UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Fibrats principals i equacions de Yang-Mills

Autor: Enric Pedrós Reig

Director: Dr. Ricardo García López
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

There has been an increment on the use of mathematics, beyond practical apliactions, in order to understand physical theories that, originally, were described by a set of equations modeling physical phenomena and nowadays are encompassed in more complex and complete mathematical theories. It is the case, for example, of Maxwell's electrodinamics, that nowadays is part of the *gauge theories* that Yang-Mills generalized in 1954 and allowed to create the *Standard Model* theory, a $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ *gauge theory*.

Mainly, these theories are based on three mathematical concepts, *Lie groups*, *bundle theory* and *connections*. The objective of this work is to define the necessary mathematical concepts in order to, firstly understand the mathematical theories themselves and then understand the results obtained when applied in a physical context.

The idea behind these *gauge* theories is to study, in first place, the simetries of physical phenomena and relate them to elements of *Lie groups*. After fixing a diferential manifold where the theory will be build on, we define a *principal bundle* with the simetry group acting on it. That way we can understand *connections* over this *principal bundle* as *gauge fields* of the model. *Matter fileds* are then related to the *associated vector bundles* of the *principal bundle*. The interaction of all these fields is described by the *covariant derivative* that we will also define in the following sections.

We divide this work in three main chapters. In the first one we will define *Lie groups* and its *representations* as well as *Lie algebras*. In the second one we will focus on *bundle theory* and on the *principal bundle* case and its *connections*. Finally we will study Maxwell's electrodinamics (a $U(1)$-prinicpal bundle) and classic Yang-Mills theory (a $SU(n)$-principal bundle) and we will obtain their corresponding equations.

Resum

La necessitat d'utilitzar les matemàtiques, més enllà de les simples aplicacions pràctiques, per poder explicar les noves teories físiques ha anat augmentant cada vegada més i teories que en uns inicis es basaven en una representació pràctica dels fenòmens naturals ara s'engloben dins de teories matemàtiques més sofisticades i completes. És el cas, per exemple, de l'electrodinàmica de Maxwell que avui en dia forma part de les anomenades teories *gauge* que Yang i Mills van generalitzar l'any 1954 i que han permès la creació de la teoria coneguda com a *Model Estàndard*; una $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ teoria *gauge*.

Aquestes teories es fonamenten principalment en tres conceptes matemàtics, els *grups de Lie*, la teoria de *fibrats* i les *connexions*. L'objectiu d'aquest treball és presentar i definir els conceptes matemàtics necessaris per entendre en primer lloc les pròpies teories matemàtiques i després l'ús i resultats que se'n deriven quan s'apliquen en el context de la física.

La idea darrere aquestes teories *gauge* és, inicialment, estudiar les simetries dels fenòmens físics relacionant-los amb els elements dels *grups de Lie*. Un cop establerta la varietat diferencial a on es vol desenvolupar la teoria, es construeix un *fibrat principal* a on hi actuï el grup de simetries esmentat. D'aquesta manera es poden entendre les *connexions* d'aquest fibrat principal com els *camps de gauge* del model. Els *camps de matèria* es deriven dels anomenats *fibrats vectorials associats* al fibrat principal. La interacció entre tots aquests camps ve descrita per la *derivada covariant*, que també tractarem en seccions posteriors.

Estructurem aquest treball en tres blocs. En el primer descriurem els anomenats *grups de Lie* i les seves *representacions* així com el concepte derivat d'*àlgebra de Lie*. En el segon presentem la teoria de *fibrats* per centrar-nos posteriorment en els *fibrat principal* i les seves *connexions*. Finalment estudiarem l'electrodinàmica de Maxwell (cas d'un $U(1)$-fibrat principal) i la teoria de Yang-Mills clàssica (cas d'un $SU(n)$-fibrat principal) i n'obtindrem les seves equacions representatives.

Agraïments

Vull agrair a la facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona i als seus professors que durant els cursos del grau de matemàtiques m'han ajudat i ensenyat de la millor manera possible. En especial vull traslladar també el meu agraïment al doctor Ricardo García per la seva inestimable ajuda en la realització d'aquest treball i per la seva dedicació, atenció i aportació que han permès la realització d'aquest treball.

També vull agrair a la meva família la comprensió i ajuda que he rebut durant el temps que ha durat aquest treball així com la seva paciència i el seu control dels nervis viscuts durant el procés.

Per acabar també vull agrair a tots els companys i amics que m'han acompanyat i ajudat durant la realització del treball i en els anys de anteriors fins al dia d'avui.

Índex

Capítol 1

Grups de Lie i àlgebres de Lie

1.1 Grups de Lie

Definició 1.1. *Un **grup de Lie** G és una varietat diferenciable amb una estructura de grup tal que les aplicacions*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G, & G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 & g_1 &\to g_1^{-1} \end{aligned}$$

són contínuament diferenciables (C^∞).

Notem primer que les dues condicions sobre les aplicacions es poden simplificar a la condició que l'aplicació $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2^{-1}$ sigui C^∞.

Definició 1.2. *Siguin G i H dos grups de Lie. Anomenem **homomorfisme de grups de Lie** a un homomorfisme de grups $\varphi : G \to H$ que sigui C^∞.*

Definició 1.3. *Anomenem **isomorfisme de grups de Lie** a un homomorfisme de grups de Lie que sigui invertible i tal que la seva inversa sigui també un homomorfisme de grups de Lie.*

El nostre interès en els grups de Lie vindrà donat en les seccions posteriors per la definició de *Fibrat Principal* sec. 2.2, els quals seran el nucli principal per estudiar les anomenades *Transformacions Gauge* i, posteriorment, derivar les equacions de l'electrodinàmica 3.2 i de la teoria de Yang-Mills 3.3.

Tot i centrar l'estudi posterior als fibrats, els grups de Lie representen per si sols una de les branques més estudiades i importants de les matemàtiques amb aplicacions en diversos camps de la matemàtica moderna, des de l'estudi de les equacions diferencials (i les seves simetries dins de la teoria de Galois diferencial) fins al de la geometria algebraica [6].

Exemples

1. Com a exemples bàsics de grups de Lie trobem $\mathbb{R}$ **amb la suma**, que juntament amb l'*esfera* d'una dimensió, $\mathbf{S^1} \equiv U(1)$, són els dos únics grups de Lie connexes de dimensió 1.

2. Dels exemples de grups de Lie però, en destacarem el grup **General Lineal** de les matrius amb determinant no nul que denotarem per $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$. Tant al grup General Lineal com a diversos dels seus subgrups de Lie (que veurem a continuació) se'ls anomena habitualment *grups de Lie clàssics.*

Abans però, comprovem que el grup $GL(n,\mathbb{R})$ és efectivament un grup de Lie: $GL(n,\mathbb{R})$ és un obert de $\mathbb{R}^{2n}$ (ja que l'aplicació $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ és continua) i, a part, l'aplicació $g_1 \cdot g_2^{-1}$ és C^∞ ja que tant el producte de matrius com la matriu inversa són matrius en les que les entrades són funcions racionals dels coeficients de la matriu original. Així doncs és una varietat diferenciable (al ser obert de $\mathbb{R}^n$), un grup amb el producte de matrius, i a on l'aplicació $g_1 \cdot g_2^{-1}$ és C^∞; per tant és un grup de Lie.

Teorema 1.1. Teorema de Cartan. *Sigui G un grup de Lie, aleshores un subgrup $H \subset G$ que sigui tancat com a subconjunt també és un grup de Lie.*

Demostració. La demostració original del teorema la podem trobar a [3]. □

Utilitzant aquesta teorema podem demostrar que els anomenats *grups de Lie clàssics* dels què fèiem referència abans són efectivament grups de Lie, concretament

- $SL(n,\mathbb{R}) := \{M_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(M) = 1\}$,
- $O(n,\mathbb{R}) := \{M_{n\times n}(\mathbb{R}) | M \cdot M^t = Id\}$,
- $SO(n,\mathbb{R}) := \{M_{n\times n}(\mathbb{R}) | M \cdot M^t = 1, \det(M) = 1\}$,
- $U(n,\mathbb{C}) := \{M_{n\times n}(\mathbb{C}) | UU^\dagger = 1\}$ i
- $SU(n,\mathbb{C}) := \{M_{n\times n}(\mathbb{C}) | UU^\dagger = 1, \det(M) = 1\}$

són grups de Lie. Aquí, † denota el transposat conjugat, *i.e.* $U^\dagger = \overline{(U^T)}$

Del teorema de Cartan n'hem obtingut un mètode de construcció de grups de Lie a partir d'un donat. Veiem a continuació altres possibles construccions.

Proposició 1.1. *Donats G i G' grups de Lie, el grup producte $G \times G'$ és un grup de Lie.*

Demostració. Definint $(g_1, g_1') \cdot (g_2, g_2') = (g_1 \cdot_G g_2, g_1' \cdot_{G'} g_2')$ i $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$ obtenim l'estructura desitjada. □

Proposició 1.2. *Sigui H un subgrup tancat normal d'un grup de Lie G. Aleshores el quocient G/H és un grup de Lie.*

Demostració. Els resultats generals de la teoria de grups i de geometria diferencial ens donen tant l'estructura de grup com la de varietat diferenciable. Comprovarem aquí que la multiplicació $\cdot_{G/H} : G/H \times G/H \to G/H$ i la inversa $inv : G/H \to G/H$ són contínuament diferenciables.

Considerem l'homomorfisme quocient $\pi : G \to G/H$ on π és la submersió que envia $p \mapsto pH$. Aleshores l'aplicació $\pi \times \pi : G \times G \to G/H \times G/H$ també és submersió. De la proposició *8.3.16* de [4] sabem que, donada una submersió $f : M \to M'$ i una aplicació $h : M' \to N$ per a N varietat diferencial, h és C^∞ si i només si $h \circ f : M \to N$ és C^∞. La diferenciabilitat del producte $\cdot_{G/H}$ ve donada doncs per la diferenciabilitat de la composició $\cdot_{G/H} \circ (\pi \times \pi)$ que, efectivament, és C^∞ ja que és igual a $\pi \circ \cdot_G$.

Anàlogament trobem que $inv_{G/H}$ és C^∞ ja que $inv_{G/H} \circ \pi = \pi \circ inv_G$. □

1.2 Àlgebres de Lie

L'estudi dels grups de Lie deriva a un estudi de les anomenades *àlgebres de Lie*. En aquesta secció presentarem i definirem les àlgebres de Lie i en trobarem la relació amb els grups de Lie. Més concretament veurem que cada grup de Lie té associat de manera natural una àlgebra.

Definició 1.4. *Una **àlgebra** és un espai vectorial V sobre un cos $\mathbb{K}$ dotat amb una operació bilineal $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$.*

Definició 1.5. *Una **àlgebra de Lie** V és una àlgebra en la que l'operació bilineal $[\cdot,\cdot]$ compleix*

(i) *anti-simetria:* $[v, w] = -[w, v]$,

(ii) *identitat de Jacobi:* $[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0$.

*A l'operació $[\cdot,\cdot]$, l'anomenem **bràquet de Lie**.*

Exemples

1. Si M és una varietat diferenciable, l'espai dels camps vectorials de M, $\Xi(M)$, juntament amb el bràquet de Lie de camps vectorials té estructura d'àlgebra de Lie.

2. L'espai de les matrius $n \times n$ juntament amb el commutador de matrius és una àlgebra de Lie.

3. Per a tot V espai vectorial, si considerem com a bràquet $[\cdot,\cdot] := 0$, aleshores V juntament amb $[\cdot,\cdot]$, és una àlgebra de Lie. Tota àlgebra que compleixi $[\cdot,\cdot] = 0$ es diu que és **abeliana**.

Definició 1.6. *Sigui $(V, [\cdot,\cdot])$ una àlgebra de Lie. Un subespai vectorial $W \subset V$ és una **subàlgebra de Lie** de V si l'operació compleix que per a tot $v, w \in W$, $[v, w] \in W$ (i.e. l'operació $[\cdot,\cdot]|_{W\times W}$ és tancada a W).*

Ens interessa definir una àlgebra de Lie per a un grup de Lie donat. Veurem primer una definició fent ús de camps vectorials i després en donarem una construcció alternativa. Finalment veurem que són equivalents.

Sigui $L_g : G \to G$, $L_g(h) = g \cdot h$ l'aplicació translació per l'esquerra, la seva diferencial és l'aplicació definida per $dL_g(X)(p) = d_{L_g^{-1}(p)}L_g(X(L_g^{-1}(p)))$.

Definició 1.7. *Un camp $X \in \Xi(G)$ d'un grup de Lie G és **invariant per l'esquerra** si per a tot $g \in G$ es té que $dL_g(X) = X$.*

Observem que donats dos camps vectorials invariants per l'esquerra X i Y tenim que $dL_g([X,Y]) = [dL_g(X), dL_g(Y)] = [X,Y]$ també és invariant per l'esquerra. Així doncs l'aplicació $[\cdot,\cdot]$ és tancada en el conjunt de camps invariant per l'esquerra i per tant aquest conjunt és una subàlgebra de Lie de $\Xi(G)$.

Definició 1.8. *A l'espai vectorial $\mathfrak{g} := \{X \in \Xi(G) \mid X \text{ és invariant per l'esquerra}\}$ juntament amb el bràquet de Lie l'anomenem l'**àlgebra de Lie de G**.*

Notació: normalment l'àlgebra de Lie d'un grup G l'escriurem utilitzant el mateix nom que el grup de Lie però amb font germànica; $\mathfrak{g}$.

Alternativament podem considerar el següent espai vectorial: sigui G un grup de Lie; com ja hem dit té una estructura de varietat diferenciable, per tant podem considerar l'espai tangent a cadascun dels seus punts. Concretament agafem l'espai tangent a l'element neutre del grup G, T_eG. A aquest espai se l'identifica amb l'àlgebra de Lie de G.

