



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball Final de Grau
GRAU DE MATEMÀTIQUES
Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

**Wavelets: teoria i aplicacions al
tractament de senyals.**

Autor: Ivan Pereira Sánchez
Director: Dr. F. Javier Soria de Diego
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

The present work is aimed to investigate the Wavelets. They may be argued to appear for the first time at the beginning of the 20th century, when Alfréd Haar presented what is currently known as Haar's base, which will be covered in the third chapter. However, the Wavelets as we know them do not appear until the eighties, when Pierre Goupillaud, Alex Grosman and Jean Morlet carry out the first study using the current terminology. After that, Jan Olov-Strömberg investigated the discrete case, and further important insights were posed by mathematicians such as Ingrid Daubechies and Yves Meyer, who will be mentioned in chapter four. One of the main sources of inspiration to choose this work was the diversity of applications which this theory has displayed both in engineering and computing areas (i.e. the application of the discrete case), and in many physics areas, where it is substituting Fourier's transform due to its affordances concerning the analysis of time and frequency signal. Furthermore, Wavelets become an essential signals compression tool, as it will be suggested in chapter five.

Índex

Agraïments	v
1 Introducció	1
2 Conceptes previs	3
2.1 Els espais de Banach	3
2.2 Els espais de Hilbert	5
2.3 Resultats algebraics	7
3 La <i>Wavelet</i> de Haar	9
3.1 Base de Haar	10
3.2 Construcció de la base de Haar	11
4 Construcció de <i>Wavelets</i>	15
4.1 Anàlisi multi resolució	15
4.2 De la funció escala a la <i>Wavelet</i> ortonormal	19
4.3 La transformada de Fourier de la <i>Wavelet</i> i el filtre	21
4.4 L'algorisme de Daubechies	24
4.5 Daubechies 4	26
4.6 Daubechies 6	27
4.7 La <i>Wavelet</i> de Meyer	29
5 La transformada discreta de Fourier i les <i>Wavelets</i> en \mathbb{Z}_N	35
5.1 L'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	35
5.2 <i>Wavelets</i> en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	39
5.3 Aplicació de les <i>Wavelets</i> : compressió de senyals.	45
Annex A: Exemples de compressió de senyals	49
Annex B: Codi de compressió de senyals	55
Bibliografia	65

Agraïments

Per començar m'agradaria mostrar el meu agraïment amb aquestes paraules a tota la gent que m'ha ajudat a arribar fins al final de la carrera, des de la meua família que sempre ha vetllat per a que no em faltes res aquí donant-me suport moral incondicional fins als col·legues de la facultat amb els que he compartit moltes assignatures i que alguns d'ells han esdevingut grans amics. Després i no menys important a tota la gent que d'alguna manera m'ha ajudat i donat suport al llarg de la construcció d'aquest treball, els meus amics, família i la meua parella que han hagut d'aguantar-me en diferents estats d'ànims del més variats i les explicacions de problemes envers al meu treball on molts d'ells els hi semblava que parlava en Xino. Finalment agraïment absolut al meu tutor que ha mostrat molt interès en guiar-me i ajudar-me en la construcció d'aquest treball i ha invertit moltes hores en resoldre'm dubtes i corregir-me els molts errors que he anat cometent.

Capítol 1

Introducció

Aquest treball es centra en l'estudi de *Wavelets*. Podríem dir que les *Wavelets* apareixen per primera vegada a principis del segle XX, quan Alfréd Haar presenta per primer cop el que estudiarem al capítol 3 i que avui es coneix com la base de Haar. Tot i així, les *Wavelets* tal com les coneixem no apareixen fins la dècada dels 80, quan Pierre Goupillaud, Alex Grosman i Jean Morlet presenten el primer estudi en els termes actuals. Tot seguit, Jan Olov-Strömberg es dedica a l'estudi del cas discret i, més endavant, trobem aportacions molt importants d'algunes matemàtiques com Ingrid Daubechies i Yves Meyer, sobre les quals en veurem algunes pinzellades en el capítol 4. Una de les motivacions per elegir aquest treball va ser les diverses aplicacions que ha tingut aquesta teoria tant en camps d'enginyeria i informàtica, en el cas discret, com en molts camps de la física, on les *Wavelets* estan substituint la transformada de Fourier, degut a les avantatges que tenen envers aquesta per l'anàlisi del senyal en el temps i la freqüència. A més a més esdevenen una eina fonamental en la compressió de senyals, com veurem en el capítol 5.

He dividit l'estructura del treball en quatre capítols (2, 3, 4 i 5) per tal de presentar-lo de la manera més clara possible. En el capítol 2 hi ha un recull de conceptes previs que són essencials pel desenvolupament d'aquesta teoria i que estan relacionats amb l'anàlisi funcional i harmònic es veuen als estudis del Grau; és per això que no hi ha demostracions. A més, també hi ha una secció amb resultats



Figura 1.1: Ingrid Daubechies i Yves Meyer.

algebraics que necessitarem durant el treball. Després, en el capítol 3, hi ha la construcció de la base de Haar, que és un exemple molt senzill de *Wavelet* i ens dona una idea intuïtiva de com serà la construcció d'aquestes. Aquest capítol està dividit en dos seccions, en la primera es presenta la base de Haar i les propietats bàsiques i en la segona es veu com aquesta és un sistema ortonormal complet per $L^2(\mathbb{R})$ que serà el procés que generalitzarem en el següent capítol. Llavors, en el capítol 4, entrem en la formulació actual de les *Wavelets*, que esdevé com una generalització de la base de Haar. Així la primera secció donarem una definició de l'anàlisi multi resolució donant les seves propietats bàsiques i les principals caracteritzacions, concluint-la amb una idea intuïtiva de com farem per a crear les *Wavelets*. Seguidament en les següents dos seccions ens dedicarem a establir propietats suficients perquè a partir de la funció escala puguem crear la *Wavelet*, això esdevindrà en una sèrie de propietats que haurà de complir el filtre, concepte que també es presenta en aquestes seccions. I per acabar el capítol les últimes seccions les dedicarem a la construcció explícita de dos *Wavelets*, la de Daubechies i la de Meyer. Finalment l'últim capítol és on veurem les aplicacions que tenen les *Wavelets* en la compressió de senyals, començarem amb una primera secció introduint l'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ exposant les seves propietats bàsiques doncs esdevé el context natural on treballarem quan fem tractament d'imatges o senyals. En la segona secció donarem un mètode per a construir les *Wavelets* que són essencials per a la compressió d'imatges i senyals degut a les seves bones propietats de localització. Per acabar, l'última secció la dedicarem a explicar quin serà el procés de compressió de senyals i veurem com avaluar quina *Wavelet* ens dona una compressió més òptima. Aquest procés el possarem en pràctica per a diferents *Wavelets* i en l'annex A podrem trobar un estudi comparatiu per a diferents senyals, mentres que en l'annex B hi haurà el codi utilitzat per fer la compressió.

Capítol 2

Conceptes previs

En aquest capítol es pretén fer una exposició de conceptes previs pel desenvolupament de les *Wavelets*. Farem un recull de les eines d'anàlisi funcional que necessitarem al llarg de tot el treball.

L'anàlisi funcional sorgeix a finals del segle XIX i principis XX, inicialment per tractar problemes clàssics, sobretot relacionats en trobar solucions d'equacions diferencials ordinàries i d'equacions en derivades parcials, a partir de l'equació de Volterra. Malgrat que no va poder ser suficient per resoldre molts d'aquests problemes si que va esdevenir una eina molt útil per aclarir aspectes essencials d'aquests.

Per això començarem definint els espais de Banach i veurem com els espais L^p associats a la mesura de Lebesgue són un exemple d'aquests de dimensió infinita. Llavors continuarem introduint la noció dels espais de Hilbert, mostrant les propietats més rellevants i que ens seran de més utilitat. Farem èmfasi en la similitud que tenen aquests amb els espais euclidis, fet que ens permet tenir una noció molt geomètrica d'aquests i definir-hi la ortogonalitat, descriure el seu dual i estudiar l'adjunt d'un operador lineal. Finalment acabarem parlant sobre un anàleg a les bases dels nostres espais euclidis i veurem com a partir d'un conjunt dens, amb la sèrie de Fourier, tindrem una manera molt útil de expressar les funcions del nostre espai.

L'exposició d'aquest capítol ha estat tret de [2] junt amb [1] i [3].

2.1 Els espais de Banach

Considerem un espai de mesura (X, Σ, μ) , un cos \mathbb{K} , ($= \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) i el conjunt de funcions $\mathcal{G} = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ mesurable}\}$. Definim la relació d'equivalència $f \sim g$ si i només si $f = g$ quasi per tot i fem el quocient \mathcal{G}/\sim (a partir d'ara utilitzarem \mathcal{G} per denotar l'espai quocient). El conjunt \mathcal{G} dotat de la suma de funcions és espai vectorial.

Definició 2.1. Un espai vectorial E sobre \mathbb{K} i una aplicació $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ direm que és un espai normat si $\forall x, y \in E$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ es compleix:

- (i) $\|x\| = 0$ si i només si $x = 0$.

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Desigualtat triangular).}$$

Definició 2.2 (Espai L^p). Donat el conjunt \mathcal{G} definim les següents aplicacions: Per $p \in [1, \infty)$.

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mentre que si $p = \infty$:

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ quasi per tot}\}.$$

Així doncs un espai L^p serà:

$$L^p(X) = \{f \in \mathcal{G} : \|f\|_p < \infty\}.$$

De la definició es pot demostrar les següents propietats per p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposició 2.3. Considerem l'espai vectorial \mathcal{G} i l'aplicació $\|\cdot\|_p : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{K}$.

(a) $\|\cdot\|_p$ és una norma sobre \mathcal{G} .

(b) $\|f\|_1 \leq \|f\|_p \|f\|_{p'}$ (desigualtat de Hölder).

Corol·lari 2.4. $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ és un espai normat.

Definició 2.5 (Espai de Banach). Un espai E normat direm que és de Banach si tota successió de Cauchy dintre en E és convergent.

Definició 2.6. Donada una successió $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ direm que la successió convergeix en norma a $f \in L^2(\mathbb{R})$ si:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(x) - f_n\|_2 = 0.$$

Exemple 2.7. Veiem els casos més senzill d'espais de Banach:

- L'espai vectorial \mathbb{R}^n (o bé \mathbb{C}^n) són espais de Banach per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$.
- L'espai de les funcions contínues en $[a, b]$ amb la norma del suprem $\mathcal{C}([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ és un espai de Banach.

Teorema 2.8. Per a tot p , $1 \leq p \leq \infty$ l'espai $L^p(X)$ és espai de Banach.

Definició 2.9. Donats dos espais vectorials E i F sobre el mateix cos \mathbb{K} , un operador $T : E \rightarrow F$ direm que és lineal si $\forall x, y \in E$ i $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es compleix:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty.$$

Definició 2.10. La norma de l'operador T la definim com:

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Direm que un operador té norma finita si $\exists M > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E$.

Teorema 2.11. Si E i F són dos espais de Banach y $T : E \rightarrow F$ és un operador lineal, aleshores, T és continu per a tot $x \in E$ si i només si l'operador T està acotat.

Definició 2.12. Es denota per $\mathcal{L}(E, F)$ el conjunt d'operadors lineals i continus.

Teorema 2.13. Si E i F són espais de Banach, llavors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ és també un espai de Banach.

2.2 Els espais de Hilbert

En la literatura sovint es defineix l'espai de Hilbert com un espai prehilbertià complet, per simplicitat ens estalviarem la definició d'espai prehilbertià.

Definició 2.14. Sigui H un espai vectorial, una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{K}$ s'anomena producte escalar si $\forall x, y \in H$:

- (a) $\langle \cdot, x \rangle$ és lineal i $\langle x, \cdot \rangle$ és semilineal.
- (b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- (c) $\langle x, x \rangle > 0$, si $x \neq 0$.

Observació 2.15. Un espai vectorial H amb un producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ permet definir una norma $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ i per tant és un espai normat.

Definició 2.16. Un espai vectorial H amb un producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és de Hilbert si és complet.

Observació 2.17. Tot espai de Hilbert és espai de Banach.

Definició 2.18. L'espai dual H' d'un espai de Hilbert H és l'espai de formes lineals contínues de $T : H \rightarrow \mathbb{K}$.

$$H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{K}).$$

Proposició 2.19. Sigui H un espai de Hilbert i $x, y \in H$.

- (a) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Desigualtat de Cauchy-Schwarz).
- (b) El producte escalar és continu sobre l'espai producte $H \times H$.
- (c) L'aplicació $x \in H \rightarrow \langle \cdot, x \rangle \in H'$ és semilineal, injectiva i isomètrica.

Observació 2.20. Si considerem una sucesió $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ de manera que f_n convergeix en $L^2(\mathbb{R})$ a una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$, aleshores donada una funció $g \in L^2(\mathbb{R})$ es compleix que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, g \rangle.$$

Per la continuïtat del producte escalar, aquest resultat l'utilitzarem sovint en tot el treball.

Definició 2.21. Sigui H un espai de Hilbert, direm que $x, y \in H$ són ortogonals si $\langle x, y \rangle = 0$. Així, donat un conjunt A definim el seu ortogonal A^\perp com:

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A\}.$$

Definició 2.22. Si A és un subespai d'un espai de Hilbert H , donat un element $x \in H$ direm que $y \in A$ és una aproximació òptima (o projecció òptima) si

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\} = \|x - y\|.$$

Teorema 2.23 (Teorema de la projecció ortogonal). *Si C és un subconjunt convex tancat no buit de H espai de Hilbert, tot $x \in H$ té una única projecció òptima $P_C x \in C$.*

Teorema 2.24 (Riesz). *La correspondència $x \in H \rightarrow \langle \cdot, x \rangle \in H'$ és semilineal, bijectiva i isomètrica.*

Definició 2.25. Un sistema ortogonal d'un espai de Hilbert H , és un conjunt $\{e_k\}_{k \in I} \subset H$ de vectors no nuls ortogonals dos a dos. És un sistema ortonormal si, a més, $\|e_k\| = 1$, per a tot $k \in I$.

Definició 2.26 (Coeficients de Fourier). Donat $x \in H$ direm que els coeficients de Fourier de x respecte un sistema ortonormal $\{e_k\}_{k \in I}$ són

$$\hat{x}_k = \langle x, e_k \rangle, \quad k \in I.$$

Definició 2.27. Donat un sistema ortonormal direm que és complet si

$$\hat{x}_k = 0, \quad \forall k \in I,$$

aleshores $x = 0$ a.e.x.

Teorema 2.28. *Un sistema ortonormal $\{e_k\}_k$ és complet si, i només si, per a cada $x \in H$,*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k$$

assolint la igualtat de Parseval,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2.$$

Observació 2.29. En el cas de que $H = L^2(X)$ es té que tota funció la podem expressar com una sèrie dels nostres elements del sistema ortonormal per els seus coeficients de Fourier. Tot i així com les funcions en $L^2(X)$ són elements d'una classe d'equivalència, només podem assegurar la convergència en norma. Altres tipus de convergència com la puntual o la uniforme en general no es tenen.

Teorema 2.30 (La base de Fourier). $\{e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ és un sistema ortonormal complet en $L^2(0, 1)$.

Definició 2.31. Considerem l'espai $L^1(0, 1)$ on definim la transformada de Fourier com la següent aplicació:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(T) &\longrightarrow \ell^\infty \\ f &\longrightarrow \widehat{f} = \{\widehat{f}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Observació 2.32. La transformada \mathcal{F} de funcions de $L^1(T)$ en successions de ℓ^∞ següent és un operador, és a dir $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1(T), \ell^\infty)$.

Definició 2.33. Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la seva transformada de Fourier és:

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \zeta \cdot x} dx.$$

Denotem $\zeta \cdot x$ com el producte escalar usual en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.34 (de inversió). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ compleix que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ aleshores f és igual quasi per tot a una funció continua tal que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\zeta) e^{2\pi i x \cdot \zeta} d\zeta.$$

Teorema 2.35 (Plancherel). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, llavors \widehat{f} es de $L^2(\mathbb{R}^n)$ i $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. És a dir, existeix una única isometria bijectiva de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que coincideix amb \mathcal{F} sobre $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. És l'anomenada transformada de Fourier \mathcal{F} sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. A més restringit a $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es verifica

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\zeta) e^{2\pi i x \cdot \zeta} d\zeta.$$

que anomenarem la cotransformada de Fourier.

2.3 Resultats algebraics

En aquesta secció farem un recull de resultats algebraics no vists durant la carrera que utilitzarem al llarg del treball, es per això que en aquí si inclourem demostracions.

