



UNIVERSITAT^{DE}
BARCELONA

Trabajo de final de grado
GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas e Informática
Universidad de Barcelona

COHOMOLOGÍA DE ESPACIOS
DE CONFIGURACIONES EN EL
PLANO

Autora: Solange Coronel

Director: Dr. Federico Cantero Morán
Realizado en el: Departamento
de Matemáticas e Informática

Barcelona, 21 de julio de 2018

Abstract

We will compute the cohomology groups of the unordered configuration spaces of the plane \mathbb{R}^2 with \mathbb{Z} coefficients, and with \mathbb{Z}_p we'll only give the proof in case $p = 2$. We will use a cell complex by *Fuks* and *Vainshtein*.

Resumen

Calcularemos los grupos de cohomología del espacio de configuraciones no ordenadas del plano \mathbb{R}^2 con coeficientes en \mathbb{Z} y con coeficientes en \mathbb{Z}_p . Para éste último caso daremos la demostración para $p = 2$. Usaremos un complejo celular dado por *Fuks* y por *Vainshtein*.

Agradecimientos

Doy las gracias a Christoph Schiessl por haber llevado a cabo su tesis doctoral titulada *Cohomology of Configuration Spaces*. También, a todas aquellas personas que pese a mi mal humor durante el trascurso de éste trabajo, me apoyaron y me entendieron. Y por supuesto, doy muchísimo las gracias particularmente a mi tutor, Federico Cantero, por haberme aceptado como alumna para mi trabajo de final de grado; por haberme motivado a hacer éste trabajo y mucho más por haberme animado a descubrir la magia de las matemáticas que hay todavía más por delante de las asignaturas que llevamos durante el grado; por animarme en los momentos de arduo trabajo y por haberme dedicado todo el tiempo que necesitaba.

Índice

1. Introducción	1
2. Espacios de Configuraciones	3
2.1. Variedades diferenciables	3
2.2. Espacios de Configuraciones	3
3. Grupo Fundamental	6
3.1. Grupo Fundamental	6
3.2. Grupos de Trenzas	6
3.3. Ejemplo de B_4	6
3.3.1. Elementos del grupo	7
3.3.2. Operación	7
4. Dualidad de Poincaré-Lefschetz	9
4.1. Espacios y complejos de cadenas	9
4.2. Grupos de Cohomología	9
4.3. Dualidad de Poincaré-Lefschetz	10
4.4. Cálculo del grado de una aplicación en una variedad	11
4.4.1. Variedades orientables	11
4.4.2. Grado de una aplicación diferenciable	12
5. CW-Complejos	14
5.1. Homología Celular	15
5.2. Grado de una aplicación en Homología	16
5.2.1. Cellular boundary formula	16
6. Estructura celular en $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$	19
7. Cálculo del complejo de cadenas celulares de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$	21
7.1. Complejo de cadenas celulares de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$	21
8. Teorema de Lucas	30
8.1. Teorema de Lucas	30
9. Bases de $H^*(A_n^\bullet, \mathbb{Z}_p)$	32
9.1. Grupos de cohomología de $C_n(\mathbb{R}^2)$	32

9.2. Bases explícitas de $H^*(A_{n,0}^\bullet, \mathbb{Z}_p)$	32
10. Grupos de cohomología de $C_n(\mathbb{R}^2)$ en \mathbb{Z}_2	35
10.1. Demostración del teorema	35
10.2. Construcción de los grupos de cohomología	36
11. Anexo	40

1. Introducción

Este trabajo tiene la finalidad de calcular los grupos de cohomología del espacio de configuraciones de n puntos no ordenados del plano, $C_n(\mathbb{R}^2)$, con coeficientes en \mathbb{Z} y en \mathbb{Z}_2 . Para llevarlo a cabo hemos seguido un documento extraído de la tesis doctoral de *Christoff Schiesel Cohomology of Configuration Spaces* [1], varios textos del libro *Algebraic Topology* de *Hatcher* [3], algunos apuntes de la asignatura del segundo semestre de tercero, *Topología y Geometría Global de Superficies*, impartida por *Carles Casacuberta*, y algunos textos del libro *Topology from the Differentiable Viewpoint* de *Milnor*. La lectura de este trabajo supone que el lector tiene una base de topología algebraica; al menos de los conceptos que se trabajan durante la asignatura optativa de cuarto titulada Topología Algebraica.

Los espacios de configuraciones en el plano son variedades diferenciales; un hecho que usaremos a lo largo del trabajo.

Como punto de partida, recordaré qué es una variedad diferenciable n -dimensional, dando la definición de variedad n -dimensional, las definiciones de cartas locales, atlas y atlas diferenciables. Luego, en ésta primera sección, daré la definición de espacio de configuraciones de puntos ordenados en un espacio topológico X y un espacio de configuraciones de puntos no ordenados en X , junto con un par de ejemplos que mostrarán la diferencia que hay entre los espacios de configuraciones con k puntos ordenados con el de puntos k no ordenados.

A continuación, recordaremos la definición de grupo fundamental de un espacio topológico X con punto base $p \in X$ y además, la definición de los grupos de trenzas. La gracia de esta sección es ver la relación que hay entre el grupo fundamental de $C_n(\mathbb{R}^2)$ y el grupo de n -trenzas.

Ya metiéndonos un poco más hacia nuestro objetivo, dentro de la Sección 4, *Dualidad de Poincaré Lefschetz*, recordaremos la definición de complejo de cadenas simpliciales y complejo de cadenas singulares. Como en una sección posterior hablaré de los CW -complejos, aludiré también al concepto de complejo de cadenas celulares. Debido a que la definición de grupos de cohomología no lo estudiamos - o quizás una leve pincelada- durante los años del grado de Matemáticas, dentro de esta sección presentaremos su respectiva definición de manera constructiva a partir del concepto de grupos de homología. Todavía en esta sección, citaremos un teorema que se obtiene utilizando la *dualidad de Poincaré-Lefschetz* para grupos de homología de *Borel Moore*, que debido a su dificultad usaremos como 'caja negra' cuya su demostración no probaremos en este trabajo. Como $C_n(\mathbb{R}^2)$ es una variedad $2n$ -dimensional, este teorema es primordial a la hora del cálculo de sus grupos de cohomología ya que relaciona los grupos de homología de la compactificación por un punto de una variedad, que son los que calcularemos, con los grupos de cohomología de la variedad. Para acabar esta sección, daré la definición del cálculo del grado de una aplicación diferenciable entre variedades de la misma dimensión.

Para poder calcular los grupos de cohomología seguiremos lo siguiente: primero definiremos una estructura celular a la compactificación por un punto de $C_n(\mathbb{R}^2)$, que denotaremos como $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ ya que, vía el teorema de *dualidad de Poincaré-*

Lefschetz, tenemos que $H_*(\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}) = H^*(C_n(\mathbb{R}^2))$. La definición de *CW-complejo*, la explicitaré en la Sección 5 junto con la definición de homología celular y el grado homológico de una aplicación entre esferas de la misma dimensión, que por un teorema, que tampoco demostraré debido a su dificultad, se tiene que el 'grado homológico' coincide con el 'grado diferencial'.

Recapitulando, nuestro problema se reduce a calcular los grupos de homología de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$. Vía otro teorema, que nos dice que los grupos de homología celular del espacio topológico X son iguales que los grupos de homología singular de X , nuestro problema se reduce todavía más, al cálculo de los grupos de homología del complejo celular de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$. Finalmente, usaremos que las aplicaciones de pegado son diferenciables para calcular el operador borde del complejo celular.

Esta estructura celular la definiremos como aquella que tiene como celdas la unión de subconjuntos $[m_1, \dots, m_q] \cup \{\infty\}$ (celdas), con $q \leq n$, donde $[m_1, \dots, m_q]$ son todas las configuraciones $\{x_1, \dots, x_n\}$ tales que están sobre q líneas verticales (columnas) con m_1 puntos en la primera columna, ..., m_q puntos en la q -ésima columna; y, aplicaciones de pegado φ_α que nos dirán cómo enganchar el borde de las celdas n -dimensionales a la unión de las celdas de dimensión $\leq n - 1$. De las cuales veremos, que lo único que vive en el borde que no se va al punto $\{\infty\}$ son las configuraciones que viven en celdas que, al aplicarle φ_α , dos de sus columnas consecutivas se 'chocan'.

Y hasta aquí tendríamos cómo sería el cálculo del complejo de co-cadenas de $C_n(\mathbb{R}^2)$ con coeficientes enteros. En las siguientes secciones, que se corresponden a las 7 y 8, trataremos los grupos de cohomología con coeficientes en \mathbb{Z}_p y daremos una demostración para el caso del número primo $p = 2$. Empezaremos la Sección 7 mostrando una base explícita de los grupos de cohomología del complejo celular a coeficientes \mathbb{Z}_p primero, demostrando que ciertas cadenas (que en esa sección definiré) son ciclos y segundo, en la sección que le sigue, dando explícitamente los generadores para $p = 2$. En el momento de demostrar que esas cadenas son ciclos, utilizaremos un caso particular del *Teorema de Lucas*, que estará definido y tendrá su respectiva demostración. Finalmente, en la Sección 8, como ya hemos comentado, daremos una base de los grupos de cohomología para \mathbb{Z}_2 y lo demostraremos. Esta demostración comienza con la definición de unas propiedades y sus respectivas demostraciones que nos serán de ayuda para probar el teorema fundamental de esta sección: todo ciclo es homólogo a una cadena donde todas las celdas tienen entradas que son potencias de 2.

Al inicio de este proyecto, calculamos $C_3(\mathbb{R}^2)$ vía Mayer Vietoris. Sólo con 3 puntos, el cálculo de los grupos de homología requirió considerar 5 abiertos (cuya unión hacían el total), y muchos más pasos comparándolo con éste método, como por ejemplo calcular los grupos de homología de cada abierto, y depende de como considerábamos la unión de dos conjuntos disjuntos que hacían $C_3(\mathbb{R}^2)$, también calcular sus grupos de homología vía Mayer Vietoris. Así, para la realización de éste trabajo, nos dimos cuenta que ha sido muy efectiva la homología celular para calcular los grupos de cohomología de espacios de configuraciones.

2. Espacios de Configuraciones

2.1. Variedades diferenciables

Definición 2.1. Una n -variedad topológica M es un espacio topológico que es Hausdorff, cumple el segundo axioma de numerabilidad, (tiene una base numerable de abiertos), y para cualquier punto del espacio $x \in M$, existe un entorno abierto $U_x \subseteq M$, $x \in U_x$, que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 2.2. Una *carta local* en M es un par (U, φ) donde U es un abierto de M y φ es un homeomorfismo de U en un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 2.3. Un *atlas* en M es una colección de cartas locales $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Definición 2.4. Sea M una n -variedad. Sean $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ dos cartas locales en M tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Entonces,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cong} \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

se llama *aplicación de cambio de coordenadas* de la carta (U_i, φ_i) a la carta (U_j, φ_j)

Definición 2.5. Un atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ en una variedad M se dice que es \mathcal{C}^∞ si todas las aplicaciones de cambios de coordenadas $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ son \mathcal{C}^∞ .

Definición 2.6. Decimos que dos atlas $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ son equivalentes si la unión $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ es un atlas \mathcal{C}^∞ . Entonces, una *variedad diferenciable* es un par $(M, [\mathcal{U}])$ donde M es una variedad topológica y $[\mathcal{U}]$ una clase de equivalencia de atlas.

2.2. Espacios de Configuraciones

Definición 2.7. Para cualquier espacio topológico X se define el *espacio de configuraciones de k puntos ordenados en X* como

$$\text{Conf}_k(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^k \mid x_i \neq x_j\} \quad (2.1)$$

Cuando el orden de los puntos no es importante, el espacio resultante se llama *espacio de configuraciones de puntos no ordenados* y se define de la siguiente manera

$$C_k(X) = \{\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X \mid x_i \neq x_j\} \quad (2.2)$$

Observación 2.8. Si M es una n -variedad diferenciable, entonces $C_k(M)$ es una variedad diferenciable de dimensión nk .

Ejemplo 2.9.

$$\text{Conf}_3(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_2 \neq x_3\}$$

$$C_3(\mathbb{R}) = \{\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \mathbb{R} \mid x_1 \neq x_2 \neq x_3\}$$

De aquí vemos que $Conf_3(\mathbb{R}) \neq C_3(\mathbb{R})$ porque $(2, 1, 1) \neq (1, 1, 2)$ pero en cambio $\{2, 1, 1\} = \{1, 1, 2\}$ ya que los dos conjuntos tienen los mismos elementos.

Otra manera de ver que no son espacios iguales es calculando a que son homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 2.10. Veamos que $Conf_2(\mathbb{R}^n) \simeq S^{n-1}$ y $C_2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$.

