



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Captura d'asteroides usant
varietats invariants d'òrbites
periòdiques de punts de libració

Autor: Roger Valdés i Martín

Director: Dr. Gerard Gómez i Muntané
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

Asteroids are of strategic importance for science in an effort to uncover the formation, evolution and composition of the Solar System. Near-Earth objects (NEOs) are of particular interest because of their accessibility from Earth.

In this work, we will study the mathematical models, methods and techniques needed to design an asteroid retrieval. This line of research has multiple applications, such as mitigating the hazard posed by an asteroid impact; or the obtention of resources via asteroid mining.

We will analyse some dynamical models used to envisage an asteroid orbit. We will take profit of the dynamics of these models to minimize the required energy to perform an asteroid capture. Different transfer techniques in each of these models will be shown. At last, we will explain the whole process behind an asteroid retrieval: from the asteroids database selection, to the construction and posterior refinement of the transfer trajectory.

Resum

Els asteroides tenen una gran importància per a la ciència, en l'intent de descobrir la formació, l'evolució i la composició del Sistema Solar. En particular, tenen gran interès els coneguts com NEA (Near Earth Asteroids), asteroides amb òrbites properes a la Terra.

En aquest treball, ens centrarem en estudiar els models, mètodes i tècniques matemàtiques necessàries per a realitzar la captura d'un asteroide. Aquesta línia d'investigació té diferents aplicacions, com ara mitigar el gran perill que podria provocar un impacte d'un asteroide de gran mida; o la mineria i obtenció de recursos materials.

Estudiarem dos models dinàmics que s'usen per a preveure l'òrbita d'un asteroide. Volem aprofitar la dinàmica d'aquests models per minimitzar la quantitat d'energia requerida per a capturar un asteroide. També s'investigaran diverses tècniques de transferència en cadascun d'aquests models. Finalment, veurem com es duu a terme el procés de captura de l'asteroide: des del procés de selecció dels asteroides, fins la construcció i el refinament de l'òrbita de transferència.

Agraïments

Vull agrair a Gerard Gómez i Muntané, tutor d'aquest treball i que m'ha guiat amb paciència i interès des de la primera consulta que li vaig fer el 9 de Setembre de 2017. També vull agrair a Arturo Vieiro i a Alex Haro, professors de l'assignatura de Sistemes Dinàmics que vaig cursar a la primavera del 2017, i que em van motivar a fer el treball sobre aquest àmbit de les Matemàtiques. Al Gerard, Jose, Núria, Pablo, Cèlia, Aïda, Eloi, Ivan, Sergi, Adriana, Raquel; companys de carrera i bons amics que m'han acompanyat durant tot aquest procés. Finalment, agrair a la meva mare, al meu pare, i als meus germans, per estar recolzar-me durant tots aquests anys. Amb aquest treball culmina una època de molta feina i dedicació. Gràcies a tots.

Índex

1	Introducció	1
2	Models dinàmics	3
2.1	El problema de Kepler	3
2.1.1	Introducció al problema de Kepler	3
2.1.2	Propietats generals del problema de Kepler	4
2.1.3	Predicció de l'òrbita de l'asteroide	8
2.1.4	Resolució de l'equació de Kepler	9
2.1.5	L'òrbita a l'espai	10
2.1.6	Càlcul dels elements orbitals a partir de la posició i la velocitat	13
2.2	El model restringit circular de tres cossos	14
2.2.1	Equacions del moviment	14
2.2.2	Els punts de libració	17
2.2.3	Estabilitat al voltant de punts d'equilibri	19
2.2.4	Formulació Hamiltoniana	24
3	Transferències	26
3.1	Transferències en model de Kepler	26
3.1.1	Transferències de Lambert	26
3.1.2	Transferències de Hohmann	29
3.2	Transferències en model restringit de tres cossos	32
3.2.1	Inserció en varietats invariants estables de punts de libració	32
4	Optimització	34
4.1	Algoritme genètic	34
5	Captura d'asteroides	37
5.1	Selecció d'asteroides en la base de dades	37
5.2	Construcció de l'òrbita de transferència	37
5.2.1	Construcció de Sims i Flanagan	37
5.2.2	Construcció d'un arc de Lambert a una varietat estable	42
5.3	Refinament de l'òrbita	43
6	Conclusions	47

1 Introducció

El desenvolupament de l'estudi de l'Univers ha sigut una constant en la nostra evolució històrica. Homes i dones han entregat el seu treball, el seu temps i fins i tot la seva vida, a l'estudi dels misteris de l'Univers.

Recentment, l'interès de la comunitat científica en l'exploració del Sistema Solar ha empès a considerar una nova línia d'investigació centrada en missions de captura d'asteroides. Aquestes missions consisteixen a transportar un asteroide a una regió propera a la Terra on es mantingui controlat. Per a alterar la trajectòria d'un asteroide cal dissenyar maniobres que modifiquin la seva velocitat. Tot i que la relació del cas amb l'estudi purament científic és clara, la importància d'aquest camp de recerca es concentra principalment en dues aplicacions: mineria de materials i seguretat del planeta. Considerant la disminució dels recursos a la Terra, un pas natural és buscar-ne més al Sistema Solar. Pel que fa a la seguretat, que sigui factible evitar el possible impacte d'un asteroide contra la Terra, amb els danys catastròfics que podria causar, és un avenç molt important per a la defensa del planeta.

Així doncs, l'objectiu d'aquest treball és estudiar i entendre les principals tècniques i conceptes matemàtics darrere el procés de desviació i captura d'un asteroide.

Estructura del treball

En primer lloc, a la secció 2 “Models Dinàmics”, presentem dos models simplificats del Sistema Solar: el model de dos cossos, o model de Kepler, i el model de tres cossos restringit. Aquests models ens donen bones aproximacions del moviment que segueix un asteroide al Sistema Solar. Realitzem un estudi de la dinàmica en aquests models. Primerament, investiguem el model de dos cossos, el més simplificat. El problema recau en determinar la trajectòria que segueixen dos cossos que es mouen degut a la interacció gravitatòria mútua. Assumint certes hipòtesis, com ara que la massa de l'asteroide negligible respecte la massa de la Terra, i aplicant certes reduccions, veiem que el problema és equivalent a determinar el moviment que duu a terme el cos de massa negligible al voltant de la massa primària. Analitzem les propietats de l'òrbita més importants, com ara que tota òrbita està confinada en un pla, que totes les òrbites són el·lipses, paràboles, o hipèrboles; els punts on s'assoleix la velocitat màxima i mínima; i més. També definim els sis elements orbitals, sis integrals primeres que es poden determinar empíricament i que ens permeten aproximar la posició i la velocitat reals de l'asteroide. A continuació, estudiem el model de tres cossos restringit. El plantejament del problema torna a ser determinar el moviment de tres cossos regits pel camp gravitacional que formen. Quan s'estudia el model de 3 cossos *restringit circular*, es considera que les dues masses principals giren en òrbita circular i que la massa del tercer cos és negligible respecte les dues primeres. Així, l'esforç recau en determinar el moviment del tercer cos. La complexitat de la dinàmica d'aquesta model augmenta de manera considerable. Enlloc de calcular la trajectòria donades unes posicions i velocitats, fem un estudi qualitatiu del retrat de fase. En particular,

investiguem la dinàmica al voltant dels punts fixos L_1 i L_2 , que són de gran interès degut a la proximitat que tenen a la Terra en el sistema Sol-Terra-asteroide. Finalitzem aquesta secció estudiant la dinàmica lineal al voltant d'aquests punts fixos per a demostrar l'existència d'òrbites periòdiques al seu voltant.

A la secció 3 “Transferències”, estudiem algunes de les possibles transferències que es poden dur a terme en els dos models anteriors. Ens interessa també el cost, en forma de variació de velocitat, que comporta cada una d'aquestes transferències. En el model de dos cossos, presentem les transferències de Lambert i de Hohmann. Construir una trajectòria mitjançant una transferència de Lambert consisteix en determinar l'arc que connecta dos punts de l'espai, donat un temps de vol fixat. Pel que fa a les transferències de Hohmann, en aquest treball mostrem només la transferència de Hohmann més senzilla, que planteja transferir un cos que manté una òrbita circular a una segona òrbita circular de diferent radi que conviu al mateix pla. Per altra banda, en el model de 3 cossos plantejarem un model de transferència en el qual amb un sol impuls, podem transferir el nostre asteroide a una òrbita periòdica o a un punt fix. L'eina clau en aquest mètode són les varietats invariants estables de les òrbites periòdiques: un cop en aquesta varietat, l'asteroide tendirà asimptòticament a l'òrbita periòdica en qüestió.

A la següent secció “Optimització” presentem un tipus d'algoritmes anomenats algoritmes genètics. Aquests algoritmes serveixen per a trobar solucions en problemes d'optimització multiparamètrics, i tenen gran aplicació a la següent secció, en la qual hem de determinar òrbites de transferència que minimitzin certes funcions objectiu. Parlem, per exemple, de minimitzar l'increment de velocitat total usat en el procés de transferir l'asteroide d'una òrbita a un altra.

Finalment, a l'última secció “Captura d'asteroides”, mostrem el procés sencer de captura d'un asteroide, usant els conceptes explicats a les seccions prèvies. Primer parlem breument del procés de selecció d'asteroides. Seguidament exposem el procés real de construcció d'una òrbita de transferència: des de la primera òrbita *referència*, per acabar amb una òrbita de transferència optimitzada en un model realista. En aquest procés, combinem propietats dels dos models dinàmics estudiats: volem capturar l'asteroide en un punt fix o una òrbita periòdica del problema de 3 cossos, però les òrbites de transferència inicials les construïm considerant model de dos cossos. La primera construcció que presentem és la de Sims i Flangan [7], i consisteix a construir una òrbita de transferència mitjançant un cert nombre d'impulsos entre el punt inicial i final. La segona construcció utilitza el mètode de la varietat invariant presentat a la secció “Transferències”, amb la diferència que aquest cop construïm un arc de Lambert entre l'òrbita de l'asteroide i el punt de la varietat invariant estable on el volem inserir. Finalment, explicarem com podem refinar aquesta òrbita, usant-la com a guia per a construir una òrbita més realista adaptada a un model dinàmic que approximi millor el moviment dels cossos al Sistema Solar, com pot ser el model del Sistema Solar de n cossos.

2 Models dinàmics

2.1 El problema de Kepler

2.1.1 Introducció al problema de Kepler

Fins dia d'avui, s'han desenvolupat models molt elaborats per a determinar el moviment d'asteroides i satèl·lits artificials. Tot i això, les característiques bàsiques del moviment d'un asteroide es poden aproximar de manera raonablement simple. Això és degut a que, si l'asteroide està situat a una distància relativament propera al Sol o a un planeta, les forces provocades per aquest cos dominen totes les altres forces que actuen sobre l'asteroide. Ens referirem al problema de dos cossos, o equivalentment, al problema de Kepler, com l'estudi del moviment de dues masses que es mouen seguint només la interacció gravitatòria mútua. Seguidament veurem que aquest problema es pot reduir a l'estudi del moviment d'una de les masses en un camp de forces generat per una massa central.

Comencem amb dues masses puntuals m_1 i m_2 , en un sistema de referència inercial. Un sistema de referència inercial és un sistema en el que es satisfan les tres lleis de Newton:

1. *Principi d'inèrcia*: Tot cos lliure, sobre el qual no actua cap força, manté el seu estat de moviment, ja sigui en repòs, o ja sigui en moviment rectilini uniforme.
2. *Llei fonamental de la dinàmica*: Tot cos sobre el qual actua una força es mou de tal manera que la variació de la seva quantitat de moviment respecte al temps és igual a la força que produeix el moviment.
3. *Llei d'acció i reacció*: Sempre que un cos exerceix una força sobre un altre, aquest segon cos exerceix una força igual i de sentit contrari sobre el primer.

A més, donat un sistema de referència inercial, qualsevol sistema de referència que es desplaci amb velocitat lineal i constant respecte del donat, segueix essent inercial. Les posicions de les dues masses s'especifiquen pels vectors R_1 i R_2 , respectivament, de manera que les acceleracions inercials són simplement \ddot{R}_1 i \ddot{R}_2 . Igualant la força gravitacional sobre cada massa a $m_i\ddot{R}_i$, obtenim les equacions de moviment d'aquest sistema:

$$m_1\ddot{R}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|R_1 - R_2|^3}(R_1 - R_2) \quad (2.1)$$

$$m_2\ddot{R}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|R_1 - R_2|^3}(R_2 - R_1) \quad (2.2)$$

on G és la constant de gravitació universal. Aquestes equacions representen un sistema de sis equacions diferencials no lineals de segon ordre. Volem prendre un nou sistema de coordenades. Usarem la posició relativa $\mathbf{r} = R_2 - R_1$ com una de les noves coordenades. Per a l'altra coordenada, escollirem la posició del centre de masses R_c , definit com:

$$R_c = \frac{m_1R_1 + m_2R_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

Anem a veure ara que el moment lineal ens permet deduir que el centre de masses es mou a velocitat constant. Sigui P el moment lineal dels dos cossos:

$$P = P_1 + P_2 = m_1 \frac{dR_1}{dt} + m_2 \frac{dR_2}{dt} \quad (2.4)$$

Derivant R_c respecte el temps obtenim:

$$\frac{dR_c}{dt} = \frac{P}{m_1 + m_2} \Rightarrow P = (m_1 + m_2) \frac{dR_c}{dt} \quad (2.5)$$

Ara, si sumem les dues equacions del moviment:

$$m_1 \ddot{R}_1 + m_2 \ddot{R}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{R}_c = 0 \quad (2.6)$$

Fet que podem usar per a deduir:

$$\frac{dP}{dt} = (m_1 + m_2) \ddot{R}_c = 0 \quad (2.7)$$

Per tant, queda clar que $P = C$, on C és un vector constant. Així doncs, podem assegurar que el centre de masses es mourà a velocitat constant, fet que ens permet escollir un sistema de referència inercial prenent l'origen com el centre de masses i que suposarem en repòs. Usant el vector $\mathbf{r} = R_2 - R_1$ (i, essent $r=|\mathbf{r}|$) i sumant les equacions, $-(2.1) \times m_2 + (2.2) \times m_1$, obtenim les noves equacions del moviment:

$$m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.8)$$

I, cancel·lant el factor comú $m_1 m_2$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.9)$$

En el nostre cas, considerem que la massa de l'asteroide m_2 és negligible ($m_2 = 0$) respecte la massa central, $m_1 = M_\oplus$, de manera que considerem l'equació:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_\oplus}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.10)$$

A més, aquest fet ens desplaça la massa central al centre de l'origen de coordenades, és a dir, $R_1 = 0$ i $R_2 = \mathbf{r}$. Podem observar que $\frac{\mathbf{r}}{r}$ denota un vector unitari que apunta de l'asteroide al centre de la massa central, l'origen del sistema de coordenades. De l'equació (2.10) també podem observar que l'acceleració de l'asteroide és proporcional al seu vector de posició.

2.1.2 Propietats generals del problema de Kepler

A continuació, estudiarem les propietats principals que es deriven de les equacions del moviment. En primer lloc, definim el *moment angular per unitat de massa*:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

El vector \mathbf{h} és el vector director del pla que conté \mathbf{r} i $\dot{\mathbf{r}}$. Anem a veure que \mathbf{h} és constant, i equivalentment, que l'òrbita està confinada en un pla per tot temps. Derivem respecte el temps:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{dt} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.12)$$

Per definició de producte vectorial $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$, i per tant només ens queda veure que si un fa el producte vectorial entre el vector acceleració $\ddot{\mathbf{r}}$ i el vector de posició \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} &= -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com que $d\mathbf{h}/dt = 0$, \mathbf{h} és constant. Aquest fet implica la segona llei de Kepler o la *llei d'àrees*. Considerant el moviment de l'asteroide com lineal en un pas de temps suficientment petit Δt , llavors:

$$\Delta A = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\Delta t| = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|\Delta t \quad (2.14)$$

és l'àrea ocupada pel vector radi durant Δt . Anomenarem *velocitat areolar* al valor absolut $h = |\mathbf{h}|$, i com que tant \mathbf{h} com h són constants, l'àrea escombrada pel vector radi és la mateixa en qualsevol interval de temps, independentment de la posició inicial de l'asteroide (segona llei de Kepler).

Es poden deduir més propietats de l'òrbita en multiplicar els dos costats de l'equació del moviment (2.10) pel vector \mathbf{h} :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) \\ &= -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}((\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}) \\ &= -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}(\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ara, com:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{1}{r}\dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{r^3}(\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})) \end{aligned} \quad (2.16)$$

podem substituir a les expressions prèvies, obtenint:

$$\mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} = -GM_{\oplus} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.17)$$

Integrant als dos costats respecte el temps:

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} = -GM_{\oplus} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \mathbf{A} \quad (2.18)$$

on \mathbf{A} és una constant d'integració que es determina amb la posició i velocitat inicials, i s'anomena el *vector de Laplace*. Donat que $\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \in \Pi$, $\mathbf{r}/r \in \Pi$, podem concloure que

$\mathbf{A} \in \Pi$, també. Seguidament, multipliquem l'última equació per \mathbf{r} , fet que provoca que:

$$(\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = -GM_{\oplus} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \quad (2.19)$$

Usant la identitat $(a \times b) \cdot c = -(c \times b) \cdot a$ en (2.19):

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = GM_{\oplus} \frac{r^2}{r} + Ar \cos(\nu) \quad (2.20)$$

I finalment arribem a:

$$h^2 = GM_{\oplus} r + Ar \cos(\nu) \quad (2.21)$$

on ν és l'anomalia vertadera, l'angle entre \mathbf{A} i el vector de posició \mathbf{r} ; i A és el mòdul de \mathbf{A} . Definim a continuació dues quantitats positives auxiliars:

$$p = \frac{h^2}{GM_{\oplus}}, \quad e = \frac{A}{GM_{\oplus}} \quad (2.22)$$

que ens permeten simplificar (2.21) com es segueix:

$$h^2 = GM_{\oplus} r + Ar \cos(\nu) \Rightarrow \frac{h^2}{GM_{\oplus}} = r + r \cos(\nu) \frac{A}{GM_{\oplus}} \Rightarrow p = r + re \cos(\nu) \quad (2.23)$$

obtenint la relació:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)} \quad (2.24)$$

Aquesta equació ens relaciona la distància a l'asteroide r amb l'angle entre el vector de posició i la direcció de referència donada per \mathbf{A} , definint l'òrbita de l'asteroide en Π . És pot observar que la distància r varia entre:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} \quad (2.25)$$

per $\nu = 0$, i:

$$r_{max} = \begin{cases} \frac{p}{1 - e}, & \text{per } 0 \leq e < 1 \\ \infty, & \text{per } 1 \leq e \end{cases} \quad (2.26)$$

Els corresponents punts de l'òrbita s'anomenen *periapsis* i *apoapsis*. Anomenarem semieix gran a al valor mitjà:

$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{h^2}{GM_{\oplus}(1 - e^2)} \quad (2.27)$$

per òrbites amb apogeu finit. Ara ja podem donar sentit a p i e . La constant p mesura la distància de l'asteroide al centre de la massa central a angles rectes amb el perigeu i l'apogeu, i s'anomena *semi-latus rectum*, mentre que e s'anomena *excentricitat*, i és una mesura de la desviació de l'òrbita respecte un cercle (que correspon al valor de $e = 0$).

