i q_k són relativament primers. Una darrera propietat important té a veure amb la *successió de Fibonacci* $\{F_k\}_{k\geq 0}$, definida

$$F_{-1} := 0, \quad F_0 := 1, \quad F_k := F_{k-1} + F_{k-2} \quad \forall k \geq 1.$$

És un exercici estàndard mostrar que

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{k+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\, \varphi^k < F_k < \frac{1}{\sqrt{5}}\, \varphi^{k+2} \quad \forall k \geq 0, \tag{4.4}$$

on $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$, de manera que la successió $\{F_k\}_{k\geq 0}$ creix de forma exponencial.

Proposició 4.6. *Sigui a_0 un enter arbitrari, i $\{a_k\}_{k\geq 1}$ una successió d'enters estrictament positius. Per tot $k \geq 0$, es compleix $q_k \geq F_k$. En particular, $\{q_k\}_k$ creix de forma exponencial.*

Demostració. La desigualtat és clara per a $k = 0, 1$. Per inducció, i a partir de la fórmula (4.2), obtenim que $q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$ per tot $k \geq 2$. □

La successió d'aproximants d'un nombre irracional

Definició 4.7. *Per tot $\alpha \in \mathbb{R}$, notarem*

- $\lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$ *la* part entera *de α. És a dir, el màxim enter $n \leq \alpha$.*

- $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ *la* part fraccionària *de α.*

Les successions de la següent definició apareixeran de forma recurrent en la resta de treball. Sovint hi farem referència, utilitzant la mateixa notació que ara introduirem, sense precisar de quina successió es tracta, entenent que queda clar per context.

Definició 4.8. *Donat $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, definirem les successions $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ com*

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor, \quad \alpha_0 = \{\alpha\}, \quad a_{k+1} = \left\lfloor \frac{1}{\alpha_k} \right\rfloor, \quad \alpha_{k+1} = \left\{ \frac{1}{\alpha_k} \right\} \quad \forall k \geq 0,$$

de manera que $1/\alpha_k = a_{k+1} + \alpha_{k+1}$. Definirem també una successió $\{\beta_k\}_{k\geq -1}$ prenent

$$\beta_{-1} = 1, \quad \beta_k = \beta_{k-1}\, \alpha_k \quad \forall k \geq 0.$$

Finalment, definirem la successió d'aproximants *de α com la successió de nombres racionals $\{p_k/q_k\}_{k\geq 0}$, on les successions $\{q_k\}_{k\geq -1}$, $\{p_k\}_{k\geq -1}$ es construeixen a partir de $\{a_k\}_{k\geq 0}$ com en la definició 4.5.*

És immediat veure que els enters a_n són estrictament positius per tot $n \geq 1$, i que els nombres α_n són irracionals i satisfan $0 < \alpha_n < 1$ per tot $n \geq 0$, de manera que $0 < \beta_{k+1} < \beta_k < 1$ per tot $k \geq 0$. A partir d'aquestes observacions i de les fórmules de recurrència (4.2), deduïm que els enters q_n són també estrictament positius, i el signe dels nombres p_n és el de α si $n \geq 1$. A més, la successió $\{q_k\}_{k\geq -1}$ és creixent.

Veiem ara que el nombre β_n mesura, en certa manera, com de bé α s'aproxima per p_n/q_n.

Proposició 4.9. *Per tot $k \geq -1$, tenim les fórmules*

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k-1}\, \alpha_k}{q_k + q_{k-1}\, \alpha_k} \quad \forall k \geq 0, \quad q_k\, \alpha - p_k = (-1)^k\, \beta_k, \quad q_{k+1}\, \beta_k + q_k\, \beta_{k+1} = 1.$$

Demostració. Per definició de $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, i de $\{a_n\}_{n\geq 0}$, tenim

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k + \alpha_k}}} = M_{a_0} \circ \ldots \circ M_{a_k}(1/\alpha_k),$$

de manera que $\alpha = x_1/x_2$ amb

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_k \end{bmatrix},$$

d'on deduïm la primera fórmula. Per a la segona, deduïm de la primera que

$$\alpha\, q_k - p_k = -\alpha_k\, (q_{k-1}\, \alpha - p_{k-1}) = \ldots = (-1)^{k+1}\, \alpha_0 \cdot \ldots \cdot \alpha_k (q_{-1}\, \alpha - p_{-1}) = (-1)^k\, \beta_k.$$

Per veure la darrera, deduïm de la segona fórmula les següent igualtats.

$$\begin{aligned} q_{k+1}\, (q_k\, \alpha - p_k) &= (-1)^k\, q_{k+1}\, \beta_k, \\ -q_k\, (q_{k+1}\, \alpha - p_{k+1}) &= (-1)^k\, q_k\, \beta_{k+1}. \end{aligned}$$

Sumant-les, i aplicant la igualtat (4.3), obtenim $(-1)^k = (-1)^k\, (q_{k+1}\, \beta_k + q_k\, \beta_{k+1})$. □

Corol·lari 4.10. *Per tot $k \geq 0$, tenim*

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < \beta_k = \frac{1}{q_{k+1} + \alpha_{k+1}\, q_k} < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

En particular, es satisfà $1/2 < \beta_k\, q_{k+1} < 1$.

Proposició 4.11. *Per tot $k \geq 0$, $\alpha_k\, \alpha_{k+1} < 1/2$.*

Demostració. Si $\alpha_k < 1/2$ és obvi, ja que $\alpha_{k+1} < 1$. Si $\alpha_k > 1/2$, aleshores es satisfà $2 > 1/\alpha_k > 1$, i $a_{k+1} = \lfloor 1/\alpha_k \rfloor = 1$, de manera que $\alpha_{k+1} = 1/\alpha_k - 1$, i tindrem $\alpha_k\, \alpha_{k+1} = 1 - \alpha_k < 1/2$. □

4.3 Condicions diofantines i nombres de Brjuno

L'objectiu d'aquest apartat no és fer una descripció detallada de les diferents famílies de nombres irracionals, sinó descriure la família dels nombres de Brjuno. Introduirem els nombres diofantins amb l'únic objectiu de demostrar que el conjunt de nombres de Brjuno té mesura total. Per gaudir d'una exposició completa del tema, el lector pot consultar les fonts comentades a l'inici del capítol.

Definició 4.12. *Considerem les següents famílies de nombres irracionals.*

- Dioph_k, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{R}$, *és el conjunt de* nombres diofantins d'exponenet k. *Aquests són els nombres irracionals pels que existeix una constant* $C > 0$ *de manera que, per tot* $p \in \mathbb{Z}$ *i per tot* $q \in \mathbb{N}^*$, *es compleixi*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^k}.$$
- $\mathrm{Dioph} = \cup_{k\geq 2} \mathrm{Dioph}_k$ *és el conjunt dels* nombres diofantins.
- $\mathcal{B}$ *és el conjunt dels* nombres de Brjuno. *Aquests són els nombres* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *que satisfan la* condició de Brjuno
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty.$$

El conjunt dels nombres de Brjuno és de mesura total

Proposició 4.13. *Tot nombre diofantí satisfà la condició de Brjuno. És a dir,* $\mathrm{Dioph} \subseteq \mathcal{B}$.

Demostració. Suposem que $\alpha \in \mathrm{Dioph}_d$ per cert $d \geq 2$ real. Aleshores, existeix una constant $C > 0$ tal que, per tot $n \geq 0$ es satisfà
$$\frac{C}{q_n^d} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{\beta_n}{q_n} < \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$
on $\{p_k/q_k\}_{k\geq 0}$ és la successió d'aproximants de α (Corol·lari 4.10). En deduïm que $q_{n+1} < q_n^{d-1}/C$. Prenent logaritmes i dividint per q_n, obtindrem
$$\frac{\log q_{n+1}}{q_n} < (d-1)\frac{\log q_n}{q_n} - \frac{\log C}{q_n}.$$
Com $\log(x)/x$ és decreixent en $[e, +\infty)$, i $3 \leq F_n \leq q_n$ per tot $n \geq 2$ (Proposició 4.6), tindrem
$$\frac{\log q_n}{q_n} \leq \frac{\log F_n}{F_n}, \quad \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{F_n} \quad \forall n \geq 2.$$
És senzill veure que les fites superiors són termes de sèries convergents, a partir de (4.4) i el criteri del quocient. Per tant, la sèrie de termes $\log(q_{n+1})/q_n$ és convergent, com volíem demostrar. □

Proposició 4.14. *Per tot* $d > 2$ *real, el conjunt* Dioph_d *té mesura total. En particular, el conjunt* $\mathcal{B}$ *dels nombres de Brjuno té mesura total.*

Demostració. Observem que $\alpha \in \mathrm{Dioph}_d$ si, i només si $\{\alpha\} \in \mathrm{Dioph}_d$. Així, és suficient veure que el conjunt $D = \mathrm{Dioph}_d \cap [0,1]$ té mesura 1.

Donat $C > 0$ real, considerem el conjunt D_C de nombres $\alpha \in [0,1]$ tals que
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^d}$$
per tot nombre racional p/q, de manera que $D = \cup_{C>0} D_C$. Ara, el complementari de D_C en $[0,1]$ són els nombres α tals que existeix un nombre racional p/q de manera que
$$\alpha \in \left[\frac{p}{q} - \frac{C}{q^d}, \frac{p}{q} + \frac{C}{q^d}\right]. \tag{4.5}$$

Podem suposar que p i q són relativament primers i, de fet, podem suposar que $0 \leq p < q$. Així, $[0,1] \setminus D_C$ és contingut en la unió de q intervals de la forma (4.5), de mesura $2C/q^d$, i per tant és un conjunt de mesura menor o igual a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2C}{q^{d-1}} < +\infty,$$

on la convergència de la sèrie es deu al fet que $d > 2$. Fent tendir C a 0, el valor de la suma tendeix a 0. Així, $[0,1] \setminus D$ té mesura 0, i per tant Dioph_d té mesura total en $\mathbb{R}$. □

La funció de Yoccoz

Tot seguit, veiem una caracterització de la família $\mathcal{B}$ en termes de les successions $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ associades a tot nombre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que hem introduït prèviament. La utilitzarem en la demostració del teorema de Siegel-Brjuno del proper capítol.

Definició 4.15. *Es defineix la* funció de Yoccoz, $\Phi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, *com*

$$\Phi(\alpha) \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n}$$

en cas que la sèrie sigui convergent. En cas contrari, definirem $\Phi(\alpha) \coloneqq +\infty$.

Proposició 4.16. *Existeix una constant universal C tal que, per tot $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, i tot $k \geq 0$, es compleix*

$$\left| \sum_{n=0}^{k} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} - \sum_{n=0}^{k} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} \right| < C.$$

En particular, un nombre irracional $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és un nombre de Brjuno si, i només si $\Phi(\alpha) < +\infty$.

Demostració. Comencem veient que existeix una constant C_1 tal que, per tot $k \geq 0$

$$\left| \sum_{n=0}^{k} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\beta_n} - \sum_{n=0}^{k} \log \frac{1}{\alpha_n} \right| = \sum_{n=0}^{k} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\beta_{n-1}} < C_1.$$

En efecte, com $1/\beta_{n-1} \geq q_n \geq F_n$ (Proposició 4.6, Corol·lari 4.10), per tot $n \geq 2$ tenim les desigualtats $\beta_{n-1} \log(1/\beta_{n-1}) \leq \log(F_n)/F_n$. Aquests darrers termes són els d'una sèrie convergent, com ja hem vist anteriorment.

Per altra banda, veiem que existeix una constant C_2 tal que, per tot $k \geq 0$

$$\left| \sum_{n=0}^{k} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} - \sum_{n=0}^{k} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\beta_n} \right| < C_2.$$

A partir de les següents desigualtats (Proposició 4.9),

$$1 < \frac{1}{q_{n+1}\,\beta_n} < 2, \quad 0 < \frac{1}{q_n} - \beta_{n-1} = \frac{q_{n-1}\,\beta_n}{q_n} < \beta_n,$$

obtindrem que, per tot $n \geq 0$, és

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\log q_{n+1}}{q_n} - \beta_{n-1} \log \frac{1}{\beta_n} \right| &\leq \left| \frac{\log q_{n+1}}{q_n} - \frac{\log(1/\beta_n)}{q_n} \right| + \left| \frac{\log(1/\beta_n)}{q_n} - \beta_{n-1} \log \frac{1}{\beta_n} \right| \\
&= -\frac{\log(q_{n+1}\,\beta_n)}{q_n} + \left| \frac{1}{q_n} - \beta_{n-1} \right| \log \frac{1}{\beta_n} \\
&\leq \frac{\log 2}{q_n} + \beta_n \log \frac{1}{\beta_n}.
\end{aligned}$$

De nou, les sèries de termes $1/q_n$, i $\beta_n \log(1/\beta_n)$ són dominades per sèries convergents que depenen només de la successió de nombres de Fibonacci $\{F_n\}_n$, d'on deduïm l'existència de C_2.

