UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Processos estocàstics aplicats a teoria de cues

Autor: Gerard Gnutti Sandiumenge

Directora: Dra. Marta Sanz Solé
Realitzat a: Departament matemàtiques i informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

There are many situations where we want to model a certain phenomenon but it's impossible to know exactly its evolution over time. For example, we can't find a differential equation to model the position of a pollen grain suspended in water. It is considered that these phenomena follow a certain randomness. As it is not useful to model it using deterministic models, we need stochastic tools. The purpose of this work is to introduce us in stochastic modeling. We'll do it by studying a specific case where stochastic models are used, queuing theory.

Resum

Hi ha situacions en què volem modelitzar un cert fenòmen però no podem conèixer amb certesa la seva evolució al llarg del temps. Per exemple, no podem trobar una equació diferencial que ens doni la posició, al llarg delt temps, d'un gra de polen que flota a l'aigua. Considerem que aquests fenòmens evolucionen amb una certa aleatorietat. Per modelitzar-los, doncs, no resulta útil fer-ho amb models deterministes, necessitem eines estocàstiques. L'objectiu d'aquest treball és el d'introduir-nos en el món de la modelització estocàstica. Per fer-ho, ens endinsem en la teoria de cues, que és l'estudi de línies d'espera que es poden formar en diferents situacions de la vida quotidiana.

2010 Mathematics Subject Classification. 60G07, 60G10, 60G55, 60J10, 60J27, 60J28,

Agraïments

A la Marta Sanz, pel seu temps i dedicació, i per guiar-me en aquesta introducció al món de la modelització estocàstica.

A l'Aida, sense la seva ajuda no hagués pogut fer la simulació amb FlexSim de les estacions de Bicing.

Índex

1 Introducció

En moltes situacions de la vida quotidiana ens trobem que hem d'esperar per rebre un cert servei. Per exemple, en una botiga pot ser que haguem d'esperar a ser atesos, o en un peatge que haguem d'esperar que ens arribi el torn per pagar. Les línies d'espera que formen els clients per rebre aquest servei les anomenem cues. Estudiant-les, podem respondre a preguntes com: ¿la capacitat que tenim per oferir un cert servei és suficient per atendre tots els nostres clients? Ens val la pena millorar la nostra capacitat d'oferir aquest servei, o és massa costós? Quines alternatives tenim per gestionar les cues que es formen?

L'estudi de les cues rep el nom de teoria de cues. És impossible conéixer els moments exactes en els que arribaran els clients, ni saber amb total seguretat quants clients hi haurà esperant en cada moment. Per això la base de la teoria de cues és la modelització estocàstica.

El propòsit principal d'aquest treball és el d'introduir-nos en el món dels processos estocàstics. I ho fem a través de l'estudi matemàtic d'algunes de les cues més simples. Per acabar, ens proposem entendre les limitacions de les eines vistes al llarg del treball. Per fer-ho intentem modelitzar la dinàmica de tres estacions de Bicing.

Estructura de la memòria

En la primera secció definim tots els conceptes sobre processos estocàstics que utilitzem en les seccions següents. Definim procés estocàstic a temps discret i a temps continu; amb espai d'estats discret i amb espai d'estats continu. Després parlem de cadenes de Markov, tant a temps continu com a temps discret. Definim els conceptes de probabilitats de transició, de distribució límit i de distribució estacionària.

A continuació definim un procés de Poisson com un procés amb increments en temps disjunts independents, que tenen una distribució de Poisson. I veiem que el podem definir equivalentment com un procés de renovació, on els temps entre esdeveniments tenen una distribució exponencial.

Per acabar la secció estudiem els processos de naixement i mort. Després de donar-ne la definició presentem el que anomenem paràmetres de naixement i mort d'un procés. Donats els paràmtres de naixement i mort, deduïm un sistema d'equacions diferencials que, amb una certa condició inicial, tenen com a solució les probabilitats de transició del procés. Després, calculem la distribució de probabilitat del temps que el procés "reposa"en cada estat. Entenem que el temps de repòs en un estat és el temps que passa entre que hi arriba fins que se'n va. Finalment veiem sota quina condició un procés de naixement i mort tindrà distribució límit, i la trobem en cas que existeixi.

En la segona secció donem una definició formal de cua i presentem les tres cues bàsiques: les tres que tenen per procés d'arribada un procés de Poisson, i els temps de servei de cada client són variables aleatòries independents idènticament distribuides amb una distribució exponencial. La diferència entre aquestes cues està en el nombre de servidors. Per estudiar-les utilitzem el fet que els clients formen un procés de naixement i mort. Per acabar, parlem de les cues M/G/1. En aquest model els clients no formen un procés de naixement i mort i, per tant, hem d'utilitzar un altre mètode per estudiar-lo. Aquest mètode es basa en l'estudi del nombre de persones que hi ha a la cua en els moments en què un client marxa, que és una cadena de Markov a temps discret.

Per acabar, en la tercera secció ens plantegem si podriem utilitzar les eines estudiades al llarg del treball per modelitzar la dinàmica de tres estacions de Bicing. Presentem primer un model per una sola estació, sense tenir en compte la informació de les estacions veïnes. Aquest model l'anomenem M/0/M i l'estudiem amb les eines que tenim. A continuació ens plantegem el mateix problema però amb tres estacions, tenint en compte que les bicis que arriben a cada estació han hagut de sortir d'alguna de les altres dues. Per construir aquest model intentem ser el màxim fidels possible a la dinàmica que volem modelitzar. Ens trobem que, amb les eines que tenim, no el podem estudiar matemàticament. Per això el simulem amb FlexSim, un software de simulació 3D. Finalment ens preguntem si modelitzant les tres estacions com tres cues M/0/M independents, obtenim resultats que s'ajustin als obtinguts amb la simulació de l'altre model. D'aquesta manera pretenem veure si les eines bàsiques de teoria de cues són suficients per afrontar el problema de modelitzar tres estacions del Bicing.

2 Processos Estocàstics

Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries $\{X(t) : t \in T\}$ indexades per $t \in T \subset \mathbb{R}$.

En molts casos el paràmetre t representa el temps. El procés és diu que és de temps discret si el conjunt d'indexos T és numerable, i continu en cas contrari.

Anomenem conjunt d'estats E als possibles valors que poden prendre les variables aleatòries $X(t)$. Aquest espai també pot ser discret o continu.

Els processos estocàstics que veurem seran sempre d'espai d'estats discret i l'identificarem amb $\mathbb{N}$. A no ser que s'especifiqui el contrari, quan parlem de processos a temps discret el conjunt d'indexos $T = \mathbb{N}$; quan, en canvi, parlem de processos a temps continu T serà $\mathbb{R}$ o l'interval $[0, \infty)$.

2.1 Cadenes de Markov

Una cadena de Markov a temps continu és un procés estocàstic en el qual l'estat futur només depèn de l'estat actual, és independent del passat. Per donar una definició matemàtica d'aquesta propietat és útil fer-ho primer en el cas de temps discret i després estendre el concepte al cas continu.

Definició 2.1. *Una cadena de Markov a temps discret és un procés estocàstic* $\{X(t) : t \in \mathbb{N}\}$ *amb espai d'estats* $E = \mathbb{N}$ *que compleix*

$$P\{X(n+1) = i | X(n) = i_n, ..., X(0) = i_0\} = P\{X(n+1) = i | X(n) = i_n\}.$$

Per qualsevol temps n *i qualssevol estats* $i, i_0, ..., i_n \in E$

D'ara en endevant, quan ens referim a un procés a temps discret utilitzarem la notació $\{X_n\}_n = \{X(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Seguint la idea anterior es defineix cadena de Markov a temps continu:

Definició 2.2. *Una cadena de Markov a temps continu és un procés estocàstic* $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$, *amb* $E = \mathbb{N}$, *tal que* $\forall\ 0 < u < s$

$$P\{X(t+s) = i | X(s) = j, X(u) = x_u\} = P\{X(t+s) = i | X(s) = j\},$$

on $x_u \in \mathbb{N}$.

Definició 2.3. *Sigui* $\{X_n\}_n$ *una cadena de Markov a temps discret. Donats dos estats* $i, j \in E$, *anomenem probabilitat de transició de l'estat* i *al* j *en el pas* n*-èsim a la probabilitat*

$$P\{X_n = i | X_{n-1} = j\}.$$

Si les probabilitats de transició no depenen de n, és a dir,

$$P_{i,j} = P\{X_n = i | X_{n-1} = j\}\ \forall n \in \mathbb{N},$$

es diu que les probabilitats de transició són estacionàries.

Podem definir d'una manera semblant el mateix concepte en un procés a temps continu.

Definició 2.4. *Sigui $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ una cadena de Markov a temps continu, $i, j \in E$ i $h \in [0, \infty)$, la probabilitat*

$$P\{X(t+h) = i|x(t) = j\}$$

s'anomena probabilitat de transició de l'estat j a l'estat i en l'interval de temps $[t, t+h]$.

Si a més es té que les probabilitats de transició del procés depenen només de h,

$$P_{i,j}(h) = P\{X(t+h) = i|X(t) = j\} \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ i, j \in \mathbb{N},$$

es diu que les probabilitats de transició són estacionàries. A partir d'ara, si no es diu el contrari, ens referirem sempre a processos estocàstics amb probabilitats de transició estacionàries.

Distribució límit

Donat un procés estocàstic, calcular la probabilitat que es trobi en un estat en concret en cada moment pot ser molt difícil. Per això a la pràctica es busca la distribució d'equilibri, una distribució de probabilitat que, a la llarga, es mantingui en tot moment. Aquesta es la que anomenem distribució límit. Quan aquesta distribució existeix es diu que, si passa prou temps, la cua assoleix un estat d'equilibri.

Definició 2.5. *Una cadena de Markov a temps discret $\{X_n\}_n$ té distribució límit si existeix una successió $\{\pi_j\}_j$ tal que*

$$0 \leq \pi_j \leq 1 \ \forall j \geq 0, \ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \tag{2.1}$$

i

$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n = j|X_0 = i\} = \pi_j \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Observem que 2.1 implica que $\{\pi_j\}_j$ és una probabilitat sobre els naturals.

Definició 2.6. *Una cadena de Markov a temps continu $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ té distribució límit si existeix una successió $\{\pi_n\}_n$ tal que*

$$0 \leq \pi_j \leq 1 \ \forall j \geq 0, \ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

i

$$\lim_{h \to \infty} P\{X(h) = j|X(0) = i\} = \pi_j \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

A nivell intuïtiu, π_j representa la probabilitat que, a la llarga, el procés es trobi en l'estat j. És independent de l'estat en què es trobi el procés en un moment inicial.

Distribució estacionària

Si un procés estocàstic té la mateixa distribució de probabilitat en tot moment es diu que aquesta distribució és estacionària. Matemàticament es defineix de la següent manera.

Una cadena $\{X(t) : t \in T\}$ té distribució estacionària si existeix una successió $\{\pi_n\}_n$ tal que

$$0 \leq \pi_j \leq 1 \;\; \forall j \geq 0, \;\; \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

i

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) \;\; \forall t > 0.$$

El nom d'estacionària és degut al fet que, si $P\{X(0) = j\} = \pi_j \;\; \forall j \geq 0$, aleshores $\forall t \in T \;\; P\{X(t) = j\} = \pi_j \;\; \forall j \geq 0$.

Veiem que això és cert:

Suposem que existeix una distribució estacionària $\{\pi_n\}_n$ i que

$$P\{X(0) = j\} = \pi_j \;\; \forall j \geq 0.$$

Aleshores, aplicant la llei de les probabilitats totals, $\forall t \in T$,

$$P\{X(t) = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X(0) = i\} P_{i,j}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) = \pi_j \;\; \forall j \geq 0.$$

Fixem-nos que no hem separat el cas de temps discret del de temps continu, en tot moment ens hem referit a un conjunt d'indexos T qualsevol. Per tant, aquesta definició ens val per als dos casos. Cal, però, definir $P_{i,j}(h) = P\{X(t+h) = j | X(t) = i\}, \;\; t, h \in T$, ja que fins ara aquesta notació l'havíem utilitzat només en el cas de temps continu.

A continuació presentem una igualtat que es coneix com a equació de Chapman-Kolmogorov i que és conseqüència de la definició de cadenes de Markov.

Proposició 2.7. *Sigui $\{X(t) : t \in T\}$ una cadena de Markov a temps discret o continu, aleshores*

$$P_{i,j}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(s) P_{k,j}(t) \;\; \forall s, t \in [0, \infty).$$

Demostració. Aplicant la definició de probabilitat de transició i la llei de probabilitats totals tenim:

$$P_{i,j}(t+s) = P\{X(t+s) = j | X(0) = i\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j, X(s) = k | x(0) = i\}.$$

Per la fórmula de probabilitats condicionades i per la definició de cadena de Markov,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j, X(s)=k|x(0)=i\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j|X(s)=k, X(0)=i\}P\{X(s)=k|X(0)=i\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j|X(s)=k\}P\{X(s)=k|X(0)=i\}.$$

Finalment, pel fet que les probabilitats de transició són estacionàries,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j|X(s)=k\}P\{X(s)=k|X(0)=i\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k,j}(t)P_{i,k}(s).$$

□

Aquesta igualtat es coneix com a equació de Chapman-Kolmogorov. A nivell intuitiu, ens diu que per passar d'un estat i a un altre j en un temps $(t+s)$, $X(t)$ podria anar de i a qualsevol estat en temps t i d'allà a j en temps s.

Proposició 2.8. *Si una cadena de Markov $\{X(t) : t \in T\}$ té distribució límit $\{\pi_n\}_n$, aleshores aquesta és també distribució estacionària.*

Demostració. Si $X(t)$ té distribució límit $\{\pi_n\}_n$, hem de veure que es compleix que

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) \;\; \forall t \in T.$$

Fixem un valor $n \geq 1$ i un valor de $j \geq 0$. Per la definició de distribució estacionària tenim, per qualsevol $t \in T$,

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i P_{i,j}(t) = \sum_{i=0}^{n} (\lim_{h\to\infty} P_{k,i}(h))P_{ij}(t) = \lim_{h\to\infty} \sum_{i=0}^{n} P_{k,i}(h)P_{i,j}(t).$$

Com que $P_{k,i}(h)P_{ij}(t) \geq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ i $\forall t, h \in T$, i utilitzant la igualtat de Chapman-Kolmogorov,

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{i=0}^{n} P_{k,i}(h)P_{i,j}(t) \leq \lim_{h\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} P_{k,i}(h)P_{i,j}(t) = \lim_{h\to\infty} P_{k,j}(h).$$

Tenim, doncs,

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i P_{i,j}(t) \leq \lim_{h\to\infty} P_{k,j}(h) = \pi_j,$$

per la definició de π_j. Així, com que $\sum_{i=0}^{n} \pi_i P_{i,j}(t) \leq \pi_j$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i π_j no depèn de n,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \pi_i P_{i,j}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) \leq \pi_j.$$

Vegem a continuació que no pot passar que $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) < \pi_j$ per a cap valor de j.
Suposem que existeix un valor $j_0 \in \mathbb{N}$ per al qual

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j_0}(t) < \pi_{j_0}.$$

Aleshores tindríem que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t).$$

Aquests sumatoris són integrals respecte a la mesura de comptar sobre els naturals. Com que els termes $\pi_i P_{i,j}(t) \geq 0 \ \forall i, j \in \mathbb{N}$, aplicant el teorema de Fubini tenim

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i,$$

ja que $\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) = 1$ per definició de probabilitat ($\{P_{i,j}(t)\}_j$ és una probabilitat sobre $\mathbb{N}$). Així doncs, el que tenim és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i,$$

la qual cosa és una contradicció. D'aquesta manera hem demostrat el que volíem, ja que hem vist que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) \leq \pi_j \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

i que per a cap valor de j es compleix $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{i,j}(t) < \pi_j$.

