UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

ESPAIS DE SOBOLEV

Autor: Pol Ribera Baraut

Director:	Dra. María Jesús Carro Rossell
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona,	27 de juny de 2018

Abstract

Functional analysis and partial differential equations are two areas of mathematics that have a very strong connection but they are studied separately in the grade. In this work, we will study some great results of functional analysis, such as the open mapping theorem or the Hahn-Banach theorems, and we will also study the spaces where the solutions of partial differential equations live, the Sobolev spaces. We will see the inclusions that exists between them and under which conditions these solutions are regular or not. To do this, we will use functional analysis' techniques and results, seeing this strong connection that exists between these two areas.

Resum

L'anàlisi funcional i les equacions en derivades parcials són dues àrees de les matemàtiques que tenen una connexió molt forta però que s'estudien per separat en el grau. En aquest treball estudiarem uns grans resultats de l'anàlisi funcional, com el teorema de l'aplicació oberta o els teoremes de Hahn-Banach, i estudiarem també els espais on viuen les solucions de les equacions en derivades parcials, els espais de Sobolev. Veurem les inclusions que hi ha entre ells i sota quines condicions aquestes solucions tenen més regularitat o no. Per fer-ho, usarem tècniques i resultats d'anàlisi funcional, veient així aquesta forta connexió que hi ha entre aquestes dues àrees.

Agraïments

Agrair a la meva tutora, la Dra. María Jesús Carro Rossell, tota l'ajuda i paciència mostrada en els moments en què em costava entendre els resultats o m'equivocava, i tota la dedicació i els consells donats per fer-me un millor estudiant i que aconseguís fer aquest treball. És tot un honor haver-te tingut com a tutora, moltes gràcies.
També voldria donar les gràcies a totes les persones que han intervingut durant la meva estada en aquest grau: als professors/es de totes les assignatures que he cursat, als companys/es de classe i a la meva família. En especial, voldria donar les gràcies als meus pares, al meu germà, i a la meva parella, que tot i no compartir la mateixa devoció que jo cap a les matemàtiques, han estat un punt de recolzament i suport vital durant aquests anys, moltes gràcies.

Índex

1 Introducció

La motivació

L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar els espais de Sobolev, que deuen el seu nom al matemàtic rus Sergei Lvovich Sobolev, i sota quines condicions les funcions d'aquests espais tenen una certa regularitat. Aquests espais són molt importants en la teoria de les equacions en derivades parcials, ja que les solucions d'aquestes apareixen de manera natural en aquests espais, i per tant, és important trobar-ne bones propietats, ja que a priori, no se'n coneixen.
Per fer-ho, cal tenir una bona base d'anàlisi funcional, ja que hi ha una relació forta entre aquesta àrea i la teoria de les equacions en derivades parcials. Així, un altre objectiu d'aquest treball és ampliar els coneixements d'anàlisi funcional apresos durant el grau perquè, en vista de cursar el màster Advanced Mathematics el curs vinent, aquest treball serveixi de curs pont entre l'assignatura d'aquest màster Functional Analysis and Partial Differential Equations i l'assignatura del grau Anàlisi Real i Funcional.
En aquest treball també s'estudien uns resultats fonamentals de l'anàlisi funcional que no es donen al grau i que, degut a la generalitat amb què s'estudien en aquest treball, es poden aplicar en un ventall molt ampli de situacions, per exemple, a l'hora de provar resultats dels espais de Sobolev.
A l'assignatura del grau Equacions en Derivades Parcials es dona una petita introducció a casos concrets dels espais de Sobolev, però, degut a la falta de coneixements d'anàlisi funcional per estudiar aquests espais, es deixen alguns resultats sense demostració. Així doncs, en aquest treball, s'adquireixen els coneixements necessaris per provar aquests resultats pendents de demostració.
Aquest treball doncs, complementa els coneixements apresos durant el grau, estudia la connexió entre l'anàlisi funcional i la teoria d'equacions en derivades parcials i fa una preparació pel màster estudiant resultats d'anàlisi funcional amb més generalitat de la que s'hi imparteix i profunditzant en els resultats que involucren als espais de Sobolev.

El projecte

El treball consta de dues parts. A la primera part, s'estudien un grans resultats de l'anàlisi funcional, com són el Teorema de Baire o teorema de la categoria, el Teorema de Banach-Steinhaus o Principi d'acotació uniforme, el Teorema de l'aplicació oberta i el Teorema del graf tancat, i els Teoremes de Hahn-Banach. Per estudiar-los, se segueix [2] Rudin, W., que presenta aquests teoremes en la màxima generalitat possible, tot i que en moltes situacions s'apliquen versions més concretes d'aquests resultats. Així doncs, en aquest treball, es donen també algunes conseqüències d'aquests resultats aplicades a casos concrets. També se segueix [1] Brezis, H., que presenta aquests resultats en casos més concrets i s'utilitzen [3] Tao, T. i [4] Tao, T., per donar una visió i un enfocament diferent a l'hora d'estudiar aquests resultats. En el cas concret dels Teoremes de Hahn-Banach, també s'utilitza

[5] Köthe, G., per complementar l'estudi.
A la segona part, s'estudien els espais de Sobolev, que deuen el seu nom al matemàtic rus Sergei Lvovich Sobolev, seguint fonamentalment [1] Brezis, H., començant per les definicions i primeres propietats, provant que són espais de Banach, donant caracteritzacions de les funcions que pertanyen a aquests espais, veient resultats de densitat i estudiant el Teorema de l'operador extensió, un resultat molt important a l'hora de provar totes les inclusions d'aquests espais i els embedding theorems que s'estudien a continuació.
Per estudiar el Teorema de l'operador extensió, s'introdueix la noció de successió de regularitzadors i propietats d'aquest tipus de funcions que, com indica el seu nom, regularitzen funcions que no són regulars, i són molt útils a les demostracions dels resultats. Seguidament s'estudien les inclusions dels espais de Sobolev als espais de Lebesgue, a altres espais de Sobolev, i als espais de les funcions Hölder-contínues.
Aquests són els resultats més importants del treball, en especial les últimes inclusions, que són els anomenats embedding theorems, ja que ens mostren que sota certes condicions, les funcions dels espais de Sobolev són funcions regulars, resultat molt important ja que les funcions dels espais de Sobolev poden no tenir cap regularitat.
A continuació, seguint [8] Rupflin, M. i [10] Giaquinta, M., s'estudien els espais de Morrey i els espais de Campanato, que deuen el seu nom als matemàtics Sergio Campanato i Charles B. Morrey Jr., que són uns espais de funcions també construïts a partir dels espais de Lebesgue. S'estudien propietats que caracteritzen les funcions d'aquests espais, relacionant-los entre ells, i la caracterització per integrals de les funcions Hölder-contínues, relacionant-los així amb els espais de Sobolev.
Finalment s'estudia la regularitat de les solucions del problema de Dirichlet, començant pels conceptes de solució dèbil i solució clàssica del problema de Dirichlet. Així, s'estudia una aplicació de les inclusions vistes dels espais de Sobolev i els embbeding theorems.

2 Els grans teoremes de l'anàlisi funcional

2.1 Teorema de Baire

El Teorema de Baire, o teorema de la categoria, provat per René Louis Baire l'any 1899 en la seva tesi doctoral, ens afirma que els espais mètrics complets i els espais Hausdorff localment compactes són espais topològics que compleixen que tota col·lecció numerable de conjunts oberts i densos té intersecció no buida. Com a conseqüència, per exemple, podem provar que els nombres reals són no-numerables. Els conceptes que estudiarem en aquesta secció seran de gran utilitat a l'hora de demostrar el Teorema 2.11 de la Secció 2.3.

Definició 2.1. *Sigui S un espai topològic. Un conjunt $E \subset S$ s'anomena rar (o mai dens) si la seva clausura $\overline{E}$ té interior buit. Els conjunts expressables com a unió numerable de conjunts rars s'anomenen de primera categoria. Qualsevol conjunt que no sigui de primera categoria s'anomena de segona categoria.*

Les següents propietats, de demostració immediata, s'extreuen a simple vista a partir de la definició:

Propietats 2.2. Sigui S un espai topològic.

(a) Si $A \subset B$ i B és de primera categoria en S, aleshores A és de primera categoria en S.

(b) La unió numerable de conjunts de primera categoria és de primera categoria.

(c) Tot conjunt $E \subset S$ tancat amb interior buit és de primera categoria.

(d) Si h és un homeomorfisme de S en S i $E \subset S$ aleshores E i $h(E)$ tenen la mateixa categoria.

Per visualitzar millor els conceptes podem pensar en alguns exemples d'aquests tipus de conjunts:

Exemples 2.3. - $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ són rars en $\mathbb{R}$ amb la topologia euclídea.

- El conjunt $S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ és rar en $\mathbb{R}$ amb la topologia euclídea.

- $\mathbb{Q}$ és de primera categoria en $\mathbb{R}$ i per tant, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ també.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ són de segona categoria en $\mathbb{R}$.

Ell teorema principal d'aquesta secció és el següent:

Teorema 2.4. ***(Baire).*** *Sigui S un espai mètric complet o bé un espai Hausdorff localment compacte. Aleshores la intersecció de tota col·lecció numerable de conjunts oberts i densos en S és densa en S.*

Demostració: Siguin $V_1, V_2, \ldots$ subconjunts oberts i densos de S. Sigui $B_0 \subset S$ un obert no buit arbitrari de S. Escollits $n \geq 1$ i $B_{n-1} \neq \emptyset$, com que el conjunt V_n és dens en S, existeix un obert $B_n \neq \emptyset$ tal que $\overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1}$. Escollim, en el cas en que S és un espai mètric complet, B_n que sigui una bola oberta de radi $< \frac{1}{n}$ i, en el cas en que S és un espai Hausdorff localment compacte, podem escollir B_n tal que $\overline{B_n}$ sigui compacta. Aleshores notem

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n},$$

que és un tancat. Si S és un espai mètric complet, els centres de les boles encaixades formen una successió de Cauchy convergent a un element de K, i llavors, $K \neq \emptyset$. Si S és un espai Hausdorff localment compacte, la intersecció d'una successió decreixent de conjunts tancants d'un compacte és no buida, per tant, $K \neq \emptyset$. Llavors, tenim que $K \subset B_0$ i $K \subset V_n$ per a tot n, per tant, $B_0 \cap \left(\bigcap V_n\right) \neq \emptyset$. $\square$

D'aquest teorema en podem extreure la següent conclusió: els espai mètrics complets o els espais Hausdorff localment compactes són de segona categoria en si mateixos. Això ve del fet que, si tenim una col·lecció numerable de subconjunts rars $\{E_i\}_{i \in I}$, notant $V_i = S \setminus \overline{E_i}$, tenim pel teorema que $\bigcap V_i \neq \emptyset$ i per tant, $S \neq \bigcup E_i$.

2.2 Teorema de Banach-Steinhaus

El Teorema de Banach-Steinhaus, o Principi d'acotació uniforme, publicat per Stefan Banach i Hugo Steinhaus l'any 1927 i demostrat de manera independent per Hans Hahn, és un resultat que estudia quan una col·lecció d'aplicacions lineals i contínues entre espais vectorials topològics és equicontínua. Aquest resultat permet demostrar, per exemple, que existeix una aplicació contínua tal que la seva sèrie de Fourier no convergeix puntualment.

Definició 2.5. *Siguin X i Y dos espais vectorials topològics i Γ una col·lecció d'aplicacions lineals de X en Y. Es diu que Γ és equicontínua si, per a tot entorn W de 0 en Y, existeix un entorn V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ per a tot $\Lambda \in \Gamma$.*

Observem que en el cas en que Γ conté només una aplicació lineal, la noció d'equicontinuïtat coincideix amb la noció de continuïtat. Sabem que les aplicacions lineals i contínues entre espais vectorials topològics són acotades. Com veurem en el següent resultat, les col·leccions equicontínues compleixen també aquesta acotació però de manera uniforme.

Teorema 2.6. *Siguin X i Y dos espais vectorials topològics, Γ una col·lecció equicontínua d'aplicacions lineals de X en Y i $E \subset X$ un subconjunt acotat. Aleshores existeix un subconjunt acotat F de Y tal que $\Lambda(E) \subset F$ per a tot $\Lambda \in \Gamma$.*

Demostració: Sigui F la unió de tots els $\Lambda(E)$ amb $\Lambda \in \Gamma$, és a dir,

$$F = \bigcup_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda(E).$$

Sigui W un entorn de 0 en Y. Com Γ és una col·lecció equicontínua, existeix un entorn V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ per a tot $\Lambda \in \Gamma$. Com E és acotat, existeix un t_0 tal que $E \subset tV$ per a tot $t \geq t_0$. Aleshores, per a tot $t \geq t_0$, tenim

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) \subset t\Lambda(V) \subset tW.$$

D'aquí concluïm que $F \subset tW$, per a tot $t \geq t_0$, i per tant, F és acotat en Y. $\square$

Passem a estudiar el resultat més important d'aquesta secció, el Teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 2.7. ***(Banach-Steinhaus)***. *Siguin X i Y espais vectorials topològics, Γ una col·lecció d'aplicacions lineals i contínues de X en Y i B el conjunt dels punts $x \in X$ tals que la seva òrbita $\Gamma(x) = \{\Lambda x;\ x \in X\}$ és un conjunt acotat de Y. Si B és de segona categoria en X, aleshores $B = X$ i Γ és una col·lecció equicontínua.*

Recordem, abans de donar la demostració del teorema, que un entorn equilibrat d'un punt $x \in X$ és un entorn E en X tal que $tE \subset E$ per a tot t amb $|t| \leq 1$.

Demostració: Com que tot espai vectorial topològic admet una base local equilibrada ([2] Rudin, W. (pàgines 8-10.)), és a dir, que els elements de la base són equilibrats i que tot element de la base conté la clausura d'un element de la base, podem escollir entorns de 0 en Y, U simètric ($U = -U$) i W, tals que $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. Aleshores escrivim

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Si $x \in B$, tenim que $\Gamma(x)$ és acotat, llavors $\Gamma(x) \subset nU$, per a algun n, i per tant, $x \in nE$, per a algun n. En conseqüència,

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nE.$$

Com B és de segona categoria en X per hipòtesi, almenys algun d'aquests conjunts nE ha de ser de segona categoria en X. Com l'aplicació $x \mapsto nx$ és un homeomorfisme de X en X, E és de segona categoria en X. Ara bé, com que tota Λ és una aplicació contínua, E és un tancat de X. Com a conseqüència, E té un punt interior x. Aleshores, $x - E$ conté un entorn V de 0, i

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x - \Lambda(E) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W,$$

per a tota $\Lambda \in \Gamma$. Tenim doncs, que la col·lecció Γ és equicontínua. Aplicant el Teorema 2.6, com que els punts de X són subconjunts acotats de X, tenim que, per a tot $x \in X$, $\Gamma(x)$ és acotat en Y, per tant, $B = X$. $\square$

Recordem que un F-espai és un espai vectorial topològic tal que la seva topologia ve induïda per una mètrica completa invariant. Una mètrica invariant (per translacions) és una mètrica d d'un espai vectorial X tal que

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Tot espai vectorial topològic és un espai invariant, és a dir, la teva topologia és invariant per translacions.

Corol·lari 2.8. *Sigui Γ una col·lecció d'aplicacions lineals i contínues d'un F-espai X en un espai vectorial topològic Y. Si per a tot $x \in X$, els conjunts $\Gamma(x) = \{\Lambda x;\ \Lambda \in \Gamma\}$ són acotats en Y, aleshores Γ és equicontínua.*

La demostració d'aquest corol·lari és aplicació directa del Teorema 2.7, utilitzant el Teorema 2.4, que ens diu que els F-espais són de segona categoria en si mateixos. En aquest corol·lari, siguin X i Y dos espais de Banach i suposem que

$$\sup_{\Lambda\in\Gamma} \|\Lambda x\| < \infty \quad \forall x \in X.$$

Aleshores, obtenim que existeix $M < \infty$ tal que

$$\|\Lambda x\| \leq M \quad \text{ si } \|x\| \leq 1 \text{ i } \Lambda \in \Gamma.$$

Per tant,

$$\|\Lambda x\| \leq M\|x\| \quad \text{ si } x \in X \text{ i } \Lambda \in \Gamma.$$

Els següents resultats ens permeten veure que les aplicacions límit de successions d'aplicacions lineals i contínues són també contínues.