L'equació (2.24) és l'equació d'una secció cònica en coordenades polars. És una extensió de la primera llei de Kepler, i enuncia que les òrbites planetàries són el·lipses. Sabem que hi ha tres tipus de corbes que neixen d'intersecar un pla amb un con:

el·lipses, paràboles, i hipèrboles; que tenen excentricitat més petita, igual, i més gran que 1, respectivament. Restringirem la discussió al cas el·líptic ($e < 1$).

Seguidament es pot deduir una altra llei important del moviment de Kepler, que relaciona la velocitat de l'asteroide amb la distància respecte el centre de la Terra. Amb aquest propòsit, cal elevar al quadrat l'expressió (2.18):

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}})^2 &= (GM_{\oplus})^2 + 2GM_{\oplus} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}}{r} + A^2 = (GM_{\oplus})^2 \left(1 + 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}}{r GM_{\oplus}} + \frac{A^2}{GM_{\oplus}}\right) \\ &= (GM_{\oplus})^2 \left(1 + 2 \frac{A}{GM_{\oplus}} \cos(\nu) + e^2\right) = (GM_{\oplus})^2 (1 + 2e \cos(\nu) + e^2) \\ &= (GM_{\oplus})^2 (2(1 + e \cos(\nu)) - (1 - e^2)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com que els vectors \mathbf{h} i $\dot{\mathbf{r}}$ són perpendiculars, el valor del costat esquerre de la igualtat és equivalent a $h^2 v^2$; usant $v = |\dot{\mathbf{r}}|$ per denotar el mòdul de la velocitat de l'asteroide. Substituint el valor $1/a = GM_{\oplus}(1 - e^2)/h^2$, i fent ús de l'equació de la secció cònica (2.24), podem simplificar encara més l'expressió prèvia:

$$h^2 v^2 = (GM_{\oplus})^2 \left(\frac{2p}{r} - 1 - e^2 \right) \quad (2.29)$$

i, per tant:

$$v^2 = \frac{(GM_{\oplus})^2}{h^2} \left(\frac{2p}{r} \right) - \frac{(GM_{\oplus})^2}{h^2} (1 - e^2) \quad (2.30)$$

En conseqüència:

$$v^2 = \frac{(GM_{\oplus})^2}{h^2} \left(\frac{2p}{r} \right) - \frac{GM_{\oplus}}{a} \Rightarrow v^2 = GM_{\oplus} \left(GM_{\oplus} \frac{2p}{h^2 r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.31)$$

Usant que l'invers del *semi - latus rectum* és $p^{-1} = GM_{\oplus}/h^2$, obtenim l'equació coneguda com llei *vis - viva*:

$$v^2 = GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.32)$$

Un asteroide en òrbita circular ($a = r$) té una velocitat de $v_{circ} = \sqrt{GM_{\oplus}/a}$, d'acord amb la llei *vis - viva*. En una òrbita amb excentricitat, i com a conseqüència de la llei d'àrees, la velocitat màxima s'assoleix al periapsis, i la mínima, a l'apoapsis. Sigui v_{per} la velocitat al periapsis. Usant (2.32), obtenim les següents expressions:

$$v_{per}^2 = GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r_{min}} - \frac{2}{r_{min} + r_{max}} \right) \quad (2.33)$$

Tractant el parèntesis:

$$\frac{2}{r_{min}} - 2 \frac{2}{r_{min} + r_{max}} = \frac{2r_{min} + 2r_{max} - 2r_{min}}{r_{min}(r_{min} + r_{max})} = \frac{1}{a} \frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1}{a} \frac{1+e}{1-e}$$

On, recordem, $r_{min} = p/(1+e)$ i $r_{max} = p/(1-e)$. Finalment, es segueix:

$$v_{per} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (2.34)$$

De mateixa manera, obtenim que la velocitat màxima és:

$$v_{apo} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (2.35)$$

Tenir en compte que la velocitat màxima i mínima s'assoleixen a l'apoapsis i al periapsis és bàsic en el plantejament de les transferències de Hohmann, que pretenen fer canvis d'òrbita amb variacions de velocitat mínimes, i per a fer-ho, s'apliquen aquestes variacions en el periapsis i l'apoapsis.

2.1.3 Predicció de l'òrbita de l'asteroide

Fins ara, hem pogut concloure que el moviment de l'asteroide està contingut en una secció cònica, però no sabem quina és la posició de l'asteroide en un temps específic. suposem que identifiquem el pla orbital amb el pla $z = 0$. Situats al cas el·líptic ($0 < e < 1$), volem determinar la posició de l'asteroide al pla.

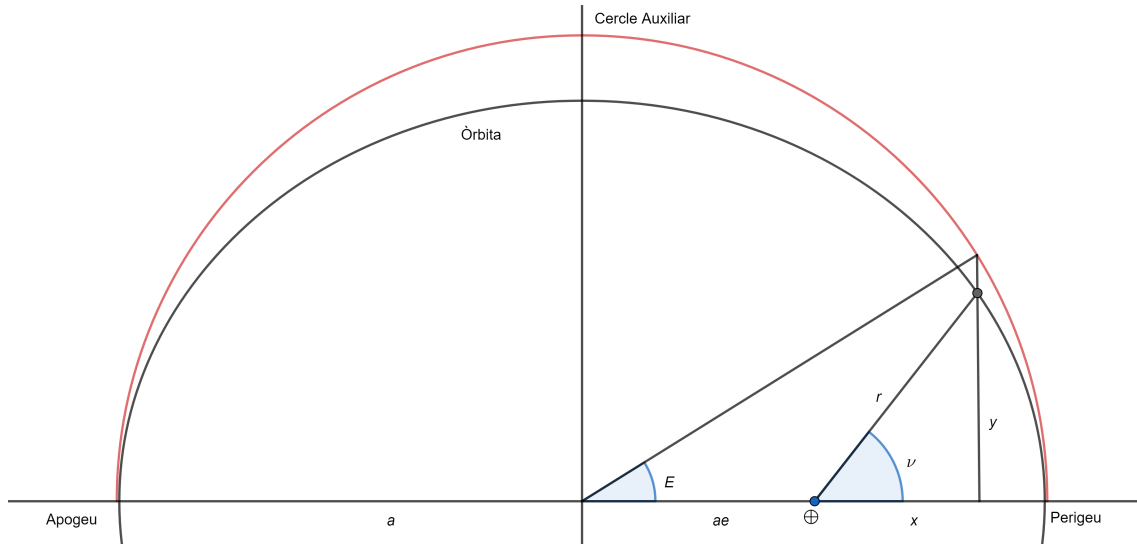


Figura 1: La definició de l'anomalia excèntrica E .

Amb la intenció de resoldre aquest problema, es defineix una variable auxiliar E , anomenada *anomalia excèntrica*, definida a través de les equacions:

$$\begin{cases} \hat{x} = r \cos(\nu) =: a(\cos(E) - e) \\ \hat{y} = r \sin(\nu) =: a\sqrt{1-e^2} \sin(E) \end{cases} \quad (2.36)$$

o, equivalentment:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} \\ &= \sqrt{a^2(\cos(E) - e)^2 + a^2(1-e^2)(\sin(E))^2} \\ &= a\sqrt{(\cos(E))^2 - 2e \cos(E) + e^2 + (\sin(E))^2 - e^2(\sin(E))^2} \\ &= a\sqrt{1 + e^2(\cos(E))^2 - 2e \cos(E)} \\ &= a(1 - e \cos(E)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

i on el significat geomètric d' E es pot observar a la figura 1. Usant les coordenades \hat{x} i \hat{y} , es pot expressar el moment angular h en funció de E :

$$\begin{aligned} h &= \hat{x} \cdot \dot{\hat{y}} - \hat{y} \cdot \dot{\hat{x}} \\ &= a(\cos(E) - e) \cdot a\sqrt{1 - e^2} \cos(E)\dot{E} + a\sqrt{1 - e^2} \sin(E) \cdot a \sin(E)\dot{E} \\ &= a^2\sqrt{1 - e^2}\dot{E}(1 - e \cos(E)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aquesta equació es pot simplificar usant $h = \sqrt{GM_{\oplus}a(1 - e^2)}$, per donar lloc a la següent equació diferencial per a la anomalia excèntrica:

$$(1 - e \cos(E))\dot{E} = n \quad (2.39)$$

on hem introduït el *moviment mitjà*:

$$n = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a^3}} \quad (2.40)$$

per a simplificar la notació. Integrant respecte el temps dóna lloc a l'*equació de Kepler*:

$$E(t) - e \sin(E(t)) = n(t - t_p) \quad (2.41)$$

on t_p denota el temps del pas pel perigeu (on $E = 0$). La part dreta de l'equació (2.41) es defineix com $M := n(t - t_p)$ i s'anomena l'*anomalia mitjana*, i varia uniformement en una revolució. Enlloc d'especificar el temps de pas pel perigeu per a descriure l'òrbita, és habitual introduir el valor M_0 de l'anomalia mitjana en un temps referència t_0 . L'anomalia mitjana en un temps arbitrari es pot trobar llavors com $M = M_0 + n(t - t_0)$. El període orbital, i.e., el temps que l'anomalia mitjana canvia en 2π , ve donat per la tercera llei de Kepler:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}} \quad (2.42)$$

2.1.4 Resolució de l'equació de Kepler

L'equació de Kepler relaciona el temps t amb les coordenades \hat{x} i \hat{y} en el pla orbital mitjançant l'anomalia excèntrica. Per a obtenir la posició de l'asteroide a temps t , hem de saber el temps de pas pel perigeu t_p i el semieix gran per a calcular l'anomalia mitjana. Seguidament, trobant el valor de E que resol l'equació de Kepler corresponent, podem determinar \hat{x} i \hat{y} . L'equació de Kepler es pot resoldre, malauradament, només mitjançant mètodes iteratius. Una manera usual de començar el mètode és amb una aproximació de $E_0 = M$ ($0 \leq e < 0.5$) o $E_0 = \pi$ ($0.5 \leq e < 1$), i usar el mètode de Newton aplicat a la funció auxiliar:

$$f(E) = E - e \sin(E) - M \quad (2.43)$$

per a calcular iterats successius E_i , fins que el resultat canviï menys que una tolerància preestablerta. Aplicant el mètode de Newton, els refinaments E_i s'obtenen seguint la fórmula:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} \quad (2.44)$$

2.1.5 L'òrbita a l'espai

Hem pogut determinar la posició de l'asteroide al pla orbital, però l'objectiu és conèixer la posició real de l'asteroide a l'espai. Per a fer-ho, farem ús del sistema més habitual: els *sis elements orbitals*. Fins el moment, ja hem tingut contacte amb alguns d'aquests sis elements. El semieix gran a determina la mida de l'òrbita, al mateix temps que especifica el seu període. L'excentricitat e determina la forma i el tipus de secció cònica. L'anomalia mitjana en el temps t_0 , M_0 , ens dóna una posició referència de l'asteroide, fixant la seva posició en l'òrbita en un instant de temps. Junts, aquests tres elements orbitals formen un grup, i determinen completament el moviment de l'asteroide en el pla orbital. El següent objectiu és conèixer la segona terna d'elements, que especifiquen l'orientació del pla de l'òrbita a l'espai.

Usem el vector unitari $P = \frac{\mathbf{A}}{A}$, que apunta al perigeu, i el vector unitari perpendicular Q , corresponent a la anomalia veritable de $\nu = 90^\circ$, per a expressar la posició com:

$$\mathbf{r} = \hat{x}P + \hat{y}Q = a(\cos(E) - e)P + a\sqrt{1 - e^2} \sin(E)Q \quad (2.45)$$

i, la velocitat, com:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\hat{x}}P + \dot{\hat{y}}Q = \frac{\sqrt{GM_\oplus a}}{r} \left(-\sin(E)P + \sqrt{1 - e^2} \cos(E)Q \right) \quad (2.46)$$

doncs $a\dot{E} = \frac{\sqrt{GM_\oplus a}}{r}$, d'acord amb (2.38) i (2.40).

El sistema de coordenades més habitual per a descriure òrbites de satèl·lits al voltant de la Terra es el *sistema de coordenades equatorial geocèntric*, que està alineat amb l'eix de rotació de la Terra i amb l'equador. L'origen està al centre de la terra, l'eix z apunta al pol nord, i el pla equatorial forma el pla de referència xy . L'eix x està alineat amb l'equinocci vernal (la intersecció del pla equatorial amb el pla orbital de la Terra). Com s'il·lustra a la figura 2, la posició d'un punt en el sistema de coordenades equatorial es pot especificar via les coordenades cartesianes (x, y, z) , o bé usant les coordenades polars (α, δ, r) , *ascensió recta*, *declinació* i la *distància geocèntrica*, respectivament.

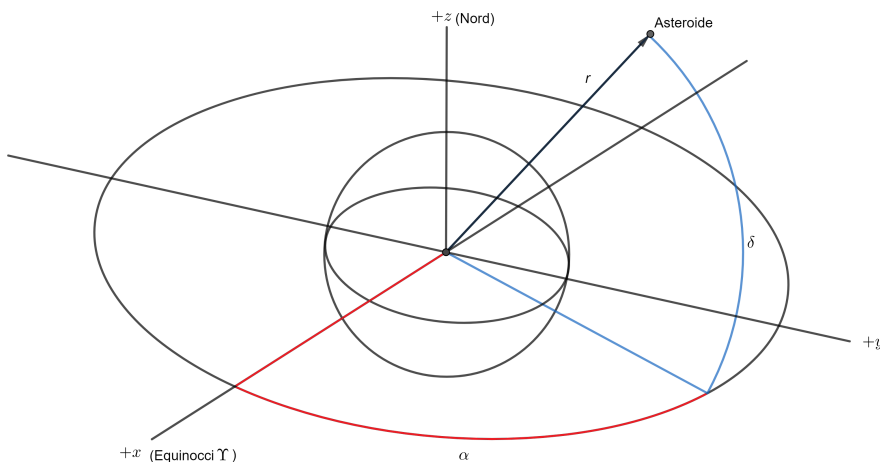


Figura 2: El sistema de coordenades equatorial.

El canvi de coordenades polars a coordenades cartesianes es pot dur a terme amb les relacions:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(\alpha) \\ \cos(\delta) \sin(\alpha) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

on

$$\begin{cases} \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (2.48)$$

El quadrant de α s'ha d'escollir de manera que el signe del denominador sigui igual al signe de $\cos(\alpha)$; i.e., $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ si $0 < x$, i $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ si $x < 0$. Per a poder descriure l'orientació del pla orbital i el perigeu respecte al sistema de coordenades equatorial, s'acostumen a usar tres angles, que conformen la segona terna dels elements orbitals:

- (i) La *inclinació* i dona l'angle d'intersecció entre el pla orbital i l'equador.
- (ii) L'*ascensió recta del node ascendent* Ω indica l'angle entre l'equinocci vernal i el punt de l'òrbita en el que l'asteroide creua el pla equatorial de sud a nord.
- (iii) L'*argument del perigeu* ω és l'angle entre la direcció del node ascendent i la direcció del perigeu.

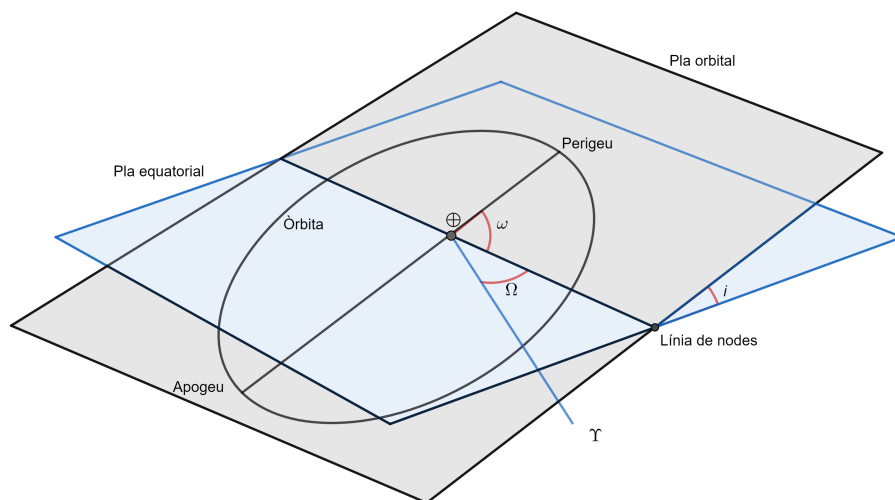


Figura 3: Els elements orbitals.

La posició de l'asteroide a l'espai es pot expressar com a funció d'aquests tres angles per una successió de transformacions elementals. En el pla orbital, definit pels vectors P , Q , i $W = \frac{\mathbf{h}}{h}$, les coordenades es donen per:

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (r \cos(\nu), r \sin(\nu), 0) \quad (2.49)$$

En un sistema de coordenades rotat al voltant de W un angle de $-\omega$ (i.e. amb un eix x' apuntant al node ascendent), les coordenades són:

$$(x', y', z') = (r \cos(\nu + \omega), r \sin(\nu + \omega), 0) \quad (2.50)$$

i la transformació corresponent es pot escriure com:

$$r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \\ \sin(\nu + \omega) \\ 0 \end{pmatrix} = R_z(-\omega) r \begin{pmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

on les matrius:

$$\begin{cases} R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \\ R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \\ R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.52)$$

són les matrius de rotació que usarem per expressar els canvis de coordenades.