$\square$

2.2 Procés de Poisson

El procés de Poisson és un dels processos estocàstics a temps continu més importants a l'hora de modelitzar diferents fenomens aleatoris. Se sol utilitzar a l'hora de comptar esdeveniments puntuals que succeeixen al llarg del temps de manera totalment aleatòria, en el sentit que en un cert interval de temps la probabilitat que succeeixi algun esdeveniment depèn només de la llargada de l'interval. És a dir, si $\{X(t) : t \in (0, \infty)\}$ és un procés de Poisson, $X(t)$ és la variable aleatòria que dóna el nombre d'esdeveniments que han succeït fins al moment t. En teoria de cues, per exemple, és habitual que les arribades dels clients es modelitzin amb un procés de Poisson.

En aquesta secció definim el concepte de procés de comptatge i de procés de renovació com a cas particular del primer. Després, un cop definida la distribució de Poisson, donem una definició formal de procés de Poisson. Finalment ens dediquem a comprovar que el procés que hem definit es pot veure com un procés de renovació on els temps entre esdeveniments tenen una distribució exponencial.

Procés de renovació

Entenem com a procés de comptatge un procés $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ que pren valors en els naturals, comptant el nombre de vegades que succeeix un cert esdeveniment al llarg del temps. Així doncs, podem donar-ne la següent definició:

Definició 2.9. *Un procés de comptatge és un procés estocàstic amb espai d'estats els naturals $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ que compleix:*

1. $N(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0)$
2. $s \leq t \implies N(s) \leq N(t)$

Definició 2.10. *Un procés de renovació és un procés de comptatge en el qual els temps entre esdeveniments successius són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes.*

La distribució de Poisson

La distribució de Poisson és un distribució de probabilitat que resulta útil a l'hora de modelitzar el nombre de vegades que succeeix un cert esdeveniment en un cert interval fixat de temps o espai.

Definició 2.11. *Una variable aleatòria discreta X té una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda > 0$ si*

$$P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \ \ \forall k \geq 0$$

Proposició 2.12. *Sigui X una variable aleatòria que té una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda > 0$, aleshores $E(X) = Var(X) = \lambda$.*

Demostració. Per la definició d'esperança d'una variable aleatòria,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Per la definició de moment de segon ordre d'una variable aleatòria,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!}\right) \\ &= \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda; \end{aligned}$$

Per tant,

$$Var(X) = E(X^2) - \lambda^2 = \lambda.$$

$\square$

El procés de Poisson

Com hem dit, la distribució de Poisson és útil per comptar el nombre de vegades que un cert esdeveniment succeeix en un interval de temps fixat. Si el que volem és modelitzar el nombre de vegades que succeeix aquest esdeveniment al llarg del temps, ho farem amb un procés de Poisson.

Definició 2.13. *Un procés de Poisson amb intensitat $\lambda > 0$ és un procés estocàstic a temps continu $\{X(t) : t \geq 0\}$ que pren valors en els naturals i compleix:*

1. *Els increments del procés en intervals de temps disjunts són independents entre ells. És a dir, per qualssevol punts $t_0 = 0 < t1 < ... < t_n$, els increments $X(t_1) - X(t_0), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ són variables aleatòries independents.*

2. *Donats $s \geq 0$ i $t > 0$, la variable aleatòria $X(s+t) - X(s)$ té una distribució de Poisson amb paràmetre λt,*

$$P\{X(s+t) - X(s) = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}.$$

3. *$X(0) = 0$.*

Considerem ara esdeveniments que succeeixen en l'interval de temps $[0, \infty)$, com podrien ser les arribades a una cua del supermercat.

Definim $N((a, b])$ com el nombre d'esdeveniments que succeeixen en l'interval de temps $(a, b]$.

Demanem:

1. El nombre d'esdeveniments en intervals de temps disjunts són independents entre ells. És a dir, per a qualssevol punts $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aleatòries $N((t_0, t_1])$,...,$N((t_{m-1}, t_m])$ són independents.

2. Per a qualsevol temps t i qualsevol nombre positiu h, la distribució de $N((t, t+h])$ només depèn de la llargada h de l'interval. És a dir, el nombre d'esdeveniments en un cert interval depèn només de la llargada de l'interval.

3. Existeix un nombre real $\lambda > 0$ tal que la probabilitat que succeeixi almenys un esdeveniment en un interval de temps de llargada h és

$$P\{N((t, t+h]) \geq 1\} = \lambda h + o(h).$$

   És a dir, si h és petita aquesta probabilitat és pràcticament proporcional a la llargada de l'interval de temps.

4. Si h és petita, la probabilitat que dos esdeveniments es donin en un interval de temps de llargada h és pràcticament 0:

$$P\{N((t, t+h]) \geq 2\} = o(h).$$

Recordem que $o(h)$ representa qualsevol funció que compleixi $\lim_{h\to\infty}\frac{o(h)}{h}=0$.

S'ha comprovat que aquestes condicions són raonables en diverses situacions, com per exemple quan es compten les trucades que arriben a una centraleta o les persones que entren en una botiga. Veiem a continuació que si tenim un fenomen que les compleix, aleshores $\{N((0,t]) : t\in[0,\infty)\}$ és un procés de Poisson.

Per determinar la distribució de probabilitat de $N((a,b])$ per a qualssevol $0\le a\le b$ només cal determinar la de $N((0,t])$ per a tot t, ja que la condició 2 ens diu que la distribució de $N((a,b])$ és la mateixa que la de $N((0,b-a])$.

Volem demostrar que si $N((a,b])$ compleix les condicions que acabem de donar, aleshores $X(t)=N((0,t])$ té una distribució de Poisson de paràmetre λt.

Per fer el que ens proposem necessitem un resultat previ que no demostrarem. La demostració del següent teorema es pot trobar a [4].

Teorema 2.14. *Siguin $b_1, b_2...$ variables aleatòries independents amb distribució de Bernoulli,*

$$P\{b_i=1\}=p_i \ \ i \ \ P\{b_i=0\}=1-p_i,$$

on $0\le p_i\le 1$. I sigui $S_n=b_1+...+b_n$. Aleshores

$$\left|P\{S_n=k\}-\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}\right|\le\sum_{i=1}^n p_i^2,$$

on $\mu=p_1+...+p_n$. És a dir, la distribució de S_n difereix de la d'una Poisson amb paràmetre μ com a molt de $\sum_{i=1}^n p_i^2$.

Volem veure que $P\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \ \ \forall k\ge 0$.

Dividim l'interval $(0,t]$ en n subintervals de la mateixa llargada $h=t/n$. Definim

$$b_i=\begin{cases}1, & \text{si algun esdeveniment ha succeït en l'interval } ((i-1)h, ih].\\ 0, & \text{altrament.}\end{cases}$$

$S_n=b_1+...+b_n$ compta el nombre de subintervals en els quals ha succeït almenys un esdeveniment.

Tenim que $p_i=P\{b_i=1\}=\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right) \ \ \forall i\ge 1$.

Aplicant el teorema 2.14, si $\mu_n=p_1+...+p_n=n[\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)]=\lambda t+no\left(\frac{t}{n}\right)$:

$$\begin{aligned}\left|P\{S_n=k\}-\frac{\mu_n^k e^{-\mu_n}}{k!}\right| &\le n[\lambda\left(\frac{t}{n}\right)+o\left(\frac{t}{n}\right)]^2\\ &=\frac{(\lambda t)^2}{n}+2\lambda t o\left(\frac{t}{n}\right)+no\left(\frac{t}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

Ara, $no\left(\frac{t}{n}\right)=t\frac{o\left(\frac{t}{n}\right)}{t/n}$. I, per tant, $\lim_{n\to\infty}n\left(o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}t\frac{o\left(\frac{t}{n}\right)}{t/n}o\left(\frac{t}{n}\right)=0$, per la definició de $o\left(\frac{t}{n}\right)$.

Passant al límit en la desigualtat i aplicant aquest resultat i la definició de $o\left(\frac{t}{n}\right)$ tenim:

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n = k\} = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, \;\; on \;\; \mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda t.$$

Només ens falta veure que $\lim_{n\to\infty} P\{S_n = k\} = P\{X(t) = k\}$.

$X(t)$ i S_n només seran diferents si almenys en un dels subintervals succeeixen almenys dos esdeveniments, per tant:

$$\begin{aligned} P\{X(t) \neq S_n\} &= \sum_{i=1}^{n} P\{X\left(\frac{it}{n}\right) - X\left(\frac{(i-1)t}{n}\right) \geq 2\} = \sum_{i=1}^{n} P\{X(h) \geq 2\} \\ &= no(h) = no\left(\frac{t}{n}\right). \end{aligned}$$

Aleshores,

$$lim_{n\to\infty} P\{X(t) \neq S_n\} = lim_{n\to\infty} no\left(\frac{t}{n}\right) = 0.$$

Finalment, aplicant la llei de les probabilitats totals, $\forall k \in \mathbb{N}$ i $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P\{X(t) = k\} = P\{X(t) = k, S_n = X(t)\} + P\{X(t) = k, S_n \neq X(t)\}$$

i

$$P\{S_n = k\} = P\{S_n = k, S_n = X(t)\} + P\{S_n = k, S_n \neq X(t)\}.$$

Fent tendir n a infinit,

$$\begin{aligned} P\{X(t) = k\} &= \lim_{n\to\infty} P\{X(t) = k, S_n = X(t)\} = \lim_{n\to\infty} P\{S_n = k, S_n = X(t)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P\{S_n = k\}, \end{aligned}$$

ja que $\lim_{n\to\infty} P\{X(t) = k, S_n \neq X(t)\} = \lim_{n\to\infty} P\{S_n = k, S_n \neq X(t)\} = 0$. Hem vist, doncs, que $P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \;\; \forall k \geq 0$.

Ara, $X(0) = N((0, 0]) = 0$ i, per la primera condició, els increments en temps disjunts del procés $X(t) = N((0, t])$ són independents entre ells.

Amb tot això tenim que el procés $\{X(t) = N((0, t]) : t \in [0, \infty)]\}$ compleix la definició 2.13 de procés de Poisson.

Per altra banda, tot procés $\{X(t) : t \geq 0\}$ que satisfà la definició 2.13 es pot veure com $X(t) = N((0, t])$, on $N((a, b]) = X(b) - X(a)$ compleix els posulats de l'1 al 4.

Es pot demostrar que les condicions 1 i 2 es compleixen aplicant directament els punts 1 i 2 de la definició 2.13.

Només falta veure, doncs, que es compleix:

$$P\{X(t + h) - X(t) \geq 1\} = \lambda h + o(h)$$

i

$$P\{X(t + h) - X(t) \geq 2\} = o(h).$$

Però

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^k e^{-\lambda h}}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}o(h)=o(h)$$

i

$$\begin{aligned}P\{X(t+h)-X(t)\geq 1\}&=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X(t+h)-X(t)=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda h)^k e^{-\lambda h}}{k!}\\&=e^{-\lambda h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda h)^k}{k!}=e^{-\lambda h}\left(\lambda h+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^k}{k!}\right)\\&=e^{-\lambda h}(\lambda h+o(h))=e^{-\lambda h}\lambda h+o(h).\end{aligned}$$

Substituint la funció $e^{-\lambda h}$ per la seva sèrie de Taylor al voltant del 0 obtenim

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 1\}=(1-\lambda h+o(h))\lambda h+o(h)=\lambda h+o(h).$$

Hem demostrat, doncs, que tenim dues maneres equivalents de definir procés de Poisson. Ara veurem que la distribució dels temps entre esdeveniments consecutius és una exponencial.

Definició 2.15. *W_n és el temps que triga a succeir l'esdeveniment n-èsim. Normalment es considera $W_0=0$.*

Definició 2.16. *$S_n=W_{n+1}-W_n$ és el temps d'espera entre l'n-èsim esdeveniment i el següent.*

Teorema 2.17. *Les variables aleatòries $S_0,...,S_n$ són independents idènticament distribuïdes amb distribució exponencial amb paràmetre λ. La seva funció de densitat és, doncs,*

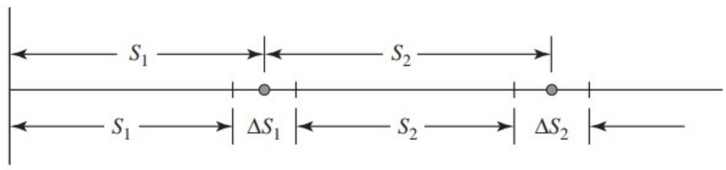
$$f_{S_k}(h)=\lambda e^{-\lambda h},\ \ h\geq 0$$

Demostració. Seguim la demostració que es dóna a [4].

Hem de veure que $f_{S_0,...,S_{n-1}}(s_0,...,s_{n-1})=(\lambda e^{-\lambda s_0})...(\lambda e^{-\lambda s_{n-1}})$

Ho fem per a $n=2$.

La nostra demostració es basarà a calcular la probabilitat conjunta de $s_0<S_0<s_0+\Delta s_0$ i $s_1<S_1<s_1+\Delta s_1$, en dos punts genèrics $s_0,s_1>0$, i després fer tendir Δs_0 i Δs_1 a 0 per obtenir la funció de densitat conjunta.



L'esdeveniment $s_0<S_0<s_0+\Delta s_0$ i $s_1<S_1<s_1+\Delta s_1$ correspon al fet que no succeeixi cap esdeveniment en els intervals $(0,s_0]$ i $(s_0+\Delta s_0,s_0+\Delta s_0+s_1]$, i que en

succeeixi un en els intervals $s_0 < S_0 < s_0 + \Delta s_0$ i $(s_0 + \Delta s_0 + s_1, s_0 + \Delta s_0 + s_1 + \Delta s_1]$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
& f_{S_0,S_1}(s_0, s_1)\Delta s_0 \Delta s_1 \\
& = P\{s_0 < S_0 < s_0 + \Delta s_0, s_1 < S_1 < s_1 + \Delta s_1\} + o(\Delta s_0 \Delta s_1) \\
& = P\{N((0, s_0]) = 0\} \\
& \times P\{N((s_0, s_0 + \Delta s_0]) = 1\} \\
& \times P\{N((s_0 + \Delta s_0, s_0 + \Delta s_0 + s_1]) = 0\} \\
& \times P\{N((s_0 + \Delta s_0 + s_1, s_0 + \Delta s_0 + s_1 + \Delta s_1]) = 1\} \\
& = e^{-\lambda s_0} e^{-\lambda \Delta s_0} (\lambda \Delta s_0) e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda \Delta s_1} (\lambda \Delta s_1) + o(\Delta s_0 \Delta s_1) \\
& = \lambda e^{-\lambda s_0} \lambda e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda \Delta s_0} e^{-\lambda \Delta s_1} \Delta s_0 \Delta s_1 + o(\Delta s_0 \Delta s_1).
\end{aligned}$$

Dividint tot entre $(\Delta s_0 \Delta s_1)$ i fent tendir Δ_{s_0} i Δ_{s_1} a 0, obtenim la igualtat que buscàvem.

El cas general es demostra amb un raonament anàleg. □

En conclusió, un procés de Poisson $X(t)$ amb intensitat $\lambda > 0$ es pot veure com un procés de renovació en el qual els temps entre esdeveniments consecutius són variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes amb distribució exponencial amb paràmetre λ.

És a dir,

$$X(t) = max\{k \in \mathbb{N} | T_1 + ... + T_k \leq t\},$$

on T_i $i \geq 1$ és el temps d'espera entre l'esdeveniment $i - 1$ i el següent.

2.3 Processos de naixement i mort

Un procés de naixement i mort és una cadena de Markov a temps continu que, si en un moment donat es troba en l'estat n, deprés d'un cert temps estancat passarà a l'estat $n + 1$ o al $n - 1$, mai es "mourà"més d'un estat alhora.