Teorema 2.9. *Siguin X i Y espais vectorials topològics i $\{\Lambda_n\}_n$ una successió d'aplicacions lineals i contínues de X en Y.*

(a) Sigui C el conjunt de tots els punts $x \in X$ pels quals $\{\Lambda_n x\}_n$ és una successió de Cauchy en Y. Si C és de segona categoria en X, aleshores $C = X$.

(b) Sigui L el conjunt de tots els punts $x \in X$ tals que existeix

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

Si L és de segona categoria en X i Y és un F-espai, aleshores $L = X$ i l'aplicació $\Lambda : X \to Y$ és contínua.

Demostració: Comencem provant (a). Com que les successions de Cauchy són acotades, $C \subset B$ amb B el conjunt del Teorema 2.7. Per hipòtesi, C és de segona categoria en X i $C \subset B$, llavors B és de segona categoria en X i, aplicant el Teorema 2.7, $B = X$ i $\{\Lambda_n\}_n$ és equicontínua. Tenim que C és un subespai de X, i a més, C és dens en X, ja que, si C no fos dens, tindríem que $\overline{C}$ és un subespai propi de X, i per tant, $\mathring{\overline{C}} = \emptyset \Rightarrow C$ seria de primera categoria, que ens porta a una contradicció.
Sigui $x \in X$ i W un entorn de 0 en Y. Com $\{\Lambda_n\}_n$ és equicontínua, existeix un entorn V de 0 en X tal que $\Lambda_n(V) \subset W$ per a $n = 1, 2, \ldots$. Com C és dens, existeix $x' \in C \cap (x + V)$. Si n i m són suficientment grans perquè

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W,$$

aleshores per la igualtat

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x' - x),$$

tenim que $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. Per tant, $\{\Lambda_n x\}_n$ és una successió de Cauchy en Y i $x \in C$. Llavors $C = X$.
Veiem ara (b). Com Y és complet, tenim que $L = C$. Aleshores per (a), $L = X$. Sent V i W com abans, tenim que, per a tot n, $\Lambda_n(V) \subset W$, i llavors, $\Lambda(V) \subset \overline{W}$. Per tant, Λ és contínua. $\square$

Corol·lari 2.10. *Sigui $\{\Lambda_n\}_n$ una successió d'aplicacions lineals i contínues d'un F-espai X en un espai vectorial topològic Y. Si existeix*

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x,$$

per a tot $x \in X$, aleshores Λ és contínua.

Demostració: Com les successions de Cauchy són acotades, pel Corol·lari 2.8, tenim que $\{\Lambda_n\}_n$ és equicontínua. Aleshores, si W és un entorn de 0 en Y, es té que $\Lambda_n(V) \subset W$ per a tot n, per a un cert entorn V de 0 en X. Aleshores $\Lambda(V) \subset \overline{W}$, i per tant, Λ és contínua. $\square$

2.3 Teoremes de l'aplicació oberta i del graf tancat

El Teorema de l'aplicació oberta, Teorema 2.11, també conegut com a Teorema de Banach-Schauder, és un resultat que caracteritza quan una aplicació lineal i contínua entre un F-espai i un espai vectorial topològic és oberta. En particular, veurem que si tenim un operador lineal, continu i bijectiu entre espais de Banach, l'operador invers també és un operador continu. Aquest resultat es coneix com el Teorema d'acotació inversa.
A conseqüència del Teorema 2.11, provarem el Teorema del graf tancat, Teorema 2.13, que caracteritza quan un operador lineal entre espais de Banach és continu estudiant el seu graf. Això ens serà molt útil al Capítol 3, ja que tractarem espais de Banach i operadors lineals entre ells que necessitarem provar que són continus.

Teorema 2.11. ***(Aplicació oberta)*** *Siguin:*

(i) *X un F-espai.*

(ii) *Y un espai vectorial topològic.*

(iii) *$\Lambda : X \to Y$ una aplicació lineal i contínua tal que $\Lambda(X)$ és de segona categoria en Y.*

Aleshores $\Lambda(X) = Y$, Λ és una aplicació oberta i Y és un F-espai.

Demostració: Observem que un cop haguem provat que Λ és una aplicació oberta, com que X és obert, $\Lambda(X)$ és un subespai obert de Y i llavors $\Lambda(X) = Y$. Provem doncs que Λ és una aplicació oberta. Sigui V un entorn de 0 en X. Cal veure que $\Lambda(V)$ conté un entorn de 0 en Y. Sigui d la mètrica invariant compatible amb la topologia de X. Definim els següents conjunts:

$$V_n = \left\{ x \in X;\ d(x,0) < \frac{r}{2^n} \right\} \text{ per a } n = 0, 1, \dots$$

agafant r de tal manera que $V_0 \subset V$. Veurem que per a un cert entorn W de 0 en Y, es compleix $W \subset \overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V)$. Demostrem aquestes dues inclusions. Tenim que $V_2 - V_2 \subset V_1$, llavors $\overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)} \subset \overline{\Lambda(V_2) - \Lambda(V_2)} \subset \overline{\Lambda(V_1)}$. Si veiem que $\mathring{\overline{\Lambda(V_2)}} \neq \emptyset$, tindrem la primera inclusió. Sigui

$$\Lambda(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} k\Lambda(V_2).$$

Aleshores algun $k\Lambda(V_2)$ és de segona categoria. Com $y \mapsto ky$ és un homeomorfisme en Y, $\Lambda(V_2)$ és de segona categoria. Llavors $\mathring{\overline{\Lambda(V_2)}} \neq \emptyset$. Veiem la segona inclusió. Fixem $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$ i suposem escollit $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$. Raonant de la mateixa manera obtenim que $\overline{\Lambda(V_{n+1})}$ conté un entorn de 0. Aleshores tenim

$$(y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}) \cap \Lambda(V_n) \neq \emptyset$$

ja que $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$ i $y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$ és un entorn de y_n. Per tant, existeix $x_n \in V_n$ tal que $\Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$. Escrivim $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$, $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$ i iterem. Com $d(x_n, 0) < \frac{r}{2^n}$ per a tot n, les sumes $x_1 + \ldots + x_n$ formen una successió de Cauchy que, al ser X complet, convergeixen a un cert $x \in X$ tal que $d(x, 0) < r$. Aleshores $x \in V_0 \subset V \Rightarrow x \in V$. Com

$$\sum_{n=1}^{m} \Lambda x_n = \sum_{n=1}^{m} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1}$$

i $y_{m+1} \to 0$ quan $m \to \infty$, per la continuïtat de Λ, concluïm que $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V)$. Tenim doncs la segona inclusió i per tant, que Λ és una apliació oberta. Sigui N el nucli de Λ. Com Λ és contínua, N és un tancat. Aleshores l'espai quocient X/N també és un F-espai. Si trobem un isomorfisme de X/N sobre Y que sigui homeomorfisme tindrem que Y també és un F-espai.
Definim $f(x + N) = \Lambda x$ si $x \in X$. Aleshores f és un isomorfisme, utilitzant les propietats de Λ i que ja hem provat que $\Lambda(X) = Y$.
A més, l'aplicació π de pas al quocient és un aplicació oberta ([2] Rudin, W. (pàgines 30-31.)), i $\Lambda x = f(\pi(x))$. Donat $V \subset Y$ un obert, $\Lambda^{-1}(V)$ és un obert i $\pi^{-1}(\Lambda^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ també, per tant, f és contínua. Si $E \subset X/N$ és un obert, $f(E) = \Lambda(\pi^{-1}(E))$ és un obert al ser π contínua i Λ oberta. Llavors f^{-1} és contínua i f és un homeomorfisme. □

Com a conseqüència d'aquest resultat tenim el següent corol·lari que presentarem sense demostració ja que és aplicació directe del teorema anterior.

Corol·lari 2.12. *(a) Si Λ és una aplicació lineal, contínua i exhaustiva entre dos F-espais X, Y, aleshores és una aplicació oberta. Si a més és injectiva, aleshores Λ^{-1} és contínua.*

(b) Siguin X, Y dos espais de Banach. Si $\Lambda : X \to Y$ és una aplicació lineal, contínua i bijectiva, aleshores existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que

$$a\|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq b\|x\| \quad \forall x \in X$$

on $\|\cdot\|$ denota la norma de l'espai.

Passem ara a estudiar l'altre gran resultat d'aquesta secció.

Teorema 2.13. ***(Graf tancat)*** *Siguin:*

(i) X, Y *dos* F*-espais.*

(ii) $\Lambda : X \to Y$ *una aplicació lineal tal que* $G = \{(x, \Lambda x);\ x \in X\}$ *és un tancat de* $X \times Y$.

Aleshores Λ *és una aplicació contínua.*

Demostració: $X \times Y$ és un espai vectorial si definim la suma i la multiplicació per escalar component a component, és a dir,

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2),$$

on $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ i α, β són escalars. Com X i Y són F-espais, tenim mètriques completes invariants d_x i d_y, definides en X i Y, que indueixen les respectives topologies. Si definim

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2),$$

tenim que d és una mètrica ivariant en $X \times Y$ compatible amb la topologia producte i respecte la qual $X \times Y$ és un F-espai. Com Λ és una aplicació lineal, G és un subespai de $X \times Y$. Com estem suposant que G és un tancat, i és un subespai d'un espai mètric complet, tenim que també és un espai mètric complet. Per tant, G és un F-espai. Definim les aplicacions

$$\pi_1 : G \to X \qquad \pi_2 : X \times Y \to Y$$

mitjançant $\pi_1(x, \Lambda x) = x$, i $\pi_2(x, y) = y$. Ara bé, com π_1 és una aplicació lineal, contínua i bijectiva entre dos F-espais, per l'apartat (a) del Corol·lari 2.12, tenim que $\pi_1^{-1} : X \to G$ és també una aplicació contínua. Gràcies a la igualtat $\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ i a que π_2 és una aplicació contínua, concluïm que Λ és una aplicació contínua. $\square$

2.4 Teoremes de Hahn-Banach

Els Teoremes de Hahn-Banach van ser provats per Hans Hahn i Stefan Banach de manera independent a finals dels anys 20. S'anomenen teoremes en plural degut a que hi ha diverses versions equivalents. Estudiarem la versió analítica, Teorema 2.14, que és un resultat que permet extendre un operador lineal i continu definit en un subespai vectorial d'algun espai vectorial a tot l'espai. També estudiarem la versió geomètrica, Teorema 2.18, que és un resultat de separació de conjunts convexos.

Teorema 2.14. *Suposem que*

(a) X *és un espai vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *i* M *és un subespai vectorial de* X.

(b) $p : X \to \mathbb{R}$ *una aplicació que verifica que* $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ *i* $p(tx) = tp(x)$ *per a tot* $x, y \in X$ *i* $t \geq 0$.

(c) $f : M \to R$ *una aplicació lineal que verifica que* $f(x) \leq p(x)$ *en* M.

Aleshores, existeix $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ *una aplicació lineal tal que* $\Lambda x = f(x)$ *si* $x \in M$ *i*

$$-p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x) \quad si \quad x \in X.$$

Demostració: Si $M \neq X$, sigui $x_1 \in X \setminus M$ i definim $M_1 = \{x+tx_1;\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}\}$. M_1 és un espai vectorial. Com tenim que

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-x_1) + p(x_1+y)$$

en M, aleshores

$$f(x) - p(x-x_1) \leq p(y+x_1) - f(y)$$

si $x, y \in M$.
Sigui α el suprem del primer membre de la desigualtat anterior si $x \in M$. Aleshores per $x, y \in M$ tenim

$$f(x) - \alpha \leq p(x-x_1) \ \text{ i } \ f(y) + \alpha \leq p(y+x_1).$$

Definim l'aplicació f_1 en M_1 mitjançant $f_1(x+tx_1) = f(x) + t\alpha$ si $x \in M$ i $t \in \mathbb{R}$. Llavors tenim que $f = f_1$ en M i f_1 és lineal en M_1. Sigui $t > 0$. Aleshores, de les desigualtats anteriors, substituïnt x per $t^{-1}x$ a la primera, substituïnt y per $t^{-1}y$ a la segona, i multiplicant per t, obtenim

$$tf(t^{-1}x) - t\alpha \leq tp(t^{-1}x - x_1) \Rightarrow f_1(x - tx_1) \leq p(x - tx_1),$$

i

$$tf(t^{-1}y) + t\alpha \leq tp(t^{-1}y + x_1) \Rightarrow f_1(x + tx_1) \leq p(x + tx_1).$$

Per tant, $f_1 \leq p$ en M_1.
Sigui $\mathcal{P}$ la col·lecció de tots els parells ordenats (M', f') on M' és un subespai de X que conté M i f' és una aplicació lineal en M' que és extensió de f i verifica que $f' \leq p$ en M'. Sigui en $\mathcal{P}$ l'ordre parcial definit com

$$(M', f') \leq (M'', f'') \Leftrightarrow M' \subset M'' \text{ i } f' = f'' \text{ en } M'.$$

Pel Lema de Zorn, existeix una subcol·lecció maximal Ω de $\mathcal{P}$ totalment ordenada. Sigui Φ la col·lecció de tots els M' tals que $(M', f') \in \Omega$. Aleshores Φ està totalment ordenada per la inclusió i la unió

$$\widetilde{M} = \bigcup_{M' \in \Phi} M'$$

és un subespai de X. Si $x \in \widetilde{M}$, llavors $x \in M'$ per a algun $M' \in \Phi$ i definim $\Lambda x = f'(x)$ si f' és la aplicació lineal del parell $(M', f') \in \Omega$. Λ està ben definida en $\widetilde{M}$, és lineal i $\Lambda \leq p$.

Si $\widetilde{M}$ fos un subespai propi, per la primera part de la demostració, podríem construir una extensió més gran estricta de Λ, cosa que contradiuria la maximalitat de Ω, per tant, $\widetilde{M} = X$. Com $\Lambda \leq p$,

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda x \leq p(x)$$

per a tot $x \in X$. $\square$

Teorema 2.15. *Sigui M un subespai vectorial d'un espai vectorial X, p una seminorma en X i $f : M \to \mathbb{R}$ una aplicació lineal tal que*

$$|f(x)| \leq p(x) \quad si \quad x \in M.$$

Aleshores existeix una aplicació lineal $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ que és extensió de f i verifica

$$|\Lambda x| \leq p(x) \quad si \quad x \in X.$$

Demostració: Si el cos d'escalars és $\mathbb{R}$, aquest resultat és conseqüència directa del Teorema 2.14. Suposem que el cos d'escalars és $\mathbb{C}$. Sigui $u = Re(f)$. Pel Teorema 2.14, existeix una funció lineal $U : X \to \mathbb{R}$ tal que $U = u$ en M i $U \leq p$ en X. Sigui $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ l'aplicació lineal tal que $Re(\Lambda) = U$. Aleshores $\Lambda = f$ en M.
Finalment, a cada $x \in X$ li correspon un $\alpha \in \mathbb{C}$, amb $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha \Lambda x = |\Lambda x|$. Per tant,

$$|\Lambda x| = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

$\square$

A conseqüència d'aquests dos resultats tenim el següent corol·lari que ens permet justificar que l'espai dual X^* d'un espai normat X no trivial és no trivial.

Corol·lari 2.16. *Sigui X un espai normat i $x_0 \in X$. Aleshores existeix $\Lambda \in X^*$ tal que*

$$\Lambda x_0 = \|x_0\| \quad i \quad |\Lambda x| \leq \|x\|$$

per a tot $x \in X$.

Demostració: Si $x_0 = 0$ agafem $\Lambda = 0$. Sinó, apliquem el Teorema 2.15 a $p(x) = \|x\|$, M el subespai 1-dimensional generat per x_0 i $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$ en M. $\square$

El següent resultat és un teorema de separació de conjunts convexos. Abans d'enunciar-lo però, recordem uns conceptes que intervenen en aquest resultat i que convé tenir presents.