Teorema 2.36. *Sigui $t(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ un polinomi trigonomètric tal que $t(x) \geq 0$ i amb coeficients no negatius. Aleshores existeix un altre polinomi trigonomètric $q(x)$ tal que $t(x) = q(x)\bar{q}(x) \forall x \in \mathbb{R}$.*

Demostració. És suficient provar-ho per $t(x) > 0$, doncs sinó considerem $t(x) + \epsilon > 0$ i fem tendir ϵ a zero. Com que $t(x)$ es real, aleshores és igual que el seu conjugat i per tant $c_{-k} = \bar{c}_k$. Ara definim el següent polinomi en el pla complex:

$$P(z) = c_{-n} + \dots + c_n z^{2n} = \sum_{k=-n}^n c_k z^{n+k},$$

que compleix que $t(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$ i $P(z) = z^{2n} \overline{P(1/\bar{z})}$. Llavors si α és arrel de P fora del cercle unitat, aleshores $\frac{1}{\alpha}$ és una arrel en l'interior del cercle unitat de la mateixa multiplicitat. A més no hi ha zeros en el cercle unitat doncs tenim que $0 < t(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$. Notem que $P(0) \neq 0$ perquè si $P(0) = 0$ llavors $c_{-n} = 0$ i així $c_n = \bar{c}_{-n}$ i $t(x)$ no pot ser d'ordre més petit que n . Així podem expressar el polinomi com

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^m (z - \alpha_k)^{r_k} (z - \frac{1}{\alpha_k})^{r_k},$$

on $2 \sum_{k=1}^m r_k = 2M$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar $c_n = 1$. Finalment com que

$$z - \frac{1}{\alpha} = z(\bar{\alpha} - \frac{1}{\alpha})/\alpha,$$

podem expressar el polinomi com

$$\begin{aligned} t(x) &= e^{-inx} P(e^{ix}) = C \prod_{k=1}^m (e^{ix} - \alpha_k)^{r_k} (e^{-ix} - \bar{\alpha})^{r_k} \\ &= C \prod_{k=1}^m |e^{ix} - \alpha_k|^{r_k}. \end{aligned}$$

Com que $t(x) > 0$ necessàriament $C > 0$ i així $q(x) = \sqrt{C} [\prod_{k=1}^m (e^{ix} - \alpha_k)^{r_k}]$. \square

Capítol 3

La *Wavelet* de Haar

El concepte de *Wavelet* apareix per primera vegada a principis del segle XX quan Alfréd Haar presenta un sistema ortonormal complet de l'espai de funcions $L^2(\mathbb{R})$. Així com a $L^2(0, 1)$ tenim que el sistema trigonomètric forma una base i podem expressar qualsevol funció f d'aquest espai com la sèrie

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x},$$

Haar va donar un anàleg per $L^2(\mathbb{R})$, és a dir, va trobar una manera de fer l'expansió en sèrie de les funcions de $L^2(\mathbb{R})$ de la següent manera

$$f(x) = c_0 + \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(2^j x - k). \quad (3.1)$$

Llavors tal i com la funció $f(x) = e^{2\pi i x}$ a partir de les seves dilatades dona lloc a una base per $L^1((0, 1))$, aleshores la funció $\psi(x)$ esdevé una base de $L^2(\mathbb{R})$ a partir de dilatacions i translacions. Aquesta nova base es va convertir en una eina molt útil en l'anàlisi doncs les translacions i dilatacions són operacions que es comporten molt bé amb els operadors com la diferenciació, la convolució o la transformada de Fourier. És per això que va donar peu a un estudi més exhaustiu de com trobar el que ara es coneix com a *Wavelet*.

Definició 3.1 (*Wavelet*). Una funció $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ direm que es una *Wavelet* si el conjunt $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ és un sistema ortonormal complet de $L^2(\mathbb{R})$.

En aquest capítol es pretén presentar el concepte de *Wavelet* de la manera com va aparèixer històricament, presentarem la base de Haar que és la primera *Wavelet* i ens centrarem en la seva construcció. Després en el proper capítol generalitzarem les propietats més rellevants de la base de Haar i farem un mètode de construcció per altres *Wavelets*.

Durant tot el capítol considerarem l'espai $L^2(\mathbb{R})$ amb el seu producte escalar, és a dir donades dos funcions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Així la norma d'una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ la definirem de la següent manera,

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

3.1 Base de Haar

Definició 3.2 (Generador de Haar i sistema de Haar). Sigui $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ el generador de Haar

$$\psi(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Llavors el conjunt $\{2^{j/2}\psi_{j,k}(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ l'anomenarem sistema de Haar.

Definició 3.3 (Suport d'una funció). Donada una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ definim el seu suport com l'adherència del conjunt $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$.

Una dels avantatges d'aquesta nova base davant de la base que va donar Fourier és que per exemple les funcions de Haar tenen un suport compacte i això ens dona unes millors propietats de localització. Això és que si volem fer algun canvi en un entorn dintre del domini, només hem de canviar els coeficients dels elements de la base que el seu suport tingui intersecció no buida amb aquest entorn. Fet que ens pot ser molt útil si volem treure el renou d'una ona de so.

Proposició 3.4. *La sistema de Haar $\{2^{j/2}\psi_{i,j}(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ és una sistema ortonormal.*

Demostració. Primer veiem que és ortonormal, donat un element qualsevol de la base $2^{j/2}\psi_{i,j}(2^j x - k)$ el seu suport és $\{x \in \mathbb{R} : \frac{k}{2^j} \leq x \leq \frac{k+1}{2^j}\}$ de manera que fixada una j ,

- (i) Els suports de $2^{j/2}\psi_{i,j}(2^j x - k_1)$ i $2^{j/2}\psi_{i,j}(2^j x - k_2)$ són disjunts si $k_1 \neq k_2$ i per tant

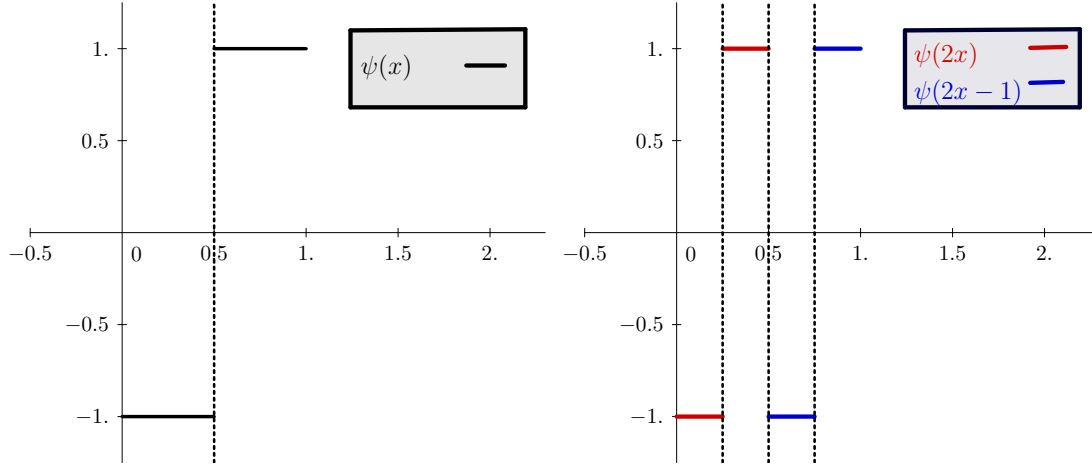
$$\int_{\mathbb{R}} 2^j \psi_{j,k_1}(2^j x - k_1) \psi_{j,k_2}(2^j x - k_2) dx = 0.$$

- (ii) Mentre que si $k_1 = k_2$

$$\int_{\mathbb{R}} 2^j \psi_{j,k_1}(2^j x - k_1) \psi_{j,k_2}(2^j x - k_2) dx = 1.$$

Queda veure que donada qualsevol $j_1 \neq j_2$, llavors els corresponents elements de la base són ortogonals independentment de k . Per veure-ho és suficient provar que donada una $2^{(j+1)/2}\psi_{j+1,k_1}(2^{j+1}x - k_1)$ el seu suport està contingut dins del suport de $2^{j/2}\psi_{j,k_2}(2^j x - k_2)$ per alguna k_2 on la funció és constant.

- (iii) Si k_1 és parell prenem $k_2 = \frac{1}{2}k_1$.
 (iv) Si k_2 és senar prenem $k_2 = \frac{1}{2}(k_1 - 1)$.



Imatge 3.1: El suport de $\psi(2x)$ i $\psi(2x - 1)$ està inclòs allà on $\psi(x)$ es constant.

□

3.2 Construcció de la base de Haar

Començarem considerant la funció característica en $[0, 1]$ $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ que compleix dos propietats que ens seran de gran utilitat.

- (a) La translació per enters $\{\phi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ens dona lloc a una sistema ortonormal en l'espai de funcions $L^2(\mathbb{R})$.
 (b) Ens permet expressar ϕ com una combinació lineal de dilatacions diàdiques

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1).$$

Direm que ϕ és una funció escala.

Definició 3.5 (Espai V_j). Sigui $L^2(\mathbb{R})$ on definirem V_j com els subespais vectorials següents

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^j x - k) \right\}.$$

Notem que els espais V_j són els subespais de $L^2(\mathbb{R})$ de les funcions amb salts a $\frac{1}{2^j}\mathbb{Z}$ i que $\{V_j\}$ formen una successió creixent de subespais de manera que $V_j \subset V_{j+1}$.

Demostració. Sigui $\phi(2^j x - k) \in V_j$, un element qualsevol de la base de V_j . Tenim que $\phi(2^j x - k) = \phi(2^{j+1} x - 2k) + \phi(2^{j+1} x - 2k - 1) \in V_{j+1}$. □

Per la propietat (a) tenim que el conjunt $\{\phi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ és base de V_0 que vindria a ser el subespai de les funcions amb salts a \mathbb{Z} . I per la propietat (b) $f(x) \in V_j \iff f(2^{-j}x) \in V_1$.

Proposició 3.6. *La successió d'espais vectorials $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ compleix les següents propietats:*

(i) $\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ és una base ortonormal de V_0 .

(ii) $f(x) \in V_j$ si i només si $f(2^{-j}x) \in V_0$.

A més els conjunts V_j també compleixen aquestes dos propietats.

(iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

(iv) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ és dens a $L^2(\mathbb{R})$.

Demostració. (i) Directe de la definició de V_0 .

(ii) Donada $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^j x - k)$, tenim que $f(2^{-j}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(x - k) \in V_0$.

(iii) Considerem l'operador projecció $P_n : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$P_n(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) 2^{n/2} \phi(2^n y - k) dy \right) 2^{n/2} \phi(2^n x - k).$$

Així, una manera molt útil de caracteritzar $f \in V_n$ és que $P_n(f) = f$, llavors $f(x) \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ si $f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} P_n(f)$, per això ens serà suficient veure que $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ aleshores $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|P_n(f)\|_2 = 0$.

Sigui $g(x)$ una funció continua amb suport compacte dintre $[-K, K]$ i sigui x dintre del suport de la funció aleshores existirà un $k_x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$|P_n(g)(x)| = 2^n \left| \int_{\mathbb{R}} g(y) \phi(2^n y - k_x) dy \right| \leq 2^n \|g\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0.$$

Independentment de x i per tant $\|P_n g\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$, d'altre banda donada una funció continua sabem que la podem aproximar per funcions contínues amb suport compacte, de manera que donada f continua sabem que $\exists g, h$ tals que $f = g + h$ amb g continua i de suport compacte i h continua tal que $\|h\|_{\infty} < \epsilon$, aleshores,

$$\limsup_{n \rightarrow -\infty} \|P_n(f)\|_{\infty} \leq \limsup \|P_n(h)\|_{\infty} < \epsilon.$$

Per tant si f es una funció continua $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|P_n(f)\|_{\infty} \rightarrow 0$. Ara sigui $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenim que f és aproximable per funcions contínues, aleshores $f = g + h$ on g és una funció continua i $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|h\|_2 < \epsilon$, llavors

$$\|P_n(f)\|_2 \leq \|P_n(g)\|_2 + \|P_n(h)\|_2 < \|g\|_2 + \epsilon \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \epsilon.$$

Finalment com que podem escollir ϵ arbitràriament petit, obtenim el resultat que volíem.

- (iv) Tota funció de $L^2(\mathbb{R})$ és aproximable per funcions contínues de suport compacte, per tant queda veure que podem aproximar les funcions contínues amb suport compacte amb funcions del nostre espai, és suficient veure que

$$P_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{uniformement.}$$

Sigui f una funció continua amb suport compacte dintre de $[-K, K]$, f és uniformement continua. Donat $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $|x - y| < \delta$ i per tant escollint n amb $2^{-n} < \delta$,

$$\begin{aligned} |P_n(f)(x) - f(x)| &= \left| 2^n \int_{\frac{k_x}{2^n}}^{\frac{k_x+1}{2^n}} f(y) dy - f(x) \right| = \left| 2^n \int_{\frac{k_x}{2^n}}^{\frac{k_x+1}{2^n}} f(y) - f(x) dy \right| \\ &\leq 2^n \int_{\frac{k_x}{2^n}}^{\frac{k_x+1}{2^n}} |f(y) - f(x)| dy < \epsilon, \end{aligned}$$

amb el que obtenim la convergència uniforme en x i per tant $\|P_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. □

Una vegada tenim aquesta construcció ens interessa trobar una base ortonormal de $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$. Un primer intent seria reunir totes les bases de cada un dels espais i a partir d'aquí fer una triada adequada fins un conjunt independent. Clar que com que tenim $V_j \subset V_{j+1}$ la base de V_{j+1} ja ens genera la primera i per tant podríem eliminar tots els elements de la base de V_j , però no és el que volem. El que farem serà partir d'una base de V_j i la completarem a una base de V_{j+1} tal que la base sigui ortonormal, és a dir trobarem un subespai vectorial $W_j \subset V_{j+1}$ de manera que:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

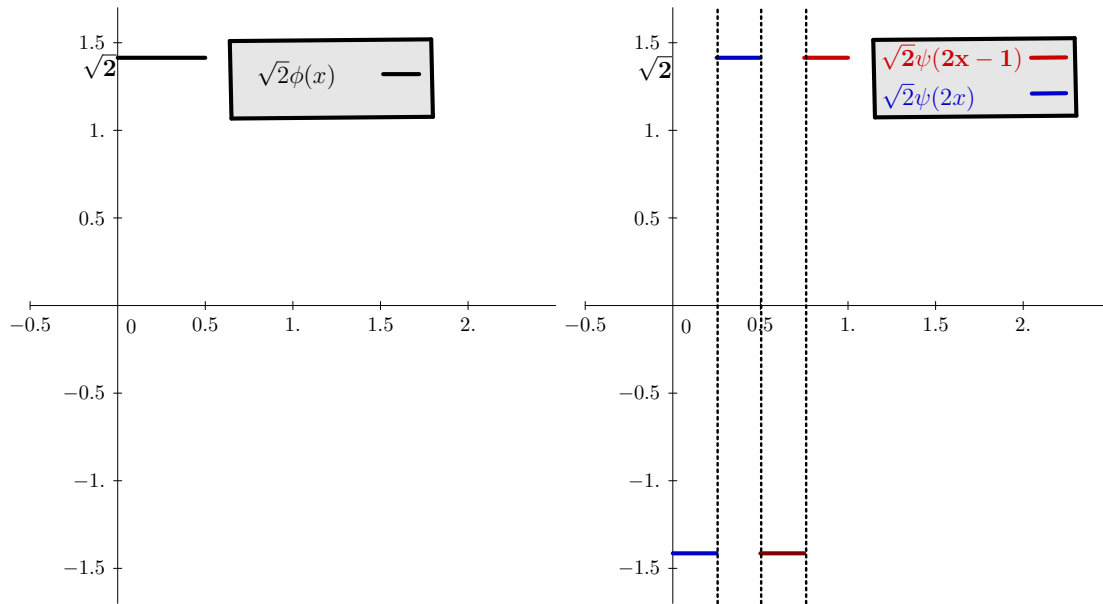
Que reiterant aquest argument i pels apartats (iii) i (iv) de la Proposició 3.6 obtenim:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

Proposició 3.7. Donat $\{2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ base de V_j podem completar-la a una base de W_j afegint $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de manera que la reunió sigui base ortonormal de V_j , així $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

Demostració. És clar que la reunió de les bases és ortonormal, doncs sabem que ho són per separat i agafant una de cada, o bé tenen el mateix k , o bé el tenen diferent. Si el tenen diferent els suports corresponents són disjunts i si són iguals queda:

$$\int_{\mathbb{R}} 2^j \psi(2^j x - k) dx = 0.$$



Imatge 3.2: Els suports són el mateix o són disjunts.

Queda veure que genera V_j , així que sigui $\phi(2^{j+1}x)$ un element no necessàriament de norma 1 de la base de V_j , sabem que $\psi(2^j x) = \phi(2^{j+1}x) - \phi(2^{j+1}x - 1)$, de manera que $\psi(2^j x) + \phi(2^j x) = 2\phi(2^{j+1}x)$ i fent el canvi $y = x - k2^{-(j+1)}$ generem tota la base de V_{j+1} . \square

En resum hem trobat una base de $L^2(\mathbb{R})$ ortonormal trobant bases ortonormals d'espais vectorials tals que la seva suma directa és tot $L^2(\mathbb{R})$. Ara bé d'aquesta base, ens interessa que hi hagi la base que ens generava V_0 , es per això que ho considerarem de la següent manera:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \oplus V_0.$$

Que admet la següent base de $L^2(\mathbb{R})$ $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}}$.

Capítol 4

Construcció de *Wavelets*

En aquest capítol ens dedicarem a la construcció de *Wavelets* en general, així que agafarem les característiques principals de la *Wavelet* de Haar i les generalitzarem en l'anàlisi multi resolució. Després veurem equivalències entre algunes propietats de l'AMR i com aquestes es tradueixen en trobar el que anomenarem un filtre que compleixi certes propietats. Finalment acabarem amb un algorisme explícit de com construir la *Wavelet* de Daubechies i de Meyer, aquesta última ens requerirà d'alguns resultats que tractarem en la secció de la seva construcció.

4.1 Anàlisi multi resolució

Definició 4.1 (Anàlisi multi resolució [8]). Direm que una successió $\{V_j\}$ de subespais tancats a $L^2(\mathbb{R})$ és un anàlisi multi resolució (AMR) si compleix les següents quatre propietats:

1. Existeix una funció escala φ de l'AMR, tal que amb la translació per enters el conjunt $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ formi una base de V_0 .
2. Per qualsevol $f(x) \in V_j$ si, i només si, $f(2^{-j}x) \in V_0$.
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
4. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ és dens a $L^2(\mathbb{R})$.