$Conf_2(\mathbb{R}^n) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq x_2\}$. Consideramos:

$$\begin{aligned} f : S^{n-1} &\longrightarrow Conf_2(\mathbb{R}^n) \\ x &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : Conf_2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S^{n-1} \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \end{aligned}$$

Para que f y g sean homotópicamente equivalentes necesitamos que $f \circ g \simeq id$ y $g \circ f \simeq id$. Como $g \circ f = id$, sólo nos basta probar que $f \circ g \simeq id$. Esto es inmediato considerando la siguiente homotopía:

$$\begin{aligned} H : Conf_2(\mathbb{R}^n) \times [0, 1] &\longrightarrow Conf_2(\mathbb{R}^n) \\ ((x_1, x_2), t) &\longrightarrow \left((1-t) \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} + tx_1, tx_2 \right); \end{aligned}$$

tal que $H(x, 0) = (f \circ g)(x)$ y $H(x, 1) = id \forall x \in Conf_2(\mathbb{R}^n)$.

$$C_2(\mathbb{R}^n) = \{\{x_1, x_2\} \subseteq \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq x_2\}.$$

Primero de todo, construimos una inclusión $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow C_2(\mathbb{R}^n)$ de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}P^{n-1} &\longrightarrow C_2(\mathbb{R}^n) \\ L &\longmapsto L \cap S^{n-1} \end{aligned}$$

tal que L es una recta y $L \cap S^{n-1}$ es un conjunto no ordenado. De esta manera, consideramos una retracción $g : C_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ de la siguiente manera:

Dados dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, sea $A(x_1, x_2)$ la recta afín que pasa por estos dos puntos y $L(x_1, x_2)$ la recta vectorial determinada por $A(x_1, x_2)$. Definimos

$$\begin{aligned} g : C_2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \\ \{x_1, x_2\} &\longmapsto L(x_1, x_2) \end{aligned}$$

que está bien definida ya que $L(x_1, x_2) = L(x_2, x_1)$.

Entonces, vemos que $g \circ f = id$ y, a través de la composición de las siguientes homotopías,

$$H : C_2(\mathbb{R}^n) \times [0, 1] \longrightarrow C_2(\mathbb{R}^n)$$

$$(\{x_1, x_2\}, t) \longmapsto \left\{ x_1 - t\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), x_2 + t\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right\}$$

que desplaza el centro de masas al origen,

$$H : C_2(\mathbb{R}^n) \times [0, 1] \longrightarrow C_2(\mathbb{R}^n)$$

$$(\{x_1, x_2\}, t) \longmapsto \left\{ \frac{x_1 - x_2 t}{(1-t) + \frac{t}{2}\|x_1 - x_2\|}, \frac{x_2 - x_1 t}{(1-t) + \frac{t}{2}\|x_1 - x_2\|} \right\}$$

normaliza los puntos

vemos que $f \circ g \simeq id$ (dada por $H'(H(x, t), t)$).

3. Grupo Fundamental

3.1. Grupo Fundamental

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico. Un *camino* en X se define como una aplicación continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$.

Definición 3.2. Un camino que empieza y acaba en un mismo punto se llama camino cerrado o lazo.

Sea (X, p) un espacio con punto base p . Denotamos por $\pi(X, p)$ el conjunto de clases de homotopía (relativa en los extremos) de lazos $\sigma : I \rightarrow X$ con $\sigma(0) = \sigma(1) = p$. La operación $[\sigma] \cdot [\omega] = [\sigma * \omega]$ (donde $*$ denota la concatenación entre caminos) es interna en $\pi(X, p)$. Como $(\sigma * \omega) * \tau \simeq \sigma * (\omega * \tau)$ para σ, ω y τ cualesquiera, vemos que esta operación es asociativa. Además, la clase del camino constante $c_p(t) = p$ para todo $t \in I$ es un elemento neutro, y para cada camino σ tenemos el camino inverso $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$, que satisface $\sigma * \bar{\sigma} \simeq c_p$, donde claramente $[\bar{\sigma}]$ es el elemento inverso de $[\sigma]$ en $\pi(X, p)$.

Por tanto, $\pi(X, p)$ es un grupo con la operación que acabamos de definir y se le llama el *grupo fundamental de X en el punto p* .

3.2. Grupos de Trenzas

El grupo de trenzas de n hebras, B_n , también conocido como *Grupo de trenzas de Artin* es el grupo cuyos elementos son clases de equivalencia de n -hebras y cuya operación es la composición de trenzas.

Cada elemento del grupo (una trenza) admite una representación geométrica intuitiva en la que, partiendo de un conjunto de n hebras, éstas unen n puntos situados en una columna con sus imágenes situadas en una columna paralela.

La información topológica que reúne una trenza es sobre la forma en como se cruzan éstas hebras.

Teorema 3.3. *EL grupo fundamental del espacio de configuraciones de n puntos en \mathbb{R}^2 es el grupo de n -trenzas, es decir, que*

$$B_n = \pi_1 C_n(\mathbb{R}^2)$$

Para describirlo de manera más visual, daremos un ejemplo para el caso $n = 4$.

3.3. Ejemplo de B_4

Consideremos dos conjuntos de cuatro puntos cada uno, situados 4 de ellos en una columna y los otros cuatro en otra columna paralela. Utilizando cuatro hebras, conectaremos cada punto de una columna con otro único punto de la paralela, tal que se corresponden uno a uno. Al conjunto de estas conexiones entre puntos es lo que se llama trenza.

3.3.1. Elementos del grupo

Como en una trenza, según el término que conocemos, a veces algunas hebras pasarán por encima de otras, y las diferentes maneras de cómo pueden cruzarse darán diferentes trenzas. Como por ejemplo:



y



Por otro lado, dos trenzas que a primera vista pueden parecer totalmente distintas pueden representar, en cambio, la misma si tensamos las hebras:



y



El siguiente ejemplo



no es considerado una trenza ya que presenta un 'nudo'. Siempre se tiene que cumplir que toda las hebras se puedan mover de izquierda a derecha.

3.3.2. Operación

Si tenemos una pareja de trenzas cualquiera, éstas se pueden 'componer' juntando las dos trenzas identificando los puntos intermedios:

El elemento neutro del grupo B_n es la trenza que consta de n hebras horizontales y paralelas y, el elemento inverso de una trenza es la trenza que la deshace.

Así, la operación composición entre dos trenzas que hemos definido convierte al conjunto de trenzas en un grupo. El conjunto de trenzas junto a esta operación de composición, lo convierte en un grupo

4. Dualidad de Poincaré-Lefschetz

4.1. Espacios y complejos de cadenas

1. Si X es un complejo simplicial ordenado, G un grupo abeliano entonces, se define $C_*(X; G)$ como el *complejo de cadenas simpliciales* del complejo simplicial X . Sus elementos son los grupos de cadenas simpliciales $C_p(X; G)$ de X ; grupos abelianos libres generados por los *símplices p -dimensionales*.
2. Si X es un espacio topológico entonces se define el *complejo de cadenas singulares* $S_*(X; G)$ cuyos elementos son los grupos de cadenas singulares $S_p(X; G)$, que están generados por los *p -símplices singulares* de X .
3. Si X es un CW -complejo, $C_*^{CW}(X; G)$ es el complejo de cadenas celulares de X , como definiremos en la siguiente sección.

4.2. Grupos de Cohomología

Sea X un espacio topológico. Los grupos de homología $H_n(X; G)$ (donde G denota el grupo de los coeficientes) son el resultado de primero, formar un complejo de cadenas $\dots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$ simplicial, singular o de un complejo celular y segundo, coger los grupos de homología de éste, $H_n(X; G) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$.

Observación 4.1. La homología simplicial, singular y celular coinciden.

Para obtener los grupos de cohomología $H^n(X; G)$ necesitamos un paso más, que es reemplazar los grupos $C_n(X; \mathbb{Z})$ por sus respectivos duales $\text{Hom}(C_n; G)$ y el morfismo borde ∂ por su aplicación dual ∂^* antes de formar los grupos de cohomología $\text{Ker} \partial^* / \text{Im} \partial^*$.

Observación 4.2. Sean A y B grupos abelianos libres. Se define el G -dual de A como $A^* = \text{Hom}(A; G)$ i.e , $\sigma \in A^*$ sii $\sigma : A \rightarrow G$ (de igual manera con B). Entonces, sea $\alpha : A \rightarrow B$ y sea $x \in A$. El morfismo dual $\alpha^* : \text{Hom}(B; G) \rightarrow \text{Hom}(A; G)$ se define como $(\alpha^* \varphi)(x) = \varphi(\alpha(x))$, donde $\varphi : B \rightarrow G$ y α^* envía φ a la composición $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\varphi} G$.

Consideramos un complejo de cadenas cualquiera C de grupos abelianos libres

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \quad (4.1)$$

Para dualizar el complejo, cambiamos cada grupo C_n por su grupo dual de co-cadenas $C_n^* = \text{Hom}(C_n; G)$ y cambiamos cada aplicación borde $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ por su dual (aplicación co-borde) $\delta := \partial^* : C_n^* \rightarrow C_{n-1}^*$.

Notamos que los morfismos duales claramente satisfacen $(\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*$, $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ y $0^* = 0$. En particular, como $\partial\partial = 0$ se sigue que $\delta\delta = 0$, y el grupo de cohomología

$H^n(C; G)$ se puede definir como el grupo de homología $\text{Ker}\delta/\text{Im}\delta$ en C_n^* . Así, obtenemos el complejo de co-cadenas

$$\dots \leftarrow C_{n+1}^* \xleftarrow{\delta_{n+1}} C_n^* \xleftarrow{\delta_n} C_{n-1}^* \leftarrow \dots \quad (4.2)$$

4.3. Dualidad de Poincaré-Lefschetz

Sea X un espacio topológico localmente compacto (ej. una variedad). Se dice que X' es una compactificación de X , si X es homeomorfo a un subconjunto abierto de X' compacto.

Sea M una variedad. Entonces tenemos que M admite una compactificación por un punto, \bar{M} , es decir, tal que $\bar{M} \setminus M$ sea un único punto. A este punto lo denotaremos como $\{\infty\}$.

Ejemplo 4.3. La compactificación por un punto de \mathbb{R}^n es el espacio S^n ; ($S^n \setminus \mathbb{R}^n = \{\infty\}$). Veamos que $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{p\}$.

En primer lugar observamos que $S^n \setminus \{p\} \cong S^n \setminus \{q\}$ para cualquier par de puntos p, q . Entonces, basta con dar un homeomorfismo $f : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, como por ejemplo

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

cuyo nombre es *proyección estereográfica* y su inversa viene dada por

$$g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}(2y_1, \dots, 2y_n, y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1)$$

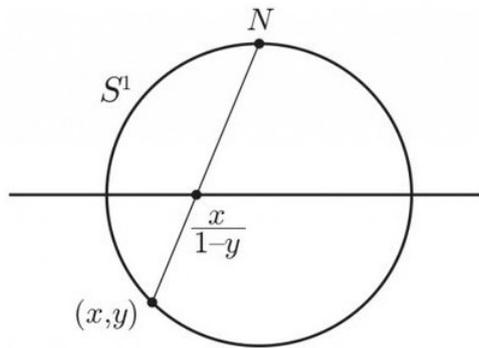


Figura 1: Proyección estereográfica

En éste trabajo calcularemos los grupos de cohomología de $C_n(\mathbb{R}^2)$, para ello usaremos un teorema muy profundo de topología algebraica cuya demostración excede el alcance de éste trabajo.

Teorema 4.4. [5] *Vía la dualidad de Poincaré-Lefschetz para los grupos de homología de Borel Moore y para \overline{M} variedad n -dimensional, tenemos que*

$$\widetilde{H}_{n-i}(\overline{M}) = \overline{H}_{n-i}(M) = H^i(M)$$

La demostración se lleva a cabo en [5].

Corolario 4.5. *Para el espacio topológico $M = C_n(\mathbb{R}^2)$ se tiene que $H^i(C_n(\mathbb{R}^2)) \cong \widetilde{H}_{2n-i}(\overline{C_n(\mathbb{R}^2)})$.*

4.4. Cálculo del grado de una aplicación en una variedad

Las definiciones que daremos a continuación han sido extraídas de [6].

4.4.1. Variedades orientables

Una *orientación* para un espacio vectorial real de dimensión finita es una clase de equivalencia de bases ordenadas tal que, la base ordenada (b_1, \dots, b_n) determina la misma orientación que la base (b'_1, \dots, b'_n) si $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ con $\det(a_{ij}) > 0$ y se dice que tienen orientaciones opuestas si $\det(a_{ij}) < 0$. Así, cada espacio vectorial finito tiene dos orientaciones. El espacio vectorial \mathbb{R}^n tiene una orientación estándar que se corresponde a la base $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.

Una *variedad diferenciable ordenada* consiste en una variedad M junto a la elección de una orientación para cada espacio tangente $T_x M$. Si la dimensión de la variedad $n \geq 1$, para que los espacios tangentes encajen bien es necesario que: Para cada punto de M exista un entorno $U \subset M$ y un difeomorfismo h (Obs: sería la carta local) que vaya de U a un entorno abierto de \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n (donde $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$) que preserve la orientación, en el sentido de que para cada $x \in U$ el isomorfismo $d_x h$ "lleva" la orientación definida en $T_x M$ a la orientación estándar de \mathbb{R}^n .

Propiedades :

Si M es conexa y orientable, entonces tiene precisamente dos orientaciones.

Si M tiene borde, podemos distinguir tres tipos de vectores en el espacio tangente $T_x M$ en un punto del borde:

1. están los vectores tangentes del borde que forman un subespacio $(n - 1)$ -dimensional $T_x(\partial M) \subset T_x M$
2. están los vectores 'exteriores' (salen de la variedad) que forman un semiespacio abierto limitado por $T_x(\partial M)$.
3. están los vectores 'interiores' (entran a la variedad) que forman un semiespacio complementario.