Obtenim la desigualtat desitjada prenent $C \coloneqq C_1 + C_2$. □

5 El teorema de Siegel-Brjuno

En aquest capítol demostrem el teorema de linearització sota la condició de Brjuno. Veurem una demostració de Jean-Cristophe Yoccoz de tal resultat, basada en un procès de renormalització de la funció a linearitzar i, sobretot, en el control del domini de renormalització, íntimament lligat a l'aritmètica del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ens basarem, principalment, en una versió de Xavier Buff d'aquesta prova, que podem trobar en el document [1]; així com en la prova de Yoccoz, en el seu text original, en [2].

Aquest text descriu amb detall l'estructura de la demostració, i procura exposar amb precisió els punts més tècnics d'aquesta, afitant al màxim els resultats allà on, per qüestions tant d'espai com de dificultat, no puguem arribar. Aquest és un resum del treball personal realitzat per comprendre amb profunditat una demostració de llargada i dificultat considerables. El lector que consideri les fonts citades per estudiar el problema, pot trobar aquí una explicació força processada.

Teorema 5.1 (Teorema de Siegel-Brjuno)**.** *Sigui $\alpha \in \mathcal{B}$. Aleshores, tot 'germ' de funció holomorfa en $(0, \mathbb{C})$ de la forma $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ és linearitzable. És a dir, $\alpha \in \mathcal{L}$.*

Sigui $f : U \to \mathbb{C}$ un sistema lineal en l'origen amb $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$. Podem veure que f és linearitzable estudiant la seva restricció en un disc $\mathbb{D}_\varepsilon \subseteq U$ on f sigui univalent (Observació 2.9). Si $\varphi(z) = z/\varepsilon$, és suficient veure que la funció $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, univalent en $\mathbb{D}$ amb $g'(0) = e^{2\pi i\alpha}$, és linearitzable. Equivalentment, és suficient veure que g és estable (Proposició 3.25). Així, demostrarem el següent.

Teorema 5.2 (Yoccoz)**.** *Existeix una constant $C > 0$ tal que, per tot $\alpha \in \mathcal{B}$ i per tota funció univalent $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ amb $f(0) = 0$ i $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$, f és linearitzable i el disc de Siegel Δ_f de f en l'origen conté el disc $\mathbb{D}_\rho$, on $\rho = \exp\{-\Phi(\alpha) - C\}$, Φ és la funció de Yoccoz i $\Phi(\alpha) < +\infty$.*

Observem que l'enunciat de Yoccoz dóna, a més, una fita inferior en l'estimació de la mida del disc de Siegel Δ_f de f. Aquesta fita, per altra banda, és més precisa que la que es desprèn de la prova clàssica del teorema de Brjuno.

Començarem descrivint a grans trets l'estructura de la demostració. Tot seguit, en veurem la versió detallada; primer, exposant amb detall el procès de renormalització, i explicant després com deduir l'estabilitat del sistema a partir del control sobre els dominis de renormalització.

5.1 Introducció a la prova del teorema

Un esbós de la demostració

Renormalització. L'ingredient principal de la demostració serà la següent construcció. Partim d'una funció univalent $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ amb $f(0) = 0$ i $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$, on $0 < \alpha < 1$ és irracional. Considerarem un domini $U \subseteq \mathbb{D}$ delimitat per un segment de recta $\ell = [0, \rho]$, la seva imatge $f(\ell)$, i una corba analítica ℓ' que uneixi l'extrem ρ de ℓ amb $f(\rho)$. Podrem escollir $0 < \rho < 1$ de manera que ℓ i $f(\ell)$ només és tallin en l'origen, ja que en apropar-nos a l'origen, f és proper a la rotació R_α d'angle $2\pi\alpha$. Escollirem ℓ' de manera que no intersequi les altres corbes més que en els extrems, i de manera que l'angle interior a U entre ℓ i $f(\ell)$ en l'origen sigui $2\pi\alpha$.

Considerarem l'espai resultant d'identificar ℓ i $f(\ell)$ en $\overline{U}$ a través de f. El seu interior, que notem V, és una superfície de Riemann conformement equivalent al disc foradat $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. L'aplicació de primer retorn de f en U, definida en un subespai $U' = U \cap \mathbb{D}_\delta$ de U, indueix una funció holomorfa $g : V' \to V$, on $V' \subseteq V$ és un entorn obert de l'origen. Podem identificar V amb el disc $\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{0\}$, on escollim ε de manera que $\mathbb{D}^* \subseteq V'$. Veurem que g és una funció univalent en $\mathbb{D}^*$, i veurem que s'estén a l'origen amb $g(0) = 0$ i $g'(0) = e^{-2\pi i\gamma}$, on $\gamma = \{1/\alpha\}$. Finalment, definirem la renormalització $\mathcal{R}f$ de f com la restricció en $\mathbb{D}$ de $\overline{g(\overline{z})}$. Així, $\mathcal{R}f$ serà una funció univalent, amb $\mathcal{R}f(0) = 0$ i $(\mathcal{R}f)'(0) = e^{2\pi i\gamma}$, on $0 < \gamma < 1$ és irracional.

Volem aplicar aquesta construcció, de forma inductiva, a partir de les successives renormalitzacions. Una observació important és que no estem definint un operador $\mathcal{R}$ pròpiament dit, sinó que intentarem salvar les possibles ambigüitats en l'elecció de la funció $\mathcal{R}f$. Com veurem tot seguit, el control del radi ρ és central en l'estructura de la demostració, i no hi podem assignar un valor depenent de la funció f. Veurem una forma canònica d'escollir ρ que depengui únicament de α i ens asseguri l'existència d'una renormalització $\mathcal{R}f$.

Suposem que hem escollit un valor adient de ρ. En cas que la restricció de f en $\mathbb{D}_\rho$ fos exactament la rotació R_α, podríem definir U com el sector del disc $\mathbb{D}_\rho$ comprès entre les semirectes ℓ i $f(\ell)$ amb angle interior $2\pi\alpha$, prendríem $\varepsilon = 1$ i, com a aplicació "canònica" de normalització de U, escolliríem $z \in U \mapsto (z/\rho)^{1/\alpha} \in \mathbb{D}$. Veurem que, en general, podrem prendre $\varepsilon \approx 1$, i una aplicació de normalització $l : U \to \mathbb{D}_\varepsilon$ propera, en certa manera, a la funció $z \mapsto (z/\rho)^{1/\alpha}$.

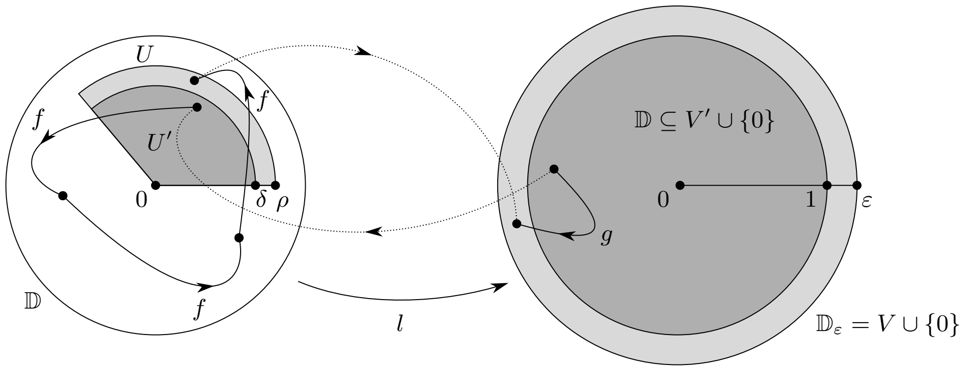

Figura 1: Construcció de la funció renormalitzada $\mathcal{R}f$

La mida del disc de Siegel. Partim d'una funció f com en l'enunciat del teorema. Considerem la successió $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, relacionada amb la successió d'aproximants de α (Definició 4.8), i construïm inductivament una successió $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funcions univalents fixant l'origen i amb $(f_n)'(0) = e^{2\pi i\alpha_n}$ per tot $n \geq 0$, prenent $f_0 = f$ i definint f_{n+1} com una renormalització de f_n per tot $n \geq 0$. A cada pas escollim implícitament un radi ρ_n, un sector U_n del disc unitat i la seva normalització $V_n = \mathbb{D}_{\varepsilon_n} \setminus \{0\}$ amb la corresponent funció de normalització, com es descriu en el paràgraf anterior.
Considerarem el radi σ_0 definit pel següent producte infinit.

$$\sigma_0 = \rho_0 \cdot \rho_1^{\alpha_0} \cdot \rho_2^{\alpha_0\alpha_1} \cdots \rho_n^{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}} \cdots .$$

L'elecció canònica dels radis ρ_n que establirem, no només justifica l'existència de la successió $\{f_n\}_n$. Veurem que $0 < \sigma_0 < 1$, i que el disc $\mathbb{D}_{\sigma_0}$ és contingut en el conjunt estable K_f de f, fet que ens permet concloure la demostració del teorema. Per veure-ho, definirem

$$\sigma_n = \rho_n \prod_{k>n} \rho_k^{\alpha_n\cdots\alpha_{k-1}}.$$

Prenent un punt inicial $z_0 \in \mathbb{D}_{\sigma_0}$, construirem una successió $\{z_n\}_{n\geq 0}$ amb $|z_n| < \sigma_n < \rho_n$ de la següent manera. Si el terme z_n és definit, com f_n és propera a la rotació R_{α_n} en el disc $\mathbb{D}_{\rho_n}$, l'òrbita positiva de z_n per f_n interseca U_n en un punt z_n'. Definirem z_{n+1} com la imatge de z_n' en V_n per la funció de normalització. En efecte, z_{n+1} té mòdul aproximat

$$|z_{n+1}| \approx |z_n/\rho_n|^{1/\alpha_n} < (|\sigma_n|/\rho_n)^{1/\alpha_n} = \sigma_{n+1}.$$

Com f_n és una n-èsima renormalització de f_0, i per definició de z_n, poder avaluar f_n en z_n es tradueix en poder iterar f_0 en z_0 diverses vegades. Serà senzill comprovar que el fet que puguem prendre n arbitràriament gran equival al fet que puguem iterar f_0 en z_0 infinites vegades.

La fita inferior de Yoccoz. Arribats a aquest punt, haurem reduït la demostració del teorema a l'elecció dels radis ρ_n. La clau és trobar un equilibri entre prendre ρ_n prou petit per poder definir una renormalització $\mathcal{R}f_n$ i, per altra banda, que ρ_n sigui prou proper a 1 per que $\sigma_0 > 0$, i de manera que puguem definir correctament la successió $\{z_n\}_{n\geq 0}$. Deduirem de forma relativament simple que podem escollir $\rho_n = c\alpha_n$ per una certa constant universal $0 < c < 1$. Això ens proporciona una desigualtat de la forma $\log\sigma_0 \geq -\Phi(\alpha) + 4\log c > -\infty$, de manera que $\sigma_0 \geq \exp\{-\Phi(\alpha) + 4\log c\} > 0$.

Funcions univalents en el disc unitat

L'anàlisi dels dominis de les funcions renormalitzades és més fàcil si traslladem el problema al semiplà $\mathbb{H} = \{Z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(Z) > 0\}$, com veiem tot seguit.

Definició 5.3. *Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$, i sigui $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ la translació $T(Z) = Z + 1$. Denotarem*

- *S_α l'espai de funcions univalents $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tals que $f(0) = 0$ i $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$, i denotarem*
- *$\widehat{S}_\alpha$ l'espai de funcions univalents $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ tals que $T \circ F = F \circ T$ en $\mathbb{H}$, i tals que*

$$\lim_{\operatorname{Im}(Z)\to+\infty} (F(Z) - Z) = \alpha.$$

Dotarem els espais S_α i $\widehat{S}_\alpha$ de la topologia de convergència uniforme sobre compactes. Ens mourem de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{D}$ a traves de la projecció $E : \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$, $E(Z) = e^{2\pi iZ}$. Observem que $|E(Z)| = e^{-2\pi \operatorname{Im}(Z)}$, i que l'argument de $E(Z)$ és $2\pi \operatorname{Re}(Z)$.

Lema 5.4 (Funcions univalents en el disc unitat)**.** *L'espai $\widehat{S}_\alpha$ s'identifica amb S_α per projecció a través de E. Més concretament, tot $F \in \widehat{S}_\alpha$ es projecta a una funció $f \in S_\alpha$ de manera que $E \circ F = f \circ E$, i tot $f \in S_\alpha$ s'eleva a una única funció $F \in \widehat{S}_\alpha$ de manera que $E \circ F = f \circ E$. En particular, l'espai $\widehat{S}_\alpha$ és compacte.*

Aquest resultat es pot obtenir mitjançant arguments naturals dins la teoria d'espais recobridors. La demostració que oferim, però, es basa en eines que ja haguem utilitzat prèviament. Tenint en compte el caràcter tècnic del lema, el lector pot evitar la següent demostració si així ho desitja.