Observació 4.2. Amb aquesta definició els espais V_j per (3.6) són un Anàlisi multi resolució.

Observació 4.3. Com

De la definició tenim que $\{2^{j/2}\varphi(2^j x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ forma una base ortonormal de V_j . A més si tenim $\varphi \in V_0$ podem expressar-lo com:

$$\varphi(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a(\gamma)\varphi(2x - \gamma). \quad (4.1)$$

Els coeficients $a(\gamma)$ compleixen:

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |a(\gamma)|^2 = 2. \quad (4.2)$$

En efecte,

$$\begin{aligned} 1 = \langle \varphi, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a(\gamma) \varphi(2x - \gamma), \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a(\gamma) \varphi(2x - \gamma) \right\rangle \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |a(\gamma)|^2 \langle \varphi(2x - \gamma), \varphi(2x - \gamma) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |a(\gamma)|^2. \end{aligned}$$

A més,

$$a(\gamma) = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - \gamma)} dx. \quad (4.3)$$

Perquè

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - \gamma)} dx &= 2 \langle \varphi(x), \varphi(2x - \gamma) \rangle \\ &= 2a(\gamma) \langle \varphi(2x - \gamma), \varphi(2x - \gamma) \rangle = a(\gamma). \end{aligned}$$

Notem que la propietat (4.3) és anàloga a la (b) i l'anomenarem *scaling identity* i que a partir de una funció escala nosaltres obtenim un AMR, però no viceversa. Determinar una funció per a que sigui una funció escala d'un AMR serà una feina més complicada. I abans de parlar-ne veurem unes quantes propietats algebraiques.

Definició 4.4 (δ de Kronecker). La funció $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la definim com

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Amb aquesta notació tenim el següent:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x - \gamma) \overline{\varphi(x)} dx = \delta(\gamma, 0). \quad (4.4)$$

Troblem una generalització de (4.3):

$$\begin{aligned} \delta(\gamma, 0) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - \gamma) \overline{\varphi(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \sum_{\gamma'' \in \mathbb{Z}} a(\gamma') \overline{a(\gamma'')} \varphi(2x - 2\gamma - \gamma') \overline{\varphi(2x - \gamma'')} dx \\ &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \sum_{\gamma'' \in \mathbb{Z}} a(\gamma') \overline{a(\gamma'')} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - 2\gamma - \gamma') \overline{\varphi(2x - \gamma'')} dx \\ &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} a(\gamma') \overline{a(2\gamma + \gamma')} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Que la podem reescriure amb aquesta identitat

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} a(\gamma') \overline{a(2\gamma + \gamma')} = 2\delta(\gamma, 0). \quad (4.5)$$

Per altre banda si suposam que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - \gamma) dx = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} a(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx,$$

aleshores,

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a(\gamma) = 2. \quad (4.6)$$

El següent teorema ens dona una equivalència entre la funció escala i la densitat del AMR.

Teorema 4.5. *Sigui $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ una seqüència de subespais tancats de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfan les condicions*

1. $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.
2. $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$.
3. $\exists \varphi$ tal que $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de V_0 .

A més assumim que $|\widehat{\varphi}|$ es continua en el zero. Llavors les següents condicions són equivalents:

- (i) $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.
- (ii) $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ és dens a $L^2(\mathbb{R})$.

I es compleix $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$.

Demostració. Assumim que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ i veiem que $W = \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ es invariant per translacions. Donat $x \in \mathbb{R}$ tenim que $\forall \epsilon > 0 \exists l, m \in \mathbb{Z}$ tal que $\|\tau_x f - \tau_{2^{-l}m} f\|_2 < \epsilon$ i per tant es suficient veure que és invariant per translacions diàdiques. Sigui $f \in W$, aleshores $\forall \epsilon > 0 \exists h \in V_{j_0}$ tal que $\|f - h\|_2 < \epsilon$. Per (1) $h \in V_j \quad \forall j \geq j_0$ i per (2) i (3) podem escriure

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi(2^j x - k),$$

doncs tenim convergència en $L^2(\mathbb{R})$, llavors,

$$\tau_{2^{-l}m} h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi(2^j x - 2^j 2^{-l} m - k).$$

Escollint un j suficientment gran $\tau_{2^{-l}m} h \in V_j$. Com que ho hem vist per a qualsevol $\epsilon > 0$ tenim que W es invariant per translacions diàdiques. Degut a que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$

i $|\widehat{\varphi}|$ es continu en el 0, $\exists \delta > 0$ tal que $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$, $\xi \in (-\delta, \delta)$. Considerem $g \in W^\perp$ com que W es invariant per translacions i utilitzant la formula de Plancherel

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} dt,$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$ i per a tota $f \in W$. Com que $\widehat{g} \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, llavors $\widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi) = 0$ a.e. $\xi \in \mathbb{R}$, en particular si escollim $f(\xi) = 2^j \varphi(2^j \xi)$ de manera que $\widehat{f}(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-j} \xi)$. Ara bé, per hipòtesis $\widehat{\varphi}(2^{-j} \xi) \neq 0$ amb $\xi \in (-2^j \delta, 2^j \delta)$ el que ens queda és que $\widehat{g} = 0$ per $\xi \in (-2^j \delta, 2^j \delta)$ Finalment fent tendir $j \rightarrow \infty$ deduïm que $\widehat{g}(\xi) = 0$ a.e. ξ . Acabem de veure que $W = L^2(\mathbb{R})$.

Ara suposem que $W = L^2(\mathbb{R})$, sigui f tal que $\widehat{f} = \chi_{[-1,1]}$ tal que $\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 = 2$, aleshores per (1):

$$\|f - P_j f\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Per tant $\|P_j f\|_2^2 = \|\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 2$ doncs $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j per (2) i (3). Pel teorema de Plancherel i fent el canvi $\mu = 2^j \xi$ tenim:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}_{j,k}(\xi)} d\xi \right| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) 2^{j/2} e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} \overline{\widehat{\varphi}(2^{-j} \xi)} d\xi \right| \\ &= 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} \widehat{\varphi}(\mu) e^{-2\pi i k \mu} d\mu \right|^2. \end{aligned}$$

Llavors per j suficientment gran $[-2^{-j}, 2^{-j}] \subset [-\pi, \pi]$ podem veure com que és el valor absolut al quadrat dels coeficients de Fourier de la funció $\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]} \widehat{\varphi}$ en $L^2(\mathbb{T})$ i per tant l'expressió de dalt és 2^j vegades la norma de $\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]} \widehat{\varphi}$, així,

$$2^j \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1.$$

Finalment per la continuïtat de $|\widehat{\varphi}|$ en el zero l'última integral tendeix a $|\widehat{\varphi}(0)|^2$, resulta $|\widehat{\varphi}(0)| = 1 \neq 0$. \square

Amb tot això ja ens podem anar fent una idea de com procedirem per crear *Wavelets*. La idea serà trobar una funció escala amb la que generar l'anàlisi multi resolució i per tant trobarem solucions de les propietats que acabam de veure. Així els passos de construcció seran els següents:

Pas 1 Trobar els coeficients $a(\gamma)$ de manera que compleixin (4.5) i (4.6)

Pas 2 Definir una funció escala a partir de (4.1). Notem que φ és un punt fix de la següent recurrència:

$$Sf(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a(\gamma) f(2x - \gamma). \quad (4.7)$$

I per tant per construir $\varphi(x)$ pareix raonable iterar S :

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n f. \quad (4.8)$$

Pas 3 Provar que φ genera un AMR. Aquesta és la condició difícil perquè en general no és així, doncs la condició de ortonormalitat és difícil que la compleixi i més endavant veurem que necessitem per que sí la compleixi.

Pas 4 La construcció de la *Wavelet*.

Aleshores en les pròximes seccions veurem com ens ho farem per a tractar el **Pas 3** i el **Pas 4**.

4.2 De la funció escala a la *Wavelet* ortonormal

El nostre punt de partida serà una funció escala φ que designarem com el primer element del parell ψ_0, ψ_1 i ψ_1 serà el generador de la *Wavelet*. Ara bé nosaltres volem que a partir de translacions d'aquest parell de funcions obtinguem una base per V_1 és a dir que $\{\psi_j(x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}, j=0,1}$ formi un sistema ortonormal complet de V_1 . Com que el conjunt $\{\varphi(2x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ és un sistema ortonormal complet de V_1 , podem expressar $\psi_0(x)$ i $\psi_1(x)$ com una combinació lineal d'aquesta base

$$\psi_k(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma) \varphi(2x - \gamma), \quad k = 0, 1. \quad (4.9)$$

La següent proposició ens dona condició necessària i suficient per a que el conjunt $\{\psi_k(x - \gamma)\}_{k=0,1, \gamma \in \mathbb{Z}}$ sigui una base ortonormal de V_1 .

Proposició 4.6. *El conjunt $\{\psi_k(x - \gamma)\}_{k=0,1, \gamma \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de V_1 si i només si*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_j(\gamma') \overline{a_k(2\gamma + \gamma')} = 2\delta(j, k)\delta(\gamma, 0). \quad (4.10)$$

Demostració. Per la ortonormalitat és suficient veure

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_j(x) \overline{\psi_k(x - \gamma)} dx = \delta(j, k)\delta(\gamma, 0).$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_j(x) \overline{\psi_k(x - \gamma)} dx &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \sum_{\gamma'' \in \mathbb{Z}} a_j(\gamma') \overline{a_k(\gamma'')} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - \gamma') \overline{\varphi(2x - 2\gamma - \gamma'')} dx \\ &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \sum_{\gamma'' \in \mathbb{Z}} a_j(\gamma') \overline{a_k(\gamma'' + 2\gamma)} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - \gamma') \overline{\varphi(2x - \gamma'')} dx \\ &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \sum_{\gamma'' \in \mathbb{Z}} a_j(\gamma') \overline{a_k(2\gamma + \gamma'')} \frac{1}{2} \delta(\gamma', \gamma'') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} a_j(\gamma') \overline{a_k(2\gamma + \gamma')}. \end{aligned}$$

Si veiem que $\{\psi_k(x - \gamma)\}_{k=0,1,\gamma \in \mathbb{Z}}$ genera V_1 tindrem que és base i ja haurem acabat, basta expressar $\varphi(2x - \widehat{\gamma})$ com una combinació lineal de $\{\psi_k(x - \gamma)\}_{k=0,1,\gamma \in \mathbb{Z}}$ on necessàriament els coeficients hauran de ser

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - \widehat{\gamma}) \overline{\psi_k(x - \gamma)} dx &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \overline{a_k(\gamma')} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - \widehat{\gamma}) \overline{\varphi(2x - 2\gamma - \gamma')} dx \\ &= \frac{1}{2} \overline{a_k(\widehat{\gamma} - 2\gamma)}. \end{aligned}$$

Per tant queda veure que efectivament

$$\varphi(2x - \overline{\gamma}) = \sum_{k=1,2} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \overline{a_k(\widehat{\gamma} - 2\gamma)} \psi_k(x - \gamma).$$

Substituint per l'expressió de $\psi_k(x - \gamma)$ en la base $\{\varphi(2x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ obtenim

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \overline{a_k(\widehat{\gamma} - 2\gamma)} a_k(2\gamma' + \gamma) \right) \varphi(2x - \gamma).$$

Per tant és suficient veure

$$\sum_{k=1,2} \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \overline{a_k(\widehat{\gamma} - 2\gamma)} a_k(2\gamma' + \gamma) = 2\delta(\gamma, \overline{\gamma}), \quad (4.11)$$

si $\overline{\gamma} = 0$ o 1 . La demostració d'aquesta identitat la posposarem per més endavant, doncs ens serà útil parlar dels filtres per demostrar-la (4.11). \square

Teorema 4.7. *Suposem que φ genera un anàlisi multi resolució i agafem el parell ψ_0, ψ_1 de manera $\psi_0 = \varphi$ i ψ_1 com hem definit a (4.9) on els coeficients $a_k(\gamma)$ compleixen (4.10). Aleshores el conjunts $\{2^{j/2}\psi_1(2^j x - \gamma)\}_{\gamma, j \in \mathbb{Z}}$ forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostració. Com abans W_0 denota el complementari de V_0 en V_1 . Observem que $\{\psi_1(x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de W_0 , això és perquè agafant les bases de V_1 donades en el Proposició 4.6 i traient-li $\{\psi_0(x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$. Reiterant l'argument obtenim

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

De manera que $\{2^{j/2}\psi_1(2^j x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de W_j . Així,

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j,$$

per la condició de densitat. \square

Amb una petita variació de la demostració podem arribar a que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \oplus V_0.$$

En definitiva hem reduït el problema de construir la *Wavelet* a trobar les solucions de les identitats (4.10) i (4.6).

4.3 La transformada de Fourier de la *Wavelet* i el filtre

Per començar aquesta secció donarem una equivalència entre que un conjunt sigui ortonormal i una identitat de la seva transformada

Proposició 4.8. *Donat $\{\varphi(x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ és un conjunt ortonormal si i només si*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\eta + \gamma)|^2 = 1 \quad \forall \zeta.$$

Demostració. Per demostrar aquest resultat començarem utilitzant el teorema de Plancherel i que $\widehat{\widehat{g}}(x - k) = \widehat{g}(x)e^{2\pi ik\xi}$:

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(x - k)} dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_j^{j+1} |\widehat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi ik\xi} d\xi \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\widehat{g}(\xi + j)|^2 e^{2\pi ik\xi} d\xi \\ &= \int_0^1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi + j)|^2 e^{2\pi ik\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Així veiem que la funció periòdica $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(\eta + j)|^2 = 1$ a.e.x, ja que el coeficient de Fourier és 1 en freqüència $k = 0$ i la resta de coeficients són zero. El recíproc és immediat. \square

Recordem com hem construït la nostra *Wavelet*

$$\psi_k(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma) \varphi(2x - \gamma), \quad k = 0, 1.$$

Que té per transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_k(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma) \varphi(2x - \gamma) \right) dx \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma) \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} \varphi(2x - \gamma) dx \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma) \frac{1}{2} e^{2\pi i \frac{y}{2} \gamma} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iz \frac{y}{2}} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Definició 4.9 (El filtre de la *Wavelet*). Direm que la següent expressió és el filtre de la *Wavelet* i el notarem per

$$A_k(y) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma) e^{2\pi iy\gamma}.$$

Llavor podem reescriure la transformada de Fourier com

$$\widehat{\psi}_k(x) = A_k\left(\frac{y}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) \quad (4.12)$$

Com que el nombre de coeficients $a_k(\gamma)$ que seran diferents de zero forçarem que siguin un nombre finit aleshores el filtre és una funció periòdica i diferenciable, com que $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_0(\gamma) = 2$ i $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$ aleshores

$$A_0(0) = 1 \quad \text{i} \quad \widehat{\varphi}(0) = 1.$$

Lema 4.10. *La successió de funcions $\{\varphi_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ convergeix puntualment a φ , on*

$$\varphi_N(\xi) = \prod_{n=1}^N A_0(2^{-n}\xi)$$

Demostració. Com que $\psi_0 = \varphi$ llavors,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = A_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2).$$

Reiterant aquest procés obtenim

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{n=1}^N A_0(2^{-n}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi).$$

Donat que $A_0(\xi)$ es continua i $A_0(0) = 1$ aleshores podem assegurar que $\exists N_0 > 0$ tal que $A_0(2^{-N}\xi) \neq 0, \forall N \geq N_0$.

$$\prod_{n=1}^N A_0(2^{-n}\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi)}$$

Finalment aplicant límit i un altre cop la continuïtat del filtre

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_0(2^{-n}\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N A_0(2^{-n}\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi)} = \widehat{\varphi}(\xi)$$

□

Per altre banda,

$$\psi_1(\xi) = A_1\left(\frac{1}{2}\xi\right) \prod_{j=2}^{\infty} A_0(2^{-j}\xi).$$

És a dir els filtres A_0 i A_1 ens determinen completament la *Wavelet*, llavors en definitiva es tracta de determinar els filtres. Restava veure quines propietats han de complir aquests filtres.

Abans ens havia quedat pendent el demostrar la identitat (4.11), per fer-ho traduirem aquesta identitat dels coeficients en una identitat en els filtres.