Matemàticament es defineix un procés de naixement i mort com una cadena de Markov a temps continu i espai d'estats discret $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ amb probabilitats de transició estacionàries,

$$P_{i,j}(h) = P\{X(t + h) = j | x(h) = i\}, \;\; h \geq 0,$$

que compleixen:

1. $P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), i \geq 0.$
2. $P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), i \geq 1.$
3. $P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), i \geq 0.$
4. $P_{i,j}(0) = \lim_{h \to 0} P_{i,j}(h) = \delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

5. $P_{i,j}(h)$ és una funció contínua $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

Per a alguns valors λ_i, μ_i, que s'anomenen taxes infinitesimals de naixement i de mort respectivament.

Observem que, si $j \in \mathbb{N}$ és diferent de $i, i+1$ i $i-1$,

$$P_{i,j}(h) \leq 1 - (P_{i,i+1}(h) + P_{i,i-1}(h) + P_{i,i}(h)) = o(h),$$

per tant, $P_{i,j}(h) = o(h)$.

Equacions diferencials de les probabilitats de transició

A partir de les condicions dels processos de naixement i mort i utilitzant la propietat de Markov, podem deduir un sistema d'equacions diferencials que, amb la condició inicial adequada, té per solució les probabilitats de transició del procés.

Per començar, si $h > 0$, $i \neq 0$ i k recorre tots els estats diferents de $i-1, i$ o $i+1$, per les condicions 1,2 i 3 de la definició de procés de naixement i mort,

$$\begin{aligned}\sum_k P_{i,k}(h) &= 1 - (P_{i,i-1} + P_{i,i} + P_{i,i+1}) \\ &= 1 - (\mu_i h + o(h) + 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) + \lambda_i h + o(h)) = o(h).\end{aligned}$$

Per tant, aplicant l'equació de Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned}P_{i,j}(t+h) = &\sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(h)P_{k,j}(t) = \\ &P_{i,i-1}(h)P_{i-1,j}(t) + P_{i,i}(h)P_{i,j}(t) + P_{i,i+1}(h)P_{i+1,j}(t) + o(h) = \\ &\mu_i h P_{i-1,j}(t) + (1 - (\lambda_i + \mu_i)h)P_{i,j}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h) = \\ &\mu_i h P_{i-1,j}(t) + P_{i,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)hP_{i,j}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h).\end{aligned}$$

Passant el terme $P_{i,j}(t)$ a l'esquerra de la igualtat i dividint tot per h tenim

$$\frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h} = \frac{\mu_i h P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)hP_{i,j}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h)}{h},$$

Fent tendir h a 0,

$$lim_{h\to 0} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h} = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{i,j}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t). \tag{2.2}$$

Anàlogament, si $i = 0$,

$$\begin{aligned}P_{0,j}(t+h) = &\sum_{k=0}^{\infty} P_{0,k}(h)P_{k,j}(t) = \\ &P_{0,0}(h)P_{0,j}(t) + P_{0,1}(h)P_{1,j}(t) + o(h) = \\ &(1 - \lambda_0 h)P_{0,j}(t) + \lambda_0 h P_{1,j}(t) + o(h) = \\ &P_{0j}(t) - \lambda_0 h P_{0,j}(t) + \lambda_0 h P_{1,j}(t) + o(h).\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{0,j}(t+h) - P_{0,j}(t)}{h} = -\lambda_0 P_{0,j}(t) + \lambda_0 P_{1,j}(t). \tag{2.3}$$

Fixem-nos que, com que $h > 0$, 2.2 i 2.3 són les derivades per la dreta de $P_{i,j}(t)$ i de $P_{0,j}(t)$ respectivament. Però al ser combinació lineal de funcions contínues tenim que són funcions contínues. Com que $\forall i, j \in \mathbb{N}$ $P_{i,j}(t)$ és una funció contínua i la seva derivada per la dreta és contínua aleshores $P_{i,j}(t)$ és derivable i, per tant, $P'_{i,j}(t) = lim_{h\to 0} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h}$ per a qualsevol $t \in [0, \infty)$.

En resum, el sistema d'equacions diferencials que satisfan les probabilitats de transició d'un procés de naixement i mort és

$$\begin{cases} P'_{i,j}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,j}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t), \;\; j \geq 1 \\ P'_{0,j}(t) = -\lambda_0 P_{0,j}(t) + \lambda_0 P_{1,j}(t), \end{cases}$$

amb condició inicial $P_{ij}(0) = \delta_i(j)$. Notem que aquesta condició inicial és la condició 4 de la definició de procés de naixement i mort.

Aquest sistema d'equacions es coneix com a equacions cap endarrere de Kolmogorov.

Per deduir aquest sistema d'equacions diferencials hem dividit l'interval $(0, t+h)$ en un interval de longitud h, $(0, h)$, i un de llargada t, $(h, t+h)$, i hem aplicat l'equació de Chapman-Kolmogorov. Després hem fet tendir h a 0. Si, en canvi, el dividim en els intervals $(0, t)$ i $(t, t+h)$ i apliquem un raonament anàleg a l'anterior, obtenim un sistema d'equacions diferencials diferent:

$$\begin{cases} P'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{i,j}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t), \;\; j \geq 1 \\ P'_{i,0}(t) = -\lambda_0 P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t), \end{cases}$$

amb condició inicial $P_{i,j}(0) = \delta_i(j)$.

Aquestes equacions reben el nom d'equacions cap endavant de Kolmogorov.

A continuació demostem que aquest és el sistema d'equacions que obtenim.

Partint l'interval com hem comentat i aplicant la fórmula de Chapman-Kolmogorov, tenim

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(t) P_{k,j}(h) \\ &= P_{i,j-1}(t) P_{j-1,j}(h) + P_{i,j}(t) P_{j,j}(h) + P_{i,j+1}(t) P_{j+1,j}(h) + \sum_k P_{i,k}(t) P_{k,j}(h) \\ &= \lambda_{j-1} h P_{j,j-1}(t) + P_{i,j}(t) - (\lambda_j + \mu_j) h P_{i,j}(t) + \mu_{j+1} h P_{i,j+1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

En el sumatori $\sum_k P_{i,k}(t) P_{k,j}(h)$, k passa per tots els estats menys $j-1, j$ i $j+1$. En la tercera igualtat hem aplicat les condicions dels processos de naixement i mort i hem suposat que $\sum_k P_{i,k}(t)P_{k,j}(h) = o(h)$. Sense aquesta última condició no es poden deduïr les equacions cap endevant de Kolmogorov.

Tornant a la igualtat de dalt, si passem el terme $P_{i,j}(t)$ a l'altra banda, dividim tot per h i fem tendir h a 0 per la dreta:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h} = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{i,j}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t), \ \ \forall j \geq 1. \tag{2.4}$$

Sota les mateixes condicions,

$$\begin{aligned} P_{i,0}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(t)P_{k,0}(h) \\ &= P_{i,0}(t)P_{0,0}(h) + P_{i,1}(t)P_{1,0}(h) + o(h) \\ &= P_{i,0}(t) - \lambda_j h P_{i,0}(t) + \mu_1 h P_{i,1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{P_{i0}(t+h) - P_{i0}(t)}{h} = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t). \tag{2.5}$$

Notem que 2.4 i 2.5 són les derivades per la dreta de $P_{ij}(t)$ i $P_{i0}(t)$ i són funcions contínues. Per un raonament anàleg al que hem utilitzat en el cas de les equacions cap enrere de Kolmogorov $P_{ij}(t)$ i $P_{i0}(t)$ són derivables i, per tant, obtenim el sistema d'equacions diferencials que buscàvem.

Perquè la solució sigui única i siguin les probabilitats de transició del procés de naixement i mort hem d'imposar la condició inicial

$$P_{ij}(0) = \delta_i(j).$$

Segons el context, quan volguem calcular les probabilitats de transició d'un procés de naixement i mort, utilitzarem un sistema d'equacions o altre.

Fins ara hem vist que si $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ és un procés de naixement i mort, coneixent només els seus paràmetres infinitesimals de transició, λ_i i μ_i, podem trobar les probabilitats de transició del procés. Per conèixer la distribució de $X(t)$ en cada moment t, però, no és suficient conèixer les probabilitats de transició. Cal fixar una condició inicial, és a dir, la distribució de $X(0)$. Així, si tenim

$$q_i = P\{X(0) = i\},$$

aleshores

$$P\{X(t) = n\} = \sum_{i=0}^{\infty} q_i P_{in}(t).$$

Temps de repòs

Donat un procés de naixement i mort, pot ser interessant conèixer el temps que "reposa"en cada estat. És a dir, el temps que s'està en cada estat abans de canviar.

Volem calcular, doncs, la distribució de probabilitat de la variable S_i, que representa el temps que s'èstà el procés $X(t)$ en cada estat i abans de canviar.

Sigui

$$G_i(t) = P\{S_i \geq t\}.$$

Siguin $t, h \geq 0$,

$$P\{S_i \geq t+h\} = P\{S_i \geq t+h | S_i \geq t\} P\{S_i \geq t\},$$

per la definició de probabilitat condicionada. Ara, per la propietat de Markov, la probabilitat de canviar d'estat no depèn de quant temps fa que el procés es troba en i. Per això $P\{S_i \geq t+h | S_i \geq t\} = P\{S_i \geq h\}$. Per tant,

$$G_i(t+h) = G_i(t)G_i(h) = G_i(t)(P_{i,i}(h) + o(h)) = G_i(t)(1 - (\lambda_i + \mu_i)h) + o(h),$$

on a la segona igualtat hem utilitzat que $G_i(h) = P_{i,i}(h) + o(h)$, fet que no demostrem però comentem al final d'aquest apartat.

Aleshores, passant el terme $G_i(t)$ a l'esquerra i dividint tot entre h,

$$\frac{G_i(t+h) - G_i(t)}{h} = -(\lambda_i + \mu_i)G_i(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Fent tendir h a 0,

$$G_i'^{+}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)G_i(t), \tag{2.6}$$

on $G_i'^{+}(t)$ denota la derivada per la dreta de $G_i(t)$.

Si utilitzem el fet que $G_i(t)$ és una funció contínua, aleshores per l'equació anterior la seva derivada per la dreta també ho és i, per tant, la funció és derivable. Al final d'aquest apartat donem una idea de perquè G_i és contínua.

Com que G_i és una funció derivable, l'equació 2.6 és l'equació diferencial

$$G_i'(t) = -(\lambda_i + \mu_i)G_i(t),$$

amb condició inicial $G_i(0) = 1$, ja que el temps d'espera en un estat sempre serà positiu. Resolent l'equació diferencial:

$$G_i(t) = e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}.$$

$G_i(t) = P\{S_i \geq t\}$, per tant la funció de distribució de S_i serà

$$F_i(t) = P\{S_i < t\} = 1 - G_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}.$$

Així doncs, la variable aleatòria S_i és una exponencial amb paràmetre $(\lambda_i + \mu_i)$.

Veiem ara que G_i és una funció contínua i que $G_i(h) = P_{i,i}(h) + o(h)$:

Per començar,

$$\begin{aligned} P_{i,i}(h) = & P\{X(t) \text{ no es mou de } i \text{ en un interval de llargada h}\} \\ & + P\{X(t) \text{ se'n va de l'estat } i \text{ i hi torna en un interval de longitud h}\}. \end{aligned}$$

Notem que $P\{X(t)$ no es mou de i en un interval de llargada h$\} = G_i(h)$.

Quan h tendeix a zero, $P_{i,i}(h)$ tendeix a ser igual a la probabilitat que el procés no s'hagi mogut de i en un interval de temps de longitud h. És a dir, $P\{X(t)$ se'n va de l'estat i i hi torna en un interval de longitud h$\} = o(h)$. Aquesta és la justificació, a nivell intuïtiu, que $G_i(h) = P_{i,i}(h) + o(h)$.

A més, $G_i(h)$ ha de ser una funció contínua pel fet que les probabilitats de transició ho són. No tindria sentit que les probabilitats d'anar de l'estat i a un altre j en un interval de longitud h variessin de manera contínua en funció de h, però la probabilitat de no moure's de i no. Aquesta no és una demostració rigurosa, n'és una idea.

Comportament asimptòtic

Definició 2.18. *Sigui $X(t)$ un procés a temps continu i espai d'estats discret, es diu que un estat, i, és absorbent si $X(s) = i \Rightarrow X(u) = i \ \forall u > s$*

Com asseguren Mark A. Pinsky i Samuel Karling en [4], per a processos de naixement i mort que no tenen estats absorbents es pot demostrar que els límits

$$\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = \pi_j \geq 0$$

existeixen i són independents de i. Això no implica que sempre existeixi distribució límit, ja que podria passar que $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \neq 1$.

A continuació veurem sota quines condicions existeix i com es calcula la distribució límit partint de les equacions cap endavant de Kolmogorov.

$$\begin{cases} P'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{i,j}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t), \ \ j \geq 1 \\ P'_{i,0}(t) = -\lambda_0 P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t), \end{cases}$$

amb condició inicial $P_{i,j}(0) = \delta_i$.

Fent tendir t a ∞:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} P'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1}, \ \ j \geq 1, \\ &\lim_{t\to\infty} P'_{i,0}(t) = -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1. \end{aligned}$$

Com que $\lim_{t\to\infty} P'_{i,j}(t)$ existeix i $P_{i,j}(t)$ és una funció acotada, $\lim_{t\to\infty} P'_{i,j} = 0$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Tenim, per tant, el sistema d'equacions:

$$0 = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1}, \ \ j \geq 1, \tag{2.7}$$

$$0 = -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1. \tag{2.8}$$

Anem a veure, per inducció, que la solució al sistema és, en funció de π_0,

$$\pi_j = \theta_j \pi_0, \ \ \forall j \geq 1,$$

on

$$\theta_0 = 1 \ \text{ i } \ \theta_j = \frac{\lambda_0 ... \lambda_{j-1}}{\mu_1 ... \mu_j} = \theta_{j-1} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \ \ j \geq 1.$$

Observem que aleshores

$$\theta_j \mu_j = \theta_{j-1} \lambda_{j-1}. \tag{2.9}$$

Aïllant π_1 de l'equació 2.8 tenim $\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 = \theta_1 \pi_0$.

Ara suposem que $\pi_j = \theta_j \pi_0 \ \ \forall j \leq n$ i veiem que aleshores $\pi_{n+1} = \theta_{n+1} \pi_0$.

Aïllant $\mu_{n+1} \pi_{n+1}$ de l'equació 2.7 i substituint $\pi_j = \theta_j \pi_0$:

$$\mu_{n+1} \pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) \theta_n \pi_0 - \lambda_{n-1} \theta_{n-1} \pi_0 = \lambda_n \theta_n \pi_0 + (\mu_n \theta_n - \lambda_{n-1} \theta_{n-1}) \pi_0 = \lambda_n \theta_n \pi_0,$$

on a l'última igualtat hem utilitzat 2.9. Per tant,

$$\pi_{n+1} = \theta_{n+1} \pi_0.$$

Perquè $\{\pi_n\}_n$ sigui una distribució de probabilitat hem de tenir

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \pi_0 = (\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j) \pi_0 = 1.$$

I, per tant, π_0 ha de ser per força igual a $\frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j}$

Això implica que, en un procés de naixement i mort, existirà distribució límit sempre que $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j < \infty$. En cas d'existir serà la que acabem de calcular.

3 Teoria de cues

Una cua és una línia d'espera de clients buscant un cert servei, que és ofert per un cert nombre de servidors. Quan parlem de clients no tenim per què estar parlant de persones, sinó que utilitzem aquesta paraula de forma genèrica per referir-nos a allò que necessita el servei. De la mateixa manera, per servidor ens referim a allò que l'ofereix. En teoria de cues, quan es parla d'un client que està a la cua, aquest podria estar ja rebent el servei, no té per què estar esperant. Quan volguem parlar dels clients que estan dins el sistema esperant a ser servits ho especificarem.

Les cues es poden classificar per tres grans característiques:

1. El procés d'arribada.

   El procés d'arribada és un procés de comptatge que augmenta en 1 cada vegada que un client entra al sistema.