En algunes referències es defineix l'àlgebra de Lie del grup directament com a l'espai tangent T_eG amb bràquet de Lie el bràquet de Lie de camps vectorials. Nosaltres hem preferit donar com a definició formal l'espai vectorial dels camps invariants per l'esquerra; el que veurem ara és l'equivalència entre les dues definicions.

Per fer-ho construïm un isomorfisme entre $\mathfrak{g}$ de la primera definició i T_eG. Si tenim $g \in G$ i $X \in \mathfrak{g}$ aleshores tenim que $X(g) = dL_g(X)(g) = d_{L_{g^{-1}}(g)}L_g(X(L_{g^{-1}}(g))) = d_eL_g(X(e))$ és camp de l'espai tangent al neutre.

D'altra banda si tenim $Y \in T_eG$ aleshores $X(g) := dL_g(Y)$ és un camp invariant per l'esquerra. D'aquesta manera tenim un isomorfisme entre els dos espais i per tant les dues definicions són equivalents.

Exemples

1. Sigui $GL(n,\mathbb{R})$ el grup de Lie general lineal. Calcualarem aquí la seva àlgebra de Lie, que ens servirà per a seccions posteriors. Per fer-ho utilitzarem un resultat que no demostrarem aquí però que ens és de molta ajuda per a calcular àlgebres de Lie de grups de matrius. Concretament de [5] tenim que l'àlgebra d'un grup de Lie de matrius G la podem construir com $\mathfrak{g} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid e^{tA} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ amb el bràquet de Lie essent el commutador de matrius, $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$.

Denotant per $\mathfrak{gl}$ l'àlgebra de Lie de $GL(V) = Aut(V)$ i aplicant el resultat anterior trobem que $\mathfrak{gl}(V) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid e^{tA} \in GL(V)\ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})\} = M_{n\times n}(V) = End(V)$. On la segona igualtat prové del fet que per a qualsevol matriu A, la matriu e^{tA} és sempre invertible. Així doncs hem trobat que l'àlgebra de Lie del grup de Lie de les matrius amb determinant no nul és el grup de matrius $M_{n\times n}(V)$ o, equivalentment, que el grup d'endomorfismes de V $\mathbb{K}$-espai vectorial és l'àlgebra de Lie del grup dels automorfismes de V.

2. Sigui $U(n)$ el grup unitari. Aleshores $\mathfrak{u}(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid e^{tA} \in U(n)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$. $e^{tA} \in U(n) \Leftrightarrow (e^{tA})^\dagger = (e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \Leftrightarrow A^\dagger = -A$. Per tant l'àlgebra de Lie del grup unitari és l'espai de matrius amb $A^\dagger = -A$, que és igual a $i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

1.3 Representacions

Un cop hem definit els grups de Lie i les seves respectives àlgebres estudiarem les seves representacions. Una representació d'un grup és una assignació d'una matriu a cada element del grup. Més concretament,

Definició 1.9. *Una* ***representació d'un grup de Lie*** *G és un homomorfisme de grups de Lie $\rho : G \to Aut(V)$ per a V un $\mathbb{K}$-espai vectorial (on $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).*

Fixada una base, els automorfismes de V no són res més que les matrius del grup General Lineal $GL(n, \mathbb{K})$. Diem que una representació és **fidel** si és injectiva.

Exemples

1. A la representació $\rho(g) = Id_V, \forall g \in G$ se l'anomena representació trivial del grup.

2. Una de les representacions més comunes és la representació adjunta. Per definir-la utilitzem l'aplicació conjugació $\alpha_g : G \to G$ definida per $\alpha_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$.

Donat un grup G la seva representació adjunta es defineix per $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$, $Ad_g := d_e\alpha_g$, on $\mathfrak{g}$ és l'àlgebra de Lie del grup G. Ens queda comprovar que efectivament $d_e\alpha_g$ és un homomorfisme de grups.

Agafem $X \in \mathfrak{g}$ i denotem per γ una corba tal que $\dot\gamma(0) = X$ i $\gamma(0) = e$. Aleshores,

$$Ad_{g_1 \cdot g_2}(X) = d_e\alpha_{g_1 \cdot g_2}(X) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\alpha_{g_1 \cdot g_2}(\gamma(s)) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2})(\gamma(s)) = d_e(\alpha_{g_1}(d_e(\alpha_{g_2})(X)) = Ad_{g_1}(Ad_{g_2}(X)) = Ad_{g_1} \circ Ad_{g_2}(X).$$

En conseqüència obtenim també que $Ad_e = Id_{\mathfrak{g}}$ i $(Ad_g)^{-1} = Ad_{g^{-1}}$ així doncs l'aplicació és un homomorfisme de grups.

3. Si un grup G és abelià, aleshores $\alpha = Id_G$ i per tant $Ad_g = d_e\alpha_g = Id_{\mathfrak{g}}$.

Donarem ara diverses construccions de representacions. Donades $\rho : G \to Aut(V)$ i $\rho_j : G \to Aut(V_j)$, $j = 1, 2$ representacions de G podem construir noves representacions:

- Representació **suma directa**,
  $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to Aut(V_1 \oplus V_2)$ tal que $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$.
- Representació **producte tensorial**,
  $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to Aut(V_1 \otimes V_2)$ tal que $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.
- Representació **producte alternat**,
  $\Lambda^k\rho : G \to Aut(\Lambda^k V)$ tal que $(\Lambda^k\rho)(g) = \rho(g) \wedge ... \wedge \rho(g)$.

Definició 1.10. *Diem que dues representacions $\rho : G \to Aut(V)$ i $\rho' : G \to Aut(V')$ són* ***equivalents*** *si existeix un isomorfisme de $\mathbb{K}$-espais vectorials $F : V \to V'$ tal que el següent diagrama commuta.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V' \\ {\scriptstyle \rho(g)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho'(g)} \\ V & \xrightarrow{F} & V' \end{array}$$

Representacions de l'àlgebra de Lie

El concepte de representació es pot traslladar també a les àlgebres de Lie d'un grup de Lie, veiem-ho.

Definició 1.11. *Una* ***representació d'una àlgebra de Lie*** $\mathfrak{g}$ *és un homomorfisme d'àlgebres de Lie $\lambda : \mathfrak{g} \to End(V)$ on, com hem vist, $End(V)$ és l'àlgebra de Lie de $Aut(V)$.*

En aquest cas, a diferència de les representació d'un grup de Lie, l'espai d'arribada és el dels endomorfismes de V en comptes dels automorfismes, així doncs la identificació és sobre totes les matrius amb coeficients en $\mathbb{K}$ i no només sobre $GL(\mathbb{K})$.

Com en el cas d'abans és defineix l'equivalència de representacions,

Definició 1.12. *Dues representacions* $\lambda : \mathfrak{g} \to End(V)$ *i* $\lambda' : \mathfrak{g} \to End(V')$ *són* ***equivalents*** *si existeix un isomorfisme de* $\mathbb{K}$ *espais vectorials* $F : V \to V'$ *tal que el següent diagrama commuta.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V' \\ {\scriptstyle \lambda(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda'(g)} \\ V & \xrightarrow{F} & V' \end{array}$$

Exemples

1. Per a G grup de Lie hem definit la representació adjunta com el diferencial de l'aplicació conjugació. Per $\mathfrak{g}$ àlgebra de Lie d'un grup G definim la **representació adjunta** com $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ tal que $ad(X)(Y) = [X, Y]$. Efectivament $ad(X)(\cdot)$ és un endomorfisme de $\mathfrak{g}$ ja que el bràquet de Lie és bilineal, per tant, per veure que realment es tracta d'una representació, només cal confirmar que és un homomorfisme,

$$ad([X,Y])(Z) = [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [[Z,X],Y] =$$
$$ad(X)(ad([Y,Z])) - ad(Y)(ad([X,Z]) = (ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X))(Z) =$$
$$[ad(X), ad(Y)]\,(Z).$$

Un dels resultats a destacar és el fet que donada una representació ρ d'un grup de Lie, podem trobar una representació ρ' de la seva àlgebra de Lie. Aquest resultat ens permet treballar amb les àlgebres en alguns casos sense perdre informació dels grups. Com veurem més endavant la representació de l'àlgebra associada a la representació d'un grup no serà res més que la diferencial de ρ en el neutre, *i.e.* $\rho' = d_e\rho$.

Per trobar aquesta relació necessitem l'aplicació exponencial.

1.4 L'aplicació exponencial

Començarem la secció donant un lema sobre corbes en un grup de Lie.

Lema 1.1. *Sigui* G *un grup de Lie i sigui* $\gamma : \mathbb{R} \to G$ *una corba* C^∞ *tal que* $\gamma(0) = e$. *Aleshores* γ *és un homomorfisme de grups de Lie* $\Leftrightarrow$ *és una corba integral a un camp vectorial invariant per l'esquerra.*

Demostració.

$\Rightarrow$)

Si γ és homomorfisme de grups tenim que per a $x, y \in \mathbb{R}$, $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

Aleshores hem de veure si $\dot\gamma(t) := \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma(s+t)$ és igual a un camp avaluat a $\gamma(t)$.

Tenim que $\dot\gamma(t) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma(s+t) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma(s)\gamma(t) = dL_{\gamma(t)}(\dot\gamma(0))$.

A G existeix un únic camp X invariant per l'esquerra tal que $X(e) = \dot{\gamma}(0)$ així doncs trobem que la corba $\dot{\gamma}(t) = dL_{\gamma(t)}(X(e)) = X(\gamma(t))$ és efectivament una corba integral d'un camp invariant per l'esquerra.

$\Leftarrow$)

Sigui γ corba integral, per demostrar que γ és homomorfisme de $\mathbb{R}$ a G hem de veure que $\gamma(0) = e$ i que $\gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot_G \gamma(t)$.

La primera condició és certa degut a les hipòtesis del lema. Per comprovar la segona condició estudiem el cas per a $t = 0$. Trobem que per a la condició inicial $t = 0$ les dues expressions són iguals, $\gamma(s+0) = \gamma(s) \cdot e$.

Si considerem ara les seves derivades trobem, per la banda de l'esquerra

$$\frac{d}{dt}\gamma(s+t) = X(\gamma(s+t))$$

i per la banda de la dreta

$$\frac{d}{dt}(\gamma(s)\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(L_{\gamma(s)}\gamma(t)) = d_{\gamma(s)}L\dot{\gamma(t)} = d_{\gamma(s)}LX(\gamma(t)) = X(\gamma(s)\gamma(t)).$$

D'aquesta manera veiem que les dues expressions són solució a la mateixa equació diferencial amb la mateixa condició inicial i per tant són iguals.

□

Definició 1.13. *L'**aplicació exponencial*** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *és defineix per* $\exp(X) = \gamma_X(1)$*, a on* γ_X *és la corba integral de* X *amb* $\gamma_X(0) = e$.

Proposició 1.3. *Donarem algunes propietats de l'aplicació exponencial,*

(i) $\exp(tX) = \gamma_X(t)$,

(ii) $exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$,

(iii) $\exp(0) = e$,

(iv) $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$.

Demostració.

(i) La corba $\gamma_X(t \cdot 1)$ és un homomorfisme de grups de Lie i pel lema anterior sabem que és una corba integral a un camp vectorial invariant per l'esquerra. A més $\gamma_X(1 \cdot 0) = e$ i $\dot{\gamma}_X(t \cdot 1) = 1 \cdot \dot{\gamma}_X(t) = 1 \cdot X(\gamma(t))$. Com que el camp vectorial associat a la corba integral és únic trobem que $\gamma_X(t \cdot 1) = \gamma_{tX}(1)$, d'aquesta manera trobem que $\gamma_X(t) = \gamma_X(t \cdot 1) = \gamma_{tX}(1) = \exp(tX)$.

(ii) Directe utilitzant el lema inicial de la secció. L'aplicació exponencial es defineix com una corba integral a un camp per l'esquerra i del lema inicial de la secció n'obtenim que és homomorfisme.

(iii) i (iv) són conseqüències directes de la propietat 3. □

Lema 1.2. *La diferencial al 0 de l'aplicació exponencial és l'aplicació identitat. i.e.* $d_0 \exp : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $d_0 \exp = id_{\mathfrak{g}}$.

Demostració. $d_0 \exp(X) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp(sX) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma_X(s) = X$. □

Corol·lari 1.1. *Sigui G un grup de Lie i $\mathfrak{g}$ la seva àlgebra de Lie. Aleshores existeixen entorns dels neutres de G i $\mathfrak{g}$ difeomorfs, més concretament $\exists U \subset \mathfrak{g}$ entorn de 0 i $V \subset G$ entorn de e tal que $exp|_U : U \to V$ és un difeomorfisme.*

Demostració. L'aplicació exponencial és contínuament diferenciable i del lema anterior sabem que la seva diferencial també ho és en un entorn del 0, aplicant el teorema de la funció inversa aconseguim el resultat desitjat. □

Proposició 1.4. *Sigui $inv : G \to G$, $inv(g) = g^{-1}$ l'aplicació inversa. Aleshores* $d_e inv = -id_{\mathfrak{g}}$

Demostració. Del corol·lari anterior tenim que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{-id_{\mathfrak{g}}} & U \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ V & \xrightarrow{inv} & V \end{array}$$

commuta. Si agafem la diferencial en l'element neutre e trobem

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{-id_{\mathfrak{g}}} & U \\ {\scriptstyle id_{\mathfrak{g}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_{\mathfrak{g}}} \\ V & \xrightarrow{d_e inv} & V \end{array}$$

d'on n'obtenim el resultat desitjat. □

Corol·lari 1.2. *Sigui $\varphi : G \to H$ qualsevol homomorfisme de grups de Lie. Aleshores el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_e\varphi} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

commuta. i.e. Tenim que per a qualsevol homomorfisme es compleix $\exp(d_e\varphi(X)) = \varphi(\exp(X))$.