Aleshores per l'anterior la caracterització d'ortogonalitat de la Proposició 4.8 volem que es compleixi

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi + \gamma) \overline{\widehat{\psi}_j(\xi + \gamma)} = \delta_{jk}.$$

Ara bé, considerant $\eta_0 = 0$ i $\eta_1 = \frac{1}{2}$ és fàcil veure que podem representar qualsevol element de \mathbb{Z} amb la forma $2(\gamma + n_p), p = 0, 1$. Així

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi + \gamma) \overline{\widehat{\psi}_j(\xi + \gamma)} &= \sum_{p=1}^2 \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi + 2(\gamma + n_p)) \overline{\widehat{\psi}_j(\xi + 2(\gamma + n_p))} \\ &= \sum_{p=1}^2 A_k\left(\frac{1}{2}\xi + n_p\right) \overline{A_j\left(\frac{1}{2}\xi + n_p\right)} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\xi + n_p + \gamma\right)|^2. \end{aligned}$$

Que al ser $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\xi + n_p + \gamma\right)|^2 = 1$ ens queda la següent condició

$$\sum_{p=1}^2 A_k\left(\frac{1}{2}\xi + n_p\right) \overline{A_j\left(\frac{1}{2}\xi + n_p\right)} = \delta_{jk}.$$

Que ens implica

$$|A_k(\xi)| \leq 1.$$

I per tant que la transformada $\widehat{\psi}_k$ és acotada. Ara ja estem preparats per demostrar el següent lema que ens assegura la ortonormalitat de la *Wavelet* demostrant la identitat (4.11)

Lema 4.11. *El conjunt $\{\psi_k(x - \gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}, k=0,1}$ construït a partir de la parella ψ_0, ψ_1 es compleix la següent igualtat*

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} \overline{a_k(2\gamma' + \widehat{\gamma})} a_k(2\gamma' + \gamma) = 2\delta(\gamma, \widehat{\gamma})$$

Demostració. Considerem la matriu 2×2 $\{A_k(\xi + n_p)\}_{k=0,1, p=0,1}$ la qual sabem que és unitària per columnes. Però això vol dir que també és unitària per files i per tant,

$$\sum_{k=0}^1 A_k(\xi + \eta_p) \overline{A_j(\xi + \eta_q)} = \delta_{pq}.$$

Substituint per l'expressió de $A_k(\xi)$ obtenim

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{4} \sum_{k=0}^1 \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma' + \gamma) \overline{a_k(\gamma')} e^{2\pi i \gamma \eta_p} e^{2\pi i \gamma' (\eta_p - \eta_q)} \right) e^{2\pi i \gamma \xi} = \delta_{pq}.$$

Considerant com una igualtat entre els coeficients de les respectives series de Fourier podem igualar els coeficients per concloure

$$\frac{1}{4} \sum_{k=0}^1 \sum_{\gamma' \in \mathbb{Z}} a_k(\gamma' + \gamma) \overline{a_k(\gamma')} e^{2\pi i \gamma \eta_p} e^{2\pi i \gamma' (\eta_p - \eta_q)} = \delta_{pq} \delta(\gamma, 0).$$

Així elegint $\eta_p = 0$ i sumar per q obtenim la igualtat que cercàvem per $\widehat{\gamma} = 0$ ja que

$$\sum_{q=0}^1 e^{-2\pi i \gamma' \eta_q} = \begin{cases} 2 & \text{si } \gamma' \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

De la mateixa manera escollint $\eta_p = 1/2$ i multiplicant per $e^{2\pi i \eta_q}$ i sumant per q obtenim la igualtat cercada per $\widehat{\gamma} = 1$. \square

En aquesta secció i les anteriors hem reduït la construcció a trobar una *Wavelet* a trobare uns coeficients que compleixin (4.6) i que el seu filtre compleixi les següents propietats:

$$\begin{aligned} A_0(0) &= 1 \\ |A_0(\xi)|^2 + |A_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 &= 1 \\ A_0(\xi) &\neq 0 \text{ per } |\xi| \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Observació 4.12. En la construcció de *Wavelets* amb suport compacte haurem d'escollir els coeficients de manera que només n'hi hagi un nombre finit diferents de zero.

4.4 L'algorisme de Daubechies

En aquesta secció veurem la recepte per construir les *Wavelet* de Daubechies. Per començar partirem de la identitat $\cos^2(\pi\xi) + \sin^2(\pi\xi) = 1$ la qual elevarem a una potència senar

$$1 = (\cos^2(\pi\xi) + \sin^2(\pi\xi))^{2N+1} = \sum_{k=0}^{2N+1} \binom{2N+1}{k} \sin^{2k}(\pi\xi) \cos^{4N+2-2k}(\pi\xi).$$

Al haver-hi un nombre parell de sumands agafem la primera mitat i definim el nostre filtre tal que

$$|A_0(\xi)|^2 = \left(\sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{k} \sin^{2k}(\pi\xi) \cos^{4N+2-2k}(\pi\xi) \right)$$

Com que $\cos(\pi(\xi + \frac{1}{2})) = -\sin(\pi\xi)$ i $\cos(\pi\xi) = \sin(\pi(\xi + \frac{1}{2}))$. Aleshores quan fem $|A_0(\xi + \frac{1}{2})|^2$ obtenim l'altre mitat de sumands i per tant

$$|A_0(\xi)|^2 + |A_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1.$$

A més $|A_0(0)|^2 = 1$ i $|A_0(\xi)| > 0$ sempre que $|\xi| \leq \frac{1}{4}$, doncs el cosinus no s'anul·la en $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Queda veure que el nostre filtre és equivalent a un polinomi amb coeficients reals positius. Primer traiem factor comú de $\cos^{2N+2}(\pi\xi)$, llavors tindrem la següent factorització del filtre:

$$|A_0(\xi)|^2 = (\cos^2(\pi\xi))^{N+1} \left(\sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{k} (\sin^2(\pi\xi))^k (\cos^2(\pi\xi))^{N-k} \right).$$

El següent lema ens dona una expressió alternativa pel sumatori de la dreta de forma que serà un polinomi on la variable serà $\sin^2(\pi\xi)$.

Lema 4.13. *Sigui $P_N(y) = \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{k} y^k (1-y)^{N-k}$ per $0 \leq y \leq 1$. Aleshores $P_N(y) = \sum_{k=0}^N \binom{N+k}{k} y^k$.*

Demostració.

$$\begin{aligned} 1 &= (y + (y-1))^{2N+1} = \sum_{k=0}^{2N+1} \binom{2N+1}{k} y^k (1-y)^{2N+1-k} \\ &= (1-y)^{N+1} \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{k} y^k (1-y)^{N-k} \\ &\quad + y^{N+1} \sum_{k=N+1}^{2N+1} \binom{2N+1}{k} y^{k-N-1} (1-y)^{2N+1-k} \\ &= (1-y)^{N+1} P_N(y) + y^{N+1} P_N(1-y). \end{aligned}$$

Primer observem que $(1-y)^{N+1} P_n = 1 + O(y^{N+1})$, $y \rightarrow 0$ i ara considerem

$$Q_N(y) = \sum_{k=0}^N \binom{N+1}{k} y^k = (1-y)^{-(N+1)} + O(y^{N+1}), \quad y \rightarrow 0,$$

on els primers $N+1$ termes són el desenvolupament en sèries de $(1-y)^{-(N+1)}$. Així

$$(1-y)^{N+1} Q_N(y) = 1 + O(y^{N+1}), \quad y \rightarrow 0.$$

Aleshores el polinomi diferència és

$$(1-y)^{N+1} [P_N(y) - Q_N(y)] = O(y^{N+1}), \quad y \rightarrow 0.$$

En particular les primeres N derivades del polinomi diferència avaluades en el zero s'anul·len, per tant és idènticament zero. \square

El filtre hauria de ser "l'arrel quadrada" d'aquest polinomi trigonomètric $|A_0(\xi)|^2$ que hem trobat i això ens ho dona (2.36). La manera de com trobar aquest polinomi no l'exposarem però sí que el trobarem en casos on el polinomi sigui d'ordre petit.

Finalment per trobar la *Wavelet* de Daubechies el que farem serà trobar la funció iterant recursivament el següent operador funcional S :

$$S_0[g](x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_0(\gamma)g(2x - \gamma).$$

Per falta d'espai hem omès la demostració de que aquest operador té un únic punt fix, podeu consultar a la secció 6.5 *The cascade algorithm* en [4].

Escollint de funció inicial la funció característica en $(0, 1)$, aquesta iteració sabem que acaba tendint a l'únic punt fix que és la nostra funció escala. Per tant l'anirem iterant i quan la diferència entre dos iterats sigui més petit que una tolerància ens pararem. Llavors trobarem la *Wavelet* aplicant aquest altre operador funcional S_1 a la nostre aproximació de la funció escala,

$$S_1[g](x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_1(\gamma)g(2x - \gamma).$$

4.5 Daubechies 4

Primer calcularem el polinomi que ens dona (4.13).

$$P(y) = 1 + 2y$$

Ara substituïrem y per $\sin^2(\pi\xi) = \left(\frac{e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}}{2i}\right)^2$ i ens dona el següent polinomi trigonomètric

$$P(\xi) = 2 - \frac{1}{2}e^{-2\pi\xi} - \frac{1}{2}e^{2\pi\xi}.$$

Llavors per trobar l'arrel d'aquest polinomi agafam $q(\xi) = b_0 + b_1e^{2\pi\xi}$ tal que $P(\xi) = q(\xi)\overline{q(\xi)}$ i això dona lloc al següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} b_0^2 + b_1^2 &= 2 \\ b_0b_1 &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

A més donat que $A_0(\xi) = \cos^2(\xi)q(\xi)$, podem hem d'afegir-hi la condició $A_0(0) = q(0) = 1$ i per tant

$$b_0 + b_1 = 1$$

Resolent el sistema una solució que trobam és:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ b_1 &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Llavors el nostre filtre queda

$$\begin{aligned} A_0 &= \left(\frac{1 + e^{-2\pi\xi}}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-2\pi\xi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right) e^{-2\pi i \xi} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) e^{-4\pi i \xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} e^{-6\pi i \xi} \right) \end{aligned}$$

D'on obtenim els coeficients diferents de zero per la nostra funció escala

$a_0(0)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
$a_0(-1)$	$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$
$a_0(-2)$	$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$
$a_0(-3)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Com que el filtre per a la *Wavelet* és $A_1(\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{A_0(\xi + \frac{1}{2})}$ és té que els coeficients de la *Wavelet* compleixen:

$$a_1(\gamma) = (-1)^{\gamma+1} \overline{a_0(1 - \gamma)}$$

Finalment els coeficients de la *Wavelet* diferents de zero són

$a_1(1)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
$a_1(2)$	$-\frac{3+\sqrt{3}}{4}$
$a_1(3)$	$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$
$a_1(4)$	$-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Per veure el resultat mirar la Figura (4.1).

4.6 Daubechies 6

Procedirem igual que en l'apartat anterior

$$P(y) = 1 + 3y + 6y^2.$$

Llavors,

$$P(\xi) = \frac{19}{4} - \frac{9}{4}(e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi}) - \frac{3}{8}(e^{4\pi i \xi} + e^{-4\pi i \xi}).$$

Llavors l'arrel del polinomi serà de la forma $q(\xi) = b_0 + b_1 e^{-2\pi i \xi} + b_2 e^{-4\pi i \xi}$ i tenint en conta que $A(0) = q(0) = 1$ en resulten les següents equacions

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = \frac{19}{4}$$

$$b_0 b_1 + b_2 b_1 = -\frac{9}{4}$$

$$b_0 b_2 = \frac{3}{8}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 = 1,$$

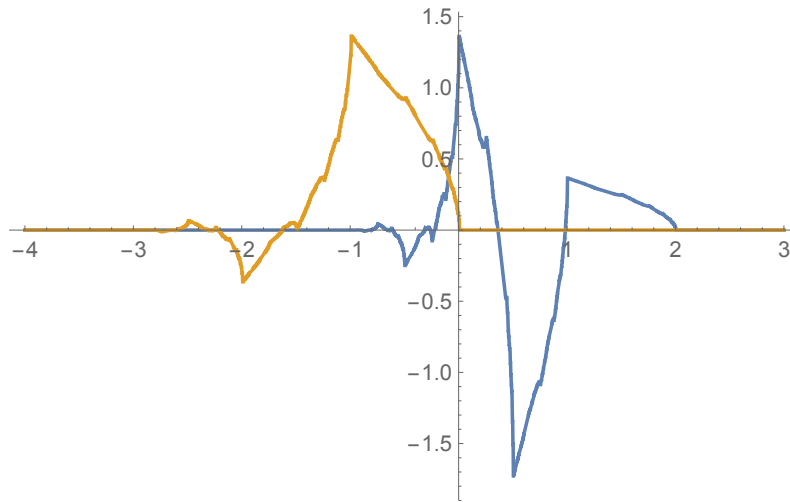


Figura 4.1: Funció escala taronja i la *Wavelet* D4 blava.

una solució d'aquest sistema és:

$$b_0 = \frac{1 - \sqrt{10}}{2}$$

$$b_1 = \frac{1 + \sqrt{10}}{4}$$

$$b_2 = \frac{1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{4}$$

Així el filtre de la *Wavelet* queda

$$A_0(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^3 (b_0 + b_1 e^{-2\pi i \xi} + b_2 e^{-4\pi i \xi})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{b_0}{4} + \frac{b_1 - 3b_0}{4} e^{-2\pi i \xi} + \frac{b_0 - 3b_1 + b_2}{4} e^{-4\pi i \xi} + \frac{3b_1 - 3b_2 - b_0}{4} e^{-6\pi i \xi} \right.$$

$$\left. + \frac{3b_2 - b_1}{4} e^{-8\pi i \xi} + \frac{b_2}{4} e^{-10\pi i \xi} \right)$$

Així els coeficients de la funció escala són

$a_0(0)$	0.47046721
$a_0(-1)$	1.14111692
$a_0(-2)$	0.650365
$a_0(-3)$	-0.19093442
$a_0(-4)$	-0.12083221
$a_0(-5)$	0.0498175

Per tant utilitzant la mateixa fórmula que abans els coeficients de la *Wavelet* són

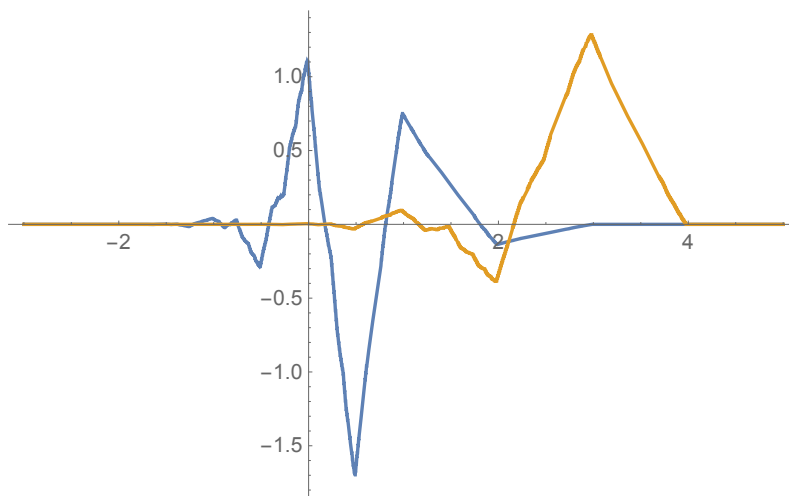


Figura 4.2: Funció escala taronja i la *Wavelet* blava de D6.

$a_1(1)$	0.47046721
$a_1(2)$	-1.14111692
$a_1(3)$	0.650365
$a_1(4)$	0.19093442
$a_1(5)$	-0.12083221
$a_1(6)$	-0.0498175

Per veure el resultat mirar la Figura (4.2).

4.7 La *Wavelet* de Meyer

Fins ara hem vist *Wavelet* amb suport compacte però d'una regularitat finita, en aquesta secció pretenem donar un exemple de *Wavelet* que sigui de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Per fer-ho ens basarem en el següent teorema.

Teorema 4.14. *Suposem $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que*

- (i) *Les translacions $\{\Phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ són ortonormals.*
- (ii) *$\Phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \Phi(2x - n)$ amb $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$.*
- (iii) *La transformada de Fourier $\widehat{\Phi}(\xi)$ es continua en $\xi = 0$ amb $|\widehat{\Phi}(0)| = 1$.*

Per fer la demostració d'aquest teorema utilitzarem els següents tres lemes, tot i això abans notem que degut a la identitat escala és té que $V_j \subset V_{j+1}$. Ara considerem $\Phi_{j,k} = 2^{j/2} \Phi(2^j t - k)$ i definim la projecció P_j com

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \Phi_{j,k}.$$

Lema 4.15. *Sigui $f \in L^2(\mathbb{R})$, aleshores*

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0.$$

Demostració. Com que $\|P_j\| = 1$ és suficient provar-ho per un conjunt de funcions dens a $L^2(\mathbb{R})$, per tant ho provarem per funcions amb suport compacte. Si f té suport en $[-R, R]$, llavors

$$\begin{aligned} \|P_j f\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j f, \Phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \Phi_{j,k} \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-R}^R |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-R}^R |\Phi_{j,k}(x)|^2 dx \right) \\ &= \|f\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \left(\int_{-R}^R |\Phi(2^j x - k)|^2 dx \right) \\ &= \|f\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-k-2^j R}^{-k+2^j R} |\Phi(u)|^2 du. \end{aligned}$$

Si $2^j R < \frac{1}{2}$ aleshores les integrals són sobre conjunts disjunts, amb això considerant $U_j = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (-k - 2^j R, -k + 2^j R)$ tenim que $\cap_{j \in \mathbb{Z}} U_j = \mathbb{Z}$. Així,

$$\|P_j f\| \leq \|f\|^2 \int_{U_j} |\varphi|^2 du \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

pel teorema de convergència dominada. □

Lema 4.16. *Sigui $f \in L^2(\mathbb{R})$ amb la transformada de Fourier acotada i amb suport en $[-R, R]$. Llavors per $2^{j-1} < R$ tenim*

$$\|P_j f\|^2 = \int_{-R}^R |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi.$$

Demostració. Per la identitat de Parseval podem escriure

$$\begin{aligned} \|P_j f\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j f, \Phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\Phi}_{j,k}}(\xi) d\xi \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i k \xi 2^{-j}} 2^{-j/2} \overline{\widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2. \end{aligned}$$

Notem que hem utilitzat que la transformada de Fourier de $\Phi_{j,k}$ la podem escriure com $2^{j/2} e^{-1\pi i k \xi 2^{-j}} \widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)$ i la identitat de Plancherel. Ara si $2^{j-1} > R$ la integral val el mateix que en l'interval $[-2^{j-1}, 2^{j-1}]$, on $\{2^{-j/2} e^{2\pi i k \xi 2^{-j}}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma una base ortonormal, llavors pel teorema de Parseval per les series de Fourier tenim

$$\|P_j f\|^2 = \int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\Phi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-R}^R |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi.$$

□

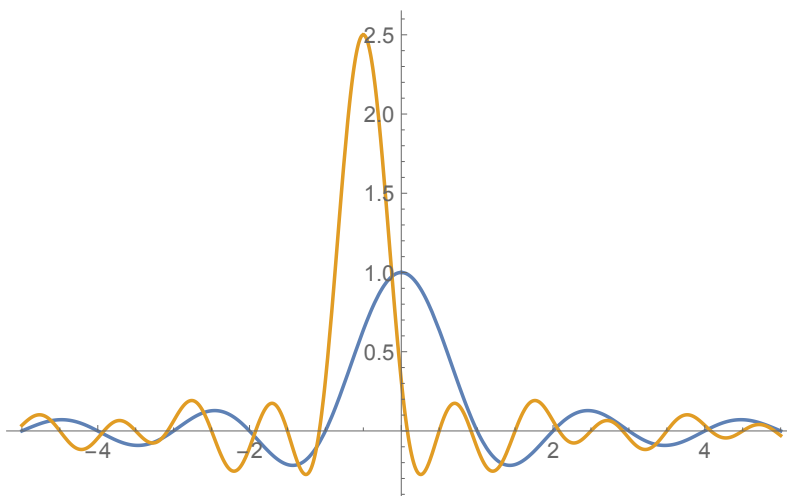


Figura 4.3: Funció escala blava i Wavelet de Meyer taronja.