Cada orientación de M determina una orientación en ∂M de la siguiente manera: Para $x \in \partial M$ elige una base positivamente orientada (v_1, \dots, v_n) para $T_x M$ de tal forma que v_2, \dots, v_n sean tangentes al borde (asumiendo que $n \geq 2$) y que v_1 es un vector 'exterior'. Entonces, (v_2, \dots, v_n) determina la orientación requerida para ∂M en x .

En el siguiente ejemplo tenemos que dada la siguiente orientación en D^3 , (e_1, e_2, e_3) , para un punto $x \in \partial D^3$ una base positivamente orientada sería :

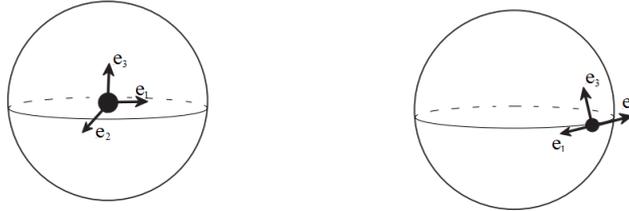


Figura 2: Orientación en S^2

4.4.2. Grado de una aplicación diferenciable

Sea M y N variedades n -dimensionales orientadas sin borde y sea

$$f : M \longrightarrow N$$

una aplicación diferenciable.

Teorema. (Teorema de Sard). Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y sea

$$C = \{x \in U \mid \text{rang } d_x f < n\}.$$

Entonces, $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue 0.

Si M es compacta y N es conexa, entonces el grado diferencial de f se define como sigue:

Sea $y \in N$ un punto regular de f , de manera que $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ para $x \in f^{-1}(y)$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados. Definimos sign de $d_x f$ tal que es $+1$ o -1 si $d_x f$ preserva o invierte la orientación respectivamente. Para cualquier valor regular $y \in N$ se define

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } d_x f.$$

Observación 4.6. $\deg(f; y)$ no depende de y .

Definición 4.7. $\deg(f) = \deg(f; y)$ para algún valor regular y .

Ejemplo 4.8. Sea $f = a : S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación *antipodal* tal que, para cada $(x, y, z) \in S^2$, $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

Tomando las cartas estereográficas en S^2 y el valor regular $p = (1, 0, 0)$ (con preimagen $q = (-1, 0, 0)$), se tiene que

$$Md(\pi_N f \pi_N^{-1})|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

que para $(u, v) = (-1, 0)$

$$Md(\pi_N f \pi_N^{-1})|_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} (\pi_N f \pi_N^{-1})(u, v) &= \pi_N f \left(\frac{1}{1+u^2+v^2} (2u, 2v, u^2+v^2-1) \right) = \\ &= \pi_N \left(-\frac{1}{1+u^2+v^2} (2u, 2v, u^2+v^2-1) \right) = \frac{1}{1+\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}} \left(-\frac{2u}{1+u^2+v^2}, -\frac{2v}{1+u^2+v^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2(u^2+v^2)} (-2u, -2v) \end{aligned}$$

5. CW-Complejos

Definición 5.1. Una n -celda es un espacio topológico homeomorfo al disco abierto n -dimensional, $\overset{\circ}{D}^n$, de \mathbb{R}^n .

Definición 5.2. Un espacio topológico X construido de la siguiente manera se llama complejo celular o CW -Complejo finito.

1. Empieza con un conjunto discreto, X^0 , cuyos puntos los consideramos como 0-celdas.
2. Inductivamente, forma el $\text{sk}_n X$ desde X^{n-1} "pegando" n -celdas e_α^n vía aplicaciones $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$. Esto lo que quiere decir es que X^n es el espacio cociente de la unión disjunta $X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n$ de X^{n-1} con una colección de n -discos D_α^n bajo las identificaciones $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D_\alpha^n$.
3. Existe un $k \geq 1$ tal que $X = X^k$ y $X \neq X^{k-1}$. En este caso, se dice que k es la dimensión de X , es decir, la dimensión de X será la máxima dimensión de las celdas de X .

Cada celda e_α^n tiene una *aplicación característica* $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$ que extiende la aplicación de pegado φ_α y es un homeomorfismo de $\overset{\circ}{D}_\alpha^n$ en e_α^n .

Ejemplos 5.3.

1. La esfera S^n tiene una estructura de complejo celular con sólo dos celdas e_0 y e_n donde e_0 es un punto. La n -celda, D_1^n , se pega a e_0 vía la aplicación constante $\varphi : \partial D_1^n \rightarrow e_0$. Con esto, podemos pensar S^n como el espacio cociente $D^n / \partial D^n$.

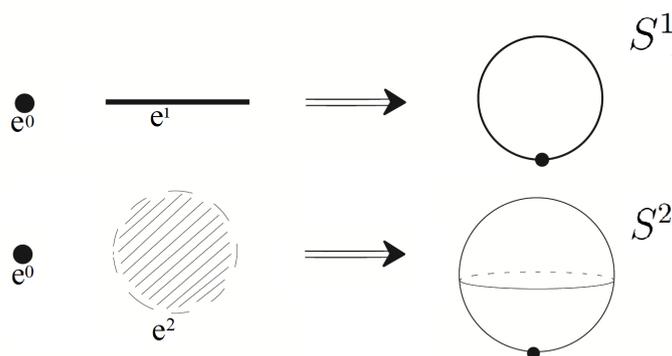


Figura 3: Una estructura de complejo celular de S^1 y S^2 .

2. El plano proyectivo $\mathbb{R}P^n$ se define como el espacio de todas las líneas que pasan por el origen en \mathbb{R}^{n+1} . Cada línea está determinada por un vector no nulo, único salvo multiplicación por un escalar. Por tanto, $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / v \sim \lambda v$. Ya que podemos restringir los vectores a vectores de módulo 1, tenemos:

$\mathbb{R}P^n = S^n/v \sim -v \equiv D^n/x \sim -x$, para $x \in \partial D^n = S^{n-1}$. Como S^{n-1} con los puntos antipodales identificados es $\mathbb{R}P^{n-1}$, vemos que obtenemos $\mathbb{R}P^n$ de $\mathbb{R}P^{n-1}$ enganchando una n -celda con la aplicación proyección $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ como aplicación de pegado.

Definición 5.4. Dados dos espacios X e Y con $x \in X$ e $y \in Y$, entonces se define la unión puntual $X \vee Y$ como el cociente de la unión disjunta $X \sqcup Y$ identificando x con y .

Observación 5.5. Para cualquier complejo celular X , el cociente X^n/X^{n-1} es una suma puntual de n -esferas, $\bigvee_k S^n$, con una esfera por cada n -celda de X .

5.1. Homología Celular

Lema 5.6. Si X es un CW -complejo, entonces:

- (a) $H_k(X^n, X^{n-1}; G)$ es cero para $k \neq n$ y es un grupo abeliano libre para $k = n$, con una base tal que uno a uno se corresponde con las n -celdas de X .
- (b) $H_k(X^n; G) = 0$ para $k > n$. Por tanto, $H_k(X; G) = 0$ para $k > \dim(X)$.
- (c) La inclusión $i : X^n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : H_k(X^n; G) \rightarrow H_k(X; G)$ si $k < n$.

Demostración.

- (a) Se sigue de la Observación 5.5.
- (b) Consideramos la sucesión exacta larga del par $(X^n, X^{n-1}; G)$

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}; G) \longrightarrow H_k(X^{n-1}; G) \longrightarrow H_k(X^n; G) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_k(X^n, X^{n-1}; G) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Si $k \neq n$ y $k \neq n - 1$ entonces, el primer y último grupo son ceros por (a). Entonces, si $k > n$ tenemos que $H_k(X^n; G) \cong H_k(X^{n-1}; G) \cong H_k(X^{n-2}; G) \cong \dots \cong H_k(X^0; G) = 0$.

- (c) Ahora bien, si $k < n$ tenemos que $H_k(X^n; G) \cong H_k(X^{n+1}; G) \cong H_k(X^{n+2}; G) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m}; G)$ donde $n + m$ es la dimensión de X para algún $m \geq 0$.

□

Sea X un CW -complejo. Utilizando el lema anterior y trozos de la sucesión exacta larga de los pares $(X^{n+1}, X^n; G)$, $(X^n, X^{n-1}; G)$ y $(X^{n-1}, X^{n-2}; G)$ podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & 0 \\
& & & & & & \nearrow \\
& & & & & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) \\
& & & & & & \nearrow \\
& & & & & & H_n(X^n) \\
& & & & & & \nearrow \quad \searrow \\
& & & & & & \partial_{n+1} \quad j_n \\
& & & & & & \nearrow \quad \searrow \\
& & & & & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \dots \\
& & & & & & \searrow \quad \nearrow \\
& & & & & & \partial_n \quad j_{n-1} \\
& & & & & & \searrow \quad \nearrow \\
& & & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \\
& & & & & & \nearrow \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

donde d_{n+1} y d_n están definidos como las composiciones $j_n \partial_{n+1}$ y $j_{n-1} \partial_n$.

Notamos que $d_n d_{n+1} = j_{n-1} \partial_n j_n \partial_{n+1}$ incluye $\partial_n j_n$ que proviene de una sucesión exacta, luego $d_n d_{n+1} = 0$ y por tanto, se tiene que

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n; G) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}; G) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; G) \rightarrow \dots$$

es un complejo de cadenas llamado *complejo de cadenas celular de X*.

Como $H_n(X^n, X^{n-1}; G) \cong H_n(X^n/X^{n-1}; G) \cong H_n(\bigvee_k S^n; G) \cong \bigoplus_k H_n(S^n; G)$, $H_n(X^n, X^{n-1}; G)$ es libre con una base tal que, cada elemento de ésta se corresponde uno a uno con las celdas de X^n . Podemos pensar los elementos de $H_n(X^n, X^{n-1})$ como una combinación lineal de n -celdas.

Definición 5.7. Los grupos de homología del complejo se llama grupo de homología celular de X y se denota $H_n^{CW}(X; G)$.

Teorema 5.8. $H_n^{CW}(X; G) \cong H_n(X; G)$.

5.2. Grado de una aplicación en Homología

Para una aplicación $f : S^n \rightarrow S^n$, el morfismo inducido $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$ es un morfismo de un grupo cíclico infinito a sí mismo y, por tanto, tiene la forma $f_*(\alpha) = d\alpha$ para algún $d \in \mathbb{Z}$ llamado *el grado de f* y se denota: $\deg f = d$.

5.2.1. Cellular boundary formula

En este apartado, describiremos el cálculo de las aplicaciones borde d_n definidas en el apartado anterior mediante la *Cellular boundary formula*.

Cuando $n = 1$ es fácil porque la aplicación borde $d_1 : H_1(X^1, X^0; G) \rightarrow H_0(X^0; G)$ es la misma que la aplicación borde singular $S_1(X) \rightarrow S_0(X)$.

Observación 5.9. En caso de que X sea conexo y tenga sólo una 0-celda entonces d_1 tiene que ser 0, en caso contrario $H_0(X)$ no sería \mathbb{Z} . Esto se sigue de que, por

el Teorema 5.8 tenemos que $H_0(X) = H_0^{CW}(X)$, luego $H_0(X) = \ker d_0 / \text{Im } d_1 = H_0(X) / \text{Im } d_1 \cong \mathbb{Z}$ si $\text{Im } d_1 = 0$ si $d_1 = 0$.

Para $n > 1$ tenemos

Definición 5.10. Cellular Boundary Formula. $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ donde $d_{\alpha\beta}$ es el grado de la aplicación $\partial D_\alpha^n \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$; composición de la aplicación de pegado, φ_α , que pega e_α^n a X^{n-1} junto con la aplicación cociente colapsando $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$.

Ejemplo 5.11. Sea M_g una superficie cerrada orientada de género g (que tiene g 'agujeros') con la estructura CW que consiste en una 0-celda, $2g$ 1-celdas enganchadas vía las aplicaciones constantes $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^1 \rightarrow X^0$, $X^0 = 0$ -celda (α por cada 1-celda), y una 2-celda enganchada a través de la palabra $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ vía la aplicación φ' .

Entonces, el complejo de cadenas celulares es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como sólo tenemos una 0-celda, d_1 tiene que ser 0. Veamos que d_2 también es 0.

Sea e^2 la 2-celda. Tenemos que d_2 queda definida según la *Cellular boundary formula* como:

$$d_2(e^2) = \sum_\beta d_\beta e_\beta^1 = d_{a_1} a_1 + d_{b_1} b_1 + \dots + d_{a_g} a_g + d_{b_g} b_g. \quad (5.1)$$

Definimos $d_{a_1} = \deg \bar{d}_{a_1}$, con $\bar{d}_{a_1} : \partial D_{e_2}^2 \xrightarrow{\varphi'} X^1 \xrightarrow{q} S_{a_1}^1$ donde X^1 es la unión de las $2g$ -celdas cuyos bordes están identificados en un punto (la 0-celda) y, q es la aplicación cociente que colapsa $X^1 \setminus a_1$ en la 0-celda. Por tanto, lo que obtenemos como espacio de llegada, en realidad es la celda a_1 que identifica su borde en la 0-celda (un *loop*).