Per expressar les coordenades de l'asteroide en les coordenades equatorials, cal dur a terme dues rotacions més. Primer, una rotació al voltant de l'eix x' per un angle de $-i$, obtenint llavors coordenades equatorials des de la línia de nodes. Es necessita una nova rotació de $-\Omega$ al voltant del nou eix z'' , que ens permet obtenir coordenades equatorials des de la direcció de l'equinocci.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) R_x(-i) R_z(-\omega) r \begin{pmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Avaluant aquesta expressió es pot veure que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(\Omega) - \sin(u) \cos(i) \sin(\Omega) \\ \cos(u) \sin(\Omega) + \sin(u) \cos(i) \cos(\Omega) \\ \sin(u) \sin(i) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

on $u = \omega + \nu$ (angle de latitud) és l'angle entre \mathbf{r} i la línia de nodes. També podem representar P, Q i W com:

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\omega) \cos(\Omega) - \sin(\omega) \cos(i) \sin(\Omega) \\ \cos(\omega) \sin(\Omega) - \sin(\omega) \cos(i) \cos(\Omega) \\ \sin(\omega) \sin(i) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sin(\omega) \cos(\Omega) - \cos(\omega) \cos(i) \sin(\Omega) \\ -\sin(\omega) \sin(\Omega) - \cos(\omega) \cos(i) \cos(\Omega) \\ \cos(\omega) \sin(i) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$W = \begin{pmatrix} \sin(i) \sin(\Omega) \\ -\sin(i) \cos(\Omega) \\ \cos(i) \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Té interès observar que P , Q i W són els vectors columna de la matriu:

$$(P, Q, W) = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \quad (2.58)$$

fet que és útil quan hem de canviar entre coordenades equatorials i les del pla orbital. Es coneixen com els *vectors de Gauss*.

2.1.6 Càlcul dels elements orbitals a partir de la posició i la velocitat

Com hem vist, es necessiten un total de 6 paràmetres independents per a determinar el moviment d'un cos al voltant d'una massa central. Dos d'aquests elements (a i e) descriuen la forma de l'òrbita, un element (M) defineix la posició al voltant de l'òrbita i tres altres (Ω , i i w) determina l'orientació de l'òrbita a l'espai. Donats aquests 6 elements, sempre es pot determinar la posició i la velocitat del cos.

La pregunta és si donada una posició i una velocitat, podem determinar de manera unívoca aquests 6 elements. La resposta es sí, i és el que veurem en aquesta secció. Primerament, tant el moment angular:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

com el seu mòdul h es poden obtenir a partir de la posició i la velocitat. Llavors, escrivint $W = \mathbf{h}/h$ com a funció de i i Ω , es segueix que:

$$\begin{pmatrix} \sin(i) \sin(\Omega) \\ \sin(i) \cos(\Omega) \\ \cos(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x/h \\ -\mathbf{h}_y/h \\ \mathbf{h}_z/h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ -W_y \\ W_z \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Llavors, la inclinació i l'ascensió recta del node ascendent s'obtenen:

$$i = \arctan\left(\frac{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{W_z}\right) \text{ i } \Omega = \arctan\left(\frac{W_x}{-W_y}\right) \quad (2.61)$$

El moment angular es pot usar per obtenir el semi-latus rectum:

$$p = \frac{h^2}{GM_\oplus} \quad (2.62)$$

La llei vis-viva ens permet obtenir el semieix gran:

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM_\oplus}\right)^{-1} \quad (2.63)$$

i en conseqüència, el moviment mitjà:

$$n = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a^3}} \quad (2.64)$$

La excentricitat e s'obté de:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (2.65)$$

Considerant $r = a(1 - e \cos(E))$, i la identitat:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= -a(\cos(E) - e) \cdot a \sin(E) \dot{E} + a\sqrt{1 - e^2} \sin(E) \cdot a\sqrt{1 - e^2} \cos(E) \dot{E} \\ &= a^2 n e \sin(E) \end{aligned} \quad (2.66)$$

un pot extreure de $e \sin(E)$ i de $e \cos(E)$ la anomalia excèntrica:

$$E = \arctan \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{(a^2 n)(1 - r/a)} \right) \quad (2.67)$$

Aquesta dada la podem usar per obtenir la anomalia mitjana de l'equació de Kepler:

$$M = E(t) - e \sin(E(t)) \quad (2.68)$$

on t és el temps de r i de \dot{r} . Per determinar l'últim element ω , primer hem de determinar l'angle de latitud u . De l'equació (2.54) es pot extreure:

$$u = \arctan \left(\frac{z}{-xW_y + yW_x} \right) \quad (2.69)$$

L'anomalia veritable ve donada per:

$$\nu = \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{\cos(E) - e} \right) \quad (2.70)$$

Finalment:

$$\omega = u - \nu \quad (2.71)$$

2.2 El model restringit circular de tres cossos

El problema restringit circular de 3 cossos té un paper molt important en la història de la mecànica celeste. La motivació de l'estudi d'aquest model recau en què volem capturar un asteroide en un punt fix, o bé en una òrbita periòdica d'un punt de libració del model de 3 cossos.

Considerem dos cossos puntuals m_1 i m_2 , que anomenarem *primaris* i que segueixen òrbites circulars al voltant del seu centre de massa. Un tercer cos de massa negligible m_3 es mou degut a la força gravitatòria dels primaris, sense influir en el seu moviment. Aquest tercer cos es considera prou petit com per a què la seva massa no influeixi en el camp gravitacional generat pels dos primaris.

2.2.1 Equacions del moviment

Es seguiran les següents convencions. Escollim com a unitat de distància, la distància entre els dos cossos primaris:

$$r_{12} = 1 \quad (2.72)$$

Com a unitat de massa, i tenint en compte que suposem $m_3 = 0$, podem considerar m_1 i m_2 de tal manera que:

$$m_1 + m_2 = 1 \quad (2.73)$$

de manera que si anomenem a la massa més petita $m_2 = \mu$, llavors:

$$m_1 = 1 - \mu \text{ i } m_2 = \mu \quad (2.74)$$

Finalment, s'escull la unitat de temps. Si imposem que la constant gravitacional sigui $G = 1$, llavors, degut a la tercera llei de Kepler, el període dels dos cossos primaris en la seva òrbita serà:

$$T_{12} = 2\pi \left(\frac{r_{12}^3}{G(m_1 + m_2)} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \quad (2.75)$$

El problema restringit s'acostuma a plantejar en un sistema de referència en rotació seguint el moviment orbital dels dos cossos primaris. L'origen d'aquest sistema és el centre de masses dels dos primaris. A més, el sistema de coordenades es considera de tal manera que els dos primaris viuen en l'eix d'abscisses. Això significa que m_1 està situat a una distància μ de l'origen, mentre que m_2 està situat a una distància $1 - \mu$, al costat oposat de l'eix d'abscisses. El sistema de referència en rotació s s'anomena *sinòdic*, i té una velocitat angular inercial de $\omega = 1 \text{ Hz}$, donat que el període es $T_{12} = 2\pi$. Per aplicar la segona llei de Newton, hem de calcular l'acceleració inercial de la massa petita, i podem expressar-la respecte els vectors unitaris del sistema sinòdic s . L'acceleració inercial ve donada per:

$$\frac{{}^i d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \frac{{}^s d^2}{dt^2} \mathbf{r} + 2\omega \times \frac{{}^s d}{dt} \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (2.76)$$

on el vector de posició de la massa petita m_3 és:

$$\mathbf{r} = x s_1 + y s_2 + z s_3 \quad (2.77)$$

i on els superíndex r i s indiquen que les derivades temporals es prenen respecte del sistema inercial i del sinòdic, respectivament. És a dir:

$$\frac{{}^s d}{dt} \mathbf{r} = \dot{x} s_1 + \dot{y} s_2 + \dot{z} s_3 \quad (2.78)$$

$$\frac{{}^s d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \ddot{x} s_1 + \ddot{y} s_2 + \ddot{z} s_3 \quad (2.79)$$

Desenvolupant els productes vectorials en (2.76):

$$2\omega \times \frac{{}^s d}{dt} \mathbf{r} = (-2\dot{y}, 2\dot{x}, 0) \quad (2.80)$$

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega \times (-y, x, 0) = (-x, -y, 0) \quad (2.81)$$

on $\omega = (0, 0, 1)$. L'acceleració inercial de m_3 es converteix doncs, en:

$$\frac{{}^i d^2}{dt^2} \mathbf{r} = (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) s_1 + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) s_2 + \ddot{z} s_3 \quad (2.82)$$

Per a completar les equacions del moviment, encara cal calcular l'acceleració gravitacional sobre m_3 . Per a fer-ho, necessitem els vectors de m_1 i m_2 a m_3 , que són:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (x - \mu, y, z) \\ \mathbf{r}_2 = (x + 1 - \mu, y, z) \end{cases} \quad (2.83)$$

i, els mòduls respectius,

$$\begin{cases} r_1 = ((x - \mu)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ r_2 = ((x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.84)$$

Finalment, l'acceleració gravitacional de m_3 ve donada per:

$$a_g = -\frac{(1 - \mu)}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2 \quad (2.85)$$

Les equacions del moviment es troben igualant l'acceleració inercial de m_3 amb l'acceleració gravitacional sobre ell. Separades en components:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\ \ddot{z} = -\frac{(1 - \mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \end{cases} \quad (2.86)$$

Aquestes equacions, donada la funció:

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (2.87)$$

són equivalents a:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \\ \ddot{z} = \Omega_z \end{cases} \quad (2.88)$$

Aquestes equacions tenen una integral primera coneguda com la *integral de Jacobi*, que es pot calcular de la següent manera:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(\ddot{x} - 2\dot{y}) &= \dot{x}\Omega_x \\ \dot{y}(\ddot{y} + 2\dot{x}) &= \dot{y}\Omega_y \\ \dot{z}\ddot{z} &= \dot{z}\Omega_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = \Omega_x\dot{x} + \Omega_y\dot{y} + \Omega_z\dot{z} \quad (2.89)$$

Integrant respecte el temps obtenim:

$$\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 2\Omega + C_J \quad (2.90)$$

on el costat esquerre representa el quadrat de la velocitat de la partícula, i on C_J és la *constant de Jacobi*. Un cop donades condicions inicials, un pot donar valor de C_J i estudiar llavors la superfície $2\Omega = C_J$, que establirà la possible regió de moviment.

2.2.2 Els punts de llibració

El primer pas per a estudiar un sistema dinàmic, és estudiar els punts d'equilibri. En un punt d'equilibri, les partícules estan parades i no tenen ni velocitat ni acceleració: les forces del sistema s'anul·len en aquell punt. En un sistema on les equacions del moviment depenen explícitament del temps, no poden existir punts d'equilibri. Si el sistema de forces depèn del temps, llavors els punts on s'anul·len han de variar amb el temps; contradient el concepte de punt d'equilibri. El problema restringit té forces independents del temps en el sistema de coordenades sinòdiques. En el sistema inercial, les dues masses primàries es mouen, de manera que les forces gravitacionals depenen del temps explícitament. Per tant, si existeixen punts d'equilibri, han de fer-ho en el sistema sinòdic.

Amb la intenció de buscar punts d'equilibri, imposam en les equacions del moviment (2.86) que les velocitats i acceleracions siguin 0:

$$-x = -\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} \quad (2.91)$$

$$-y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \quad (2.92)$$

$$0 = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \quad (2.93)$$

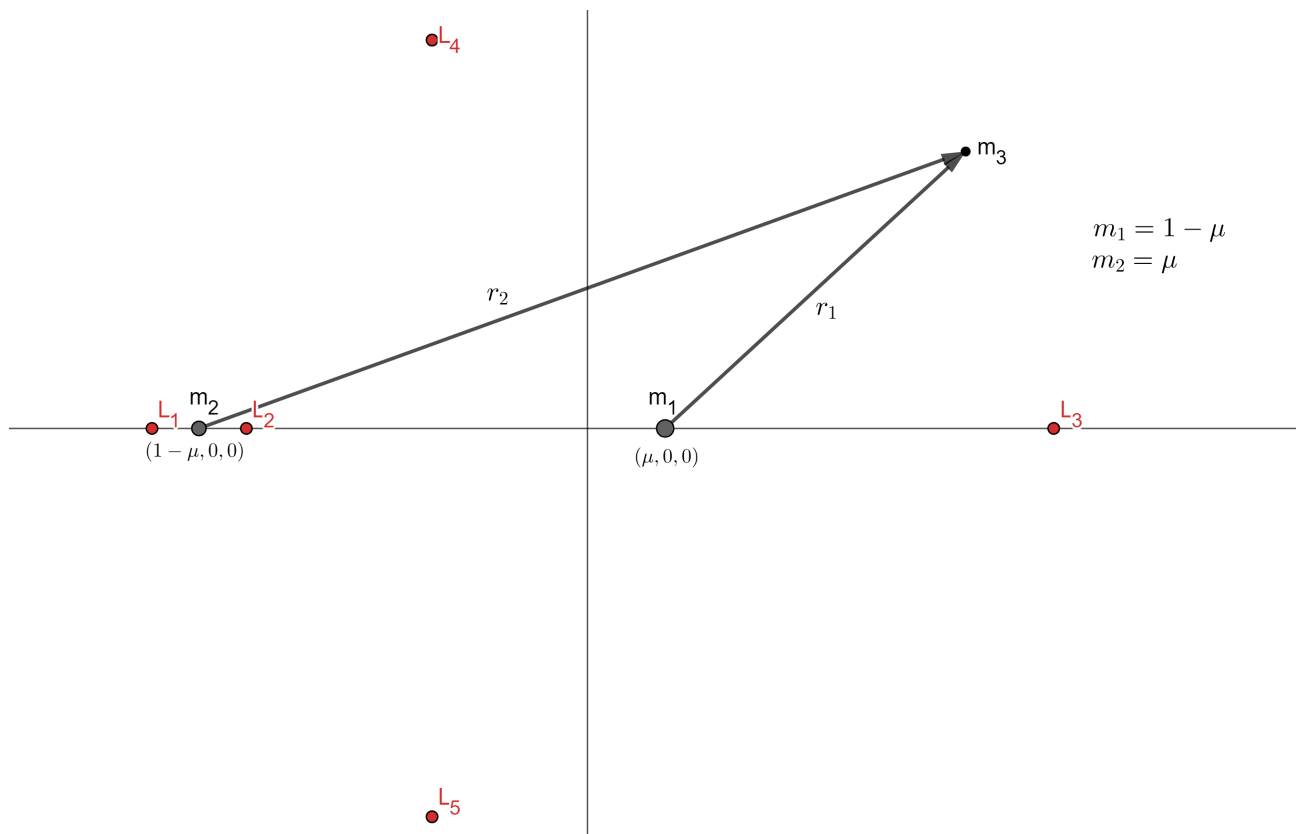


Figura 4: Els punts de llibració.

Observem que (2.93) ens implica $z = 0$. Tot punt d'equilibri ha d'estar en el pla orbital de les dues masses primàries. Els dos primers punts d'equilibri els trobem si suposem $r_1 = r_2 = 1$, fet que redueix (2.91) i (2.92) a identitats, que semblen no especificar els valors de x , i de y . Però suposar $r_1 = r_2 = 1$ conté informació implícitament: els dos punts d'equilibri estan situats als vèrtex de dos triangles equilàters, on m_1 i m_2 són els altres dos vèrtex. Aquests punts també s'anomenen els *punts triangulars*, o L_4 i L_5 ; i són, en el nostre sistema de referència:

$$L_4 = \left(-\frac{1}{2} + \mu, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right) \quad (2.94)$$

$$L_5 = \left(-\frac{1}{2} + \mu, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right) \quad (2.95)$$

Existeixen tres punts més d'equilibri. Els anomenem els punts d'equilibri colineals. Aquests són de gran interès, ja que dos d'ells són "fàcilment" accessibles des de la Terra. L'equació (2.92) també es satisfà si $y = 0$. Tot punt d'equilibri restant ha de viure a l'eix x , i seran arrels de (2.91) amb $y = z = 0$, fet que porta a:

$$x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{|x - \mu|^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{|x + 1 - \mu|^3} = 0 \quad (2.96)$$

Quan netegem els denominadors, ens queda una equació de cinquè grau, anomenada la *quíntica d'Euler*, equació que, malauradament, ha de ser resolta mitjançant tècniques numèriques. Els valors de x als punts L_1 i L_2 , en funció de μ , es poden observar a la següent figura.

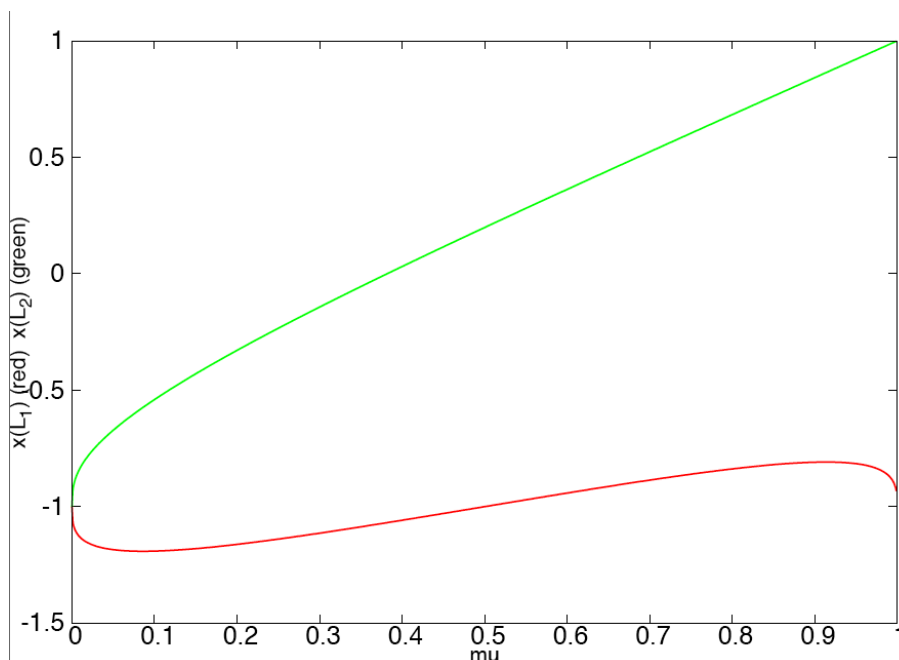


Figura 5: Coordenada x de L_1 i L_2 en funció de μ .