Lema 4.17. *Suposem que la funció escala satisfà la condició addicional que $\widehat{\Phi}(\xi)$ és continua en $\xi = 0$ amb $|\widehat{\Phi}(0)| = 1$. Llavors per qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$\|P_j f - f\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Demostració. És suficient provar-ho per un conjunt dens de funcions del nostre espai, ho farem per les funcions f que la seva transformada de Fourier té suport compacte i està acotada. A més pel teorema de la projecció tenim que

$$\|P_j f\|^2 = \|f\|^2 + \|P_j f - f\|^2,$$

llavors veurem que $\|P_j f\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|$. Utilitzant la hipòtesis que $|\widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)|$ convergeix uniformement a 1 en conjunts compactes quan $j \rightarrow \infty$ per (4.16) donat $2^{j-1} > R$

$$\|P_j f\|^2 = \int_{-R}^R |\widehat{f}(\xi) \widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2.$$

□

Anem ara amb la prova del Teorema 4.14 .

Demostració. Per provar que compleix les propietats de AMR és suficient veure que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f \quad \text{i} \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0,$$

per a qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ara bé aquestes dos propietats són les que hem provat en (4.17) i (4.15). □

Un cop tenim aquest teorema estem preparats per a construir les *Wavelets* de Meyer. Per a construir-les partirem d'una funció $\Theta(\xi)$ definida en l'interval $0 \leq \xi \leq 1$ que satisfaci les següents propietats:

$$0 \leq \Theta(\xi) \leq 1. \quad (4.13)$$

$$\Theta(\xi) + \Theta(1 - \xi) = 1. \quad (4.14)$$

$$\Theta(\xi) \text{ sigui monòtona decreixent.} \quad (4.15)$$

$$\Theta(\xi) = 1 \text{ en } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{3}. \quad (4.16)$$

Notem que fàcilment de les propietats podem deduir que $\Theta(\xi) = 0$ en $\frac{2}{3} \leq \xi \leq 1$, $\Theta(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ i que $\Theta(\xi) \geq \frac{1}{2}$ en $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$. Aquesta funció la podem estendre a la recta real definint $\Theta(\xi) = \Theta(-\xi)$ en $-1 \leq \xi \leq 0$ i $\Theta(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1$. El resultat és una funció senar que satisfà $0 \leq \Theta(\xi) \leq 1$. Llavors aquesta funció que hem definit volem que sigui la transformada de Fourier de la nostra funció escala, així que definim Φ com

$$\Phi(t) = \int_{-1}^1 \sqrt{\Theta(\xi)} e^{2\pi i t \xi} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La següent proposició ens assegura que aquesta funció escala ens defineix un AMR i ens permetrà crear la *Wavelet*.

Proposició 4.18. $\Phi(t)$ és una funció escala d'un AMR que satisfà les condicions del Teorema 4.14 i és de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ amb totes les derivades acotades. A més si la funció $\sqrt{\Theta(\xi)}$ es de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, llavors $|t^k \Phi^{(l)}(t)| \leq C_{k,l} \forall t \in \mathbb{R}$ i $\forall k \in \mathbb{N}$. En particular si $\sqrt{\Theta(\xi)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, aleshores $\Phi \in \mathcal{S}$.

Demostració. Primer comprovarem les condicions del Teorema 4.14. Com que Θ te el suport contingut en un interval de llargada 2 tenim que la següent suma només té dos sumands diferents de zero.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\Phi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta(\xi + k).$$

I per tant ens queda una expressió de la forma

$$\Theta(\xi) + \Theta(\xi + 1) = \Theta(-\xi) + \Theta(1 + \xi) = 1,$$

fet que prova la ortonormalitat de $\{\Phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Per provar l'equació escala definim la següent filtre

$$m_0(\xi) = \sqrt{\Theta(2\xi)} \quad |\xi| \leq \frac{1}{2}.$$

Aquesta funció l'estendrem a tota la recta real com una funció 1-periòdica, notem que de la definició és fàcil veure que la podem descompondre la transformada de la funció escala com

$$\widehat{\Phi}(2\xi) = m_0(\xi) \widehat{\Phi}(\xi).$$

Això és perquè quan $\Theta(2\xi) \neq 0$ $\Theta(\xi) = 1$, que ocorre per $|\xi| \leq \frac{1}{3}$, a més $m_0(\xi) = 0 = \Theta(2\xi)$ per $\frac{1}{2} < |\xi| < \frac{1}{2}$. Finalment com que $\Theta(\xi) = 1$ en $0 \leq \xi \leq \frac{1}{3}$ tenim que $\widehat{\Phi}$ es continua en $\xi = 0$ amb $|\widehat{\Phi}(0)| = 1$. Llavors pel teorema 4.14 Φ ens genera un AMR. Com que $\widehat{\Phi}$ té el suport compacte, aleshores Φ es de classe \mathcal{C}^∞ i tenim les següents cotes per a les seves derivades:

$$|\Phi^{(l)}(t)| \leq \int_{-1}^1 |2\pi|^l |\widehat{\Phi}(\xi)| d\xi < \infty.$$

Finalment com que tenim k derivades contínues podem escriure

$$(-2\pi it)^k \Phi^{(j)}(t) = \int_{-1}^1 e^{2\pi i \xi} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k [(2\pi i \xi)^l \widehat{\Phi}(\xi)] d\xi.$$

□

Exemple 4.19. Si elegim la funció $\Theta(\xi)$ següent

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \geq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |\xi| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{altrament.} \end{cases}$$

És fàcil veure que compleix les condicions (4.13), (4.14), (4.15) i (4.16). Aleshores la funció escala coneguda com a la funció escala de Shannon és $\Phi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

Per trobar la seva *Wavelet* utilitzarem (4.12)

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2),$$

a més de la següent caracterització del filtre de la *Wavelet*:

$$m_1(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \overline{m_0(\xi + 1/2)}.$$

Llavors,

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \overline{m_0(\xi/2 + 1/2)} \widehat{\varphi}(\xi/2),$$

Per tant:

$$\psi(\xi) = -2 \frac{\sin(2\pi x) - \cos(\pi x)}{\pi(2x + 1)}.$$

En la Figura 4.3 podem veure la representació gràfica de la funció escala i la *Wavelet* de Shannon.

Capítol 5

La transformada discreta de Fourier i les *Wavelets* en \mathbb{Z}_N

Per finalitzar el treball presentarem en aquest últim capítol la teoria de Fourier i el concepte de *Wavelet* dins de l'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, veurem com els objectes d'estudi sorgeixen de manera natural per modelitzar el tractament de senyals de so i en el processament d'imatges. Així introduïrem una sèrie de conceptes i objectes matemàtics que anirem donant-li un sentit en les aplicacions en l'enginyeria.

5.1 L'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

En els aspectes més teòrics nosaltres considerem una ona de so com una funció que està definida de manera continua en \mathbb{R} o en $(0, 1)$ però quan nosaltres ens interessem en com podem agafar un so i enviar-lo a través d'un dispositiu electrònic no és factible que aquest guardi la informació d'una ona continua. És per això que dedicarem a fer l'estudi de les ones de so des de el punt de vista que només la tenim definida en una serie de punts que podríem considerar equidistants, així doncs amb aquesta reducció podem fer tractable el so i a l'hora si agafem punts molt propers continuarem guardant l'essència del que volem enviar. Llavors per aquest motiu ens dedicarem a estudiar funcions definides només en un nombre finit de punts. A continuació construirem l'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ i exposarem els resultats bàsics per el desenvolupament de les *Wavelets* en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Considerem $X = \{0, \dots, N - 1\}$, $\mathbb{F} = \mathcal{P}(X)$ i μ la mesura de contar, aleshores el conjunt $\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C}^N : z = (z(0), \dots, z(N - 1))\}$ amb el següent producte escalar:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\overline{w(n)}, \quad z, w \in \mathcal{G}$$

és un espai de Hilbert.

Llavors volem estendre la definició d'aquest espai de forma periòdica a tot \mathbb{Z} , és a dir que per a tot $n \in \mathbb{Z}$ es compleix

$$z(n + N) = z(n).$$

D'aquesta manera obtenim el que anomenarem $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ que continuarà sent un espai de Hilbert de dimensió N .

Lema 5.1. *El següent conjunt $\{E_0, \dots, E_{N-1}\}$ tal que,*

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i n m / N} \quad \forall m, n \in \{0, \dots, N-1\},$$

és una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Demostració. És suficient veure que són ortogonals i de norma 1:

$$\langle E_j, E_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{2\pi i n (j-k) / N}.$$

De manera que si $j = k$ llavors val 1 mentre que si $j \neq k$ aleshores fem la suma geomètrica:

$$\langle E_j, E_k \rangle = \frac{1}{N} \frac{e^{2\pi i N (j-k) / N} - e^{2\pi i 0 (j-k) / N}}{1 - e^{2\pi i (j-k) / N}} = 0.$$

□

Definició 5.2 (Transformada discreta de Fourier). Sigui $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $m \in \mathbb{Z}_N$:

$$\widehat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N}.$$

Aleshores,

$$\widehat{z} = (\widehat{z}(0), \dots, \widehat{z}(N-1)).$$

Teorema 5.3. *Sigui $w, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$*

$$(i) \quad z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \widehat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} \quad (\text{Teorema d'inversió}).$$

$$(ii) \quad \langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \langle \widehat{z}, \widehat{w} \rangle.$$

$$(iii) \quad \|z\|^2 = \frac{1}{N} \|\widehat{z}\|^2.$$

Demostració. (i) Fent servir l'expressió per $\widehat{z}(m)$ i permutant sumatoris:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \widehat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i (n-k) m / N} = z(n).$$

(ii) Utilitzant l'apartat (i)

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{w(k)} = \frac{1}{N^2} \sum_{m,j=0}^{N-1} \widehat{z}(m) \overline{\widehat{w}(j)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i (m-j) k / N} = \frac{1}{N} \langle \widehat{z}, \widehat{w} \rangle.$$

(iii) S'obté aplicant l'apartat (ii) en $w = z$. □

Definició 5.4 (Base de Fourier). Per a $m = 0, \dots, N - 1$ definim $F_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ com

$$F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi i m n / N}, \quad \text{per } n = 0, \dots, N - 1.$$

Sigui $F = \{F_0, \dots, F_{N-1}\}$ el que anomenarem base de Fourier.

Observació 5.5. Notem que $F_m = N^{-1/2} E_m$ fet que ens dona que és base tot i que no sigui ortonormal però les propietats del teorema anterior en resulten normalitzades, això és sense el coeficient $\frac{1}{N}$ en l'igualtat. Aquesta base juga un paper molt important com veurem més endavant. A més com que la transformada de Fourier és un operador lineal en espais vectorials de dimensió finita la podem expressar com una matriu que té inversa degut a la fórmula d'inversió de Fourier que a més ens dona una manera natural de definir-la.

Definició 5.6 (Transformada inversa). Sigui $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ aleshores definim la transformada inversa \check{w} com

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi i m n / N} \quad \text{per } n = 0, \dots, N - 1,$$

llavors, $\check{w} = (\check{w}_0, \dots, \check{w}_{N-1})$.

Observació 5.7. Una idea intuïtiva de la transformada de Fourier és que donada una senyal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ llavors el mòdul dels coeficients de la seva transformada $|\widehat{z}(n)|$ són els coeficients que multiplica a cada una de les freqüències pures que aquestes formen l'ona.

Definició 5.8 (Translació). Una k -translació és l'aplicació R_k tal que

$$R_k(z) = z(n - k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

En un abús del llenguatge per no recarregar la notació ho expressarem com $R_k z$.

Definició 5.9 (Convolució). Sigui $w, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definim $(z * w)$ de manera que

$$(z * w)(n) = \sum_{k=0}^{M-1} z(k) w(n - k), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definició 5.10 (Conjugat de la reflexió). Sigui $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definim \widetilde{w} de manera que

$$\widetilde{w}(n) = \overline{w(-n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lema 5.11. Sigui $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, aleshores $\widehat{\widetilde{w}}(n) = \overline{\widehat{w}(n)}$.

Demostració. Fent el canvi $m = -k$,

$$\widehat{\tilde{w}}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{w}(k) e^{-2\pi i n k / N} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{w(m)} e^{2\pi i m n / N} = \overline{\widehat{w}(n)}.$$

□

Lema 5.12. *Siguin $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $k \in \mathbb{Z}$, es compleix:*

(i) $(z * \tilde{w})(k) = \langle R_k z, w \rangle.$

(ii) $(z * w)(k) = \langle R_k z, \tilde{w} \rangle.$

Demostració. (i)

$$(z * \tilde{w})(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \tilde{w}(k-n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \overline{w(n-k)} = \langle R_k z, w \rangle.$$

(ii)

$$(z * w)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) w(k-n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \overline{\tilde{w}(n-k)} = \langle R_k z, \tilde{w} \rangle.$$

□

Lema 5.13. *Donats $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ llavors $\forall k \in \mathbb{Z}$ és té que:*

$$\widehat{z * w}(m) = \widehat{z}(m) \widehat{w}(m).$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \widehat{z * w}(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} (z * w)(k) e^{-2\pi i k m / N} = \sum_{k,j=0}^{N-1} z(j) w(k-j) e^{-2\pi i k m / N} \\ &= \sum_{l,j=0}^{N-1} z(j) w(l) e^{-2\pi i (l+k) m / N} = \widehat{z}(m) \widehat{w}(m). \end{aligned}$$

□

Definició 5.14. Sigui $M \in \mathbb{N}$ i considerem $N = 2M$, aleshores donat $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ definirem z^* com:

$$z^*(n) = (-1)^n z(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lema 5.15. *Sigui $M \in \mathbb{N}$ i considerem $N = 2M$, aleshores donat $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es compleix*

$$\widehat{z^*}(n) = \widehat{z}(n + M)$$

Demostració.

$$\begin{aligned}\widehat{z}^*(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{z}^*(k) e^{-2\pi i k n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^n z(k) e^{-2\pi i k n / N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{-\pi i k} e^{-2\pi i k n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{-2\pi i k (n+M) / N}.\end{aligned}$$

□

Observació 5.16. Donat $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ i $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, aleshores és fàcil veure:

$$(z + z^*)(n) = \begin{cases} 2z(n), & \text{si } n \text{ és parell} \\ 0, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

5.2 *Wavelets* en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

En aquesta secció ens centrarem en veure com construir les *Wavelets* i començarem responent al perquè estem interessats en buscar unes bases alternatives a les de Fourier. El motiu és que les de Fourier tenen unes limitacions important, sobretot perquè no estan localitzades. Què vol dir que no estan localitzades?

Definició 5.17. Direm que un vector $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ està localitzat en l'espai al voltant de $n_0 \in \mathbb{N}$ si fora d'un entorn de n_0 els coeficients que l'acompanyen són zero o molt propers a zero.

En canvi la base de Fourier és el més lluny possible d'estar localitzada, per altre banda la base Euclídea sí que ho està i de fet més localitzada impossible però la seva transformada està molt lluny de ser localitzada, a l'inrevés que la de Fourier. Llavors el nostre objectiu serà trobar unes bases que estiguin localitzades en l'espai i en les freqüències. Ara bé, per què volem trobar unes bases que estiguin localitzades en l'espai i en les freqüències?

La resposta a aquesta pregunta la podem trobar en les aplicacions que tenen, doncs per exemple si en una imatge ens volem fer focus en un lloc concret aleshores bastarà que ens mirem els coeficients dels elements de la base que estan localitzades al voltant d'aquell focus. Un altre exemple és també que en el filtratge d'ones de so, doncs si tenim en l'espai de les freqüències és possible que vulguem eliminar freqüències molt altes perquè l'oïda humana tanmateix no les percep o per exemple vulguem aïllar el so que provengui d'unes freqüències concretes. Finalment un últim exemple és en la compressió d'imatges o senyals que en parlarem més detall en el cas de senyals en la secció 5.3.