Cogiendo generadores en $H_1(\partial D_{e_2}^2)$ y $H_1(S_{a_1}^1)$, tenemos que por la definición de grado en homología, $\deg \bar{d}_{a_1} = 0$ ya que vía ésta aplicación, nuestro generador 'seguiría' la palabra $a_1 a_1^{-1}$, luego daría una vuelta y volvería a dar la misma vuelta hacia atrás, es decir, \bar{d}_{a_1} sería homótopa a la aplicación constante, y de aquí que el grado sea 0.

Como esto también se cumple para d_{a_i} y d_{b_i} con $i \in \{1, \dots, g\}$, tenemos que $d_2(e^2) = 0a_1 + 0b_1 + \dots + 0a_g + 0b_g = 0$.

Por tanto, concluimos que los grupos de homología son \mathbb{Z} en dimensión 0 y 2, y \mathbb{Z}^{2g} en dimensión 1 ya que $\ker d_1 \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Ahora, calcularemos el grado de $d_2(e^2)$ definida en 5.1 utilizando la definición del grado de una aplicación entre variedades.

Entonces, \bar{d}_{a_1} la podemos ver como una aplicación que engancha la mitad $\partial D_{e_2}^2$ a la celda a_1 siguiendo un sentido, y la otra mitad del borde la engancha a la celda siguiendo el sentido contrario.

Definimos una base orientada en $T\partial D_{e_2}^2$ y $TS_{a_1}^1$. La base orientada en $T\partial D_{e_2}^2$, es la base inducida por la base orientada en $D_{e_2}^2$ que a su vez, es la base inducida por la base orientada estándar de \mathbb{R}^2 : $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, 0)$. Luego, tenemos que para un $x \in \partial D_{e_2}^2$, $T_x\partial D_{e_2}^2$ mantendrá la orientación (resp. invertirá la orientación) si el sentido del vector es horario (resp. antihorario).

Sea $y \in S_{a_1}^1$ un valor regular. Se define

$$\deg \overline{d_{a_1}} = \deg(\overline{d_{a_1}}, y) = \sum_{x \in \overline{d_{a_1}}^{-1}(y)} \text{sign } d_x \overline{d_{a_1}}$$

Observamos que, $x \in \overline{d_{a_1}}^{-1}(y)$ si x pertenece a la primera mitad de $\partial D_{e_2}^2$ que se engancha siguiendo el sentido horario o, si x pertenece a la segunda mitad que se engancha en sentido antihorario. Por tanto, sea x_1 el punto que se engancha siguiendo el sentido horario y x_2 el otro. Para x_1 el determinante de la matriz diferencial daría $+1$ (ya que sigue el sentido horario) y, para x_2 el determinante de la matriz diferencial daría -1 (sentido antihorario). Por tanto, $\deg \overline{d_{a_1}} = 0$ como habíamos visto en el caso anterior.

Usando varios teoremas de topología diferencial, en los cuales no profundizaremos debido a su dificultad, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.12. *La definición de grado en homología, $\deg(H)$, coincide con la definición de grado de aplicaciones diferenciables entre variedades, $\deg(M)$.*

6. Estructura celular en $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$

Denotamos $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ como la compactificación por un punto del espacio $C_n(\mathbb{R}^2)$. Sean m_1, \dots, m_q enteros positivos cuya suma es n .

Definición 6.1. $Comb(n, q) = \{[m_1, \dots, m_q] \in \mathbb{Z}^q \mid m_i > 0 \forall i \in \{1, \dots, q\}, m_1 + \dots + m_q = n\}$ para descomposiciones de n con q sumandos positivos.

Ejemplo 6.2. $Comb(7, 3) = \{[1, 1, 5], [1, 5, 1], [5, 1, 1], [1, 2, 4], [4, 1, 2], [2, 4, 1], [1, 4, 2], [4, 2, 1], [2, 1, 4], [1, 3, 3], [3, 1, 3], [3, 3, 1]\}$.

Cada $[m_1, \dots, m_q]$ determina un subconjunto de $C_n(\mathbb{R}^2)$ que consiste en todas las configuraciones $\{x_1, \dots, x_n\} \in C_n(\mathbb{R}^2)$ tales que están sobre q líneas verticales (pensadas como columnas) disjuntas dos a dos donde, leyendo desde la izquierda, hay m_1 puntos en la primera línea, m_2 en la segunda línea, \dots , m_q en la q -ésima.

Definido de manera más formal:

Cada $[m_1, \dots, m_q]$ determina un subconjunto de $C_n(\mathbb{R}^2)$ cuyos puntos son aquellas configuraciones $\{x_1, \dots, x_n\} \in C_n(\mathbb{R}^2)$ tales que existen $r_1, \dots, r_q \in \mathbb{R}$ de manera que $|\{x_1, \dots, x_n\} \cap (\{r_i\} \times \mathbb{R})| = m_i \forall i = 1, \dots, q$.

Vemos que todos estos subconjuntos $[m_1, \dots, m_q] \subseteq C_n(\mathbb{R}^2)$, con $1 \leq q \leq n$, son dos a dos disjuntos y en conjunto hacen todo $C_n(\mathbb{R}^2)$.

Lema 6.3. *Cada subconjunto $[m_1, \dots, m_q]$ es una celda $(n + q)$ -dimensional.*

La siguiente demostración se sigue de [2].

Demostración. $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ y sea $X_r = \{(z_1, \dots, z_r) \mid z_i \in \overline{\mathbb{R}}, z_1 \leq \dots \leq z_r\}$. Está claro que $X_r \cong I^r$ donde $I = [0, 1]$.

Entonces, teniendo en cuenta que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, la aplicación

$$f_{[m_1, \dots, m_q]} : X_q \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q} \rightarrow \overline{C_n(\mathbb{C})} \quad (6.1)$$

definida como

$$f[(z_1, \dots, z_q), \dots, (z_{q_1}, \dots, z_{q_{m_q}})] = \{z_1 + iz_{1_1}, \dots, z_1 + iz_{1_{m_1}}, \dots, z_q + iz_{q_1}, \dots, z_q + iz_{q_{m_q}}\},$$

es un homeomorfismo de I^{n+q} en $[m_1, \dots, m_q]$.

□

Observamos que da $\{\infty\}$ si, dado un i , \exists un j tal que $z_{i_j} = z_{i_{j+1}}$ (dos puntos en una columna son iguales) o, si \exists una i tal que $z_i = z_{i+1}$ y \exists un j tal que $z_{i_j} = z_{i_{j+1}}$ o si alguno es $\{\infty\}$.

Ejemplos 6.4. $\overline{C_2(\mathbb{R}^2)} = \{\infty\} \cup [2] \cup [1, 1]$ con $\{\infty\}$ una 0-celda, $[2]$ una 3-celda y $[1, 1]$ una 4-celda.

$\overline{C_3(\mathbb{R}^2)} = \{\infty\} \cup [3] \cup \{[1, 2], [2, 1]\} \cup [1, 1, 1]$ donde $[3]$ es una 4-celda, $[1, 2]$ y $[2, 1]$ son dos 5-celdas y $[1, 1, 1]$ es una 6-celda.

Hasta ahora lo que hemos visto es que $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ se puede poner como la unión de las celdas definidas párrafos atrás. Ahora bien, enlazando con la definición de CW -Complejo de la sección anterior, $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ es un CW -complejo ya que primero, siguiendo el método dado, empezariamos con el conjunto discreto $X^0 = \{\infty\}$ que es una 0-celda. Luego, inductivamente formaríamos $\text{sk}_{n+q}X$ desde $X^{(n+q)-1}$ pegando $(n+q)$ -celdas, i.e una celda del tipo $\epsilon_\alpha^{n+q} := [m_1, \dots, m_q]$ vía aplicaciones $\varphi_\alpha : \partial I_{[m_1, \dots, m_q]}^{n+q} \rightarrow X^{(n+q)-1}$, que como $I_{[m_1, \dots, m_q]}^{n+q} \cong (X_q \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q})$, $\varphi_\alpha : \partial(X_q \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q}) \rightarrow X^{(n+q)-1}$.

Estas aplicaciones φ_α , en realidad vendrían a ser

$$\varphi_\alpha = \varphi_{[m_1, \dots, m_q]} = f_{[m_1, \dots, m_q]}|_{\partial(X_q \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q})} \rightarrow X^{(n+q)-1}$$

.

Queremos ver que $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ envía los puntos de $\partial(X_q \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q})$ a $X^{(n+q)-1}$.

Tenemos que $\partial(X_q \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q}) = (\partial(X_q) \times X_{m_1} \times \dots \times X_{m_q}) \cup (X_q \times \partial(X_{m_1}) \times \dots \times X_{m_q}) \cup \dots \cup (X_q \times X_{m_1} \times \dots \times \partial(X_{m_q}))$.

Caso 1: Al hacer $\partial(X_q)$ puede ocurrir que z_1 o z_q se vayan a $\{\infty\}$. En este caso, eso querría decir que toda una columna se ha ido a $\{\infty\}$, entonces, al aplicar $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ nos daría $\{\infty\} \in X^{(n+q)-1}$. Otro caso es que, para algún $j \in \{1, \dots, q\}$, $z_j = z_{j+1}$ (las columnas z_j y z_{j+1} se chocan) y, al aplicar $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ obtendríamos el conjunto

$$\begin{aligned} \{ \dots, z_j + iz_{j_1}, \dots, z_j + iz_{j_{m_j}}, z_{j+1} + iz_{j+1_1}, \dots, z_{j+1} + iz_{j+1_{m_{j+1}}}, \dots \} = \\ \{ \dots, z_j + iz_{j_1}, \dots, z_j + iz_{j_{m_j}}, z_j + iz_{j+1_1}, \dots, z_j + iz_{j+1_{m_{j+1}}}, \dots \} \end{aligned}$$

que como vemos, tenemos un total de $(n+q)-1$ columnas (una columna menos) y, en la columna j -ésima un total de $m_j + m_{j+1}$ puntos. Dentro de este caso tenemos dos opciones: que para algún $k \in \{j_1, \dots, j_{m_j}\}$ se cumpla que $k \in \{(j+1)_1, \dots, (j+1)_{m_{j+1}}\}$ (que sería el caso en que un punto de cada columna también se choquen al chocarse las dos columnas), y entonces, la imagen por $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ daría $\{\infty\}$; y el otro caso es para cuando $\nexists k$. En éste, la imagen por $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ para cuando $z_j = z_{j+1}$ nos da una $(n+q-1)$ -celda $[m_1, \dots, m_j + m_{j+1}, \dots, m_q] \in X^{(n+q)-1}$.

Caso 2: $\partial(X_{m_j})$, $j \in \{1, \dots, q\}$, puede pasar que $z_{j_1} = \{\infty\}$ o $z_{j_{m_j}} = \{\infty\}$. Entonces, $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ enviaría los puntos de $\partial(X_{m_j})$ a $\{\infty\}$. Por otro lado, si $z_{j_k} = z_{j_{k+1}}$ para algún $k \in \{1, \dots, m_j\}$, al aplicar $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ por como está definida, los enviaría a $\{\infty\}$ ya que obtendríamos el siguiente conjunto

$$\{ \dots, z_j + iz_{j_k}, z_j + iz_{j_{k+1}}, \dots \} = \{ \dots, z_j + iz_{j_k}, z_j + iz_{j_k}, \dots \}$$

Corolario 6.5. *Esto define una estructura de CW -complejo en $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$.*

De esta manera, podemos ver que lo que más nos interesa de las aplicaciones de pegado es cuando chocan dos columnas entre ellas.

Entonces, tomamos como descomposición celular del espacio $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ aquella que tiene como celdas todos los subconjuntos $[m_1, \dots, m_q] \cup \{\infty\}$, $1 \leq q \leq n$.

7. Cálculo del complejo de cadenas celulares de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$

7.1. Complejo de cadenas celulares de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$

Por definición el complejo de cadenas celular de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ con coeficientes enteros es

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{2n}(X^{2n}, X^{2n-1}) \xrightarrow{\partial_{2n}} H_{2n-1}(X^{2n-1}, X^{2n-2}) \xrightarrow{\partial_{2n-1}} \dots \longrightarrow H_1(X^1, X^0) \xrightarrow{\partial_1} \\ &\longrightarrow X_0(X^0) \xrightarrow{\partial_0} 0 \end{aligned}$$

Donde $H_r(X^r, X^{r-1})$ viene generado por las celdas que tienen dimensión r . Por tanto, $H_r(X^r, X^{r-1}) \cong \mathbb{Z}Comb(n, q)$ con $n + q = r$.

Definición 7.1. $(B_r, \partial_r) := (H_r(X^r, X^{r-1}), \partial_r)$ el complejo de cadenas celulares de $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$.

Entonces, por el Corolario 4.5 y el Teorema 5.8 tenemos que

$$H^r(C_n(\mathbb{R}^2)) = \tilde{H}_{2n-r}(\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}) = \tilde{H}_{2n-1}^{CW}(\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}) := H_{2n-r}(B, \partial)$$

Ahora bien, cambiando la notación por $A_n^r = B_{2n-r} = \mathbb{Z}Comb(n, n-r)$ y $A_n^\bullet = (A_n^r)^r$ obtenemos la siguiente sucesión

$$\dots \rightarrow A_n^r \xrightarrow{\delta_r} A_n^{r+1} \xrightarrow{\delta_{r+1}} \dots$$

con $\delta_r = \partial_{2n-r}$.