Demostració. Considerem la corba $\gamma(t)$, $t \mapsto \varphi(exp(tX)$, que és homomorfisme de grups, aleshores $\gamma(0) = e$ i $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(exp(tX)) = d_e\varphi(X)$. Del lema inicial de la secció tenim doncs que γ és corba integral del camp $d_e\varphi(X)$ a e i per tant, de la definició de l'aplicació exponencial i, per altra banda, avaluant γ a $t = 1$ trobem

$$\gamma(1) = \exp(d_e\varphi(X)) = \varphi(\exp(X)).$$

□

Abans hem definit les representacions adjuntes tant per als grups de Lie com per a les seves àlgebres. Un cop definida l'aplicació exponencial podem veure ara que realment les dues aplicacions estan relacionades i que la coincidència en el nom no és arbitrària.

Donarem el càlcul per al cas de matrius, on recordem que havíem definit la representació adjunta per a grups de Lie com $Ad_g(X) = d_e(gXg^{-1})$.

$$\begin{aligned} &dAd(X)(Y) = \\ \frac{d}{dt}|_t Ad_{\exp(tX)}(Y) = \frac{d}{dt}|_t \exp(tX)(Y)\exp(-tX) = XY + Y(-X) = [X,Y] = \\ &ad(X)(Y). \end{aligned}$$

Per acabar ens queda recuperar (i demostrar) el resultat que hem presentat al iniciar la secció.

Lema 1.3. *Si $\varphi : G \to H$ és un homomorfisme de grups de Lie, aleshores $d_e\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ és un homomorfisme d'àlgebres de Lie.*

Demostració. Denotarem $\varphi^* = d_e\varphi$, aleshores

$$\begin{aligned} \varphi^*([X,Y]) = \varphi^*(Ad^*(X)(Y)) = \varphi^*\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}Ad_{exp(tX)}(Y)\right) = \\ \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^*\left(Ad_{exp(tX)}(Y)\right) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\left(\alpha_{exp(tX)}(exp(sX))\right)\right) = \\ \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\varphi(\alpha_{exp(tX)}(exp(sX))) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\alpha_{\varphi(exp(tX))}\varphi(exp(sX) = \\ \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\alpha_{exp(t\varphi^*(X))}exp(s\varphi^*(Y)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}Ad_{exp(t\varphi^*(X))}(\varphi^*(Y)) = \\ Ad^*(\varphi^*(X))(\varphi^*(Y)) = ad(\varphi^*(X))(\varphi^*(Y)) = \\ [\varphi^*(X),\varphi^*(Y)]. \end{aligned}$$

□

Corol·lari 1.3. *Si $\rho : G \to Aut(V)$ és una representació de grups de Lie, aleshores $d_e\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ és una representació d'àlgebres de Lie.*

Demostració. Només hem de veure que $End(V)$ és l'àlgebra de Lie de $Aut(V)$ i aplicant directament el lema anterior obtindrem el resultat desitjat. En el nostre cas, el càlcul de l'àlgebra de Lie del grup dels automorfismes de V l'hem escrit en l'exemple 2 de la secció 1.2 i hem vist que efectivament es tracta del grup dels endomorfismes de V. □

D'aquesta manera acabem amb el conjunt de relacions entre grups de Lie i àlgebres de Lie. Donat un grup de Lie G existeix una àlgebra de Lie associada de manera natural (que correspon a l'espai tangent del grup G a l'element neutre T_eG). A més a més, si tenim una representació φ del grup G obtenim també una representació $\varphi^* = d_e\varphi$ de l'àlgebra de Lie. Per tant, hem vist com l'estudi dels grups de Lie es pot transportar a un estudi de les àlgebres de Lie.

1.5 Acció d'un Grup

L'element principal per entendre les *transformacions gauge* seran els *fibrats principals* que, com veurem en la secció 2.2 es definiran a partir de l'acció d'un grup de Lie sobre una varietat diferencial. És per això que dedicarem aquesta secció a concretar algunes definicions i resultats rellevants relatius a les accions d'un grup de Lie.

Definició 1.14. *Sigui G un grup de Lie i M una varietat diferenciable. Una acció per l'esquerra (o acció) de G a M és una aplicació diferencial $G \times M \to M$ que envia $(g, x) \mapsto g \cdot x$ i que compleix*

(i) $\forall x \in M, \forall g, h \in G,\ (g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

(ii) $\forall x \in M,\ e \cdot x = x$.

L'acció trivial és la definida per $g \cdot x = x$ per a tot $g \in G$.

Definició 1.15.

Diem que una acció és ***efectiva*** *si* $\forall g \in G, ((\forall x \in M, g \cdot x = x) \Rightarrow g = e)$.

Diem que una acció és ***lliure*** *si* $\forall g \in G, ((\exists x \in M | g \cdot x = x) \Rightarrow g = e)$.

Diem que una acció és ***transitiva*** *si* $\forall x, y \in M, \exists g \in G | g \cdot x = y$.

Notem que tota acció lliure és efectiva.

Definició 1.16. *L'****òrbita d'un element*** $x \in M$ *respecte d'una acció és el conjunt* $G \cdot x := \{g \cdot x | g \in G\}$.

Definició 1.17. *L'****espai d'òrbites*** *d'una acció és el conjunt* $G \backslash M := \{G \cdot x | x \in M\}$.

Per definir l'àlgebra de Lie associada a un grup de Lie abans hem utilitzat l'aplicació $L_p(X)$. Ara definim i utilitzem l'aplicació $R_p : G \to M$, $R_p(g) := p \cdot g$, $p \in M$, $g \in G$ per definir el concepte de camp fonamental.

Definició 1.18. *Sigui G un grup de Lie que actua sobre una varietat M i $X \in \mathfrak{g}$. Definim el* ***camp vectorial fonamental*** *associat a X com el camp $\overline{X}$ tal que* $\overline{X}(p) := d_e R_p(X_e)$.

Recordem que la diferencial de R_p és una aplicació lineal definida a $d_e R_p : \mathfrak{g} \to T_p M$. És a dir, ens transporta vectors de l'espai tangent al neutre de G a l'espai tangent a un punt p de M. D'aquesta manera notem que el camp fonamental $\overline{X} \in \Xi(M)$ pertany als camps de la varietat M.

De la mateixa manera a com hem definit acció per l'esquerra d'un grup de Lie a una varietat, podem definir

Definició 1.19. *Una **acció per la dreta** és una aplicació C^∞ de $M \times G \to M$ que envia $(x, g) \mapsto x \cdot g$ i que satisfà:*

(i) $\forall x \in M$, $\forall g, h \in G \Rightarrow x \cdot (g \cdot h) = (x \cdot g) \cdot h$.

(ii) $\forall x \in M$, $x \cdot e = x$.

Per acabar observem que donada una acció per l'esquerra, en podem construir una per la dreta de manera natural i viceversa.

Si tenim $(g, p) \mapsto g \cdot p$, aleshores l'aplicació $(p, g) \mapsto g^{-1} \cdot p$ defineix una acció per la dreta que podem denotar $p \star g$. Anàlogament, si tenim $(p, g) \mapsto p \cdot g$, aleshores l'aplicació $(g, p) \mapsto p \cdot g^{-1}$ defineix una acció per l'esquerra.

Capítol 2

Fibrats i connexions

Un cop definides les accions d'un grup de Lie, ja podem definir el concepte de fibrat principal. Per arribar a la definició de fibrat principal però, començarem la secció parlant dels espais fibrats.

2.1 Espais Fibrats

Definició 2.1. *Sigui E, B i F varietats diferenciables i* $\pi : E \to B$ *una aplicació diferenciable exhaustiva. Al conjunt* (E, π, B) *i* F *se l'anomena* ***espai fibrat*** *amb* ***fibra típica*** F *si per a tot* $x \in B$ *existeix un obert* $x \in U \subset B$ *i un difeomorfisme* $\psi_U : \pi(U)^{-1} \to E \times F$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \supset \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\pi"] & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ U & \end{tikzcd}$$

commuta.

En altres paraules, un espai fibrat és un espai E que localment és difeomorf a un espai producte. A la pràctica però, es parlarà d'espai fibrat quan es faci referència a tota l'estructura (E, π, B) mentre que als seus elements particulars se'ls anomenarà, **espai total** (E), **espai base** (B) i a les aplicacions ψ_U, **trivialitzacions locals**.

La construcció de les trivialitzacions locals hem vist que es fa sobre el conjunt $\pi^{-1}(U)$, si considerem però la seva restricció a un sol element, $\pi^{-1}(x)$ per a $x \in U \subset B$, trobem que $\pi^{-1}(x)$ és difeomorf a la fibra típica F.

Definició 2.2. *A l'espai* $\pi(x)^{-1} =: E_x \subset E$ *se l'anomena* ***fibra*** *de* x *i és difeomorf a la fibra típica* F.

Degut a aquest difeomorfisme, a la fibra típica habitualment també se l'anomena simplement fibra. Com hem comentat, un espai fibrat és un espai que localment és difeomorf a un espai producte, l'espai fibrat trivial serà doncs aquell que ja és espai producte globalment, més concretament l'espai fibrat trivial és defineix per $(B \times F, pr_B, B)$ amb fibra F.

Definició 2.3. *Siguin (E, π, B) i (E', π', B') dos espais fibrats, diem que són **isomorfs** si existeix $\varphi : E \to E'$ difeomorfisme tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

commuta.

Direm que un espai fibrat és trivial si és isomorf a l'espai fibrat trivial.

Definició 2.4. *Sigui (E, π, B) un espai fibrat, una **secció** és una aplicació diferencial $s : B \to E$ tal que $\pi \circ s = id_B$.*

Siguin B i B' dos varietats diferenciables i λ una aplicació $\lambda : B' \to B$. Si l'espai B és espai base d'un espai fibrat (E, π, B) amb fibra típica F, ens preguntem si podem construir un espai fibrat sobre la base B', (E', π', B').

Definim $E' := \{(b', p) \in B' \times E | \lambda(b') = \pi(p)\}$ com a espai total i $\pi' := pr_{B'} : E' \to B'$.

Agafem ara un punt $b'_0 \in B'$ i la seva imatge $\lambda(b'_0)$ a B, considerem un entorn obert $U \subset B$ de $\lambda(b'_0)$ i aleshores agafem el conjunt $U' = \lambda^{-1}(U)$ com a entorn obert de b'_0 a B'. Hem de veure que $\pi'(U')^{-1}$ és difeomorf a $U' \times F$.

Per la definició que tenim de π' trobem que

$$\begin{aligned} \pi'(U')^{-1} = pr_{B'}(U')^{-1} &= \{(b', p) \in U' \times E | \lambda(b') = \pi(p)\} \\ &\cong \{(b', b, f) \in U' \times U \times F | \lambda(b') = b\} \equiv U' \times F. \end{aligned}$$

és efectivament difeomorf a $U' \times F$. Tenim doncs

$$\begin{tikzcd} E' \supset \pi'^{-1}(U') \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi'"] & U' \times F \arrow[dl, "pr_{U'}"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

un espai fibrat (E', π', B') amb fibra F.

Definició 2.5. *Al l'espai fibrat $(E', \pi', B') := \lambda^*(E, \pi, B)$ de la proposició anterior se l'anomena **imatge inversa (pull-back)** de (E, π, B) per $\lambda : B' \to B$.*

La fibra de l'espai fibrat pull-back de (E, π, B) en un punt $b'_0 \in B'$ és

$$
\begin{aligned}
E'_{b'_0} = \pi'(b'_0)^{-1} = pr_{E'}(b'_0)^{-1} = \\
\{(b', p) \in B' \times E \mid \lambda(b') = \pi(p) \text{ i } pr_{E'}(b', p) = b'_0\} = \\
\{(b'_0, p) \in B' \times E \mid \lambda(b') = \pi(p)\} = \{b'_0\} \times E_{\lambda(b'_0)} \\
\cong E_{\lambda(b'_0)}.
\end{aligned}
$$

Així doncs tenim que la projecció sobre E identifica les fibres de b'_0 a E' amb les fibres de $\lambda(b'_0)$ a E.

Definició 2.6. *Un **fibrat vectorial** és un espai fibrat el qual les fibres E_x tenen l'estructura d'espai vectorial de dimensió n i, a més, les trivialitzacions locals de les fibres $\psi_U|_{\pi(x)^{-1}} : E_x \to \{x\} \times F \cong F$ són isomorfismes lineals.*

2.2 Fibrats Principals

Definició 2.7. *Un **G-Fibrat Principal** és un espai fibrat (P, π, B) en el qual la fibra F és un grup de Lie G que actua per la dreta sobre P de tal manera que es compleix:*

(i) L'acció és lliure.

(ii) L'acció és transitiva sobre les fibres, i.e. per a tot $p \in P$, $p \cdot G = P_{\pi(p)}$.

(iii) Les trivialitzacions locals $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ són tals que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \times G \arrow[r, "pr|_1"] \arrow[d, "\psi_U \times id_G"] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\psi_U"] \\
U \times G \times G \arrow[r, "id_U \times \mu_G"] & U \times G
\end{tikzcd}
$$

commuta. Aquí μ_G denota la multiplicació a G.

Al grup de Lie G l'anomenem **grup d'estructura** del fibrat.

Proposició 2.1. *Existeix una correspondència* $1:1$ *entre seccions locals i trivialitzacions locals d'un G-fibrat principal.*

Demostració. Sigui (P, π, B) un G-fibrat principal. Donada una secció $s : U \to P|_U$ per a $U \subset B$ obert, podem definir una trivialització local de la següent manera, $\psi_U(p) := (\pi(p), g_p) \in U \times G$, on g_p és l'únic punt tal que $p = s(\pi(p)) \cdot g_p$ (sabem que existeix (i que és únic) perquè l'acció és lliure i transitiva).