2.2.3 Estabilitat al voltant de punts d'equilibri

A continuació estudiarem la dinàmica lineal al voltant dels punts d'equilibri L_1 i L_2 . Recordem que tenim $L_i := L(a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2$, on $b_{1,2} = 0$ i $c_{1,2} = 0$. Fem el canvi:

$$\begin{aligned} x_1 &= x & x_4 &= \dot{x} \\ x_2 &= y & x_5 &= \dot{y} \\ x_3 &= z & x_6 &= \dot{z} \end{aligned}$$

de manera que les equacions del moviment es poden escriure com:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 & , & \dot{x}_4 = 2x_5 + \frac{\delta\Omega(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_1} \\ \dot{x}_2 = x_5 & , & \dot{x}_5 = -2x_4 + \frac{\delta\Omega(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_2} \\ \dot{x}_3 = x_6 & , & \dot{x}_6 = \frac{\delta\Omega(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_3} \end{cases} \quad (2.97)$$

Comencem fent un estudi genèric al voltant de qualsevol d'aquests tres punts d'equilibri. Siguin $\xi, \eta, \gamma \in \mathbb{R}$ de manera que el punt (x, y, z) :

$$\begin{aligned} x &= a_i + \xi \\ y &= \eta \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

és un punt arbitràriament proper a L_i . La funció $\Omega(x, y, z)$ es pot expandir al voltant de L_i mitjançant el polinomi de Taylor. Anomenant $\Omega^0 = \Omega(a_i, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega^0 + \Omega_{x_1}^0 \xi + \Omega_{x_2}^0 \eta + \Omega_{x_3}^0 \gamma + \frac{1}{2} \Omega_{x_1 x_1}^0 \xi^2 + \frac{1}{2} \Omega_{x_2 x_2}^0 \eta^2 + \frac{1}{2} \Omega_{x_3 x_3}^0 \gamma^2 + \\ &\quad \Omega_{x_1 x_2}^0 \xi \eta + \Omega_{x_1 x_3}^0 \xi \gamma + \Omega_{x_2 x_3}^0 \eta \gamma + O(3) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Les equacions diferencials (2.89) resulten en:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{x_1 x_1}^0 \xi + \Omega_{x_1 x_2}^0 \eta + \Omega_{x_1 x_3}^0 \gamma + O(2) \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{x_2 x_1}^0 \xi + \Omega_{x_2 x_2}^0 \eta + \Omega_{x_2 x_3}^0 \gamma + O(2) \\ \ddot{\gamma} = \Omega_{x_3 x_1}^0 \xi + \Omega_{x_3 x_2}^0 \eta + \Omega_{x_3 x_3}^0 \gamma + O(2) \end{cases} \quad (2.99)$$

Ometent els terme $O(2)$, hem donat lloc a les equacions linealitzades. Siguin u i \dot{u} els vectors de les variacions:

$$u = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \gamma \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\eta} \\ \dot{\gamma} \\ \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

d'aquesta manera, les equacions linealitzades es poden escriure com un sistema:

$$\dot{u} = Au, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & C \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

amb $0, I, B, C$ són blocs de 3×3 . 0 és la matriu nul·la, I la matriu identitat, i:

$$A = \begin{pmatrix} \Omega_{x_1x_1}^0 & \Omega_{x_1x_2}^0 & \Omega_{x_1x_3}^0 \\ \Omega_{x_1x_2}^0 & \Omega_{x_2x_2}^0 & \Omega_{x_2x_3}^0 \\ \Omega_{x_1x_3}^0 & \Omega_{x_2x_3}^0 & \Omega_{x_3x_3}^0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

L'objectiu d'aquest apartat és calcular els valors propis de A , que ens donen informació sobre el comportament lineal al voltant dels punts d'equilibri.

Abans de fer-ho, ens mirem una mica els coeficients de les equacions. Les segones derivades parcials de la funció Ω són:

$$\Omega_{x_1x_2} = 3x_2 \left[\frac{(x_1 - \mu)(1 - \mu)}{r_1^5} + \frac{\mu(x_1 + 1 - \mu)}{r_2^5} \right] \quad (2.103)$$

$$\Omega_{x_1x_3} = 3x_3 \left[\frac{(1 - \mu)(x_1 - \mu)}{r_1^5} + \frac{\mu(x_1 - \mu + 1)}{r_2^5} \right] \quad (2.104)$$

$$\Omega_{x_2x_3} = 3x_2x_3 \left[\frac{1 - \mu}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^5} \right] \quad (2.105)$$

$$\Omega_{x_3x_3} = 3x_3^2 \left[\frac{1 - \mu}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^5} \right] - \left[\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] \quad (2.106)$$

Els punts colineals viuen en $x_2 = x_3 = 0$, i doncs tenim $\Omega_{x_1x_2}(x, 0, 0) = \Omega_{x_1x_3}(x, 0, 0) = \Omega_{x_2x_3}(x, 0, 0) = 0$ i:

$$\Omega_{x_3x_3}(x, 0, 0) = - \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) < 0 \quad (2.107)$$

i també:

$$\Omega_{x_1x_1}(x, 0, 0) = 1 + 2 \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 1 - 2\Omega_{x_3x_3}(x, 0, 0) \quad (2.108)$$

$$\Omega_{x_2x_2}(x, 0, 0) = 1 - \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 1 + \Omega_{x_3x_3}(x, 0, 0)$$

Als punts d'equilibri colineals:

$$\Omega_{x_3x_3}^0 = \Omega_{x_2x_2}^0 - 1 < 0 \quad (2.109)$$

Usant $-7 \leq \Omega_{x_2x_2}^0 \leq 0$, (veure [10] secció 4.6, pàg. 146), concloem:

$$-8 \leq \Omega_{x_3x_3}^0 \leq -1 \quad (2.110)$$

Donat que les derivades parcials creuades $\Omega_{x_1x_3} = \Omega_{x_2x_3} = 0$, la tercera equació linealitzada es pot separar de les dues primeres i ser tractada independentment als 2 punts de libració. La dinàmica al pla x_1x_2 no és influenciada, doncs, pel moviment en la direcció x_3 , d'acord amb les equacions linealitzades (2.99). Es pot observar que

les derivades creuades d'ordre superior de Ω no són zero, i en conseqüència existeixen efectes no lineals entre les dues primeres equacions i la tercera. En el cas lineal, el moviment en l'eix x_3 està governat, doncs, per:

$$\ddot{\gamma} = \Omega_{x_3x_3}^0 \gamma \quad (2.111)$$

Aquesta equació de segon ordre és equivalent a dues equacions de primer ordre:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \alpha \\ \dot{\alpha} = \Omega_{x_3x_3}^0 \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Omega_{x_3x_3}^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

Els valors propis de la matriu del sistema (2.112) surten de l'equació:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \Omega_{x_3x_3}^0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{5,6} = \pm \sqrt{\Omega_{x_3x_3}^0} \in \mathbb{C} \quad (2.113)$$

on hem usat (2.110) per a concloure que en la direcció x_3 tenim un comportament lineal del tipus *centre*. Recordem que si tenim una equació diferencial del tipus $\ddot{z} = kz$ amb $k < 0$, llavors el període és $w = 2\pi\sqrt{-\frac{1}{k}}$. Per tant, el període del moviment perpendicular al pla x_1x_2 als punts colineals és:

$$w = 2\pi(-\Omega_{x_3x_3}(L_i))^{-\frac{1}{2}} \quad (2.114)$$

Com els moviments al voltant de l'eix x_3 en el cas lineal són purament oscil·lacions harmòniques, no es poden fer prediccions sobre l'estabilitat no lineal.

Estudiem ara els moviment lineal en les direccions x_1 i x_2 . Les equacions linealitzades al pla $x_3 = 0$ són:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{x_1x_1}^0 \xi \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{x_2x_2}^0 \eta \end{cases} \quad (2.115)$$

que és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}, \text{ on } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{x_1x_1}^0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \Omega_{x_2x_2}^0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

Procedim a calcular els valors propis de A' . Busquem λ tal que $\det(A' - \lambda Id) = 0$. Anomenant $m = \Omega_{x_1x_1}^0$ i $n = \Omega_{x_2x_2}^0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ m & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & n & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ n & -2 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & n & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + (4 - m - n)\lambda^2 + mn \quad (2.117)$$

Per tant,

$$\det(A' - \lambda Id) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + (4 - m - n)\lambda^2 + mn = 0 \quad (2.118)$$

Fem el canvi $\lambda^2 = t$. Ens transforma (2.118) a la següent equació quadràtica:

$$t^2 + (4 - m - n)t + mn = 0 \quad (2.119)$$

La solució d'aquesta equació és de la forma:

$$t = \frac{m + n - 4 \pm \sqrt{((m + n) - 4)^2 - 4mn}}{2} \quad (2.120)$$

Ens interessa saber el signe del terme que està dins l'arrel. Per a fer-ho, cal fer un petit estudi de les funcions:

$$\Omega_{x_1 x_1}(x, 0, 0) = 1 + \frac{2(1 - \mu)(x - \mu)^2}{r_1^5} + \frac{2\mu(x + 1 - \mu)^2}{r_2^5} \quad (2.121)$$

$$\Omega_{x_2 x_2}(x, 0, 0) = 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \quad (2.122)$$

Recordem que $L_i = (a_i, 0, 0)$, i, observant la figura 4, ens fixem en que, en L_1 :

$$r_1 = \sqrt{(a_1 - \mu)^2} = \mu - a_1 \quad (2.123)$$

$$r_2 = \sqrt{(a_1 - (1 - \mu))^2} = (\mu - 1) - a_1 \quad (2.124)$$

I en L_2 :

$$r_1 = \sqrt{(a_2 - \mu)^2} = \mu - a_2 \quad (2.125)$$

$$r_2 = \sqrt{(a_2 - (1 - \mu))^2} = a_2 - (\mu - 1) \quad (2.126)$$

Clarament, substituint l'equació (2.121) en qualsevol dels tres punts d'equilibri:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1 x_1}^0 &= 1 + \frac{2(1 - \mu)(a_i - \mu)^2}{r_1^5} + \frac{2\mu(a_i - (\mu - 1))^2}{r_2^5} \\ &= 1 + \frac{2(1 - \mu)r_1^2}{r_1^5} + \frac{2\mu r_2^2}{r_2^5} \\ &= 1 + \frac{2(1 - \mu)}{r_1^3} + \frac{2\mu}{r_2^3} > 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

Ara, tenint en compte que $\Omega_{x_1}^0 = 0$, tenim la igualtat:

$$\mu - r_1 + \frac{1 - \mu}{r_1^2} + \frac{\mu}{r_2^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \mu}{r_1^2} = r_1 - \mu - \frac{\mu}{r_2^2} \quad (2.128)$$

Que la podem usar per reescriure l'expressió (2.122):

$$\begin{aligned} \Omega_{x_2 x_2}(x, 0, 0) &= 1 - \frac{1}{r_1} \frac{1 - \mu}{r_1^2} - \frac{\mu}{r_2^3} \\ &= 1 - \frac{1}{r_1} \left(r_1 - \mu - \frac{\mu}{r_2^2} \right) - \frac{\mu}{r_2^3} \\ &= \mu \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2^2} - \frac{1}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (2.129)$$

A partir d'ara hem de fer un petit tractament per casos, tenint en compte les següents igualtats en cada punt d'equilibri:

$$\text{En } L_1: r_1 - r_2 = 1 \quad (2.130)$$

$$\text{En } L_2: r_1 + r_2 = 1 \quad (2.131)$$

Procedim (2.129) en L_1 :

$$\begin{aligned} \Omega_{x_2x_2}(a_1, 0, 0) &= \mu \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2^2} - \frac{1}{r_2^3} \right) = \mu \left(1 - \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2^2} - \frac{1}{r_2^3} \right) \\ &= \mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \left(r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) = \mu \left(\frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1} \right) \left(r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) \\ &= \mu \left(\frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} \right) \left(r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{\mu}{r_1} \left(1 - \frac{1}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (2.132)$$

Donat que $r_2 < 1$, podem concloure que $\Omega_{x_2x_2}(a_1, 0, 0) < 0$. Procedim (2.129) en L_2 :

$$\begin{aligned} \Omega_{x_2x_2}(a_2, 0, 0) &= \mu \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2^2} - \frac{1}{r_2^3} \right) = \mu \left(1 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2^2} - \frac{1}{r_2^3} \right) \\ &= \mu \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \left(r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) = \mu \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2 r_1} \right) \left(r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) \\ &= \mu \left(\frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} \right) \left(r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{\mu}{r_1} \left(1 - \frac{1}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Donat que $r_2 < 1$, podem concloure que $\Omega_{x_2x_2}(a_2, 0, 0) < 0$. Per tant, hem vist que $m = \Omega_{x_1x_1}^0 > 0$ i que $n = \Omega_{x_2x_2}^0 < 0$. En conclusió, tenim que $-4mn > 0$, i podem observar trivialment que:

$$m + n - 4 = \sqrt{((m + n) - 4)^2} < \sqrt{(m + n) - 4)^2 - 4mn} \quad (2.134)$$

Si t_1 i t_2 són les solucions de (2.119), llavors $t_1 > 0$ i $t_2 < 0$. La conclusió és que les solucions de (2.118) són:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{t_1} > 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{t_1} < 0 \end{cases} \quad (2.135)$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \sqrt{t_2} \in \mathbb{C} \\ \lambda_4 = -\sqrt{t_2} \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (2.136)$$

Per tant, al pla x_1x_2 tenim un moviment lineal al voltant dels punts d'equilibri del tipus *centre* \times *sella*. En definitiva, el comportament lineal al voltant dels tres punts d'equilibri, és del tipus *centre* \times *centre* \times *sella*. Pel que fa al caràcter no lineal, es pot veure [5] on es demostra mitjançant el teorema de Lyapunov l'existència de famílies d'òrbites periòdiques.

A la figura 6 tenim el retrat de fase de l'aplicació de Poincaré al voltant del punt L_2 , on s'observen certes famílies d'òrbites periòdiques i quasi-periòdiques. Una aplicació de Poincaré es pot interpretar com un sistema dinàmic discret amb menor dimensió

que el sistema continu original. De fet, es disminueix la dimensió en 2 unitats: una reducció és deguda a que es fixa el valor de la constant de Jacobi per a totes les òrbites, i la segona és deguda a que només es miren les interseccions de les òrbites amb una certa superfície de secció (la secció de Poincaré). La correspondència entre un sistema i l'altre és la següent:

- (i) Una òrbita periòdica simple en el sistema dinàmic original equival a un punt fix en la secció de Poincaré.
- (ii) Una trajectòria quasi-periòdica equival a una corba tancada.

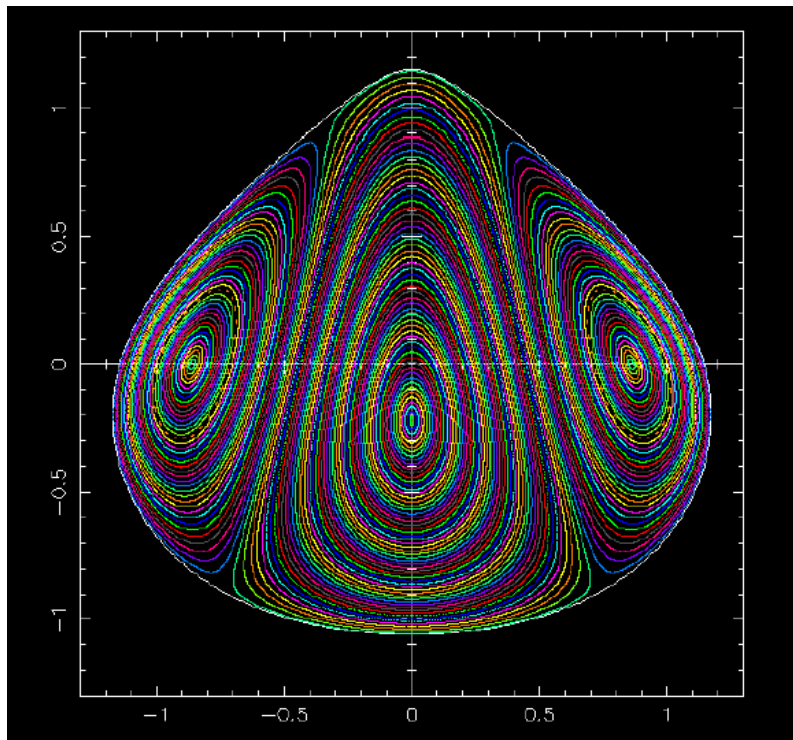


Figura 6: Retrat de fase d'una aplicació de Poincaré al voltant de L_2 .

2.2.4 Formulació Hamiltoniana

Introduint el moment lineal com $p_1 = \dot{x}_1 - x_2$, $p_2 = \dot{x}_2 + x_1$ i $p_3 = \dot{x}_3$, el 3RBP es pot escriure en forma hamiltoniana amb el següent Hamiltonià:

$$H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - x_1 p_2 + x_2 p_1 - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (2.137)$$

Les equacions diferencials són, llavors:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 + x_2 & , & \dot{p}_1 = p_2 - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x_1 - \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x_1 - \mu + 1) \\ \dot{x}_2 = p_2 - x_1 & , & \dot{p}_2 = -p_1 - \frac{1-\mu}{r_1^3}x_2 - \frac{\mu}{r_2^3}x_2 \\ \dot{x}_3 = p_3 & , & \dot{p}_3 = -\frac{1-\mu}{r_1^3}x_3 - \frac{\mu}{r_2^3}x_3 \end{cases} \quad (2.138)$$

Satisfent $\dot{x}_i = \frac{dH}{dp_i}$ i $\dot{p}_i = -\frac{dH}{dx_i}$. Ens acostumem a referir al valor del Hamiltonià com a l'energia, i està relacionat amb la constant de Jacobi, C_J , com:

$$C_J = -2H - \mu(1 - \mu) \quad (2.139)$$

Les equacions linealitzades al voltant de qualsevol punt d'equilibri es donen pels termes de segon ordre del Hamiltonià, doncs $H_1(x_i, p_i) = 0$ als punts d'equilibri. Per tant, les podem escriure com:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - x_1 p_2 + x_2 p_1 - c_2(x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2) + \frac{1}{2}p_3^2 + c_2 \frac{1}{2}x_3^2 \quad (2.140)$$

on c_2 és una constant positiva major que 1, que depèn del punt d'equilibri i del paràmetre μ com es mostra a la figura 7. Observant l'expressió per H_2 , és pot concloure que linealment, la direcció x_3 no està aparellada amb les direccions planars (els moviments en el pla $x_1 x_2$). L'equació en la direcció vertical que s'obté d' H_2 és:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \frac{dH_2}{dp_3} = p_3 \\ \dot{p}_3 = -\frac{dH_2}{dx_3} = -c_2 x_3 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x}_3 = -c_2 x_3 \quad (2.141)$$

i per tant, la dinàmica en la direcció vertical és un oscil·lador harmònic amb freqüència $w = \sqrt{c_2}$. El polinomi característic associat al moviment planar és

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (2 - c_2)\lambda^2 + (1 + c_2 - 2c_2^2) \quad (2.142)$$

Un cop determinat el valor de c_2 , es poden extreure les mateixes conclusions sobre la dinàmica que a la secció anterior.