Luego, tendríamos que

$$H_{2n-r}(B, \partial) = H^r(A_n^\bullet, \delta), \quad (7.1)$$

y por tanto

Proposición 7.2. $H^r(C_n(\mathbb{R}^2)) = H^r(A_n^\bullet, \delta)$.

Notación 7.3. El cambio de subíndice a superíndice en 7.1 es por notación y es debido al sentido de la diferencial. Si es decreciente se sigue con subíndice y si es creciente con superíndice.

En resumen, las cadenas del complejo resultante (A_n^\bullet, δ) son los \mathbb{Z} -módulos A_n^r cuyos elementos de la base son las celdas $(2n-r)$ -dimensionales o, mejor dicho, las descomposiciones $[m_1, \dots, m_q] \in Comb(n, q)$ con $q = n - r$.

Proposición 7.4. La aplicación borde $\delta : A_n^r \rightarrow A_n^{r+1}$ viene dada por:

$$\delta[m_1, \dots, m_q] = \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^{k-1} P(m_k, m_{k+1}) [m_1, \dots, m_{k-1}, m_k + m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_q] \quad (7.2)$$

donde

$$P(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv y \equiv 1 \pmod{2}, \\ \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La demostración de esta proposición ocupará el resto de la sección.

Como acabamos de explicar en la sección anterior, el borde de X_{n+q} se descompone en: columnas que se van al infinito, columnas que se chocan sin puntos en ellas que se choquen o, columnas que se chocan con al menos dos puntos que se choquen (uno perteneciente a cada una de ellas) o bien, puntos que se van al infinito o puntos de una misma columna que se choquen. Si aplicamos la aplicación de pegado $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ a puntos del borde de X_{n+q} , ésta envía todas las partes menos una al punto del infinito. La parte que no se va, es el caso en el que para algún $j \in \{1, \dots, q\}$, $z_j = z_{j+1}$ (cuando dos columnas se chocan) y ninguno de sus puntos entre ellos se chocan .

Para calcular la aplicación borde, utilizaremos el *Cellular Boundary Formula*. Éste nos dice que

$$\delta([m_1, \dots, m_q]) = \sum_{k=1}^{q-1} d_k[m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_q],$$

donde d_k es el grado de la aplicación de pegado $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$.

Tenemos que, dado un valor regular $y \in [m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_q]$ y usando la definición del grado de una aplicación diferenciable en variedades

$$d_k = \deg(\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}; y) = \sum_{x \in \varphi_{[m_1, \dots, m_q]}^{-1}(y)} \text{sign } d_x \varphi.$$

Antes de todo, definiremos una base ordenada en $T_y[m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_q]$ (espacio tangente del punto y en el espacio de llegada) y una base ordenada en $T_x \partial X_{n+q} \forall x$, tal que $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}(x) = y$ (espacio tangente del punto x en el espacio de salida X_{n+q}).

Los puntos de una configuración en una celda están ordenados con el orden lexicográfico, es decir, de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Entonces, usando este orden, se tiene la inclusión $T_y[m_1, \dots, m_q] \subset \text{Conf}_n(\mathbb{R}^2) \subset (\mathbb{R}^2)^n$.

Definimos $e_1(i)$ (resp. $e_2(i)$) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, como el vector tangente unitario que mueve el i -ésimo punto de la configuración (usando el orden anterior) en la dirección 1 (resp. 2) y deja el resto de los puntos inmóviles y definimos $u_j, j \in \{1, \dots, q\}$ como el vector tangente que mueve la columna q -ésima y $u_{q+j} = e_2(j), j \in \{1, \dots, n\}$.

Cogemos como base el conjunto de vectores

$$\begin{aligned}
u_1 &= e_1(1) + e_1(2) + \dots + e_1(m_1), \\
u_2 &= e_1(m_1 + 1) + e_1(m_1 + 2) + \dots + e_1(m_2), \\
&\dots \\
u_q &= e_1(m_{q-1} + 1) + e_q(m_{q-1} + 2) + \dots + e_q(m_q), \\
u_{q+1} &= e_2(1), \\
u_{q+2} &= e_2(2), \\
&\dots \\
u_{q+n-1} &= e_2(n-1), \\
u_{q+n} &= e_2(n)
\end{aligned}$$

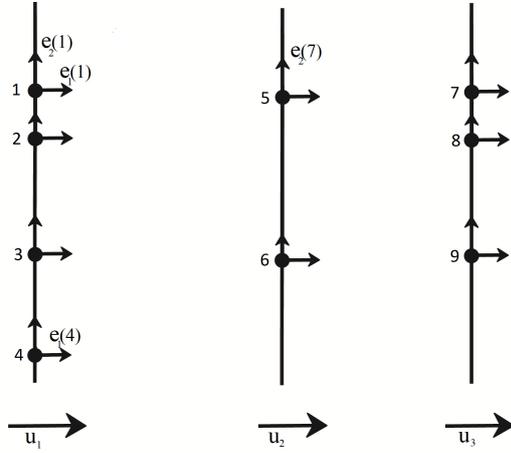


Figura 4: Configuración de $[4,2,3]$.

La base en $T_y[m_1, \dots, m_k + m_k + 1, \dots, m_q]$ es la inducida por esta base.

Como hemos explicado antes, la imagen de $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ en el borde de X_{n+q} da infinito salvo que estemos en la parte del borde que corresponde a dos columnas que se chocan 'infinitesimalmente', es decir, que chocan pero nos acordamos de qué puntos estaban en una columna y cuales estaban en la otra.

En esta parte, siguiendo la definición de vectores 'interiores' y vectores 'exteriores' de la página 11, tenemos que una base positiva en un punto en el que se chocan la columna k -ésima y la $(k+1)$ -ésima es

$$u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k - u_{k+1}, u_k + u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_{q+m_1+\dots+m_k}$$

Ahora movemos el vector exterior $u_k - u_{k+1}$ a la primera posición,

$$u_k - u_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k + u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_{q+m_1+\dots+m_k}$$

con lo que obtenemos la siguiente base, que es positiva si k es impar y es negativa si k es par:

$$u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k + u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_{q+m_1+\dots+m_k}$$

Nos fijamos que esto cambia el signo de la aplicación borde en $(-1)^{k-1}$, que es lo que teníamos en la fórmula 7.2.

Lema 7.5. *Para cualquier $y = \{x_1, \dots, x_n\} \in [m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_q]$ (configuración que resulta del choque de dos columnas) se cumple que y es un valor regular.*

Demostración. Para probarlo, veremos que para cualquier $x \in \varphi_{[m_1, \dots, m_q]}^{-1}(y)$, $d_x \varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$ tiene rango máximo, i.e, $\text{rang } d_x \varphi_{[m_1, \dots, m_q]} = n + q - 1$.

Si $y \in [m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_q]$, entonces x es de la forma $x = ((z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_q), (z_{1_1}, \dots, z_{1_{m_1}}), \dots, (z_{q_1}, \dots, z_{q_{m_q}}))$ tal que $z_k = z_{k+1}$.

Con la base de vectores definida anteriormente, tenemos que

$$\begin{aligned} d_x \varphi(z_1) &= u_1, \\ &\dots \\ d_x \varphi(z_k) &= d_x \varphi(z_{k+1}) = u_k, \\ d_x \varphi(z_{k+2}) &= u_{k+1}, \\ &\dots \\ d_x \varphi(z_q) &= u_{q-1}, \\ d_x \varphi(z_{1_1}) &= u_q, \\ &\dots \\ d_x \varphi(z_{2_1}) &= u_{q+m_1}, \\ d_x \varphi(z_{q_{m_q}}) &= u_{q+n-1}, \end{aligned}$$

Por tanto, vemos que el rango de la matriz diferencial tendría dos columnas iguales luego, que el rango es $n + q - 1$.

□

Lema 7.6. $d_k = (-1)^{k-1} P(m_k, m_{k+1})$.

Cogemos la base en $T_y[m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_q]$ que resulta de trasladar la base que acabamos de describir en la celda a través de la aplicación $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$. Lo que haremos, será identificar el caso en el que dos columnas se chocan con configuraciones en las que las columnas c_{m_k} y $c_{m_{k+1}}$, (columnas con m_k y m_{k+1} puntos respectivamente), chocan 'infinitesimalmente'.

El determinante de la matriz de la diferencial podemos reducirlo al determinante de la matriz de la diferencial restringida a las columnas que se chocan ya que, la diferencial sobre los vectores u_j con $j \notin \{q + m_1 + \dots + m_{k-1} + 1, \dots, q + m_1 + \dots + m_{k-1} + m_k + m_{k+1}\}$ actúa como la identidad y, entonces, al calcular su determinante no influirían.

Entonces, tenemos dos columnas, c_{m_k} y $c_{m_{k+1}}$ con m_k y m_{k+1} puntos ordenados en cada una de ellas respectivamente y, con una base ordenada de vectores.

Observamos que tenemos $C_{m_k}^{m_k+m_{k+1}} := \binom{m_k+m_{k+1}}{m_k}$ maneras de chocar las columnas y que nos quede la configuración y , debido a las distintas maneras de colocar los puntos siguiendo el orden establecido en cada columna. (Mirar figura 5)

Así, por cada una de estas maneras de colocar los puntos, tendremos que en el borde, el orden de los vectores e_2 'asociados' a cada punto ya no tendrá porqué seguir el orden lexicográfico. Por ello, por cada manera distinta, tendremos una matriz diferencial a la cual calcular su determinante, que será $+1$ o -1 .

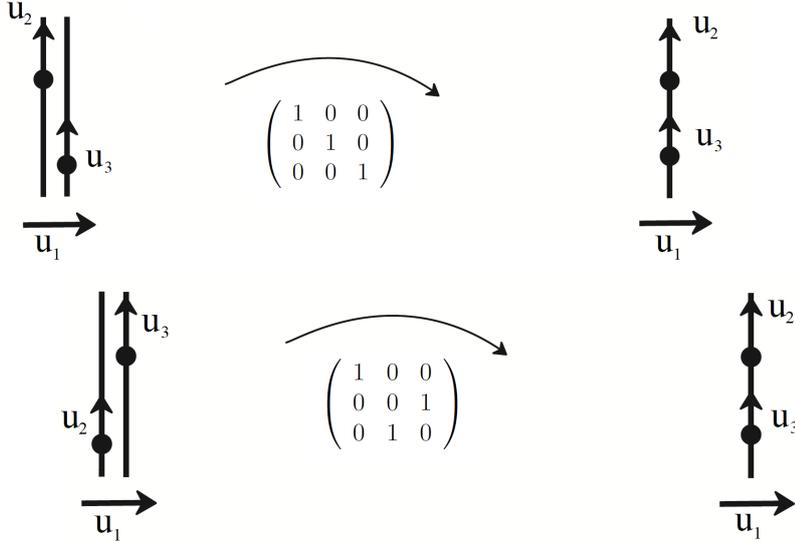


Figura 5: Config. $\{x_1, x_2\}$ de $[1,1]$. Config. de $[2]$

Como ya habremos notado, cada manera de poner los puntos, en realidad podemos pensarla como una permutación del conjunto de puntos manteniendo el orden establecido en cada columna. De aquí que, el signo del determinante de cada matriz coincida con el signo de la permutación de los puntos. (Obs: el signo del determinante lo determina los movimientos de las columnas para que de la identidad, que equivale al signo de la permutación).

Siguiendo con las diferentes maneras de pensar a qué equivalen las diferentes formas de poner los m_k y m_{k+1} puntos, tenemos ésta otra: también lo podemos ver como si tuviéramos dos barajas A y B , con m_k cartas (que serían los m_k puntos ordenados) en A y m_{k+1} cartas (los m_{k+1} puntos) en B y barajarlas .

¿Eso por qué?, porque las diferentes maneras de poner los puntos (ordenados), vendrían a ser las diferentes maneras de barajar los mazos A y B . Con ésta idea, nos percatamos que el número de maneras de barajar los mazos A y B , es el mismo que el número de maneras de barajar el mazo A quitándole la primera carta con el mazo B más, el número de maneras de barajar el mazo A con el mazo B habiéndole quitado su primera carta.

Definición 7.7. Sea $MB(x, y)$ el conjunto de maneras de barajar (*shuffle*) un mazo de cartas numeradas $1, \dots, x$ con otro mazo de cartas numeradas $x + 1, \dots, x + y$. Cada "shuffle" define una permutación del conjunto $\{1, \dots, x + y\}$ y, si $s \in MB(x, y)$

denotamos por $\epsilon(s)$ el signo de esa permutación. Definimos

$$S(x, y) = \sum_{s \in MB(x, y)} \epsilon(s).$$

Luego, por la discusión anterior, $d_k = S(m_k, m_{k+1})$.

Observación 7.8. $S(x, y) = S(y, x)$.

Proposición 7.9.

$$\begin{aligned} S(x, y) &= S(x-1, y) + (-1)^x S(x, y-1) \\ S(x, y) &= 0 \text{ si } x \equiv y \pmod{2} \end{aligned}$$

Demostración. Prop. 7.9.

Caso 1: Sean $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con al menos uno de ellos par.