Per altra banda, donada una trivialització local ψ podem definir una secció local de la següent manera, $s(b) := \psi^{-1}(b, e)$ i utilitzant la commutativitat del diagrama de la definició de fibrat principal, podem expressar la trivialització local en funció de la secció, $\psi^{-1}(b, g) = \psi^{-1}(b, eg) = \psi^{-1}(b, e) \cdot g = s(b) \cdot g$. $\square$

Un dels primers exemples, i més importants, de fibrats principals és el **fibrat de referències**.

Definició 2.8. *Sigui* (V, π, B) *un* $\mathbb{K}$*-fibrat vectorial, construïm el conjunt* $P_b := \{(v_1, ..., v_n)$ *base ordenada de* $V_b\}$ *de les bases ordenades de la fibra* V_b *de* V *per a* $b \in B$*. Aleshores anomenem* ***fibrat de referències*** *al G-fibrat principal* (P, π, B) *on* $P = \bigcup_{b \in B} P_b$*, la projecció* π *és tal que* $\pi|_{P_b} = b$ *i* $G = GL(n, \mathbb{K})$ *actua lliurement i transitivament per la dreta sobre* P*.*

Per al cas dels espais fibrats hem trobat, a partir d'un espai fibrat (E, π, B), el pull-back $\lambda^*(E, \pi, B)$. Per al cas dels fibrats principals podem obtenir el mateix resultat.

Proposició 2.2. *Donat* (P, π, B) *G-fibrat principal i* $\lambda : B' \to B$ *aplicació* C^∞*, definim* $P' = \{(b', p) \in B' \times P \mid \lambda(b') = \pi(p)\}$*. Aleshores* $(P', \pi := pr_{B'}, B)$ *és un G-fibrat principal on G actua tal que* $(b', p) \cdot g = (b', p \cdot g)$*.*

Demostració. La demostració és anàloga a la construcció que hem fet per als espais fibrats; es calcula l'espai $\pi'(U')^{-1}$ per a $U' \in B$ i es veu de manera similar que és difeomorf a $B' \times G$. □

Hem vist que canviant d'espai base B a B' podem trobar un nou fibrat principal. Ens preguntem ara si canviant el grup de Lie podem arribar a trobar també un nou fibrat principal.

Proposició 2.3. *Sigui* $\varphi : G \to H$ *un homomorfisme de grups de Lie i* (P, π, B) *un G-fibrat principal. Aleshores* $((P \times H)/G, \pi', B)$ *és un H-fibrat principal on G actua per la dreta sobre* $P \times H$ *amb* $(p, h) \cdot g = (p \cdot g, \varphi(g^{-1}) \cdot h)$ *i on* π' *és la única aplicació per al que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \times H \arrow[r] \arrow[d, "\pi \circ pr_P"] & (P \times H)/G \arrow[dl, "\pi'"] \\ B & \end{tikzcd}$$

commuta.

Demostració. L'acció de G sobre $P \times H$ és lliure ja que per $(p, h) \cdot g = (p, h) \Rightarrow p \cdot g = p \Rightarrow g = e$, on l'última implicació és deguda a que l'acció és lliure sobre P.

$(P \times H)/G$ és varietat diferencial [2] i dels resultats generals de la teoria de grups sabem que l'aplicació π' és C^∞ i única ja que la projecció $\pi \circ pr_P$ és constant a les òrbites.

Finalment comprovem que H actua lliurement sobre $(P \times H)/G$. Notem que H actua sobre $P \times H$ amb $(p, h) \cdot h' = (p, hh')$. Com que l'acció de H i de G commuten, podem traslladar l'acció de H sobre $P \times H$ a $(P \times H)/G$ tal que $[p, h] \cdot h' = [p, hh']$.

Finalment

$[p, h] \cdot h' = [p, h] \Rightarrow \exists g \in G \mid (p, hh') = (p \cdot g, \varphi(g^{-1}) \cdot h) \Rightarrow p = p \cdot g \Rightarrow g = e \Rightarrow hh' = \varphi(e^{-1})h = h \Rightarrow h' = e$, l'acció és efectivament lliure.

□

Definició 2.9. *Al H-fibrat principal* $((P \times H)/G), \pi', B)$ *se l'anomena* ***H-fibrat principal associat*** *a* (P, π, B) *per* φ.

Els casos més rellevants de fibrats principals associats sorgeixen quan φ és un *embeding* $G \hookrightarrow H$. Aleshores diem que el H-fibrat principal s'ha obtingut de G per **extensió** de l'estructura. Per contra, si tenim un H-fibrat principal (H, π, B) i existeix un G-fibrat principal (P', π', B) de manera que P és extensió de P', diem que (P', π', B) s'ha obtingut per **reducció** de l'estructura.

Definició 2.10. *Sigui* (P, π, B) *un G-fibrat principal i* $\rho : G \to Aut(V)$ *una representació de grups de Lie, el* ***fibrat vectorial associat*** *és* $(P \times V)/G, \pi', B)$.

2.2.1 Descripció local dels fibrats

Per acabar aquesta secció donarem una descripció local dels fibrats principals. Considerem un recobriment d'oberts $\{U_\alpha\}_\alpha$ de B de tal manera que $P|_{U_\alpha}$ sigui trivial i considerem les seccions $s_\alpha : U_\alpha \to P|_{U_\alpha}$.

Definició 2.11. *Per a cada dos obert* U_α*,* U_β *amb intersecció no buida, definim per* ***funció de transició*** *com la funció* $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ *tal que* $s_\alpha(x) = s_\beta(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)$

Proposició 2.4. *Les funcions de transició existeixen i, donats* s_α *i* s_β *seccions fixades, la funció de transició* $g_{\alpha\beta}$ *és única.*

Demostració. Sabem que l'acció de G sobre P és transitiva sobre les fibres. En aquest cas tenim $s_\alpha(x)$, $s_\beta(x) \in \pi^{-1}(x)$ elements d'una mateixa fibra, per tant sabem que existeix un element $g \equiv g_{\alpha\beta}(x) \in G$ tal que $s_\alpha(x) = s_\beta(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)$.

Finalment, si tenim $g'_{\alpha\beta}$ funció de transició tal que $s_\alpha(x) = s_\beta(x) \cdot g'_{\alpha\beta}(x)$, aleshores és fàcil veure que $s_\beta(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) = s_\beta(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)$ i tenim que $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. □

Proposició 2.5. *Les funcions de transició compleixen les anomenades* ***condicions cocicle***

(i) $g_{\alpha\alpha} = e$,

(ii) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$,

(iii) $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = e$.

Demostració.

(i) $s_\alpha = s_\alpha g_{\alpha\alpha} \Rightarrow g_{\alpha\alpha} = e$.

(ii) $s_\alpha = s_\beta g_{\alpha\beta} = s_\alpha g_{\beta\alpha} g_{\alpha\beta}$, com que l'acció és lliure obtenim la condició $g_{\beta\alpha} g_{\alpha\beta} = e$ d'on trobem la segona condició.

(iii) $s_\alpha = s_\gamma g_{\alpha\gamma} = s_\beta g_{\gamma\beta} g_{\alpha\gamma} = s_\alpha g_{\beta\alpha} g_{\gamma\beta} g_{\alpha\gamma}$. I com en el cas d'abans la relació és directa.

□

Si triem seccions diferents $s_\alpha : U_\alpha \to P|_{U_\alpha}$ i $s'_\alpha : U_\alpha \to P|_{U_\alpha}$, obtenim funcions de transició diferents $g_{\alpha\beta}$ i $g'_{\alpha\beta}$.

Proposició 2.6. *La relació entre les dues funcions de transició és aleshores $g_{\alpha\beta} = h_\alpha g'_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$, on h_α és la funció tal que $s_\alpha(x) = s'_\alpha(x) \cdot h_\alpha(x)$. A aquesta relació se l'anomena la* ***condició de cobora****.*

Demostració.

$$s'_\alpha(x) \cdot h_\alpha(x) = s_\alpha = s_\beta g_{\beta\alpha} = s'_\beta h_\beta g_{\beta\alpha} = s'_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta g_{\beta\alpha}.$$

□

2.3 Connexions

Explicats els fibrats principals podem estudiar ara el concepte de *connexió*.

Definició 2.12. *Per a (P, π, B) G-fibrat principal, definim una* ***connexió*** *com una 1-forma $\omega \in \Omega(P, \mathfrak{g})$ a valors en l'àlgebra del grup (secció global de $T^*P \otimes \mathfrak{g}$) que compleix*

(i) el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pP & \xrightarrow{\omega_p} & \mathfrak{g} \\ \downarrow{\scriptstyle dR_g} & & \downarrow{\scriptstyle Ad_{g^{-1}}} \\ T_{p\cdot g}P & \xrightarrow{\omega_{p\cdot g}} & \mathfrak{g} \end{array}$$

commuta, és a dir $\omega \circ dR_g = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$.

(ii) Per a $\overline{X}$ camp vectorial fonamental (definit a 1.5) d'un camp $X \in \mathfrak{g}$ tenim que $\omega(\overline{X}(p)) = X$, i.e. $\omega_p(\overline{X}_p) = X$ $\forall p \in P$.

Tenim doncs que per $p \in P$ una connexió en el punt p és una aplicació lineal $\omega_p : T_pP \to \mathfrak{g}$.

Una connexiò però, es pot veure també com una *distribució* a l'espai total del fibrat principal. Donarem aquí aquesta definició alternativa i veurem la correspondència entre les dues possibles definicions.

Sigui (P, π, B) un G-fibrat principal i P_b una fibra.

Definició 2.13. *Diem que $P' \subset P$ és un subfibrat (principal) de P si $(P', \pi|_{P'}, B)$ és un fibrat (principal).*

Definició 2.14. *Sigui P una varietat diferenciable, una **distribució** és un subfibrat vectorial de l'anomenat fibrat tangent $TP := \bigcup_{p \in P} T_pP$.*

Definició 2.15. *A l'espai tangent T_pP_b l'anomenem **espai vertical tangent** de l'espai P al punt p i el denotem per V_p.*

Definició 2.16. *Definim com **espai horitzontal tangent** H_p a un espai complementari de V_p tal que $T_pP = V_p \oplus H_p$.*

A l'estar definit com a espai complementari de l'espai vectorial notem que, donat un espai vertical, l'elecció de l'espai horitzontal no és única.

Definició 2.17. *Considerem la distribució formada pel conjunts d'espais horitzontals tangents. Diem que aquesta distribució és una **connexió** o **connexió de Ehresmann** si és diferenciable i tenim que*

$$d_p(R_g)(H_p) = H_{pg}$$

per a tot $p \in P$, $g \in G$.

Com a exemple ràpid és fàcil veure que per al cas del fibrat principal trivial els espai horitzontals són isomorfs a T_bB (i els verticals a T_gG).

Per acabar donarem la relació entre les dues definicions.

Teorema 2.1. *Hi ha una bijecció entre les connexions definides com a distribucions d'un G-fibrat principal (P, π, B) i les connexions definides com a 1-formes.*

Demostració. Sigui H una distribució (connexió) de P, aleshores definim una connexió 1-forma per $\omega_p(\overline{X}_p + Y_p) = X$ per a $X \in \mathfrak{g}$ i $Y_p \in H_p$ on $p \in P$ i hem utilitzat la descomposició en suma d'elements de l'espai vertical i horitzontal.

Comprovem que efectivament compleix les condicions d'una connexió 1-forma. En concret podem veure fàcilment que $\omega(\overline{X}) = X$. I a més a més tenim que $(\omega \circ dR_g)_p(\overline{X}_p + Y_p) = \omega(dR_g(\overline{X}_p) + dR_g(Y_p))) = \omega(dR_g(\overline{X}_p))$ ja que si Y_p és horitzontal, per la definició de connexió, tenim que dR_gY_p també és horitzontal. Si $\overline{X}$ és un camp fonamental aleshores $dR_g(\overline{X}) = \overline{Z}$ per $Z = Ad_{g^{-1}}X \in \mathfrak{g}$.

Així doncs

$$(\omega \circ dR_g)_p(\overline{X}_p + Y_p) = \omega(dR_g(\overline{X}_p)) = Ad_g^{-1}(X) = Ad_g^{-1} \circ \omega(\overline{X}_p + Y_p).$$

Per altra banda, donada una connexió 1-forma ω, tenim que $ker(\omega_p) = H_p$ defineix una connexió de Ehresmann.

Primer de tot escrivim la connexió en funció d'una base de l'àlgebra de Lie; $\omega = \sum_i \omega_i T_i$ on $\{T_i\}$ és base de $\mathfrak{g}$ i $\omega_i \in \Omega(P; \mathbb{R})$. Com que $\omega(\overline{X}) = X$ per a tot $X \in \mathfrak{g}$

tenim que $\omega_i(\overline{T}_j) = \delta_{ij}$, *i.e.* les 1-formes ω_i són linealment independents. Així doncs, si considerem els camps vectorials duals de ω_i, trobem que són linealment independents i generen un subfibrat vectorial de TP el qual és espai complementari de H a TP. Per tant H també és subfibrat.

Veiem ara que la distribució és horitzontal, *i.e.* espai complementari de V_p espai vertical tangent. Considerem $Y \in H_p \cap V_p = ker(\omega_p) \cap V_p$. Per ser de V_p tenim que $Y = \overline{X}$ és camp fonamental per a un $X \in \mathfrak{g}$. Però com que $Y \in ker(\omega_p)$ també tenim que $\omega_p(Y) = X = 0$. Tenim doncs que $Y = 0$ i per tant $H_p \cap V_p = \{0\}$. Finalment $\dim ker(\omega_p) = \dim T_pP - \dim \mathfrak{g} = \dim T_pP - \dim V_p \Rightarrow T_pP = V_p \oplus H_p$.