2. La distribució del temps de servei.

   El temps que triga un servidor a completar un servei és una variable aleatòria. La dinàmica de la cua va molt lligada a quina distribució tinguin els temps de servei.

3. El nombre de servidors que té el sistema.

   Una cua no té per què tenir un sol servidor. L'evolució del sistema es veurà afectada també pel nombre de servidors que tingui.

El procés d'arribada més estudiat és el que forma un procés de Poisson. De fet, totes les cues que veurem en aquest treball tindran aquest tipus d'arribades. Un altre procés d'arribada molt comú és el determinista, en el qual els clients arriben en temps fixats. Tot i així, a la pràctica poden aparèixer molts processos d'arribada diferents.

En els casos que estudiarem els temps de servei seran sempre variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes i independents del procés d'arribada. A més, si no s'especifica el contrari, els clients seran servits per ordre d'arribada.

El nombre de clients que hi ha dins el sistema a temps t sempre ve representat per un procés estocàstic $\{X(t) : t \in [0, \infty)]\}$. Cada vegada que arriba un client $X(t)$ augmenta en 1 i cada vegada que algú marxa, $X(t)$ disminueix en 1.

Si tenim una cua amb distribució estacionària, es pot demostrar sota condicions molt generals que es compleix la igualtat

$$L = \lambda W,$$

on L representa la llargada mitjana de la cua, és a dir, l'esperança de la distribució estacionària. W representa el temps que, de mitjana, s'estan els clients dins el sistema i $\frac{1}{\lambda}$ és l'esperança del temps que passa entre dues arribades al sistema. La demostració d'aquesta fórmula es pot trobar a l'article [1].

Aquesta igualtat resulta molt útil en situacions en què calcular L és molt més complicat que calcular W o viceversa.

Si L_0 és la llargada mitjana de la cua sense comptar qui està sent servit i W_0 és el temps d'espera mitjà abans de ser atesos, aleshores també es compleix,

$$L_0 = \lambda W_0.$$

En donem demostració a nivell intuïtiu:

Sigui s el nombre de servidors que té el sistema, definim el procés $Y(t) = max\{(X(t) - s), 0\}$, que representa el nombre de clients que es troben a la cua sense ser atesos a l'instant t. Aquest és un procés amb distribució estacionària que representa una cua amb llargada mitjana L_0 i que l'esperança del temps que s'estan els clients dins el sistema és W_0. Com que la taxa d'arribades a aquest sistema continua sent λ, podem aplicar aquí la fórmula anterior i obtenim la igualtat.

3.1 Arribades de Poisson, temps de servei exponencial

Les cues més simples d'estudiar són aquelles en les quals les arribades de clients formen un procés de Poisson i els temps de servei són variables aleatòries independents del procés d'arribades, independents entre elles i idènticament distribuïdes amb distribució exponencial. En aquest cas es té que el nombre de clients que hi ha dins el sistema al llarg del temps forma un procés de naixement i mort. Això fa que sigui relativament fàcil estudiar quan existeix una distribució estacionària, i trobar-la en cas que existeixi.

3.1.1 M/M/1

Considerem una cua amb un únic servidor. Les arribades dels clients formen un procés de Poisson amb paràmetre λ i els temps de servei són variables aleatòries independents de les arribades, positives, idènticament distribuïdes, independents entre elles i amb distribució exponencial de paràmetre μ. Aquestes cues es coneixen com a cues M/M/1, on la primera lletra indica que els temps entre arribades tenen distribució exponencial, la segona que els temps de servei tenen distribució exponencial i el número final indica el nombre de servidors que hi ha. Per a les altres cues utilitzarem la mateixa notació.

$X(t)$ representa el nombre de clients que hi ha en el sistema en cada temps t. Cada vegada que arriba un client $X(t)$ augmenta en 1 i cada vegada que algú marxa, $X(t)$ disminueix en 1.

Com que l'arribada dels clients forma un procés de Posisson,

$$P\{\text{algú arriba en l'interval } [t, t+h)\} = \lambda h + o(h).$$

Pel fet que els temps de servei Y_i són variables independents idènticament distribuïdes que segueixen una exponencial amb paràmetre μ:

$$\begin{aligned}&P\{\text{servei no completat en } [t,t+h)|\text{servidor ocupat a temps } t\}\\&= P\{Y_1 > h\} = 1 - P\{Y_1 \leq h\} = e^{-\mu h} = 1 - \mu h + o(h).\end{aligned}$$

Si a la cua hi ha un cert nombre de clients $k \in \mathbb{N}$, perquè $X(t)$ incrementi en 1 en un interval de temps h, ha de passar que arribi algú a la cua i ningú marxi en aquest temps. Per tant, utilitzant la indepenència entre els temps de servei i les arribades a la cua, $\forall k \in \mathbb{N}$ tenim,

$$\begin{aligned}&P\{X(t+h) = k+1|X(t) = k\} =\\&P\{\text{arribada en}[t,t+h),\ \text{servei no completat en}[t,t+h)|\\&\text{servidor ocupat a temps } t\} =\\&(1-\mu h + o(h)) \times (\lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h).\end{aligned}$$

Això vol dir que, quan h tendeix a 0, la probabilitat que $X(t)$ augmenti en 1 en un interval de temps de longitud h s'aproxima a la probabilitat que algú arribi en aquest temps. Si la cua està buida és evident que la probabilitat d'augmentar en 1 és igual a la probabilitat que algú arribi.

De la mateixa manera, perquè $X(t)$ disminueixi en 1 en un interval de temps h, s'ha de completar un servei i que ningú arribi durant aquest temps. Per tant, per un raonament anàleg a l'anterior, quan h tendeix a 0 la probabilitat d'aquest esdeveniment s'aproxima a la probabilitat que un servei sigui completat:

$$P\{X(t+h) = k-1|X(t) = k\} = \mu h + o(h),\ \ \forall k \geq 1$$

A més, com que el procés d'arribada és un procés de Poisson, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P\{X(t+h) \geq k+2|X(t) = k\} = o(h).$$

Per tant,

$$P\{X(t+h) = k|X(t) = k\} = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)\ \ \forall k \geq 0.$$

És a dir, $X(t)$ és un procés de naixement i mort amb paràmtetres

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda\ \ \forall n \geq 0,\\\mu_n &= \mu\ \ \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

Si la cua està buida és impossible que es completi cap servei, per això $\mu_0 = 0$.

Podem utilitzar, doncs, el que sabem dels processos de naixement i mort per calcular la distribució límit de X(t), quan existeixi.

$$\pi_k = \lim_{k\to\infty} P\{X(t) = k\},\ \ k \geq 0.$$

Per calcular-la, utilitzem els valors auxiliars:

$$\theta_0 = 1 \text{ i } \theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_j}, \text{ per } j \geq 1.$$

Tenim:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} \text{ i } \pi_k = \theta_k \pi_0 = \frac{\theta_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} \text{ per } k \geq 1.$$

Quan $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty$, $\lim_{t \to \infty} P\{X(t) = k\} = 0 \ \forall k$. Això vol dir que la cua creix indefinidament amb probabilitat 1. Si la suma és finita, en canvi, tenim distribució límit.

En el cas en què ens trobem, $\theta_0 = 1$ i $\theta_j = (\frac{\lambda}{\mu})^j$ per $j \geq 1$. Per tant,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \begin{cases} \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{\mu})} & \text{si } \lambda < \mu \\ \infty & \text{si } \lambda \geq \mu. \end{cases}$$

Tenim, doncs, que si el paràmetre d'arribada és més gran o igual que el de sortida la cua creix indefinidament i no existeix distribució límit. Si $\lambda < \mu$ aleshores existeix distribució límit:

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \\ \pi_k = \pi_0 \theta_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \ \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Observem que la distribució límit és una geomètrica amb paràmetre $\frac{\lambda}{\mu}$. La longitud mitjana de la cua serà la mitjana respecte la seva distribució d'equilibri. Per tant,

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Una altra mesura que ens plantegem calcular és el temps que, de mitjana, haurà d'esperar un client per marxar del sistema. Aquesta, com és lògic, només té sentit calcular-la en el cas estacionari; si la cua creix indefinidament, el temps d'espera tendeix a infinit.

Suposem que arriba un client a la cua i es troba davant seu n persones. El temps que trigarà a marxar serà la suma dels temps del servei de tothom qui té per davant i el seu. Els temps de servei del sistema són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb llei exponencial de paràmetre μ. Per això, si T és el temps d'espera del client, suposant que té n persones davant, la distribució de T és la distribució d'una suma de $n+1$ exponencials amb paràmetre μ. És conegut que T té una distribució gamma d'ordre $n+1$ amb paràmetre μ.

$$P\{T \leq t | \text{n persones davant}\} = \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} d\tau,$$

on $\Gamma(n+1) = n!$.

Aplicant la llei de probabilitats totals podem calcular la distribució de T,

$$P\{T \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T \leq t | \text{n persones davant}\} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} P\{T \leq t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^{n+1}\tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n d\tau \\ &= \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n \lambda^n}{\Gamma(n+1)} d\tau = \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n \lambda^n}{n!} d\tau \\ &= \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{\tau\lambda} d\tau = \int_0^t \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \mu \exp\{-\tau\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\} d\tau \\ &= 1 - \exp\{-t(\mu - \lambda)\}. \end{aligned}$$

En la segona igualtat hem entrat el sumatori dins la integral aplicant el teorema de convergència monòtona sobre la successió de funcions $\{f_k\}_k$, amb

$$f_k = \sum_{n=0}^{k} \int_0^t \frac{\mu^{n+1}\tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n d\tau, \;\; k \geq 0.$$

La funció de distribució de T és, doncs, la d'una exponencial amb paràmetre $(\mu - \lambda)$. El temps d'espera mitjà serà la seva esperança, $W = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

Es pot comprovar fàcilment que es verifica la igualtat $L = \lambda W$.

Exemple

Imaginem una botiga amb un sol dependent. Si els clients arriben a la botiga segons un procés de Poisson amb una mitjana d'1 persona cada 6 minuts, i el temps que el dependent dedica a cada client té una distribució exponencial amb mitjana de 2 minuts, el que tenim és una cua M/M/1.

Per tant, $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$, que representa el nombre de clients dins la botiga en cada moment t, és un procés de naixement i mort amb paràmetres de naixement i mort $\lambda = 1/6$ i $\mu = 1/2$ respectivament.

Ens proposem ara estudiar certes característiquess d'aquesta cua. Concretament volem determinar la llargada mitjana de la cua, el temps d'espera mitjà dels clients abans que els serveixin i la proporció de temps que el dependent estarà sense atendre ningú.

D'acord amb el que acabem de veure, com que $\lambda < \mu$, existeix una distribució límit per $X(t)$. Si hi pensem, si es donés el cas que $\mu < \lambda$, el que tindríem és que, mentre el dependent atén un client, de mitjana arriba més d'una persona. Per

tant, el nombre de clients esperant a ser servits aniria augmentant indefinidament (suposant que la capacitat de la botiga és infinita i que la gent no marxa per molt llarga que sigui la cua).
Així doncs, podem calcular la distribució límit del procés i, a partir d'aquesta, trobarem tot el que ens proposem.

Per 3.1, la distribució límit serà:

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1/6}{1/2} = 2/3, \\ \pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 2/3 \times (1/3)^k, \;\; k \geq 1. \end{cases}$$

Per tant:

1. La llargada mitjana de la cua és de $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1/6}{1/2-1/6} = \frac{1}{2}$ persona.
2. El temps d'espera de cada client abans de ser servit és el temps d'espera total, W, menys el temps del mateix servei, $W - 2 = \frac{1}{\mu-\lambda} - 2 = \frac{1}{1/2-1/6} - 2 = 1$ minut.
3. La proporció de temps que el dependent queda lliure és de $\pi_0 = \frac{2}{3}$.

Ara pensem en el mateix exemple canviant el paràmetre del procés d'arribada de clients. Suposem que, de mitjana, arriben 4 clients cada 10 minuts. El nombre de persones dins la botiga $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ és un procés de naixement i mort amb paràmetres $\lambda = \frac{4}{10}$ i $\mu = \frac{1}{2}$.

$\lambda < \mu$ i, per tant, existeix distribució límit. Aleshores:

1. La llargada mitjana de la cua serà de $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{4/10}{1/2-4/10} = 4$ persones.
2. El temps d'espera de cada client abans de ser servit serà $W - 2 = \frac{1}{\mu-\lambda} - 2 = \frac{1}{1/2-4/10} - 2 = 8$ minuts.
3. La proporció de temps que el dependent queda lliure és de $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{4/10}{1/2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Fixem-nos que, com era d'esperar, al augmentar la freqüència d'arribades de clients han augmentat tant la llargada mitjana de la cua com el temps d'espera dels clients. La proporció de temps que el dependent està sense atendre ningú ha disminuït.

3.1.2 M/M/∞

Si considerem un sistema amb les mateixes condicions que l'anterior però en el qual hi ha infinits servidors, el que tenim és que els clients passen a ser servits en el mateix moment en què arriben a la cua. Això no afecta al procés que formen les arribades al sistema i, com que X(t) és un procés de naixement i mort, els paràmetres d'arribada són els mateixos que en el cas anterior,

$$\lambda_n = \lambda \ \forall n \geq 0.$$

Els paràmetres de sortida del sistema, en canvi, sí que canvien. Si quan tenim un sol servidor el paràmetre de sortida és μ, quan tenim k servidors ocupats la probabilitat que algú marxi en un cert interval de temps es multiplica per k. Aleshores el paràmetre de sortida és $k\mu$. El que tenim, doncs, és un procés de naixement i mort amb paràmetres

$$\lambda_n = \lambda \ \forall n \geq 0 \ \text{ i } \ \mu_n = n\mu \ \forall n \geq 0.$$

A partir d'aquí, utilitzant el que sabem dels processos de naixement i mort obtenim fàcilment les mesures que ens interessen: la llargada mitjana de la cua i el temps d'espera mitjà en el cas estacionari.

$$\theta_j = \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2...\mu_j} = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, j \geq 0,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = e^{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Aleshores,

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

i

$$\pi_j = \theta_j\pi_0 = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}, \ \ j \geq 0.$$

La distribució límit és una Poisson amb paràmetre $\frac{\lambda}{\mu}$ i, per tant, $L = \frac{\lambda}{\mu}$.

Observem que, a diferència del cas anterior, existeix una distribució límit independentment dels paràmetres λ i μ.

Al ser servit al mateix instant d'arrivada, un client s'està dins el sistema el temps que dura el seu servei. Com que aquest és una variable aleatòria amb llei exponencial de paràmetre μ, la mitjana de temps d'espera és

$$W = \frac{1}{\mu}.$$

Observem que se satisfà la equació $L = \lambda W$

Exemple

Pensem en una biblioteca. Suposem que la gent arriba seguint un procés de Poisson i que, de mitjana, entra una persona cada vint minuts. El temps de servei de cada persona, que comprèn el que gasta buscant el llibre que vol i el que dedica a llegir-lo, considerem que segueix una llei exponencial amb paràmetre $\frac{1}{30}$. És a dir, de mitjana, els clients s'estan mitja hora dins la biblioteca. Si considerem que a la biblioteca hi ha prous llibres com perquè tothom trobi sempre el que busca, el que estem fent és mirar-nos la biblioteca com una cua $M/M/\infty$.
Així doncs, el nombre de persones dins la biblioteca a temps t, $X(t)$, és un procés de naixement i mort amb paràmetres $\lambda = \frac{1}{20}$ i $\mu = \frac{1}{30}$.

La distribució límit d'aquest procés existeix independentment dels valors de λ i μ, i és la següent:

$$\begin{cases} \pi_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = e^{-\frac{1/20}{1/30}} = e^{-\frac{3}{2}} \\ \pi_k = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}(3/2)^k}{k!}, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

De mitjana, dins la biblioteca hi haurà $L = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2}$ persones.
El temps mitjà que les persones s'estan dins la biblioteca és $W = \frac{1}{\mu} = 30$ minuts.