$S(x, y) = (-1)^{\epsilon_1} S(x-1, y) + (-1)^{\epsilon_2} S(x, y-1)$ y lo que buscamos es definir ϵ_1 y ϵ_2 . Para ello, tenemos que definir el signo de las permutaciones en $S(x-1, y)$ y $S(x, y-1)$ visto desde $S(x, y)$.

Observación 7.10. Notamos que basta con verlo para una permutación en $S(x, y-1)$ ($S(x-1, y)$ resp.) ya que si el signo de ésta cambia al verla desde $S(x, y)$, el signo de las demás también lo harán debido a las traslaciones.

Notación 7.11. En lo que sigue cambiaremos la notación definida anteriormente por la siguiente: $x+i = i' \forall i \in \{1, \dots, y\}$.

Una permutación de $S(x-1, y)$ sería $+(2, \dots, x, 1', \dots, y')$ con signo positivo ya que sería la identidad teniendo en cuenta el orden inducido previamente definido.

Entonces, $+(2, \dots, x, 1', \dots, y')$ visto en $S(x, y)$ tendría signo positivo también ya que, vista en $S(x, y)$ sería de la forma: $(1, 2, \dots, x, 1', \dots, y')$ que tiene signo positivo por ser la identidad. Por tanto, esto nos dice que el signo se mantiene y $(-1)^{\epsilon_1} = +$ es decir, $\epsilon_1 = 0$ (por convenio).

Por otro lado, una permutación de $S(x, y-1)$ sería de la forma $+(1, 2, \dots, x, 2', \dots, y')$ (ya que hemos quitado la primera carta, i.e. "1'", al mazo con y cartas) con signo positivo por ser la identidad vista desde $S(x, y-1)$.

Si la miramos desde $S(x, y)$ tendría la forma $(1', 1, \dots, x, 2', \dots, y')$ (añadiéndole la 'carta' que faltaba) y el signo de la permutación dependerá de la paridad de x

$$\begin{cases} +, & x \text{ par porque de } 1' \text{ a } x \text{ hay un núm. par de traslaciones,} \\ -, & x \text{ impar porque hay un núm. impar de traslaciones} \end{cases}$$

Esto se debe a que, si tenemos la identidad en $S(x, y)$, $(1, \dots, x, 1', 2', \dots, y')$, para obtener $(1', 1, \dots, x, 2', \dots, y')$ movemos el $1'$ a su posición hacia adelante. Luego, el signo de la permutación viene dado por $(-1)^x$, es decir que $\epsilon_2 = x$.

Caso 2: Sean $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \equiv y \equiv 1 \pmod{2}$. Consideramos

$$\begin{aligned}
S(x, y + 1) &= S(x - 1, y + 1) + (-1)^x S(x, y) = S(x - 1, y + 1) - S(x, y); \\
S(y + 1, x) &= S(y, x) + (-1)^{y+1} S(y + 1, x - 1) = S(x, y) + S(y + 1, x - 1);
\end{aligned}$$

Como $S(x, y) = S(y, x)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
S(x - 1, y + 1) - S(x, y) &= S(y, x) + S(y + 1, x - 1) \\
&\Updownarrow \\
-S(x, y) &= S(y, x) \\
&\Updownarrow \\
S(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

□

Proposición 7.12.

$$S(x, y) = P(x, y) \tag{7.3}$$

Demostración. La probaremos mediante inducción.

Empezaremos viendo que se cumple para ciertos casos iniciales y luego, suponiendo que se cumple para $(x - 1, y)$ y $(x, y - 1)$, probaremos el caso para (x, y) .

Tenemos que

$$\begin{aligned}
S(1, k) &= \begin{cases} 1, & \text{si } 1 + k \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } 1 + k \text{ es par} \end{cases} \\
S(2, k) &= \sum_{i=1}^{k+1} \eta(i) = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\eta : \mathbb{Z} &\longrightarrow \{0, 1\} \\
\text{par} &\longmapsto 0 \\
\text{impar} &\longmapsto 1
\end{aligned}$$

Nota 7.13. La idea de la presentación de la fórmula para $S(2, k)$ está en el Anexo.

Ahora bien, por definición de $P(x, y)$ tenemos que:

Si k es un entero positivo e impar, $P(1, k) = 0$. Como k es impar, $S(1, k) = 0$. Por tanto ya tenemos una primera igualdad.

Si k es par tenemos

$$P(1, k) = \left(\left\lfloor \frac{\frac{1}{2} + \frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} \right\rfloor \right) = 1 = S(1, k).$$

Consideremos el otro caso inicial.

$$P(2, k) = \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{2}{2} + \frac{k}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{2}{2} \rfloor \end{array} \right) = \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil = S(2, k),$$

Suponemos que $S(x-1, y) = P(x-1, y)$ y $S(x, y-1) = P(x, y-1)$ entonces, queremos ver que $S(x, y) = P(x, y)$. Sean x, y números enteros positivos e impares, se cumple de forma directa que $S(x, y) = 0 = P(x, y)$.

Sean entonces, x, y enteros positivos. Se tiene que cumplir que $P(x, y) = P(x-1, y) + (-1)^x P(x, y-1)$, es decir

$$\left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x-1}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \end{array} \right) + (-1)^x \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) \quad (7.4)$$

Diferenciaremos tres casos:

Caso 1: x es par e y impar.

Como x es par tenemos que $S(x-1, y) = 0$ por la Prop. 7.9 y $(-1)^x = 1$, 7.4 nos queda de la forma

$$\left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} \right\rfloor$$

Tomando $x = 2k$ e $y = 2m + 1$ para $\{k, m\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ entonces,

$$\left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} + \frac{2m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(k+m)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k + m$$

$$\left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} + \frac{(2m+1)-1}{2} \right\rfloor = \lfloor k + m \rfloor = k + m$$

Caso 2: x es impar e y par.

Tenemos que $S(x, y-1) = 0$ por la Prop. 7.9 ya que y es par. Entonces, en este caso, 7.4 queda de la forma

$$\left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x-1}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-1}{2} + \frac{y}{2} \right\rfloor \quad y \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$$

De la misma forma que antes, tomamos $x = 2k + 1$ e $y = 2m$ para $\{k, m\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} + \frac{2m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(k+m)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k + m$$

$$\left\lfloor \frac{x-1}{2} + \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)-1}{2} + \frac{2m}{2} \right\rfloor = \lfloor k + m \rfloor = k + m$$

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = k$$

$$\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)-1}{2} \right\rfloor = \lfloor k \rfloor = k$$

Caso 3: x e y pares, $x = 2k$ e $y = 2m$.

$$\left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x-1}{2} + \frac{y}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \rfloor &= \lfloor \frac{2k}{2} + \frac{2m}{2} \rfloor = k + m = (k + m - 1) + 1 \\ \lfloor \frac{x-1}{2} + \frac{y}{2} \rfloor &= \lfloor \frac{2k-1}{2} + \frac{2m}{2} \rfloor = \lfloor k + m - \frac{1}{2} \rfloor = k + m - 1 \\ \lfloor \frac{x}{2} \rfloor &= \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor = k \\ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor &= \lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor = \lfloor k - \frac{1}{2} \rfloor = k - 1 \end{aligned}$$

Luego, por la siguiente propiedad de los números combinatorios

$$\binom{p+1}{q} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q-1}$$

cogiendo $p = k + m - 1$ y $q = k$ obtenemos el resultado.

□

8. Teorema de Lucas

8.1. Teorema de Lucas

Lema 8.1. $(1+x)^{p^n} = 1+x^{p^n} \pmod{p}$ cuando p es primo y $n > 0$.

Demostración. Si $0 < k < p^n$,

$$\binom{p^n}{k} = \frac{p^n!}{k!(p^n-k)!} = \frac{p^n}{k} \binom{p^n-1}{k-1}$$

Esto lo que quiere decir es que $k \binom{p^n}{k} = p^n \binom{p^n-1}{k-1}$. Entonces, al menos n potencias de p divide la parte derecha de la ecuación pero, como mucho $n-1$ potencias de p divide k en la parte izquierda de la igualdad (ya que $k < p^n$). Por tanto, p tiene que dividir $\binom{p^n}{k}$ y consecuentemente, $\binom{p^n}{k} \equiv 0 \pmod{p}$. Si tomamos los casos en que $k=0$ o $k=p^n$, entonces se tiene que $\binom{p^n}{k} = 1$.

De esta manera, probamos que en la expansión binomial de $(1+x)^{p^n}$, sólo el primer y último coeficientes son diferentes de $0 \pmod{p}$.

□ Lema

Teorema 8.2. (Teorema de Lucas) Sean m, n enteros no negativos y sea p un número primo. Entonces, se cumple que

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}$$

donde $m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \dots + m_1 p + m_0$, y $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \dots + n_1 p + n_0$ son las descomposiciones de m y n en base p respectivamente. Se usa la convención que $\binom{m}{n} = 0$ si $m < n$.

La demostración se basa en el Teorema Binomial para la expansión $(1+x)^m$.

Demostración. (Teorema de Lucas) Con las hipótesis del teorema, tenemos

$$\begin{aligned} m &= m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \dots + m_1 p + m_0 \quad (0 \leq m_i < p), \\ n &= n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \dots + n_1 p + n_0 \quad (0 \leq n_i < p), \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n &= (1+x)^m = \prod_{r=0}^k ((1+x)^{p^r})^{m_r} \\
&= \prod_{r=0}^k (1+x^{p^r})^{m_r} \pmod{p} \text{ (debido al lema anterior)} \\
&= \prod_{r=0}^k \left[\sum_{s_r=0}^{m_r} \binom{m_r}{s_r} x^{s_r p^r} \right] \pmod{p} \\
&= \sum_{n=0}^m \left[\sum_{r=0}^k \prod \binom{m_r}{s_r} \right] x^n \pmod{p}
\end{aligned}$$

donde por cada valor n , la suma entre corchetes se toma en los conjuntos (s_0, s_1, \dots, s_k) tal que

$$0 \leq s_r \leq n_r < p \text{ y } \sum_{r=0}^k s_r p^r = n,$$

Pero como mucho hay un conjunto cuyos coeficientes son $s_r = n_r$ si $n_r \leq m_r$ (ya que n descompone en base p de manera única). Si $n_r > m_r$ para algún r , entonces la suma da 0. En cualquiera de los casos probamos el resultado igualando coeficientes de x^n para cada $0 \leq n \leq m$.

□ Teorema de Lucas

Remark 8.3. *Utilizando el Teorema de Lucas tenemos*

$$\binom{p^a + p^b}{p^a} \equiv \begin{cases} 1, & a \neq b \pmod{p} \\ 2, & a = b \pmod{p} \end{cases}$$

y

$$\binom{p^a + p^b(p-1)}{p^a} \equiv \begin{cases} 1, & a \neq b \pmod{p} \\ 0, & a = b \pmod{p} \end{cases} \quad (8.1)$$

9. Bases de $H^*(A_n^\bullet, \mathbb{Z}_p)$

Ahora presentaremos la descripción de los grupos de homología $H^r(A_n^\bullet, \mathbb{Z}_p)$ de Vainshtein [4] con una leve modificación hecha por Christoph Schiessl en su tesis [1].

9.1. Grupos de cohomología de $C_n(\mathbb{R}^2)$

Como $P(x, y) = 0$ para x e y impares, el complejo A_n^\bullet se puede escribir como la suma directa

$$A_n^\bullet = A_{n,0}^\bullet \oplus \cdots \oplus A_{n,n}^\bullet$$

de subcomplejos $A_{n,t}^\bullet$ generado por descomposiciones con t entradas impares.

Cogemos cualquier $I \subset \{1, \dots, s+t\}$ con t elementos, $I = \{i_1, \dots, i_t\}$ donde $i_1 < \cdots < i_t$. Entonces, insertamos 1's en las posiciones i_1, i_2, \dots, i_t :

$$\text{Ins}_I[m_1, \dots, m_q] = (-1)^{\sum_j i_j} [m_1, \dots, m_{i_1-1}, 1, m_{i_1}, \dots, m_{i_2-2}, 1, m_{i_2-1}, \dots]$$

Entonces, la aplicación

$$\text{Ins}_t = (-1)^{st} \sum_{I \subset \{1, \dots, s+t\}, |I|=t} \text{Ins}_I$$

es una aplicación entre cadenas

$$\text{Ins}_t : A_{n,0}^\bullet \longrightarrow A_{n+t,t}^\bullet$$

que induce isomorfismos

$$H^r(A_{n-t,0}^\bullet) \cong H^r(A_{n,t}^\bullet)$$

Por tanto tenemos

$$H^*(A_n^\bullet) = H^*(A_{n,0}^\bullet) \oplus H^*(A_{n-1,0}^\bullet) \oplus \cdots \oplus H^*(A_{0,0}^\bullet). \quad (9.1)$$

Escribimos

$$H^r(C_\infty(\mathbb{R}^2)) = \lim_{x \rightarrow \infty} H^r(C_n(\mathbb{R}^2))$$

9.2. Bases explícitas de $H^*(A_{n,0}^\bullet, \mathbb{Z}_p)$

Sea $[m_1, \dots, m_q]$ cualquier descomposición de n . Entonces, la suma alternada de sus permutaciones

$$\sum_{\sigma \in S_q} \text{sign}(\sigma) [m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(q)}]$$

es un ciclo en A_n^\bullet .