Demostració. Sigui $F \in \widehat{S}_\alpha$. Prendrem les branques del logaritme complex L_1, i L_2 definides en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, i $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, i que recorren les bandes horitzontals $\{Z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(Z) < 2\pi\}$, i $\{Z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(Z) < \pi\}$ respectivament. Dividint les branques L_1, i L_2 per $2\pi i$, obtindrem les inverses locals E_1, i E_2 de E, definides en $D_1 = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$, i $D_2 = \mathbb{D} \setminus (-1, 0]$, i que recorren les bandes $\{Z \in \mathbb{H} : 0 < \operatorname{Re}(Z) < 1\}$, i $\{Z \in \mathbb{H} : -1/2 < \operatorname{Re}(Z) < 1/2\}$ respectivament. Definirem f en $\mathbb{D}^*$ com $f(z) = E \circ F \circ E_i(z)$, on $i = 1, 2$ segons $z \in D_1$ o bé $z \in D_2$. Que f és ben definida es dedueix del fet que $E_1 = E_2$ en $D_1 \cap D_2 \cap \mathbb{H}$, i que $E_1 = E_2 + 1$ en $D_1 \cap D_2 \cap \{\operatorname{Im}(z) < 0\}$, juntament amb el fet que F commuta amb T. Clarament, f és holomorfa en $\mathbb{D}^*$. Suposem ara que $f(z) = f(z')$. Aleshores, $F(E_i(z)) = F(E_j(z')) + k = F(E_j(z') + k)$ per cert $k \in \mathbb{Z}$, de manera que $E_i(z) = E_j(z') + k$. Per injectivitat de les funcions E_1 i E_2, i donada l'amplada de les semi-bandes verticals que recorren, qualsevol tria de valors per i, j, k ens porta a que $z = z'$. Finalment, pel teorema de les singularitats aïllades de Riemann, podem estendre f a l'origen. Prenent una successió de nombres reals $z_n \to 0$, amb $0 < z_n < 1$, i definint $Z_n = E_2(z_n)$, de manera que $2\pi \operatorname{Im}(Z_n) = -\log(z_n) \to +\infty$, tindrem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(z_n)}{z_n}\, e^{-2\pi i\alpha} = \lim_{n\to+\infty} E(F(Z_n) - Z_n - \alpha) = 1,$$

d'on deduïm que $f(0) = 0$, i $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$. En definitiva, $f \in S_\alpha$. A més, és clar que f és l'única funció en S_α que satisfà la igualtat $E \circ F = f \circ E$ en $\mathbb{H}$.

Partim ara de $f \in S_\alpha$. La composició $f \circ E : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^*$ admet una determinació del logaritme, posem $\widetilde{F}$. Aleshores, $F = \widetilde{F}/2\pi i$ és una funció holomorfa en $\mathbb{H}$ que satisfà $E \circ F = f \circ E$. A més, tenim unicitat en F tret de translacions per un nombre enter. Observem que, si $Z \in \mathbb{H}$, aplicant el teorema fonamental del càlcul i el principi de l'argument, obtindrem

$$\begin{aligned} F(Z+1) - F(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[Z,Z+1]} \widetilde{F}'(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{[Z,Z+1]} \frac{f'(E(\zeta))E'(\zeta)}{f(E(\zeta))}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=|E(Z)|} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)}\, d\omega = 1. \end{aligned}$$

En efecte, si $r(t)$ parametritza el segment $[Z, F(Z)]$, aleshores $f \circ E \circ r$ parametritza la vora del disc de radi $|E(Z)|$, i l'origen és l'únic zero, i amb multiplicitat 1, de f en tal disc. En definitiva, $T \circ F = F \circ T$ en $\mathbb{H}$. Finalment, observem

$$\lim_{\operatorname{Im}(Z)\to+\infty} E(F(Z) - Z - \alpha) = \lim_{E(Z)\to 0} \frac{f(E(Z))}{E(Z)}\, e^{-2\pi i\alpha} = f'(0)\, e^{-2\pi i\alpha} = 1.$$

Per continuïtat, obtindrem que $(F(Z) - Z - \alpha) \to k \in \mathbb{Z}$ quan $\operatorname{Im}(Z) \to +\infty$. Substituint F per $F - k$, tindrem que $F \in \widehat{S}_\alpha$. A més, hem eliminat l'ambigüitat en l'elecció de F, de manera que F és l'única funció en $\widehat{S}_\alpha$ que satisfà $E \circ F = f \circ E$ en $\mathbb{H}$.

Veiem ara que S_α és compacte. Considerem l'espai $U(\mathbb{D})$ de funcions univalents en el disc unitat. Tota funció $G \in U(\mathbb{D})$ omet dos punts del pla complex, com es dedueix del teorema de Liouville, i del fet que el pla complex menys un punt no és simplement connex. Aleshores, pel TFN de Montel (Teorema 2.40) i el teorema de Hurwitz (Corol·lari 2.19) i, com la topologia de la convergència uniforme sobre compactes és mètrica (Proposició 2.21), deduïm que $U(\mathbb{D})$ és compacte. Només resta dir que S_α és tancat en $U(\mathbb{D})$, conseqüència del teorema de Weierstrass (Teorema 2.17). $\square$

Així, serà suficient demostrar l'existència d'un semiplà $\mathbb{H}_{\widehat{\sigma}} = \{Z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(Z) > \widehat{\sigma}\}$ contingut en el conjunt estable K_F de la elevació $F \in \widehat{S}_\alpha$ de la funció $f \in S_\alpha$ de l'enunciat del teorema. En efecte, $E(\mathbb{H}_{\widehat{\sigma}}) = \mathbb{D}_\sigma \setminus \{0\}$ on $\sigma = e^{-2\pi\widehat{\sigma}}$, i també $E \circ F^n = f^n \circ E$, de manera que $\mathbb{D}_\sigma \subseteq K_f$. Demostrarem l'existència de tal semiplà, i ho farem seguint l'esquema exposat a la secció anterior, considerant cada pas en la seva versió elevada a través de la projecció E.

5.2 Renormalització

Comencem la demostració de Siegel-Brjuno descrivint com construir una funció renormalitzada $\mathcal{R}F \in \widehat{S}_{\alpha_1}$, amb $\alpha_1 = \{1/\alpha\}$, a partir de l'elevació $F \in \widehat{S}_\alpha$ de $f \in S_\alpha$.

Normalització d'un sector del disc unitat

Suposarem que podem escollir un valor real $t > 0$ de manera que es satisfan les següents desigualtats fonamentals.

$$|F(Z) - Z - \alpha| \leq \alpha/4, \quad |F'(Z) - 1| \leq 1/4 \quad \forall Z \in \mathbb{H}_t. \tag{5.1}$$

Definirem $P_0 \coloneqq it$, $\ell \coloneqq \{P_0 + is \colon s > 0\}$, i $\ell' \coloneqq [P_0, F(P_0)]$. La primera desigualtat de (5.1) ens indica que el conjunt de les parts imaginàries de la corba analítica $F(\ell)$ no és afitat superiorment, i que tal corba està continguda dins la banda vertical $\{Z \in \mathbb{C} : 3\alpha/4 \leq \mathrm{Re}(Z) \leq 5\alpha/4\}$. De la segona desigualtat, deduïm que el vector tangent $v(s)$ de la corba $F(\ell(s))$ en cada $s \geq 0$ és

$$v(s) = F'(r(s))\, r'(s) = iF'(r(s)), \quad r(s) = P_0 + is, \quad |v(s) - i| \leq 1/4.$$

En particular, en cada punt Z de $F(\ell)$ la corba forma un angle θ amb l'eix real de manera que $|\theta - \pi/2| \leq \arcsin(1/4) < 1/2$. Deduïm, per tant, que $F(\ell)$ és continguda dins el con delimitat per les semirectes que neixen en $F(P_0)$ amb angles $\pi/2 \pm \arcsin(1/4)$ respectivament. Per altra banda, el segment ℓ' és contingut en un con delimitat per les semirectes que neixen en $F(P_0)$ amb angles $\pi \pm \arcsin(1/4)$ respectivament, com deduïm de la primera desigualtat fonamental. En definitiva, la corba $F(\ell)$ és lliure d'auto-interseccions, i les corbes ℓ, ℓ' i $F(\ell)$ només es tallen en els seus extrems, de manera que la seva unió conforma la vora d'un obert connex contingut en $\mathbb{H}$, que anomenarem $\mathcal{U}$ i que és, de forma aproximada, una semi-banda d'amplada α. Considerarem l'espai topològic $\mathcal{V}$ resultant d'identificar ℓ amb $F(\ell)$ en $\overline{\mathcal{U}}$ a través de F, i denotarem $\iota : \overline{\mathcal{U}} \to \mathcal{V}$ l'aplicació de pas al quocient.

Lema 5.5 (Normalització)**.** *L'espai $\mathcal{V}$ és una varietat topològica amb vora $\partial\mathcal{V} = \iota(\ell')$. El seu interior $\mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}$ és dotat, de forma natural a través de ι, d'estructura de superfície de Riemann, i és conformement equivalent al disc foradat $\mathbb{D}^*$.*

La prova que $\mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}$ és equivalent al disc $\mathbb{D}^*$ que necessitem considerar es basa en elements de la branca de l'anàlisi complexa anomenada *anàlisi quasi-conforme*. Aquesta branca es centra en l'estudi de les *aplicacions quasi-conformes* o *quasi-isomorfismes* que, dit de forma poc precisa, són homeomorfismes que envien discs infinitesimals a el·lipsoides infinitesimals amb excentricitat afitada. Podem dir que aquesta és una forma de mesurar la regularitat de certs homeomorfismes que generalitza la idea d'una transformació conforme; podem pensar que una aplicació quasi-conforme és un homeomorfisme del que tenim cert control de com de lluny es troba de ser una transformació conforme.

Un desenvolupament del tema no té cabuda en aquest treball, donada la seva extensió, i ens limitarem a comentar la idea subjacent en les demostracions dels lemes tècnics on s'apliquin aquestes tècniques. Tot i que no podrem precisar a nivell tècnic una part important de la demostració del teorema, aquest buit queda contingut en l'anàlisi geomètric de la normalització, i no afectarà la resta de la demostració. Els detalls d'aquestes proves es poden trobar al document original [1]. El lector interessat trobarà una exposició dels conceptes necessaris d'aquesta teoria per completar aquesta prova en l'obra [10].

Esbòs de la demostració. La prova es basa en demostrar l'existència d'un quasi-isomorfisme entre $\mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}$ i el disc foradat $\mathbb{D}^*$. El mòdul d'un anell $r_0 < |z| < r_1$ és un valor associat a la relació r_0/r_1. Aquest valor és un invariant conforme i, de fet, podem dir que és un quasi-invariant per equivalència quasi-conforme, en el sentit que un quasi-isomorfisme prou pròxim a una transformació conforme conservarà aquesta quantitat. Aquest és el cas de l'aplicació quasi-conforme induïda a través de ι per el també quasi-isomorfisme $H : \overline{B}_\alpha \to \overline{U}$, on $B_\alpha \coloneqq \{Z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(Z) \leq \alpha,\ t < \mathrm{Im}(Z)\}$, i definim

$$H(X + iY) \coloneqq iY + \frac{X}{\alpha}\left(F(iY) - iY\right), \quad X + iY \in B_\alpha.$$

Observem que el disc $\mathbb{D}^*$ s'obté de B_α identificant iY amb $iY + \alpha$, i a partir de la transformació $Z \mapsto (Z - it)/\alpha$, i de la projecció E. Observem també que $H(iY + \alpha) = F(H(iY))$, de manera que H indueix un homeomorfisme (quasi-isomorfisme) de $\mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}$ en $\mathbb{D}^*$. □

Una observació important és que una transformació conforme $h : \mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V} \to \mathbb{D}^*$ és única tret de la composició per una rotació. En efecte, si h, μ són tals transformacions, la composició $g = h \circ \mu^{-1} : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}^*$ té una singularitat evitable en l'origen, pel teorema de les singularitats aïllades de Riemann. Pel principi del mòdul màxim, necessàriament $g(0) \in \mathbb{D}$, i pel teorema de l'aplicació oberta $g(0) = 0$, ja que $h \circ \mu^{-1}$ és bijectiva en $\mathbb{D}^*$. El lema de Schwarz ens diu que g és una rotació (Teorema 2.14).

Prendrem l'única transformació $h : \mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V} \to \mathbb{D}^*$ tal que $h(P_0) = 1$ (per pas al límit), i definirem $K \coloneqq h \circ \iota$, contínua en $\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$, univalent en $\mathcal{U}$ i, de fet, injectiva en $\overline{\mathcal{U}} \setminus (\ell' \cup F(\ell))$. Sigui L una funció univalent en $\mathcal{U}$ de manera que $E \circ L = K$, obtinguda dividint per $2\pi i$ una determinació del logaritme de K. Com E (avaluada en el pla complex) és un homeomorfisme local, podrem estendre contínuament L al conjunt $\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$. Tenim unicitat en L tret de translacions enteres, així que podem donar unicitat a la funció L suposant que $L(P_0) = 0$ (de nou, per pas al límit).