3.1.3 M/M/s

Analitzem ara un sistema en el que tenim un nombre finit, s, de servidors disponibles. Com en els altres casos, el procés $X(t)$ que forma el nombre de clients dins el sistema és un procés de naixement i mort. Els paràmetres són:

$$\lambda_n = \lambda \ \forall n \geq 0$$

i

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si } 0 \leq n \leq s \\ s\mu & \text{si } n > s. \end{cases}$$

Sabent els paràmetres calculem tot el que volem saber del procés.

Primer calculem els vaolrs auxiliars,

$$\theta_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{si } 0 \leq n \leq s \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s} & \text{si } n \geq s. \end{cases}$$

Si $\lambda \geq s\mu$, aleshores $\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right) \geq 1$ i, per tant, $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty$; la qual cosa implica que no exesteix distribució límit.

Si, en canvi, $\lambda < s\mu$, aleshores

$$\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j = \sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s}^{\infty}\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s}$$
$$= \sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)}$$

i

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\pi_0 & \text{si } 0\leq n\leq s \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\pi_0\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s} & \text{si } n\geq s, \end{cases}$$

on $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j}$.

Tenint la distribució límit podem calcular la llargada mitjana de la cua L i el temps d'espera mitjà, W. Per fer-ho podriem calcular la esperança de la distribució límit directament i després utilitzar la fórmula $L=\lambda W$ per trobar W. Tot i així, els càlculs resulten més fàcils si calculem primer la mitjana de persones que estan esperant a ser servides, L_0.

L_0 serà, doncs, l'esperança del nombre de persones esperant respcte la distribució límit:

$$L_0 = \sum_{j=s}^{\infty}(j-s)\pi_j = \sum_{j=0}^{\infty}j\pi_{j+s} = \pi_0\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^j$$
$$= \frac{\pi_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\sum_{j=0}^{\infty}j\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^j = \frac{\pi_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}.$$

En l'última igualtat hem utilitzat que, donat $r\geq 0$, $\sum_{j=0}^{\infty}jr^j = \frac{r}{(1-r)^2}$.
Ho demostrem:

És conegut que $S(r)=\sum_{j=0}^{\infty}r^j = \frac{1}{1-r}$. Per tant,

$$S'(r) = \sum_{j=0}^{\infty}jr^{j-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Ara,

$$= \sum_{j=0}^{\infty}jr^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j-1)r^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty}r^{j-1}.$$

Aleshores,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j-1)r^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}jr^{j-1} - \sum_{j=0}^{\infty}r^{j-1} = \frac{1}{(1-r)^2} - \left(\frac{1}{r}+\sum_{j=0}^{\infty}r^j\right).$$

Aplicant la fórmula de la sèrie geomètrica:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j-1)r^{j-1} = \frac{1}{(1-r)^2} - \frac{1}{r} - \frac{1}{1-r}.$$

Finalment, utilitzant que $\sum_{j=0}^{\infty}(j-1)r^{j-1} = -\frac{1}{r} + \sum_{j=0}^{\infty} jr^j$ i aïllant $\sum_{j=0}^{\infty} jr^j$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^j = \frac{1}{(1-r)^2} - \frac{1}{1-r} = \frac{1-(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Com voliem demostrar.

Tenint L_0 podem calcular W_0 utilitzant la fórmula $L_0 = \lambda W_0$.

Així, $W_0 = \frac{L_0}{\lambda}$.

W_0 representa el temps d'espera mitjà abans de ser atès. Per tant, el temps d'espera total serà la suma de W_0 i el temps del propi servei.

$$W = W_0 + \frac{1}{\mu}.$$

Aplicant la fórmula:

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_0 + \frac{1}{\mu}\right) = L_0 + \frac{\lambda}{\mu}.$$

Exemple

Recuperant l'exemple de la botiga com a cua $M/M/1$, si en comptes d'haver-hi un sol dependent n'hi ha un nombre finit s, el que tenim és una cua del tipus $M/M/s$. Pel nostre exemple imaginem que $s = 5$. És a dir, considerem una botiga amb 5 dependents, on les arribades de clients corresponen a un procés de Poisson amb paràmetre $\lambda = \frac{1}{6}$ i els temps de servei de cada clients són variables aleatòries independents amb distribució exponencial de mitjana $\frac{1}{\mu} = 2$ minuts.

Segons el que hem vist en aquest apartat, com que $\lambda < 5\mu$, existeix distribució límit:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{4}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5}{5!\left(1-\frac{\lambda}{5\mu}\right)}};$$

Anem pas a pas:

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5}{5!\left(1-\frac{\lambda}{5\mu}\right)} = \frac{\left(\frac{1/6}{1/2}\right)^5}{5!\left(1-\frac{1/6}{5\times 1/2}\right)} = \frac{15}{120\times 14} = \frac{1}{112};$$

$$\sum_{j=0}^{4}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\frac{1}{27} + \frac{1}{24}\frac{1}{81} = 1 + \frac{769}{1944};$$

Per tant,
$$\pi_0 = \frac{1}{2713/1944 + 1/112} = \frac{1}{38225/27216} = \frac{27216}{38225}.$$
I
$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n \pi_0 & \text{si } 1 \le n \le 5 \\ \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \pi_0 \left(\frac{1}{15}\right)^{n-5} & \text{si } n \ge 5. \end{cases}$$

Calculem ara unes quantes dades sobre la dinàmica de la botiga:

1. Si L_0 representa el número de persones que hi ha esperant a ser servides, hem vist que:
$$L_0 = \frac{\pi_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} = \frac{\pi_0}{120}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \frac{\left(\frac{1}{15}\right)}{\left(\frac{14}{15}\right)^2} = \frac{1}{535150} \approx 0.$$

2. El temps d'espera abans de ser servit és, doncs,
$$W_0 = \frac{L_0}{\lambda} \approx 0.$$

3. El nombre mitjà de clients dins la botiga és
$$L = L_0 + \frac{\lambda}{\mu} \approx \frac{1}{3}.$$

4. El temps que, de mitjana, s'està una persona dins la botiga
$$W = \frac{L}{\lambda} = L \times 6 \approx 2 \text{ minuts}.$$

5. La proporció de temps que la botiga està buida és
$$\pi_0 = \frac{27216}{38225} \approx \frac{7}{10}$$

Recordem que, sota les mateixes condicions però amb un únic dependent a la botiga, teniem aquestes dades:

1. Mitjana de persones dins la botiga:
$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1/6}{1/2 - 1/6} = \frac{1}{2} \text{ persona}.$$

2. Temps mitjà que s'està un client dins la botiga:
$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 3 \text{ minuts}.$$

3. Temps d'espera de cada client abans de ser servit:
$$W_0 = W - 2 = \frac{1}{\mu - \lambda} - 2 = \frac{1}{1/2 - 1/6} - 2 = 1 \text{ minut.}$$
4. Llargada mitjana de la cua:
$$L_0 = W_0\lambda = \frac{1}{6} \text{ de persones.}$$
5. Proporció de temps que la botiga està buida:
$$\pi_0 = \frac{2}{3}.$$

Podem observar com al haver-hi 4 dependents més, tant el temps d'espera dels clients com la llargada de la cua han disminuït. De fet, en aquest cas els clients són servits prácticament en el mateix moment que entren a la botiga.

La proporció de temps que la botiga queda buida també augmenta, però no tant com potser es podria esperar (passa de $\frac{2}{3}$ a $\frac{7}{10}$ del temps). Tot i així, si calculem la proporció de temps que cada botiguer està lliure de clients, veurem que aquest si que ha augmentat notablement.
Per calcular aquesta proporció hem de tenir en compte que, si no hi ha ningú, tots descansen. Si hi ha una persona, aleshores 4 dels 5 dependents descansen. I així fins al moment en que hi ha cinc clients o més, que ningú descansa.
Tenint en compte que a la llarga tots els dependents tenen les mateixes probabilitats de quedar lliures, la part de temps que un dependent descansa és

$$\begin{aligned}
&\pi_0 + \pi_1\frac{4}{5} + \pi_2\frac{3}{5} + \pi_3\frac{2}{5} + \pi_4\frac{1}{5} \\
&= \pi_0 + \frac{1}{3}\pi_0\frac{4}{5} + \frac{1}{18}\pi_0\frac{3}{5} + \frac{1}{162}\pi_0\frac{2}{5} + \frac{1}{1944}\pi_0\frac{1}{5} \\
&= \pi_0(1 + \frac{4}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{405} + \frac{1}{9720}) = \frac{16114}{17375} \approx 0.92.
\end{aligned}$$

És a dir, cada dependent descansa un 92% del temps. En canvi, en el cas en què hi havia un sol dependent aquest descansava aproximadament un 66% del temps.

Anem a veure què passa si ens trobem en una botiga on hi arriben més clients i, a més, els dependents necessiten més temps per servir-los. El nombre de dependents segueix sent 5.
Suposem que els clients arriben segons un procés de Poisson amb paràmetre $\lambda = 1$ i els temps de servei són exponencials amb paràmetre $\mu = \frac{1}{4}$. És a dir, cada minut entra un client a la botiga i el temps que un dependent li dedica a cada client és, de mitjana, de 4 minuts.

Fixem-nos que $\lambda > \mu$. Això implica que si la botiga tingués només un dependent la cua de clients s'aniria allargant indefinidament i el dependent quedaria desbordat.

Al haver-hi 5 dependents, com que $\lambda < 5\mu$, aquests podran atendre els clients sense que aquests es vagin acumulant indefinidament. És a dir, existeix distribució límit:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5}{5!\left(1-\frac{\lambda}{5\mu}\right)}}.$$

Anant pas a pas:

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5}{5!\left(1-\frac{\lambda}{5\mu}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1/4}\right)^5}{5!\left(1-\frac{1}{5\times 1/4}\right)} = \frac{5120}{120} = \frac{128}{3};$$

i

$$\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = 1 + 4 + \frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{6}4^3 + \frac{1}{24}4^4 = \frac{103}{3}.$$

Per tant,

$$\pi_0 = \frac{1}{128/3 + 103/3} = \frac{3}{231} = \frac{1}{77}.$$

I

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(4\right)^n \pi_0 & \text{si } 1 \le n \le 5 \\ \frac{1}{5!}\left(4\right)^5 \pi_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-5} & \text{si } n \ge 5. \end{cases}$$

Calculem les mateixes dades que en el cas anterior:

1. Número de persones que hi ha esperant a ser servides:

$$L_0 = \frac{\pi_0}{120}(4)^5 \frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{4^6 \times 5}{120 \times 77} = \frac{512}{231} \approx 2.22 \text{ persones.}$$

2. Temps d'espera abans de ser servit:

$$W_0 = \frac{L_0}{\lambda} \approx 2.22 \text{ minuts.}$$

3. Nombre mitjà de clients dins la botiga:

$$L = L_0 + \frac{\lambda}{\mu} \approx 6.22.$$

4. Temps que, de mitjana, s'estarà una persona dins la botiga:

$$W = \frac{L}{\lambda} = L \approx 6.22 \text{ minuts.}$$

5. Proporció de temps en què la botiga està buida:

$$\pi_0 = \frac{1}{77}$$

Tot i que els 5 dependents són suficients perquè la cua no creixi indefinidament, podem observar que tant la llargada de la cua com el temps d'espera han augmentat respecte el cas l'anterior, com era d'esperar. Podem observar, però, que el temps d'espera abans de ser servit és prou petit; representa aproximadament un terç del temps que un client s'està dins la botiga. Com és lògic, la proporció de temps que la botiga està buida ha disminuït.

Finalment calculem la proporció de temps que cada dependent tindrà lliure:

$$\begin{aligned}
&\pi_0 + \pi_1\frac{4}{5} + \pi_2\frac{3}{5} + \pi_3\frac{2}{5} + \pi_4\frac{1}{5} \\
&= \pi_0 + 4\pi_0\frac{4}{5} + 8\pi_0\frac{3}{5} + \frac{64}{6}\pi_0\frac{2}{5} + \frac{32}{3}\pi_0\frac{1}{5} \\
&= \pi_0(1 + \frac{16}{5} + \frac{24}{5} + \frac{128}{30} + \frac{32}{15}) = \pi_0\frac{77}{5} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Una conclusió que podem treure observant aquests exemples de cues $M/M/1$ i $M/M/s$ és que observant els paràmetres d'arribada i de servei de la cua, podem trobar el número òptim de servidors que necessitem.

3.2 Temps de servei qualsevol

El que fa que l'estudi de les cues anteriors sigui especialment senzill és el fet que el nombre de persones que hi ha en el sistema forma un procés de naixement i mort. Això és degut a que les arribades formen un procés de Poisson i els temps de servei tenen una distribució exponencial. Si tenim una cua on alguna d'aquestes condicions no es dóna necessitarem altres eines per estudiar el seu comportament.

A continuació ens fixem en les cues en què els temps de servei no tenen perquè tenir una distribució exponencial. És a dir, anem a parlar de les cues que les seves arribades formen un procés de Poisson i els temps de servei de cada client són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes, amb una distribució qualsevol.

3.2.1 M/G/1

Considerem una cua on les arribades formen un procés de Poisson amb paràmetre λ i els temps de servei de cada client, Y_i, són variables aleatòries idènticament distribuïdes amb una funció de distribució qualsevol, $G(y) = P\{Y_i \leq y\}$, amb esperança $E[Y_i] = v < \infty$.

Si no posem cap restricció sobre els temps de servei, el número de clients que hi ha dins el sistema en cada temps t, $X(t)$, no té perquè ser un procés de Markov. De fet, en els casos anteriors teniem que el procés $X(t)$ era una cadena de Markov per la propietat de 'no memoria' de la distribució exponencial (veure Annex).

Tot i així, si $\{t_n\}_n$ és la successió de temps en què un client marxa del sistema, aleshores la successió de variables aleatòries $\{X_n\}_n$, on $X_0 = 0$ i $X_n = X(t_n^+)$ $\forall n \geq$

1, és una cadena de Markov a temps discret. $X(t_n^+)$ representa el nombre de clients que hi ha al sistema just en l'instant després que l'n-èsim client marxi.

Aquest fet es veu fàcilment si descrivim $\{X_n\}_n$ de la següent manera:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1}, & \text{si } X_n \geq 1 \\ A_{n+1}, & \text{si } X_n = 0, \end{cases}$$

on A_n és el número de clients que arriben al sistema durant el temps de servei de l'n-èsim client.

Com que el procés d'arribada és un procés de Poisson, A_n no depèn del passat i, per tant, queda clar que X_{n+1} no depèn de X_i si $i < n$.

Amb el teorema següent queda clara la utilitat d'aquest fet.

Teorema 3.1. *Sigui $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ el procés a temps continu que representa el nombre de clients d'una cua M/G/1 en el moment t i $\{t_n\}_n$ la successió de temps en què marxa un client, aleshores la distribució límit del procés coincidiex amb la distribució límit del procés a temps discret $\{X_n = X(t_n^+)\}_n$.*

Demostració. Donem una idea intuitiva de la demostració d'aquest teorema, treta de [4].

Sigui $\{a_n\}_n$ la successió dels temps en què arriba un client a la cua ($X(t)$ augmenta en 1). Definim el procés $\{Y_n = X(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$, que representa el nombre de clients que hi ha a la cua en el moment que n'arriba un altre. Per qualsevol estat $i \in \mathbb{N}$ i qualsevol temps $t \in [0, \infty)$, el nombre de vegades que el procés $\{Y_n\}_n$ ha passat per l'estat i des del temps 0 fins al moment t difereix del nombre de vegades que hi ha passat el procés $\{X_n\}_n$ com a molt en 1. Aleshores, a la llarga, el nombre de vegades que els dos processos passen per l'estat i per unitat de temps tendeix a igualar-se. Dit d'una altra manera, la probabilitat de que, a la llarga, Y_n es trobi en l'estat i és la mateixa que la probabilitat que s'hi trobi X_n. Els processos $\{Y_n\}_n$ i $\{X_n\}_n$, doncs, tenen la mateixa distribució límit. Per tant, només ens cal veure que el procés $\{X(t) : t \in [o, \infty)\}$ té la mateixa distribució límit que $\{Y_n\}_n$. Com que les arribades formen un procés de Poisson, les arribades en intervals de temps disjunts són independents. Per això $X(t)$, que representa el nombre de persones just en el moment t, és independent de si algú arriba en aquell instant. Per tant $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ i $\{Y_n\}_n$, que és $X(t)$ en els moments just abans que algú arribi, tenen la mateixa distribució límit.