Definició 2.17. *Sigui X un espai vectorial.*

- *Un conjunt $C \subset X$ es diu convex si, per a tot $0 \leq t \leq 1$, es compleix que*

$$tC + (1-t)C \subset C.$$

- *Un conjunt $B \subset X$ es diu equilibrat si, per a tot α escalar amb $|\alpha| \leq 1$, tenim que $\alpha B \subset B$.*

- *Un conjunt $A \subset X$ es diu absorbent si, per a tot $x \in X$, existeix $t > 0$ tal que $x \in tA$.*

- *El funcional de Minkowski d'un conjunt absorbent es defineix com*

$$\mu_A(x) = inf\{t > 0;\ t^{-1}x \in A\},$$

per $x \in X$.

Cal recordar també que en un espai vectorial topològic, tot entorn de 0 és un conjunt absorbent.
Amb aquestes nocions i aquesta oberservació passem a donar l'enunciat i la demostració del teorema de separació de conjunts convexos.

Teorema 2.18. *Siguin A, B conjunts convexos, disjunts i no buits d'un espai vectorial topològic X.*

(a) Si A és obert, existeixen $\Lambda \in X^*$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ tals que $Re(\Lambda x) < \gamma \leq Re(\Lambda y)$ per a tot $a \in A$, $y \in B$.

(b) Si A és un compacte, B és un tancat i X és localment convex, existeixen $\Lambda \in X^*$ i $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tals que $Re(\Lambda x) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re(\Lambda y)$ per a tot $x \in A$, $y \in B$.

Observem que cal provar el teorema només en el cas en que el cos d'escalars és $\mathbb{R}$, ja que si el cos fos $\mathbb{C}$, un cop provat el teorema pel cas real, existiria una aplicació lineal i contínua de X en $\mathbb{R}$, Λ_1, que dona la separació que volem. Llavors la Λ que busquem seria l'única aplicació lineal i contínua de X en $\mathbb{R}$ que compleix $Re(\Lambda) = \Lambda_1$.

Demostració: Comencem provant (a). Fixem $a_0 \in A$ i $b_0 \in B$. Considerem $x_0 = b_0 - a_0$ i $C = A - B + x_0$. Aleshores, gràcies a la convexitat de A i B, C és un entorn convex de 0 en X. Sigui p el funcional de Minkowski del conjunt C. Tenim que p satisfà la condició (b) del Teorema 2.14. Com $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \notin C$ i llavors $p(x_0) \geq 1$. Definim ara $f(tx_0) = t$ sobre el subespai M de X definit per x_0. Si $t \geq 0$, tenim $f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$. Si $t < 0$, $f(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$, per tant, $f \leq p$ en M. Pel Teorema 2.14, f s'extén a una aplicació lineal $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ que verifica $\Lambda \leq p$ en X. En particular, sobre C, tenim que $\Lambda \leq 1 \Rightarrow \Lambda \geq -1$ en $-C$ $\Rightarrow |\Lambda| \leq 1$ en $C \cap (-C)$ entorn de 0 en X i, per tant, $\Lambda \in X^*$.
Siguin $a \in A$ i $b \in B$. Tenim que

$$\Lambda a - \Lambda b + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

ja que $\Lambda x_0 = 1$, $a - b + x_0 \in C$ i C és obert. Llavors $\Lambda a < \Lambda b$.
Com a conseqüència, $\Lambda(A)$ i $\Lambda(B)$ són subconjunts convexos i disjunts de $\mathbb{R}$ amb $\Lambda(A)$ a l'esquerra de $\Lambda(B)$. A més, com que tota aplicació lineal de X en $\mathbb{R}$ no constant és una aplicació oberta, $\Lambda(A)$ és un obert. Agafant com a γ el suprem de $\Lambda(A)$ obtenim el resultat que volíem provar.
Demostrem ara (b). Existeix un entorn convex V de 0 en X tal que $(A+V) \cap B = \emptyset$ ([2] Rudin, W. (pàgines 10-11)). Fent el mateix raonament que en el cas (a) canviant

A per $A+V$, obtenim que existeix $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(A+V)$ i $\Lambda(B)$ són conjunts convexos disjunts amb $\Lambda(A+V)$ obert a l'esquerra de $\Lambda(B)$. Com $\Lambda(A)$ és un compacte de $\Lambda(A+V)$, obtenim el resultat que volíem provar. $\square$

Com a corol·lari d'aquest resultat, tenim que, si X és un espai localment convex, aleshores el dual X^* separa els punts de X. Per veure-ho, és suficient, donats dos punts $x_1 \neq x_2$ de X, aplicar la part (b) del Teorema 2.18 als conjunts $A = \{x_1\}$ i $B = \{x_2\}$.
L'últim resultat que veurem en aquest secció és un teorema d'extensió contínua. Cal remarcar que aquest resultat, en el cas d'espais normats, és conseqüència directa del Teorema 2.15.

Teorema 2.19. *Sigui f una aplicació lineal i contínua de M en $\mathbb{R}$, on M és un subespai d'un espai localment convex X. Aleshores existeix $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda = f$ en M.*

Demostració: Podem suposar que $f \neq 0$ en M. Sigui $M_0 = \{x \in M;\ f(x) = 0\}$, i escollim $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 1$. Com f és contínua, $x_0 \notin \overline{M_0}$ respecte M i com M hereda la topologia de X, $x_0 \notin \overline{M_0}$ respecte X. Aplicant l'apartat (b) del Teorema 2.18 a $A = \{x_0\}$ i $B = \overline{M_0}$, existeix $\Lambda_1 \in X^*$ tal que $\Lambda_1(x_0)$ i $\Lambda_1(M_0)$ són disjunts. Llavors $\Lambda_1(M_0)$ és un subespai propi del cos dels escalars i, per tant, $\Lambda_1(M_0) = \{0\}$ y $\Lambda_1(x_0) \neq 0$. Dividint Λ_1 per $\Lambda_1(x_0)$ obtenim $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda x_0 = 1$ i $\Lambda x = 0$ per a tot $x \in M_0$. Si $x \in M$, llavors $x - f(x)x_0 \in M_0$, ja que $f(x_0) = 1$. Per tant,

$$\Lambda x - f(x) = \Lambda x - f(x)\Lambda x_0 = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0.$$

I en conseqüència, $\Lambda = f$ en M. $\square$

3 Espais de Sobolev

3.1 Definicions i primeres propietats

Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunt obert i $p \in \mathbb{R}$ amb $1 \leq p \leq \infty$.

Definició 3.1. *Definim l'espai de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ com*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \;\Big|\; \exists g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tals que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, 2, \dots, N \Big\}.$$

Per a $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definim la derivada parcial i-éssima en el sentit $W^{1,p}(\Omega)$ com $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ i escrivim

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \Big).$$

L'espai $W^{1,p}(\Omega)$ està equipat amb la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|_p$$

que és equivalent, si $1 \leq p < \infty$, a la norma $(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p)^{1/p}$.
L'espai $W^{1,2}(\Omega)$ el notem com $H^1(\Omega)$ i té associat el producte escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big)_{L^2} = \int_\Omega \Big(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big).$$

Tenim que $W^{1,p}(\Omega)$ és un espai de Banach per a tot $1 \leq p \leq \infty$ i $H^1(\Omega)$ és un espai de Hilbert. Per veure-ho, sigui $(u_n)_n$ una successió de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Aleshores tenim que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $m, n \geq n_0$,

$$\|u_m - u_n\|_{W^{1,p}} = \|u_m - u_n\|_p + \sum_{i=1}^N \Big\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \Big\|_p < \varepsilon.$$

Llavors, $(u_n)_n$ i $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_n$ són successions de Cauchy en $L^p(\Omega)$ per a tot $1 \leq i \leq N$. Com que $L^p(\Omega)$ és complet, existeixen $u, g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega)$ tals que

$$u_n \xrightarrow{n \to \infty} u \quad \text{i} \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \xrightarrow{n \to \infty} g_i \quad \text{en } L^p(\Omega)$$

Aleshores tenim

$$\Big| \int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big| \leq \int_\Omega \big| (u_n - u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \big| \leq \|u_n - u\|_p \Big\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big\|_{p'} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

i
$$\left|\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi - \int_\Omega g_i\varphi\right| \leq \int_\Omega |(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i)\varphi| \leq \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i\right\|_p \|\varphi\|_{p'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

per a tot $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i per a tot $1 \leq i \leq N$, utilitzant la Proposició 3.4. Per tant,

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega g_i\varphi,$$

per a tot $1 \leq i \leq N$. Aleshores $u \in W^{1,p}(\Omega)$ i $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, per tant, $W^{1,p}(\Omega)$ és complet per a tot $1 \leq p \leq \infty$. Si $u \in H^1(\Omega)$,

$$\left((u,u)_{H^1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((u,u)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

per tant, $H^1(\Omega)$ és un espai de Hilbert.

Definició 3.2. *Sigui $1 \leq p \leq \infty$. Definim l'espai $W_0^{1,p}(\Omega)$ com la clausura de l'espai $C_c^1(\Omega)$ a $W^{1,p}(\Omega)$.*

L'espai $W_0^{1,2}(\Omega)$ el notem $H_0^1(\Omega)$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotat de la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ és un espai de Banach i $H_0^1(\Omega)$ dotat del producte escalar de $H^1(\Omega)$ és un espai de Hilbert. Donat $m \geq 2$ un enter i $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$, definim recursivament l'espai

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \ \ \forall i = 1,\dots,N\right\}.$$

Aquests espais també els podem introduir com

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) = &\left\{u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \forall\alpha \text{ amb } |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que}\right. \\ &\left.\int_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\varphi \ \ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right\}, \end{aligned}$$

usant la notació de multiíndex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ amb $\alpha_i \geq 0$ enters tals que

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \ \text{ i } \ D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definim la derivada dèbil α-èssima com $D^\alpha u = g_\alpha$. Dotant l'espai $W^{m,p}(\Omega)$ amb la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p.$$

és un espai de Banach. Dotant l'espai $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ del producte escalar

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

és un espai de Hilbert. Per veure-ho, sigui $(u_n)_n$ una successió de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$. Aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $m, n \geq n_0$,

$$\|u_m - u_n\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_n\|_p < \varepsilon.$$

Llavors, $(D^\alpha u_n)_n$ són successions de Cauchy en $L^p(\Omega)$ per a tot $0 \leq \alpha \leq m$. Com $L^p(\Omega)$ és complet, existeixen $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tals que

$$D^\alpha u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g_\alpha \quad \text{en } L^p(\Omega), \quad \text{per a tot } \ 0 \leq |\alpha| \leq m.$$

Aleshores tenim

$$\left| \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi - \int_\Omega u D^\alpha \varphi \right| \leq \int_\Omega \left|(u_n - u) D^\alpha \varphi\right| \leq \|u_n - u\|_p \|D^\alpha \varphi\|_{p'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

i

$$\left| \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi - \int_\Omega g_\alpha \varphi \right| \leq \int_\Omega \left|\big(D^\alpha u_n - g_\alpha\big) \varphi\right| \leq \|D^\alpha u_n - g_\alpha\|_p \|\varphi\|_{p'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

per a tot $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i per a tot $0 \leq |\alpha| \leq m$, utilitzant la Proposició 3.4. Per tant,

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi,$$

per a tot $0 \leq |\alpha| \leq m$. Aleshores $u \in W^{m,p}(\Omega)$ i $\|u_n - u\|_{W^{m,p}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, per tant, $W^{m,p}(\Omega)$ és complet per a tot $1 \leq p \leq \infty$ i $m \geq 2$. Si $u \in H^m(\Omega)$,

$$\big((u,u)_{H^m}\big)^{\frac{1}{2}} = \Bigg(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha u)_{L^2} \Bigg)^{\frac{1}{2}} = \Bigg(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

per tant, $H^m(\Omega)$ és un espai de Hilbert.
Abans d'estudiar els resultats que involucren a aquests espais, donarem els enunciats d'uns resultats bàsics dels espais de Lebesgue L^p, vistos a les assigatures d'Anàlisi Real i Funcional i Anàlisi Harmònic i Teoria del Senyal, que convé tenir-los en ment ja que els utilitzarem repetidament.

Notació. *Sigui $1 \leq p \leq \infty$. S'anomena exponent conjugat de p a $1 \leq p' \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, considerant $1' = \infty$ i $\infty' = 1$.*

Proposició 3.3. (Desigualtat de Hölder). *Suposem que $f \in L^p$ i $g \in L^{p'}$ amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores*

$$fg \in L^1 \quad i \quad \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Corol·lari 3.4. *Si $f \in L^p \cap L^q$ amb $1 \leq p \leq q \leq \infty$, aleshores $f \in L^r$ per a tot $p \leq r \leq q$, i a més,*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad on \ \ \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Per demostrar aquest corol·lari, escrivim $\int |f|^r = \int |f|^{\alpha r}|f|^{(1-\alpha)r}$ i ara apliquem la desigualtat de Hölder amb $p = \frac{p}{\alpha r}$ i $p' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$.

Proposició 3.5. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores, gairebé per a tot $x \in \mathbb{R}^N$, la funció $y \mapsto f(x-y)g(y)$ és integrable en $\mathbb{R}^N$ i definim*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

A més,

$$f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad i \quad \|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Proposició 3.6. ***(Lema de Fatou).*** *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions de L^1 tal que per a tot n, $f_n \geq 0$. Aleshores*

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n.$$

Teorema 3.7. ***(Convergència dominada de Lebesgue).*** *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions de L^1 tal que satifà*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ g.p.t. $x \in \Omega$.

(b) Existeix una funció $g \in L^1$ tal que per a tot n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ g.p.t. $x \in \Omega$.

Aleshores $f \in L^1$ i $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Un cop enunciats els resultats bàsics dels espais de Lebesgue L^p passem a enunciar un resultat que ens permetrà fer arguments per densitat i que usarem a pràcticament totes les demostracions d'aquesta secció.

Proposició 3.8. *Sigui $u \in W^{1,p}(\Omega)$ amb $1 \leq p < \infty$. Aleshores existeix una successió $(u_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_{n|\Omega} \to u \text{ en } L^p(\Omega) \quad i \quad \nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega} \text{ en } L^p(\omega)^N$$

per a tot $\omega \subset \Omega$ obert amb la clausura, respecte $\mathbb{R}^N$, un compacte dins Ω. Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ i $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ amb $1 \leq p < \infty$, aleshores existeix una successió $(u_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N) \quad i \quad \nabla u_n \to \nabla u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N)^N.$$

Per demostrar aquesta proposició cal introduir la noció de regularitzadors i algunes propietats que ens seran útils. La idea dels regularitzadors és que són funcions molt regulars que, juntament amb les bones propietats de la convolució de funcions, permeten regularitzar funcions que no tenen bones propietats.

Definició 3.9. *Sigui $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funció qualsevol. Es defineix el suport de f, i es nota supp f,*

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; f(x) \neq 0\}}.$$

Definició 3.10. *Una successió de regularitzadors* $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ *és qualsevol successió de funcions definides en* $\mathbb{R}^N$ *tal que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \textit{supp } \rho_n \subset \overline{B\big(0, \frac{1}{n}\big)}, \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \textit{ en } \mathbb{R}^N.$$

Per exemple, si definim

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

tenim que $\rho_n(x) = Cn^N\rho(nx)$ amb $C = \big(\int \rho\big)^{-1}$ és una successió de regularitzadors.