Anomenarem *funció de normalització* a la funció $L : \overline{\mathcal{U}} \setminus \ell' \to \mathbb{H}$, que satisfà la següent propietat fonamental. Per tot $Z \in \ell$, parametritzem el segment $[Z, F(Z)]$ mitjançant $r(t) = tF(Z) + (1 - t)Z$. Si definim $\gamma = K \circ r$, per aplicació del teorema fonamental del càlcul, tindrem

$$L(F(Z)) - L(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{K'(\omega)}{K(\omega)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta.$$

Ara, K és univalent en $\mathcal{U}_F$ i, com $K(F(Z)) = K(Z)$ si $Z \in \ell$, γ parametritza una corba simple tancada al voltant de l'origen. Aplicant la fórmula integral de Cauchy, obtenim

$$L(F(Z)) = L(Z) + 1 \quad \forall Z \in \ell. \tag{5.2}$$

En particular, L és injectiva en $\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$. De fet, és immediat veure que per tot $Z, Z' \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$, tenim

$$Z \neq Z',\ L(Z) - L(Z') \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad Z \in \ell,\ Z' = F(Z),\ \text{o bé } Z' \in \ell,\ Z = F(Z'). \tag{5.3}$$

Construcció d'una funció renormalitzada

A continuació, estendrem L de manera que incorpori l'acció de retorn al sector $\mathcal{U}$ i puguem definir una renormalització de F a partir de L. Considerarem el domini

$$\mathcal{W} \coloneqq \left(\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'\right) \cup \{Z \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}(Z) \leq 0,\ \mathrm{Im}(Z) \geq t + 2\}.$$

Ja hem comentat que, per la primera desigualtat de (5.1), els iterats $F^m(Z)$ dels punts $Z \in \mathcal{W}$ queden per sobre la recta que passa per Z amb angle $\theta = -\arcsin(1/4)$ respecte l'eix real. És senzill veure que, si a més $\mathrm{Im}(Z) \geq t + 2$, tal recta secciona la semi-banda $\overline{\mathcal{U}}$ tallant les corbes ℓ i $F(\ell)$ en un únic punt, d'on deduïm (juntament amb el fet que F és injectiva) que qualsevol punt $Z \in \mathcal{W}$ va a parar eventualment a $\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$ per iteració de F. Sigui $k = k(Z) \geq 0$ el mínim enter tal que $\mathrm{Re}(F^k(Z)) \geq 0$, que anomenarem *rang de retorn* de Z. Aleshores $F^k(Z) \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$, i definirem

$$L(Z) \coloneqq L(F^{k(Z)}(Z)) - k(Z) \quad \forall Z \in \mathcal{W}.$$

És immediat veure que la funció $L : \mathcal{W} \to \mathbb{H}$ és contínua i injectiva en $\mathcal{W}$, i holomorfa en l'interior del mateix domini. En efecte, un seguit de corbes analítiques $F^{-n}(\ell)$, amb $n = 1, \ldots, m$ (on $m \sim 1/\alpha$), divideixen la semi-banda $B \coloneqq \{Z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}(Z) < 0,\ \mathrm{Im}(Z) > t + 2\}$ en oberts disjunts on el rang de retorn $k(Z)$ és constant. En aquests oberts, L és clarament holomorfa. Les corbes $F^{-n}(\ell)$ són disjuntes dos a dos, com es dedueix de la desigualtat fonamental (5.1), i la propietat fonamental (5.2) ens assegura la continuïtat de L sobre aquestes corbes. Pel teorema de Morera, L és holomorfa en l'interior de $\mathcal{W}$. La continuïtat de L sobre els costats que delimiten la semi-banda B inferiorment i per l'esquerra, la podem deduir observant que podem estendre B en aquestes direccions lleugerament per poder aplicar el raonament anterior. Que L és injectiva en $\mathcal{W}$ es dedueix de forma immediata de la definició de L i la propietat (5.3).

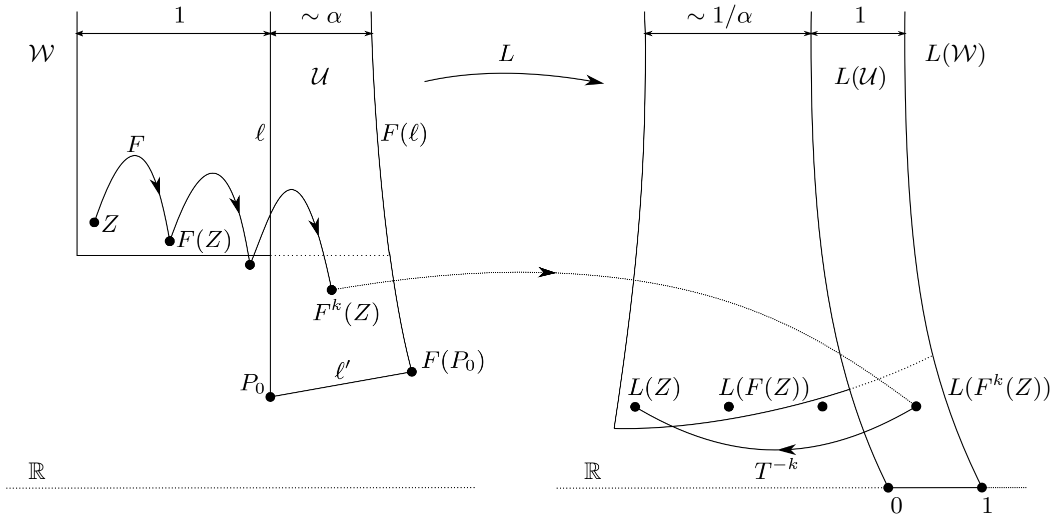

Figura 2: Construcció de l'aplicació $L : \mathcal{W} \to \mathbb{H}$

Arribem a la darrera fase de la construcció de $\mathcal{R}F$. Considerem $D := L\left(\{Z \in \overline{\mathcal{U}} :\ \mathrm{Im}(Z) > t+2\}\right)$, i hi definim la funció

$$G := L \circ T^{-1} \circ L^{-1} + \lfloor 1/\alpha \rfloor,$$

clarament contínua i injectiva en D, i holomorfa en l'interior de tal conjunt.

El següent lema ens dona estimacions per la funció L en $\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$, així com una idea de la forma del conjunt D que ens permetrà estendre G de forma adient.

Lema 5.6 (Estimacions per a L)**.** *Per tot $Z \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$, tenim*

$$\mathrm{Im}(Z) - t - 2 < \alpha\, \mathrm{Im}(L(Z)) < \mathrm{Im}(Z) - t + 2.$$

Aquestes estimacions són un punt tècnic important dins la construcció de $\mathcal{R}F$, i estan basades en l'anàlisi del quasi-isomorfisme $H : \overline{B}_\alpha \to \overline{U}$ (Lema 5.5). Observem que, si la funció F fos la translació $Z \mapsto Z + \alpha$, podríem prendre com a funció de normalització L la funció $Z \mapsto (Z - it)/\alpha$. Intuïtivament, el lema ens diu que, en general, la funció L és propera a aquesta transformació.

Observació 5.7. Es satisfà $L\left(\overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'\right) \cap \mathbb{H}_{4/\alpha} \subseteq D$.

En efecte, si $Z = L(Z')$, amb $Z' \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \ell'$, i $\mathrm{Im}(Z) > 4/\alpha$, aleshores $4 < \alpha\, \mathrm{Im}(Z) < \mathrm{Im}(Z') - t + 2$, de manera que $\mathrm{Im}(Z') > t + 2$.

El lema també ens diu que el conjunt $\{\mathrm{Im}(Z) : Z \in D\}$ no és afitat superiorment. Si definim $D_k := D + k$ on $k \in \mathbb{Z}$, i tenint en compte la propietat (5.2) de L, aleshores

$$\mathbb{H}_{4/\alpha} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k, \quad (D_{k-1} \cap D_k) \cap \mathbb{H}_{4/\alpha} = \left(L(\ell) \cap \mathbb{H}_{4/\alpha}\right) + k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Finalment, si $Z \in L(\ell) \cap \mathbb{H}_{4/\alpha}$, veiem que $G(Z+1) = G(Z) + 1$. En efecte, posem $Z = L(Z')$. Es satisfà $Z + 1 = L(F(Z'))$ i, si $\tau = k(F(Z'-1))$ és el rang de retorn de $F(Z'-1)$, clarament $k(Z'-1) = \tau + 1$, de manera que

$$\begin{aligned}G(Z+1)-\lfloor 1/\alpha\rfloor &= L(F(Z'-1))\\ &= L(F^{\tau+1}(Z'-1))-\tau = L(Z'-1)+1 = G(Z)+1-\lfloor 1/\alpha\rfloor.\end{aligned}$$

Estenem ara la funció G aprofitant aquesta darrera propietat. Per tot $Z\in\mathbb{H}_{4/\alpha}$, prendrem $c\in\mathbb{Z}$ de manera que $Z-c\in D$, i definirem $G(Z):=G(Z-c)+c$. Clarament, G és contínua i injectiva en $\mathbb{H}_{4/\alpha}$, i és holomorfa en el complementari de les corbes analítiques $(L(\ell)\cap\mathbb{H}_{4/\alpha})+k$ amb $k\in\mathbb{Z}$. De nou pel teorema de Morera, podem concloure que G és univalent en $\mathbb{H}_{4/\alpha}$.

Finalment, podem definir una funció renormalitzada $\mathcal{R}F:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ de F com

$$\mathcal{R}F := s\circ G\circ s^{-1},\quad s(Z):=-X+i(Y-4/\alpha)\quad Z=X+iY\in\mathbb{C}.$$

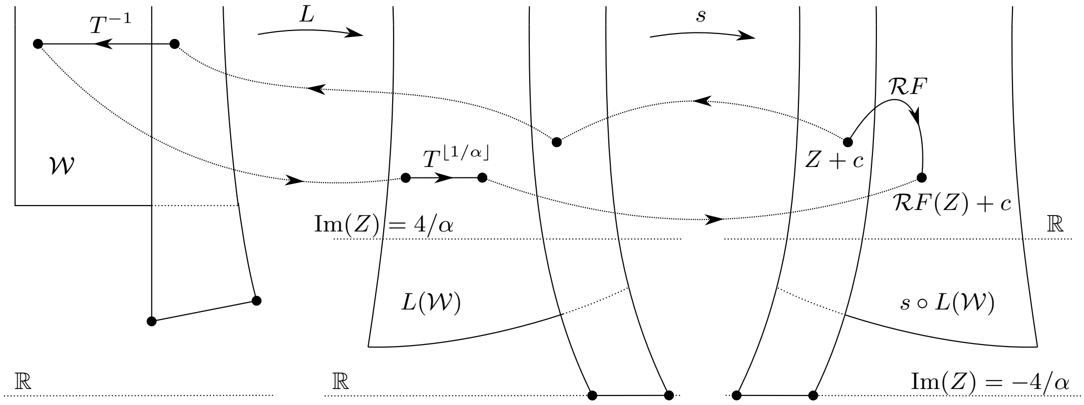

Figura 3: Sumari de la construcció de $\mathcal{R}F:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$

Lema 5.8 (Renormalització)**.** *La funció $\mathcal{R}F$ és un element de l'espai $\widehat{S}_{\alpha_1}$, on $\alpha_1=\{1/\alpha\}$.*

Esbós de la demostració. És clar que $F_1:=\mathcal{R}F$ és una funció injectiva, i que commuta amb la translació T, per definició de G i el fet que $s\circ T=T^{-1}\circ s$. A més, tot i que s no és holomorfa, és senzill comprovar que F_1 és diferenciable i satisfà les equacions de Cauchy-Riemann. Per tant, només resta veure

$$\lim_{\mathrm{Im}(Z)\to+\infty}(F_1(Z)-Z)=\alpha_1.$$

La funció $u_1:=F_1-\mathrm{id}$ és 1-periòdica en $\mathbb{H}$. És anàleg a la primera part de la demostració del lema 5.4 veure que $u_1=v_1\circ E$ per certa funció $v_1:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ holomorfa. Prenent una sèrie de potències de v_1 centrada en l'origen, obtenim l'expansió de Fourier de u_1

$$u_1(Z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k e^{2\pi ikZ}\quad \forall Z\in\mathbb{H}.$$

Per tant, és clar que $u_1(Z)\to c_0$ quan $\mathrm{Im}(Z)\to+\infty$. Hem de veure, doncs, que $c_0=\alpha_1$. Donat $M>0$, definirem

$$F_M(Z):=F(Z+iM)-iM\quad \forall Z\in\mathbb{H}.$$

Clarament, les funcions F_M són de $\widehat{S}_\alpha$, i una simple revisió del procès de renormalització (tenint en compte que podem prendre el mateix valor t per les desigualtats fonamentals (5.1) per tot $M>0$) ens diu que podem prendre renormalitzacions $\mathcal{R}F_M$ com a conjugacions de restriccions de $\mathcal{R}F$. D'aquest fet, deduïm que el coeficient $c_0(M)$ de l'expansió de Fourier de $\mathcal{R}F_M-\mathrm{id}$ no depèn de M, i per tant és $c_0(M)\equiv c_0$. En efecte, una conjugació $\phi_M:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ tal que $\phi_M\circ\mathcal{R}F_M=F_1\circ\phi_M$ commuta amb la translació T, de manera que $\phi_M-\mathrm{id}$ admet una expansió de Fourier a coeficients φ_k, amb $k\geq 0$. Així, el terme constant de $\phi_M\circ\mathcal{R}F_M-\mathrm{id}$, que és $c_0(M)+\varphi_0$, ha de ser igual al de $F_1\circ\phi_M-\mathrm{id}=u_1\circ\phi_M+\phi_M-\mathrm{id}$, que és $c_0+\varphi_0$.