Un altre fet important computacionalment és que la base sigui ortonormal i que estigui generada per les translacions d'un sol element llavors se'n fa molt fàcil el càlcul de la transformada de les translades a partir del càlcul del primer element, desafortunadament això no és compatible amb que la base estigui localitzada en l'espai i en les freqüències:

Proposició 5.18. *Si $N \in \mathbb{N}$, aleshores $\{R_k w\}_0^{N-1}$ és una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ sí i només sí:*

$$\langle w, R_k w \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Demostració. La primera implicació és trivial aleshores veiem que $\{R_k w\}_0^{N-1}$ és ortonormal.

- Si $j = k$:

$$\langle R_k w, R_j w \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} w(n-k) \overline{w(n-j)} = \sum_{m=0}^{N-1} w(m) \overline{w(m)} = \langle w, R_0 w \rangle = 1.$$

- Si $j \neq k$:

$$\begin{aligned} \langle R_k w, R_j w \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n-k) \overline{w(n-j)} = \sum_{m=0}^{N-1} w(m) \overline{w(m+j-k)} \\ &= \langle w, R_{k-j} w \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Proposició 5.19. *Si $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, llavors $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ és una base ortonormal sí i només sí:*

$$|\widehat{w}(n)| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

Definició 5.20 (La delta de Dirac). Si $N \in \mathbb{N}$ aleshores $\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\delta(n) = 0$ si $n \neq 0$ i $\delta(0) = 1$.

Observació 5.21. Notem que $\delta = e_0$ i per tant $\widehat{\delta}(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposició 5.22. *Si $N \in \mathbb{N}$ i $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, llavors $\{R_k w\}_0^{N-1}$ és una base ortonormal sí, i només sí*

$$|\widehat{w}(n)| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostració. Per la Proposició 5.18 $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ és una base ortonormal sí, i només sí,

$$\langle w, R_k w \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

A més com hem vist que

$$\langle w, R_k w \rangle = w * \widetilde{w}(k),$$

podem concloure $w * \widetilde{w} = \delta$. Pel Teorema 5.3 i els Lemes 5.13 i 5.11:

$$1 = \widehat{\delta}(n) = (w * \widetilde{w})(n) = \widehat{w} \widehat{\widetilde{w}}(n) = \widehat{w} \overline{\widehat{w}(n)} = |\widehat{w}(n)|^2.$$

□

Ara bé si no potser que estigui generada per un element, doncs que estigui generada per les translacions de dos elements, en aquest cas és possible com veurem a continuació sempre que N sigui parell.

Definició 5.23. Sigui $M \in \mathbb{N}$ i $N = 2M$, donats $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ aleshores una base ortonormal de la forma $\{R_{2k}v\} \cap \{R_{2j}u\}$, $j, k = 0, \dots, M - 1$ l'anomenarem primera fase de la *Wavelet*.

Observació 5.24. És molt fàcil veure que és equivalent que amb $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ aleshores $\{R_{2k}u\}$ es un conjunt ortonormal sí, i només sí

$$(w * \tilde{w})(2k) = \langle w, R_{2k} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k = 1, \dots, M - 1. \end{cases}$$

És suficient aplicar el Lema 5.12 i fer el canvi $m = n - 2k$.

Lema 5.25. Suposem $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$, $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, llavors $\{R_{2k}w\}_{k=0}^{M-1}$ és un conjunt ortonormal amb M elements si i només sí

$$|\widehat{w}(n)|^2 + |\widehat{w}(n + M)|^2 = 2, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Demostració. Per demostrar-ho utilitzarem la caracterització de l'Observació 5.24, a més recordem que per l'Observació 5.16 tenim que

$$(w * \tilde{w} + (w * \tilde{w})^*)(n) = \begin{cases} 2w * \tilde{w}(n), & \text{si } n \text{ parell} \\ 0, & \text{si } n \text{ senar.} \end{cases}$$

Ara bé és suficient veure que $(w * \tilde{w} + (w * \tilde{w})^*) = 2\delta$, pel Teorema 5.3 és el mateix veure que:

$$(w * \tilde{w} + (w * \tilde{w})^*)^\wedge(n) = 2, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Com hem vist en els Lemes 5.13 5.11,

$$\widehat{w * \tilde{w}}(n) = \widehat{\tilde{w}}(n)\widehat{w}(n) = \widehat{w}(n)\overline{\widehat{w}(n)} = |\widehat{w}(n)|^2.$$

Finalment pel Lema 5.15 $(\widehat{w * \tilde{w}})^*(n) = |\widehat{w}(n + M)|^2$ i per tant,

$$(w * \tilde{w} + (w * \tilde{w})^*)^\wedge(n) = |\widehat{w}(n)|^2 + |\widehat{w}(n + M)|^2 = 2.$$

□

Observació 5.26. De manera molt senzilla es pot veure que els dos següents enunciatos són equivalents

(a) $\langle u, R_{2k}v \rangle = 0 \quad \forall k = 0, \dots, M - 1.$

(b) $\langle R_{2k}u, R_{2j}v \rangle = 0 \quad \forall k, j = 0, \dots, M - 1.$

Definició 5.27. Donat $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ i siguin $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, per $n \in \mathbb{Z}$ definirem $A(n)$ per

$$A(n) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \widehat{u}(n) & \widehat{v}(n) \\ \widehat{u}(n+M) & \widehat{v}(n+M) \end{pmatrix},$$

l'anomenarem matriu sistema de u i v .

Finalment amb el següent teorema obtenim una caracterització de les *Wavelets* en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ que esdevé l'eina fonamental en la construcció d'aquestes.

Teorema 5.28. *Suposem $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$, sigui $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Llavors*

$$B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1},$$

és una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ sí i només sí

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 &= 2 \\ |\widehat{v}(n)|^2 + |\widehat{v}(n+M)|^2 &= 2 \\ \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} &= 0, \end{aligned}$$

per a $n = 0, \dots, M-1$.

Demostració. Notem que pel Lema 5.25 a u i a v obtenim l'equivalència amb les dos primeres identitats. Queda veure que

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v \rangle = 0 \iff \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0,$$

per a tot $k, j, n = 0, \dots, M-1$.

Notem que per les Observacions 5.16 i 5.26 junt amb el Lema 5.12 $\langle R_{2k}u, R_{2j}v \rangle = 0$ és el mateix que

$$(u * \widetilde{v}) + (u * \widetilde{v})^* = 0.$$

Aleshores aplicant el Teorema 5.3,

$$\widehat{u * \widetilde{v}} + \widehat{(u * \widetilde{v})^*} = 0,$$

llavors pels Lemes 5.13 i 5.11

$$\widehat{u * \widetilde{v}}(n) = \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)}.$$

Finalment pel Lema 5.15

$$\widehat{(u * \widetilde{v})^*} = \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)},$$

amb el que obtenim el que volíem □

Corol·lari 5.29. *Suposem $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ i $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, aleshores $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ és una base ortonormal sí i només sí les matrius del sistema $A(n)$ de u i v són unitàries.*

Lema 5.30. *Suposem $M \in \mathbb{N}$, sigui $N = 2M$ i $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ és un conjunt ortonormal de M elements, definim $v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ com*

$$v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N.$$

*Aleshores $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una primera fase de la *Wavelet*.*

Demostració. Per començar cerquem la transformada de Fourier de v :

$$\widehat{w}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{u(n)} e^{2\pi i m n / N}.$$

Llavors substituïnt per $v(k)$ i fent el canvi $k = 1 - n$ ens queda

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} (-1)^k e^{-1\pi i m (1-k) / N} = e^{-2\pi i m / N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} (e^{-i\pi})^{-k} e^{2\pi i m k / N} \\ &= e^{-2\pi i m / N} \overline{\sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{-2\pi i (m+M)k / N}} = e^{-2\pi i m / N} \overline{\widehat{u}(m+M)}. \end{aligned}$$

Així,

$$\widehat{v}(m+M) = e^{-2\pi i M / N} e^{-2\pi i m / N} = -e^{-2\pi i m / N} \overline{\widehat{u}(m)}.$$

Llavors

$$|\widehat{v}(m)|^2 + |\widehat{v}(m+M)|^2 = |\widehat{u}(m)|^2 + |\widehat{u}(m+M)|^2 = 2,$$

doncs $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ es un conjunt ortonormal. Finalment,

$$\widehat{u}(m) \overline{\widehat{v}(m)} + \widehat{u}(m) \overline{\widehat{v}(m+M)} = \widehat{u}(m) e^{2\pi i m / N} \widehat{u}(m+M) - \widehat{u}(m+M) e^{2\pi i m / N} \widehat{u}(m) = 0.$$

Per tant $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ compleix les hipòtesis del Teorema 5.28 i és una primera fase de la *Wavelet*. \square

Exemple 5.31. Sigi $\widehat{u} = (\sqrt{2}, 1, 0, 1)$ i $\widehat{v} = (0, 1, \sqrt{2}, -1)$, llavors

$$A(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i

$$A(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

són matrius unitàries i pel Corol·lari 5.29 $\{v, R_2v, u, R_2u\}$ genera una primera fase de la *Wavelet* que podem calcular amb la transformada inversa de Fourier, és a dir multiplicant per una matriu i ens dona els següents vector:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4} (2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ R_2u &= \frac{1}{4} (-2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ v &= \frac{1}{4} (\sqrt{2}, -\sqrt{2} + 2i, \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2i) \\ R_1v &= \frac{1}{4} (\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2i, \sqrt{2}, -\sqrt{2} + 2i) \end{aligned}$$

Exemple 5.32 (*Wavelet de Shannon*). Suposem $N \in \mathbb{N}$ que sigui divisible entre 4, aleshores definim $\widehat{u}, \widehat{v} \in \mathbb{Z}_N$ com:

$$\widehat{u}(n) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{si } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ o } n = \frac{3N}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{si } n = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1, \end{cases}$$

i

$$\widehat{v}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ o } n = \frac{3N}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1 \\ \sqrt{2}, & \text{si } n = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1, \end{cases}.$$

Notem que fixat n o bé $\widehat{u}(n) = 0$ o bé $\widehat{v}(n) = 0$ llavors les columnes de la matriu sistema $A(n)$ són ortogonals. A més per per a cada n $\widehat{u}(n) = \sqrt{2}$ i $\widehat{v}(n) = 0$ o viceversa i igual per \widehat{v} , per tant $A(n)$ és unitària i pel Corol·lari 5.29 tenim $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{2k}u\}_{k=0}^{N/2-1}$ és una primera fase de la *Wavelet de Shannon*. És pot veure que

$$u(0) = v(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$u(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} e^{-i\pi n/N} \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\sin(\frac{\pi n}{N})},$$

i

$$v(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} (-1)^n e^{-i\pi n/N} \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\sin(\frac{\pi n}{N})}.$$

Exemple 5.33 (*Wavelet de Shannon real*). Suposem $N \in \mathbb{N}$ que sigui divisible entre 4, aleshores definim $\widehat{u}, \widehat{v} \in \mathbb{Z}_N$ com:

$$\widehat{u}(n) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{si } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ o } n = \frac{3N}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1 \\ i, & \text{si } n = \frac{N}{4}, \\ -i, & \text{si } n = \frac{3N}{4}, \\ 0, & \text{si } n = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1, \end{cases}$$

i

$$\widehat{v}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ o } n = \frac{3N}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1 \\ 1, & \text{si } n = \frac{N}{4}, \\ -1, & \text{si } n = \frac{3N}{4}, \\ \sqrt{2}, & \text{si } n = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1, \end{cases}.$$

Notem que $\widehat{v}(N/4 = \widehat{v}(3N/4))$ i a més $\widehat{u}(N/4 = \widehat{u}(3N/4))$, mentre que pels altres valors de n funciona igual que l'exemple 5.32 i com que la matriu sistema

$$A(N/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

és també unitària podem aplicar el Corol·lari 5.29 i obtenim que $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{2k}u\}_{k=0}^{N/2-1}$ és una primera fase de la *Wavelet de Shannon real*. Veure la Figura 5.1

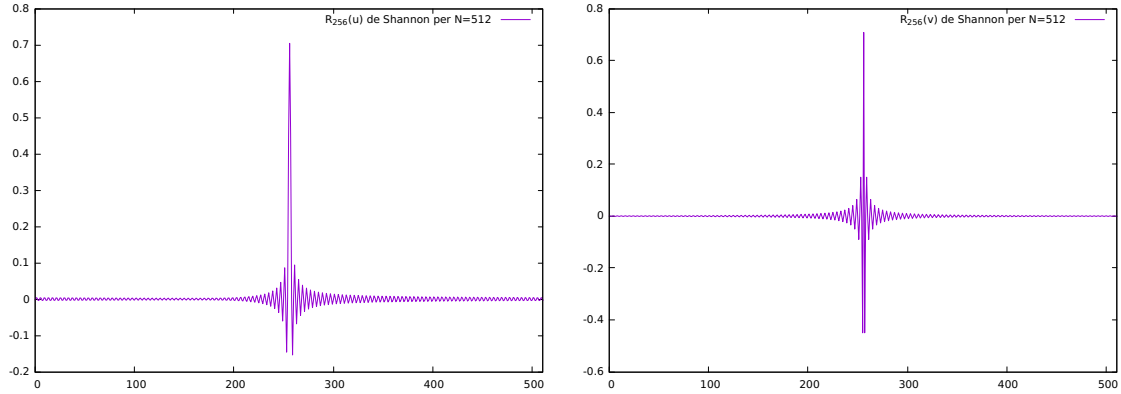


Figura 5.1: $R_{256}u$ i $R_{256}v$ de Shannon per $N = 512$.

Exemple 5.34 (Daubechies 6.). Suposam $N > 6$ i parell, considerarem \hat{u} el filtre que consideràvem a l'Algorisme de Daubechies, donats:

$$\begin{aligned} a &= 1 - \sqrt{10} \\ b &= 1 + \sqrt{10} \\ c &= \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

$$\hat{u}(n) = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-2\pi i 4n/N} (e^{2\pi i n/N} + 1)^3 \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \left(e^{2\pi i n/N} + e^{-2\pi i n/N} \right) + \frac{c}{4} \left(e^{4\pi i n/N} + e^{-4\pi i n/N} \right) \right).$$

Hem vist aquest filtre complex les condicions d'ortonormalitat del Lema 5.25. Llavors definim

$$\hat{v}(n) = (-1)^{n-1} \overline{\hat{u}(1-n)},$$

pel Lema 5.30 tenim que u i v són una primera fase de la *Wavelet*, fent la inversa de $\hat{u}(n)$ i $\hat{v}(n)$,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{2}}{32} (b + c, 2a + 3b, 6a + 4b + 2c, 6a + 4b - 2c, 2a + 3b - 3c, b - c, 0, \dots, 0) \\ v &= \frac{\sqrt{2}}{32} (-(2a + 3b), b + c, 0, \dots, 0, -(b - c), 2a + 3b - 3c, -(6a + 4b - 2c), 6a + 4b + 2c). \end{aligned}$$

Veure la Figura 5.2

5.3 Aplicació de les *Wavelets*: compressió de senyals.

Finalment per acabar aquest treball explicarem com les *Wavelets* esdevenen una eina molt útil a la hora de compressió de senyals. La idea que hi ha al darrera és

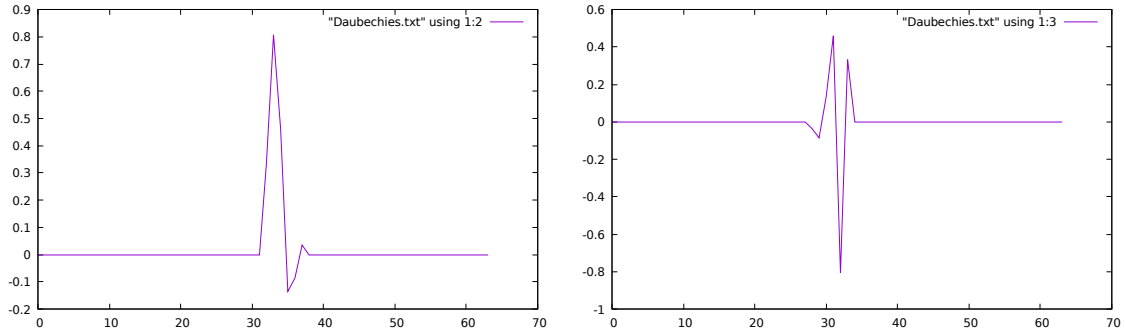


Figura 5.2: $R_{64}u$ i $R_{64}v$ de Daubechies 6 per $N = 128$.

simple i intuïtiva, si agafem una senyal, aleshores aquesta senyal té la seva descomposició en freqüències, aquest ha estat el joc en tot el capítol, mirar-se la senyal que tenim o mirar-se la seva transformada que vindria a ser la seva descomposició en freqüències. Llavors imaginem que nosaltres per guardar una senyal doncs guardem cada una de les freqüències amb la importància que li correspongui, això és quedar-se amb el coeficient corresponent de la seva transformada de Fourier, si tenim una senyal amb 256 punts, aleshores tindrem 256 coeficients. Aquí està la clau perquè que passa si enlloc de guardar 256 coeficients, en guardem només 50, o 60? El que estem fent és una compressió perquè allà on guardàvem 256 coeficients, ara en guardem menys, llavors per a que la compressió sigui bona ens agradaria que al tornara convertir les freqüències a la senyal aquestes fossin semblants. Com avaluarem aquesta semblança? doncs ho farem amb l'energia de la senyal, que per nosaltres és la norma, si després de fer la compressió l'energia de la ona baixat molt doncs serà una compressió dolenta, mentre que si és molt semblant la compressió serà bona.