Con coeficientes en \mathbb{Z}_p , el siguiente subconjunto de permutaciones

$$\text{Perm}[m_1, \dots, m_s] = \sum_{\substack{\sigma \in S_q, \text{ donde } \sigma(i) < \sigma(j) \\ \text{si } i < j \text{ y } m_i = m_j \text{ o} \\ \text{si } i < j \text{ y } P(m_i, m_j) \equiv 0 \pmod{p}}} \text{sign}(\sigma)[m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(q)}],$$

con la condición de que m_1, \dots, m_q no sean todos iguales, crea un ciclo en A_n^\bullet/pA_n^\bullet .

Cogemos enteros $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$ y $0 \leq j_1 < \dots < j_l$ tales que

$$m = n - 2(p^{i_1} + \dots + p^{i_k} + p^{j_1} + \dots + p^{j_l}) \geq 0$$

y sea

$$r = (2p^{i_1} - 2) + \dots + (2p^{i_k} - 2) + (2p^{j_1} - 1) + \dots + (2p^{j_l} - 1).$$

Entonces,

Proposición 9.1. *La siguiente cadena*

$$\text{Ins}_m \text{Perm}[2p^{i_1-1}, 2p^{i_1-1}(p-1), \dots, 2p^{i_k-1}, 2p^{i_k-1}(p-1), 2p^{j_1}, \dots, 2p^{j_l}]$$

es un ciclo en $A_{n,m}^r/pA_{n,m}^r$. La notaremos como $x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}$

Lema 9.2. *La aplicación diferencial δ en A_n^\bullet actúa de la siguiente manera:*

$$\delta(x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}) = \sum_r \binom{p^r}{p^{r-1}} x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r-1} \cdots x_{i_k}^{a_k} y_{i_r} y_{j_1} \cdots y_{j_l}$$

Demostración.

$$\delta(x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}) = \delta(\text{Perm}[2p^{a_1-1}, 2p^{a_1-1}(p-1), \dots, 2p^{a_k-1}, 2p^{a_k-1}(p-1), 2p^{j_1}, \dots, 2p^{j_l}]);$$

Utilizando 8.1, tenemos que todas las entradas de la forma $2p^a, 2p^a(p-1)$ seguidas, preservan el orden al aplicar el operador $Perm$.

Así, el orden de $x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k}$ se tiene que mantener y por tanto, se tendrá en cuenta en las permutaciones que obtengamos al aplicar $Perm$.

Todas las entradas que vayan seguidas que no sean $2p^a, 2p^a(p-1)$ (como por ejemplo $2p^{a_1-1}, 2p^{a_k-1}$), el operador $Perm$ nos dará dos permutaciones, una de las cuales será una traslación de la otra (siguiendo el ejemplo: $[\dots, 2p^{a_1-1}, 2p^{a_k-1}, \dots]$ y $[\dots, 2p^{a_k-1}, 2p^{a_1-1}, \dots]$) ya que no tienen que preservar el orden. Entonces, cuando apliquemos el operador borde, mutuamente se cancelarán.

Así, las únicas permutaciones que se salvan son aquellas que tengan entradas seguidas de la forma $2p^a, 2p^a(p-1)$. Por tanto, considerando $x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}$, lo que iríamos obteniendo al aplicar el operador borde sería:

$$\begin{aligned} & \binom{p^{a_1-1} + p^{a_1-1}(p-1)}{p^{a_1-1}} \text{Perm}[2p^{a_1}, 2p^{a_1-1}, 2p^{a_1-1}(p-1), \dots, 2p^{j_l}] + \dots + \\ & + \binom{p^{a_k-1} + p^{a_k-1}(p-1)}{p^{a_k-1}} \text{Perm}[2p^{a_k}, 2p^{a_k-1}, 2p^{a_k-1}(p-1), \dots, 2p^{j_l}] = \\ & = \binom{p^{a_1}}{p^{a_1-1}} x_{i_1}^{a_1-1} \cdots x_{i_k}^{a_k} y_{a_1} y_{j_1} \cdots y_{j_l} + \dots + \binom{p^{a_k}}{p^{a_k-1}} x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k-1} y_{a_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l} \end{aligned}$$

□ Lema

Demostración. Basta con probar el caso $m = 0$ por 9.1. Utilizando 8.1 tenemos $\binom{p^r}{p^{r-1}} = 0$ en \mathbb{Z}_p ya que $p^r = p^{r-1} + p^{r-1}(p - 1)$ y, por el Lema 9.2 tenemos que todo nos da 0.

□Prop 9.1

10. Grupos de cohomología de $C_n(\mathbb{R}^2)$ en \mathbb{Z}_2

Teorema 10.1. [1][4] *El anillo $H^*(C_n(\mathbb{R}^2), \mathbb{Z}_p)$ es el álgebra conmutativa libre sobre \mathbb{Z}_p con generadores*

$$\begin{array}{lll} x_i \text{ para } i \geq 1 & \deg(x_i) = 2p^i - 2 & \text{size}(x_i) = 2p^i \\ y_i \text{ para } i \geq 0 & \deg(y_i) = 2p^i - 1 & \text{size}(y_i) = 2p^i \end{array}$$

donde \deg significa el grado del grupo de cohomología, y size quiere decir el número de puntos que tiene la celda.

Existe una aplicación exhaustiva $H^*(C_\infty(\mathbb{R}^2), \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(C_n(\mathbb{R}^2), \mathbb{Z}_p)$ cuyo núcleo está generado por los monomios $x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}$ tal que el $\text{size}(x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}) > n$.

La demostración que seguiremos a continuación será para $p = 2$ que está echa en *Fuks*, [2]. En ésta sección sólo estudiaremos la estructura aditiva de la cohomología. Para los otros primos, *Vainshtein* [4] es quien proporciona una demostración.

10.1. Demostración del teorema

Recordamos que hemos definido $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ como la compactificación por un punto del espacio topológico $C_n(\mathbb{R}^2)$. Por el teorema de Poincaré, $H^*(C_n(\mathbb{R}^2); \mathbb{Z}_2) \cong H_*(\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}; \mathbb{Z}_2)$ y el problema del cálculo de los grupos de cohomología del espacio $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ se reduce al problema del cálculo de los grupos de homología del espacio $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$.

En la *Sección 5*, vimos una construcción celular del espacio $\overline{C_n(\mathbb{R}^2)}$ dada por las celdas $[m_1, \dots, m_q]$ y las aplicaciones de pegado $\varphi_{[m_1, \dots, m_q]}$. Luego, definimos el borde de la celda $[m_1, \dots, m_q] \in A_n^r$ ($q = n - r$), que en coeficientes en \mathbb{Z}_2 queda de la forma:

$$\sum_{i=1}^{q-1} C_{m_i}^{m_i+m_{i+1}} [m_1, \dots, m_i + m_{i+1}, \dots, m_q]$$

donde $C_{m_i}^{m_i+m_{i+1}}$ denota el número combinatorio $\binom{m_i+m_{i+1}}{m_i}$.

Veamoslo,

Lema 10.2. $S(x, y) = C_x^{x+y}$ en \mathbb{Z}_2 .

Demostración. En \mathbb{Z}_2 , $S(x, y)$ nos queda de la forma

$$S(x, y) = S(x - 1, y) + S(x, y - 1)$$

La demostración se lleva a cabo de igual manera que en 7.12; mediante inducción.

$$C_1^{1+k} = \binom{1+k}{1} = 1 + k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2}, & 1+k \text{ impar} \\ 0 \pmod{2}, & 1+k \text{ par} \end{cases} = S(1, k) \pmod{2}.$$

$$C_2^{2+k} = \binom{2+k}{2} = \frac{(2+k)!}{2!k!} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \sum_{i=1}^{k+1} i \equiv \sum_{i=1}^{k+1} \eta(i) \pmod{2}$$

$$= S(2, k) \pmod{2},$$

donde η es la función definida en la *Sección 7*.

Suponemos que se cumple $S(x-1, y) = C_{x-1}^{(x-1)+y}$ y $S(x, y-1) = C_x^{x+(y-1)}$. Queremos ver que se cumpla $S(x, y) = C_x^{x+y}$, i.e, que se cumpla la siguiente igualdad

$$\binom{x+y}{x} = \binom{(x-1)+y}{(x-1)} + \binom{x+(y-1)}{x}$$

y, claramente esto se cumple por una propiedad combinatoria.

□

10.2. Construcción de los grupos de cohomología

Primero de todo daremos unas definiciones previas.

Definición 10.3. Dadas dos cadenas c y c' , diremos que $c \subset c'$ si todos los generadores que aparecen con coeficiente no nulo en c , también aparecen con coeficiente no nulo en c' .

Definición 10.4. Una cadena del complejo de cadenas A_n^\bullet se llama *simétrica* si las celdas $[m_1, \dots, m_q], [m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(q)}]$, (donde σ es una permutación de q elementos) entran con los mismos coeficientes para cualquier m_1, \dots, m_q, σ .

Definición 10.5. Una celda $[m_1, \dots, m_q]$ la llamaremos *2-celda* si todos los m_i son potencias de 2.

Definición 10.6. Llamaremos a una cadena *2-cadena* si es una suma de *2-celdas*.

Teorema 10.7. *Toda 2-cadena simétrica es un ciclo. Todo ciclo del complejo de cadenas A_n^\bullet es homólogo a una única 2-cadena simétrica. Así, el grupo graduado $H_*(C_n(\mathbb{R}^2); \mathbb{Z}_2)$ es isomorfo al subgrupo graduado de A_n^\bullet que consiste en 2-cadenas simétricas.*

Para probar éste teorema lo hemos dividido en proposiciones; antes sin embargo, daremos un lema que nos será útil para la demostración.

Lema 10.8. *Sean s_1, \dots, s_q enteros no negativos diferentes dos a dos. El número $C_2^{2^{s_1} + \dots + 2^{s_q}}$ es impar sii $s \in \{s_1, \dots, s_q\}$.*

Demostración. Primero, de la siguiente identidad $(1+x^2)^k \equiv (1+x)^{2k} \pmod{2}$ (que sale del Lema 8.1 para el caso $p=2$), se sigue que $C_{2^r}^{2^q} \equiv C_r^q \pmod{2}$, $C_{2^r-1}^q \equiv 0 \pmod{2}$. Para probarlo lo haremos por inducción.

Suponemos que se cumple para $q < l$, y consideramos el caso $q = l$. Suponemos también que $s_1 > \dots > s_l$. Hay dos casos posibles:

1. $s \leq s_l$. Entonces, $C_{2^s}^{2^{s_1}+\dots+2^{s_l}} \equiv C_1^{2^{s_1-s}+\dots+2^{s_l-s}} \pmod{2}$ y $C_1^{2^{s_1-s}+\dots+2^{s_l-s}} = 2^{s_1-s} + \dots + 2^{s_l-s}$ es impar solo si $s = s_l$.
2. $s > s_l$. Entonces, $C_{2^s}^{2^{s_1}+\dots+2^{s_l}} \equiv C_{2^{s-s_l}}^{2^{s_1-s_l}+\dots+2^{s_{l-1}-s_l}+1} \pmod{2}$ y
$$C_{2^{s-s_l}}^{2^{s_1-s_l}+\dots+2^{s_{l-1}-s_l}+1} = C_{2^{s-s_l}}^{2^{s_1-s_l}+\dots+2^{s_{l-1}-s_l}} + C_{2^{s-s_l-1}}^{2^{s_1-s_l}+\dots+2^{s_{l-1}-s_l}} \equiv$$

$$\equiv C_{2^{s-s_l}}^{2^{s_1-s_l}+\dots+2^{s_{l-1}-s_l}} \pmod{2}.$$

Ahora, usando la hipótesis de inducción, el número $C_{2^{s-s_l}}^{2^{s_1-s_l}+\dots+2^{s_{l-1}-s_l}}$ es impar si, y solo si, $s - s_l$ está en el conjunto $\{s_1 - s_l, \dots, s_{l-1} - s_l\}$, es decir, si $s \in \{s_1, \dots, s_{l-1}\}$.

□

Proposición 10.9. *Toda cadena simétrica es un ciclo.*

Demostración. Si c es una cadena $(n+q)$ -dimensional y la celda $[m_1, \dots, m_i, \dots, m_{q-1}]$ está en el borde de c , ∂c , como un elemento del borde de la celda $[\dots, m_{i-1}, m'_i, m''_i, m_{i+1}, \dots]$ donde $m_i = m'_i + m''_i$, entonces $m'_i \neq m''_i$ ya que, en caso contrario, $C_m^{2m} = C_{m-1}^{2m-1} + C_m^{2m-1} = C_{m-1}^{(m-1)+m} + C_m^{m+(m-1)} = 2C_m^{2m-1} \equiv 0 \pmod{2}$. Además, la celda $[m_1, \dots, m_i, \dots, m_{q-1}]$ está también en ∂c como elemento del borde de la celda $[m_1, \dots, m_{i-1}, m'_i, m''_i, \dots, m_{q-1}]$.