Observem que les funcions F_M tendeixen uniformement sobre compactes de $\mathbb{H}$ a $T_\alpha(Z) := Z + \alpha$, quan $M \to +\infty$. Afirmem que les renormalitzacions $\mathcal{R}F_M$ convergeixen uniformement sobre compactes de $\mathbb{H}$ a T_{α_1}, de manera que $c_0(M)$ convergeix a α_1 i, per tant, $c_0 = \alpha_1$, fet que finalitza la prova. Així doncs, hem de veure que $\mathcal{R}F_M$ convergeix a T_{α_1}. En aquest punt, tornen a jugar un paper important els quasi-isomorfismes $H_M : \overline{B}_\alpha \to \overline{\mathcal{U}}_M$ de la demostració del lema 5.5. Un control sobre aquestes funcions ens permet formalitzar el fet, que per altra banda podem intuir, que les funcions normalitzadores L_M convergeixen a la funció $Q(Z) := (Z - it)/\alpha$, i que les composicions $L_M \circ T^{-1} \circ L_M^{-1}$ convergeixen a $Q \circ T^{-1} \circ Q^{-1} = T_{-1/\alpha}$ quan $M \to +\infty$. Conjugant amb s, i restant $\lfloor 1/\alpha \rfloor$, obtindrem que les funcions $\mathcal{R}F_M$ convergeixen a T_{α_1}. □

5.3 Existència del disc de Siegel

Donada $F \in \widehat{S}_\alpha$ amb $\alpha \in \mathcal{B} \cap (0,1)$, podem definir una successió $\{F_n\}_{n\geq 0}$ de manera que $F_n \in \widehat{S}_{\alpha_n}$, on la successió $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ és l'associada a la successió d'aproximants de α (Definició 4.8).

Començarem amb $F_0 = F$, i assumirem que hem definit F_n. La construcció de F_{n+1} depèn de l'elecció d'un nombre real $t_n > 0$ pel que la funció F_n satisfà les desigualtats fonamentals (5.1) si $\mathrm{Im}(Z) \geq t_n$. Suposarem que hem escollit t_n, i definirem la funció F_{n+1} com una renormalització de F_n, posem $F_{n+1} = \mathcal{R}F_n$. En el procès va implícita l'escolla de conjunts $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ i $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}$, així com la construcció d'una funció de normalització estesa $L_n = L : \mathcal{W}_n \to \mathbb{H}$ amb el rang de primer retorn $k_n = k : \mathcal{W}_n \to \mathbb{Z}$ i la funció $G_n = G : \mathbb{H}_{4/\alpha_n} \to \mathbb{C}$ amb el corresponent ajust $s_n = s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Reducció del problema d'estabilitat

Donat un punt $Z \in \mathbb{H}$, establirem un criteri per la seva pertinença al conjunt estable K_F, basat en el fet que puguem construir una successió $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ determinada a partir de Z.

Definirem tal successió inductivament. Començarem prenent $Z_0 = Z$, i suposarem que hem definit Z_n. Posarem com a condició necessària per definir el següent terme que $\mathrm{Im}(Z_n) \geq t_n + 2$. En tal cas, escollint Z_n' tal que $Z_n - Z_n' \in \mathbb{Z}$ i de manera que $-1 \leq \mathrm{Re}(Z_n') < 0$, definirem

$$Z_{n+1} := (s_n \circ L_n)(Z_n') = (s_n \circ L_n)(F_n^{\tau_n}(Z_n')) + \tau_n, \quad \text{on} \quad \tau_n := k_n(Z_n').$$

La propietat fonamental dels termes Z_n és l'equivalència entre el fet que puguem iterar la funció renormalitzada F_n diverses vegades sobre Z_n, amb el fet que puguem iterar F_{n-1} diverses (més) vegades sobre translacions enteres de Z_{n-1}. Per tal de formalitzar aquest fet, definirem de forma recursiva les successions $\{\tau_{n,r}\}_r$, $\{\omega_{n,r}\}_r$ prenent valors inicials $\tau_{n,0} = \omega_{n,0} := \tau_n$ i, per tot $r \geq 1$

$$\tau_{n,r} := k_n\left(F_n^{\omega_{n,r-1}}(Z_n' - r)\right), \quad \omega_{n,r} := \sum_{i=0}^{r} \tau_{n,i} = \omega_{n,r-1} + \tau_{n,r},$$

sempre que es satisfaci $F_n^{\omega_{n,r-1}}(Z_n' - r) \in \mathcal{W}_n \setminus \overline{\mathcal{U}}_n$, o el que és el mateix, sempre que es satisfaci $\mathrm{Im}(F_n^{\omega_{n,r-1}}(Z_n)) \geq t_n + 2$. Observem que, aleshores, $F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n' - r) \in \overline{\mathcal{U}}_n \setminus \ell_n'$.

Utilitzarem aquestes successions per deduir la següent fórmula pels iterats de Z_n sota F_n, on es reflecteix la propietat fonamental dels termes Z_n que hem esmentat.

Lema 5.9. *Siguin $r, n \geq 0$ enters. Suposem que Z_{n+1} i el seu iterat r-èsim per F_{n+1} són definits. Aleshores, els termes $\tau_{n,r}$ i $\omega_{n,r}$ són definits, i es compleix la fórmula*

$$F_{n+1}^r(Z_{n+1}) = (s_n \circ L_n)\left(F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n' - r)\right) + \omega_{n,r} - r a_{n+1}.$$

Demostració. Raonarem per inducció en r. El cas $r = 0$ és la definició de Z_{n+1}. Suposem que el lema és cert per $r \geq 0$. Que el següent iterat sigui definit significa que $F_{n+1}^r(Z_{n+1}) \in \mathbb{H}$. De la fórmula per l'iterat r-èsim, deduïm que $\mathrm{Im}(F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n)) \geq t_n + 2$, com es desprèn de les estimacions per a L_n i del fet que $F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n' - r) \in \overline{\mathcal{U}}_n \setminus \ell_n'$ (Observació 5.7). Així, podem definir els termes $\tau_{n,r+1}$ i $\omega_{n,r+1} = \omega_{n,r} + \tau_{n,r+1}$.

Finalment, tenim

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^{r+1}(Z_{n+1}) &= F_{n+1}\left[(s_n \circ L_n)(F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n' - r))\right] + \omega_{n,r} - ra_{n+1} \\
&= (s_n \circ G_n)\left[L_n(F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n' - r))\right] + \omega_{n,r} - ra_{n+1} \\
&= (s_n \circ L_n)\left[F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n' - (r+1))\right] + \omega_{n,r} - ra_{n+1} - \lfloor 1/\alpha_n \rfloor \\
&= (s_n \circ L_n)\left[F_n^{\omega_{n,r+1}}(Z_n' - (r+1))\right] + (\omega_{n,r} + \tau_{n,r+1}) - (r+1)a_{n+1},
\end{aligned}$$

que és l'expressió que buscàvem. □

Deduïm d'aquest resultat els següents lemes, que mostren que, si podem definir Z_n per tot $n \geq 0$, aleshores Z és en el conjunt estable K_F.

Lema 5.10. *Sigui $Z \in \mathbb{H}$. Si existeix un enter $m \geq 1$ tal que $F^m(Z) \notin \mathbb{H}$, aleshores, per tot $n \geq 0$ tal que Z_n sigui definit, existeix un enter $m_n \geq 0$ tal que $F_n^{m_n}(Z_n) \notin \mathbb{H}$.*

Demostració. Procedim per inducció sobre n. El cas $n = 0$ és trivial. Suposarem que es satisfà la tesi del lema per Z_n, i suposarem que Z_{n+1} és definit, és a dir, que $\mathrm{Im}(Z_n) \geq t_n + 2$. Si es complís $F_{n+1}^r(Z_{n+1}) \in \mathbb{H}$ per tot $r \geq 0$, els termes $\omega_{n,r}$ serien definits per tot $r \geq 0$ (Lema 5.9), i això significa que $\mathrm{Im}(F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n)) \geq t_n + 2$ per tot $r \geq 0$. La primera desigualtat fonamental per F_n (5.1) ens dona un control sobre els iterats de Z_n intermedis, de manera que $\mathrm{Im}(F_n^j(Z_n)) > t_n > 0$ per tot $j \geq 0$. Aquest fet contradiu la hipòtesi d'inducció. □

Lema 5.11 (Reducció del problema d'estabilitat)**.** *Sigui $Z \in \mathbb{H}$. Si existeix un enter $m \geq 1$ tal que $F^m(Z) \notin \mathbb{H}$, aleshores la seqüència de termes Z_n és finita.*

Demostració. Demostrarem el resultat fent reducció a l'absurd. Suposarem que podem definir infinits termes de la successió $\{Z_n\}_{n\geq 0}$. Això és, $\mathrm{Im}(Z_n) \geq t_n + 2$ per tot $n \geq 0$. Per tot enter $n \geq 0$, definirem $r_n \geq 0$ de manera que $1 + r_n$ és el rang del primer iterat de Z_n sota F_n que surt de $\mathbb{H}_{t_n}$ (Lema 5.10). Observem que, de fet, $r_n > 0$ per tot $n \geq 0$, com deduïm de la primera desigualtat fonamental (5.1) per F_n. Ara, fixat $n \geq 0$, com l'iterat $(1 + r_{n+1})$-èsim de Z_{n+1} sota F_{n+1} és definit, també són definits els termes $\omega_{n,r}$ amb $0 \leq r \leq 1 + r_{n+1}$ (Lema 5.9), de manera que $\mathrm{Im}(F_n^{\omega_{n,r}}(Z_n)) \geq t_n + 2$ per tot $0 \leq r \leq r_{n+1}$. La desigualtat (5.1) ens permet controlar els iterats intermedis, i obtenim que $\mathrm{Im}(F_n^j(Z_n)) > t_n$ per tot $0 \leq j \leq \omega_{n,r_{n+1}}$. La mateixa desigualtat ens dona

$$\frac{3}{4}\alpha_n < \mathrm{Re}(F_n(Z) - Z) < \frac{5}{4}\alpha_n, \quad \forall Z \in \mathbb{H}_{t_n}.$$

Acabem de veure que $\sigma_n \coloneqq \omega_{n,r_{n+1}} \leq r_n$, de manera que

$$0 \leq \mathrm{Re}(F_n^{\sigma_n}(Z_n) - Z_n) = \sum_{j=1}^{\sigma_n} (\mathrm{Re}(F_n^j(Z_n) - F_n^{j-1}(Z_n))) < \frac{5}{4}\alpha_n\sigma_n \leq \frac{5}{4}\alpha_n r_n \quad \forall Z \in \mathbb{H}_{t_n}.$$

A més, la distància de la part real de qualsevol punt en $\overline{\mathcal{U}}_n$ amb la de $Z_n' - r_{n+1}$ és, com a mínim, r_{n+1}. En definitiva, tindrem

$$r_{n+1} \leq \mathrm{Re}(F_n^{\sigma_n}(Z_n' - r_{n+1})) - \mathrm{Re}(Z_n' - r_{n+1}) = \mathrm{Re}(F_n^{\sigma_n}(Z_n) - Z_n) < \frac{5}{4}\alpha_n r_n.$$

Utilitzat que $\alpha_n\alpha_{n+1} < 1/2$ per tot $n \geq 0$ (Proposició 4.11), deduïm que

$$r_{n+2} < \frac{5}{4}\alpha_{n+1}r_{n+1} < \frac{25}{16}\alpha_n\alpha_{n+1}r_n < \frac{25}{32}r_n < r_n,$$

que és contradictori amb el fet que $r_n > 0$ per tot $n \geq 0$. Així, la seqüència de termes Z_n és finita. □

Una condició suficient per l'existència del disc de Siegel

Recordem que la construcció de F_{n+1} depèn de l'elecció d'un nombre real $t_n > 0$ pel que la funció F_n satisfaci les desigualtats fonamentals (5.1) si $\mathrm{Im}(Z) \geq t_n$. A continuació, afegirem una darrera condició a exigir als nombres t_n que ens permeti assegurar l'existència d'un semiplà dins el conjunt estable K_F.