Proposició 3.11. *Sigui* $f \in C(\mathbb{R}^N)$ *i* $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ *una successió de regularitzadors. Aleshores* $(\rho_n \star f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *uniformement sobre compactes de* $\mathbb{R}^N$*.*

Demostració: Sigui $K \in \mathbb{R}^N$ un compacte. Donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0, \delta).$$

Si $x \in \mathbb{R}^N$, tenim

$$(\rho_n \star f)(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(y))\rho_n(y)dy = \int_{B(0,\frac{1}{n})} (f(x-y) - f(y))\rho_n(y)dy.$$

Aleshores, per a tot $n > \frac{1}{\delta}$ tenim $|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$, per a tot $x \in K$, com volíem veure. □

Proposició 3.12. *Sigui* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *amb* $1 \leq p < \infty$ *i* $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ *una successió de regularitzadors.. Aleshores*

$$(\rho_n \star f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \textit{en} \quad L^p(\mathbb{R}^N)$$

Demostració: Donat $\varepsilon > 0$, sigui $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$, ja que l'espai $C_c(\mathbb{R}^N)$ és dens en $L^p(\mathbb{R}^N)$ ([1] Brezis, H. (pàgines 97-98.)) si $1 \leq p < \infty$. Aleshores, per la Proposició 3.11, $(\rho_n \star f_1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_1$ uniformement sobre compactes de $\mathbb{R}^N$. També tenim

$$\text{supp } (\rho_n \star f_1) \subset \overline{B\big(0, \frac{1}{n}\big)} + \text{supp } f_1 \subset \overline{B(0,1)} + \text{supp } f_1,$$

que és un compacte que no depèn de n. Aleshores existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$ tenim

$$\|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Llavors

$$(\rho_n \star f) - f = (\rho_n \star (f - f_1)) + ((\rho_n \star f_1) - f_1) + (f_1 - f)$$

i, per tant

$$\|(\rho_n \star f) - f\|_p \leq 2\|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p.$$

Concluïm que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$ tenim

$$\|(\rho_n \star f) - f\|_p < \varepsilon.$$

□

Proposició 3.13. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un obert. Aleshores* $C_c^\infty(\Omega)$ *és dens en* $L^p(\Omega)$ *per a tot* $1 \leq p < \infty$.

Demostració: Donada $f \in L^p(\Omega)$ definim

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Per tant, $\overline{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sigui $\{K_n\}_{n\geq 1}$ una successió de compactes de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \quad \text{i} \quad \text{dist}(K_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{2}{n} \quad \forall n.$$

Per exemple, $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \geq n \text{ i } \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{2}{n}\}$. Sigui $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ una successió de regularitzadors, $g_n = \chi_{K_n}\overline{f}$ i $f_n = (\rho_n \star g_n)$. Llavors, aquestes funcions f_n compleixen que

$$\text{supp } f_n \subset \overline{B\big(0, \frac{1}{n}\big)} + K_n \subset \Omega.$$

Com els regularitzadors són $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ i tenim que el suport de les funcions f_n és un compacte dins de Ω, obtenim que $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ ([1] Brezis, H. (pàgines 107-108.)). A més,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &= \|f_n - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|(\rho_n \star g_n) - (\rho_n \star \overline{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|\rho_n \star (g_n - \overline{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|g_n - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Observem que $\|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ per la Proposició 3.12 i que, pel Teorema 3.7, $\|g_n - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$, obtenint el que volíem provar. $\square$

A la demostració de la Proposició 3.8 usarem el següent lema:

Lema 3.14. *Sigui* $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *i* $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *amb* $1 \leq p \leq \infty$. *Aleshores*

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad i \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \star v) = \rho \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Notació. *Donada* f *definida en* $\mathbb{R}^N$, *escrivim* $\check{f}(x) = f(-x)$.

Demostració: Suposem primer que ρ té suport compacte. Per la Proposició 3.5, $\rho \star v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sigui $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\int (\rho \star v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int\int \rho(x-y)v(y)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dydx = \int v\left(\check{\rho} \star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \\
&= \int v(x)\int \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho(-y)\varphi(x-y))dydx = \int v(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int \rho(-y)\varphi(x-y)dy\right)dx \\
&= \int v\frac{\partial}{\partial x_i}(\check{\rho} \star \varphi) = -\int \frac{\partial v}{\partial x_i}(\check{\rho} \star \varphi) = -\int\int \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\rho(y-x)\varphi(y)dydx \\
&= -\int \left(\rho \star \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\varphi,
\end{aligned}$$

per a tot $i = 1, \ldots, N$. Aleshores,

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \text{ i } \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \star v) = \rho \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Si ρ no té suport compacte, sigui $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ una successió de funcions de $C_c(\mathbb{R}^N)$ tals que $\rho_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$. Aleshores, seguint el mateix procediment que abans,

$$\rho_n \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \text{ i } \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n \star v) = \rho_n \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

A més

$$\rho_n \star v \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \rho \star v \ \text{ en } \ L^p(\mathbb{R}^N) \ \text{ i } \ \rho_n \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \rho \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \ \text{ en } \ L^p(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $i = 1, \ldots, N$. Aleshores,

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \text{ i } \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \star v) = \rho \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

$\square$

Demostració: (Proposició 3.8*).* Sigui

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

i sigui $v_n = \rho_n \star \overline{u}$ amb $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ una successió de regularitzadors. Tenim que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ i que $v_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \overline{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ per la Proposició 3.12. Donat $\omega \subset \Omega$ obert amb la clausura, respecte $\mathbb{R}^N$, un compacte dins Ω, sigui $\alpha \in C_c^1(\Omega)$ tal que $0 \leq \alpha \leq 1$ i $\alpha = 1$ en un entorn de ω. Observem que, per a n prou gran per tal que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$, tenim

$$\begin{aligned} &\text{supp } (\rho_n \star \overline{\alpha u} - \rho_n \star \overline{u}) = \text{supp } (\rho_n \star (\overline{\alpha} - 1)\overline{u}) \\ &\subset \text{supp } \rho_n + \text{supp } ((\overline{\alpha} - 1)\overline{u}) \subset \overline{B\big(0, \frac{1}{n}\big) + \text{supp } (\overline{\alpha} - 1)} \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\rho_n \star (\overline{\alpha u}) = \rho_n \star \overline{u} \ \text{ en } \ \omega,$$

si n és suficientment gran. Usant el Lema 3.14, tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n \star \overline{\alpha u}) &= \rho_n \star \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha u}) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - y) \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha u})(y) dy \\ &= \int_\Omega \rho_n(x - y) \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u)(y) dy = \int_\Omega \rho_n(x - y) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(y) u(y) + \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \alpha(y) \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - y) \left(\overline{\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u + \frac{\partial u}{\partial x_i} \alpha} \right)(y) dy = \rho_n \star \left(\overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \right). \end{aligned}$$

Llavors, per la Proposició 3.12,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n \star \overline{\alpha u}) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \ \text{ en } \ L^p(\mathbb{R}^N),$$

i en particular, com que $\alpha = 1$ en un entorn de ω,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n \star \overline{\alpha u}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad L^p(\omega).$$

Gràcies a la igualtat $\rho_n \star (\overline{\alpha u}) = \rho_n \star \overline{u}$ en ω provada anteriorment concluïm

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n \star \overline{u})\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad L^p(\omega).$$

Per acabar, sigui $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ amb $0 \leq \zeta \leq 1$ i

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & si \ |x| < 1, \\ 0 & si \ |x| \geq 2. \end{cases}$$

Definim ara la successió $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$ per $n \geq 1$. Usant el Teorema 3.7, la successió $u_n = \zeta_n v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^p(\omega)$, ja que $v_n = \rho_n \star \overline{u} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. A més, $\nabla u_{n|\omega} = \nabla(\zeta_n v_n)_{|\omega} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nabla u_{|\omega}$ en $L^p(\omega)^N$ ja que, per a n suficientment gran,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\zeta_n v_n) = \zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} = \zeta_n \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n \star \overline{u}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad L^p(\omega).$$

En el cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, la successió $u_n = \zeta_n(\rho_n \star v_n)$, comprovant de manera anàloga al cas anterior, compleix les propietats requerides a l'enunciat. □

Una caracterització de l'espai $W^{1,p}(\Omega)$, amb $1 < p \leq \infty$, que utilitzarem amb freqüència a l'hora de veure la regularització de les solucions del problema de Dirichlet, és el següent resultat:

Proposició 3.15. *Sigui $u \in L^p(\Omega)$ amb $1 < p \leq \infty$. Les següents propietats són equivalents:*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Existeix una constant C tal que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

(iii) Existeix una constant C tal que per a tot $\omega \subset \Omega$ obert tal que la seva clausura, respecte $\mathbb{R}^N$, sigui un compacte de Ω i, per a tot $h \in \mathbb{R}^N$ amb $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$, tenim

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|,$$

on $\tau_h u(x) = u(x+h)$ amb $x \in \omega$.

Veurem que en la demostració s'aplica el Teorema 2.15 per a extendre un operador de manera contínua. També usarem els teoremes de representació de Riesz ([1] Brezis, H. (pàgines 97, 99-101.)) que no estudiarem ja que requereixen de topologia dèbil i s'escapa de l'objectiu del treball.

Demostració: La implicació $(i) \Rightarrow (ii)$ és directa aplicant la desigualtat de Hölder a la definició.
Veiem la implicació $(ii) \Rightarrow (i)$. Definim l'operador lineal

$$\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto \int_\Omega u\varphi'$$

definit en un subespai dens de $L^{p'}(\Omega)$, ja que $p' < \infty$, i que és continu amb la norma de $L^{p'}(\Omega)$. Per tant, aplicant el Teorema 2.15, s'extén a un operador lineal acotat F definit a tot $L^{p'}(\Omega)$. Aplicant els teoremes de representació de Riesz, existeix $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$F(\varphi) = \int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in L^{p'}.$$

En particular,

$$\int_\Omega u\varphi' = \int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

i per tant, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Veiem ara que $(i) \Rightarrow (iii)$. Sigui $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sigui $h \in \mathbb{R}^N$ i $v(t) = u(x+th)$ amb $t \in \mathbb{R}$. Aleshores $v'(t) = h \cdot \nabla u(x+th)$ i, per tant,

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th)dt.$$

Aleshores, per $1 \leq p < +\infty$, aplicant la Proposició 3.3, tenim

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt$$

i, per tant, si integrem sobre ω respecte x, tenim

$$\begin{aligned}\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx &\leq \int_\omega \left(|h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt \right) dx \\ &= |h|^p \int_0^1 \left(\int_\omega |\nabla u(x+th)|^p dx \right) dt = |h|^p \int_0^1 \left(\int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^p dy \right) dt,\end{aligned}$$

aplicant el Teorema de Fubini, ([1] Brezis, R (pàgina 91.)), i fent el canvi de variable $y = x + th$.
Si $|h| < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$, existeix un obert $\omega' \subset \Omega$ amb clausura, respecte $\mathbb{R}^N$, un compacte en Ω tal que $\omega + th \subset \omega'$ per a tot $t \in [0,1]$, llavors

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)}^p \leq |h|^p \int_{\omega'} |\nabla u|^p.$$

Sigui ara $u \in W^{1,p}(\Omega)$, amb $1 \leq p < \infty$. Aleshores existeis una successió $(u_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ i $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(\omega)^N$ per a tot $\omega \subset \Omega$ amb clausura compacte dins Ω, per la Proposició 3.8. Aleshores

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\omega)}^p \leq |h|^p \int_{\omega'} |\nabla u_n|^p.$$

i passant el límit obtenim (iii) per a tota $u \in W^{1,p}(\Omega)$, amb $1 \leq p < \infty$. El cas $p = \infty$ s'obté fent tendir p a ∞ en

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\omega)} \leq |h| \left(\int_{\omega'} |\nabla u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Veiem ara que $(iii) \Rightarrow (ii)$. Sigui $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i considerem un obert ω tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega \subset \Omega$ amb la clausura de ω, respecte $\mathbb{R}^N$, un compacte dins Ω. Sigui $h \in \mathbb{R}^N$ amb $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$. Tenim que

$$\left| \int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^{p'}(\omega)}.$$

D'altra banda, com tenim la igualtat

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))dy,$$

aleshores, es compleix que

$$\int_\Omega u(y) \frac{(\varphi(y-h) - \varphi(y))}{|h|} dy \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

usant la hipòtesi de (iii). Escollint $h = te_i$, amb $t \in \mathbb{R}$, i passant al límit quan $t \to 0$, obtenim (ii). $\square$

En el cas en que $\Omega = \mathbb{R}^N$, les demostracions són menys enrebassades degut a que el nostre obert Ω pot ser molt patològic i presentar molts problemes. Una bona estrategia a l'hora de demostrar inclusions entre els espais de Sobolev i els espais de Lebesgue o els espais C^k, és veure aquestes inclusions en el cas concret de $\Omega = \mathbb{R}^N$ i després intentar desmotrar-les pel cas general.
Com aquests espais estan construïts a partir dels espais de Lebesgue L^p, aquestes inclusions d'espais es tradueixen a desigualtats de normes, el que ens permet utilitzar la teoria d'operadors de l'anàlisi funcional. El següent resultat utilitza aquesta teoria per passar de $\mathbb{R}^N$ a Ω, si Ω és "prou regular". Abans d'enunciar-lo però, establim una notació prèvia i concretem la noció de prou regularitat.

Notació. *Donat $x \in \mathbb{R}^N$, escrivim $x = (x', x_N)$ on $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$, i*

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Aleshores definim els següents conjunts

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N); x_N > 0\}, \quad Q = \{x = (x', x_N); |x'| < 1 \text{ i } |x_N| < 1\},$$

$$Q_+ = \mathbb{R}^N_+ \cap Q, \quad Q_0 = \{x = (x', 0); |x'| < 1\}.$$

Definició 3.16. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{R}^N$. Diem que és de classe C^m, $m \geq 1$ enter, si per a tot punt $x \in \partial\Omega$ existeix un entorn U de x en $\mathbb{R}^N$ i una aplicació bijectiva $H : Q \to U$ tal que*

$$H \in C^m(Q), \quad H^{-1} \in C^m(U), \quad H(Q_+) = U \cap Q, \quad i \quad H(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Teorema 3.17. ***(Operador extensió).*** *Sigui Ω de classe C^1 amb $\partial\Omega$ acotada (o bé $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Aleshores existeix un operador lineal*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

amb $1 \leq p \leq \infty$, tal que per a tot $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(i) $Pu|_\Omega = u$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

on C depèn només de Ω.

Abans de donar la demostració del teorema enunciarem i demostrarem el següent lema que ens serà de molta utilitat a l'hora d'extendre una funció per reflexió.

Lema 3.18. *Sigui $u \in W^{1,p}(Q_+)$, amb $1 \leq p \leq \infty$, definim la funció u^* sobre Q com*

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & x_N > 0, \\ u(x', -x_N) & x_N < 0. \end{cases}$$

Aleshores $u^* \in W^{1,p}(Q)$ i es compleix

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leq 2\|u\|_{L^(Q_+)},$$

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

Demostració: Per veure que $u^* \in W^{1,p}(Q)$, cal veure que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \text{ per } 1 \leq i \leq N-1.$$

i que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^\diamond,$$

on $(\frac{\partial u}{\partial x_i})^*$ és l'extensió per reflexió de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ i, donada f definida en Q, definim $f^\diamond$ com

$$f^\diamond(x', x_N) = \begin{cases} f^\diamond(x', x_N) & x_N > 0, \\ -f^\diamond(x', -x_N) & x_N < 0. \end{cases}$$

Això és degut a que només cal comprovar la igualtat d'integrals al ja tenir que u^* és una funció de L^p. Sigui $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2}, \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

Considerem la successió de funcions $(\eta_k)_k \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$ definides com

$$\eta_k(t) = \eta(kt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Sigui $\varphi \in C_c^1(Q)$. Tenim que, per $1 \leq i \leq N-1$,

$$\begin{aligned}\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{Q_+} u(x', x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) + \int_{-Q_+} u(x', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_N) \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_N) \Big) = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\end{aligned}$$

on $\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$. Com $\eta_k(x_N) = 0$ quan $x_N \leq 0$, tenim $\eta_k(x_N)\psi(x', x_N) \in C_c^1(Q_+)$, ja que $\varphi \in C_c^1(Q)$. Llavors,

$$\int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi,$$

ja que η_k només depèn de x_N. Passant al límit quan $k \to \infty$, pel Teorema 3.7, tenim

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi.$$

Finalment,

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^* \varphi,$$

com volíem demostrar, desfent els passos que hem fet abans. Per a tota $\varphi \in C_c^1(Q)$ tenim

$$\begin{aligned}\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} &= \int_{Q_+} u(x', x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', x_N) + \int_{-Q_+} u(x', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', x_N) \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_N) \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', x_N) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', -x_N) \Big) = \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N},\end{aligned}$$

on $\chi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$. Com $\chi(x', 0) = 0$, exiteix una constant M tal que $|\chi(x', x_N)| \leq M|x_N|$ en Q, usant que $|x_N| < 1$ si $(x', x_N) \in Q$ i que Q és acotat $\Rightarrow \varphi \in L^\infty(Q)$. Com abans, $\eta_k \chi \in C_c^1(Q_+)$, per tant, tenim

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_k \chi.$$

Si derivem, obtenim que

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = \eta_k \frac{\partial \chi}{\partial x_N} + k\eta'(kx_N)\chi.$$

Aleshores usant que

$$\Big| \int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \Big| \leq \Big| \int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)Mx_N \Big| \leq kMC \int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u| x_N dx \leq MC \int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u| dx,$$

amb $C = \sup_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$, quan passem al límit fent $k \to \infty$ obtenim

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi.$$

i com

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi = \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\diamond} \varphi,$$

combinant les igualtats d'integrals, obtenim el que volíem provar. $\square$

Fixem-nos que en la demostració, podem canviar Q_+ per $\mathbb{R}^N_+$ i el resultat continua sent vàlid. Això ens implica que hem provat el teorema de l'operador extensió pel cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.
Necessitarem el següent lema per provar el Teorema 3.17.