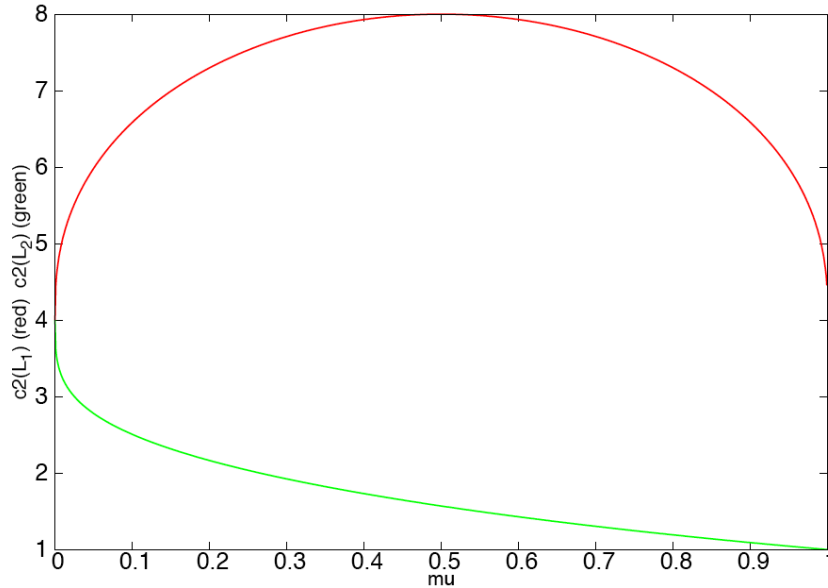


Figura 7: Valor de $c_2(\mu)$.

3 Transferències

En aquesta secció estudiarem alguns possibles mètodes de transferència orbital que es poden dur a terme en cada un dels models dinàmics estudiats a la secció anterior.

3.1 Transferències en model de Kepler

3.1.1 Transferències de Lambert

El problema de Lambert es planteja així: tenim dos instants de temps t_1, t_2 , així com dues posicions $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Volem trobar la solució $\hat{r}(t)$ que satisfà $\hat{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \hat{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$. Dit d'una altra manera, volem conèixer l'òrbita que connecta dos punts en l'espai amb un temps de vol fixat. Si som capaços de determinar aquesta òrbita, llavors amb dos impulsos adequats (un al principi i un al final), en forma de variació de velocitat, serem capaços de transferir un asteroide de la seva òrbita a una òrbita final desitjada. Una solució d'aquest problema va ser formulada per Gauss, dividida en dos passos.

El ràtio entre el sector i el triangle

Com veurem en el següent apartat, per determinar una òrbita a partir de dues posicions i un temps de vol donats, necessitem ser capaços de determinar el ràtio entre el sector i el triangle format per l'òrbita i els vectors de posició. Siguen \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 les posicions geocèntriques de l'asteroide als instants de temps t_1 i t_2 . El triangle Δ depèn dels vectors \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 , i dels angles ν_1 i ν_2 , on ν_1 i ν_2 són els angles de l'anomalia veritable en els temps precisats.

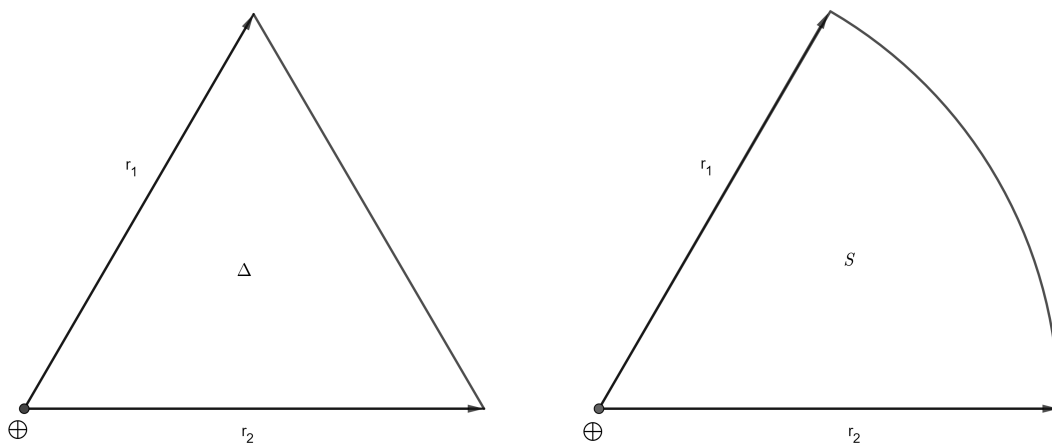


Figura 8: Les àrees Δ i S .

L'àrea Δ serà:

$$\Delta = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\nu_2 - \nu_1) \quad (3.1)$$

L'àrea del sector S , acotat pels vectors r_1 i r_2 i l'arc de l'òrbita entre ells, és proporcional a la diferència entre els temps t_1 i t_2 d'acord amb la segona llei *vis-viva* i (2.27):

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{GM_{\oplus}} \cdot \sqrt{a(1 - e^2)} \cdot (t_2 - t_1) \quad (3.2)$$

Substituint el semi-latus rectum $p = a(1 - e^2)$, obtenim la fórmula per al ràtio entre l'àrea del sector i la del triangle:

$$\eta = \frac{S}{\Delta} = \frac{\tau \sqrt{p}}{r_1 r_2 \sin(\nu_2 - \nu_1)} \quad (3.3)$$

on $\tau = \sqrt{GM_{\oplus}}(t_2 - t_1)$. Si es substitueix p per valors coneguts usant les equacions del problema de Kepler, s'obté un sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\eta^2(\eta - 1) = m \frac{2g - \sin(2g)}{\sin^3(g)} \quad (3.4)$$

$$\eta^2 = m \frac{1}{l + \sin^2(g/2)} \quad (3.5)$$

on les quantitats auxiliars m i l són:

$$m = \frac{\tau^2}{\sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}^3} \quad (3.6)$$

$$l = \frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}} - \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

Evitant entrar en la subtileza dels càlculs, (que es poden trobar a [8], pàg. 41), per a determinar η cal trobar l'arrel de l'equació:

$$f(x) = 1 - x + \frac{m}{x^2} W \left(\frac{m}{x^2} - l \right) \quad (3.8)$$

on la funció W és:

$$W(w) = \frac{4 \sin^{-1}(\sqrt{w}) - \sin(4 \sin^{-1}(\sqrt{w}))}{\sin^3(2 \sin^{-1}(\sqrt{w}))} \quad (3.9)$$

Una opció és implementar el mètode de la secant:

$$\eta_{i+1} = \eta_i - f(\eta_i) \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{f(\eta_i) - f(\eta_{i-1})} \quad (3.10)$$

amb condicions inicials

$$\begin{cases} \eta_0 = \frac{6}{11} + \frac{5}{11} \sqrt{1 + \frac{44}{9} \frac{m}{l + 5/6}} \\ \eta_1 = \eta_0 + 0.1 \\ \eta_2 = \eta_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Càlcul dels 6 elements orbitals a partir de dues posicions

Com hem vist anteriorment, l'òrbita d'un asteroide que passa pels punts \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 viu en el pla determinada per aquests dos punts i el centre de la Terra. Per a determinar la inclinació i d'aquest pla respecte el pla equatorial, així com l'ascensió recta del node ascendent Ω , definim dos vectors ortonormals que viuen al pla orbital, e_a i e_b , de la següent manera:

$$e_a = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} \quad (3.12)$$

$$e_b = \frac{\mathbf{r}_b}{r_b} \quad (3.13)$$

on $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 \cdot e_a)e_a$. El vector e_a està alineat amb r_1 , mentre que e_b n'és perpendicular. Si fem el producte vectorial entre e_a i e_b , obtenim el vector de Gauss $W = e_a \times e_b$, que és perpendicular al pla orbital. Així doncs, usant (2.66) ja tenim determinats i i Ω . Ara, l'angle de latitud u_1 es pot determinar usant:

$$u_1 = \arctan \left(\frac{z_1}{-x_1 W_y + y_1 W_x} \right) \quad (3.14)$$

Per a poder determinar els següents elements orbitals, necessitem del ràtio calculat a l'apartat anterior. De la fórmula (3.3) obtenim una expressió pel semi-latus rectum:

$$p = \left(\frac{2\Delta\eta}{\tau} \right)^2 \quad (3.15)$$

usant τ i $\Delta = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\nu_2 - \nu_1) = \frac{1}{2}r_1r_b$. Per a determinar la excentricitat de l'òrbita, usem l'equació de la secció cònica (2.24), obtenint:

$$e \cos(\nu_1) = \frac{p}{r_1} - 1 \quad (3.16)$$

$$e \cos(\nu_2) = \frac{p}{r_2} - 1 \quad (3.17)$$

Usant la propietat:

$$\begin{aligned} \cos(\nu_2) &= \cos(\nu_1) \cos(\nu_2 - \nu_1) - \sin(\nu_1) \sin(\nu_2 - \nu_1) \\ &= \cos(\nu_1) \left(\frac{\mathbf{r}_2 \cdot e_a}{r_2} \right) - \sin \left(\frac{\mathbf{r}_b}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

s'obtenen dues equacions:

$$e \cos(\nu_1) = \frac{p}{r_1} - 1 \quad (3.19)$$

$$e \sin(\nu_1) = \left(\left(\frac{p}{r_1} - 1 \right) \left(\frac{\mathbf{r}_2 \cdot e_a}{r_2} \right) - \left(\frac{p}{r_2} - 1 \right) \right) \frac{\mathbf{r}_b}{r_2} \quad (3.20)$$

que s'han de resoldre per obtenir la excentricitat i la anomalia veritable a temps t_1 . L'angle de perigeu ω és la diferència entre l'angle de latitud i l'anomalia veritable:

$$\omega = u_1 - \nu_1 \quad (3.21)$$

També podem obtenir el semieix gran a partir de l'excentricitat i el semi-latus rectum:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (3.22)$$

Finalment, el sisè element, l'anomalia mitjana M_1 s'obté mitjançant l'equació de Kepler:

$$M_1 = E_1 - e \sin(E_1) \quad (3.23)$$

on l'anomalia excèntrica E_1 és:

$$E_1 = \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(\nu_1)}{\cos(\nu_1) + e} \right) \quad (3.24)$$

L'increment de velocitat total que s'hauria d'aplicar per a dur a terme aquesta transferència la suma de les següents diferències entre:

1. La velocitat inicial a la posició r_1 i la velocitat en aquell punt de l'òrbita de transferència calculada.
2. La velocitat final inherent a l'òrbita calculada i la velocitat de l'òrbita final desitjada.

3.1.2 Transferències de Hohmann

Suposem que volem transferir un asteroide des d'una òrbita circular I a una segona òrbita F , també circular, que viu al mateix pla.

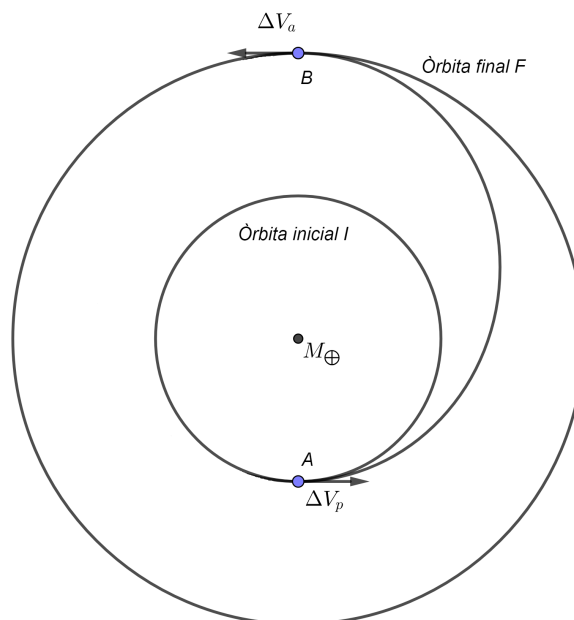


Figura 9: Transferència de Hohmann.

S'aplica un increment de velocitat amb direcció tangencial a l'òrbita al punt A . Aquest increment en la velocitat incrementa el nivell d'energia de l'òrbita, de manera

que s'obté l'el·lipse de transferència T . El punt A es converteix en el periapsis d'aquesta el·lipse de transferència. A continuació, s'aplica un segon impuls de velocitat a l'apoapsis B de l'el·lipse, en la direcció del moviment. L'energia de l'òrbita torna a augmentar i s'obté l'òrbita circular final F . Ens plantegem determinar quin cost energètic, en terme de la suma dels dos increments de velocitat, comporta dur a terme una transferència de Hohmann.

Considerem primer que el radi de la primera òrbita és $r_1 = a_1 = a$, i el radi de la segona òrbita és $r_2 = a_2 = a + \Delta a$. Ens preguntem quin increment de velocitat hem de donar per passar d'una òrbita a l'altra. Segon la llei *vis - viva*, les velocitats en les òrbites I i F són:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} \quad \text{i} \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_2}} \quad (3.25)$$

(recordem que en un cercle, $e = 0$). Ens mirem ara les velocitats en l'el·lipse de transferència T . Tenint en compte que l'el·lipse de transferència té un semieix gran $a_t = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, obtenim:

$$v_p = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus} r_2}{a_t r_1}} \quad (3.26)$$

i, anàlogament:

$$v_a = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus} r_1}{a_t r_2}} \quad (3.27)$$

En total, l'increment de velocitat que s'ha de donar serà:

$$\Delta v = \Delta v_P + \Delta v_A = (v_p - v_1) + (v_2 - v_a) \quad (3.28)$$

Volem observar aquest resultat assumint dues òrbites circulars amb radis poc distants ($\Delta a \ll a$). Considerem llavors v_1, v_2, v_p, v_a com a funcions de Δa , i ens mirem el seu comportament lineal. Per a fer-ho, fem el desenvolupament de Taylor de v_2, v_p, v_a , i els posem en funció de v_1 . Comencem amb v_2 .

$$v_2(\Delta a) = v_2(0) + v_2'(0)\Delta a + o(|\Delta a|^2)$$

Llavors:

$$v_2(\Delta a) = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a + \Delta a}} \Rightarrow v_2(0) = v_1$$

per altra banda,

$$\left. \begin{aligned} v_2'(\Delta a) &= \sqrt{GM_{\oplus}} \left(\left(\frac{1}{a + \Delta a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= -\sqrt{GM_{\oplus}} \frac{1}{2\sqrt{(a + \Delta a)^3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_2'(0) = -\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a}} = -\frac{1}{2a} v_1$$

Per tant,

$$v_2 \approx v_1 \left(1 - \frac{\Delta a}{2a} \right) \quad (3.29)$$

Podem procedir de mateixa manera amb v_p i v_a per acabar obtenint:

$$v_p \approx v_1 \left(1 + \frac{\Delta a}{4a}\right), \quad v_a \approx v_1 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Delta a}{a}\right) \quad (3.30)$$

Mitjançant (3.29) i (3.30), podem observar que, per maniobres amb poca elevació en òrbites circulars:

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 \approx \frac{1}{2} v \frac{\Delta a}{a} = v_1 - v_2 \quad (3.31)$$

és a dir, l'increment de velocitat que es requereix és igual a la diferència de les velocitats orbitals.

Però sobretot ens interessa conèixer el cost per una transferència entre dues òrbites que no siguin necessàriament properes. Es pot obtenir una forma adimensional de l'increment de velocitat dividint per la velocitat inicial anomenada *relació de Hohmann*:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{v_1} &= \frac{\Delta v_P}{v_1} + \frac{\Delta v_A}{v_1} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_t} \frac{r_2}{r_1}} - \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}}{\sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}} + \frac{\sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_2}} - \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_t} \frac{r_1}{r_2}}}{\sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}} \\ &= \left(2 \frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 \frac{r_1^2}{r_2(r_1 + r_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(2 \frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right) - 1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Definint la nova variable $R := \frac{a_2}{a_1}$ (que equival a $R = \frac{r_2}{r_1}$, ja que, recordem, l'excentricitat d'un cercle val 0), podem escriure la relació de Hohmann com:

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left(\frac{2R}{1+R}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (3.33)$$

L'equació anterior té un màxim que es pot calcular, derivant l'equació i igualant a 0:

$$\frac{d(\Delta v/v_1)}{dR} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{2R}{1+R}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{R-1}{R(1+R)^2} \left(\frac{2R}{1+R}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2R^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (3.34)$$

Després de simplificacions, i desenvolupant el polinomi, l'equació equival a:

$$R^3 - 15R^2 - 9R - 1 = 0 \quad (3.35)$$

que té una arrel real en $R_M := 15.58176$. Com que per tot valor $R > R_M$, l'increment de velocitat disminueix, la idea d'ascendir mitjançant una transferència de Hohmann a una òrbita molt alta ($a_t \gg a_2 = r_2$), i llavors retornar a l'òrbita final és factible. Considerem, doncs, el procés de transferir l'òrbita inicial per a un valor molt gran de a_t :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Delta v}{v_1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{2R}{1+R}\right)^{\frac{1}{2}} + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 \quad (3.36)$$

És a dir, l'impuls per a escapar a l'infinit ve donat per:

$$\Delta v_{\infty e} = (\sqrt{2} - 1)v_1 \quad (3.37)$$

i la velocitat per retornar de l'infinit a l'òrbita final:

$$\Delta v_{\infty r} = (\sqrt{2} - 1)v_2 \quad (3.38)$$

La relació de Hohmann corresponent per aquesta maniobra s'obté com:

$$\frac{\Delta v_{\infty}}{v_1} = \frac{\Delta v_{\infty e}}{v_1} + \frac{\Delta v_{\infty r}}{v_1} = (\sqrt{2} - 1) \left(1 + \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (3.39)$$

Representant gràficament aquest polinomi, es pot observar que les gràfiques de Δv i de Δv_{∞} intersequen. Per a buscar el punt d'intersecció, igualem les expressions (3.33) i (3.39):

$$\left(1 - \frac{1}{R} \right) \left(\frac{2R}{1+R} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = (\sqrt{2} - 1) \left(1 + \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \quad (3.40)$$

que, després de simplificar, es redueix a:

$$R^3 - (7 + 4\sqrt{2})R^2 + (3 + 4\sqrt{2})R - 1 = 0 \quad (3.41)$$

amb arrel real $R_i := 11.93876$.