□

Utilitzant aquest resultat podem calcular la llargada mitjana de la cua, L, i el temps d'espera mitjà, W.

$$X_{n+1} = X_n - \delta + A_{n+1}, \text{ on } \delta = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \geq 1 \\ 0 & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

Suposant que el procés té distribució límit, aquesta és també estacionària. Aleshores si la distribució del procés és estacionària,

$$L = E[X_n] = E[X_{n+1}] = E[X_n] - E[\delta] + E[A_{n+1}].$$

Per tant,
$$E[A_{n+1}] = E[\delta] = 1 - \pi_0, \text{ on } \pi_0 = P\{X(t) = 0\}.$$

Ara,
$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + \delta^2 + A_{n+1}^2 - 2\delta X_n + 2A_{n+1}(X_n - \delta)$$
i, com que $\delta^2 = \delta$ i $X_n\delta = X_n$,
$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + \delta + A_{n+1}^2 - 2X_n + 2A_{n+1}(X_n - \delta).$$

Tornant a utilitzar que la distribució del procés és estacionària,
$$E[X_{n+1}^2] = E[X_n^2] = E[X_n^2] + E[\delta] + E[A_{n+1}^2] - 2E[X_n] + 2E[A_{n+1}(X_n - \delta)].$$

Al ser A_{n+1} independent de X_n també ho és de δ, per tant,
$$E[A_{n+1}(X_n - \delta)] = E[A_{n+1}]E[X_n - \delta].$$

Finalment tenim,
$$0 = E[\delta] + E[A_{n+1}^2] - 2E[X_n] + 2E[A_{n+1}]E[(X_n - \delta)].$$
Si substituïm $E[X_n]$ per L i $E[A_{n+1}]$ i $E[\delta]$ per $(1 - \pi_0)$ i després aïllem L:
$$L = \frac{1 - \pi_0 + E[A_{n+1}^2] - 2(1 - \pi_0)^2}{2(1 - \pi_0)}.$$

Per acabar de calcular L ens falta determinar els valors de $E[A_{n+1}^2]$ i de π_0. Això és el que fem a continuació.

Sigui Y_n la variable aleatòria que representa el temps de servei de l'n-èsim client, per ser el procés d'arribada un procés de Poisson amb paràmetre λ,
$$P\{A_{n+1} = k | Y_{n+1} = y\} = \frac{(\lambda y)^k e^{-\lambda y}}{k!}.$$
Per això
$$E[A_{n+1} | Y_{n+1} = y] = \lambda y$$
i
$$Var(A_{n+1} | Y_{n+1} = y) = E[A_{n+1}^2 | Y_{n+1} = y] - (\lambda y)^2 = \lambda y.$$
Tenim, doncs, $E[A_{n+1}^2 | Y_{n+1} = y] = \lambda y + (\lambda y)^2$.

Aplicant la llei de probabilitats totals,
$$E[A_{n+1}^2] = \int_0^\infty E[A_{n+1}^2 | Y_{n+1} = y] dG(y) = \lambda \int_0^\infty y dG(y) + \lambda^2 \int_0^\infty y^2 dG(y)$$
$$= \lambda v + \lambda^2 (Var(Y_1) + v^2).$$

Busquem ara π_0.

A mida que el temps avança, es van succeïnt períodes de temps en què no hi ha cap client en el sistema, I_k, amb períodes en els que el servidor estarà ocupat, B_k. El paràmetre k pertany als naturals i l'utilitzem per indicar l'ordre de successió dels periodes.

Denotem per R_k el temps que passa entre l'inici del k-èsim període en què el servidor està ocupat fins al principi del següent. Observem que $R_k = B_k + I_k$ i és estadísticament igual a qualsevol altre $R_i,\ i \in \mathbb{N}$. Tenint en compte que qualsevol temps t compleix $t \in R_k$ per algun $k \in \mathbb{N}$, la probabilitat que el procés es trobi buit a temps t serà

$$\pi_0 = \frac{E[I_1]}{E[R_1]} = \frac{E[I_1]}{E[I_1] + E[B_1]}.$$

Com que el procés d'arribades és un procés de Poisson amb paràmetre λ, I_k té una distribució exponencial amb paràmetre λ i, per tant, $E[I_1] = 1/\lambda$. Així doncs, trobant $E[B_1]$ trobarem el valor de π_0

B_1 és la suma del temps de servei del primer client Y_1 amb els temps de servei de tots els clients que arriben en el període R_1. Per trobar l'esperança de B_1, doncs, primer calcularem $E[B_1|A = n, Y_1 = y]$, on A representa el número de clients que arriben durant R_1, i després aplicarem la llei de probabilitats totals.

Per començar,

$$E[B_1|A = 0, Y_1 = y] = y.$$

Ara suposem que $A = 1$. Definim B' com el temps que passa des del moment en què el segon client comença a ser servit fins al moment en què la cua torna a estar buida. Fixem-nos que B' estadíst icament és exactament igual a B_1. Així,

$$E[B_1|A = 1, Y_1 = y] = y + E[B'] = y + E[B_1].$$

Aplicant el mateix raonament,

$$E[B_1|A = n, Y_1 = y] = y + nE[B_1].$$

Per la llei de probabilitats totals, i utilitzant que el procés d'arribada és un procés de Poisson amb paràmetre λ:

$$\begin{aligned}
E[B_1|Y_1 = y] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[B_1|A = n, Y_1 = y]P\{A = n|Y_1 = y\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(y + nE[B_1])\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} = y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} + E[B_1]\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} \\
&= y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} + E[B_1]\lambda y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda y)^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} = y + \lambda y E[B_1] \\
&= y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} + E[B_1]\lambda y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} = y + \lambda y E[B_1],
\end{aligned}$$

ja que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} = e^{-\lambda y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda y)^n}{n!} = e^{-\lambda y}e^{\lambda y} = 1.$

Tornant a aplicar la llei de les probabilitats totals,

$$E[B_1] = \int_0^\infty E[B_1|Y_1 = y]dG(y) = \int_0^\infty (y + \lambda y E[B_1])dG(y)$$
$$= \int_0^\infty ydG(y) + \lambda E[B_1] \int_0^\infty ydG(y) = v(1 + \lambda E[B_1]).$$

Recordem que $E[G] = v$.

Aïllant $E[B_1]$,

$$E[B_1] = \frac{v}{1 - \lambda v}, \text{ si } \lambda v < 1$$

i

$$\pi_0 = \frac{E[I_1]}{E[I_1] + E[B_1]} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{v}{1-\lambda v}} = 1 - \lambda v, \text{ si } \lambda v < 1.$$

Recuperant l'expressió que habiem trobat per la llargada mitjana de la cua, L, i substituïnt pels valors que acabem de trobar,

$$L = \frac{\pi_0 + E[A_{n+1}^2] - 2\pi_0^2}{2(1 - \pi_0)} = \frac{2\lambda v + \lambda^2 Var(Y_1) - (\lambda v)^2}{2(1 - \lambda v)}.$$

Gràcies a la fórmula $L = \lambda W$ podem calcular W. Recordem que W és el temps que, de mitjana, s'està un client dins el sistema, sumant el temps d'espera i el del propi servei.

$$W = \frac{L}{\lambda} = v + \frac{\lambda(Var(Y_1) + v^2)}{2(1 - \lambda v)}.$$

Aquest resultat ens diu que si coneixem el paràmetre d'arribada λ, la mitjana dels temps de servei v i la seva variància podem calcular la llargada i el temps d'espera mitjà de la cua. A més, fixats els valor λ i v, tant L com W seran més grans com més gran sigui la variància dels temps de servei.

4 Bicing

Ens proposem ara modelitzar la dinàmica d'una estació de Bicing utilitzant les eines vistes en aquest treball. Per intentar apropar-nos més a la realitat farem servir algunes variacions de les cues presentades.

El Bicing és un servei de l'ajuntament de Barcelona que consisteix en varies estacions de bicicletes repartides per la ciutat. Els clients van a la estació que tenen més propera a agafar una bicicleta per fer un cert trajecte. Aquest ha d'acabar en alguna altra estació del Bicing, on cal retornar la bicicleta utilitzada. Quan un client va a agafar una bici, pot passar que a la estació no en quedin. En aquest cas, el client decideix si esperar a que algú en retorni una o si marxa. De la mateixa manera, quan algú vol tornar una bicicleta en una certa estació, pot ser que aquesta estigui plena. Aleshores el client pot anar a buscar una estació on hi hagi lloc per deixar la bici o pot decidir esperar a que s'alliberi algun lloc. Aquesta és la dinàmica que pretenem modelitzar. Per simplificar el problema, però, suposarem que quan algú vol deixar la bici i l'estació està plena automàticament va a buscar lloc en una altra.

4.1 Un model per una sola estació

El primer que ens proposem és modelitzar la dinàmica d'una sola estació de bicing, sense tenir en compte que les bicicletes que hi arribin han de venir d'alguna altra estació. També suposarem que tant els clients com les bicicletes no poden venir en grups, arriben d'un en un. Sense aquest supòsit, les arribades no podrien formar un procés de Poisson i, per tant, no podriem utilitzar els resultats obtinguts en aquest treball. El que sí que tindrem en compte és que, si quan una persona va a buscar una bici es troba amb la estació buida, aquesta pot decidir marxar. La probabilitat que un client marxi en aquest cas augmenta si veu que hi ha més gent esperant.

Considerem, doncs, una estació de Bicing on les arribades de clients formen un procés de Poisson amb paràmetre λ. El servei que busquen aquests és obtenir una bicicleta per fer el seu trajecte. A més, només s'acumularà gent si no hi ha bicis disponibles. En el mateix moment que n'arribi una, algun client l'agafarà. Per això considerem que el temps de servei és sempre 0.

Un dels fets que diferencia aquest cas de les cues que hem vist fins ara és que els servidors no tornen a estar disponibles un cop un client queda servit, sino que també arriben de manera aleatòria. Pel nostre model considerem que les arribades de bicis també formen un procés de Poisson, amb un cert paràmetre μ.
Resumint, anem a estudiar una cua on les arribades de clients formen un procés de Poisson amb paràmetre λ, els temps de servei són 0 i els servidors arriben formant un procés de Poisson de paràmetre μ. Seguint la notació que hem fet servir fins ara anomenarem a aquest tipus de cua M/0/M.

Amb aquestes condicions, si $\{X^c(t) : t \in [0, \infty)\}$ és el nombre de clients que hi ha esperant a la cua, $X^c(t)$ augmentarà en 1 cada vegada que arribi un client i no hi hagi bicis i disminuirà en 1 cada vegada que arribi una bici i hi hagi algun client esperant. $\{X^s(t) : t \in [0,\infty)\}$, que representa el nombre de bicis que hi ha al sistema en cada moment t, augmentarà en 1 quan una bici arribi i no hi hagi clients esperant i disminuirà en 1 quan arribi un client i hi hagi bicis disponibles. Fixem també que la estació té capacitat per 20 bicis, és a dir, com a molt pot havare-hi 20 servidors.

Per tant, les probabilitats de transició del procés $\{X^c(t) : t \in [0,\infty)\}$ seran:

1.
$$\begin{aligned} P^c_{0,1}(t,h) &= P\{X^c(t+h) = 1 | x^c(t) = 0\} \\ &= P\{X^s(t) = 0\} P\{\text{arriba un client en l'interval (t,t+h]}\} \\ & P\{\text{no arriba bici en l'interval (h,t+h]}\} \\ &= P\{X^s(t=0)\}(\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h) = P\{X^s(t=0)\}(\lambda h + o(h)). \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} P^c_{i,i+1}(h) &= P\{\text{arriba un client en l'interval (t,t+h]}\} P\{\text{no arriba bici en l'interval (h,t+h]}\} \\ &= (\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) = \lambda h + o(h) \;\; \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} P^c_{i,i-1}(h) &= P\{\text{no arriba un client en l'interval (t,t+h]}\} P\{\text{arriba bici en l'interval (h,t+h]}\} \\ &= (1 - \lambda h + o(h))(\mu h + o(h)) = \mu h + o(h) \;\; \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

4. $P^c_{i,i}(h) = (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h) \;\; \forall i \geq 1.$

5. $P^c_{0,0}(t,h) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_{0,k}(t,h) = 1 - P_{0,1}(t,h) + o(h)$
$= 1 - P\{X^s(t=0)\}(\lambda h + o(h)) + o(h).$

Fixem-nos que per trobar les probabilitats de transició hem utilitzat la independència entre els procés d'arribada de clients i el procés d'arribada de bicis. Per trobar $P^c_{0,1}(t,h)$, a més, hem utilitzat la independència entre $X^s(t)$ i les arribades, tant de clients com de bicis, en l'interval $(t, t+h]$.

Observem que si la distribució de $\{X^s(t) : t \in [0,\infty)\}$ és estacionària, $\{\pi^s_n\}_n$, aleshores el procés $\{X^c(t) : t \in [0,\infty)\}$ serà un procés de naixement i mort amb paràmetres:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \pi^s_0 \lambda, & \\ \lambda_i = \lambda & \text{si } \; i \geq 1, \\ \mu_i = \mu & \text{si } \; i \geq 1, \\ \mu_0 = 0. & \end{cases}$$

Estudiem el procés que compta el nombre de bicis en cada instant t, $\{X^s(t) : t \in [0,\infty)\}$.
Raonant d'una manera anàloga a l'anterior, obtenim les probabilitats de transició:

1.

$$\begin{aligned}P^s_{0,1}(t,h) &= P\{X^s(t+h)=1|x^s(t)=0\}\\ &= P\{X^c(t=0)\}P\{\text{arriba una bici en l'interval (t,t+h]}\}\\ &P\{\text{no arriba client en l'interval (h,t+h]}\}\\ &= P\{X_c(t=0)\}(\mu h+o(h))(1-\lambda h+o(h) = P\{X^c(t=0)\}(\mu h+o(h)).\end{aligned}$$

2. $P^s_{i,i+1}(h) = (\mu h+o(h))(1-\lambda h+o(h)) = \mu h+o(h)\ \ \forall 1\le i\le 20.$
3. $P^s_{i,i-1}(h) = (1-\mu h+o(h))(\lambda h+o(h)) = \lambda h+o(h)\ \ \forall i\ge 1.$
4. $P^s_{i,i}(h) = (1-\mu h+o(h))(1-\lambda h+o(h)) = 1-(\mu+\lambda)h+o(h)\ \ \forall i\ge 1.$
5. $P^s_{0,0}(t,h) = 1-\sum_{k=1}^{\infty} P^s_{0,k}(t,h) = 1-P^s_{0,1}(t,h)+o(h)$
   $= 1-P\{X^c(t=0)\}(\mu h+o(h))+o(h).$

Per tant, també tenim que $\{X^s(t): t\in[0,\infty)\}$ serà un procés de naixement i mort si la distribució de $\{X^c(t): t\in[0,\infty)\}$ és estacionària, $\{\pi^c_n\}_n$. Els paràmetres de natixement i mort en aquest cas seran:

$$\begin{cases}\lambda_0 = \pi^c_0\mu, & \\ \lambda_i = \mu & \text{si } 1\le i\le 19,\\ \mu_i = \lambda & \text{si } i\ge 1,\\ \mu_0 = 0. & \end{cases}$$

Seguim el nostre estudi suposant que tant $X^c(t)$ com $X^s(t)$ tenen distribució estacionària i que, per tant, els dos són processos de naixement i mort.