Per acabar comprovem que es compleix la condició de la definició de connexió de Ehresmann. Per $Y \in H_p$, $\omega(d_pR_g(Y)) = (\omega \circ d_pR_g)(Y) = Ad_{g^{-1}} \circ \omega(Y) = 0$ per ser $Y \in H_p$. Així doncs $d_pR_g(Y) \in H_p$ i acabem la demostració. □

2.3.1 Descripció local de les connexions

Per acabar ens centrarem altre cop en les seccions i connexions locals. Sigui (P, π, B) un G-fibrat principal amb connexió $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ i $s : U \to P$ una secció, denotem per $s^*\omega \in \Omega(U, \mathfrak{g})$ a la composició $\omega \circ ds$.

Triem un recobriment d'obert de l'espai base B i seccions per a cada un dels oberts $s_\alpha : U_\alpha \to P$. Considerem les funcions de transició $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ tal que $s_\alpha = s_\beta g_{\alpha\beta}$ i les connexions locals $\omega_\alpha := s_\alpha^*\omega = \omega(ds_\alpha)$, aleshores utilitzant les funcions de transició podem trobar

$$s_\beta = s_\alpha g_{\alpha\beta} = s_\alpha g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} g_{\alpha\beta}.$$

Diferenciant l'equació en $u = u_0$ trobem una relació que ens serà útil més tard

$$ds_\beta|_{u_0} = dR_{g_{\alpha\beta}(u_0)} \circ ds_\alpha|_{u_0} + dL_{s_\alpha(u_0)g_{\alpha\beta}(u_0)} \circ d\left(g_{\alpha\beta}^{-1}(u_0)g_{\alpha\beta}\right)|_{u_0}.$$

La connexió local $\omega|_{u_0}$ la podem escriure com $\omega_\beta|_{u_0} = \omega(ds_\beta)|_{u_0})$ i utilitzant la relació abans trobada i la definició de connexió 1-forma obtenim

$$\begin{aligned} \omega_\beta|_{u_0} &= \\ \omega(ds_\beta|_{u_0}) = \omega \circ dR_{g_{\alpha\beta}(u_0)} \circ ds_\alpha|_{u_0} + \omega \circ dL_{s_\alpha(u_0)g_{\alpha\beta}(u_0)} \circ d(g_{\alpha\beta}^{-1}(u_0)g_{\alpha\beta})|_{u_0} &= \\ Ad_{g_{\alpha\beta}^{-1}(u_0)} \circ \omega_\alpha|_{u_0} + d(g_{\alpha\beta}^{-1}(u_0)g_{\alpha\beta})|_{u_0}&. \end{aligned}$$

És a dir, hem trobat com es transformen les connexions locals en funció de les funcions de transició per a les seccions locals. En particular, si el grup de Lie és un grup de matrius, tenim que $\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$. Si a més el grup és abelià obtenim que localment les connexions es transformen com $\omega_\beta = \omega_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$.

2.4 Curvatura

Un cop definides les connexions podem passar a estudiar la curvatura d'un fibrat principal. Per fer-ho recuperem el concepte d'espai horitzontal H_p i considerem l'aplicació projecció $\pi_H : T_pP \to H_p$ per a P espai total d'un G-fibrat principal. Aleshores,

Definició 2.18. *Sigui (P, π, B) un G-fibrat principal amb 1-forma ω. Definim la **curvatura de** ω com la 2-forma $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ donada per*

$$\Omega(X, Y) = d\omega(\pi_H(X), \pi_H(Y)).$$

Lema 2.1. *Sigui $\overline{X}$ un camp fonamental i Y un camp horitzontal, aleshores $[X, Y]$ és horitzontal.*

Demostració. Si $\overline{X}$ és camp fonamental aleshores sabem que $X \in \mathfrak{g}$ i que el flux de $\overline{X}$ ve donat per $R_{\exp(tX)}$. Calculem

$$\begin{aligned} \omega([\overline{X}, Y]) = \\ \omega(\mathcal{L}_{\overline{X}}(Y)) = \mathcal{L}_{\overline{X}}(\omega(Y)) - (\mathcal{L}_{\overline{X}}\omega)(Y) = \\ -\frac{d}{dt}|_{t=0}\omega \circ dR_{\exp(tX)}(Y) = -\frac{d}{dt}|_{t=0}Ad^{-1}_{\exp(tX)} \circ \omega(Y) = 0. \end{aligned}$$

On hem utilitzat que el bràquet de Lie per a camps vectorials és la derivada de Lie i que, per a camps horitzontals, $\omega(Y) = 0$. ☐

Proposició 2.7. *La curvatura compleix l'anomenada **equació d'estructura**, $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.*

Demostració. Avaluem l'equació per a dos camps $X, Y \in T_pP$.

Si els dos camps són horitzontals (*i.e.* $\pi_H(X) = X$) aleshores sabem que

$[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)] = 0$ i per tant $\Omega(X, Y) = d\omega(\pi_H(X), \pi_H(Y)) = d\omega(X, Y)$.

Si els dos camps són camps fonamentals, $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{g}$ aleshores la curvatura és 0, $\Omega(\bar{X}, \bar{Y}) = d\omega(\pi_H(\bar{X}), \pi_H(\bar{Y})) = 0$, i només hem de comprovar si $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$. Veiem-ho, si denotem per X, Y els camps per als que $\bar{X}, \bar{Y}$ són els seus camps fonamentals aleshores

$$\begin{aligned} d\omega(\bar{X}, \bar{Y}) = \partial_{\bar{X}}(\omega(\bar{Y})) - \partial_{\bar{Y}}(\omega(\bar{X})) - \omega([\bar{X}, \bar{Y}]) = \\ \partial_{\bar{X}}(Y) - \partial_{\bar{Y}}(X) - [X, Y] = -[X, Y] = -\frac{1}{2}[\omega, \omega](\bar{X}, \bar{Y}) \end{aligned}$$

on hem utilitzat que els camps fonamentals són constants i que $[\omega, \omega](\bar{X}, \bar{X}) = 2[\omega(\bar{X}), \omega(\bar{X})] = 2[X, Y]$

D'altra banda, si $\bar{X}$ és fonamental i Y horitzontal, aleshores

$[\omega,\omega](\bar{X},Y) = 2[\omega(\bar{X}),\omega(Y)] = 0$ ja que $\omega(Y) = 0$ i $d\omega(\bar{X},Y) = \partial_{\bar{X}}(\omega(Y)) - \partial_Y(\omega(\bar{X})) - \omega([\bar{X},Y]) = 0$,

ja que cada terme per separat és zero; el primer perquè la connexió d'un camp horitzontal és 0; els segon perquè la connexió d'un camp fonamental és el camp "base"de l'àlgebra de Lie (per definició de connexió) i per tant la derivada direccional en Y és 0; i el tercer terme és 0 ja que $[\bar{X},Y]$, pel lema 2.1 és horitzontal.

Finalment $\Omega(\bar{X},Y) = d\omega(\pi_H(\bar{X}),\pi_H(Y)) = 0$ ja que la projecció sobre l'espai horitzontal d'un camp fonamental és 0 (recordem que els camps fonamentals són de l'espai vertical). □

Proposició 2.8. *Sigui Ω la curvatura de la connexió ω per a un G-fibrat principal (P,π,B) amb H espai horitzontal, aleshores es compleix l'anomenada* ***identitat de Bianchi****: $d\Omega = 0$ a $H\times H\times H$.*

Demostració. Per a Ω qualsevol tenim que $d\Omega = dd\omega + \frac{1}{2}d[\omega,\omega] = \frac{1}{2}d[\omega,\omega]$, així doncs només hem de comprovar que $d[\omega,\omega](X,Y,Z) = 0$ per a $X,Y,Z\in H$ camps horitzontals de P. Calculem

$$\begin{aligned} d[\omega,\omega](X,Y,Z) = \\ \partial_X[\omega,\omega](Y,Z) - \partial_Y[\omega,\omega](X,Z) + \partial_Z[\omega,\omega](X,Y) - \\ [\omega,\omega]([X,Y],Z) + [\omega,\omega]([X,Z],Y) - [\omega,\omega]([Y,Z],X) \end{aligned}$$

En el càlcul de la demostració de 2.7 hem trobat que, per a camps horitzontals, $[\omega,\omega](X,Y) = 0$ i a més a més també sabem que $[X,Y]$ és horitzontal si X,Y són horitzontals; si ho apliquem a la igualtat anterior obtenim que cada terme de l'expressió és 0 i per tant que $d\Omega(X,Y,Z) = d[\omega,\omega](X,Y,Z) = 0$. □

2.4.1 Descripció local de la curvatura

Ens resta explicar el comportament local de la curvatura. Recordem que per a les connexions hem definit la connexió local com $\omega_\alpha = \omega\circ ds \in \Omega(U_\alpha;\mathfrak{g})$ per $U_\alpha\in B$ obert de l'espai base. Procedint de manera similar definim $\Omega_\alpha := s_\alpha^*\Omega = \Omega\circ(ds_\alpha, ds_\alpha)$.

Observem que per al cas de les connexions locals, tenim que es compleix l'equació d'estructura local $\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha,\omega_\alpha]$.

Per a seccions locals s_i, s_j amb $U_i\cap U_j \neq$ recordem que definíem les funcions de transició per $s_i = s_j g_{ij}$. Aleshores, per a les curvatures associades trobem que es transformen de la manera següent,

Teorema 2.2. *Siguin Ω_i i Ω_j curvatures associades a seccions locals s_i, s_j, i.e. $\Omega_i = \Omega\circ(ds_i, ds_i)$. Aleshores $\Omega_i = Ad_{g_{ij}^{-1}}\circ\Omega_j$ a $U_i\cap U_j$.*

Demostració. Per a vectors verticals ja sabem que la curvatura és 0. Així doncs, considerant només $X, Y \in T_b B$ i recuperant el càlcul fet per a $ds_\alpha|_U$ trobem que,

$$\Omega_i(X,Y) = \Omega(ds_i, ds_i) = \Omega(dR_{g_{ji}} \circ ds_j(X), dR_{g_{ji}} \circ ds_j(Y)) = (\Omega dR_{g_{ij}})(ds_j(X), ds_j(Y)) = Ad_{g_{ij}^{-1}} \circ \Omega_j(X,Y)$$

□

Corol·lari 2.1. *Si G és un grup de matrius aleshores $\Omega_i = g_{ij}^{-1}\Omega_j g_{ij}$.*

Corol·lari 2.2. *Si G és abelià aleshores la curvatura local Ω_α és independent de la secció local i per tant defineix una curvatura global que denotarem per $\overline{\Omega} \in \Omega^2(B;\mathfrak{g})$.*

2.4.2 Espai horitzontal

Fins ara hem vist que les connexions i curvatura d'un fibrat principal les podem tractar com a k-formes de l'espai total P amb valors a l'àlgebra de Lie. Ens interessa comprovar ara com les podem identificar amb k-formes a l'espai base B amb valors a l'anomenat *fibrat vectorial adjunt $Ad(P) = P \times \mathfrak{g}/G$.*

Definició 2.19. *Definim per $\Omega^k_{hor}(P,\mathfrak{g})^{Ad}$ l'espai de les k-formes horitzontals (i.e. $\omega(X_1, \cdots, X_k) = 0$ si $X_i \in T_pP$ és vertical per a algun i) que compleixen $\omega \circ dR_g = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$ per a tot $g \in G$.*

Proposició 2.9. *Si ω, ω' són dues connexions 1-formes de P aleshores $\omega - \omega' \in \Omega^1_{hor}(P,\mathfrak{g})^{Ad}$.*

Demostració. aplicant la definició de connexió 1-forma es troba directament el resultat esmentat. □

Es fàcil observar que, si $\omega' \in \Omega^1_{hor}(P,\mathfrak{g})^{Ad}$, aleshores $\omega + \omega'$ és connexió 1-forma de P.

Corol·lari 2.3. *Si Ω és la curvatura associada a una connexió 1-forma ω aleshores $\Omega \in \Omega^2_{hor}(P,\mathfrak{g})^{Ad}$.*

Per acabar donem el resultat que buscàvem.

Teorema 2.3. *L'espai $\Omega^k_{hor}(P;\mathfrak{g})^{Ad}$ és isomorf a l'espai $\Omega^k(B; Ad(P))$.*

Demostració. La demostració la podem trobar a [2] □

Corol·lari 2.4.

(i) La diferència entre dues connexions 1-forma de P s'identifica amb un element de $\Omega^1(B; Ad(P))$. A més a més l'espai de connexions a P forma un espai afí amb espai vectorial associat $\Omega^1(B; Ad(P))$.

(ii) La curvatura Ω d'una connexió ω s'identifica amb un element de $\Omega^2(B; Ad(P))$.

Si repetim ara els passos realitzats en l'apartat 2.3.1 de les connexions obtenim una relació per a les curvatures locals $\Omega_\beta = Ad_{g_{\alpha\beta}^{-1}(u_0)} \circ \Omega_\alpha$. Així doncs, per a grups abelians, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta$ i hi tenim una curvatura 2-forma $\overline{\Omega} \in \Omega^2(B; \mathfrak{g})$ definida globalment tal que $\overline{\Omega}|_{U_\alpha} = \Omega_\alpha$. Remarquem que aquest resultat és la cas particular del punt (ii) del corol·lari anterior. Per al cas abelià el fibrat vectorial $Ad(P)$ és trivial i la curvatura pren valors a $\mathfrak{g}$.

2.5 Transport paral·lel

Teorema 2.4. *Sigui (P, π, B) un G-fibrat principal amb connexió ω. Per a tota corba $c : I \to B$ C^∞ i per a tot punt p_0 de la fibra de $P_c(t_0)$ $(t_0 \in I)$ existeix una única corba $\tilde{c} : I \to P$ C^∞ tal que*

(i) $c = \pi \circ \tilde{c}$.

(ii) $\forall t \in I$, la corba $\tilde{c}$ és horitzontal $\dot{\tilde{c}}(t) \in H_{\tilde{c}(t)}$.