Les conclusions que traiem d'aquests càlculs són clares: per $0 < R \leq R_i$ una transferència de Hohmann estàndard és la millor opció; per $R_i < R \leq R_M$, una transferència de Hohmann a un punt molt llunyà i llavors tornar, és factible. Es pot veure l'anàlisi complet, que inclou el cas $R_M < R$, a [9].

Cal tenir en compte que ens hem restringit al cas entre òrbites coplanàries. L'estudi de transferències orbitals entre òrbites no coplanàries augmenta en complexitat, i es pot veure [9] per a observar la metodologia a seguir en aquests casos.

3.2 Transferències en model restringit de tres cossos

3.2.1 Inserció en varietats invariants estables de punts de libració

Ens plantegem el problema de transferir un cos proper a la Terra a una òrbita periòdica al voltant de L_1 o L_2 del sistema Sol-Terra. Degut a la hiperbolicitat d'aquestes òrbites, sabem que tenim direccions que tendeixen asimptòticament cap a ella. Volem usar aquestes varietats invariants estables per a arribar a l'òrbita periòdica amb una sola maniobra (en el marc teòric del problema de tres cossos).

Per a fer un estudi de les solucions periòdiques al voltant d'un punt d'equilibri colineal, com ara L_1 , és útil introduir un sistema de referència normalitzat amb l'origen al punt de libració. L'eix x pren la direcció de m_1 a m_2 , l'eix z orientat com la velocitat angular del segon cos al voltant del primer, i l'eix y de manera que completi un sistema de coordenades orientat positivament. Es pot observar [2] per trobar explicacions detallades sobre el càlcul d'òrbites periòdiques.

Aproximació local de la varietat estable

Sigui Φ el flux d'una òrbita periòdica amb període T . La matriu de monodromia és la matriu $D\Phi(T)$, la matriu variacional avaluada en el període de l'òrbita. D'acord a la teoria de Floquet, els vectors propis de la matriu de monodromia donen les direccions dels espais tangents a les varietats invariants de l'òrbita periòdica sobre la qual es treballa. Aquests espais tangents ens aproximem suficientment bé, de manera local, les direccions de les varietats invariants. Recordem que la varietat invariant *estable* d'una òrbita periòdica és el conjunt de tots els punts que tendeixen asimptòticament a l'òrbita quan el temps tendeix a infinit.

En aquest sistema de referència, el vector propi associat al valor propi més petit (en valor absolut) de la matriu de monodromia (dues passades consecutives a través del pla $y = 0$) és el que aproxima la direcció estable quan l'òrbita creua el pla $y = 0$. La matriu de monodromia $\hat{A} := D\Phi(T)$ és una matriu 7×7 degut a que el temps s'afegeix a les equacions del moviment per a obtenir un sistema autònom, seguint la metodologia de [2]. A serà la matriu 6×6 de posicions i velocitats associada a \hat{A} . És trivial observar que si v és un vector propi de A amb valor propi λ , llavors $(0, v)$ és un vector propi de \hat{A} de valor propi λ .

Un cop un té la matriu de monodromia A ben definida, es pot calcular el vector propi v de A que dona la varietat estable mitjançant el mètode de la potència aplicat a A^{-1} . Quan tenim la direcció de la varietat estable al principi de la revolució, podem obtenir la direcció estable a qualsevol punt intermedi de la revolució transportant el vector de la següent manera:

$$v(t) = D\Phi(t)v \tag{3.42}$$

Globalització de la varietat

Amb la direcció estable determinada, el següent pas és globalitzar la varietat. La idea és situar-nos molt a prop d'un punt de l'òrbita periòdica, en termes de la direcció estable calculada a la secció anterior, i integrar el sistema dinàmic. Sigui D un desplaçament, X_{po} un punt de l'òrbita periòdica, i V_{ws} la direcció estable al punt X_{po} . Definim el punt:

$$X_{ws}^0 = X_{po} + DV_{ws} \tag{3.43}$$

Cal tenir en compte que la magnitud D no pot ser massa petita en valor absolut, per a prevenir errors i temps molts llargs en el procés de globalitzar la varietat. Per altra banda, tampoc pot ser massa gran ja que la aproximació lineal del vector de la direcció estable només és vàlida a prop de X_{po} . Un rang adequat per a D és entre 200 i 250 km. Això vol dir que es considera que "s'ha arribat" a l'òrbita periòdica quan l'asteroide està a 200 km de distància. Quan X_{ws}^0 s'ha calculat, l'únic que cal fer és integrar el sistema dinàmic per a aquesta condició inicial enrere en el temps.

Finalment, caldria fer un estudi de minimització per a saber quines són les òrbites que passen més a prop de la Terra, amb la intenció d'inserir-se en aquesta varietat amb l'impuls més petit possible.

4 Optimització

Amb problemes d'optimització de dimensió molt gran, s'han d'implementar els anomenats Algoritmes Genètics, desenvolupats per John Holland al 1970. Aquests algoritmes són mètodes de cerca que mimetitzen l'evolució natural, i operen sobre una població de possibles solucions aplicant el principi de supervivència per generar estimacions millorades de la solució. A cada generació es crea un nou conjunt d'aproximacions, en un procés de combinació i selecció inspirat en la natura. Tot aquest procés porta a poblacions més bones que les anteriors. En presentarem un, que s'usarà per a construir òrbites de transferència. El *Teorema d'esquemes* ens assegura la convergència d'aquest tipus d'algoritme.

4.1 Algoritme genètic

Definició 4.1. *Anomenarem cromosoma a una estructura de dades binària x_i^t que representa una solució potencial. Cada solució potencial x_i^t s'avalua per donar valor al seu rendiment (fitness).*

Definició 4.2. *Un programa evolutiu és un algoritme iteratiu probabilístic que manté una població d'individus $P(t) = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$ a cada iteració $t \rightarrow t + 1$. Una nova població $P(t + 1) = (x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, \dots, x_n^{t+1})$ es forma a cada iteració, seleccionant els individus més adients en el pas de selecció.*

Certs membres de la població pateixen transformacions degudes a "operadors genètics", que formen noves solucions. Considerem dos tipus d'operadors genètics: transformacions de *mutació*, que creen nous individus fent un petits canvis en un sol individu; i transformacions d'*encreuament*, que creen nous individus a base de combinar parts de dos individus.

Funcionament de l'algoritme

Suposem que volem maximitzar una funció de k variables $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Suposem que cada variable x_i pot prendre valors en un domini $D_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, i que $f(x_1, \dots, x_k) > 0, \forall x_i \in D_i$ (si la f original pren valors negatius, només hem de sumar una constant positiva adient). Volem optimitzar la funció f amb certa precisió: suposem que demanem p_i decimals correctes en els valors de totes les variables. Per a assolir tal precisió, es necessari que cada domini D_i estigui dividit en $(b_i - a_i) \cdot 10^{p_i}$ possibles valors equidistants. Denotem per m_i l'enter més petit de manera que $(b_i - a_i) \cdot 10^{p_i} \leq 2^{m_i} - 1$. Llavors, la representació de cada variable x_i codificada com una tira binària de llargada m_i satisfà clarament la precisió requerida. La següent fórmula dóna la transformació de binari a decimal:

$$x_i = a_i + \frac{b_i - a_i}{2^{m_i} - 1} y_i \quad (4.1)$$

on $y_i \in [0, 2^{m_i} - 1]$ és la representació en base de 10 de la cadena binària corresponent. Les cadenes $(0, 0, \dots, 0)_2$ i $(1, 1, \dots, 1)_2$ corresponen, doncs, a a_i i b_i , respectivament.

Llavors, cada cromosoma (com a potencial solució), es representa per una cadena binària de llargada:

$$m = \sum_{i=1}^k m_i$$

on els primers m_1 bits corresponen al rang $[a_1, b_1]$, el següent grup de m_2 bits corresponen al rang $[a_2, b_2]$, i així successivament.

Població Inicial

Per inicialitzar una població, es pot generar un conjunt de cromosomes aleatòriament. Si coneixem informació sobre potencial solució òptima, podem adequar la població inicial a aquesta informació.

Procés de selecció

Hi ha molts mètodes per a la selecció dels individus que formaran part de la següent població. Un d'ells és la *ruleta amb espais*. Es construeix com es descriu a continuació:

(i) Calcular el valor fitness $\text{eval}(c_i)$ associat cada cromosoma c_i , $i = 1, \dots, N$, on N és la mida de la població.

(ii) Calcular el valor fitness total:

$$F = \sum_{i=1}^N \text{eval}(c_i) \quad (4.2)$$

(iii) Calcular la probabilitat de selecció p_i de cada cromosoma c_i :

$$p_i = \frac{\text{eval}(c_i)}{F} \quad (4.3)$$

(iv) Calcular la probabilitat acumulada de selecció q_i per a cada cromosoma c_i :

$$q_i = \sum_{j=1}^i p_j \quad (4.4)$$

El procés de selecció de la ruleta, es basa en girar la ruleta N vegades. A cada gir, escollim un nou cromosoma de la següent manera:

(i) Generar un nombre aleatori $r \in [0, 1]$

(ii) Si $r < q_1$, es selecciona el cromosoma c_1 .

(iii) En altre cas, seleccionar el i -èssim cromosoma c_i tal que $q_{i-1} < r \leq q_i$

És clar que és probable que un cromosoma sigui seleccionat més d'un cop. Aquest fet va acord amb el Teorema Fonamental dels Algoritmes Genètics: els millors cromosomes tenen més còpies, els normals es mantenen, i els pitjors moren. Quan el procés de selecció finalitza, estem preparats per aplicar les transformacions de mutació i encreuament als individus de la nova població.

Operador d'encreuament

La probabilitat d'encreuament p_c , és un dels paràmetres claus en un algoritme genètic. Aquesta probabilitat aproxima el nombre de cromosomes que patiran una transformació d'encreuament. El valor p_c s'escull prou gran, $p_c \in [0.2, 0.8]$. El procés funciona així:

- (i) Per a cada cromosoma de la població:
 - (a) Generar un nombre aleatori $r \in [0, 1]$.
 - (b) Si $r < p_c$, seleccionar el cromosoma per a un encreuament.
- (ii) Seguidament, aparellar els cromosomes seleccionats de manera arbitrària:
 - (a) Per a cada parella de cromosomes, generar un enter aleatori $pos \in [0, \dots, m-1]$. El valor pos indicar la posició on es durà a terme l'encreuament.
 - (b) Fer l'intercanvi de tots els bits a partir de la posició $pos + 1$.

$$\begin{aligned} (c_1^1, c_2^1, \dots, c_{pos}^1, c_{pos+1}^1, \dots, c_m^1) &\Rightarrow (c_1^1, c_2^1, \dots, c_{pos}^1, c_{pos+1}^2, \dots, c_m^2) \\ (c_1^2, c_2^2, \dots, c_{pos}^2, c_{pos+1}^2, \dots, c_m^2) &\Rightarrow (c_1^2, c_2^2, \dots, c_{pos}^2, c_{pos+1}^1, \dots, c_m^1) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Operador de mutació

L'operador de mutació actua sobre cada bit de cada cromosoma de la població. La probabilitat de mutació p_m aproxima el nombre de bits que patiran una mutació. S'acostuma a seleccionar un p_m molt petit, $p_m \in (0, 0.001]$. Si un bit pateix una mutació, aquest canviarà de 0 a 1, o viceversa. L'operador funciona de la següent manera:

- (i) Per a cada bit de cada cromosoma de la població, generar un nombre aleatori $r \in [0, 1]$.
- (ii) Si $r < p_m$, mutar el bit.

D'aquesta manera, hem construït una nova població, preparada per a la seva avaluació.

Condicions d'aturada

Algunes condicions de parada raonables poden ser:

1. Nombre màxim de generacions.
2. Limitar el temps de l'algoritme.
3. L'algoritme pararà si durant un cert nombre de generacions, el fitness total no ha variat.

5 Captura d'asteroides

En aquesta secció comentarem el procés de captura d'un asteroide. Es pot intentar capturar l'asteroide en un punt L_i , $i = 1, 2$, o bé en una òrbita periòdica al voltant d'un d'ells. Els mètodes que es proposen agafen com a referència [6],[3].

5.1 Selecció d'asteroides en la base de dades

El primer interès recau en establir un criteri que serveixi per a fer una selecció dels possibles asteroides sobre els quals és factible plantejar-se una transferència orbital. Dues limitacions són clares: la capacitat de maniobra, a nivell energètic i d'enginyeria; i a nivell de seguretat, doncs un error de càlcul en un asteroide massa gran podria acabar amb un incident catastròfic per a la Terra. Es parteix d'una base de dades concreta en la qual s'especifiquen els elements orbitals i la magnitud estel·lar d'un gran nombre d'asteroides coneguts en una certa data, com es veu en la figura 10.

Orbital elements and stellar magnitude of NEAs selected (5th September 2012).

Name	H	a (AU)	e	i (deg)	Ω (deg)	ω (deg)	M (deg)	n (deg/day)
1991 VG	28.39	1.03	0.0491	1.45	73.98	24.51	340.17	0.95
2000 LG6	29.02	0.92	0.1109	2.83	72.55	8.19	185.75	1.12
2003 SW130	29.12	0.88	0.3043	3.67	176.45	47.80	49.55	1.19

Figura 10: Mostra d'una base de dades de classificació d'asteroides.

Els primers filtres que s'apliquen a l'estudi del *paper* referència són els següents: es consideren asteroides amb semieix gran $a \in [0.85 \text{ UA}, 1.15 \text{ UA}]$, i magnitud estel·lar $H > 28$. Un cop dut a terme aquest filtre, també es considera que asteroides amb excentricitat molt gran ($e > 0.8$) s'han de descartar, doncs una excentricitat alta implica una gran velocitat relativa i en conseqüència maniobres de captura més costoses.

5.2 Construcció de l'òrbita de transferència

A continuació proposarem possibles maneres de construir una òrbita de transferència entre l'òrbita de l'asteroide, i l'òrbita objectiu. Aquesta òrbita objectiu pot ser un punt fix o bé d'una òrbita periòdica al voltant d'ell. Usarem tècniques que hem estudiat a la secció 3 combinant conceptes dels dos models dinàmics estudiats.

5.2.1 Construcció de Sims i Flanagan

Volem trobar una trajectòria de transferència entre l'òrbita de l'asteroide, i L_2 o L_1 , o bé una òrbita periòdica al seu voltant. Per a generar aquesta trajectòria, executem un algoritme basat en el model d'aproximació per impulsos introduït per Sims i Flanagan [7]. En aquest model, es considera un problema de Kepler, i l'objectiu és dur a terme un seguit d'impulsos (increments de velocitat) a la trajectòria inicial de l'asteroide I , per arribar a la trajectòria final F . Dividim la trajectòria en *trossos*,

que comencen i acaben en *nodes de control*, com es pot veure a la figura 11. En el nostre cas, considerem dos únics nodes de control, situats en la trajectòria inicial de l'asteroide, i en la trajectòria final, de manera que treballarem amb un únic tros. Ha de quedar clar que aquests nodes de control no estan fixats, i seran una variable a determinar que dependran de t_l , el temps inicial en el que produïm el primer impuls, i TDV , el temps de vol total. Entre els dos nodes de control hi ha un *punt d'enllaç* (que normalment es situa al mig del tros). Així doncs, farem una propagació endavant per arcs Keplerians entre el node control inicial i el punt d'enllaç, i una propagació enrere des del node de control final, fins al punt d'enllaç. L'objectiu serà que aquestes dues trajectòries enganxin, minimitzant a més la quantitat d'impuls donat total.

Subdividim el tros en *segments* S_i , donant un impuls ΔV_i al centre de cada segment. Ens mirarem els impulsos ΔV_i en coordenades polars, de manera que un impuls ΔV_i vindrà determinat per la terna k_i, α_i, β_i :

$$\Delta V_i = k_i \Delta V_{max} [\cos(\beta_i) \cos(\alpha_i), \cos(\beta_i) \sin(\alpha_i), \sin(\beta_i)]^T \quad (5.1)$$

on $k_i \in [0, 1]$ ens determina la quantitat d'impuls que donem, i α_i i β_i ens orienten l'impuls en el pla de transferència. En aquests models de propulsió, la magnitud de l'impuls que es pot proporcionar està limitada per la quantitat d' ΔV que es pot acumular durant d'aquest segment:

$$\Delta V_{max} = a \Delta t \quad (5.2)$$

on a és la màxima acceleració que pot oferir el sistema de propulsió i Δt és l'interval de temps d'un segment. En aquesta primera construcció es considera que la massa de la nau no varia. Denotarem per el nombre d'impulsos, així com pel nombre de segments, per N ; i considerarem, com en la referència, dos blocs de 31 impulsos.

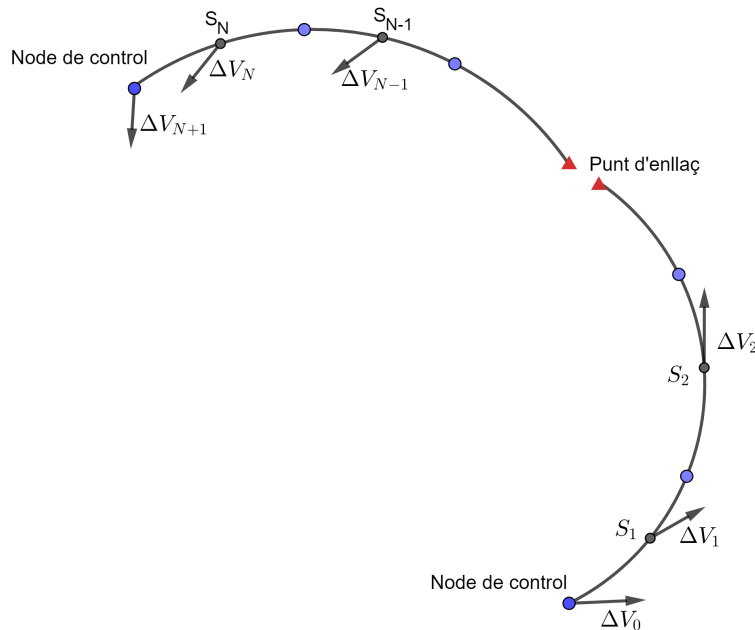


Figura 11: Estructura d'un tros.