A continuació afegim la condició que, si quan un client arriba a l'estacio no hi ha bicis disponibles i es troba n persones esperant, aquest es quedarà fent cua amb una probabilitat fixada q_n i marxarà amb una probabilitat $1-q_n$. D'aquesta manera, $X^c(t)$ continua sent un procés de naixement i mort, però amb paràmetres:

$$\begin{cases}\lambda_0 = q_0\pi^s_0\lambda, & \\ \lambda_i = q_i\lambda & \text{si } i\ge 1,\\ \mu_i = \mu & \text{si } i\ge 1,\\ \mu_0 = 0. & \end{cases}$$

Com que si hi ha bicis disponibles els clients entren a la cua amb probabilitat 1, tots els paràmetres de naixement i mort de $X^s(t)$ excepte λ_0 continuen sent els mateixos. De fet encara tenim $\lambda_0 = \pi^c_0\mu$, però π^c_0 prendrà un valor diferent amb la nova condició.

Pel nostre model del Bicing fixem els valors:

$$\begin{cases}q_0 = \frac{1}{2}, & \\ q_1 = \frac{1}{3}, & \\ q_2 = \frac{1}{10}, & \\ q_i = 0 & \text{si } i\ge 3.\end{cases}$$

La llargada de la cua, doncs, serà, com a molt, de tres persones.

Un cop fixats els paràmetres de naixement i mort dels processos $\{X^c(t) : t \in [0,\infty)\}$ i $\{X^s(t) : t \in [0,\infty)\}$ calculem les respectives distribucions límit.

Trobem primer els valors auxiliars del procés $\{X^c(t) : t \in [0,\infty)\}$:

$$\begin{cases} \theta_0^c = 1, \\ \theta_1^c = \pi_0^s \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}, \\ \theta_2^c = \pi_0^s \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = \pi_0^s \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2, \\ \theta_3^c = \pi_0^s \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{10}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = \pi_0^s \frac{1}{60}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3, \\ \theta_i^c = 0 & \forall i \geq 4. \end{cases}$$

Aleshores

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^c = 1 + \pi_0^s \left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{60}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \right)$$

i

$$\begin{cases} \pi_0^c = \frac{1}{1+\pi_0^s \rho^c}, \\ \pi_i^c = \theta_i^c \pi_0^c, & \text{si } i \geq 1, \end{cases}$$

on $\rho^c = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{60}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3$.

De la mateixa manera busquem la distribució límit de $\{X^s(t) : t \in [0,\infty)\}$:

$$\begin{cases} \theta_0^s = 1, \\ \theta_i^s = \pi_0^c \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i & \forall i \geq 1. \end{cases}$$

Per tant

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^s = 1 + \sum_{k=1}^{20} \theta_k^s = 1 + \pi_0^c \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k .$$

Finalment utilitzem aquests valors per trobar la distribució límit,

$$\begin{cases} \pi_0^s = \frac{1}{1+\pi_0^c \rho^s}, \\ \pi_i^s = \theta_i^s \pi_0^s, & \text{si} \end{cases}$$

on $\rho^s = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{20}}{1-\frac{\mu}{\lambda}}$.

Podem observar que la distribució límit de $X^c(t)$ depèn de la distribució límit de $X^s(t)$. Concretament s'ha de complir

$$\begin{cases} \pi_0^c = \frac{1}{1+\pi_0^s \rho^c}, \\ \pi_0^s = \frac{1}{1+\pi_0^c \rho^s}. \end{cases}$$

Solucionant aquest sistema d'equacions i tenint en compte que han de ser positius trobem π_0^c i π_0^s:

$$\begin{cases} \pi_0^c = \frac{1}{1+\pi_0^s \rho^c}, \\ \pi_0^s = \frac{1}{1+\pi_0^c \rho^s}. \end{cases} \Rightarrow \pi_0^s = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\pi_0^s \rho^c}\rho^s} = \frac{1+\pi_0^s \rho^c}{1+\pi_0^s \rho^c + \rho^s}.$$

Passant multiplicant el divisor del terme de la dreta:

$$\pi_0^s(1 + \pi_0^s \rho^c - \rho^s) = 1 + \pi_0^s \rho^c.$$

Passant els termes de la dreta restant, desenvolupant el producte i ordenant:

$$\rho^c(\pi_0^s)^2 + (1 + \rho^s - \rho^c)\pi_0^s - 1 = 0.$$

Aplicant la fórmula de segon grau i quedant-nos amb la solució positiva,

$$\pi_0^s = \frac{-(1 + \rho^s - \rho^c) + \sqrt{(1 + \rho^s - \rho^c)^2 + 4\rho^c}}{2\rho^c}.$$

Notem que l'arrel és real ja que el terme de dins és positiu i π_0^s és positiu ja que $\sqrt{(1 + \rho^s - \rho^c)^2 + 4\rho^c} > |1 + \rho^s - \rho^c|$.

Utilitzant la igualtat $\pi_0^c = \frac{1}{1+\pi_0^s \rho^c}$ obtenim π_0^c:

$$\pi_0^c = \frac{1}{1 + \rho^c \frac{-(1+\rho^s-\rho^c)+\sqrt{(1+\rho^s-\rho^c)^2+4\rho^c}}{2\rho^c}} = \frac{2}{2 + -(1 + \rho^s - \rho^c) + \sqrt{(1 + \rho^s - \rho^c)^2 + 4\rho^c}}.$$

La distribució límit del procés serà:

$$\begin{cases} \pi_0^c = \theta_0^c \pi_0^c = \pi_0^c, \\ \pi_1^c = \theta_1^c \pi_0^c = \pi_0^s \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} \pi_0^c, \\ \pi_2^c = \theta_2^c \pi_0^{=} \pi_0^s \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0^c, \\ \pi_3^c = \theta_3^c \pi_0^c = \pi_0^s \frac{1}{60} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0^c, \\ \pi_i^c = 0 & \forall i \geq 4. \end{cases}$$

La llargada mitjana de la cua, L, que és igual al nombre mitjà de persones esperant a ser servides, L_0, serà l'esperança del nombre de persones respecte la distribució estacionària.

$$L = L_0 = \pi_1^c + 2\pi_2^c + 3\pi_3^c.$$

Notem que en aquest model no tenim en compte els temps de trajecte dels clients, només ens fixem en el nombre de persones i bicis que hi ha a la estació en cada moment. Tot i així, com que un cop acabat el servei tant client com servidor marxen de sistema, considerar els temps de trajecte només allargaria l'estona que s'estan les persones dins el sistema, però no canviaria la dinàmica del model. En tot cas, la dinàmica de la cua s'hauria de veure afectada pels temps de trajecte de clients que vinguin d'altres estacions. Com que aquest model no 'veu' la dinàmica d'altres estacions, tenir en compte els temps de trajecte no aportaria informació de gaire interès.

Per altra banda, considerar que el temps de servei dels clients és el temps que passa entre que agafen la bici i la deixen en una altra estació implicaria que el model fos massa complex per estudiar-lo amb les eines que tenim. Això és degut a que seria poc realista modelitzar els temps de trajecte amb variables aleatòries amb distribució exponencial. Modelitzant-los amb una altra distribució el nombre de persones no seria un procés de naixement i mort.

4.2 Modelització de tres estacions

Ara ens proposem modelitzar el nombre de clients que hi ha en diverses estacions de bicis, tenint en compte que una bici que arriba en una certa estació ha de venir d'alguna de les altres.

Considerem tres estacions de Bicing situades a diferents punts de la ciutat de Barcelona i imaginem que són les tres úniques estacions que hi ha. Suposem que cada estació té lloc per 20 bicicletes i que, en total, n'hi ha 40 en servei. Aquesta condició ens simplifica el model perquè, si un client que va en bici arriba a una de les estacions i està plena, la restant sabem que tindrà lloc per deixar la bici.

El model que plantegem consisteix en una xarxa de tres cues on, a cada una, els clients arriben segons un procés de Poisson amb certs paràmetres λ_1^c, λ_2^c i λ_3^c. Així, el procés d'arribada a cada una de les cues és independent de les arribades a les altres cues.

El temps de servei de cada client considerem que és el temps que passa entre el moment en que aquest agafa la bici fins el moment en que la deixa. El temps de trajecte de cada client entre dues estacions és una variable aleatòria independent dels temps de trajecte dels altres clients però que sí que depèn de l'estació de sortida i de la d'arribada. La funció de distribució d'aquesta variable aleatòria no la especifiquem. Quan un client arriba a una certa estació per deixar la bici i es troba que no hi ha lloc per deixar-la, aleshores considerem que va automàticament a l'altra a deixar la bici. Per això el temps de servei serà la suma dels temps de trajecte que necessiti el client per trobar un lloc on deixar la bici.

$X_1^c(t)$, $X_2^c(t)$ i $X_3^c(t)$ representen el nombre de clients que hi ha a cada cua en l'instant t.

En aquestes cues els servidors són les bicis, i aquestes arriben de manera aleatòria a cada estació. El nombre de servidors que hi ha en cada moment t a cada cua ve donat per les variables $X_1^s(t)$, $X_2^s(t)$ i $X_3^s(t)$.

Anem a descriure amb més detall la dinàmica d'una de les cues, la cua 1. La dinàmica en les altres pot descriure's de manera anàloga.

1. Els clients arriben segons un procés de Poisson amb paràmetre λ_1^c. Si hi ha alguna bici disponible l'agafen. Si no, decideixen quedar-se amb una certa probabilitat q_n que depèn del número, n, de clients que hi ha esperant. Marxen del sistema amb probabilitat $1 - q_n$.

2. Just en el moment en què el client passa a ser servit (agafa la bici) decideix anar a deixar la bici a la estació 2 amb una certa probabilitat $d_{1,2}$ o deixar-la a la estació 3 amb una probabilitat $d_{1,3}$. Si quan arriba al seu destí no hi ha lloc per deixar la bici, va a l'altra estació.

3. El servei es dóna per acabat en el moment en què el client deixa la bici. El temps de servei és una variable aleatòria independent dels temps de servei dels altres clients, però que sí que depèn del temps, ja que si es troba la estació destí plena el temps de servei serà més llarg. Recordem que els temps de

trajecte entre dues estacions del client són variables aleatòries independents dels temps de trajecte dels altres clients però que depenen de les estacions de sortida i de destí.

4. En el moment que un client acaba servei, es considera que surt de la cua 1 i un servidor arriba en una de les estacions que no són les de sortida.

Pel fet que els temps de trajecte tenen una distribució qualsevol i que el temps de servei és una suma de temps de trajecte, $\{X_1^c(t) : t \in [0, \infty)\}$ no té perquè ser una cadena de Markov. A més, com que no hi ha un sol servidor no podem utilitzar el mètode que hem fet servir per estudiar les cues M/G/1. Per últim, $X_1^s(t)$, $X_2^s(t)$ i $X_3^s(t)$ no són variables aleatòries independents, per tant no podriem estudiar cada cua de manera independent a les altres. Amb tot això podem concloure que no podem estudiar aquest model amb les eines presentades en aquest treball. El que farem és simular-lo amb FlexSim, un software de simulació, per treure'n algunes dades d'interès. A l'annex donem una descripció de com funciona la nostra simulació.

Un model més senzill per tres estacions

Per acabar, ens plantegem si podem modelitzar aquestes tres estacions amb tres cues M/0/M independents i obtenir resultats semblants als que obtenim del model que acabem de presentar. Triant adequadament, això sí, els paràmetres d'arribada de clients i bicis.

Concretament, ens plantegem tres cues independents, la cua 1, la cua 2 i la cua 3, amb les següents característiques:

1. Les arribades de clients a la cua i formen un procés de Poisson amb paràmetre λ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$.

2. En totes les estacions, si quan un client arriba es troba amb $n \geq 0$ clients esperant a la cua, decidirà quedar-se amb una certa probabilitat q_n o marxar amb una probabilitat $1 - q_n$.

3. En totes les cues considerem que un client és fora de la cua en el moment que agafa una bicicleta, per això considerem que el temps de servei és 0.

4. Una vegada el client agafa la bici a una certa estació i, aquest decidirà anar a la cua j amb una probabilitat $d_{i,j}$ o a la cua k amb una probabilitat $d_{i,k} = 1 - d_{i,j}$, on $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ són diferents dos a dos.

5. Les arribades de bicis a l'estació i serà un procés de Poisson amb paràmetre $\lambda_i^s = \lambda_j^c d_{j,i} + \lambda_k^c d_{k,i}$, on $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ són diferents dos a dos. Per exemple, el paràmetre d'arribades de servidors a la estació 1, λ_1^s, és igual al paràmetre d'arribades de clients a la estació 2, λ_2^c, multiplicat per la probabilitat que un client, estant a la estació 2, vagi a deixar la bici a la 1, $d_{2,1}$ sumat amb el paràmetre d'arribades de clients a la estació 3, λ_3^c, multiplicat per la probabilitat que sortint d'allà vagi a la estació 1, $d_{3,1}$.

D'entrada, la principal diferència entre aquest model i l'anterior és que aquest no té en compte els temps de trajecte entre les estacions. Per tant, comparant-los el que fent és intentar veure en quina mesura és important tenir en compte els temps de trajecte a l'hora de modelitzar més d'una estació de bicing.

4.2.1 Comparació dels dos models

Donem valors als paràmetres per obtenir les dades que utilitzarem per comparar aquest model amb el presentat anteriorment.

Fixem les probabilitats que un client es quedi si quan arriba a la cua no hi ha servidors disponibles i es troba amb i persones al davant:

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{2}, \\ q_1 = \frac{1}{3}, \\ q_2 = \frac{1}{10}, \\ q_i = 0 \qquad \text{si } i \geq 3. \end{cases}$$

Després demanem que, sortint de qualsevol de les estacions, la probabilitat amb la que viatja a una de les altres dues és $\frac{1}{2}$. És a dir,

$$d_{i,j} = \frac{1}{2} \;\; \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \;\; i \neq j.$$

Per últim, demanem que en les tres estacions arribi, de mitana, un client cada deu minuts. Per tant els paràmetres d'arribada a cada estació són:

$$\lambda_1^c = \lambda_2^c = \lambda_3^c = \frac{1}{10}.$$

D'aquesta manera queden fixats també els paràmetres d'arribada de servidors:

$$\begin{cases} \lambda_1^s = \lambda_2^c d_{2,1} + \lambda_3^c d_{3,1} = 2\frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\ \lambda_2^s = \lambda_1^c d_{1,2} + \lambda_3^c d_{3,2} = 2\frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\ \lambda_3^s = \lambda_1^c d_{1,3} + \lambda_2^c d_{2,3} = 2\frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Utilitzant els resultats desenvolupats en el primer apartat d'aquesta secció calculem la distribució límit de la cua 1, que, de fet, en aquest cas és la mateixa per totes les cues:

Primer trobem els valors auxiliars per trobar la distribució límit del procés $\{X_1^c(t) : t \in [0, \infty)\}$:

$$\begin{cases} \theta_0^c = 1, \\ \theta_1^c = \pi_0^s \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^c}{\lambda_1^s} = \pi_0^s \frac{1}{2}, \\ \theta_2^c = \pi_0^s \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda_1^c}{\lambda_1^s}\right)^2 = \pi_0^s \frac{1}{6}, \\ \theta_3^c = \pi_0^s \frac{1}{60} \left(\frac{\lambda_1^c}{\lambda_1^s}\right)^3 = \pi_0^s \frac{1}{60}, \\ \theta_i^c = 0 \qquad \forall i \geq 4. \end{cases}$$

Ja que $\frac{\lambda_1^c}{\lambda_1^s} = 1$. Aleshores,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^c = 1 + \pi_0^s (\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60}) = 1 + \pi_0^s \frac{41}{60}$$

i

$$\pi_0^c = \frac{1}{1 + \pi_0^s \frac{41}{60}}. \tag{4.1}$$

Cal tenir en compte que estem donant per fet que el sistema es troba en equlibri, és a dir, que els processos tenen distribucions estacionàries.