Lema 3.19. ***(Partició de la unitat).*** *Sigui Γ un subconjunt compacte de $\mathbb{R}^N$ i $U_1, \ldots, U_k$ un recobriment de Γ, és a dir, $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Aleshores existeixen funcions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tals que*

(i) $0 \le \theta_i \le 1 \quad \forall i = 0, \ldots, k$ *i* $\sum_{i=0}^k \theta_i = 1$

(ii) *supp* $\theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$ *i supp* $\theta_i \subset U_i$ *és un compacte* $\forall i = 1, \ldots, k$.

La demostració la podem trobar a [6] Adams, R. A.

Demostració: (Teorema 3.17) Com $\Gamma = \partial\Omega$ és un compacte de classe C^1, existeixen oberts de $\mathbb{R}^N$, $(U_i)_{1\le i\le k}$, tals que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$, i aplicacions contínues $H_i : Q \to U_i$ tals que

$$H_i \in C^1(Q), \quad H_i^{-1} \in C^1(U_i), \quad H_i(Q_+) = U_i \cap Q, \ \text{ i } \ H_i(Q_0) = U_i \cap \Gamma.$$

Considerem les funcions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ introduïdes en el lema anterior. Donada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, escrivim

$$u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u = \sum_{i=0}^{k} u_i \quad \text{ on } \theta_i u = u_i.$$

Volem extendre les funcions u_i a $\mathbb{R}^N$, ja que llavors tindrem extesa a $\mathbb{R}^N$ la funció u per la igualtat que acabem d'escriure. Distigim dos casos, u_0 i u_i per $1 \le i \le k$. Extenem primer u_0. Definim

$$\overline{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Tenim que, com supp $\theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$ és un compacte i $\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^k \nabla\theta_i$ té suport compacte, $\theta_0 \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ i $\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$. Aleshores

$$\overline{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u}_0 = \theta_0 \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\overline{u},$$

ja que, donada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tenim

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\theta_0 u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \theta_0 u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega u \bigg(\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_0 \varphi) - \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\varphi \bigg)$$
$$= - \int_\Omega \bigg(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_0 \varphi + u \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\varphi \bigg) = - \int_{\mathbb{R}^N} \bigg(\theta_0 \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i} \overline{u} \bigg) \varphi.$$

Llavors
$$\|\overline{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$
Extenem ara les funcions u_i, $1 \leq i \leq k$. Sigui $v_i(y) = u(H_i(y))$ per $y \in Q_+$. Tenim que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. Aleshores extenem per reflexió a Q com en el Lema 3.18 i anomenem a la funció extesa v_i^*. Sigui $w_i(x) = v_i^*(H_i^{-1}(x))$ per $x \in U_i$. Llavors, es compleix que, $w_i \in W^{1,p}(U_i)$ i $w_i = u$ en $U_i \cap \Omega$. A més,

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}.$$

Finalment, definim per $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x) w_i(x) & x \in U_i, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus U_i, \end{cases}$$

i llavors, $\widehat{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{u}_i = u_i$ en Ω i a més

$$\|\widehat{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)},$$

ja que hem provat que si $x \in U_i \cap \Omega$, $w_i(x) = u(x)$. Per tant, si $x \in \Omega \cap U_i$, $\widehat{u}_i(x) = \theta_i(x) w_i(x) = \theta_i(x) u(x) = u_i(x)$. Finalment, l'operador $Pu = \overline{u}_0 + \sum_{i=1}^k \widehat{u}_i$ compleix les propietats que volíem, ja que

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\overline{u_0}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^k \|\widehat{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

on K és la suma de les constants que han aparegut a les desigualtats de normes provades i, clarament, si ens restringim a Ω, $Pu_{|\Omega} = u$. $\square$

Gràcies a aquest teorema, podem aproximar les funcions de $W^{1,p}(\Omega)$ per funcions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ restringint-les a Ω, ([1] Brezis, H. (pàgina 277.)).

3.2 Inclusions dels espais de Sobolev i embedding theorems

En aquesta secció estudiarem les inclusions dels espais de Sobolev en els espais de Lebesgue. Les demostracions les farem en el cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ i després utilitzarem el Teorema 3.17 per tenir les inclusions en general, per tant, durant tota la secció, Ω tindrà les propietats necessàries per aplicar el Teorema 3.17. Aquestes inclusions ens permetran demostrar els embedding theorems que veurem a continuació d'aquests.

Teorema 3.20. ***(Sobolev, Gagliardo, Niremberg).*** *Sigui $1 \leq p < N$. Aleshores*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega),$$

on p^* satisfà $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$, i existeix una constant C, depenen només de p i N, tal que

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Enunciem primer el següent lema que ens serà molt útil a la demostració.

Lema 3.21. *Sigui $N \geq 2$ i siguin $f_1, \ldots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Per $x \in \mathbb{R}^N$ i $1 \leq i \leq N$ sigui*

$$\widetilde{x_i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Aleshores la funció

$$f(x) = f_1(\widetilde{x_1}) \cdots f_N(\widetilde{x_N})$$

amb $x \in \mathbb{R}^N$, és una funció de $L^1(\mathbb{R}^N)$ i compleix que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Demostració: Comencem pel cas $N = 2$. Tenim que $|f(x)| = |f(x_1, x_2)| = |f_1(\widetilde{x_1})||f_2(\widetilde{x_2})|$. Aleshores

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f_1(\widetilde{x_1})||f_2(\widetilde{x_2})| dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)||f_2(x_1)| dx_1 dx_2 = \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

Veiem ara el cas $N = 3$, que és més il·lustratiu.

$$\begin{aligned}&\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2, x_3)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)| dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2, x_3)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} dx_2 \\ &\leq \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

on hem aplicat la desigualtat de Cauchy-Schwarz ([1] Brezis, H. (pàgina 131.)) tres vegades. Suposem cert per N i veiem-ho per $N+1$ Fixem $x_{N+1} \in \mathbb{R}$. Aleshores per la Proposició 3.3,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_1 \cdot \ldots \cdot f_N|^{N'} dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_N \right)^{\frac{1}{N'}},$$

on $N' = \frac{N}{N-1}$. Tenim que $|f_i|^N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ per $1 \leq i \leq N$. Aleshores per hipòtesi d'inducció

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_1|^{N'} \cdot \ldots \cdot |f_N|^{N'} dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \| |f_i|^{N'} \|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|^{N'}_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})},$$

llavors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Ara fem variar x_{N+1}. Tenim que les funcions $x_{N+1} \mapsto \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1}}$ són de $L^N(\mathbb{R})$ i com a conseqüència de la Proposició 3.3, el producte d'elles és de $L^1(\mathbb{R})$. Llavors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathbb{R}^{N+1}} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_N \right) dx_{N+1} \\
&\leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} dx_{N+1} \\
&= \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_1|^N \right)^{\frac{1}{N}} \cdot \ldots \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_N|^N \right)^{\frac{1}{N}} dx_{N+1} \\
&= \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

□

Demostració: (Teorema 3.20*).* Comencem amb el cas $p = 1$ i $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Tenim que

$$\begin{aligned}
|u(x_1, \ldots, x_N)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_N) dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_N \right| dt := f_i(\widetilde{x}_i).
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$|u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^{N} f_i(\widetilde{x}_i).$$

Aplicant el Lema 3.21, deduïm que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_1(\widetilde{x}_1) \cdots f_N(\widetilde{x_N})|^{\frac{1}{N-1}} dx \\
&\leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i^{\frac{1}{N-1}}\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|^{\frac{1}{N-1}}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N-1}}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

I com a conseqüència tenim

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.1}$$

Com estem al cas $p = 1$, $p^* = \frac{N}{N-1}$ i, per tant, tenim la desigualtat de normes del teorema provada. Sigui ara $1 < p < N$ i $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sigui $m \geq 1$. Substituïm $|u|^{m-1}u$ a la desigualtat (3.1) i aplicant la Proposició 3.3, obtenim

$$\|u\|^m_{\frac{mN}{N-1}} \leq m \prod_{i=1}^{N} \left\| |u|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq m \|u\|^{m-1}_{p'(m-1)} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{p}.$$

Aleshores si escollim $m = \frac{(N-1)p^*}{N}$ obtenim $\frac{mN}{N-1} = p'(m-1)$ i llavors

$$\|u\|_{p^*} \leq m \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{p}.$$

i per tant,

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

Com $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ és dens a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, existeix una successió $\{u_n\}_n \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Agafant una subsuccessió si és necessari, podem suposar també que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ g.p.t. en $\mathbb{R}^N$. Aleshores tenim $\|u_n\|_{p^*} \leq C\|\nabla u_n\|_p$, i per la Proposició 3.5 obtenim $u \in L^{p^*}$ i

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p.$$

□

Corol·lari 3.22. *Sigui* $1 \leq p < N$. *Aleshores*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

on $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$, *amb injecció contínua.*

Demostració: Donat $q \in [p, p^*]$, escrivim

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \qquad \text{per a alguna } \alpha \in [0,1].$$

Pel teorema anterior, donada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tenim que $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ i, per tant, $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Pel Corol·lari 3.4 i la desigualtat de Young[1], es compleix que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^{\alpha} \|u\|_{p^*}^{1-\alpha} \leq \|u\|_p + \|u\|_{p^*}.$$

Usant el teorema anterior tenim que

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

□

Corol·lari 3.23. *Sigui* $p = N$. *Aleshores*

$$W^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [N, +\infty]$$

amb injecció contínua.

[1]Desigualtat de Young: Per a tot $a, b \geq 0$ i $1 \leq p \leq \infty$ tenim $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$.

Demostració: Sigui $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. De la demostració del Teorema 3.20, canviant p per N, obtenim

$$\|u\|_{\frac{mN}{N-1}}^m \leq m\|u\|_{\frac{(m-1)N}{N-1}}^{m-1} \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_N^{\frac{1}{N}} \leq m\|u\|_{\frac{(m-1)N}{N-1}}^{m-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_N \leq m\|u\|_{\frac{(m-1)N}{N-1}}^{m-1} \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_N.$$

Per la desigualtat de Young, obtenim

$$\|u\|_{\frac{mN}{N-1}} \leq C(\|u\|_{\frac{(m-1)N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N).$$

Llavors, agafant $m = N$, tenim

$$\|u\|_{\frac{N^2}{N-1}} \leq C\|u\|_{W^{1,N}},$$

i pel Corol·lari 3.4,

$$\|u\|_q \leq \|u\|_{\frac{N^2}{N-1}} \leq \|u\|_{W^{1,N}},$$

per a tot $q \in [N, \frac{N^2}{N-1}]$. Repetint l'argument amb $m = N+1, N+2, \dots$ obtenim

$$\|u\|_q \leq \|u\|_{W^{1,N}},$$

per a tot $q \in [N, +\infty]$, on $C = C(q, N)$. Usant el mateix argument per densitat que en el Teorema 3.20 obtenim el resultat per a $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

El següent teorema ens dona una inclusió dins d'un espai de funcions més regulars que els espais de Lebesgue, com és l'espai de les funcions contínues.

Teorema 3.24. ***(Morrey).*** *Sigui $p > N$. Aleshores*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$$

amb injecció contínua. A més, es compleix que, per a tot $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tenim

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_p \ \textit{g.p.t. } x, y \in \Omega,$$

on $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ i C és una constant que depèn només de p i N.

Observem que d'aquesta segona part del teorema concluïm que donada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existeix una funció $v \in C(\Omega)$ tal que $u = v$ *g.p.t.* en Ω, és a dir, que u admet un representant continu.

Demostració: Sigui $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ i Q un cub obert, contenint 0 amb costats de longitud r paral·lels als eixos de coordenades. Aleshores per $x \in Q$ tenim

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)dt$$

i per tant,

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \leq r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt. \tag{3.2}$$

Definim la mitjana de u en Q com

$$\overline{u} = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)dx.$$

Aleshores integrant (3.2) sobre Q obtenim

$$\begin{aligned} |\overline{u} - u(0)| &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x) - u(0)|dx \le \frac{r}{|Q|}\int_Q \left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt\right) dx \\ &= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \left(\int_Q \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dx\right) dt = \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \left(\int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \frac{dy}{t^N}\right) dt, \end{aligned}$$

fent el canvi $y = tx$. Aleshores per la Proposició 3.3 tenim

$$\int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy \le \left(\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} |tQ|^{\frac{1}{p'}},$$

ja que $tQ \subset Q$ per $t \in (0,1)$. Aleshores

$$\begin{aligned} |\overline{u} - u(0)| &\le \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(Q)} \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} r^{\frac{N}{p'}} dt \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}\, r^{\frac{N}{p'}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} dt = \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}. \end{aligned}$$

ja que $\frac{N}{p'} - N + 1 = 1 - \frac{N}{p}$.
Aquesta igualtat val per a tots els cubs de costats paral·lels als eixos de coordenades de longitud r si fem una translació, per tant, usant la desigualtat triangular obtenim que

$$|u(x) - u(y)| \le \frac{2r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \forall x, y \in Q.$$

Ara bé, donats $x, y \in \mathbb{R}^N$, existeix un cub Q de costat $r = 2|x-y|$ que conté als dos. Aleshores

$$|u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_p \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

on $C = C(p,N) = \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}$ és constant, com volíem veure. Usant que $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ és dens a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, fent un argument com en el Teorema 3.20, obtenim el resultat per $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Cal veure ara la inclusió. Sigui $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ i Q un cub de costat $r = 1$ contenint x. Aleshores

$$|u(x)| \le |\overline{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \le \|u\|_{L^p(Q)} + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

ja que, com Q té mesura finita, $|\overline{u}| \le \|u\|_{L^p(Q)}$, i C depèn només de p i N. Finalment, acabem la demostració argumentant com abans per densitat i obtenim el resultat per a funcions $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Corol·lari 3.25. *Sigui $m \geq 1$ un enter i $p \in [1, +\infty]$. Aleshores tenim*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad on\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} \quad si\ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0,$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty) \ \ si\ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0,$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \ \ si\ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0,$$

amb totes aquestes injeccions contínues. A més, si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ no és enter, sigui $k = [m - \frac{N}{p}]$ la part entera i $\theta = m - \frac{N}{p} - k$. Aleshores, per a tot $u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall \alpha \ amb\ |\alpha| = k,$$

i també

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} |x - y|^\theta \ g.p.t.\ x, y \in \Omega, \quad \forall \alpha \ amb\ |\alpha| = k.$$

En particular, $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$.

La tercera inclusió d'aquest corol·lari s'anomena embedding theorem. Això és degut a que trobem una inclusió dins un espai més regular que els espais de Lebesgue, l'espai C^k.
La demostració d'aquest corol·lari, com veurem a continuació, es basa en aplicar els resultats anteriors d'aquesta secció repetidament. Com abans, demostrem el cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ i obtenim el cas general aplicant el Teorema 3.17.