(iii) $\tilde{c}(t_0) = p$ com a condició inicial.

*A la corba $\tilde{c}$ l'anomenem l'**aixecament horitzontal** de c. (Aquí $\dot{\tilde{c}}(t) := \frac{d}{dt}\tilde{c}(t)$).*

Demostració. Considerem una corba $c : I \to U_\alpha$ i la secció local per a U_α, s_α. Veiem que per a que una corba $\tilde{c}$ compleixi amb la primera condició cal que sigui de la forma $\tilde{c}(t) = s_\alpha(c(t)) \cdot h_\alpha(t)$

L'aplicació $h_\alpha(t)$ queda únicament determinada per la condició (iii) Per a que $\tilde{c}$ existeixi tal que compleixi també la segona condició només ens resta comprovar si $\dot{\tilde{c}}$ és horitzontal, *i.e.* $\omega(\dot{\tilde{c}}) = 0$; per fer-ho utilitzarem algunes de les igualtats que hem obtingut en l'estudi de les connexions locals. Veiem-ho,

$$\omega(\dot{\tilde{c}}) = \omega\left(\frac{d}{dl}|_{l=t} s_\alpha(c(l) \cdot h_\alpha(l))\right) =$$

$$\omega\left[dL_{s_\alpha(c(l)\cdot h_\alpha(l))}\left(\frac{d}{dl}|_{l=t} h_\alpha(t)^{-1} h_\alpha(l)\right) + dR_{h_\alpha(t)}\left(\frac{d}{dl}|_{l=t} s_\alpha(c(l))\right)\right]$$

El terme del parèntesis del primer sumand és un camp fonamental per tant, per la definició de connexió, és igual a $\frac{d}{dl}|_{l=t} h_\alpha(t)^{-1} h_\alpha(l)$. utilitzant l'altra condició de la definició de la connexió obtenim que el segon terme és igual a $Ad_{h_\alpha(t)^{-1}} \circ \omega(\dot{s}_\alpha(t))$. Trobem doncs que

$$\omega(\dot{\tilde{c}}) = dL_{h_\alpha(t)^{-1}}(\dot{h}_\alpha(t)) + dL_{h_\alpha(t)^{-1}} \circ dR_{h_\alpha(t)}(\omega(\dot{s}_\alpha(t))$$

on hem expressat el terme de la derivada de $h_\alpha(t)^{-1}h_\alpha(l)$ en termes de la diferencial de L i hem considerat l'aplicació adjunta en funció de dL i dR. La condició (iii) ens requeria que l'expressió trobada fos 0, així doncs la corba $\tilde{c}$ amb les condicions de l'enunciat existeix i és única sii l'equació

$$\dot{h}_\alpha(t) = -dR_{h_\alpha(t)}(\omega(\dot{s}_\alpha(t))$$

té solució (per a $h_\alpha(t)$) i és única. Notem que per arribar a aquesta equació només hem igualat l'expressió anterior a 0 i l'hem multiplicat per $dL^{-1}_{h_\alpha(t)}$ a banda i banda.

L'existència de solució única per a l'equació diferencial aquí descrita no és un resultat directe, a no ser que el grup d'estructura G sigui un grup de matrius. En aquest cas l'equació és redueix a una equació diferencial lineal $\dot{h} = -\omega(\dot{s}_\alpha)\cdot h_\alpha$ la qual té solució i és única. □

Definició 2.20. *Donada una corba $c : [t_0, t_1] \to B$ i $\tilde{c}$ el seu aixecament horitzontal amb condició inicial $\tilde{c}(t_0) = p$, definim el **transport paral·lel** com l'aplicació $\Gamma(c) : P_{c(t_0)} \to P_{c(t_1)}$ on $\Gamma(c)(p) := \tilde{c}(t_1)$.*

Cada punt de $P_{c(t_0)}$ ens defineix una condició inicial per a $\tilde{c}$ així doncs, el que fa l'aplicació transport paral·lel és per a cada condició inicial transporta el punt de $P_{c(t_0)}$ al llarg de la corba $\tilde{c}$.

Per al cas on el grup de Lie és un grup de matrius $M \subset GL(\mathbb{K})$ ja hem vist que l'existència de l'aixecament horitzontal està determinat per una equació diferencial lineal del tipus $\dot{v}(t) = -A(t)v(t)$ amb condició inicial $v(0) = v_0$.

Teorema 2.5. *Sigui $A : I \to Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una corba contínua per a $I = [0, L]$ interval fixat. Aleshores la solució a l'equació diferencial $\dot{v}(t) = -A(t)v(t)$, $v(0) = v_0$ és $v(t) = P\exp\left(-\int_0^t A(\tau)d\tau\right)\cdot v_0$,*

*on $P\exp\left(-\int_0^t A(\tau)d\tau\right)$ es defineix com la **path-ordered exponential** de A:*

$$P\exp\left(-\int_0^t A(\tau)d\tau\right) :=$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\int_0^t d\tau_j\int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1}\cdots\int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_j)\cdot A(\tau_{j-1})\cdot\cdots\cdot A(\tau_1) =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left(Id_n - \frac{t}{N}A\left(\frac{N-1}{N}t\right)\right)\cdots\left(Id_n - \frac{t}{N}A\left(\frac{1}{N}t\right)\right)\cdot\left(Id_n - \frac{t}{N}A(0)\right)$$

Demostració. Sigui $v(t) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\int_0^t d\tau\int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1}\cdots\int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_j)\cdot A(\tau_{j-1})\cdot\cdots\cdot A(\tau_1)$. Primer comprovarem que és solució de l'equació diferencial, és a dir que $\dot{v}(t) = -A(t)v(t)$. Per veure-ho primer hem de comprovar que la serie és diferenciable.

Per inducció trobem que $\int_0^t d\tau_1 = \frac{t^1}{1!}$:

suposem cert per $j-1$ i calculem

$$\int_0^t d\tau_j \int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 = \int_0^t d\tau_j \left(\frac{\tau_j^{j-1}}{(j-1)!} \right) = \frac{1}{j} \left(\frac{t^j}{(j-1)!} \right) = \frac{t^j}{j!}$$

Amb la norma $|\cdot|$ de l'espai de matrius veiem que

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t d\tau_j \int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_j) \cdot A(\tau_{j-1}) \cdot \dots \cdot A(\tau_1) \right| \leq \\ &\left| \int_0^t d\tau_j \int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 |A(\tau_j) \cdot A(\tau_{j-1}) \cdot \dots \cdot A(\tau_1) \right| \leq \\ &\frac{t^j}{j!} |A|^j_{C^0(I)} \end{aligned}$$

i per tant el mòdul de l'aplicació contínua $h(t) := \int \cdots \int (A \cdots A)$ és

$$|h(t)| \leq \frac{L^j}{j!} |A|^j_{C^0(I)}.$$

On la norma $|A|^j_{C^0(I)} := \sup_{t \in I}(A(t))$ és l'habitual. La sèrie inicial doncs convergeix absolutament en l'espai de les aplicacions contínues de $I \to M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Comprovem ara que també ho és en l'espai d'aplicacions contínuament diferenciables.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{dt} \int_0^t d\tau_j \int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_j) \cdot A(\tau_{j-1}) \cdot \dots \cdot A(\tau_1) \right| \leq \\ &\left| \int_0^t d\tau_{j-1} \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_{j-2} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 |A(\tau_j) \cdot A(\tau_{j-1}) \cdot \dots \cdot A(\tau_1) \right| \leq \\ &\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} |A|^j_{C^0(I)}. \end{aligned}$$

Per tant $\left| \frac{d}{dt} h(t) \right| \leq \frac{L^{j-1}}{(j-1)!} |A|^j_{C^0(I)}$.

A $C^1(I)$ es defineix la norma com $|\cdot|^j_{C^0(I)} := sup(|f|) + sup(|f'|)$ per tant hem trobat que

$$|h(t)|_{C^1(I)} \leq \frac{L^j}{j!} |A|^j_{C^0(I)} + \frac{L^{j-1}}{(j-1)!} |A|^j_{C^0(I)} = \left(\frac{L^j}{+} \frac{L^{j-1}}{(j-1)!} \right) |A|^j_{C^0(I)}$$

i per tant la serie inicial convergeix absolutament en l'espai $C^1(I)$ i defineix una funció C^1 la qual la podem diferenciar, calculem doncs

$$\frac{d}{dt}v(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{d}{dt}\int_0^t d\tau_j \int_0^{\tau_j} d\tau_{j-1}\cdots\int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_j)\cdot A(\tau_{j-1})\cdot\cdots\cdot A(\tau_1)v_0 =$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j A(t)\int_0^t d\tau_{j-1}\int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_{j-2}\cdots\int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_{j-1})\cdot\cdots\cdot A(\tau_1)v_0 =$$
$$-A(t)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\int_0^t d\tau_{j-1}\int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_{j-2}\cdots\int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\tau_{j-1})\cdot\cdots\cdot A(\tau_1)v_0 =$$
$$-A(t)\cdot v(t).$$

Ens queda per veure la segona igualtat de la definició de la path-ordered exponential entre el sumatori i el límit.

De $\frac{v(s+\epsilon)-v(s)}{\epsilon} = \dot{v}(s) + \mathcal{O}(\epsilon)$ trobem que $v(s+\epsilon) = v(s) + \epsilon\dot{v}(s) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = v(s) - \epsilon(A(s)v(s)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = (\mathbb{I}d - \epsilon(A(s))v(s) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Si escrivim $s = t\frac{k}{N}$ i $\epsilon = \frac{t}{N}$ aleshores

$$v\left(\frac{k+1}{N}t\right) = \left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A(t\frac{k}{N})\right)v(t\frac{k}{N}) + \mathcal{O}(\frac{t^2}{N^2})$$

Hem trobat que $v(k+1)$ depèn de $v(k)$ així doncs si triem i substituïm per $k = N-1$

$$v(t) = \left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A(t\frac{N-1}{N})\right)v(t\frac{N-1}{N}) + \mathcal{O}(\frac{t^2}{N^2})$$

substituint ara $v(t\frac{N-1}{N})$ i repetint el procés trobem finalment que

$$v(t) =$$
$$\left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A\left(t\frac{N-1}{N}\right)\right)\left(\left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A\left(t\frac{N-2}{N}\right)\right)v\left(t\frac{N-2}{N}\right) + \mathcal{O}(\frac{t^2}{N^2})\right) +$$
$$\mathcal{O}(\frac{t^2}{N^2}) =$$
$$\left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A\left(t\frac{N-1}{N}\right)\right)\left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A\left(t\frac{N-2}{N}\right)\right)v\left(t\frac{N-2}{N}\right) + 2\mathcal{O}(\frac{t^2}{N^2}) + \cdots =$$
$$\left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A\left(t\frac{N-1}{N}\right)\right)\cdots\left(\mathbb{I}d - \frac{t}{N}A(0)\right)v(0) + N\mathcal{O}(\frac{t^2}{N^2})$$

□

2.6 Transformacions de Gauge

Definició 2.21. *Sigui (P,π,B) un G-fibrat principal. Un **automorfisme** de P és un difeomorfisme $f : P \to P$ tal que $\forall g \in G, \forall p \in P \mid f(p\cdot g) = f(p)\cdot g$.*

Al conjunt dels automorfisme de P l'anotem com a $Aut(P)$.

Com que G actua transitivament sobre les fibres P, si tenim $p, p' \in P$ amb $\pi(p) = \pi(p')$, aleshores existeix $g \in G$ tal que $p = p' \cdot g$. Si apliquem $f \in Aut(P)$ trobem que $f(p) = f(p' \cdot g) = f(p') \cdot g$, és a dir, $f(p)$ i $f(p')$ pertanyen a una mateixa fibra. Això ens indica que existeix una única funció $\bar{f} : B \to B$ tal que $\pi(f) = \bar{f}(\pi)$.

Definició 2.22. *Sigui f un automorfisme de P, si $\bar{f} = id_B$ diem que f és una* ***transformació gauge****.*

Al conjunt de les transformacions de gauge de P el denotem per $\mathcal{G}(P)$.

Teorema 2.6. *Sigui $\mathcal{G}(P)$ el conjunt de les transformacions de gauge per a (P, π, B) G-fibrat principal i $P \times G/\sim$ el fibrat associat on $\sim$ representa la relació $[p, g] \sim [p \cdot h, h^{-1} \cdot g \cdot h]$, aleshores existeix un isomorfisme $\mathcal{G}(P) \cong \{seccions\ C^\infty\ de\ P \times G/\sim\}$.*

Demostració. Sigui $s(b) = [p(b), g(b)]$ una secció de $P \times G/\sim$ aleshores tenim $f \in \mathcal{G}(P)$ definida per $f(p(b)) = p(b)g(b)$. Veiem-ho; l'aplicació està unívocament determinada per la secció ja que, si considerem $p' = p(b)h$ amb $h \in G$, aleshores $f(p') = f(p(b))h = p'h^{-1}g(b)h$ i a més f és transformació gauge.

Alternativament, si f és una transformació gauge tenim que, per a tot $p \in P$ existeix un únic $g(p) \in G$ tal que $f(p) = pg(p)$. Si calculem ara $f(p')$ per $p' = ph$ trobem que $f(p') = p'g(p') = phg(p')$ i $f(p') = f(ph) = pg(p)h$ per tant $g(p') = h^{-1}g(p)h$.

Donada f una transformació gauge tenim doncs una secció $\pi(p) = [p, g(p)]$ ben definida a $P \times G/\sim$ i per tant tenim un isomorfisme entre $\mathcal{G}(P)$ i {seccions C^∞ de $P \times G/\sim$}. $\square$

Capítol 3

Aplicacions a la física

Podem calcular finalment les equacions de l'electrodinàmica a partir d'un $U(1)$-fibrat principal. Abans però, definirem l'anomenat operador *estrella de Hodge*.