□

Proposición 10.10. *Una cadena, que sea el borde de otra, no puede contener 2-celdas. En particular, dos 2-cadenas son homólogas si, y solo si, coinciden.*

Demostración. Suponemos $c = [2^{s_1}, 2^{s_2}, \dots, 2^{s_q}]$ una 2-celda. Tenemos que c aparece en el borde de la celda $[x, y, 2^{s_2}, \dots, 2^{s_q}]$ con $x + y = 2^{s_1}$ de la siguiente forma: $\partial[x, y, 2^{s_2}, \dots, 2^{s_q}] = C_x^{x+y}[x+y, 2^{s_2}, \dots, 2^{s_q}] + \dots = C_x^{2^{s_1}}[2^{s_1}, 2^{s_2}, \dots, 2^{s_q}] + \dots$. Entonces, como $C_i^{2^s}$ es par para todo $0 < i < 2^s$, tenemos que esa parte del sumatorio será 0.

□

Proposición 10.11. *Si una 2-cadena es un ciclo entonces es simétrica.*

Demostración. Si la celda $[m_1, \dots, m_{q-1}]$ está en el borde de una 2-celda $(n+q)$ -dimensional, entonces todo m_i excepto uno son potencias de 2 y la excepción es la suma de dos potencias de 2 (diferentes ya que $C_{m_i}^{2m_i} \equiv 0 \pmod{2}$), es decir, $[m_1, \dots, m_{q-1}] = [2^{s_1}, \dots, 2^{s_{i-1}}, 2^{s'_i} + 2^{s''_i}, 2^{s_{i+1}}, \dots, 2^{s_{q-1}}]$. Tal celda está en el borde de estas dos 2-celdas: $[2^{s_1}, \dots, 2^{s_{i-1}}, 2^{s'_i}, 2^{s''_i}, 2^{s_{i+1}}, \dots, 2^{s_{q-1}}]$ y $[2^{s_1}, \dots, 2^{s_{i-1}}, 2^{s''_i}, 2^{s'_i}, 2^{s_{i+1}}, \dots, 2^{s_{q-1}}]$ (Obs: el número $C_{s'_i+s''_i}^{s'_i+s''_i}$ es impar por Lema 10.8).

Por tanto, si una 2-cadena es un ciclo entonces las 2-celdas están, o no están, simultáneamente en la 2-cadena. Por consiguiente, la 2-cadena es simétrica.

□

Proposición 10.12. *Todo ciclo es homólogo a una 2-cadena.*

Demostración. Diremos que la celda $[m_1, \dots, m_k]$ tiene orden mayor que s si m_1, \dots, m_s son potencias de 2, es decir, si lo son los s primeros m_i .

Sea c un ciclo cuyas celdas tienen orden mayor que $s \geq 0$. Demostraremos que es homóloga a un ciclo cuyas celdas tienen orden mayor que $s + 1$.

Escogemos de c , celdas de la forma $[2^{l_1}, \dots, 2^{l_s}, j, m_{s+2}, \dots, m_k]$ donde j no es una potencia de 2. Si tomamos la suma de todas las celdas con j, m_{s+2}, \dots, m_k fijos que están en c , y en cada una de esas celdas, descartamos j, m_{s+2}, \dots, m_k , obtendríamos una 2-cadena $(n + s)$ -dimensional.

Como c es un ciclo, entonces ésta nueva también es un ciclo y, de Lema 10.8 tenemos que es simétrica. Que sea simétrica nos dice que las celdas de ésta 2-cadena son permutaciones de $(2^{l_1}, \dots, 2^{l_s})$. Definiendo

$$[(2^{l_1}, \dots, 2^{l_s}), j, m_{s+2}, \dots, m_k] = \sum_{\sigma \in S_s} [2^{\sigma(l_1)}, \dots, 2^{\sigma(l_s)}, j, m_{s+2}, \dots, m_k] \quad (10.1)$$

definimos c' como la suma de cadenas de la forma $[(2^{l_1}, \dots, 2^{l_s}), j, m_{s+2}, \dots, m_k]$. Se tiene que $c' \subset c$

Observación 10.13. A partir de aquí consideraremos cadenas de la forma que aparece en 10.1.

Claramente,

$$\partial[(2^{l_1}, \dots, 2^{l_s}), j, m_{s+2}, \dots, m_k] = \sum C_{2^{l_i}}^{j+2^{l_i}} [(2^{l_1}, \dots, \hat{2}^{l_i}, \dots, 2^{l_s}), j+2^{l_i}, m_{s+2}, \dots, m_k] + \dots, \quad (10.2)$$

donde la suma se extiende para todos los l_i diferentes y '...' se refiere a una cadena de orden mayor que s . Sea $j = 2^{\lambda_1} + \dots + 2^{\lambda_t}$ su descomposición binaria. Entonces, la parte derecha de la igualdad de 10.2 se puede escribir

$$\sum [(2^{l_1}, \dots, \hat{2}^{l_i}, \dots, 2^{l_s}), j + 2^{l_i}, m_{s+2}, \dots, m_k] + \dots, \quad (10.3)$$

donde la suma se extiende para todo los l_i que no pertenecen al conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$.

Esto se sigue por 10.8 ya que, para este caso, los coeficientes son $C_{2^{l_i}}^{j+2^{l_i}} = C_{2^{l_i}}^{2^{\lambda_1} + \dots + 2^{\lambda_t} + 2^{l_i}} \equiv 1 \pmod{2}$ si $l_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$. Las celdas que están en esta suma se pueden anular en ∂c solo con celdas que están en el borde de $[(2^{l'_1}, \dots, 2^{l'_s}), 2^{\lambda'_1} + \dots + 2^{\lambda'_t}, m_{s+2}, \dots, m_k]$, cuyo conjunto $\{l'_1, \dots, l'_s, \lambda'_1, \dots, \lambda'_t\}$ coincide con el conjunto $\{l_1, \dots, l_s, \lambda_1, \dots, \lambda_t\}$.

Denotamos el último conjunto como L y como c^+ la suma de las celdas que, al hacer su borde, anularían las celdas que están en la suma 10.3 .

Algunos de los elementos de L pueden repetirse, pero seguro que como mínimo hay t de ellos que no. Sea $t \leq p \leq t + s$ el número de elementos distintos de L . Denotamos como μ_1, \dots, μ_p los diferentes números de L . Entonces, para $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq p$ definimos el siguiente conjunto

$$E_d(i_1, \dots, i_t) = [(2^{l_1}, \dots, 2^{l_s}), 2^{\mu_{i_1}} + \dots + 2^{\mu_{i_t}}, m_{s+2}, \dots, m_k], \quad (10.4)$$

donde l_1, \dots, l_s son los números que quedan en L luego de haber eliminado los $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_t}$ y d es el grado de las celdas de la cadena.

Definimos $\mathcal{A}(L) = \{(i_1, \dots, i_t) \subset L \mid i_k \neq i_j, \forall k \neq j\}$.

Luego, $\exists A \subset \mathcal{A}(L)$ tal que

$$c^+ = \sum_{(i_1, \dots, i_t) \in A} E_d(i_1, \dots, i_t) \subset c$$

de manera que

$$\partial c^+ = \sum_{j \in \{1, \dots, s\}} E_{d+1}(i_1, \dots, i_t, l_j) + \theta'$$

con $c' := \sum_{j \in \{1, \dots, s\}} E_{d+1}(i_1, \dots, i_t, l_j) = 0$, $E_{d+1}(i_1, \dots, i_t, l_j) = [(2^{l_1}, \dots, 2^{l_{s-1}}), 2^{\mu_{i_1}} + \dots + 2^{\mu_{i_t}} + 2^{l_j}, m_{s+2}, \dots, m_k]$ y θ' cadena de orden mayor que s .

Identificamos $\{j_1, \dots, j_p\}$ (el conjunto formado por los p números distintos de L), con los vértices del $(p-1)$ -símplice. Cogiendo las celdas de c' , para un $(i_1, \dots, i_t) \in \mathcal{A}(L)$, identificamos $E(i_1, \dots, i_t)$ vía la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{A}(L) &\xrightarrow{\cong} sk_{t-1}\Delta^{p-1} \\ (i_1, \dots, i_t) &\mapsto \Delta(i_1, \dots, i_t) \end{aligned}$$

con la cara $(i_1, \dots, i_t) \subset sk_{t-1}\Delta^{p-1}$. De la misma manera, identificamos $E(i_1, \dots, i_t, l_j)$ con la cara $(i_1, \dots, i_t, l_j) \subset sk_{t-1}\Delta^{p-1}$.

Observación 10.14. $\alpha(\partial c) = \partial^*(\alpha(c))$.

Entonces, bajo estas identificaciones vemos que $\alpha(c') = 0 = \partial^*(\alpha(c^+))$. Por tanto, debido a que el símplice es contráctil y que $t > 1$, se tiene que $\exists \sum \sigma_i^*$ tal que $\partial^*(\sum \sigma_i^*) = \alpha(c^+)$. Tirando hacia atrás vía $\alpha^{-1} \sum \sigma_i^*$, al aplicar el borde, tenemos que $\partial(\alpha^{-1}(\sum \sigma_i^*)) = c^+ + \theta$ ($\theta := \{ \text{celdas de orden } > s \}$), es decir, c^+ es el borde de una cadena.

Como consecuencia, tenemos que $c \sim c - (c^+ + \theta)$, i.e que c es homóloga a una cadena con menos celdas cuyas primeras s entradas son potencias de 2 y la $s+1$ -ésima no.

De manera recursiva podemos seguir con éste método hasta terminar con ninguna celda de orden s ; todas de orden mayor que s . Y, utilizando el mismo argumento para s con orden $s+1$, obtendríamos una cadena homóloga a otra de orden $s+2$. Sucesivamente, llegaríamos que nuestra cadena inicial sería homóloga a una 2-cadena, como queríamos probar.

□

11. Anexo

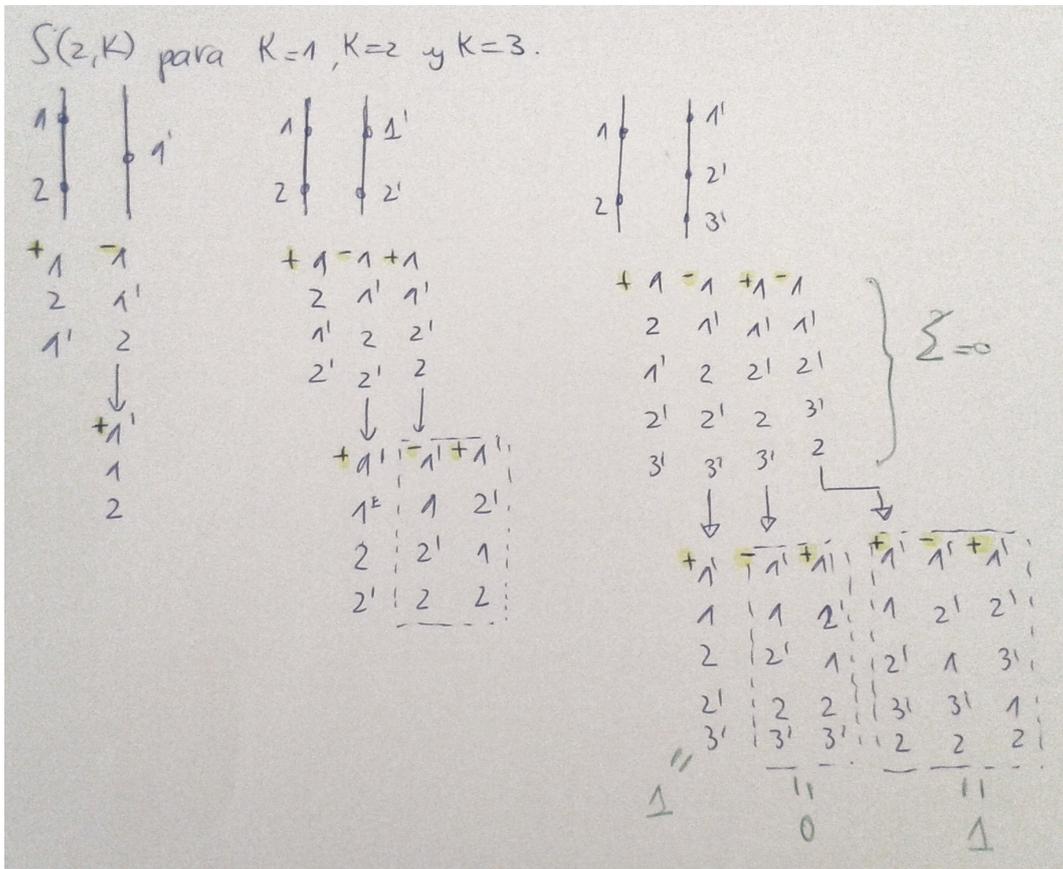


Figura 6: $S(2, k)$

Referencias

- [1] Schiessl, C.: Integral cohomology of configuration spaces of the sphere, [arXiv:1801.04273](https://arxiv.org/abs/1801.04273) [math.AT], enero de 2018.
- [2] Fuks, D. B. “Cohomology of the braid group mod 2”. In: Funkcional. Anal. i Prilozhen. 4.2 (1970), pp. 62–73.
- [3] Hatcher, A. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [4] Vainshtein, F. V. “The cohomology of braid groups”. In: Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12.2 (1978), pp. 72–73.
- [5] Vassiliev, V. A. Introduction to topology. Vol. 14. Student Mathematical Library. Translated from the 1997 Russian original by A. Sossinski. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. xiv+149.
- [6] Milnor, J.W. Topology from the Differentiable Viewpoint. Oriented Manifolds.