Demostració: Comcencem pel cas $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$. Tenim d'aquesta desigualtat que $p < \frac{N}{m} \leq N$. Sigui $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Aleshores

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m - 1$. Com $1 \leq p < N$, podem aplicar el Teorema 3.20, i obtenim que

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m - 1$. Aleshores tenim que

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}} \in W^{1,p^*}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $j_1, \ldots, j_N$ amb $j_1 + \ldots + j_N = m - 2$. Per tant, $u \in W^{m-1,p^*}(\mathbb{R}^N)$ amb $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Tenim que $p^* < \frac{N}{m-1}$. Si $p^* = N$ ja tenim provat el resultat. Si $p^* < N$, fent el mateix argument, obtenim que $u \in W^{m-2,p^{**}}(\mathbb{R}^N)$ amb $\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$. Si $p^{**} = N$ tenim provat el resultat. Si $p^{**} < N$ apliquem aquest argument fins a obtenir $u \in W^{1,p^{(m-1)*}}(\mathbb{R}^N)$ on $\frac{1}{p^{(m-1)*}} = \frac{1}{p} - \frac{m-1}{N}$. Si $p^{(m-1)*} = N$ ja tenim el resultat. Si $p^{(m-1)*} < N$, aplicant una vegada més el Teorema 3.20, $u \in L^{p^{m*}}(\mathbb{R}^N)$ amb $\frac{1}{p^{m*}} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.

Veiem ara el cas $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$. Tenim doncs $p = \frac{N}{m}$. Separem la demostració en dos subcasos. Si $p = N$, donada $u \in W^{m,N}(\mathbb{R}^N)$, tenim que $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ per definició i aplicant el Corol·lari 3.23, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ per a tot $q \in [N, +\infty]$, com volíem veure. Si $p = \frac{N}{m}$ amb $m \geq 2$, llavors estem com a l'apartat anterior i obtenim $u \in W^{1,p^*}(\mathbb{R}^N)$ amb $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} = \frac{m-1}{N}$. Iterant aquest argument arribarem a que, per a alguna k, $p^{k*} = N$ i aplicant el Corol·lari 3.23 tindrem el resultat.

Per últim, veiem el cas $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$. Com abans separem aquest cas en dos subcasos. Si $p > N$, donada $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ i llavors per Teorema 3.24 tenim el resultat. Si $1 \leq p < N$ i $p > \frac{N}{m}$, tenim que, donada $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, com abans pel Teorema 3.20,

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_N}} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m - 1$. Llavors

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}} \in W^{1,p^*}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $j_1, \ldots, j_N$ amb $j_1 + \ldots + j_N = m - 2$, on $p^* = \frac{pN}{N-p} > \frac{N\frac{N}{m}}{N-\frac{N}{m}} = \frac{N}{m-1}$. Si $p^* > N$, apliquem el Teorema 3.24, sinó, tornem a aplicar el mateix argument fins a arribar a que $p^{k*} > N$ per a alguna k i llavors aplicant el Teorema 3.24 obtenim el resultat.

Per finalitzar la demostració, veiem el cas en que $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ no enter. Recordem que $k = [m - \frac{N}{p}]$ i que cal veure que $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$. Sigui $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Tenim que $p > \frac{N}{m}$. Per definició tenim que

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m - 1$. Si $p > N$, aplicant el Teorema 3.24 obtenim que

$$\begin{aligned}
&|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N \\
&\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \leq |x - y|^\alpha \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N \ \text{ per a tot } \ i = 1, \ldots, N \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\left|\frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_N}}(x) - \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_N}}(y)\right| \leq C|x - y|^\alpha \left\|\nabla \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}}\right\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N
\end{aligned}$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m - 1$, amb $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Aleshores

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}} \in C(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m-1$. Per tant, $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^N)$ observant que com $p > N$, $k = m-1$, com volíem veure.
Si $p = 1, N$, aleshores $m - \frac{N}{p}$ és enter, per tant, aquest casos els descartem. Si $1 < p < N$,

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-1)} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}} \in L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*],$$

per a tot $i_1, \ldots, i_N$ amb $i_1 + \ldots + i_N = m-1$. Pel corol·lari 3.22 on $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. En particular, $u \in W^{m-1,p^*}(\mathbb{R}^N)$, i per tant,

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}} \in W^{1,p^*}(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $j_1, \ldots, j_N$ amb $j_1 + \ldots + j_N = m-2$. Observem que $p^* = N \Leftrightarrow p = \frac{N}{2} \Rightarrow m - \frac{N}{p}$ enter, llavors no cal considerar aquest cas. Si $p^* > N$, aleshores $p > \frac{N}{2}$, i pel Teorema 3.24,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \leq |x-y|^\alpha \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N \text{ per a tot } i = 1, \ldots, N$$
$$\vdots$$
$$\left|\frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_N}}(x) - \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}}(y)\right| \leq C|x-y|^\alpha \left\|\nabla \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}}\right\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N$$

per a tot $j_1, \ldots, j_N$ amb $j_1 + \ldots + j_N = m-2$.

amb $\alpha = 1 - \frac{N}{p^*} = 1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{N} = 2 - \frac{N}{p}$. Aleshores

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}} \in C(\mathbb{R}^N),$$

per a tot $j_1, \ldots, j_N$ amb $j_1 + \ldots + j_N = m-2$. Per tant, $u \in C^{m-2}(\mathbb{R}^N)$ observant que com $p > \frac{N}{2}$, $k = m-2$, com volíem veure.
El cas $p^* = 1$ també el descartem ja que llavors $m - \frac{N}{p}$ seria enter. Si $1 < p^* < N$, tenim que

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} u}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_N^{j_N}} \in L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p^*, p^{2*}],$$

per a tot $j_1, \ldots, j_N$ amb $j_1 + \ldots + j_N = m-2$, on $\frac{1}{p^{2*}} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$. Aquí tornem a descartar els casos $p^{2*} = 1, N$ ja que arribem a que $m - \frac{N}{p}$ és enter. Si $p^{2*} > N$, aplicant el Teorema 3.24 com abans obtenim que $u \in C^{m-3}(\mathbb{R}^N)$ que és el que volíem ja que, $p^{2*} > N \Rightarrow p > \frac{N}{3} \Rightarrow k = m - 3$. Si $p^{2*} < N$, tornem a fer el mateix argument i anem iterant fins a arribar a

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \in L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p^{(m-2)*}, p^{(m-1(*}].$$

Llavors tenim que $u \in W^{1,p^{(m-1)*}}(\mathbb{R}^N)$ on $\frac{1}{p^{(m-1)*}} = \frac{1}{p} - \frac{m-1}{N}$. Els casos $p^{(m-1)*} = 1, N$ com abans ens porten a contradicció i observem que el cas $p^{(m-1)*} < N$ tampoc és possible ja que, si fos així, $p < \frac{N}{m}$. Aleshores l'únic cas possible és $p^{(m-1)*} > N$ i aplicant el Teorema 3.24 obtenim

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_p \quad g.p.t.\ x, y \in \mathbb{R}^N$$

on $\alpha = m - \frac{N}{p}$, llavors $u \in C(\mathbb{R}^N)$ com volíem veure ja que $k = 0$ si $p > \frac{N}{m}$. □

El següent resultat és una inclusió entre els espais de Sobolev.

Teorema 3.26. *Per a tot* $l,m \in \mathbb{N}$ *i per a* $1 \leq p < N$, $q \in [1, \infty]$, *tal que*

$$p \leq q, \quad l - \frac{N}{q} \leq m - \frac{N}{p}$$

tenim

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{l,q}(\Omega),$$

amb injecció contínua.

Demostració: Observem que cal només provar el resultat per $m = 1$ i $l = 0$ ($W^{0,q} = L^q$), ja que, aplicant el teorema reiteradament obtindrem el teorema general.
Pel Teorema 3.20,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

on $p^* = \frac{pN}{N-p}$. Observem que, per hipòtesis,

$$\frac{-N}{q} \leq 1 - \frac{N}{p} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{q} \leq \frac{p-N}{pN} \;\Leftrightarrow\; q \leq p^*.$$

Aleshores, com

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) \ \text{ i } \ L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N),$$

pel Corol·lari 3.4, tenim

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N).$$

Cal veure doncs que l'operador injecció

$$j : W^{m,p}(\Omega) W^{l,q}(\Omega)$$

és continu. Pel Teorema 2.13, cal veure que $G = \{(v, jv);\ v \in W^{m,p}(\Omega)\}$ és un tancat de $W^{m,p}(\Omega) \times W^{l,q}(\Omega)$. Sigui $(v_n, jv_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (v, w)$ en $W^{m,p}(\Omega) \times W^{l,q}(\Omega)$, tenim que $v_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ en $W^{m,p}(\Omega)$, i per tant, $v_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ en $L^p(\Omega)$. Llavors, existeix una subsuccessió $\{v_{n'}\}_{n'}$ tal que $v_{n'} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ g.p.t. en Ω, i per tant, $w = jv$ g.p.t. en Ω. Per tant, G és un tancat de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{l,q}(\mathbb{R}^N)$, i pel Teorema 2.13, j és continu. □

3.3 Espais de Morrey i espais de Campanato

En aquesta secció parlarem d'uns espais construïts també a partir dels espais de Lebesgue L^p, els espais de Morrey i els espais de Campanato. En donarem la definició, unes primeres propietats i el resultat més important d'aquesta secció, la caracterització integral de l'espai $C^{0,\alpha}(\Omega)$ amb $0 < \alpha \leq 1$. Durant tot la secció Ω serà un subconjunt obert i acotat de $\mathbb{R}^N$.
Recordem que l'espai de les funcions Hölder contínues $C^{0,\alpha}(\Omega)$, amb $0 < \alpha \leq 1$, són les funcions que compleixen que la seminorma

$$[u]_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

és finita. Per exemple, la condició (3) del Corol·lari 3.25 ens diu que

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^{k,\theta}(\Omega)$$

amb k, θ, p i m que apareixen en aquell resultat.

Notació. *Donats $x \in \mathbb{R}^N$ i $r > 0$, $B_r(x)$ la bola de centre x i radi r. Notem la intersecció de la bola amb Ω com*

$$\Omega_r(x) := B_r(x) \cap \Omega.$$

Diem que un domini Ω és de tipus (A) si existeix una constant $A > 0$ tal que, per a tot punt $x_0 \in \Omega$ i $0 < r <$ diam (Ω), tenim

$$|\Omega_r(x_0)| \geq A r^N.$$

Notem com $\omega_N = |B(0,1)|$ la mesura de la bola unitat.

Definició 3.27. *Siguin $p \in \mathbb{R}$ amb $1 \leq p < \infty$ i $\lambda \geq 0$. L'espai de Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ es defineix com*

$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists B < \infty : \int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx \leq B^p r^\lambda,\ \forall x_0 \in \Omega,\ r > 0 \right\},$$

amb la norma

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x_0 \in \Omega, 0 < r < diam\ \Omega} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tenim que $L^{p,\lambda}(\Omega)$ és Banach amb aquesta norma per $1 \leq p < \infty$ i $\lambda \geq 0$. Sigui $\{u_n\}_{n \geq 1}$ una successió de Cauchy en $L^{p,\lambda}(\Omega)$. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $m, n \geq n_0$,

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x_0 \in \Omega, 0 < r < \text{diam } \Omega} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u_m - u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Llavors, per a tot $x_0 \in \Omega$ i $0 < r < \text{diam}\ \Omega$,

$$\left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u_m - u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = r^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_m - u_n\|_{L^p(\Omega_r(x_0))} < \varepsilon.$$

Llavors, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ és una successió de Cauchy en $L^p(\Omega_r(x_0)) \Rightarrow$ existeix $u \in L^p(\Omega_r(x_0))$ tal que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^p(\Omega_r(x_0))$. Veiem que $u \in L^{p,\lambda}(\Omega_r(x_0))$. Tenim

$$r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observem que com $\{u_n\}_n \subset L^{p,\lambda}(\Omega)$, i el primer terme de la part dreta de la desigualtat anterior tendeix a 0 quan $n \to \infty$, tenim

$$r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Llavors $u \in L^{p,\lambda}(\Omega_r(x_0))$. Falta veure que $\|u - u_n\|_{L^{p,\lambda}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sigui $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_m|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u_m - u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq r^{-\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_m|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \|u_m - u_n\|_{L^{p,\lambda}}. \end{aligned}$$

Escollim $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $m, n \geq n_0$, $\|u_m - u_n\|_{L^{p,\lambda}} < \varepsilon$. Aleshores passant al límit quan $m \to \infty$, el primer terme de la part dreta de la desigualtat anterior tendeix a 0. Agafant el suprem en $x_0 \in \Omega$ i $0 < r < \text{diam}\ \Omega$ obtenim que

$$\|u - u_n\|_{L^{p,\lambda}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Per tant, $L^{p,\lambda}(\Omega)$ és complet per a tot $1 \leq p < \infty$ i $\lambda \geq 0$.
Passem a veure propietats que involucren a aquests espais, com per exemple, la trivialitat de l'espai si $\lambda > N$, o que si $\lambda = 0$ l'espai de Morrey $L^{p,0}(\Omega)$ coincideix amb l'espai de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Propietats 3.28. Es compleix:

(1) $L^{p,0}(\Omega) \cong L^p(\Omega)$.

(2) $L^{p,N}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$ per a tot $1 \leq p < \infty$.

(3) $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$ si $\lambda > N$ amb $1 \leq p < \infty$.

(4) Si $p \leq q$ i $\frac{N-\lambda}{p} \geq \frac{N-\mu}{q}$, aleshores $L^{q,\mu}(\Omega) \subset L^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demostració: Veiem (1). Clarament tenim que $L^p(\Omega) \subset L^{p,0}(\Omega)$. A més,

$$\|u\|_{L^{p,0}} = \sup_{x_0\in\Omega, 0<r<diam\ \Omega} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_p.$$

Veiem (2). Tenim

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}} \leq \omega_N^{\frac{1}{N}} \|u\|_\infty,$$

i

$$|u(x_0)| \leq \sup_{0<r<diam\ \Omega} \frac{1}{\omega_N r^N} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx \right)^p |\Omega_r(x_0)|^{1-\frac{1}{p}}$$

g.p.t. $x_0 \in \Omega$. Per tant,

$$\|u\|_\infty \leq \omega_N^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^{p,\lambda}}.$$

Veiem (3). Pel Teorema de diferenciació de Lebesgue, ([11] Rudin, W.),

$$|u(x_0)|^p = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^N} \int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx$$

g.p.t. $x_0 \in \Omega$. Però ara, tenim

$$|u(x_0)|^p \leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^N} B^p r^\lambda = B^p \lim_{r\to 0} r^{\lambda - N} = 0$$

g.p.t. $x_0 \in \Omega$. Per veure (4) cal només aplicar la Proposició 3.3. □

Definició 3.29. *Siguin $1 \leq p < \infty$ i $\lambda \geq 0$. L'espai de Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ es defineix com*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega);\ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} < \infty\}$$

on la seminorma de Campanato ve donada per

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0\in\Omega, 0<r<diam\ \Omega} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - \overline{u}_{x_0,r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

on

$$\overline{u}_{x_0,r} = \frac{1}{|\Omega_r(x_0)|} \int_{\Omega_r(x_0)} u dx.$$

Els espais de Campanato són espais de Banach amb la norma

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \|u\|_p + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}},$$

per $1 \leq p < \infty$ i $\lambda \geq 0$. Sigui $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una successió de Cauchy en $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Aleshores $\{u_n\}_{n\geq 1}$ és també una successió de Cauchy en $L^p(\Omega)$ i, per tant, existeix $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^p(\Omega)$. Observem que

$$\left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - \overline{u}_{x_0,r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u_n - \overline{u}_{x_0,r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

on el primer terme de la part dreta de la desigualtat tendeix a 0 quan $n \to \infty$ i el segon terme de la part dreta de la desigualtat és finit ja que $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Llavors, $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Cal veure que $[u_n - u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, però això és immediat usant que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^p(\Omega)$ a

$$r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

per tant, prenent el suprem en $x_0 \in \Omega$ i $0 < r < \operatorname{diam} \Omega$, $[u_n - u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, llavors $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ és complet per a tot $1 \leq p < \infty$ i $\lambda \geq 0$.
Tenim les següents propietats:

Propietats 3.30. Es compleix:

(1) Sigui $0 < \lambda < N$. Si Ω és de tipus (A), aleshores $L^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

(2) Si $p \leq q$ i $\frac{N-\lambda}{p} \geq \frac{N-\mu}{p}$, aleshores $\mathcal{L}^{q,\mu}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

(3) Si $\lambda > N + p$, aleshores $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \{$ funcions constants $\}$ per a tot $1 \leq p < \infty$.