A continuació busquem π_0^s:

$$\begin{cases} \theta_0^s = 1, \\ \theta_i^s = \pi_0^c \left(\frac{\lambda_1^s}{\lambda_1^c} \right)^i = \pi_0^c \quad \forall 1 \leq i \leq 20. \end{cases}$$

Aleshores

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^s = 1 + \sum_{k=1}^{20} \pi_0^c = 1 + 20\pi_0^c.$$

Utilitzant aquest resultat i la igualtat 3.1 tenim que π_0^c i π_0^s han de cumplir:

$$\begin{cases} \pi_0^c = \frac{1}{1+\pi_0^s \frac{41}{60}}, \\ \pi_0^s = \frac{1}{1+\pi_0^c 20}. \end{cases}$$

Finalment:

$$\pi_0^s = \frac{-(1 + 20 - \frac{41}{60}) + \sqrt{(1 + 20 - \frac{41}{60})^2 + 4\frac{41}{60}}}{\frac{41}{30}} \approx 0.0491.$$

I,

$$\pi_0^c = \frac{1}{1 + \pi_0^s \frac{41}{60}} = \frac{1}{1 + \pi_0^s \frac{41}{60}} \approx 0.9675.$$

Amb aquesta informació acabem trobant la distribució límit de $\{X_1^c(t) : t \in [0, \infty)\}$:

$$\begin{cases} \pi_0^c = 0.9675, \\ \pi_1^c = \theta_1^c \pi_0^c = \frac{1}{2} \pi_0^s \pi_0^c \approx 0.0238, \\ \pi_2^c = \theta_2^c \pi_0^c = \frac{1}{6} \pi_0^s \pi_0^c \approx 0.0079, \\ \pi_3^c = \theta_3^c \pi_0^c = \frac{1}{60} \pi_0^s \pi_0^c \approx 0.0008. \end{cases}$$

Aleshores, la longitud mitjana de la cua, que és igual a la mitjana de clients que hi ha esperant a ser atesos, serà aproximadament:

$$L = L_0 = \sum_{i=0}^{3} i\pi_i^c = 0.0238 + 2 \times 0.0079 + 3 \times 0.0008 = 0.042.$$

Donem els mateixos valors als mateixos paràmetres en l'altre model i el simulem. Al ser una simulació del model el que obtenim són dades empíriques. És a dir, no calculem cap distribució límit, però en cada moment el programa ens dóna el nombre de clients i servidors que hi ha a la cua, quants n'hi ha hagut de mitjana fins ara i altres dades d'interès. Les mitjanes que calcula són mitjanes mostrals de les dades que s'observen en la simulació.

Per la simulació, però, hem hagut de fixar un nombre de bicis i clients inicials en cada estació. Esperem prou temps com perquè poguem suposar que el procés es troba en equilibri, és a dir, com perquè les condicions inicials hagin perdut importància en la dinàmica del model. El criteri que hem fet servir per decidir quant temps hem de deixar passar ha estat el d'esperar que cada estació hagi estat buida de bicis en algun moment. D'aquesta manera totes les cues s'han trobat en el mateix estat. Arribats a aquest punt esperem un cert temps perquè les dades generades al principi perdin pes a l'hora de calcular mitjanes mostrals.
Quan han passat 2700 segons totes les cues s'han trobat sense bicis en algun moment. Als 72500 segons desde que hem posat en marxa la simulació considerem que hem deixat passar prou temps.

La proporció de temps que cada cua ha estat ha estat buida és:

$$\begin{cases} \text{cua 1: } 0.23, \\ \text{cua 2: } 0.16, \\ \text{cua 3: } 0.25. \end{cases}$$

En canvi, les cues M/0/M la proporció de temps que estaven buides era aproximadament $\pi_0^c = 0.9675$.

En la simulació les estacions es troben lliures de clients al voltant d'una quarta part del temps, mentre en els models M/0/M es troben buides quasi la totalitat del temps. Aquesta gran diferència en una dada tant rellevant és suficient per concloure que la dinàmica de les cues M/0/M no s'aproxima a la del primer model.

Interpretem aquest resultat com un indicador de que els temps de trajecte entre les estacions juguen un paper important a l'hora de modelitzar-les.

Tot i així, en les cues M/0/M suposem que $\{X_1^c(t) : t \in [0, \infty)\}$ i $\{X_1^s(t) : t \in [0, \infty)\}$ tenen distribcions estacionàries. Aquest fet, en principi, sembla plausible, però caldria demostrar-lo per estar segurs que suposar-ho no és un punt feble del model.

En qualsevol cas, com que les cues M/0/M no s'adapten bé a la dinàmica que hem plantejat per tres estacions de Bicing, arribem a la conclusió que les eines vistes en aquest treball no són útils a l'hora de modelitzar aquesta dinàmica.

No estudiem més a fons les dades que obtenim amb la simulació del primer model, perquè el nostre propòsit és el de comparar-lo amb les cues M/0/M per calibrar la utilitat d'aquestes últimes. L'estudi del model en si no entra en els objectius del treball.

5 Conclusió

L'objectiu principal d'aquest treball era introduir-nos en la modelització estocàstica, tot aprofundint en la teoria de cues. Buscàvem entendre les matemàtiques que hi ha darrere l'estudi de les cues bàsiques i la utilitat d'aquestes.

La teoria sobre processos estocàstics desenvolupada en la primera secció ens ha estat imprescindible per estudiar les cues vistes en les seccions posteriors.

Hem pogut constatar la utilitat de l'estudi de cues amb alguns exemples simples de situacions quotidianes, com la cua que es forma en una botiga. Ens han servit per fer-nos una idea de l'aplicació a la vida real d'aquests models. Sense oblidar, això sí, que l'aplicació d'aquesta teoria va molt més enllà d'aquests exemples.

Finalment, comparant dos models diferents per tres cues del Bicing, hem arribat a la conclusió que les eines bàsiques de teoria de cues no són útils per afrontar el problema de modelitzar aquest servei. Aquest fet ens dóna una idea de les limitacions dels models que hem vist.

Per salvar aquestes limitacions necessitariem cues l'estudi de les quals no es basés en la teoria de cadenes de Markov.

Tot i així, es pot aprofundir molt més en l'estudi dels processos estocàstics que hem vist. Per exemple, estudiant processos de Poisson no homogenis, no hauriem de suposar que la intensitat d'arribades a una cua és constant al llarg del temps; estudiant processos de Poisson compostos, podriem considerar arribades de clients en grups. Amb aquestes eines podriem modelitzar dinàmiques més complexes que la que hem plantejat pel Bicing, que s'adaptin més a la realitat.

6 Annex

6.1 La distribució exponencial

Una variable aleatòria absolutament contínua X té distribució exponencial amb paràmetre $\mu > 0$ si la seva funció de densitat és:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \mu e^{-\mu x} & \text{si } X \geq 0 \end{cases}$$

La seva funció distribució serà

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ 1 - \mu e^{-\mu x} & \text{si } X \geq 0 \end{cases}$$

6.1.1 Propietat de no memoria de la exponencial

Una variable aleatòria tindrà la propietat de no memoria si compleix

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h)$$

Per tant, si

$$P(X > t + h) = P(X > h)P(X > t)$$

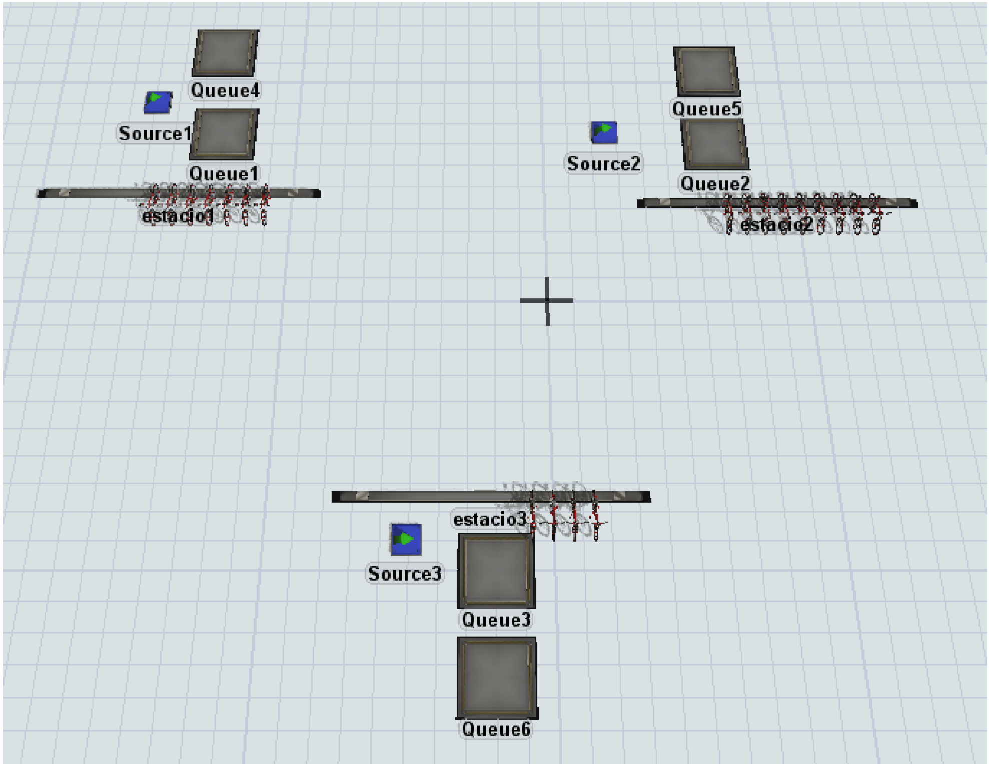
Una variable aleatòria amb distribució exponencial amb paràmetre μ té la propietat de no memoria:

$$P(X \geq t) = 1 - F(t) = e^{-\mu t}$$

Per tant,

$$P(X > h)P(X > t) = e^{-\mu h}e^{-\mu t} = e^{-\mu(h+t)} = P(X > t + h)$$

6.2 Simulació amb FlexSim de tres estacions de Bicing



Aquesta és una imatge del que es veu per pantalla de la nostra simulació just abans de començar a fer córrer el temps.

Tenim les tres estacions repartides en el pla. En l'instant inicial tenim 7 bicis en la estació 1, 9 bicis en la estació 2 i 4 bicis en la estació 3.

Describim com funciona el programa en la primera estació. En les altres dues funciona igual.

A *source*1 es creen els clients. El programa genera una mostra d'exponencials amb mitjana 10 minuts que son els temps que passaran entre arribades de clients consecutius. Els clients que es creen a *source*1 arriben immediatament a *Queue*1 que representa la cua de l'estació de Bicing. D'aquesta manera, els clients van arribant a l'estació segons un procés de Poisson amb paràmetre $\lambda = \frac{1}{10}$.

Abans que el client entri a *Queue*1, però, el programa mira si hi ha bicis disponibles. Si n'hi ha, el client entra a la cua i agafa la bici a l'instant. Si no n'hi ha, depenent de quantes persones hi hagi a *Queue*1 el client es queda amb una certa probabilitat q_n, on $n \in \mathbb{N}$ és el nombre de persones que hi ha esperant. Si no entra a *Queue*1 el client va directament a *Queue*4, que és on acomularem tots els clients que es perdin a cada estació. Els valors que donem a $\{q_n\}_n, \ n \in \mathbb{N}$ són:

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{2}, \\ q_1 = \frac{1}{3}, \\ q_2 = \frac{1}{10}, \\ q_i = 0 \qquad \text{si } \ i \geq 3. \end{cases}$$

Quan un client agafa una bici de *estacio*1, decideix anar a deixar-la a *estacio*2 amb una probabilitat que fixem $d_{1,2}$ o a *estacio*3 amb una certa probbilitat $d_{1,3} = 1 - d_{1,2}$. En el nostre cas tenim

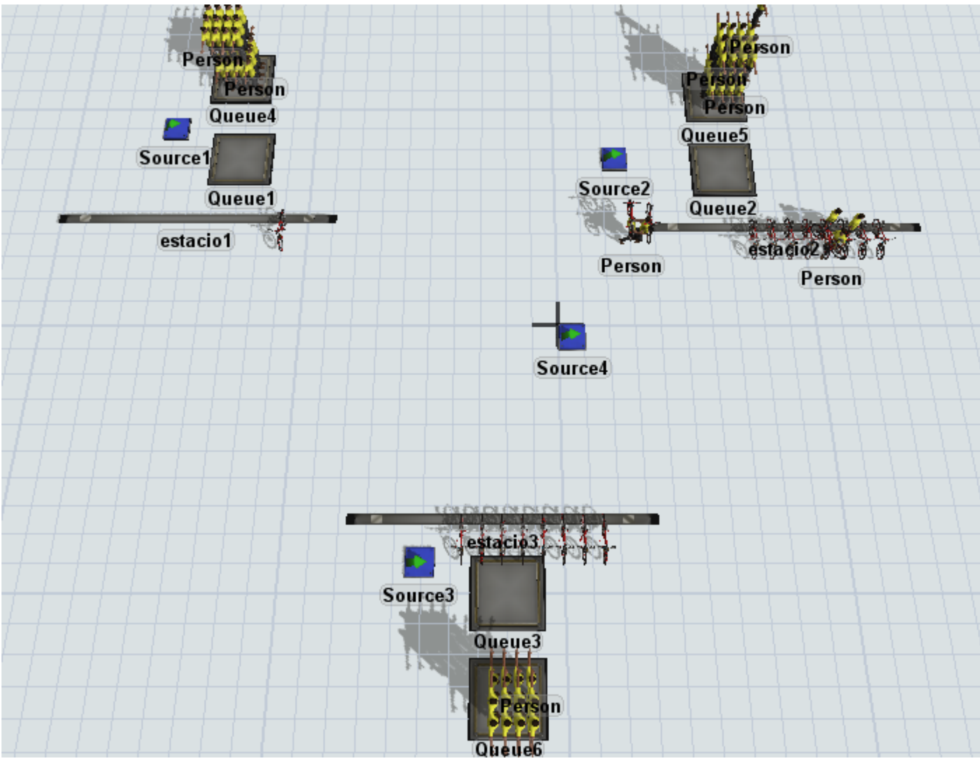
$$d_{i,j} = \frac{1}{2} \ \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \ \ i \neq j.$$

Quan el client ha decidit a quina estació va es dirigeix cap allà i, quan arriba, deixa la bici. Fixem-nos que, tenint en compte el nombre de bicis que hi ha i la capacitat de cada estació, sempre hi haurà lloc per totes les bicis.

Si hi ha clients esperant a *Queue*1 vol dir que no hi ha bicis. En el mateix moment que n'arribi una, un client l'agafarà i anirà cap a una altra estació.

El programa comença a l'instant 0 i segueix aquesta dinàmica mentre el temps passa. D'aquesta manera simula la dinàmica del model que hem proposat.

Al cap d'una estona la imatge que veurem per pantalla serà:



Quan un vol es pot aturar el temps i el mateix programa dóna diferents dades d'interès a temps real. En el nostre cas només ens hem fixat en la proporció de temps que ha estat buida cada cua quan han passat 72500 minuts de simulació.

Referències

[1] Little, John D.C.A proof for the queueing formula: $L = \lambda W$. `https://dl.acm.org/citation.cfm?id=2772699`, 1961.

[2] Karlin, Samuel: *A first course in stochastic processes*, 2a edició, New York, Academic Press, 1975.

[3] Karlin, Samuel: *A second course in stochastic processes*, New York, Academic Press, 1981.

[4] Pinsky, Mark A.; Karlin, Samuel: *An introduction to stochastic modeling*, 4a edició, Academic Press, Amsterdam, 2011.

[5] Medhi, J.: *Stochastic models in queueing theory*, 2a edició, Academic Press, Amsterdam, 2003.