3.1 Operador Estrella de Hodge

La idea de l'operador estrella de Hodge sorgeix de l'intent de buscar un isomorfisme entre $\Lambda^k V$ i $\Lambda^{n-k} V$. Sigui V un $\mathbb{R}$-espai vectorial orientat dotat amb un producte escalar $<,>$. Podem definir un producte escalar a l'espai $\Lambda^k V$; si $\omega, \eta \in \Lambda^k V$

$$< v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k >= det(< v_i, w_j >)_{ij}$$

Definició 3.1. *Sigui $e_1, ..., e_n$ base ortonormal positiva de V espai vectorial orientat. Definim com a* ***forma de volum*** *a $vol := e_1 \wedge ... \wedge e_n \in \Lambda^n V$.*

Definició 3.2. *Definim com a* ***operador estrella de Hodge*** *o* ***dual de Hodge*** *a la única aplicació $* : \Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V$ associada a un producte escalar tal que $\omega \wedge \eta =< *\omega, \eta > \cdot vol$.*

Proposició 3.1. *L'aplicació estrella de Hodge $*$ existeix i és única.*

Demostració. Per a $\omega \in \Lambda^k V$ considerem l'aplicació $\eta \mapsto \omega \wedge \eta$ que envia formes de $\Lambda^{n-k} V$ a formes de $\Lambda^n V$. La n-forma $\omega \wedge \eta$ la podem escriure en funció de vol al ser base de $\Lambda^n V$ de tal manera que $\omega \wedge \eta = c(\eta) vol$. Si considerem $c(\eta)$ com a aplicació $c : \Lambda^{n-k} V \to \mathbb{R}$ aleshores, per a espais E de dimensió finita, sabem que per a $\alpha \in E^*$ existeix un únic $v \in E$ tal que $c(\cdot) =< v, \cdot >$. En definitiva, si considerem $E = \Lambda^{n-k} V$ tenim $\omega \wedge \eta = c(\eta) vol =< *\omega, \eta > vol$.

□

El dual de Hodge ens serà útil més tard a l'hora de calcular les equacions de l'electrodinàmica, es per això que donarem algunes propietats per agilitzar els càlculs relacionats amb ell.

Proposició 3.2.

(i) $* * \omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$.

(ii) Per a $\omega, \eta \in \Lambda^k V$, $< *\omega, *\eta >= (-1)^p < \omega, \eta >$.

(iii) Per a $\omega, \eta \in \Lambda^k V$, $\omega \wedge *\eta = \eta \wedge *\omega = (-1)^p < \omega, \eta > vol$.

Demostració.

(i) Per a $\omega \in \Lambda^k V$ tenim que $\omega \wedge *\omega =< *\omega, *\omega > vol = vol$, alternativament $*\omega \wedge * * \omega = vol$. Finalment, permutant el producte exterior, $\omega \wedge *\omega = (-1)^{k(n-k)} * *\omega \wedge *\omega$ d'on n'obtenim el resultat buscat.

(ii) Aplicant (i) i la definició de l'estrella de Hodge trobem $< *\omega, *\eta > vol = \omega \wedge *\eta = (-1)^{k(n-k)} * \eta \wedge \omega = (-1)^{k(n-k)} < * * \eta, \omega > vol = (-1)^p < \eta, \omega > vol$.

(iii) $\omega \wedge *\eta =< *\omega, *\eta > vol =< *\eta, *\omega > vol = \eta \wedge *\omega$; i la segona igualtat de la proposició és conseqüència directa del punt (ii). □

Definició 3.3. *Diem que una forma és* ***autodual*** *si* $*\omega = \omega$. *Direm que és* ***anti-autodual*** *si* $*\omega = -\omega$.

3.2 Les equacions de l'electrodinàmica

Sigui (P, π, M) un $U(1)$-fibrat principal a on M és la varietat diferencial de Lorentz. Considerem $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ una connexió del fibrat i sigui Ω la serva curvatura associada. A partir d'aquesta premissa ens plantegem retrobar les equacions de l'electrodinàmica (o equacions de Maxwell).

La idea de plantejar la teoria amb una estructura de U(1)-fibrat principal és la següent. Al tenir com a grup d'estructura un grup abelià, el bràquet de Lie de la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$ serà zero, per tant, la curvatura associada a una connexió ω serà (aplicant l'equació d'estructura) $\Omega = d\omega$. A més a més, com hem vist abans, per a grups abelians la descripció local de la curvatura $s_\alpha^*\Omega$ no és res més que les restriccions als oberts U_α d'una curvatura definida globalment $\overline{\Omega} \in \Omega^2(M; \mathfrak{u}(1))$. Així doncs, com que $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$ podem posar $\overline{\Omega} = iF$ per a $F \in \Omega^2(M; \mathbb{R})$.

Si triem coordenades (t, x, y, z) per a M aleshores podem escriure la 2-forma F en la forma

$$F = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_z dx \wedge dy + B_y dz \wedge dx + B_x dy \wedge dz$$

i aleshores

$$dF =$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{dx}+\frac{\partial B_y}{dy}+\frac{\partial B_z}{dz}\right)dx\wedge dy\wedge dz+\left(-\frac{\partial E_y}{dz}+\frac{\partial E_z}{dy}+\frac{\partial B_x}{dt}\right)dt\wedge dy\wedge dz+$$
$$\left(\frac{\partial E_x}{dz}-\frac{\partial E_z}{dx}+\frac{\partial B_y}{dt}\right)dt\wedge dz\wedge dx+\left(-\frac{\partial E_x}{dy}-\frac{\partial E_y}{dx}+\frac{\partial B_z}{dt}\right)dt\wedge dx\wedge dy.$$

Definint $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$ i $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$, el primer terme correspon a al divergència de $\vec{B}$ i la suma dels tres altres termes correspon a la suma $rot(\vec{E})+\frac{\partial\vec{B}}{dt}$. De la identitat de Bianchi, $dF=0$, n'obtenim doncs dues de les equacions de Maxwell

$$div(\vec{B})=0,$$
$$rot(\vec{E})+\frac{\partial\vec{B}}{dt}=0.$$

Notem que aquestes dues primeres equacions s'obtenen de manera natural aplicant la identitat de Bianchi a la curvatura d'una connexió sobre un U(1)-fibrat principal, sense cap suposició més. Pel que fa a les dues equacions restants, les trobarem a través les connexions *crítiques* per a un *Lagrangià* donat.

De la mateixa manera que hem definit la connexió $\overline{\Omega}=iF$ per a $\mathfrak{u}(1)$, considerem ara les connexions locals per a ω_0 connexió fixada, $s^*(\omega-\omega_0)$. En aquest cas la diferencia la podem identificar amb un element de $\Omega^1(M;\mathfrak{u}(1)$ i la podem reescriure com $iA(\omega,\omega_0)\in\Omega^1(M;\mathfrak{u}(1))$ per $A\in\Omega^1(M;\mathbb{R})$ i, a més a més, es compleix $dA=F-F_0$. Fixem a més un 3-forma $J\in\Omega^3(M,\mathbb{R})$. Aleshores definim el **Lagrangià de l'electrodinàmica** com l'aplicació

$$\mathcal{L}:\mathcal{C}(P)\to\Omega^4(M,i\mathbb{R})$$

donada per $\mathcal{L}(\omega)=\frac{1}{2}F\wedge *F+A\wedge J$.

Definició 3.4. *Diem que una connexió ω de P és **crítica** si per a tot obert $U\Subset M$ i per a tota 1-forma $\eta\in\Omega(M;i\mathbb{R})$ tal que $supp(\eta)\subset U$ es té que*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}}\mathcal{L}(\omega_{t,\eta})=0$$

a on $\Subset$ denota que l'obert U té clausura compacta inclosa a M i $\omega_{t,\eta}$ és tal que $A(\omega_{t,\eta},\omega_0)=A(\omega,\omega_0)+t\eta$.

El diferencial de A és $dA=F-F_0$, d'on obtenim que $F(\omega_{t,\eta})-F(\omega)=d(A(\omega_{t,\eta},\omega_0)-A(\omega,\omega_0))=t\cdot d\eta$. Calculem ara la condició de connexió crítica per a la primera part del lagrangià $\mathcal{L}_1:=\frac{1}{2}F\wedge *F$.

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathcal{L}_1(\omega_{t,\eta}) =$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|_{t=0}(F + td\eta) \wedge *(F + td\eta) = \frac{1}{2}(d\eta \wedge *F + F \wedge d\eta) =$$
$$d\eta \wedge *F.$$

I per tant

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}} \mathcal{L}_1(\omega_{t,\eta}) =$$
$$\int_{\overline{U}} d\eta \wedge F = \int_{\overline{U}} d(\eta \wedge *F) + \eta \wedge d(*F)$$

Al tenir $supp(\eta) \subset U$ (*i.e.* η és 0 fora de U) podem integrar el primer terme sobre tot M, i al no tenir bora, podem aplicar el teorema de Stokes per trobar que la primera integral és zero i podem generalitzar la integral restant a

$$\int_M \eta \wedge d(*F).$$

Per la segona part del Lagrangià $\mathcal{L}_2 := A \wedge J$ repetim els mateixos passos per trobar

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}} \mathcal{L}_2(\omega_{t,\eta}) =$$
$$\int_{\overline{U}} (A + t\eta) \wedge J = \int_M \eta \wedge J.$$

Trobem doncs que la condició de connexió crítica equival a que la integral $\int_M \eta \wedge (d * F + J)$ sigui nul·la per a tota $\eta \in \Omega^1(M; \mathbb{R})$, és a dir $d * F + J = 0$.
Finalment, per trobar les equacions de Maxwell en la forma clàssica escrivim el dual de Hodge de F
$*F = -E_x dy \wedge dZ - E_y dz \wedge dx - E_z dx \wedge dy + B_x dx \wedge dt + B_y dy \wedge dt - B_z dz \wedge dt$,
i

$$d(*F) =$$
$$(-div\vec{E})dx \wedge dy \wedge dz + \left(rot\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_x dt \wedge dy \wedge dz +$$
$$\left(rot\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_y dt \wedge dz \wedge dx + \left(rot\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_z dt \wedge dy \wedge dx.$$

Si escrivim J en les coordenades (t, x, y, z) com $J = \rho dx \wedge dy \wedge dz - j_x dt \wedge dy \wedge dz - j_y dt \wedge dz \wedge dx - j_x dt \wedge dx \wedge dy$ aleshores trobem el segon par de les equacions de Maxwell imposant la condició abans trobada $d * F + J = 0 \Rightarrow$

$$div\vec{E} = \rho,$$

$$rot\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}.$$

Així doncs les quatre equacions de Maxwell sorgeixen de manera natural dels U(1)-fibrats principals considerant com a varietat la varietat de Lorentz. Finalment notem també que l'anomenada equació de continuïtat sorgeix ràpidament a partir de la relació $d * F + J = 0$ ja que

$$d(d*F+J) = 0 = dJ = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0.$$

3.3 Yang-Mills

Com hem vist, l'estudi de les connexions crítiques d'un $U(1)$-fibrat principal per al lagrangià de l'electrodinàmica ens estableix les equacions de l'electrodinàmica de Maxwell. Aquest model, com hem fet notar al llarg de la secció, sostenta part dels seus resultats en considerar com grup d'estructura del fibrat un grup abelià. La generalització lògica és doncs preguntar-se a quins resultats es pot arribar si es considera un G-fibrat principal per a G no abelià.

Com en el cas de l'electrodinàmica ens interessarà trobar el punts crítics d'un lagrangià donat. En aquest cas el lagrangià a considerar serà l'anomenat *lagrangià de Yang-Mills*. Com veurem més endavant la definició del lagrangià vindrà donada pel producte escalar entre dues 2-formes de $\Omega^2(B; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ es per això que dedicarem la primera part de la secció a la construcció d'aquest producte escalar.

Fins ara hem definit les connexions a $\Omega^1(P; \mathfrak{g})$ i la seva curvatura associada a $\Omega^2(P; \mathfrak{g})$. A més hem vist que la diferència de connexions la podem identificar amb elements de $\Omega^1(B; Ad(P))$ i la curvatura la podem associar a 2-formes de $\Omega^2(B; Ad(P))$.

El primer que farem serà definir un producte escalar a $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ que sigui *Ad-invariant* d'aquesta manera podrem tenir una mètrica a Ad(P); després, considerant una espai base B amb mètrica, definirem una mètrica a $\Omega^k(B; Ad(P))$. Finalment, amb la mètrica trobada, definirem el Lagrangià de Yang-Mills.

Un cop definit el lagrangià, per trobar les equacions de Yang-Mills (buscant connexions crítiques del lagrangià) necessitarem utilitzar l'anomenada *derivada covariant* i la seva generalització, la *derivada exterior*. Aquests conceptes els definirem també en aquestes primeres seccions.

3.3.1 Mètriques a l'espai de les k-formes

Considerarem a partir d'ara que tenim un $SU(n)$-fibrat principal (P,π,M) amb M varietat Riemaniana i $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ connexió 1-forma principal.

Proposició 3.3. *L'aplicació* $\lambda : \mathfrak{su}(n)\times\mathfrak{su}(n) \to \mathbb{R}$ *definida per* $(A,B) \mapsto -tr(A\cdot B)$ *és un producte escalar a* $\mathfrak{su}(n) \times \mathfrak{su}(n)$.

Demostració. Primer de tot comprovaren que $-tr(A\cdot B) \in \mathbb{R}$. Si calculem el seu conjugat trobem que

$$\begin{aligned} \overline{-tr(A\cdot B)} &= \\ -tr(\overline{A\cdot B}) = -tr(\overline{A}\cdot\overline{B}) = -tr((\overline{A}\cdot\overline{B})^T) &= \\ -tr(\overline{B}^\dagger\cdot\overline{A}^\dagger) = -tr((-B)(-A)) = -tr(BA) = -tr(AB)&. \end{aligned}$$

on recordem que $\mathfrak{su}(n)$ es compon de les matrius complexes amb traça 0 i que compleixen $A^\dagger = -A$.