Demostració: Veiem (1). Tenim que

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |u - \overline{u}_{x_0,r}|^p dx \leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx + |\Omega_r(x_0)| |\overline{u}_{x_0,r}|^p \right),$$

i també

$$|\overline{u}_{x_0,r}|^p \leq \frac{1}{|\Omega_r(x_0)|} \int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx$$

per la Proposició 3.3. Llavors, si $0 < \lambda < N$,

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \leq 2\|u\|_{L^{p,\lambda}} \text{ i } L^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega).$$

Tenim

$$r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u|^p dx \leq 2^{p-1} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - \overline{u}_{x_0,r}|^p dx + \omega_n r^{N-\lambda} |\overline{u}_{x_0,r}|^p \right).$$

Si aconseguim acotar uniformement $r^{N-\lambda}|\overline{u}_{x_0,r}|^p$ tindrem el resultat provat. Per $0 < r < R$ tenim

$$|\overline{u}_{x_0,R} - \overline{u}_{x_0,r}|^p \leq 2^{p-1}(|u(x) - \overline{u}_{x_0,R}|^p + |u(x) - \overline{u}_{x_0,r}|^p),$$

i integrant respecte x en $\Omega_r(x_0)$

$$|\overline{u}_{x_0,R} - \overline{u}_{x_0,r}|^p \leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N} \left(\int_{\Omega_r(x_0)} |u(x) - \overline{u}_{x_0,R}|^p dx + \int_{\Omega_r(x_0)} |u(x) - \overline{u}_{x_0,r}|^p dx \right),$$

i d'aquí obtenim

$$|\overline{u}_{x_0,R} - \overline{u}_{x_0,r}| \leq C_1 [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda}{p}} r^{-\frac{N}{p}}. \tag{3.3}$$

Sigui ara $R_i = \frac{R}{2^i}$. Aleshores, de la desigualtat anterior, tenim

$$|\overline{u}_{x_0,R_i} - \overline{u}_{x_0,R_{i+1}}| \le C_1 R^{\frac{\lambda-N}{p}} [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} 2^{i\frac{N-\lambda}{p}+\frac{N}{p}}. \tag{3.4}$$

Agafant la suma de 0 a h, obtenim

$$|\overline{u}_{x_0,R} - \overline{u}_{x_0,R_{h+1}}| \le C_2 [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R_{h+1}^{\frac{\lambda-N}{p}}.$$

Ara, escollim h i R de tal manera que diam $\Omega < R <$ 2diam Ω i $R_{h+1} = r$, llavors

$$\begin{aligned}|\overline{u}_{x_0,r}|^p &\le 2^{p-1}(|\overline{u}_{x_0,R}|^p + |\overline{u}_{x_0,R} - \overline{u}_{x_0,r}|^p)\\ &\le 2^{p-1}(|\overline{u}_{x_0,R}|^p + C_2^p r^{\lambda-N}[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}).\end{aligned}$$

Finalment,

$$r^{-\lambda}\int_{\Omega_r(X_0)} |u|^p dx \le C([u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} + |\overline{u}_{x_0,r}|^p) \le K\|u\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Demostrarem (3) a partir del següent resultat. $\square$

Aquest resultat que estudiarem a continuació és molt important ja que ens dona una caracterització per integrals de l'espai de les funcions Hölder contínues $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Teorema 3.31. *Sigui Ω de tipus (A) i $N < \lambda < N+p$. Aleshores $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\Omega)$ amb $\alpha = \frac{\lambda-N}{p}$.*

Demostració: Sigui $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ i $x \in \Omega_r(x_0)$. Aleshores $|u(x) - \overline{u}_{x_0,r}| \le 2^\alpha r^\alpha [u]_{C^{0,\alpha}}$, per tant, $[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \le C[u]_{C^{0,\alpha}}$. Sigui ara $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ amb $\lambda > n$. Per $R > 0$, definim com abans $R_i = \frac{R}{2^i}$. Per $k < h$, de l'equació (3.4) tenim

$$|\overline{u}_{x_0,R_k} - \overline{u}_{x_0,R_h}| \le C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R_k^{\frac{\lambda-N}{p}}. \tag{3.5}$$

Llavors $\{\overline{u}_{x_0,R_h}\}_h$ és una successió de Cauchy per a tot $x_0 \in \Omega$. Sigui

$$\widetilde{u}(x_0) = \lim_{h\to\infty} \overline{u}_{x_0,R_h}.$$

Veiem que $\widetilde{u}(x_0)$ no depèn de l'el·lecció de R. De fet, per $r < R$, si escollim $j \ge i$ tal que

$$R_{j+1} < r_i \le R_j \qquad r_i = 2^{-i} r$$

combinant les equacions (3.3) i (3.5) tenim

$$\begin{aligned}|\overline{u}_{x_0,R_i} - \overline{u}_{x_0,r_i}| &\le |\overline{u}_{x_0,R_i} - \overline{u}_{x_0,R_j}| + |\overline{u}_{x_0,R_j} - \overline{u}_{x_0,r_i}|\\ &\le C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}(R_i^{\frac{\lambda-N}{p}} + R_j^{\frac{\lambda-N}{p}}) \le K[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R_i^{\frac{\lambda-N}{p}}.\end{aligned}$$

D'altra banda, $\{\overline{u}_{x,r}\}$ convergeix, quan $r \to 0^+$, en $L^1(\Omega)$, a la funció u, llavors tenim $u = \widetilde{u}$ g.p.t., i passant al límit quan $h \to \infty$ a l'equació (3.5), agafant $k = 0$, obtenim

$$|\overline{u}_{x,R} - u(x)| \le C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda-N}{p}} \tag{3.6}$$

és a dir, $\{\overline{u}_{x,R}\}$ convergeix uniformement a $u(x)$ en Ω. Com les funcions $x \mapsto \overline{u}_{x,R}$ són contínues, $u(x)$ és contínua.
Veiem que u és Hölder-contínua. Siguin $x, y \in \Omega$ i $R = |x-y|$. Tenim

$$|u(x) - u(y)| \leq |\overline{u}_{x,2R} - u(x)| + |\overline{u}_{x,2R} - \overline{u}_{y,2R}| + |\overline{u}_{y,2R} - u(x)|.$$

El primer i l'últim terme de la dreta de la desigualtat estan acotats per l'equació (3.6). Pel segon terme, tenim

$$|\overline{u}_{x,2R} - \overline{u}_{y,2R}| \leq |\overline{u}_{x,2R} - u(z)| + |u(z) - \overline{u}_{y,2R}|$$

i integrant respecte z en $\Omega_{2R}(x) \cap \Omega_{2R}(y)$ obtenim

$$|\overline{u}_{x,2R} - \overline{u}_{y,2R}| \leq \frac{1}{|\Omega_{2R}(x) \cap \Omega_{2R}(y)|}\left(\int_{\Omega_{2R}(x)} |u(z) - \overline{u}_{x,2R}| dx + \int_{\Omega_{2R}(y)} |u(z) - \overline{u}_{y,2R}| dy\right).$$

Fent servir la Proposició 3.3,

$$|\overline{u}_{x,2R} - \overline{u}_{y,2R}| \leq C \frac{1}{|\Omega_{2R}(x) \cap \Omega_{2R}(y)|} [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} |x-y|^{\frac{\lambda - N}{p} + N}.$$

Però $\Omega_R(x) \subset \Omega_{2R}(x) \cap \Omega_{2R}(y)$, per tant, $|\Omega_{2R}(x) \cap \Omega_{2R}(y)| \geq AR^N$.
Finalment

$$|u(x) - u(y)| \leq C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda-N}{p}} = C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} |x-y|^{\frac{\lambda-N}{p}}.$$

Per acabar la demostració, veiem que $\sup u$ està acotat. Sigui y tal que $u(y) = u_{|\Omega}$.
Tenim

$$|u(x)| \leq |u_{|\Omega}| + C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} (\text{diam } \Omega)^\alpha \leq K \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

□

3.4 Regularitat del problema de Dirichlet

En aquesta secció parlarem de la regularitat de les solucions dèbils del problema de Dirichlet següent: volem trobar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

on

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

és el Laplacià de u i f és una funció donada en Ω. La condició de frontera $u = 0$ en Γ s'anomena condició de Dirichlet.
Hi ha dos tipus de solucions a aquests problema:

Definició 3.32. *Una solució clàssica del problema de Dirichlet* (3.7) *és una funció* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *que satisfà* (3.7). *Una solució dèbil del problema de Dirichlet* (3.7) *és una funció* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que satisfà*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$

on $\nabla u \cdot \nabla \varphi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Teorema 3.33. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 amb $\Gamma = \partial\Omega$ acotada (o bé $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Sigui $f \in L^2(\Omega)$ i $u \in H^1_0(\Omega)$ una solució dèbil de (3.7). Aleshores, $u \in H^2(\Omega)$ i $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, on C és una constant que només depèn de Ω. És més, si Ω és de classe C^{m+2} i $f \in H^m(\Omega)$ amb $m \geq 1$, aleshores*

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad i \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

L'estratègia a seguir per demostrar aquest resultat és començar demostrant els casos $\Omega = \mathbb{R}^N$ i $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Un cop provats aquests dos casos, passarem al cas general distingint la regularitat a l'interior de Ω (serà semblant al cas $\Omega = \mathbb{R}^N$) i la regularitat a prop de la frontera de Ω (serà semblant al cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$).
Primer però, establim notació que ens serà d'utilitat a la demostració.

Notació. *Donat $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, sigui*

$$D_h u = \frac{1}{|h|}(\tau_h u - u), \quad \text{és a dir,} \quad D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

Demostració: (Cas $\Omega = \mathbb{R}^N$). Com les funcions $C^1_c(\mathbb{R}^N)$ són denses a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tenim que $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, i per tant, $H^1_0(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. Aleshores, considerem $\varphi = D_{-h}(D_h u)$. Tenim que $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ja que $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$. Llavors, aplicant φ a l'equació (3.8), afirmem

$$\int |\nabla D_h u|^2 + \int |D_h u|^2 = \int f D_{-h}(D_h u),$$

ja que

$$\begin{aligned}
D_{-h}(D_h u)(x) &= \frac{2u(x) - u(x-h) - u(x+h)}{|h|^2}, \\
\nabla u \cdot \nabla \varphi &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left[\frac{2}{|h|^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{1}{|h|^2}\frac{\partial u(x-h)}{\partial x_i}(x) - \frac{1}{|h|^2}\frac{\partial u(x+h)}{\partial x_i}(x)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{2}{|h|^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{1}{|h|^2}\frac{\partial u(x-h)}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{1}{|h|^2}\frac{\partial u(x+h)}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right), \\
|\nabla(D_h u)|^2 &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{|h|}\left(\frac{\partial u(x+h)}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|h|^2}\left(\frac{\partial u(x+h)}{\partial x_i}(x)\right)^2 + \frac{1}{|h|^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)^2 - \frac{2}{|h|^2}\frac{\partial u(x+h)}{\partial x_i}(x), \\
u(x)\varphi(x) &= \frac{2u(x)^2 - u(x)u(x-h) - u(x)u(x+h)}{|h|^2}, \\
|D_h u|^2 &= \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\right)^2 = \frac{u(x+h)^2 + u(x)^2 - 2u(x+h)u(x)}{|h|^2},
\end{aligned}$$

i fent canvis de variable bàsics a les integrals obtenim l'afirmació. De l'afirmació, aplicant la Proposició 3.3 i la definició de la norma de H^1, obtenim

$$\|D_h u\|^2_{H^1} = \|\nabla(D_h u)\|^2_2 + \|D_h u\|^2_2 = \int f D_{-h}(D_h u) \leq \|f\|_2 \|D_{-h}(D_h u)\|_2. \quad (3.9)$$

Aplicant ara la Proposició (3.15) amb $v = D_h u$, tenim

$$\|D_{-h}v\|_2 = \|\tau_{-h}u - u\|_2 \frac{1}{|h|} \leq \|\nabla v\|_2 \quad \forall v \in H^1,$$

i llavors

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_2 \|\nabla(D_h u)\|_2.$$

D'aquí concluïm que

$$0 \leq \|D_h u\|_2^2 \leq (\|f\|_2 - \|\nabla(D_h u)\|_2)\|\nabla(D_h u)\|_2,$$

i, per tant,

$$\|f\|_2 \geq \|\nabla(D_h u)\|_2 \Rightarrow \|D_h u\|_{H^1} \leq \|f\|_2.$$

En particular,

$$\left\| D_h \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Aplicant altre cop la Proposició (3.15), obtenim que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1$, per a tot $i = 1, \ldots, N$, i per tant, $u \in H^2$.
Per acabar, veiem que $f \in H^1 \Rightarrow u \in H^3$. Denotem per Du a qualsevol de les derivades $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$. Sabem ja que $Du \in H^1$ pel que hem vist abans. Cal veure doncs que $Du \in H^2$. Per veure-ho, és suficient veure que

$$\int \nabla(Du) \cdot \nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int f\varphi \quad \forall \varphi \in H^1. \tag{3.10}$$

i després aplicar el mateix argument que hem fet amb u per obtenir que $Du \in H^2$.
Sigui $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Canviem a l'equació (3.8) φ per $D\varphi$; llavors

$$\int \nabla u \cdot \nabla(D\varphi) + \int u D\varphi = \int f D\varphi,$$

i en conseqüència,

$$\int \nabla(Du) \cdot \nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int f\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Usant la Proposició 3.8 i argumentant per densitat, tenim (3.10). Llavors, seguint el mateix raonament anterior tenim que $Du \in H^2$ i per tant, $u \in H^3$. Per veure que $f \in H^m \Rightarrow u \in H^{m+2}$, argumentem per inducció en m i apliquem (3.10). □

A continuació demostrarem el cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Establim primer una notació prèvia i dos lemes que usarem en la demostració.

Notació. *Sigui $h \in \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$. Direm que h és paral·lel a la frontera i ho denotarem per $h \parallel \Gamma$.*

Cal observar que

$$u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \tau_h u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{si } h \parallel \Gamma,$$

és a dir, $H_0^1(\Omega)$ és invariant sota translacions tangencials. Per veure-ho cal només utilitzar que $x + h \in \Omega$ si $h \parallel \Gamma$.

Lema 3.34. *Tenim*

$$\|D_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall h \parallel \Gamma.$$

La demostració d'aquest lema no la donarem ja que és pacticament idèntica a la demostració de la Proposició 3.15 apartat $(i) \Rightarrow (iii)$. La idea és començar veient-ho per funcions $C_c^1(\Omega)$ utilitzant que $\Omega = \Omega + th$ per a tot t i per a tot $h \parallel \Gamma$. Llavors, argumentant per densitat, ho tenim per $H^1(\Omega)$.

Lema 3.35. *Sigui $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que satisfà* (3.8)*. Aleshores*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H_0^1(\Omega) \quad \forall 1 \leq j \leq N-1,$$

i, a més,

$$\int \nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \cdot \nabla\varphi + \int \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi \quad \forall 1 \leq j \leq N-1, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

A la demostració d'aquest lema hi apareix la noció de convergència dèbil, que va relacionada amb la noció de topologia dèbil, la qual no hem estudiat ja que s'escapa de l'objectiu del treball. La podem trobar a [1] Brezis, H. (pàgines 302-303.).