Tindrem en compte la reducció del problema d'estabilitat de la secció prèvia (Lema 5.11), així com la següent desigualtat. Per les estimacions fetes sobre la funció L_n (Lema 5.6) i la desigualtat (5.1), si Z_{n+1} és definit, aleshores

$$\begin{aligned}\alpha_n \operatorname{Im}(Z_{n+1}) &= \alpha_n \left(\operatorname{Im}(L_n(Z_n')) - 4/\alpha_n\right) \\ &= \alpha_n \operatorname{Im}(L_n(F_n^{\tau_n}(Z_n'))) - 4 \\ &> \operatorname{Im}(F_n^{\tau_n}(Z_n')) - t_n - 6 > \operatorname{Im}(Z_n) - (t_n + 8).\end{aligned}$$

Així, si Z_n és definit, per inducció obtindrem que

$$\beta_{n-1} \operatorname{Im}(Z_n) \geq \operatorname{Im}(Z_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k-1}(t_k + 8), \quad \beta_{-1} = 1, \quad \beta_n = \beta_{n-1}\alpha_n \quad \forall n \geq 1. \tag{5.4}$$

Lema 5.12. *Suposem que podem prendre la successió $\{t_n\}_{n\geq 0}$, implícita en la construcció de $\{F_n\}_{n\geq 0}$, de manera que F_n satisfaci les desigualtats fonamentals (5.1) quan $\operatorname{Im}(Z) > t_n$, i de manera que*

$$\Phi := \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n < +\infty.$$

Aleshores, $\mathbb{H}_{\Phi+32} = \{Z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(Z) > \Phi + 32\} \subseteq K_F$.

Demostració. Es suficient veure que, si $\operatorname{Im}(Z) > \Phi + 32$, podem definir infinits termes de la successió $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ (Lema 5.11). Clarament, $t_0 < \Phi$, de manera que Z_1 és definit. Acabem la demostració per inducció sobre n. Per la desigualtat (5.4), si Z_n és definida, amb $n \geq 1$, aleshores

$$\begin{aligned}\beta_{n-1} \operatorname{Im}(Z_n) &\geq \operatorname{Im}(Z) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k-1} t_k - \sum_{k=0}^{n-1} 8\beta_{k-1} \\ &= [\operatorname{Im}(Z) - (\Phi + 32)] + \sum_{k>n} \beta_{k-1} t_k + 8\left[4 - \sum_{k=0}^{n} \beta_{k-1}\right] + \beta_{n-1}(t_n + 8).\end{aligned}$$

Recordem que $\beta_{k+2} < \beta_k/2$ per tot $k \geq -1$ (Proposició 4.11), $\beta_{-1} = 1$ i $\beta_0 = \alpha < 1$. Aleshores,

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_{k-1} < 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (1/2)^k = 4, \quad \forall m \geq 0.$$

Amb això, podem concloure que $\operatorname{Im}(Z_n) \geq t_n + 8$, de manera que Z_{n+1} és definit. □

Final de la demostració

Només resta veure que podem escollir els valors reals $t_n > 0$ com en la hipòtesi del lema previ. En efecte, demostrarem el següent lema. Remarquem que l'elecció de t_n només depèn de α_n.

Lema 5.13 (La fita inferior de Yoccoz)**.** *Existeix una constant universal C_0 tal que, per tot $0 < \alpha < 1$ real, i per tot $F \in \widehat{S}_\alpha$,*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(Z) \geq C_0 \quad &\Longrightarrow \quad |F'(Z) - 1| \leq \frac{1}{4}, \\ \operatorname{Im}(Z) \geq \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\alpha} + C_0 \quad &\Longrightarrow \quad |F(Z) - Z - \alpha| \leq \frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

Demostració. Provarem que existeix una constant C_0 tal que, per tot $0 < \alpha < 1$, i per tot $F \in \widehat{S}_\alpha$,

$$\operatorname{Im}(Z) > C_0 \quad \Longrightarrow \quad |F(Z) - Z - \alpha| < \frac{1}{4} e^{-2\pi(\operatorname{Im}(Z) - C_0)}, \quad |F'(Z) - 1| < \frac{1}{4} e^{-2\pi(\operatorname{Im}(Z) - C_0)}.$$

És clar que el lema és conseqüència immediata d'aquest fet.

Observem que, per tot $0 < \alpha < 1$, i tota funció $F \in \widehat{S}_\alpha$, és $F - \alpha \in \widehat{S}_0$, que hem vist és un espai compacte (Lema 5.4). És immediat comprovar que el conjunt de les funcions $u(Z) := F(Z) - Z - \alpha$, i el conjunt de les funcions $u'(Z) = F'(Z) - 1$ formen, també, un espai compacte. A més, u és holomorfa, 1-periòdica en $\mathbb{H}$, i tendeix a 0 quan $\mathrm{Im}(Z) \to +\infty$, fet que ens permet obtenir les expansions

$$u(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k Z}, \quad u'(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\pi i k c_k e^{2\pi i k Z},$$

com ja hem vist anteriorment. En particular, obtenim que les funcions $u(Z)/E(Z)$, i $u'(Z)/E(Z)$ són acotades quan $\mathrm{Im}(Z) \to +\infty$, i per tant ho són en el semiplà tancat $\overline{\mathbb{H}}_1$. Per compacitat, existirà una fita uniforme K tal que

$$|u(Z)| \leq K e^{-2\pi \,\mathrm{Im}(Z)}, \quad |u'(Z)| \leq K e^{-2\pi \,\mathrm{Im}(Z)}$$

sempre que $\mathrm{Im}(Z) \geq 1$. Escollint $C_0 > \sup\{\log(4K)/2\pi, 1\}$, obtindrem que

$$\mathrm{Im}(Z) > C_0 \quad \Longrightarrow \quad K e^{-2\pi \,\mathrm{Im}(Z)} < \frac{1}{4} e^{-2\pi(\mathrm{Im}(Z) - C_0)},$$

fet que conclou la prova del lema. □

Així doncs, prendrem

$$t_n \coloneqq \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\alpha_n} + C_0 \quad (t_n \geq C_0),$$

de manera que, quan α sigui un nombre de Brjuno, la sèrie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} + C_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \leq \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha) + 4C_0$$

convergeixi (Proposició 4.16), i el lema 5.11 ens diu que

$$\left\{ Z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(Z) > \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha) + 4C_0 + 32 \right\} \subseteq K_F.$$

Definim, per tant, $\rho \coloneqq \exp\{-\Phi(\alpha) - C_1\}$, on $C_1 \coloneqq 2\pi(4C_0 + 32)$. Aleshores, ja hem vist que $\mathbb{D}_\rho \subseteq K_f$, fet que conclou la prova del teorema de Yoccoz.

6 Optimitat de la condició de Brjuno i la família quadràtica

En aquest capítol comentarem diferents resultats en relació, d'una o altra manera, amb el treball de Yoccoz que hem analitzat fins ara. Per una banda, veurem altres aplicacions de l'esquema de renormalització que hem descrit en el capítol anterior. Per l'altra, comentarem el paper del polinomi quadràtic $P_\alpha(z) = \lambda z + z^2$ en el treball de Yoccoz en el problema de Siegel.

6.1 Solució del problema de Siegel i altres aplicacions

Juntament a la seva prova del teorema de Brjuno, en [2], J.C. Yoccoz enuncia i demostra el següent resultat original, d'enorme rellevància. Aquest resol completament el problema de linearització de Siegel.

Teorema 6.1 (Optimitat de la condició de Brjuno). *Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, i $\alpha \notin \mathcal{B}$, aleshores existeix un 'germ' de funció holomorfa de la forma $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ no linearitzable.*

És a dir, la inclusió $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ donada pel teorema de Brjuno és, de fet, una igualtat. La demostració original d'aquest teorema es basa en el mateix esquema de renormalització que Yoccoz utilitza en la seva prova alternativa del teorema de Brjuno i utilitza, estimacions obtingudes mitjançant tècniques d'anàlisi quasi-conforme. De fet, Yoccoz demostra que el polinomi quadràtic $P_\alpha(z) = \lambda z + z^2$ és no linearitzable quan $\alpha \notin \mathcal{B}$, mostrant que P_α satisfà la *propietat de petits cicles*. Això és, tot entorn de l'origen conté infinites òrbites periòdiques per P_α. Aquest fet va impulsar la pregunta de si aquesta obstrucció és necessària per evitar que una funció sigui linearitzable. L'any 1990, Ricardo Pérez-Marco respon aquesta pregunta en la seva tesi sota la direcció de Yoccoz, utilitzant també els mètodes geomètrics que hem descrit.

Teorema 6.2 (Pérez-Marco). *(a) Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ satisfà*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty \tag{6.1}$$

i el 'germ' $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ és no linearitzable, aleshores existeix una successió d'òrbites periòdiques que s'acumulen al voltant de l'origen, el període de les quals són una successió parcial $\{q_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}} = +\infty.$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, i la sèrie (6.1) divergeix, aleshores existeix una funció univalent $f \in S_\alpha$ per la que tota òrbita positiva continguda dins $\mathbb{D}$ s'acumula en l'origen. Així, f és no linearitzable i no satisfà la propietat de petits cicles.

6.2 Optimitat de la família quadràtica

Acabem de veure que el polinomi quadràtic P_α té un paper significatiu en la conclusió del problema de Siegel. Abans del seu treball en relació amb aquest problema, Yoccoz mostra interès en el cas d'aquest polinomi. Alguns resultats de H. Cremer ja mostraven que el polinomi quadràtic és, en certa manera, "menys linearitzable" que la resta de 'germs'. Aquest fet és precisat per Yoccoz en el següent teorema.

Teorema 6.3 (Optimitat de la família quadràtica). *Si el polinomi quadràtic $P_\alpha(z) = \lambda z + z^2$, amb $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, és linearitzable, aleshores tot 'germ' de funció holomorfa de la forma $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ és linearitzable.*

La demostració de Yoccoz es basa, de nou, en estimacions obtingudes a partir de tècniques de cirurgia quasi-conforme. La demostració que estudiarem aquí és una versió de Xavier Buff i John H. Hubbard de la mateixa, que evita l'ús d'aquestes tècniques, i que podem trobar al treball [1].

És de particular interès, en aquesta prova, el fet que utilitzem elements de la teoria global de la dinàmica complexa. Tot i que no utilitzarem conceptes ni resultats propis de l'estudi de sistemes dinàmics generats per una funció racional, part important de la demostració utilitza arguments, en essència, propis d'aquest context. De fet, la feina que s'ha dut a terme en el text que segueix a continuació, és adaptar part dels arguments i resultats presents en la demostració original, per poder oferir una prova completa dins el marc d'aquest treball.

Demostració. Sigui f un 'germ' de funció holomorfa, de la forma $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$. Conjugant f per una homotècia, podem suposar que és holomorfa en el disc unitat,

$$f(z) = \lambda z + a_0 z^2 + u(z), \quad u(z) = \sum_{k=3}^{+\infty} c_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Considerarem les famílies de funcions holomorfes $\{f_a : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\}_{a\in\mathbb{C}}$, i $\{g_b : \mathbb{D}_{1/|b|} \to \mathbb{C}\}_{b\in\mathbb{C}^*}$, on

$$f_a(z) := \lambda z + a z^2 + u(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad g_b(z) := \lambda z + z^2 + \frac{1}{b} u(bz) \quad \forall z \in \mathbb{D}_{1/|b|}.$$

Aleshores, $f(z) = f_{a_0}(z)$, i també

$$f_a(z) = \frac{1}{a}\, g_{1/a}(az) \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{6.2}$$

Demostrarem que, si P_α és linearitzable, aleshores f_a és linearitzable per tot $a \in \mathbb{C}$. Per una banda, utilitzarem que g_b és una pertorbació del polinomi P_α, i veurem que, per valors de $|b|$ prou petits, g_b és proper a P_α, i n'hereta la propietat de ser linearitzable. Més concretament, demostrarem que si P_α és linearitzable, podrem prendre constants $r_0, r_1 > 0$ tals que, si $|b| \leq r_0$, aleshores $\mathbb{D}_{r_1} \subseteq K_{g_b}$, on K_{g_b} és el conjunt estable de g_b. Aleshores, si $|a| \geq 1/r_0$, de la igualtat (6.2) obtindrem que $\mathbb{D}_{r_1/|a|} \subseteq K_{f_a}$, de manera que f_a és linearitzable (Proposició 3.25). Per altra banda, si $|a| < 1/r_0$, veurem que $\mathbb{D}_{r_0 r_1} \subseteq K_{f_a}$ com a conseqüència del principi del mòdul màxim, i haurem demostrat el teorema.

Comencem remarcant determinades propietats del polinomi P_α que volem traslladar a determinades restriccions de les funcions g_b. Observem que, si $v = P_\alpha(\omega) \in \mathbb{D}_4$, aleshores

$$|\omega| = \left| \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4v}}{2} \right| < \frac{1 + \sqrt{17}}{2} < 3,$$

és a dir, $U_0 := P_\alpha^{-1}(\mathbb{D}_4) \subseteq \mathbb{D}_3$, de manera que U_0 és relativament compacte en $\mathbb{D}_4$. Considerarem la restricció $P_\alpha : U_0 \to \mathbb{D}_4$, que és una *aplicació pròpia* (la pre-imatge de tot compacte de $\mathbb{D}_4$ és un compacte de U_0) de *grau* 2 (cada punt $v \in \mathbb{D}_4$ té dues pre-imatges, comptades amb multiplicitat). De fet, l'equació $P_\alpha(\omega) = v$ té dues solucions diferents per tot $v \in \mathbb{D}_4$, excepte pel *valor crític* $v_0 := -\lambda^2/4 \in \mathbb{D}_4$, de *punt crític* $\omega_0 := -\lambda/2 \in U_0$.