La compressió

Suposem $N = 2M$ sigui $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una senyal, aleshores, donada una primera fase de *Wavelet* u i v podem considerar la matriu de canvi de la senyal a la seva transformada en la base de que genera la primera fase de la *Wavelet*.

$$T = \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ R_{2(M-1)}u \\ v \\ \vdots \\ R_{2(M-1)}v \end{pmatrix}$$

Llavors primer farem la transformació T a z , seguidament farem la transformació C que consistirà en quedar-nos amb el percentatge p de coeficients més grans i finalment fem la transformació inversa de T que en aquest cas és T^t .

$$z \xrightarrow{T} Tz \xrightarrow{C_p} C_p Tz \xrightarrow{T^t} T^t C_p Tz. \quad (5.1)$$

Qualitat de la compressió

Una vegada tenim la compressió que segons (5.1) denotem per $T^t C_p T z$ li assignarem un nombre Q_c entre $[0, 1]$ on 0 serà una compressió pèssima i 1 serà una compressió perfecta.

Definició 5.35 (Qualitat de compressió).

$$Q_c = \frac{\|T^t C_p T z\|}{\|z\|}.$$

Notem que Q_c està comprès entre $[0, 1]$ per el Teorema de Parseval.

En l'annex podreu trobar gràfiques comparant la compressió de diferents senyals per a les diferents primeres fases de *Wavelets* que hem vist en aquest darrer capítol.

Annex A: Exemples de compressió de senyals

En aquest annex exposarem gràfiques de compressions de senyals amb diferents *Wavelets* i amb la base de Fourier. Les *Wavelets* que compararem seran les de Haar, Daubechies, Shannon, a més també inclourem una gràfica comparativa amb la corba de rendiment respecte a diferents percentatges de compressió (P) per a les següents funcions:

Veure (5.3) per a:

$$z_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq n \leq 127 \\ \sin\left(\frac{|n-128|^{1.7}}{128}\right), & \text{si } 128 \leq n \leq 255 \\ 0, & \text{si } 256 \leq n \leq 282 \\ \sin\left(\frac{|n-128|^2}{128}\right), & \text{si } 384 \leq n \leq 447 \\ 0, & \text{si } 448 \leq n \leq 511. \end{cases}$$

Veure (5.4) per a:

$$z_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{64}, & \text{si } 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{si } 64 \leq n \leq 255 \\ 5 - \frac{n}{64}, & \text{si } 256 \leq n \leq 319 \\ 0, & \text{si } 320 \leq n \leq 511. \end{cases}$$

Veure (5.5) per a:

$$z_3(n) = \sin\left(\frac{n^{1.5}}{64}\right).$$

Veure (5.6) per a:

$$z_4(n) = (n - 250)e^{-(n-256)^2/512}.$$

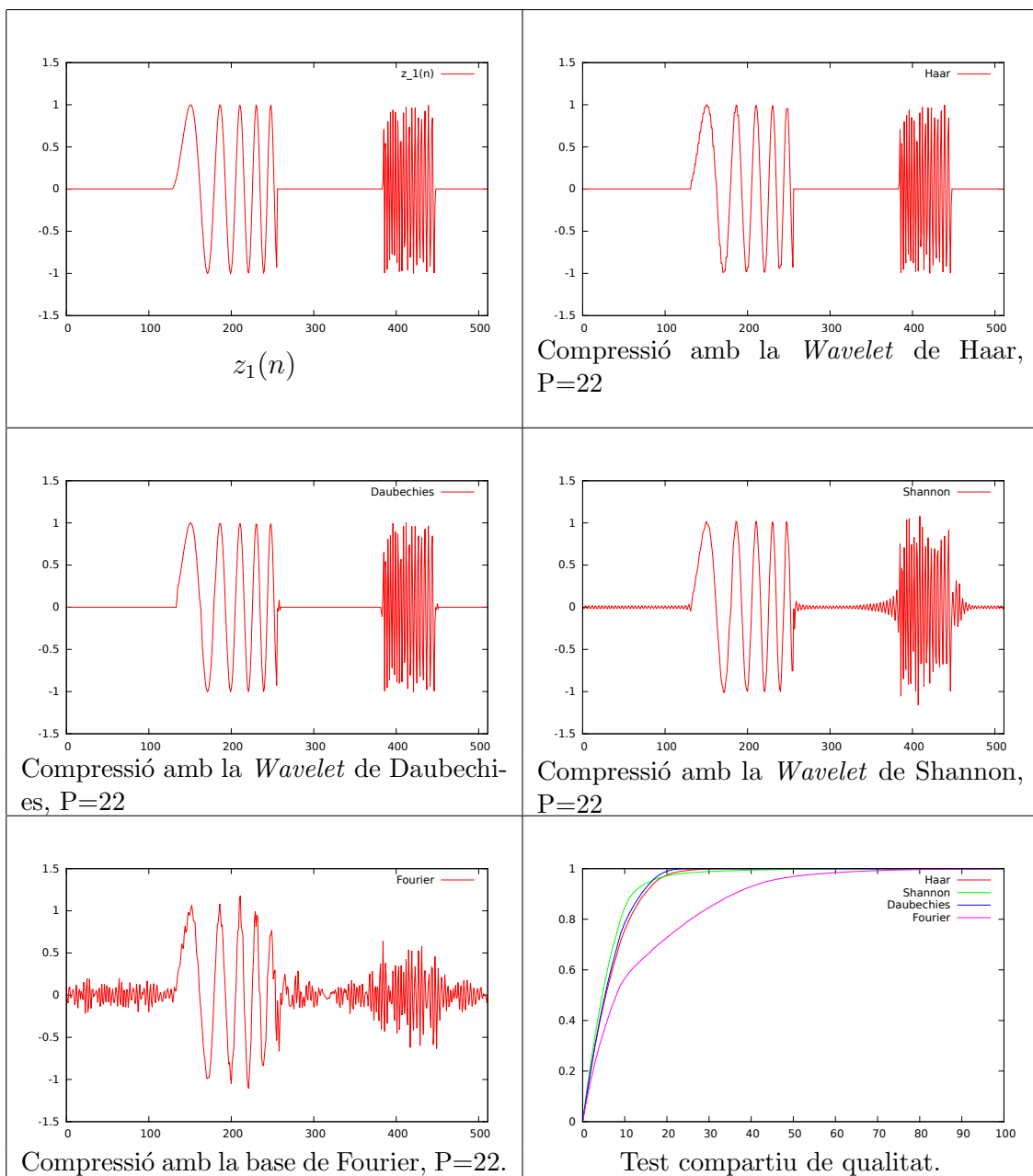


Figura 5.3: Gràfiques comparatives per la compressió de $z_1(n)$.

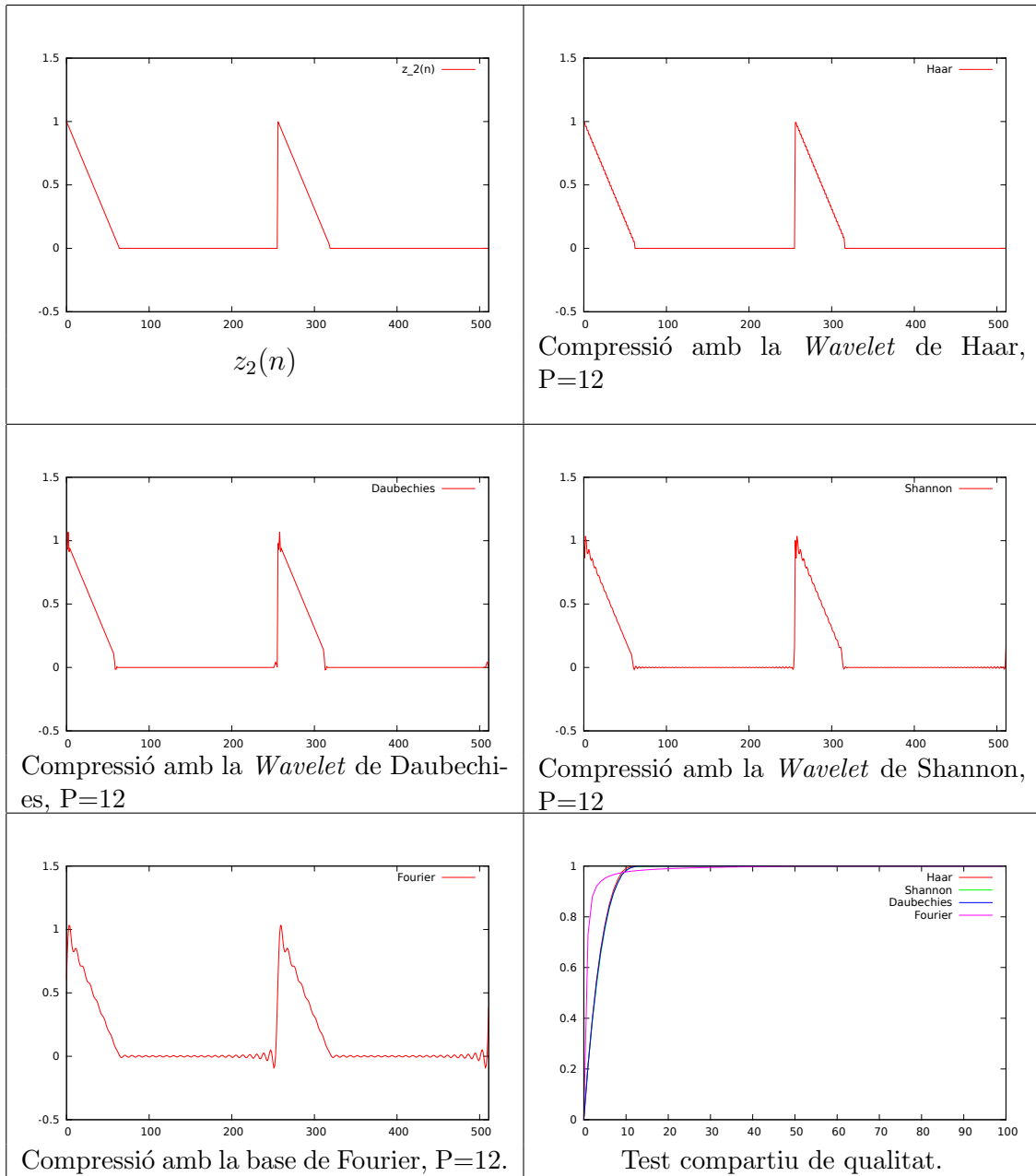


Figura 5.4: Gràfiques comparatives per la compressió de $z_2(n)$.

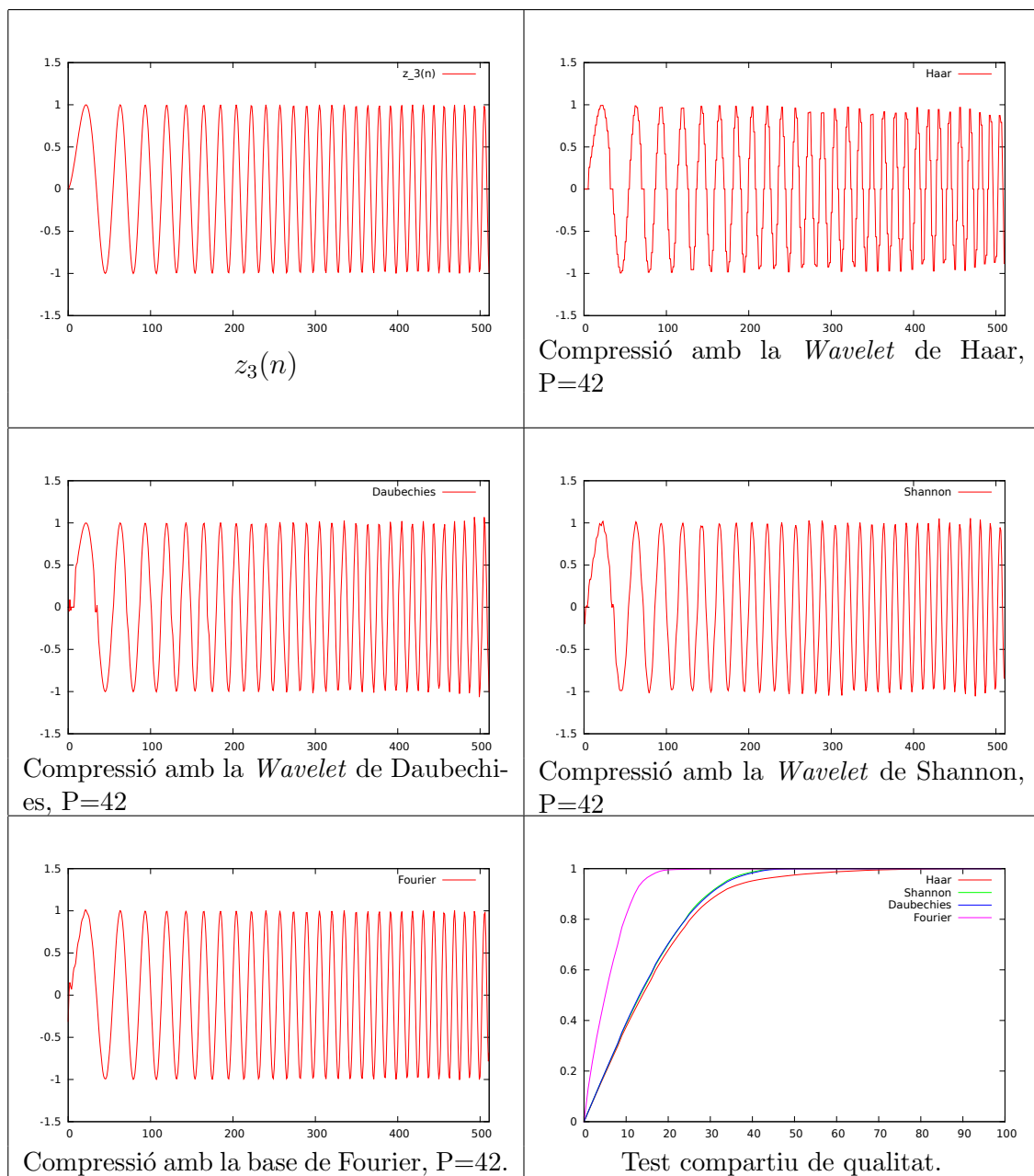


Figura 5.5: Gràfiques comparatives per la compressió de $z_3(n)$.

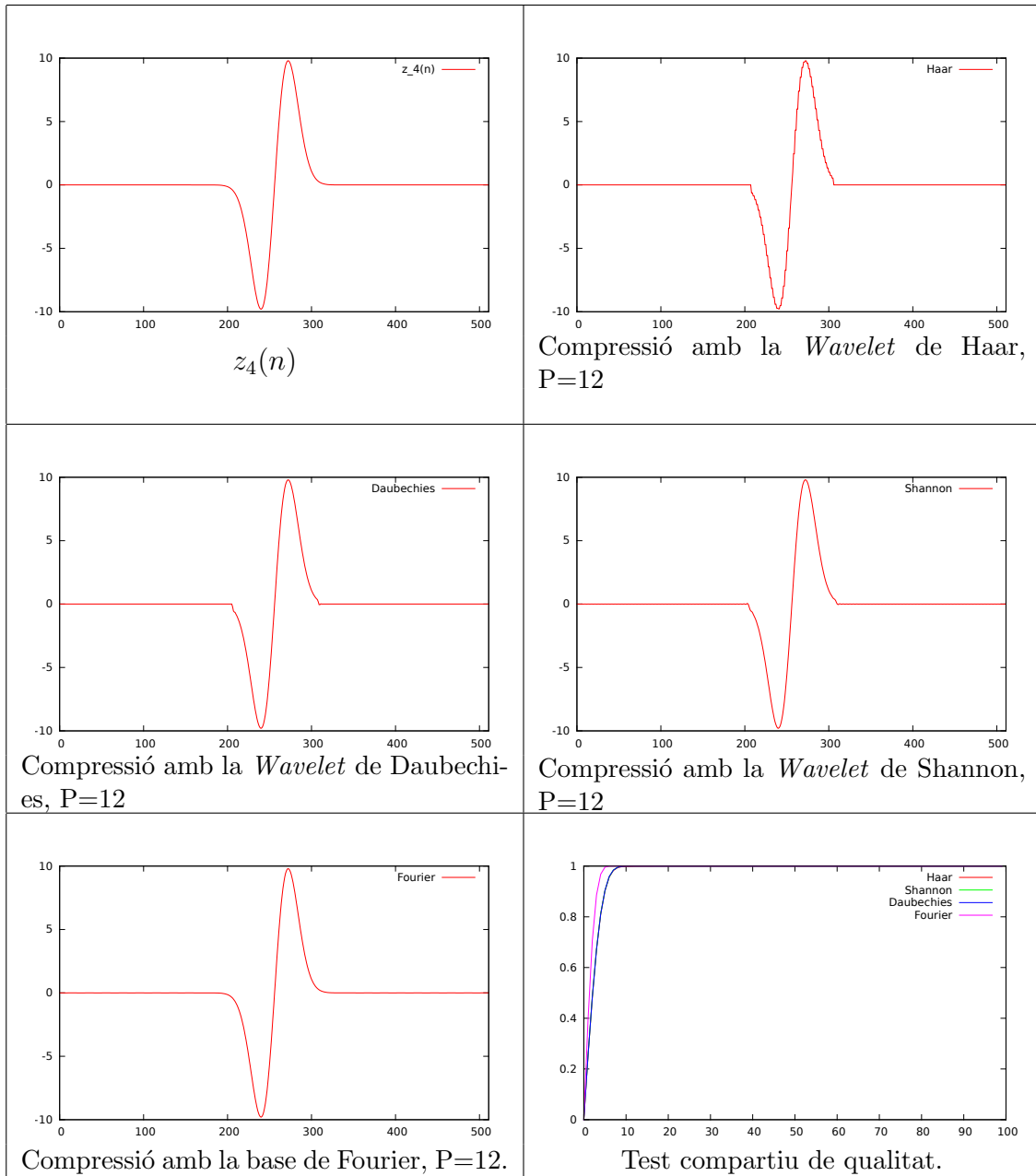


Figura 5.6: Gràfiques comparatives per la compressió de $z_4(n)$.