Demostració: (Cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N$). Escollim $h \parallel \Gamma$ i sigui $\varphi = D_{-h}(D_h u)$. Per l'observació que acabem de fer, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Aleshores, substituïm φ a (3.8), i obtenim com abans

$$\int |\nabla D_h u|^2 + \int |D_h u|^2 = \int f D_{-h}(D_h u),$$

és a dir,

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_2 \|D_{-h}(D_h u)\|_2.$$

Aplicant ara el Lema 3.34, obtenim,

$$\|D_h u\|_{H^1} \leq \|f\|_2 \quad \forall h \parallel \Gamma.$$

Siguin $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq N-1$, $h = |h|e_k$ i $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Aleshores

$$\begin{aligned}\int D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\varphi &= \int \frac{1}{|h|}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+h) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)\varphi(x)dx \\ &= -\int \frac{1}{|h|}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x-h) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\right)u(x)dx = -\int uD_{-h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

i aplicant la desigualtat provada anteriorment

$$\left|\int uD_{-h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right| \leq \int \left|D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\varphi\right| \leq \|\varphi\|_2 \left\|D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right\|_2 \leq \|\varphi\|_2\|f\|_2.$$

Quan passem al límit $h \to 0$, obtenim doncs

$$\left|\int u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq \|f\|_2\|\varphi\|_2 \quad \forall 1 \leq j \leq N, \quad \forall 1 \leq k \leq N-1.$$

Finalment, cal veure que

$$\left| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2} \right| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Per veure-ho, tornem a (3.8) i utilitzem que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega (f-u)\varphi.$$

i que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

per obtenir

$$\left| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2} \right| \leq \sum_{i=1}^{N-1} \left| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right| + \left| \int (f-u)\varphi \right| \leq (N-1)\|f\|_2 \|\varphi\|_2 + \|u\|_2 \|\varphi\|_2 \leq C \|f\|_2 \|\varphi\|_2,$$

usant que $\|u\|_2 \leq \|f\|_2$, que s'obté de (3.8). Aleshores, tenim que

$$\left| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq C \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall 1 \leq j,k \leq N,$$

i usant la Proposició 3.15, tenim que $u \in H^2(\Omega)$.
Veiem ara que $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$. Anomenem, com abans, Du a qualsevol de les derivades $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq N-1$. Suposem cert per m i sigui $f \in H^{m+1}$. Ja sabem que $u \in H^{m+2}$, que totes les Du són de H_0^1 i que compleixen la igualtat d'integrals del Lema 3.35. Aplicant la hipòtesi d'inducció a Du i Df, obtenim que $Du \in H^{m+2}$. Aleshores, només cal comprovar, per exemple, que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \in H^{m+1}$, però això s'obté de (3.8) si escrivim $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u - f \in H^{m+1}$. □

Passem ara a demostrar el cas general. Demostrarem que $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$, ja que la implicació $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$ es demostra per inducció igual que els dos casos anteriors. Suposarem que Ω és acotat i ho demostrarem per aquest cas. Utilitzarem una partició de la unitat $u = \sum_{i=0}^k \theta_i u$ com la del Teorema 3.17. La idea és veure que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ per a $0 \leq i \leq N$, per tenir, mitjantçant aquesta igualtat, que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Demostració: (Cas general, a l'interior). Volem veure que $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$. Com $\theta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$, extenen la funció a tot $\mathbb{R}^N$ valent 0 a $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ i tenim que $\theta_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Afirmem que $\theta_0 u$ és una solució dèbil de l'equació

$$-\Delta(\theta_0 u) + \theta_0 u = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \cdot \nabla u - (\Delta\theta_0)u := g \quad \text{amb } g \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Cal veure doncs,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\theta_0 u) \cdot \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} \theta_0 u \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Per veure-ho, utilitzem

$$\nabla(\theta_0 u)\cdot\nabla\varphi = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}u + \theta_0\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = (\nabla\theta_0\cdot\nabla\varphi)u + (\nabla u\cdot\nabla\varphi)\theta_0.$$

Aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla\theta_0\cdot\nabla\varphi)u + (\nabla u\cdot\nabla\varphi)\theta_0 + \theta_0 u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}(\theta_0 f - 2\nabla\theta_0\cdot\nabla u - (\Delta\theta_0)u)\varphi$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_0 + \theta_0 u\varphi\right] = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\theta_0 f\varphi - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N}\theta_0 u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\theta_0 f\varphi - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\theta_0 + \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\varphi\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\theta_0 u\varphi - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(\varphi\theta_0)}{\partial x_i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla(\varphi\theta_0) + \int_{\mathbb{R}^N}u(\varphi\theta_0) = \int_{\mathbb{R}^N}f(\varphi\theta_0)$$

I aquesta última igualtat d'integrals és certa ja que u compleix (3.8). Aleshores, del cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ anteriorment provat, obtenim

$$\theta_0 u \in H^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{i} \quad \|\theta_0 u\|_{H^2} \leq K\|g\|_2.$$

Escrivint g i utilitzant la regularitat de la funció θ_0 i les seves derivades concluïm,

$$\|\theta_0 u\|_{H^2} \leq K(\|f\|_2 + \|u\|_{H^1}) \leq C\|f\|_2.$$

□

Abans de donar la demostració del cas general prop de la frontera, donarem un resultat que ens serà útil a la demostració. Aquest resultat ens permetrà veure que tenim una equació el·líptica de segon ordre.

Notació. *Notem com JacH a la matriu Jacobiana de H,* $\left(\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}\right)$.

Lema 3.36. *Usant la notació que s'estableix a la demostració del cas general prop de la frontera que veurem a continuació, tenim que* $w \in H_0^1(Q_+)$ *i satisfà*

$$\sum_{k,l=1}^{N}\int_{Q_+} a_{kl}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial\psi}{\partial y_l}\,dy = \int_{Q_+}\widetilde{g}\psi\,dy \quad \forall\psi \in H_0^1(Q_+) \tag{3.11}$$

on $\widetilde{g} = (g\circ H)|\det JacH| \in L^2(Q_+)$ *i les funcions* $a_{kl} \in C^1(Q_+)$ *satisfan*

$$\sum_{k,l=1}^{N} a_{kl}(x)\xi_k\xi_l \geq \alpha|\xi|^2$$

per a tot $x \in Q_+$ *i per a tot* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *amb* $\alpha > 0$.

Demostració: Sigui $\psi \in H_0^1(Q_+)$ i definim $\varphi(x) = \psi(J(x))$ per $x \in \Omega \cap U_i$. Aleshores $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$ i

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial J_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial y_l}\frac{\partial J_l}{\partial x_j}.$$

Per tant,

$$\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega\cap U_i} \sum_{j,k,l=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial y_l}\frac{\partial J_l}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial J_k}{\partial x_j} dx = \int_{Q_+} \sum_{j,k,l=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial y_l}\frac{\partial J_l}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial J_k}{\partial x_j} |\det \mathrm{Jac} H| dy.$$

Llavors,

$$\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = \int_{Q_+} a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial w}{\partial y_l} dy \tag{3.12}$$

on $a_{kl} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_l}{\partial x_j} |\det \mathrm{Jac} H|$.
Observem que $a_{kl} \in C^1(Q_+)$ i que per a tot $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{k,l=1}^{N} a_{kl}\xi_k\xi_l = |\det mbox JacH| \sum_{j=1}^{N} \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial J_k}{\partial x_j}\xi_k \right|^2 \geq \alpha |\xi|^2,$$

ja que les dues matrius Jac$H$ i Jac$J$ són no-singulars.
Canviant de variable tenim

$$\int_{\Omega\cap U_i} g\varphi dx = \int_{Q_+} (g \circ H)\psi |\det \mathrm{Jac} H| dy.$$

Combinant l'equació (3.13), que apareix al principi de la següent demostració, amb la igualtat anterior obtenim l'equació (3.11) que volíem provar. □

Demostració: (Cas general, prop de la frontera). Volem veure que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ per $1 \leq i \leq N$. Tenim una aplicació bijectiva $H : Q \to U_i$ tal que

$$H \in C^2(Q), \quad J = H^{-1} \in C^2(U_i), \quad H(Q_+) = U_i \cap Q, \quad \text{i} \quad H(Q_0) = U_i \cap \Gamma.$$

Escrivim $x = H(y)$ i $y = J(x) = H^{-1}(x)$. Observem que $v = \theta_i u \in H_0^1(U_i \cap \Omega)$ i que és solució dèbil a $\Omega \cap U_i$ de l'equació

$$-\Delta v = \theta_i f - \theta_i u - 2\nabla\theta_i \cdot \nabla u - (\Delta\theta_i)u := g \quad \text{amb } g \in L^2(\Omega \cap U_i).$$

La comprovació de que és solució dèbil no la farem ja que és pràcticament igual a la comprovació que hem fet al cas anterior. Tenim doncs

$$\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega\cap U_i} g\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i). \tag{3.13}$$

Sigui $w(y) = v(H(y))$ per a $y \in Q_+$, o d'una altra manera, $w(J(x)) = v(x)$ per a $x \in \Omega \cap U_i$. Veurem que $w \in H^2(Q_+)$ i $\|w\|_{H^2} \leq K\|\widetilde{g}\|_2$. Llavors, tornant a $\Omega \cap U_i$ tindrem que $\theta_i u \in H^2(\Omega \cap U_i) \subset H^2(\Omega)$ i $\|\theta_i u\|_{H^2} \leq C\|f\|_2$.

A continuació usarem translacions tangencials com al cas en que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Sigui $\psi = D_{-h}(D_h w)$ amb $h \parallel Q_0$ i $|h|$ prou petit per tal que $\psi \in H^1_0(Q_+)$. Substituïm aquesta ψ concreta a l'equació (3.11),

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_+} \widetilde{g} D_{-h}(D_h w) = \sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l}(D_{-h}(D_k w)) \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl}(y) \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) \left[\frac{1}{|h|^2} \left(\frac{\partial w}{2\partial y_l}(y) - \frac{\partial w(y+h)}{\partial y_l}(y) - \frac{\partial w(y-h)}{\partial y_l}(y) \right) \right] \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} \left(\frac{a_{kl}(y+h) \frac{\partial w}{\partial y_k}(y+h) - a_{kl}(y) \frac{\partial w}{\partial y_k}}{|h|} \right) \left(\frac{\frac{\partial w(y+h)}{\partial y_l}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_l}(y)}{|h|} \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} D_h \left(a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_l}(D_h w)
\end{aligned}$$

Però, pel Lema 3.34, tenim

$$\int_{Q_+} \widetilde{g} D_{-h}(D_h w) \leq \|\widetilde{g}\|_2 \|D_{-h}(D_h w)\|_2 \leq \|\widetilde{g}\|_2 \|\nabla(D_h w)\|_2.$$

Ara bé, podem escriure

$$\begin{aligned}
D_h \left(a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k} \right)(y) &= \frac{1}{|h|} \left(a_{kl}(y+h) \frac{\partial w}{\partial y_k}(y+h) - a_{kl}(y) \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) \right) \\
&= \frac{1}{|h|} \left(a_{kl}(y+h) \left(\frac{\partial w}{\partial y_k}(y+h) - \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) \right) + \frac{\partial w}{\partial y_k}(y)(a_{kl}(y+h) - a_{kl}(y)) \right) \\
&= a_{kl}(y+h) \frac{\partial}{\partial y_k}(D_h w)(y) + (D_h a_{kl})(y) \frac{\partial w}{\partial y_k}(y)
\end{aligned}$$

Aleshores, obtenim

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} D_h \left(a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_l}(D_h w) \geq \int_{Q_+} \alpha |\nabla(D_h w)|^2 \geq \alpha \|\nabla(D_h w)\|_2^2 - C \|w\|_{H^1} \|\nabla(D_h w)\|_2$$

Combinant les dues últimes desigualtats que hem trobat, aconseguim

$$\|\nabla(D_h w)\|_2 \leq C \|\widetilde{g}\|_2,$$

utilitzant que $\|w\|_{H^1} \leq \|\widetilde{g}\|_2$ i la desigualtat de Poincaré,([7] Evans, L. C.).
A partir d'aquí, seguint el mateix argument que al cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, obtenim

$$\left| \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \right| \leq C \|\widetilde{g}\|_2 \|\psi\|_2 \quad \forall \psi \in C^1_c(Q_+), \quad \forall (k,l) \neq (N,N). \tag{3.14}$$

Falta veure que

$$\left| \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} \right| \leq C \|\widetilde{g}\|_2 \|\psi\|_2 \quad \forall \psi \in C^1_c(Q_+),$$

per tenir que $w \in H^2(Q_+)$ i $\|w\|_{H^2} \leq C\|\widetilde{g}\|_2$. Per veure-ho, substituïm a l'equació (3.11) ψ per $\frac{\psi}{a_{NN}}$, que ho podem fer al tenir que $a_{NN} \in C_c^1(Q_+)$ i $a_{NN} \geq \alpha > 0$. Obtenim

$$\int_{Q_+} a_{NN} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial y_N}\left(\frac{\psi}{a_{NN}}\right) = \int_{Q_+} \frac{\widetilde{g}}{a_{NN}}\psi - \sum_{(k,l)\neq(N,N)} \int_{Q_+} a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{\psi}{a_{NN}}\right),$$

i desenvolupant,

$$\begin{aligned}\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} &= \int_{Q_+} \frac{1}{a_{NN}}\left(\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\right)\frac{\partial w}{\partial y_N}\psi + \int_{Q_+} \frac{\widetilde{g}}{a_{NN}}\psi \\ &\quad + \sum_{(k,l)\neq(N,N)} \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial y_l}\right)\frac{\psi}{a_{NN}} - \sum_{(k,l)\neq(N,N)} \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{a_{kl}\psi}{a_{NN}}\right).\end{aligned}$$

Prenent valors absoluts, i substituint ψ per $\left(\frac{a_{kl}}{a_{NN}}\right)\psi$ a l'equació (3.14) obtenim

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N}\right| \leq C(\|w\|_{H^1} + \|\widetilde{g}\|_2)\|\psi\|_2 \quad \forall \psi \in C_c^1(Q_+),$$

que finalitza la prova. $\square$

4 Conclusions

L'anàlisi funcional ha jugat un paper imprescindible en tots els resultats de la segona part del treball, des de les definicions dels espais de Sobolev, dels espais de Morrey i dels espais de Campanato, fins als resultats més importants d'aquest treball com els embedding theorems o la caracterització de les funcions Hölder-contínues, veient així la forta relació que hi ha entre aquesta àrea i la teoria d'equacions en derivades parcials.
La cerca d'informació ha estat vital, consultant articles, xats, blogs i llibres de molts autors diferents, per veure diferents punts de vista d'aquests resultats. Un dels principals problemes amb què m'he trobat ha estat, a l'hora de consultar les referències, tenir els coneixements necessaris per entendre els conceptes i les demostracions estudiades en aquestes, ja que, en la majoria d'elles, els coneixements que necessitava consultar eren en capítols avançats i requerien de molts resultats previs. Tot i això, seguint els consells de la meva tutora, he anat estudiant cada resultat previ que necessitava per estudiar els resultats d'aquest treball, sempre i quan quedessin dins el context del treball.
Un cop finalitzat aquest treball, m'agradaria continuar estudiant, en els pròxims anys, sobre la relació entre l'anàlisi funcional i la teoria d'equacions en derivades parcials, buscant més aplicacions dels espais de Sobolev en altres contextos.

Referències

[1] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[2] Rudin, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[3] Tao, T.: *What's New: 245B, Notes 6: Duality and the Hahn-Banach Theorem*, 2009.
https://terrytao.wordpress.com/2009/01/26/245b-notes-6-duality-and-the-hahn-banach-theorem/

[4] Tao, T.: *What's New: 245B, Notes 9: The Baire category theorem and its Banach space consequences*, 2009.
https://terrytao.wordpress.com/2009/02/01/245b-notes-9-the-baire-category-theorem-and-its-banach-space-consequences/

[5] Köthe, G.: *Topological Vector Spaces*, Springer, 1969.

[6] Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[7] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, 2a edició, American Mathematical Society, 2010.

[8] Rupflin, M.: *What is a .... Morrey Space? What is a .... Campanato Space?*, 2008.
https://www.math.uzh.ch/typo3conf/ext/qfq/qfq/api/download.php?L=1&s=5b30cc4802cee

[9] Visintin, A.: *Notes on Sobolev Spaces*, 2011.
https://www.science.unitn.it/∼visintin/Sobolev2011.pdf

[10] Giaquinta, M.: *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic sistems*, Annals of Mathematics Studies, 105, Princeton University Press, 1983.

[11] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.