Sigui t_l el temps de sortida, TDV el temps de vol total, i considerem un conjunt de 62 impulsos ΔV_i , $i = 0, 1, 2, \dots, 30, 31, \dots, 61$. Usarem com a referències en els dos blocs d'impulsos $j = 30$, i $j + k = 60$. La trajectòria endavant es genera usant el següent procediment:

- (1) Determinar l'estat inicial de l'asteroide usant el temps de sortida t_l , i els seus elements orbitals (vist, secció 2.1.5).
- (2) Usar l'estat inicial de l'asteroide, i una sèrie d'impulsos ΔV_i , $i = 0, 1, \dots, j$, per a dur a terme una propagació Kepleriana endavant, fins al punt d'enllaç.

En un primer pas, considerem Φ_0 la corba que ens dóna la trajectòria del primer segment:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_{\oplus} + m)}{\mathbf{r}^3} \mathbf{r}, \begin{cases} r(t_l) = r_I(t_l) \\ \dot{r}(t_l) = v_I(t_l) + \Delta V_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

on $r_I(t_l)$, $v_I(t_l)$, m són valors coneguts, i ΔV_0 és la primera variable (és el primer impuls, que ens desvia de la trajectòria inicial). Si sabem el valor de ΔV_0 , aquest problema té solució com hem vist a la secció 2. Podem saber, doncs, el valor de

$$\Phi_0(t_l + \Delta t/2; r_I(t_l), v_I(t_l) + \Delta V_0)|_{\mathbf{r}} \text{ i } \Phi_0(t_l + \Delta t/2; r_I(t_l), v_I(t_l) + \Delta V_0)|_v$$

on $\Delta t = (t_l + TDV)/60$. Per simplificar la notació, escriurem:

$$\Phi_i(t)|_{\mathbf{r}} := \Phi_i(t; r, v)|_{\mathbf{r}}$$

$$\Phi_i(t)|_v := \Phi_i(t; r, v)|_v$$

entenenent que el flux satisfà les condicions inicials del problema. Donant un valor a ΔV_1 podem determinar la corba Φ_1 , solució de

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_{\oplus} + m)}{\mathbf{r}^3} \mathbf{r}, \begin{cases} r(t_l + \Delta t/2) = \Phi_0(t_l + \Delta t/2)|_{\mathbf{r}} \\ \dot{r}(t_l + \Delta t/2) = \Phi_0(t_l + \Delta t/2)|_v + \Delta V_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

i conèixer a continuació els valors:

$$\Phi_1(t_l + 3\Delta t/2)|_{\mathbf{r}} \text{ i } \Phi_1(t_l + 3\Delta t/2)|_v$$

D'aquesta manera podem anar construint una corba, contínua en posicions, assignant valors als impulsos ΔV_i . Φ_i serà la corba solució de l'equació:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_{\oplus} + m)}{\mathbf{r}^3} \mathbf{r}, \begin{cases} r(t_l + (2i - 1)\Delta t/2) = \Phi_{i-1}(t_l + (2i - 1)\Delta t/2)|_{\mathbf{r}} \\ \dot{r}(t_l + (2i - 1)\Delta t/2) = \Phi_{i-1}(t_l + (2i - 1)\Delta t/2)|_v + \Delta V_i \end{cases} \quad (5.5)$$

i això ho farem fins la posició j . La corba Φ_j ens permetrà obtenir els valors de posició i velocitat:

$$\Phi_j(t_l + (2j + 1)\Delta t/2)|_{\mathbf{r}} \text{ i } \dot{\Phi}_j(t_l + (2j + 1)\Delta t/2)|_v$$

que corresponen als valors de posició i velocitat al *punt d'enllaç*.

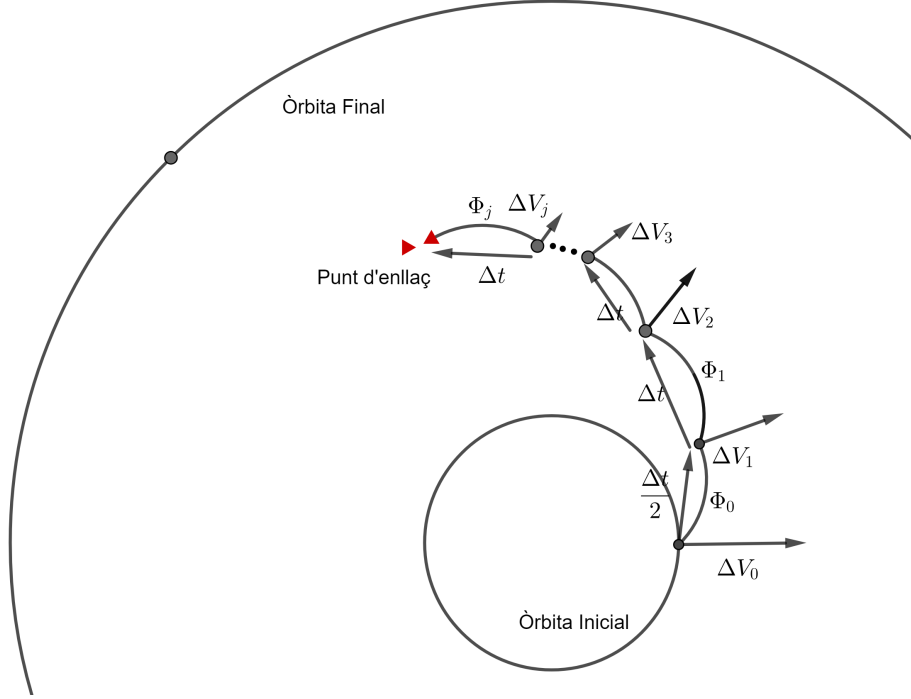


Figura 12: Propagació endavant.

La trajectòria enrere es calcula usant un procediment anàleg.

- (3) Determinar l'estat del punt L_2 o de l'òrbita periòdica en el temps $t_l + TDV$ usant la efemèrides JPL. Es pot trobar el canvi de coordenades $\vec{e} = kC\vec{a} + \vec{b}$ entre les coordenades R3BP i les coordenades al JPL (veure [1], p.138).
- (4) Usar la posició del punt L_2 i la sèrie d'impulsos ΔV_i , $i = j + 1, \dots, j + k + 1$, per dur a terme una propagació Kepleriana enrere.

En un primer pas, considerem Φ_{j+1} solució de:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_{\oplus} + m)}{\mathbf{r}^3}\mathbf{r}, \quad \begin{cases} r(t_l + TDV) = r_F(t_l + TDV) \\ \dot{r}(t_l + TDV) = v_F(t_l + TDV) - \Delta V_{j+1} \end{cases} \quad (5.6)$$

on $r_F(t_l + TDV)$, $v_F(t_l + TDV)$ són l'estat de l'òrbita final, i ΔV_{j+1} l'impuls que ens ha de fer entrar-hi. Si sabem el valor de ΔV_{j+1} , aquest problema té solució com hem vist anteriorment. Podem saber, doncs, el valor de:

$$\Phi_{j+1}(t_l + TDV - \Delta t/2)_{|\mathbf{r}} \text{ i } \Phi_{j+1}(t_l + TDV - \Delta t/2)_{|v}$$

Donant valor a ΔV_{j+2} , podem calcular Φ_{j+2} , la solució del problema de Kepler amb condicions inicials:

$$\begin{cases} r(t_l + TDV - \Delta t/2) = \Phi_{j+1}(t_l + TDV - \Delta t/2)_{|\mathbf{r}} \\ \dot{r}(t_l + TDV - \Delta t/2) = \dot{\Phi}_{j+1}(t_l + TDV - \Delta t/2)_{|v} + \Delta V_{j+2} \end{cases} \quad (5.7)$$

A continuació, podem determinar els valors:

$$\Phi_{j+2}(t_l + TDV - 3\Delta t/2)|_r \text{ i } \Phi_{j+2}(t_l + TDV - 3\Delta t/2)|_v$$

D'aquesta manera podem anar construint una corba com s'ha vist en la propagació endavant, assignant valors als impulsos ΔV_{j+i} . Φ_{j+i} serà la solució del problema de Kepler amb condicions inicials

$$\begin{cases} r(t_l + TDV - (2i - 1)\Delta t/2) = \Phi_{j+i-1}(t_l + TDV - (2i - 1)\Delta t/2)|_r \\ \dot{r}(t_l + TDV - (2i - 1)\Delta t/2) = \Phi_{j+i-1}(t_l + TDV - (2i - 1)\Delta t/2)|_v + \Delta V_{j+i} \end{cases} \quad (5.8)$$

i això ho farem fins la posició $j + k + 1$. La corba Φ_{j+k+1} ens permetrà obtenir els valors de posició i velocitat:

$\Phi_{j+k+1}(t_l + TDV - (2(k + 1) - 1)\Delta t/2)|_r$ i $\Phi_{j+k+1}(t_l + TDV - (2(k + 1) - 1)\Delta t/2)|_v$ que corresponen als valors de posició i velocitat al *punt d'enllaç*, amb la propagació cap enrere.

Recordem que les maniobres d'impuls ΔV_i , $i = 0, 1, \dots, j + k + 1$ venen determinades per paràmetres α_i, β_i i k_i , que ens donen la direcció i la magnitud de l'impuls:

$$\Delta V_i = \Delta V_{max} k_i (\cos \beta_i \cos \alpha_i, \cos \beta_i \sin \alpha_i, \sin \beta_i) \quad (5.9)$$

on $\alpha_i \in [0, 2\pi)$, $\beta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $k_i \in [0, 1]$. Observem que la trajectòria propagada endavant i la propagada enrere cap al punt d'enllaç, no tenen perquè coincidir. Definim:

$$R_{err} = \|\Phi_j(t_l + (2j + 1)\Delta t/2)|_r - \Phi_{j+k+1}(t_l + TDV - (2k + 1)\Delta t/2)|_r\|_2 \quad (5.10)$$

$$V_{err} = \|\Phi_j(t_l + (2j + 1)\Delta t/2)|_v - \Phi_{j+k+1}(t_l + TDV - (2k + 1)\Delta t/2)|_v\|_2 \quad (5.11)$$

l'error de posició i de velocitat al punt d'enllaç, respectivament. Volem trobar la trajectòria que minimitzi l'error en posició, en velocitat, i que minimitzi la quantitat de fuel usat. Per a fer-ho, hem de resoldre un problema d'optimització paramètric, amb el conjunt de paràmetres $z = [t_L, TDV, k_i, \alpha_i, \beta_i]$, $i = 0, \dots, 61$. La funció objectiu a minimitzar és:

$$J(z) = \sum_{i=0}^{61} k_i + \lambda_r R_{err} + \lambda_v V_{err} \quad (5.12)$$

on λ_r, λ_v és un pes que s'assigna a l'error en posició i a l'error en la velocitat, respectivament; i considerarem $\lambda_r = \lambda_v = 10^5$. Els pesos afecten a la factibilitat i optimalitat de les trajectòries que trobem. R_{err} i V_{err} s'expressen en unitats canòniques, en AU i VU, respectivament. Per a obtenir aquesta primera solució òptima, enfoquem el problema mitjançant l'algorisme genètic proposat a la secció 4.1. Situats en el nostre problema d'optimització; primer hem d'acotar els possibles valors dels paràmetres $k_i, \alpha_i, \beta_i, t_l, TDV$. Ja hem vist anteriorment les acotacions de k_i, α_i, β_i ; en el *paper* es proposen, per a t_l i TDV , els rangs següents:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_i \in [0, 1] \\ \alpha_i \in [0, 2\pi) \\ \beta_i \in [-\pi/2, \pi/2] \\ t_l \in [2456000.5, 2460000.5] \text{ dades JD.} \\ TDV \in [100, 1800] \text{ dies.} \end{array} \right.$$

Suposem que exigim $p_{k_i}, p_{\alpha_i}, p_{\beta_i}, p_{t_l}, p_{TDV}$ decimals correctes per a $k_i, \alpha_i, \beta_i, t_l$ i TDV , respectivament, Siguin ara $m_{k_i}, m_{\alpha_i}, m_{\beta_i}, m_{t_l}, m_{TDV}, i = 0, \dots, 61$, els enters tals que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{p_{k_i}} \leq 2^{m_{k_i}} - 1 \\ 2\pi 10^{p_{\alpha_i}} \leq 2^{m_{\alpha_i}} - 1 \\ \pi 10^{p_{\beta_i}} \leq 2^{m_{\beta_i}} - 1 \\ 4000 \cdot 10^{p_{t_l}} \leq 2^{m_{t_l}} - 1 \\ 1700 \cdot 10^{p_{TDV}} \leq 2^{m_{TDV}} - 1 \end{array} \right.$$

Llavors els nostres cromosomes tindran una llargada total de:

$$m = \sum_{i=0}^{61} (m_{k_i} + m_{\alpha_i} + m_{\beta_i}) + m_{t_l} + m_{TDV}$$

i la nostra funció a optimitzar serà:

$$\hat{J}(z) = 1/J(z) \quad (5.13)$$

Aplicant l'algoritme genètic es pot trobar una primera trajectòria de referència. Pel que observem dels resultats obtinguts al *paper*, l'algoritme sovint obté una solució on la R_{err} i V_{err} són bastant grans. De fet, l'error en la velocitat pot ser més gran que ΔV_{max} , i això significa que la trajectòria obtinguda no és factible. L'error en el punt d'enllaç podria disminuir augmentant el nombre màxim d'iteracions i la mida de la població de l'algoritme genètic, però el treball computacional també augmentaria.

5.2.2 Construcció d'un arc de Lambert a una varietat estable

Com ja hem comentat en seccions anteriors, el comportament lineal al voltant dels punts L_1 i L_2 és del tipus *centre* \times *centre* \times *sella*. Aquest tipus de comportament ens assegura que per a qualsevol òrbita periòdica al voltant d'aquests punts, existeixen trajectòries que s'hi apropen asimptòticament.

La proposta és inserir l'asteroide en una varietat invariant estable d'una òrbita periòdica; com pot ser una òrbita planar de Lyapunov, vertical de Lyapunov o halo. Per a fer-ho, haurem de combinar els dos models dinàmics estudiats a la secció 2. Per una banda, cal considerar el model circular restringit de 3 cossos per a determinar els punts de libració L_1 o L_2 . Cal determinar la varietat invariant estable d'una òrbita periòdica al voltant d'un d'aquests punts. Aquest procediment s'ha vist a la secció 3.2. Un cop determinada l'òrbita, es considera l'òrbita de l'asteroide com Kepleriana (en un model de Kepler heliocèntric), i ens plantegem dur a terme una transferència de Lambert a la varietat invariant estable calculada.

Les trajectòries de les varietats invariants estables es poden determinar pertorbant les solucions periòdiques al voltant del punt L_1 en la direcció del vector propi estable, com s'ha vist a la secció 3.2. Les condicions inicials es propaguen enrere en el temps fins que arriben a una determinada secció del marc giratori Sol-Terra. Aquesta secció s'escull de manera arbitrària. Anomenem a aquest temps de propagació enrere com el *temps de transferència de la varietat* (TTV).

La transferència entre l'òrbita de l'asteroide i la de la varietat es determina com un arc de Lambert del model de Kepler heliocèntric, amb dues variacions de velocitat: una al principi (ΔV_1), per desviar l'asteroide, i un al final (ΔV_2), per inserir-se en la varietat. En aquest cas, volem maximitzar la funció:

$$J(z) = \frac{1}{\Delta V_1 + \Delta V_2} \quad (5.14)$$

tenint en compte que tenim 5 paràmetres que ens determinen aquests dos increments: el temps de vol de l'arc de Lambert, el TTV, l'instant d'inserció a l'òrbita periòdica objectiu, l'energia de l'òrbita periòdica objectiu, i un cinquè paràmetre que determina el punt de l'òrbita periòdica objectiu en el qual s'insereix l'asteroide.

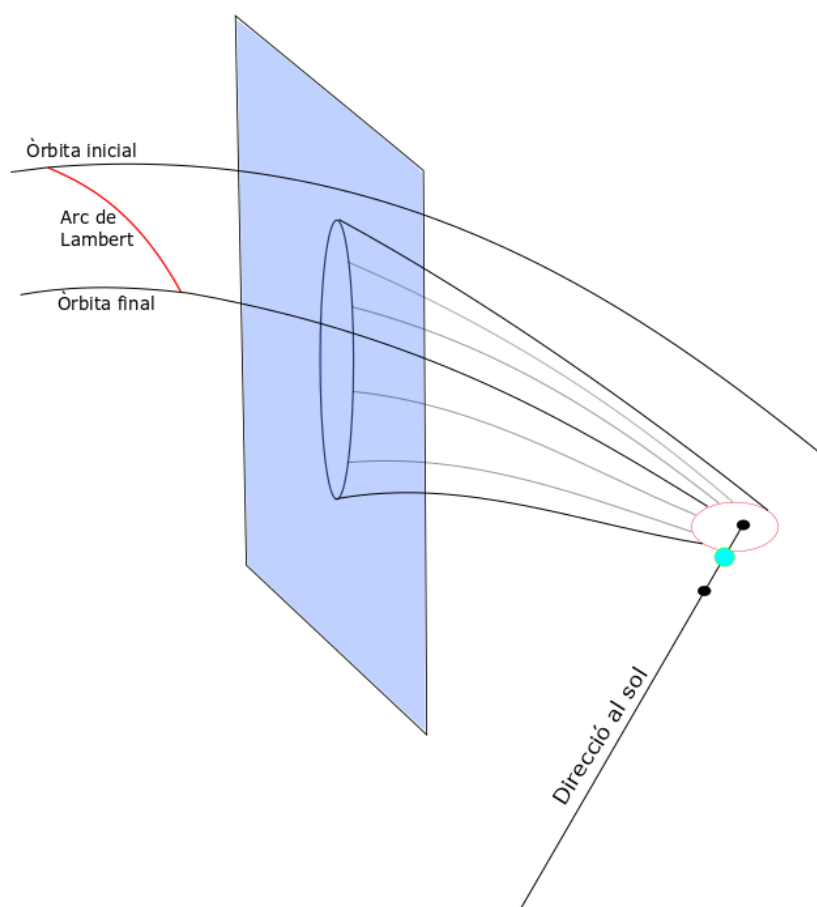


Figura 13: Arc de Lambert a la varietat estable.