Annex B: Codi de compressió de senyals

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #define N 512
5 #define MPI 3.14159265358979323846
6 #define Percentatge 0.1
7 #define senyal 4
8 /*Genera lla senyal que volem comprimir depenent de quina óelecci ←
   tinguem de la variable global senyal*/
9 double funcio(double x){
10     if(senyal==1){
11         if(x>=128 && x<=255){
12             return sin(pow(fabs(x-128),1.7)/128);
13         }
14         if(x>=384 && x<=447){
15             return sin(pow(fabs(x-128),2)/128);
16         }
17         else
18             return 0;
19     }
20     if(senyal==2){
21         if(x>=0 && x<=63){
22             return 1-x/64;
23         }
24         if(x>=256 && x<=318){
25             return 5-x/64;
26         }
27         else
28             return 0;
29     }
30     if(senyal==3){
31         return sin(pow(x,1.5)/64);
32     }
33     if(senyal==4){
34         return (x-256)*exp(-pow(x-256,2)/522);
35     }
36 }
37
```

```

38     }
39 }
40
41 }
42 /*Definim l'estructura de nombre complex, el producte, la suma el ←
   conjugat i el òmdul*/
43 typedef struct complex{
44     double re;
45     double im;
46 }complex;
47 complex prod(complex z, complex w) {
48     complex x;
49     x.re =z.re*w.re-z.im*w.im;
50     x.im=w.re*z.im+w.im*z.re;
51     return x;
52 }
53 complex sum(complex z,complex w){
54     complex x;
55     x.re=z.re+w.re;
56     x.im=z.im+w.im;
57     return x;
58 }
59 complex conj(complex z){
60     complex x;
61     x.re=z.re;
62     x.im=-z.im;
63     return x;
64 }
65 double cabs(complex z){
66     return sqrt(z.re*z.re+z.im*z.im);
67 }
68 /*Genera la matriu de canvi de la Wavelet de Haar*/
69 double **Haar(void){
70     int i,m,n;
71     double **H,*u,*v;
72
73     H=(double**)malloc(N*sizeof(double*));
74     for(i=0;i<N;i++){H[i]=(double*)calloc(N,sizeof(double));}
75
76     u=(double*)calloc(N,sizeof(double));
77     v=(double*)calloc(N,sizeof(double));
78
79     u[0]=sqrt(2)/2;
80     u[1]=sqrt(2)/2;
81     v[0]=sqrt(2)/2;
82     v[1]=-sqrt(2)/2;
83
84     for(i=0;i<N/2;i++){
85         for(n=0;n<N;n++){
86             m=(n-2*i)%N;
87             if(m<0) m=N+m;
88             H[i][n]=u[m];
89             H[i+N/2][n]=v[m];

```



```

90     }
91 }
92 return H;
93
94 }
95 /*Genera la matriu de canvi de la Wavelet de Shannon*/
96 double **Shannon(void){
97     complex *A_F;
98     complex *Sh_Rv,*Sh_R,*res,*resv,aux;
99     int i,n,m;
100    double **M;
101
102    A_F=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
103    Sh_R=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
104    Sh_Rv=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
105    res=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
106    resv=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
107
108    M=(double**)malloc(N*sizeof(double));
109    for(i=0;i<N;i++){
110        M[i]=(double*)malloc(N*sizeof(double*));
111
112        for(i=0;i<N;i++){
113            if(i <= N/4-1 || i>3*N/4){
114                Sh_R[i].re= sqrt(2);
115                Sh_R[i].im=0;
116                Sh_Rv[i].re= 0;
117                Sh_Rv[i].im=0;
118            }
119            else if(i==N/4 ){
120                Sh_R[i].re=0;
121                Sh_R[i].im=-1;
122                Sh_Rv[i].re=1;
123                Sh_Rv[i].im=0;
124            }
125
126            else if(i==3*N/4 ){
127                Sh_R[i].re=0;
128                Sh_R[i].im=1;
129                Sh_Rv[i].re=1;
130                Sh_Rv[i].im=0;
131            }
132            else{
133                Sh_R[i].re=0;
134                Sh_R[i].im=0;
135                Sh_Rv[i].re=sqrt(2);
136                Sh_Rv[i].im=0;
137            }
138        }
139    }
140    for(n=0;n<N;n++){
141        res[n].re=0;
142        res[n].im=0;

```

```

143     resv[n].re=0;
144     resv[n].im=0;
145     for (i=0;i<N;i++){
146         A_F[i].re=cos(2*M_PI*i*n/N)/N;
147         A_F[i].im=sin(2*M_PI*i*n/N)/N;
148
149         aux=prod(Sh_R[i],A_F[i]);
150         res[n]=sum(res[n],aux);
151         aux=prod(Sh_Rv[i],A_F[i]);
152         resv[n]=sum(resv[n],aux);
153     }
154
155     if(res[n].im >1.e-4){
156         printf("XUNGO BROTHER \n");
157     }
158     if(resv[n].im >1.e-4){
159         printf("V-XUNGO BROTHER \n");
160     }
161 }
162 for (i=0;i<N/2;i++){
163     for (n=0;n<N;n++){
164         m=(n+2*i)%N;
165         M[i][n]=res[m].re;
166         M[i+N/2][n]=resv[m].re;
167     }
168 }
169 return M;
170 }
171 /*Genera la matriu de canvi de la Wavelet de Daubechies*/
172 double **Daubechies(void){
173     int i,n,m;
174     double a,b,c,M,*Dau,*Dav,**D;
175
176     Dau=(double*)calloc(N,sizeof(double));
177     Dav=(double*)calloc(N,sizeof(double));
178
179     D=(double**)malloc(N*sizeof(double));
180     for (i=0;i<N;i++)
181         D[i]=(double*)malloc(N*sizeof(double));
182
183     a=1-sqrt(10);
184     b=1+sqrt(10);
185     c=sqrt(5+2.*sqrt(10));
186     M=sqrt(2)/32.;
187     Dau[0]=M*(b+c);
188     Dau[1]=M*(2*a+3*b+3*c);
189     Dau[2]=M*(6*a+4*b+2*c);
190     Dau[3]=M*(6*a+4*b-2*c);
191     Dau[4]=M*(2*a+3*b-3*c);
192     Dau[5]=M*(b-c);
193     Dav[0]=-Dau[1];
194     Dav[1]=Dau[0];
195     Dav[N-1]=Dau[2];

```

```

196     Dav[N-2]=-Dau[3];
197     Dav[N-3]=Dau[4];
198     Dav[N-4]=-Dau[5];
199     for(i=0;i<N/2;i++){
200         for(n=0;n<N;n++){
201             m=(n-2*i)%N;
202             if(m<0) m=N+m;
203             D[i][n]=Dau[m];
204             D[i+N/2][n]=Dav[m];
205         }
206     }
207     free(Dau);
208     free(Dav);
209
210     return D;
211 }
212 /*Donat una matriu de canvi et fa la transformada d'una senyal*/
213 double *Trans(double **A, double *z){
214     int i,j;
215     double *Tx;
216
217     Tx=(double*)calloc(N, sizeof(double));
218
219     for(i=0;i<N;i++){
220         for(j=0;j<N;j++){
221             Tx[i]+=A[i][j]*z[j];
222         }
223     }
224     /*Donat una matriu de canvi et fa la transformada inversa d'una ←
225     senyal*/
226     double *Trans_Inv(double **A, double *z){
227         int i,j;
228         double *Tx;
229         Tx=(double*)calloc(N, sizeof(double));
230         for(i=0;i<N;i++){
231             for(j=0;j<N;j++){
232                 Tx[i]+=A[j][i]*z[j];
233             }
234         }
235     /*Fa la transformada respecte la base de Fourier*/
236     complex *DFT(complex **A, complex *z){
237         int i,j;
238         complex *Tx;
239
240         Tx=(complex*)calloc(N, sizeof(complex));
241
242         for(i=0;i<N;i++){
243             for(j=0;j<N;j++){
244                 Tx[i]=sum(Tx[i], prod(A[i][j], z[j]));
245             }
246         }
247     /*Fa la transformada inversa respecte la base de Fourier*/
248     complex *IDFT(complex **A, complex *z){

```

```

248     int i,j;
249     complex *Tx;
250     Tx=(complex*)calloc(N,sizeof(complex));
251     for(i=0;i<N;i++)
252         for(j=0;j<N;j++)
253             Tx[i]=sum(Tx[i],prod(conj(A[j][i]),z[j]));
254     return Tx;
255 }
256 /*Ordena els coeficients segons el seu mòdul*/
257 void ordenar(double *z, int *p){
258     int i,j,aux;
259     double aux;
260
261     for(i=0;i<N;i++)
262         for(j=0;j<N-1;j++){
263             if(fabs(z[j])<fabs(z[j+1])){
264                 aux=z[j];
265                 z[j]=z[j+1];
266                 z[j+1]=aux;
267                 aux=p[j];
268                 p[j]=p[j+1];
269                 p[j+1]=aux;
270             }
271         }
272 }
273 void ordenar_c(complex *z, int *p){
274     int i,j,aux;
275     complex aux;
276
277     for(i=0;i<N;i++)
278         for(j=0;j<N-1;j++){
279             if(cabs(z[j])<cabs(z[j+1])){
280                 aux=z[j];
281                 z[j]=z[j+1];
282                 z[j+1]=aux;
283                 aux=p[j];
284                 p[j]=p[j+1];
285                 p[j+1]=aux;
286             }
287         }
288 }
289 /* Ens retorna la norma d'un vector*/
290 double norm(double *z){
291     int i;
292     double norm=0;
293     for(i=0;i<N;i++)
294         norm+=z[i]*z[i];
295     return norm;
296 }
297 double norm_c(complex *z){
298     int i;
299     double norm=0;
300     for(i=0;i<N;i++)

```

```

301     norm+=(z[i].re*z[i].re+z[i].im*z[i].im);
302     return norm;
303 }
304 /* Fa el test de qualitat i el guarda en un fitxer*/
305 void Test_Qualitat(FILE* dades, double **A, double *z){
306
307     int i,j,l,*p;
308     double *Tz,*Tw,norm_z,Q;
309
310     p=(int*)malloc(N*sizeof(int));
311     Tz=(double*)malloc(N*sizeof(double));
312     Tw=(double*)calloc(N, sizeof(double));
313
314     Tz=Trans(A,z);
315
316     norm_z=norm(z);
317
318     for(i=0;i<N;i++){
319         p[i]=i;
320
321     ordenar(Tz,p);
322
323     for(i=0;i<100;i++){
324         l=(int)((i)*N/100.);
325         for(j=0;j<l;j++){
326             Tw[p[j]]=Tz[j];
327             Q=norm(Tw);
328             Q=Q/norm_z;
329             fprintf(dades,"%d %lf \n", i,Q);
330         }
331         free(Tz);
332         free(Tw);
333         free(p);
334     }
335 }
336 void Test_Qualitat_Fourier(FILE* dades, complex **A, complex *z){
337
338     int i,j,l,*p;
339     double norm_z,Q;
340     complex *Tz,*Tw;
341
342     p=(int*)malloc(N*sizeof(int));
343     Tz=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
344     Tw=(complex*)calloc(N, sizeof(complex));
345
346
347     Tz=DFT(A,z);
348
349     norm_z=norm_c(z);
350
351     for(i=0;i<N;i++){
352         p[i]=i;
353

```

```

354     ordenar_c(Tz,p);
355
356     for(i=0;i<100;i++){
357         l=(int)((i)*N/100.);
358         for(j=0;j<l;j++){
359             Tw[p[j]]=Tz[j];
360         }
361         Q=norm_c(Tw);
362         Q=Q/norm_z;
363         fprintf(dades,"%d %lf \n", i,Q);
364     }
365     free(Tz);
366     free(Tw);
367     free(p);
368 }
369 /*COMprimeix la imatge i la guarda en un fitxer*/
370 void Compressio_Senyal(FILE* dades, double **A, double *z){
371     int i,j,l,*p;
372     double *Tz,*Tw,*w;
373
374     p=(int*)malloc(N*sizeof(int));
375     Tz=(double*)malloc(N*sizeof(double));
376     Tw=(double*)calloc(N,sizeof(double));
377     w=(double*)calloc(N,sizeof(double));
378
379     for(i=0;i<N;i++){
380         p[i]=i;
381
382         Tz=Trans(A,z);
383         ordenar(Tz,p);
384
385         l=(int)(Percentatge*N);
386         for(j=0;j<l;j++){
387             Tw[p[j]]=Tz[j];
388         }
389         w=Trans_Inv(A,Tw);
390         for(i=0;i<N;i++){
391             fprintf(dades,"%d %lf \n", i,w[i]);
392         }
393     }
394 void Compressio_Senyal_Fourier(FILE* dades, complex **A, complex *z){
395     int i,j,l,*p;
396     complex *Tz,*Tw,*w;
397
398     p=(int*)malloc(N*sizeof(int));
399     Tz=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
400     Tw=(complex*)calloc(N,sizeof(complex));
401     w=(complex*)calloc(N,sizeof(complex));
402
403     for(i=0;i<N;i++){
404         p[i]=i;
405
406         Tz=DFT(A,z);

```

```

407     ordenar_c(Tz,p);
408
409     l=(int)(Percentatge*N);
410     for(j=0;j<l;j++)
411         Tw[p[j]]=Tz[j];
412
413     w=IDFT(A,Tw);
414     for(i=0;i<N;i++)
415         fprintf(dades,"%d %lf \n", i,w[i].re);
416
417 }
418 /* Ens genera la matriu de Fourier*/
419 complex **Fourier(void){
420     int i,j;
421     complex **W;
422
423     W=(complex **)malloc(N*sizeof(complex*));
424     for(i=0;i<N;i++)
425         W[i]=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
426
427     for(i=0;i<N;i++){
428         for(j=0;j<N;j++){
429             W[i][j].re = 1./sqrt(N)*cos(-2.*M_PI*i*j/N);
430             W[i][j].im = 1./sqrt(N)*sin(-2.*M_PI*i*j/N);
431
432         }
433     }
434     return W;
435 }
436 int main(void){
437     int i;
438     double **A,*z;
439     complex **W, *z_c;
440
441     FILE* dades;
442
443     A=(double **)malloc(N*sizeof(double*));
444     z=(double *)malloc(N*sizeof(double));
445     W=(complex**)malloc(N*sizeof(complex*));
446     z_c=(complex*)calloc(N,sizeof(complex));
447
448     dades=fopen("Original", "w");
449     for(i=0;i<N;i++){
450         z[i]=funcio(i);
451         fprintf(dades,"%d %lf\n",i,z[i]);
452         A[i]=(double*)malloc(N*sizeof(double));
453
454         W[i]=(complex*)malloc(N*sizeof(complex));
455         z_c[i].re=funcio(i);
456     }
457
458     A=Daubechies();
459

```

```
460     dades=fopen("Test_Daubechies","w");
461     Test_Qualitat(dades,A,z);
462     fclose(dades);
463
464     dades=fopen("Compressio_Daubechies","w");
465     Compressio_Senyal(dades,A,z);
466     fclose(dades);
467
468     A=Haar();
469
470     dades=fopen("Test_Haar","w");
471     Test_Qualitat(dades,A,z);
472     fclose(dades);
473
474     dades=fopen("Compressio_Haar","w");
475     Compressio_Senyal(dades,A,z);
476     fclose(dades);
477
478     A=Shannon();
479
480     dades=fopen("Test_Shannon","w");
481     Test_Qualitat(dades,A,z);
482     fclose(dades);
483
484     dades=fopen("Compressio_Shannon","w");
485     Compressio_Senyal(dades,A,z);
486     fclose(dades);
487
488     W=Fourier();
489
490     dades=fopen("Test_Fourier","w");
491     Test_Qualitat_Fourier(dades,W,z_c);
492     fclose(dades);
493
494     dades=fopen("Compressio_Fourier","w");
495     Compressio_Senyal_Fourier(dades,W,z_c);
496     fclose(dades);
497
498
499
500     return 0;
501 }
```


Bibliografia

- [1] M. J. Carro, *Análisis Real y Funcional*, Apunts del curs d'Anàlisi Real i Funcional de la Universitat de Barcelona.
- [2] J. L. Cerdà, *Análisis Real*, Textos docents **23**, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2^a edició 2000.
- [3] J. L. Cerdà, *Introducció a l'Anàlisi Funcional*, Textos docents **280**, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2005.
- [4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelet*, CBMS 61, 1992
- [5] M. W. Frazier, *An Introduction to Wavelet Through Linear Algebra*, Springer, 1999.
- [6] E. Hernández i G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1996.
- [7] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Graduate Studies in Mathematics Volume **102**, American Mathematical Society, 2002.
- [8] R. S. Strichartz, *How to make wavelets*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), 539–556.