Si calculem

$$-tr(A\cdot A) = -\sum_{i,j=1}^{n} A^i_j A^j_i = \sum_{i,j=1}^{n} A^i_j \overline{A}^i_j = \sum_{i,j=1}^{n} |A^i_j|^2 \geq 0$$

veiem que està definida positiva. I a més notem fàcilment que l'aplicació λ és bilineal i simètrica. És doncs un producte escalar. $\square$

Proposició 3.4. *El producte escalar* λ *és Ad-invariant, és a dir, per a* $A,B \in \mathfrak{su}(n)$, $\lambda(A,B) = \lambda(Ad(A),Ad(B))$.

Demostració.

$$\begin{aligned} \lambda(Ad_g(A),Ad_g(B)) &= \\ -tr(gAg^{-1}gBg^{-1}) = -tr(gABg^{-1}) = -tr(ABg^{-1}g) &= \\ \lambda(A,B)&. \end{aligned}$$

$\square$

Corol·lari 3.1. *El producte escalar* λ *indueix una mètrica sobre* $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ *definida per* $\lambda([s,A],[s,B]) := \lambda(A,B)$.

Siguin ω, η k-formes de $\Omega^k(M;P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ i sigui $(e_1,...e_n)$ base ortonormal de T_xM respecte a la mètrica de M. Aleshores podem definir

$$<\omega,\eta>_x := \sum_{i_1<...<i_k} <\omega(e_{i_1},...,e_{i_k}),\eta(e_{i_1},...,e_{i_k})>_{E_x}$$

on $<,>_{E_x}$ és la mètrica a les fibres de $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$.

3.3.2 Derivada covariant i derivada exterior

Veurem ara com, donada una connexió ω de P, aquesta indueix una connexió ∇ a $E = P \times_\rho V$. Normalment escriurem com ∇^ω per especificar la dependència de ω. ∇^ω serà doncs una aplicació $\nabla^\omega : \Gamma(E) \to \Omega^1(M; E)$ que envia seccions de E a 1-formes a valors en E. Si fixem ara un camp $X \in \Xi(M)$,

Definició 3.5. *definim la* ***derivada covariant*** *com la composició* $\nabla^\omega_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$*;* $\nabla^\omega_X := X \circ \nabla^\omega$ *considerant* X *com l'aplicació* $X : \Omega(M; E) \to \Gamma(E)$ *que envia 1-formes a seccions de* E*.*

Per trobar la forma explícita de la derivada covariant considerem $e \in \Gamma(E)$ una secció de E i $s_\alpha : U_\alpha \to P$ una secció local de P. Aleshores podem escriure $e|_{U_\alpha}(x) = [s(x), v(x)]$ per a $x \in U_\alpha \subset M$ i $v : U \to V$ funció diferenciable i on $[s, v]$ denota la classe d'equivalència a $E = P \times_\rho V$.

Notem que $ds_x(X_x)$ és element de $T_{s(x)}P$ i per tant podem escriure $\omega(ds_x(X_x)) \in \mathfrak{g}$. A més, per a ρ representació de G, tenim que $d\rho_e : \mathfrak{g} \to End(V)$ envia elements de l'àlgebra a l'espai dels endomorfismes de V, per tant $d\rho_e(\omega(ds_x(X_x)))$ serà endomorfisme de V i el podem aplicar a un element de V, en concret a $v(x) \in V$.

Amb tot, podem descriure explícitament la derivada covariant de la connexió ω per al camp X com

$$(\nabla^\omega_X e)(x) := [s_\alpha(x), dv_x(X_x) + d\rho_e(\omega(ds_{\alpha x}(X_x)))(v(x))].$$

Teorema 3.1. *La derivada covariant definida anteriorment és independent de la secció local* s_α *triada.*

Habitualment la definició de la derivada covariant es realitza a través del concepte de transport paral·lel. Més concretament, un cop tenim el transport paral·lel a un G-fibrat principal, es defineix l'aplicació transport paral·lel al fibrat vectorial associat. Els detalls d'aquesta construcció així com la demostració al teorema anterior es poden trobar a [2].

Proposició 3.5. *Sigui* ∇ *la derivada covariant per a* $E = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$*. Aleshores* ∇ *és connexió compatible amb la mètrica* λ *definida anteriorment.*

Demostració. Siguin $A, B \in \mathfrak{g}$ elements de l'àlgebra i s secció de P,

$$\begin{aligned}\lambda(\nabla([s,A]),[s,B]) + \lambda([s,A],\nabla([s,B])) &= \\ \lambda([s, dA + ad(\omega(ds(X)))(A)],[s,B]) + \lambda([s,A],[s, dB + ad(\omega(ds(Y)))(B)]) &= \\ -tr((dA)B + [\omega(ds(X)),A]B) - tr(A(dB) + A[\omega(ds(Y)),B]) &= \\ d(-tr(AB)) - tr([\omega(ds(X)),AB]) = -d(tr(AB)) = d\lambda([s,A],[s,B]).\end{aligned}$$

□

Un cop donada la derivada covariant podem definir ara la derivada covariant exterior. Si ens fixem en la definició de la derivada covariant $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(M;E)$ notem que la podem considerar com una generalització de l'aplicació diferencial $d : \mathcal{C}^\infty(M) \to \Omega^1(M)$. De manera similar, la derivada covariant exterior, es podrà veure com una generalització de la derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Més concretament,

Definició 3.6. *Donada ∇ derivada covariant, definim la derivada covariant exterior associada a ∇ com l'aplicació $d^\nabla : \Omega^k(M;E) \to \Omega^{k+1}(M;E)$ tal que $\eta \mapsto d^\nabla(\eta)$ amb*

$$d^\nabla(\eta)(X_0,\dots,X_k) :=$$
$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \nabla_{X_i}(\eta(X_0,...,\hat{X}_i,...,X_k)) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\eta([X_i,X_j],X_0,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_k).$$

Si tenim ω connexió 1-forma de P, hem vist a 2.8 que la identitat de Bianchi per a $\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$ ens deia que $d\Omega = 0$. Ens preguntem ara quin serà el comportament per a $\overline{\Omega} \in \Omega^2(M; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$, més concretament ens interessa calcular

$$\begin{aligned}
d^{\nabla^\omega}\overline{\Omega}(X,Y,Z) = \\
\nabla^\omega_X\overline{\Omega}(Y,Z) - \nabla^\omega_Y\overline{\Omega}(X,Z) + \nabla^\omega_Z\overline{\Omega}(X,Y) = \\
\nabla^\omega_X[s,\Omega\circ ds(Y,Z)] - \nabla^\omega_Y[s,\Omega\circ ds(X,Z)] + \nabla^\omega_Z[s,\Omega\circ ds(X,Y)] = \\
[s,d(\Omega\circ ds)(X,Y,Z)] + [s,ad(\omega(ds(X)))(\Omega ds(Y,Z))] - \\
[s,ad(\omega(ds(Y)))(\Omega ds(X,Z))] + [s,ad(\omega(ds(Z)))(\Omega ds(X,Y))] = \\
[s,d\Omega(ds(X),ds(Y),ds(Z))] = 0
\end{aligned}$$

on hem utilitzat $\omega(ds(X)) = 0$ ja que per hipòtesis $X,Y,Z \in T_xM$, s és secció tal que $ds(T_xM) = H_{s(x)}$ i en la última igualtat hem utilitzat la identitat de Bianchi clàssica ja trobada anteriorment.

Amb tot, ja podem definir el *lagrangià de Yang-Mills.*

3.3.3 Lagrangià de Yang-Mills

Definició 3.7. *Sigui (P,π,M) un SU(n)-fibrat principal amb M varietat Riemanniana, definim el* ***lagrangià de Yang-Mills*** *com l'aplicació*

$$\mathcal{L}_{YM} : \mathcal{C}(P) \to \Omega^4(M;\mathbb{R})$$

tal que $\omega \mapsto \lambda(\overline{\Omega}\wedge *\overline{\Omega})$, on $\overline{\Omega}$ és la 2-forma de $\Omega^2(P;Ad(P))$ associada a la curvatura Ω de ω.

Com en el cas de l'electrodinàmica, estudiarem el lagrangià per a ω crítiques, és a dir, connexions per a les que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}}\mathcal{L}_{YM}(\omega)=0$. Considerem una variació $\omega_t = \omega + t\eta$ on $\eta \in \Omega^1(P;\mathfrak{su}(n))$, aleshores, aplicant l'equació d'estructura trobem que la curvatura associada és $\Omega_t = \Omega + t(d\eta + [\omega,\eta]) + \mathcal{O}(t^2)$ per tant $\overline{\Omega}_t = \overline{\Omega} + td^\omega\overline{\eta} + \mathcal{O}(t^2)$ per a $\overline{\eta} \in \Omega^1(M;\mathfrak{su}(n))$. Trobem doncs que, per a tot $\overline{\eta} \in \Omega^1(M;\mathfrak{su}(n))$ amb $supp(\eta) \Subset M$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}}\mathcal{L}(\omega_t) &= \\
-\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}} tr(\overline{\Omega}_t \wedge *\overline{\Omega}_t) = -\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\overline{U}} tr((\overline{\Omega} + td^\omega\overline{\eta}) \wedge *(\overline{\Omega} + td^\omega\overline{\eta})) &= \\
-\int_{\overline{U}} tr(\overline{\Omega} \wedge *d^\omega\overline{\eta} + d^\omega\overline{\eta} \wedge *\Omega) = -2\int_{\overline{U}} tr(d^\omega\overline{\eta} \wedge *\overline{\Omega}) &= \\
-\int_{\overline{U}} tr(\overline{\eta} \wedge d^\omega * \overline{\Omega}),&
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que la derivada covariant és compatible amb la mètrica. Com que la condició és per a tota η arribem a la conclusió que ω és crítica per al lagrangià de Yang-Mills si i només si $d^\omega(*\overline{\Omega}) = 0$.

Corol·lari 3.2. *Sigui ω una connexió i Ω la curvatura associada, si Ω és auto-dual o anti-auto-dual aleshores ω és connexió crítica per al lagrangià de Yang-Mills.*

Demostració. ω és crítica si $d*\overline{\Omega} = 0$; com que és autodual (o anti-autodual) tenim que $d*\overline{\Omega} = \pm d^\omega\overline{\Omega} = 0$ per la identitat de Bianchi. □

Així doncs hem trobat les dos equacions que regeixen l'anomenada teoria de Yang-Mills,

$$d\overline{\Omega} = 0 \text{ i } d*\overline{\Omega} = 0.$$

Notem per acabar, que el cas de l'electromagnetisme abans descrit és un cas particular d'aquestes equacions.

Conclusions

Hem estudiat la teoria de grups de Lie i la teoria de fibrats per tal de poder descriure els models matemàtics utilitzats avui en dia en algunes de les teories de física de partícules. Les dues equacions que descriuen el comportament de la curvatura (i les connexions) per als diferents grups de Lie considerats sorgeixen de manera natural un cop definits els lagrangians de l'electrodinàmica o de Yang-Mills.

La continuació lògica seria doncs estudiar els dos casos concrets de Yang-Mills per a $n = 2$ i $n = 3$ corresponents als models matemàtics que descriuen la interacció feble i la interacció forta per, finalment, considerar el cas del grup de Lie $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ donant així amb la teoria del *Model Estàndard*, que juntament amb la gravetat, conformen les dues grans teories actuals de la física de partícules.

Hem considerat enfocar el treball a la part matemàtica del mateix i seria interessant també que el següent estudi es centrés més en aprofundir en la descripció dels diferents conceptes de la física i la seva relació amb els elements concrets del model matemàtic.

La realització del treball ha sigut complexa. La documentació matemàtica per la part de física és poca i els canvis de nomenclatura i notació compliquen la relació dels conceptes purament físics amb els seus homònims matemàtics. Per altra banda, els escrits matemàtics es centren en la presentació directa de les teories matemàtiques i no es focalitzen tant en l'aplicació al model físic. En aquest sentit, ha sigut molt interessant i constructiu la realització d'aquest treball, que ha ajudat a assentar les bases i els conceptes nessesàris per facilitar la relació entre els dos models. Així com també ha servit per presentar un cas concret de la teoria aquí estudiada particularitzant-ho en els casos de l'electromagnetisme i de Yang-Mills.

Bibliografia

[1] Bär, Christian. *Gauge Theory. Summer Term 2009.* Geometry in Postdam, July 26, 2011.

[2] Hamilton, M.J.D. *Mathematical Gauge Theory.* Universitext, Springer International Publishing AG, 2017.

[3] Cartan, Élie. *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs.* Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. XLII. 1930-1952.

[4] J. Hilgert and K-H. Neeb. *Structure and Geometry of Lie Groups.* Springer Monographs in Mathematics, 2010.

[5] Warner, Frank W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman and Company, 1971.

[6] Helgason, Sigurdur. *Sophus Lie and the Role of Lie Groups in Mathematics.* Opening lecture at a Nordic Teachers Conference in Reykjavik, 1990. [consulta: 27 de juny de 2018] disponible a: `https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-755-introduction-to-lie-groups-fall-2004/readings/helga_sophusl1_1.pdf`

[7] Currás, Carlos. *Geometria deiferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann.* Edicions de la Universitat de Barcelona, 2003.

[8] John B. Baez and Javier P. Muniain. *Gauge fields, knots and gravity.* World Scientific Publishing. Series on knots and everything Vol.4, 1994.

[9] Sontz, Stephen B. *Principal bundles. The classical case.* Universitext, Springer International Publishing AG, 2015.

[10] G. Rudolph and M. Schmidt. *Diferential Geometry and Mathematical Physics. Part II.* Springer Science+Business Media Dordrecht, 2017.