5.3 Refinament de l'òrbita

L'objectiu d'aquesta secció és millorar la trajectòria calculada en el model de forces simplificat (els models de dos o tres cossos), i aconseguir una trajectòria (que no diferirà molt de la trajectòria original) vàlida en el model del Sistema Solar. El model del Sistema Solar és un model matemàtic més complex que usa les masses, posicions i velocitats dels planetes del Sistema Solar i les adopta en el sistema de forces. És un model més complex, però també més realista. En conseqüència, aproxima millor

el moviment d'un cos al Sistema Solar.

El mètode presentat a continuació està basat en una tècnica de tir múltiple, o tir paral·lel, combinada amb la minimització d'una funció objectiu. Aquesta funció objectiu preveu la correcció de possibles discontinuïtats en velocitats que puguin existir al llarg de la solució. Tot i que la funció objectiu està minimitzada, cal remarcar que l'objectiu no és trobar una solució òptima, sinó solucions que preservin les propietats de la trajectòria inicial, tant com sigui possible.

Partim d'una trajectòria calculada en el model de dos o tres cossos, discretitzada en N estats durant la trajectòria en N instants diferents. D'aquesta manera, podem definir N nodes del tipus:

$$(t_i, X_i) = (t_i, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i + \Delta V_{i_x}, \dot{y}_i + \Delta V_{i_y}, \dot{z}_i + \Delta V_{i_z}), i = 1, \dots, N \quad (5.15)$$

i en conseqüència, $N - 1$ segments, que representen la trajectòria inicial del problema. Fent l'analogia a la construcció de Sims i Flanagan de la secció 5.2.1, parlem dels 61 segments i dels 62 impulsos. En aquell model, havíem considerat fixat l'increment $t_i - t_{i-1} = \Delta t, \forall i$. Els estats inicials de la trajectòria s'obtenien un cop implementat l'algorisme genètic. Respecte la construcció de l'arc de Lambert, només tenim dos estats/impulsos, amb $t_2 - t_1 = TDV$, i un sol segment. Aquestes trajectòries, que en el nostre model empalmaven en tots els nodes (excepte en el punt d'enllaç en el cas de la construcció de Sims i Flanagan), clarament no té perquè ser contínua en cadascun dels nodes en el nou model. Donades certes equacions del moviment

$$\dot{X} = f(t, X) \quad (5.16)$$

que representen una aproximació més real de la dinàmica que les usades per a determinar la trajectòria inicial, el nostre objectiu és trobar una solució de (5.16), "propera" a la solució inicial. Abordarem el problema incloent certes funcions de control a (5.16), que representin les discontinuïtats en les velocitats als nodes, i que serveixen per a definir una funció objectiu a minimitzar. En altres paraules, construïm un problema d'optimització finit no lineal.

Sigui $\Phi(t_i; t_{i-1}, X_{i-1})$ la imatge de (t_{i-1}, X_{i-1}) donat pel flux corresponent a (5.16) a l'instant $t = t_i$, per $i = 2, \dots, N$. Llavors, associem a cada node les següents variables:

1. Una posició:

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = (t_i, X_i)|_{\mathbf{r}} \quad (5.17)$$

on $|_{\mathbf{r}}$ es refereix a les components del vector X_i corresponents a la posició.

2. Una velocitat de sortida v_i^S i velocitat d'arribada v_i^A :

$$v_i^S = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = (t_i, X_i)|_{\dot{\mathbf{r}}} \quad (5.18)$$

$$v_i^A = \Phi(t_i; t_{i-1}, X_{i-1})|_{\dot{\mathbf{r}}} \quad (5.19)$$

on $|_{\dot{\mathbf{r}}}$ es refereix a les components de X_i corresponents a la velocitat. Tenim en compte que a la velocitat de sortida, estem incorporant l'increment de velocitat calculat en la construcció "guia".

Llavors, definim la maniobra associada a l' i -èssim node com:

$$\Delta \hat{V}_i = v_i^S - v_i^A \quad (5.20)$$

Els increments estan definits de manera que

$$\begin{cases} \Delta \hat{V}_1 = \Delta \hat{V}_1(t_1, \mathbf{r}_1, t_2, \mathbf{r}_2) \\ \Delta \hat{V}_N = \Delta \hat{V}_N(t_{N-1}, \mathbf{r}_{N-1}, t_N, \mathbf{r}_N) \\ \Delta \hat{V}_i = \Delta \hat{V}_i(t_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}, t_i, \mathbf{r}_i, t_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1}), i = 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.21)$$

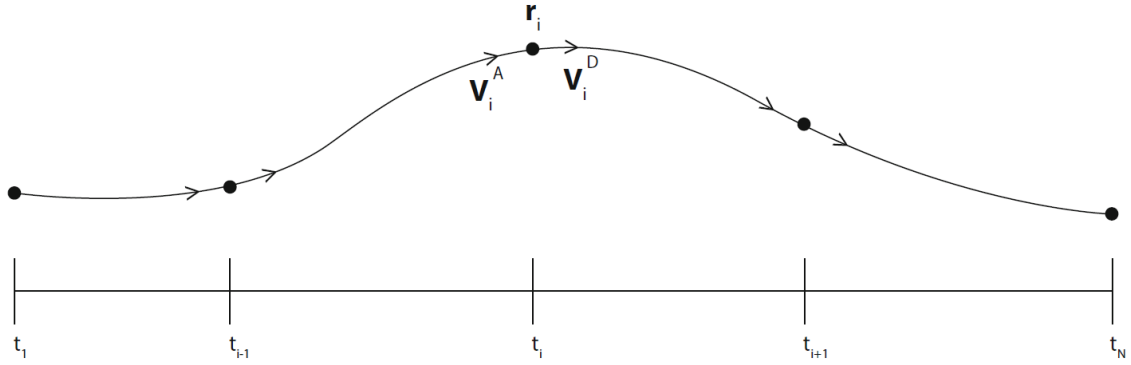


Figura 14: Variables associades als nodes.

L'objectiu de l'algoritme es determinar N nodes (t_i, X_i) tals que:

1. S'obtingui continuïtat respecte les posicions, és a dir:

$$\Phi(t_i; t_{i-1}, X_{i-1})|_{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i, i = 2, \dots, N \quad (5.22)$$

2. S'assoleixi un mínim local en un cert domini D d'una funció objectiu ben definida:

$$\min_{(t, \mathbf{r}) \in D} F_{obj}(\Delta \hat{V}_1, \dots, \Delta \hat{V}_i, \dots, \Delta \hat{V}_N) \quad (5.23)$$

3. Algunes relacions lineals i/o no lineals es satisfacin:

$$i \leq \begin{pmatrix} t_i \\ X_i \\ A(t_i, X_i) \\ g(t_i, X_i) \end{pmatrix} \leq s, i = 1, \dots, N \quad (5.24)$$

on i i s són cotes inferiors i superiors, respectivament. La tercera i quarta equació en (5.24) representen restriccions lineals i no-lineals, respectivament.

Llavors, v_i són els controls que volem determinar. La funció objectiu que s'acostuma a considerar és:

$$F_{obj}(\Delta \hat{V}_1, \dots, \Delta \hat{V}_N) = \sum_{i=1}^N w_i \|\Delta \hat{V}_i\|^2 \quad (5.25)$$

i té com a objectiu minimitzar la quantitat de fuel a usar en les correccions. Els paràmetres w_i poden ser constants o poden dependre de cada node. Per a buscar el mínim de F_{obj} es pot usar el mètode d'optimització del punt interior, que usa un optimitzador com es veu a [4], pàg. 7. La idea de l'algoritme és que els punts són acceptats si milloren la funció objectiu o disminueixen l'error en les restriccions.

Un optimitzador és, en general, una eina cara des del punt de vista computacional. Per prevenir que l'algoritme sigui molt lent, s'entrellaça l'algoritme amb un mètode de tir múltiple fins que s'obté el nivell de precisió desitjat (veure [4]).

Mètode del tir múltiple

Busquem la solució de l'equació:

$$F \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(t_2; t_1, X_1) \\ \vdots \\ \Phi(t_N; t_{N-1}, X_{N-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = 0 \quad (5.26)$$

En el sistema anterior, les úniques incògnites són $X_i, i = 1, \dots, N$, doncs els valors t_i no es modifiquen durant el procés. El sistema (5.26) té $6 \times (N - 1)$ equacions i $6 \times N$ incògnites. Per superar aquesta indeterminació, podem afegir condicions addicionals, com ara fixar restriccions a $t = t_1$ o $t = t_N$. Per evitar certes dificultats numèriques, el sistema (5.26) es resol usant el mètode de Newton i demanant que la correcció sigui mínima a cada pas. D'aquesta manera ens assegurem que la trajectòria final no disti molt de la inicial. Si $X^{(j)} = (X_1^{(j)}, \dots, X_N^{(j)})$ denota el j -èssim iterat en el procediment, i $\Delta X^{(j)} = X^{(j+1)} - X^{(j)}$, llavors l'equació de Newton es pot escriure com:

$$DF(X^{(j)}) \cdot \Delta X^{(j)} = -F(X^{(j)}) \quad (5.27)$$

Llavors, volem minimitzar la funció $\|\Delta X^{(j)}\|_2$, o equivalentment $\|\Delta X^{(j)}\|_2^2$, amb la condició (5.27). Sigui $\hat{F} = F(X) + DF(X) \cdot \Delta X$, introduint el Lagrangiana $L(\Delta X, \hat{F}, \mu)$ amb multiplicador μ :

$$L(\Delta X, \mu) = \Delta X^T \cdot \Delta X + \mu^T \cdot (F(X) + DF(X) \cdot \Delta X) \quad (5.28)$$

arribem a:

$$\Delta X^{(j)} = -DF(X^{(j)})^T \cdot [DF(X^{(j)}) \cdot DF(X^{(j)})^T]^{-1} \cdot F(X^{(j)}) \quad (5.29)$$

Com s'explica a [4], és adient realitzar una factorització de Cholesky de la matriu $DF(X^{(j)}) \cdot DF(X^{(j)})^T$ per a resoldre el problema recursivament.

6 Conclusions

L'objectiu d'aquest treball era entendre les tècniques matemàtiques que s'involucren en el procés de captura d'un asteroide. Després de sis anys de carrera, ha estat el primer cop que he hagut de dur a terme un treball de recerca d'aquesta envergadura. A més a més, si bé és cert que havia cursat l'assignatura de sistemes dinàmics, on vam tractar breument els models de dos i tres cossos, el meu coneixement sobre aquest àmbit de les matemàtiques era molt limitat.

El primer pas va ser llegir-me uns *papers* que es centraven en el procés de captura d'un asteroide. En ells, els continguts augmentaven en complexitat a un gran ritme; i estaven, sense dubte, enfocats a lectors més coneixedors del problema que jo. La gran quantitat de conceptes que es donaven per coneguts van fer que em donés compte de la dificultat del tema en el que m'estava introduint. Va ser aquí quan va començar el procés de tractar bé els models dinàmics i les transferències, que són les eines bàsiques i fonamentals que s'usen en aquest treball. En l'estudi d'aquestes dues seccions, una de les dificultats usuals que m'he trobat mentre investigava la bibliografia ha estat el gran nombre de resultats, i de passos en els càlculs, que es donaven per bons sense més justificació. Per posar un exemple, podem parlar de l'equació de l'acceleració inercial en el model restringit circular de tres cossos (2.76):

$$\frac{{}^i d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \frac{{}^s d^2}{dt^2} \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{{}^s d}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Quan vaig pretendre entendre i donar sentit a aquesta equació, em vaig trobar immers en mecànica del sòlid-rígid, sense cap manera matemàticament acceptable de resumir en menys de 10 pàgines la justificació teòrica d'aquest resultat, que és bàsic en tota la explicació que es segueix en aquella secció. No és una sensació agradable no deixar plasmat en el treball aquesta justificació. En relació a això, he hagut d'estudiar molts conceptes que ni es mencionen, i com a autocrítica constructiva sóc conscient que no he tret el màxim profit de la possibilitat de citar referències. Com comentava, també vaig trobar dificultats quan observava càlculs que es menjaven molts passos, i al principi vaig pecar de desenvolupar els càlculs sencers, fet que conduïa a una narració pesada i que no aportava res interessant a la comprensió del problema en si. Malgrat tot, trobo que a nivell personal sí que m'ha anat bé haver-ho fet per a tenir un pas més ferm i segur en la redacció i el coneixement del problema.

Per tant, crec que bona part de l'aprenentatge que m'emporto gràcies a la realització d'aquest treball, es centra en la capacitat d'afrontar i realitzar aquest procés de recerca, recopilació, anàlisi, organització i redacció. Trobo que també són destacables els coneixements adquirits sobre dues eines que estic segur que tornaré a usar en un futur: estic parlant del llenguatge LaTeX i de l'eina online Geogebra, amb la que he dissenyat els gràfics.

En relació als coneixements matemàtics apresos, dins la complexitat dels conceptes teòrics i la seva interpretació física, considero que l'objectiu del treball s'ha assolit. D'aquesta manera, m'agradaria mencionar les idees més importants que extrec de cadascuna de les seccions, així com possibles opcions de millora, doncs un cop finalitzada la redacció, i després d'un procés tant llarg, és inevitable reflexionar sobre les limitacions del treball.

A la secció 2, hem investigat dos models dinàmics, cadascun d'ells amb certes propietats i limitacions. La fortalesa del model de Kepler és que donat un cos amb unes condicions inicials (en forma de posició i velocitat, o a través dels sis elements orbitals), sabem calcular la seva trajectòria. Com hem vist, els sis elements orbitals són sis integrals primeres (són constants al llarg de la solució) que prenen gran importància doncs es poden determinar empíricament i ens permeten determinar unívocament la posició i la velocitat del cos en el sistema de referència equatorial. D'aquesta manera, el model de Kepler és essencial a l'hora de construir una primera trajectòria de transferència “guia”, i en aquest aspecte penso que els conceptes introduïts són tots necessaris i tenen aplicació directa en el nostre problema. Si el paper del model de Kepler és facilitar aquesta òrbita de transferència, el model restringit circular de tres cossos s'encarrega principalment de dir-nos *on* hem de transferir l'asteroide. Així doncs, l'existència de punts fixos com L_1 i L_2 , de fàcil accés des de la Terra i amb un comportament del tipus *centre* \times *centre* \times *sella*, són propietats essencials en tota la metodologia que es proposa. Aquesta secció l'hauríem pogut completar enunciant i demostrant el teorema de Lyapunov i presentant conceptes com els exponents característics, justificant així l'existència d'òrbites periòdiques al voltant dels punts L_1 i L_2 . La limitació del nombre de pàgines ha estat, com en altres casos, la causa per la qual aquests continguts no han entrat a la memòria.

Respecte a la secció 3 “Transferències”, m'agradaria remarcar la infinitud de possibilitats que permeten les transferències de Lambert. Si coneixem les condicions inicials i finals d'una òrbita, i fixem un temps de vol, podem determinar l'òrbita Kepleriana que connecta aquestes dues posicions i velocitats. Aquesta eina la compaginem amb la possibilitat de determinar la varietat invariant estable d'un punt fix o d'una òrbita periòdica, com s'explica a la secció 3.2. En aquest apartat, és obvi que una opció de millora hauria estat parlar de transferències de Hohmann més complexes. També podríem haver comentat, en el mètode de la varietat invariant, les eines numèriques que s'han d'usar per a determinar la matriu de monodromia, les òrbites periòdiques i la varietat invariant estable.

Seguint amb la secció 4 “Optimització”, hem exposat un algorisme que cerca el màxim o el mínim d'una funció en un domini qualsevol. La importància d'aquesta secció recau en l'aplicació d'aquest tipus d'algorismes, que convergeixen donada qualsevol condició inicial, i la simplicitat amb que encaren problemes d'optimització multiparamètrics. En aquesta secció hauríem pogut presentar i demostrar el Teorema d'esquemes per a justificar la convergència de l'algorisme. També hauríem pogut programar aquest algorisme genètic per a realitzar alguna simulació, i haver introduït el mètode d'optimització del punt interior que es menciona en el refinament de la trajectòria final (secció 5.3).

Finalment, en la secció 5, hem presentat el procés de selecció d'asteroides, creació d'una òrbita de transferència, i el refinament d'aquesta en un model dinàmic més complex i realista. Una manera de completar la metodologia en la construcció de l'òrbita de transferència, hauria sigut investigar i explicar com es pot transformar la trajectòria, que usa un nombre finit d'impulsos en el seu disseny, en una trajectòria que usi empentes de forma contínua.

6. CONCLUSIONS.

La captura d'asteroides ja és, avui dia, un problema real. L'empresa japonesa *JAXA* (Japan Aerospace Exploration Agency) ha programat recentment una missió anomenada *Hayabusa2 project*, que ja està en marxa i que pretén assolir la captura d'un asteroide conegut com *Ryugu*. Aquest treball ha presentat els coneixements matemàtics fonamentals que s'han de tenir per a la comprensió d'aquest problema, que serà, sense cap mena de dubte, de gran importància a les pròximes dècades.

Referències

- [1] A. Jorba, C. Simó, G. Gómez i J. J. Masdemont. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Advanced Methods for Collinear Points, vol.III*: World Scientific, 2001.
 - [2] A. Jorba, C. Simó, G. Gómez i J. J. Masdemont. *Study of the transfer from the Earth to a halo orbit around the equilibrium point L_1* : Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 56(4):541-562, 1993.
 - [3] C. R. McInnes, D. G. Yárnoz i J. P. Sanchez. *Easily retrievable objects among the NEO population*: Springer.
 - [4] E. M. Alessi, G. Gómez i J. J. Masdemont. *A Methodology for the Computation of Constrained Orbits and its Application to the Design of Solar System Trajectories*. Journal of the Astronautical Sciences 59(3):477-501, 2012.
 - [5] G. Gómez i J. J. Masdemont. *Dynamics Near the Librations Points*: École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2017.
 - [6] G. Gómez, J. J. Masdemont, N. Lladó i Y. Ren. *Capturing small asteroids into a Sun–Earth Lagrangian point*: Acta Astronautica 95:176-188, 2014.
 - [7] J. A. Sims i S. N. Flanagan. *Preliminary design of low-thrust interplanetary missions*: AAS99-338, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 1999.
 - [8] O. Montenbruck i E. Gill. *Satellite Orbits, Model Methods Applications*: Springer, 1961.
 - [9] P. R. Escobal. *Methods of Astrodynamics*: John Willey & Sons, Inc, 1979.
 - [10] V. Szebehely. *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three Bodies*: Yale University, 1967.
-