Formalitzem ara el fet que g_b sigui una pertorbació de P_α. El següent lema ens permetrà una comparació amb aquest polinomi a través del teorema de Rouché.

Lema 6.4. *Quan $b \to 0$, el domini de definició de g_b conté eventualment qualsevol compacte de $\mathbb{C}$, i les famílies $\{g_b\}_{b\in\mathbb{C}^*}$, i $\{g_b'\}_{b\in\mathbb{C}^*}$ tendeixen uniformement sobre compactes de $\mathbb{C}$ al polinomi quadràtic P_α, i a la seva derivada P_α', respectivament.*

Demostració. És suficient demostrar que $u(bz)/b$, i $u'(bz)$ tendeixen uniformement sobre compactes a la funció constant 0. Fixat $0 < \varepsilon < 1$, la sèrie que defineix la funció u és absolutament convergent en $\overline{\mathbb{D}}_\varepsilon$, i es satisfà

$$|u(z)| \leq \sum_{k=3}^{+\infty} |c_k| \varepsilon^k =: M < +\infty \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon.$$

Ara, donat $K \subseteq \mathbb{C}$ compacte, prendrem $b_0 \in \mathbb{C}^*$ de manera que $K \subseteq \overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon/|b_0|} \subseteq \mathbb{D}_{1/|b_0|}$. Si $b \in \mathbb{C}^*$ amb $|b| \leq |b_0|$, per tot $z \in K$, tindrem

$$\left| \frac{1}{b} u(bz) \right| \leq \frac{1}{|b|} \sum_{k=3}^{+\infty} |c_k b^k z^k| \leq \frac{|b|^2}{|b_0|^3} \sum_{k=3}^{+\infty} |c_k| \varepsilon^k \left| \frac{b}{b_0} \right|^{k-3} \leq \frac{|b|^2}{|b_0|^3} M,$$

fet que prova la hipòtesi per la família $\{g_b\}_{b\in\mathbb{C}^*}$. La convergència de $u'(bz)$ es demostra de forma anàloga, ja que $u' \in \mathcal{O}(z^2)$. $\square$

Te sentit, doncs, definir $g_0 := P_\alpha$. Tal i com hem fet amb P_α, considerarem $U_b := g_b^{-1}(\mathbb{D}_4) \cap \mathbb{D}_4$, i les restriccions $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$. Veiem que, per $|b|$ prou petit, conserven les propietats de P_α.

Lema 6.5. *Existeix un valor real $0 < \varepsilon < 1$ tal que, per tot $b \in \mathbb{D}_\varepsilon$, els oberts U_b són relativament compactes en $\mathbb{D}_4$, i les restriccions $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$ són aplicacions pròpies de grau 2 amb un únic punt crític $\omega_b \in U_b$.*

Demostració. Comencem prenent $0 < \varepsilon < 1$ de manera que, per tot $b \in \mathbb{D}_\varepsilon$ i, per tot $z \in \overline{\mathbb{D}}_4$, és

$$|g_b(z) - P_\alpha(z)| = \left|\frac{1}{b}\, u(bz)\right| < 2, \quad |g_b'(z) - P_\alpha'(z)| = |u'(bz)| < 1.$$

Fixem, doncs, $|b| < \varepsilon$. Donat $v \in \mathbb{D}_4$, comptem ara el nombre de solucions de l'equació $g_b(z) = v$ en $\mathbb{D}_4$. Per tot $z \in \partial\mathbb{D}_4$, tenim

$$|(g_b(z) - v) - (P_\alpha(z) - v)| < 2, \quad |P_\alpha(z) - v| \geq |P_\alpha(z)| - 4 \geq |z|^2 - |\lambda z| - 4 > 2.$$

De fet, la primera desigualtat és vàlida per tot $z \in \partial\mathbb{D}_3$, on $|P_\alpha(z) - v| \geq 2$. El teorema de Rouché ens diu que, per tot $v \in \mathbb{D}_4$, les equacions $g_b(z) = v$, i $P_\alpha(z) = v$ tenen el mateix nombre de solucions tant en $\mathbb{D}_4$ com en $\mathbb{D}_3$, de manera que $U_b \subseteq \mathbb{D}_3$ és relativament compacte en $\mathbb{D}_4$, i $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$ és una aplicació pròpia de grau 2.

Resta veure que existeix un únic punt crític $\omega_b \in U_b$. Aquests són, exactament, els punts de U_b pels que s'anul·la g_b'. Per tot $z \in \partial\mathbb{D}_4$, tenim

$$|P_\alpha'(z)| = |\lambda + 2z| \geq 2|z| - 1 = 7 > 1.$$

Tenint en compte l'elecció de ε, el teorema de Rouché ens diu que existeix un únic $\omega_b \in \mathbb{D}_4$ tal que $g_b'(\omega_b) = 0$. Ara,

$$0 = |g_b'(\omega_b)| \geq 2\,|\omega_b| - |\lambda + u'(b\,\omega_b)| \quad \Longrightarrow \quad 1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,|u'(b\,\omega_b)| \geq |\omega_b|,$$

de manera que $|g_b(\omega_b)| \leq |\lambda\,\omega_b| + |\omega_b|^2 + |u(b\,\omega_b)/b| < 4$ i, per tant, $\omega_b \in U_b$. □

Podem definir, per tant, una funció $b \mapsto \omega_b$ en el disc $\mathbb{D}_\varepsilon$. Observem ara que, prenent ε més petit si cal, podem suposar que tal funció és holomorfa. En efecte, la funció $G(z, b) := g_b'(z)$ és holomorfa respecte qualsevol variable, si fixem l'altra, i $g_0'(\omega_0) = P_\alpha'(\omega_0) = 0$, $g_0''(\omega_0) = 2 \neq 0$. Que $b \mapsto \omega_b$ és holomorfa en un entorn de 0, posem $\mathbb{D}_{\varepsilon_0}$, on $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$, és conseqüència immediata del teorema de la funció implícita.

Un anàlisi del comportament dels iterats de ω_b sota la funció g_b ens permetrà demostrar que g_b és linearitzable per valors del paràmetre b adients. Si veiem que, per tot $n \geq 0$, els iterats $g_b^n(\omega_b)$ són ben definits, i dins U_b, podrem definir el conjunt

$$\mathcal{P}_b := \bigcup_{n=1}^{+\infty} g_b^n(\omega_b),$$

que anomenarem el *conjunt post-crític* de g_b. El següent lema ens donarà un criteri, en termes del conjunt $\mathcal{P}_b$, per veure que $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$ és linearitzable. En cas que ho sigui, notarem $\Delta_b := \Delta_{g_b}$ el disc de Siegel de g_b en l'origen (Definició 3.27). Cal recordar que les definicions tant del conjunt estable, com del disc de Siegel d'un sistema local, depenen del domini on estiguem considerant el sistema; en el nostre cas, prendrem sempre les funcions g_b restringides sobre els dominis U_b. Una darrera observació important és que, per definició dels conjunts U_b, tant $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$, com $g_b : \mathbb{D}_4 \to \mathbb{C}$ donen lloc al mateix conjunt estable, que notarem $K_b := K_{g_b}$. D'aquest fet deduïm que, en cas que g_b sigui linearitzable, Δ_b és la component connexa del 0 de l'interior del conjunt K_b (Proposició 3.28).

Lema 6.6. *Fixem $|b| < \varepsilon_0$. Aleshores, $\omega_b \in K_b$ i,*

(a) o bé g_b és linearitzable i la vora del disc de Siegel és $\partial\Delta_b \subseteq \overline{\mathcal{P}}_b$,

(b) o bé g_b és no linearitzable i 0 és un punt no aïllat de $\overline{\mathcal{P}}_b$.

Demostració. Començarem definint

$$U_b^n := \bigcap_{k=0}^{n-1} g_b^{-k}(U_b) \quad \forall n \geq 1,$$

que són entorns oberts del conjunt K_b, amb $U_b^m \subseteq U_b^n$ per tot $m > n$, i $U_b^1 = U_b$. Aleshores, les funcions $g_b^n : U_b^n \to \mathbb{D}_4$ són aplicacions pròpies de grau 2^n. En particular, si $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{D}_4$ és un obert simplement connex que no conté cap punt de la òrbita positiva de ω_b sota g_b (possiblement finita), podrem definir qualsevol de les 2^n branques de la inversa de g_b^n en $\mathcal{U}$ per tot $n \geq 1$, a partir de l'elecció d'una pre-imatge d'un punt de $\mathcal{U}$ i mitjançant continuació analítica. Observem que una branca de la inversa de g_b^n, prendrà valors dins $U_b^n \subseteq \mathbb{D}_4$.

Observem també que, de fet, K_b és relativament compacte en U_b^n per tot $n \geq 1$. En efecte, si $z \in \overline{K}_b$ és $z \notin U_b$, aleshores $g_b(z) \notin \mathbb{D}_4$. Com U_b és relativament compacte en $\mathbb{D}_4$, per continuïtat de g_b existirà algun punt $z' \in K_b$ en un entorn de z tal que $g_b(z') \notin U_b$, contradient la definició de K_b. En general, si $n \geq 1$, i $z \in \overline{K}_b$ és $z \in U_b^n \setminus U_b^{n+1}$, aleshores $g_b^n(z) \in \mathbb{D}_4 \setminus U_b$, de manera que $g_b^{n+1}(z) \notin \mathbb{D}_4$, i arribarem a la mateixa contradicció que en el cas inicial.

Provarem que $\omega_b \in K_b$ per reducció a l'absurd. Suposarem que l'òrbita de ω_b sota g_b és finita. És a dir, $\omega_b \in U_b^m \setminus U_b^{m+1}$ per cert $m \geq 1$. Aleshores $g_b^k(\omega_b) \notin U_b^{m+1}$ per tot $k = 0, \ldots, m$. És a dir, U_b^{m+1} és un entorn obert de $\overline{K}_b$ que no conté cap punt de l'òrbita positiva de ω_b.

Suposem primer que g_b és linearitzable. El disc de Siegel de g_b en l'origen satisfà $\partial\Delta_b \subseteq \overline{K}_b \subseteq U_b^{m+1}$. Així, donat un punt $z_0 \in \partial\Delta_b$, podrem prendre un entorn $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{D}_4$ simplement connex de z_0 que no contingui cap punt de l'òrbita de ω_b per g_b. Sigui c_0 un punt de $\mathcal{U} \cap \Delta_b \neq \emptyset$. Com $g_b : \Delta_b \to \Delta_b$ és conjugat a una rotació irracional, per tot $n \geq 0$ existeix una única n-èsima pre-imatge de c_0 dins Δ_b, que notarem c_{-n}. Per tot $n \geq 0$, podrem definir $h_n : \mathcal{U} \to U_b^n$ la branca de la inversa de $g_b^n : U_b^n \to \mathbb{D}_4$ en $\mathcal{U}$ tal que $h_n(c_0) = c_{-n}$. Considerem el conjunt obert

$$\mathcal{V} := \bigcup_{n \geq 1} h_n(\mathcal{U}) \subseteq U_b.$$

És clar que $g_b(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \cup \mathcal{U}$. A continuació, demostrarem que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, de manera que $g_b(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$. És senzill veure que la successió $\{R^n\}_{n \geq 0}$ de funcions iterades d'una rotació irracional R en $\mathbb{D}$ admet una parcial convergent a la identitat en $\mathbb{D}$ (Corol·lari 3.30). Conjugant g_b^{-1} amb una rotació irracional en $\mathbb{D}$, obtindrem que $\{g_b^{-n} : \Delta_b \to \Delta_b\}_{n \geq 1}$ admet una parcial $\{g_b^{-n_k}\}_{k \geq 0}$ que convergeix puntualment a la identitat en Δ_b. Tal successió parcial forma una família normal en Δ_b (Teorema 2.35), de manera que podem suposar que la convergència és uniforme sobre compactes de Δ_b. La família $\{h_{n_k}\}_{k \geq 0}$ és normal en $\mathcal{U}$, i $h_{n_k}(z) = g_b^{-n_k}(z)$ per tot $z \in \mathcal{U} \cap \Delta_b$, $k \geq 0$. Així, qualsevol de les parcials convergents de $\{h_{n_k}\}_{k \geq 0}$ en $\mathcal{U}$, convergeix a la identitat en $\mathcal{U} \cap \Delta_b$ i, per tant, convergeix uniformement sobre compactes a la identitat en $\mathcal{U}$. Així, per tot $v \in \mathcal{U}$, el teorema de Rouché ens diu que $v = h_n(z)$ per certs $n \geq 1$ i $z \in \mathcal{U}$. En efecte, si $\{h_{m_k}\}_{k \geq 0}$ convergeix uniformement sobre compactes a la identitat en $\mathcal{U}$, donat $\delta > 0$ tal que $\overline{D(v, \delta)} \subseteq \mathcal{U}$, podem prendre $k \geq 0$ prou gran tal que

$$|(h_{m_k}(z) - v) - (z - v)| = |h_{m_k}(z) - z| < \delta = |z - v| \quad \forall z \in \partial D(v, \delta)$$

i, aleshores, les equacions $h_{m_k}(z) = v$, i $z = v$ tenen el mateix nombre de solucions en $D(v, \delta)$.
Així doncs, $g_b(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, de manera que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathring{K}_b$. Ara, $\mathcal{U} \cup \Delta_b$ és un entorn connex de l'origen i, per tant, $z_0 \in \mathcal{U} \cup \Delta_b \subseteq \Delta_b$. Contradicció.

Suposem ara que g_b és no linearitzable. Com $0 \in K_b \subseteq U_b^{m+1}$, podem prendre un entorn simplement connex de l'origen, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{D}_4$, que no contingui cap punt de l'òrbita positiva de ω_b per g_b. Podem definir $h_n : \mathcal{U} \to U_b^n$ la branca de la inversa de $g_b^n : U_b^n \to \mathbb{D}_4$ tal que $h_n(0) = 0$, per cada $n \geq 0$, on convenim $h_0 = g_b^0$ és la identitat en $\mathcal{U}$. Observem que, aleshores, $h_n = h_1^n$ per tot $n \geq 0$. Considerem les funcions

$$\phi_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^i} h_i(z) \quad \forall z \in \mathcal{U},\ n \geq 1,$$

on $\lambda = h_1'(0) = 1/g_b'(0)$. Observem que $|\phi_n(z)| < 4$ per tot $z \in \mathcal{U}$, de manera que les funcions ϕ_n formen una família normal en $\mathcal{U}$. Observem també, que $\phi_n'(0) = 1$ per tot $n \geq 1$. Podem veure, de forma anàloga a la prova de la proposició 3.25, que el límit de qualsevol parcial convergent de la successió $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ linearitza h_1 en $\mathcal{U}$ i, per tant, linearitza g_b en el mateix domini. Contradicció.

Així doncs, $\omega_b \in K_b$. Observem que, si g_b és linearitzable, de fet hem demostrat que tot entorn d'un punt en $\partial\Delta_b$ conté un element de $\mathcal{P}_b$. Si, en canvi, g_b és no linearitzable, és senzill veure que tot entorn de l'origen conté un punt de $\mathcal{P}_b$ diferent del propi 0. En efecte, suposem que l'origen és un punt de Cremer, i suposem que $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{D}_4$ és un entorn simplement connex de l'origen tal que $(\mathcal{U} \setminus \{0\}) \cap \mathcal{P}_b = \emptyset$. Aleshores, les funcions $g_b^n : U_b^n \to \mathbb{D}_4$, amb $|(g_b^n)'(0)| = |g_b'(0)|^n = 1$, admeten inverses locals al voltant de l'origen (Observació 2.9), que podem estendre al domini $\mathcal{U}$ mitjançant continuació analítica, per tot $n \geq 1$. Com abans, deduïm d'aquest fet que g_b és linearitzable en el domini $\mathcal{U}$, i arribem a contradicció. □

Amb la descripció del conjunt $\mathcal{P}_b$ que acabem de veure, encarem el final de la demostració.

Lema 6.7. *Suposem que $g_0 = P_\alpha : U_0 \to \mathbb{D}_4$ és linearitzable, i que el seu disc de Siegel, Δ_0, conté el disc $\mathbb{D}_{2r_1}$ per cert $0 < r_1 < 4$. Aleshores, si definim $r_0 := \varepsilon_0 r_1/16$, i prenem $|b| \leq r_0$, la funció $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$ és linearitzable, i el seu disc de Siegel, Δ_b, conté el disc $\mathbb{D}_{r_1}$.*

Demostració. Quan $|b| \leq r_0 < \varepsilon_0$, hem vist que $\omega_b \in K_b \subseteq \mathbb{D}_4$. Recordem que l'aplicació $b \mapsto \omega_b$ és holomorfa en $\mathbb{D}_{\varepsilon_0}$, de manera que les funcions $\mu_n : \mathbb{D}_{\varepsilon_0} \to \mathbb{D}_8$ definides com $\mu_n(b) := g_b^n(\omega_b) - g_0^n(\omega_0)$ per tot $b \in \mathbb{D}_{\varepsilon_0}$, són funcions holomorfes tals que $\mu_n(0) = 0$ per tot $n \geq 0$. Aplicant el lema de Schwarz (Teorema 2.14) a les funcions escalades $\tilde{\mu}_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, que definim $\tilde{\mu}_n(\tilde{b}) := \mu_n(\varepsilon_0 \tilde{b})/8$ per tot $b \in \mathbb{D}_{\varepsilon_0}$, $n \geq 0$, obtindrem la desigualtat

$$|g_b^n(\omega_b) - P_\alpha^n(\omega_0)| = |\mu_n(b)| = 8|\tilde{\mu}_n(b/\varepsilon_0)| \leq 8|b|/\varepsilon_0 \quad \forall n \geq 0,\ b \in \mathbb{D}_{\varepsilon_0}.$$

Si $P_\alpha : U_0 \to \mathbb{D}_4$ és linearitzable amb $\mathbb{D}_{2r_1} \subseteq \Delta_0$, aleshores el punt crític ω_0 no és a Δ_0, ja que el polinomi $P_\alpha : \Delta_0 \to \Delta_0$ és un automorfisme conforme. En particular, $|P_\alpha^n(\omega_0)| \geq 2r_1$ per tot $n \geq 0$. D'aquesta manera, per $|b|$ prou petit, la fita sobre la distància amb els iterats de ω_b per g_b que acabem de veure ens diu que aquests es mantenen també allunyats del 0. En efecte, si $|b| \leq r_0$, aleshores

$$|P_\alpha^n(\omega_0)| - |g_b^n(\omega_b)| \leq |g_b^n(\omega_b) - P_\alpha^n(\omega_0)| \leq 8\, r_0/\varepsilon_0 \leq r_1/2,$$

de manera que $|g_b^n(\omega_b)| \geq |P_\alpha^n(\omega_0)| - r_1/2 > r_1$ per tot $n \geq 0$. Per tant, $0 \notin \overline{\mathcal{P}}_b$, d'on deduïm que $g_b : U_b \to \mathbb{D}_4$ és linearitzable i $\partial\Delta_b \subseteq \overline{\mathcal{P}}_b$ (Lema 6.6). En particular, $\mathbb{D}_{r_1} \subseteq \Delta_b$. □

Hem vist, per tant, que si $a \notin \mathbb{D}_{1/r_0}$, aleshores $f_a : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ és linearitzable i $\mathbb{D}_{r_1/|a|} \subseteq \Delta_{f_a}$. Acabem veient què passa altrament.

Lema 6.8. *Per tot $a \in \mathbb{D}_{1/r_0}$, la funció $f_a : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ és linearitzable, i el seu disc de Siegel, Δ_{f_a}, conté el disc $\mathbb{D}_{r_0 r_1}$.*

Demostració. Fixarem $z \in \mathbb{D}_{r_0 r_1}$. Demostrarem per inducció en n que les funcions $a \mapsto f_a^n(z)$, per tot $n \geq 0$, són contínues en $\overline{\mathbb{D}}_{1/r_0}$, holomorfes en l'interior del mateix domini, i prenen valors dins $\mathbb{D}$. La hipòtesi és certa per $n = 0$, ja que $r_0 r_1 = \varepsilon\, r_1^2/16 < \varepsilon < 1$, i la funció en qüestió és la funció constant z en $\mathbb{D}_{1/r_0}$. Suposem que la hipòtesi és certa per $n - 1 \geq 0$. Aleshores,

$$f_a^n(z) = \lambda \cdot f_a^{n-1}(z) + a \cdot \left[f_a^{n-1}(z)\right]^2 + u\left(f_a^{n-1}(z)\right) \quad \forall a \in \overline{\mathbb{D}}_{1/r_0},$$

de manera que $a \mapsto f_a^n(z)$ és clarament contínua en $\overline{\mathbb{D}}_{1/r_0}$ i holomorfa en el disc $\mathbb{D}_{1/r_0}$. Hem vist que, si $|a| = 1/r_0$ i el polinomi P_α és linearitzable, aleshores $\mathbb{D}_{r_0 r_1} = \mathbb{D}_{r_1/|a|} \subseteq \Delta_{f_a}$ (Lema 6.7). D'aquest fet, deduïm que $|f_a^n(z)| < 1$ quan $|a| = 1/r_0$ i, aplicant el principi del mòdul màxim a la funció $a \mapsto f_a^n(z)$, obtindrem la mateixa desigualtat per tot $a \in \mathbb{D}_{1/r_0}$, i es satisfà la hipòtesi d'inducció per a n. □

Hem completat la prova del teorema de Yoccoz. □

7 Conclusions

La teoria local de punts fixos és només una de les possibles aproximacions a la teoria de sistemes dinàmics en una variable complexa. Aquesta àrea de les matemàtiques admet, i requereix, l'ús de tècniques en nombroses disciplines, cobrint un ampli espectre des de l'anàlisi, a la combinatòria, passant per la topologia i la geometria. Aquesta multidisciplinarietat, i la seva relativament curta història, converteixen la teoria de sistemes dinàmics (i en particular de dinàmica holomorfa) en un camp modern i de gran atractiu de cara la investigació matemàtica. A nivell individual, constitueix un terreny ple de recursos per l'aprenentatge i el creixement matemàtics personals.

El darrer paràgraf recull el fil principal de la conclusió d'aquest projecte. Per una banda, aquest atractiu ha estat una de les motivacions a realitzar el projecte sobre aquest tema. Per l'altra, plantejar un objectiu concret una mica ambiciós, com bé pot ser la demostració del teorema de Siegel-Brjuno, pot comportar dificultats en compaginar el fet de construir un marc sòlid pel problema, amb el fet d'assolir el propi objectiu, tenint en compte tant l'espai com la possible dificultat del problema.

En aquest sentit, la teoria local de punts fixos, així com el problema de Siegel, són una bona introducció al món de la dinàmica complexa. La base teòrica per l'exposició d'aquests temes és força continguda en resultats bàsics de l'anàlisi complexa, i altres àrees importants com ara la topologia no juguen un paper tant important com sí ho fa en l'estudi de la dinàmica global d'un sistema. Aquest fet ha facilitat que puguem parar atenció al detall, per així obtenir una comprensió força profunda del tema.

Tot i la solidesa que hem pogut donar al text definitiu, certs punts importants per la comprensió de la demostració del teorema de Siegel-Brjuno en relació amb el control de la geometria del seu esquema de renormalització, no han estat tractats amb el rigor pel que es guia la resta del projecte. Tot i així, considerem que l'esperit de la prova queda totalment reflectit, i els punts tècnics a aprofundir queden afitats dins la demostració.

Així doncs, el projecte satisfà el seu paper introductori, i assoleix amb força solidesa l'objectiu d'exposar el problema de linearització de Siegel en termes de la demostració de Yoccoz del teorema de de Siegel-Brjuno, plantejant possibles fils a seguir per aprofundir en el tema.

Referències

[1] Buff, X. & Hubbard, J. H. *Dynamics in One Complex Variable*. Manuscrit en preparació.

[2] Yoccoz, J. C. (1995). *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques.* Dins *Petits diviseurs en dimension 1* (p. 2-88). França: Asterisque.

[3] Pérez-Marco, R. (1992, Febrer). *Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe*. Presentat al *Séminaire N. Bourbaki*, 1991-1992, exp. num. 753, p. 273-310

[4] Abate, M. (2010). *Discrete Holomorphic Local Dynamical Systems.* Dins Gentili G. et al. (eds.), *Holomorphic Dynamical Systems-Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy, July 7-12, 2008.* (p. 1-32). Berlin: Springer-Verlag.

[5] Milnor, J. (2006). *Dynamics in One Complex Variable (3rd ed.).* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[6] Carleson, L. & Gamelin, T.W. (1993). *Complex Dynamics.* New York: Springer-Verlag.

[7] Gamelin, T.W. (2001). *Complex Analysis.* New York: Springer Science+Business Media.

[8] Schiff, J.L. (1993). *Normal Families.* New York: Springer-Verlag.

[9] Henrici, P. (1974). *Formal Power Series.* Dins *Applied and computational complex analysis, Volume 1* (p. 1-65). New York: Wiley-Interscience.

[10] Lehto, O. (1987). *Univalent functions and Teichmüller spaces.* New York: Springer-Verlag.

[11] Jost, J. (1997). *Compact Riemann Surfaces: an introduction to Contemporary Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag

[12] Siegel C.L. (1942). *Iteration of analytic functions.* Dins *Annals of Mathematics (Second Series), Volume 43, 4* (p. 607-612). Princeton: Princeton University.

[13] Brjuno A.D. (1971). *Analytical form of differential equations.* Dins *Transactions of the Moscow Mathematical Society, Volume 25* (p. 131-288). Moscow.