

Treball final de màster

MÀSTER DE  
MATEMÀTICA AVANÇADA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona

---

Una introducció a les equacions en  
derivades parcials estocàstiques

---

Autor: Víctor de la Torre i Estévez

Directora: Dra. Marta Sanz-Solé  
Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 28 de juny de 2018

# Abstract

In this project we introduce stochastic partial differential equations (SPDEs), focusing on the stochastic wave equation. We start by defining the Wiener integral with respect to space-time white noise. This integral allows us to provide the notion of random field solution of an SPDE. Once we have shown the existence of random field solution of the one-dimensional stochastic linear wave equation, our main goal will be to prove results on the Hölder continuity of its sample paths when the domains are  $\mathbb{R}_+$  and  $[0, L]$ .

We also study the nonlinear case, which requires the use of another integral whose integrand can be random, in contrast to the Wiener integral. To define this integral, we follow Walsh's approach [13]. We prove a theorem on existence and uniqueness of random field solution to nonlinear SPDEs and then state sufficient conditions yielding the Hölder continuity of its sample paths. Finally, we apply these results to conclude that the stochastic nonlinear wave equation has a random field solution and its sample paths are jointly Hölder continuous under some given conditions.

# Resum

En aquest projecte, introduïm les equacions en derivades parcials estocàstiques (EDPEs), centrant-nos en l'equació d'ones estocàstica. Comencem definim la integral de Wiener respecte d'un soroll blanc espai-temps. Aquesta integral ens permet donar la noció de solució camp aleatori d'una EDPE. Una vegada hem provat l'existència de solució camp aleatori de l'equació d'ones lineal estocàstica en dimensió 1, el nostre principal objectiu serà provar resultats de Hölder continuïtat de les seves trajectòries en els dominis  $\mathbb{R}_+$  i  $[0, L]$ .

També estudiem el cas no lineal, que requereix l'ús d'una altra integral que admet, a diferència de la integral de Wiener, integrands aleatoris. Per definir aquesta integral, seguim l'enfocament de Walsh [13]. Provem un teorema d'existència i unicitat de solució camp aleatori d'EDPEs no lineals i establím condicions suficients per obtenir Hölder continuïtat en les seves trajectòries. Finalment, apliquem aquests resultats per concloure que l'equació d'ones no lineal estocàstica té solució camp aleatori i les seves trajectòries són conjuntament Hölder contínues sota certes condicions.

## Agraïments

Agraeixo a la Dra. Marta Sanz-Solé l'atenció i cura que ha posat en la direcció d'aquest treball. Les seves observacions en relació a les demostracions originals d'aquesta memòria l'han millorada notablement. Vull agrair-li també el bon ambient de treball que hem mantingut en les nostres trobades: han estat dos anys d'allò més enriquidors, tant a nivell acadèmic com personal.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Equacions en derivades parcials</b>	<b>3</b>
2.1	La transformada de Fourier . . . . .	3
2.2	L'equació de la calor . . . . .	4
2.3	L'equació d'ones . . . . .	7
2.3.1	L'equació d'ones a la recta real . . . . .	8
2.3.2	L'equació d'ones a la semirecta . . . . .	9
2.3.3	L'equació d'ones en un interval fitat . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Equacions en derivades parcials estocàstiques</b>	<b>14</b>
3.1	Nocions bàsiques . . . . .	14
3.1.1	Camps aleatoris gaussians . . . . .	14
3.1.2	Soroll blanc en $\mathbb{R}^k$ . . . . .	16
3.1.3	La integral respecte del soroll blanc . . . . .	18
3.2	De les EDPs a les EDPEs . . . . .	22
3.3	EDPEs amb soroll blanc espai-temps . . . . .	22
3.3.1	L'equació estocàstica de la calor en $\mathbb{R}$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>L'equació d'ones lineal estocàstica</b>	<b>27</b>
4.1	L'equació d'ones estocàstica en $\mathbb{R}$ . . . . .	28
4.2	L'equació d'ones estocàstica en $\mathbb{R}_+$ . . . . .	33
4.3	L'equació d'ones estocàstica en l'interval $[0, L]$ . . . . .	42
<b>5</b>	<b>EDPEs no lineals</b>	<b>54</b>
5.1	La integral estocàstica respecte del soroll blanc espai-temps . . . . .	55
5.2	EDPEs no lineals . . . . .	58
5.2.1	Existència i unicitat de solució . . . . .	60
5.2.2	Hölder continuïtat de les trajectòries de la solució . . . . .	66
5.3	L'equació d'ones no lineal estocàstica en $\mathbb{R}$ . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Resultats auxiliars</b>	<b>74</b>

# 1 Introducció

Considerem, en ple desert del Sàhara, una corda de guitarra de longitud  $L$  infinitesimalment prima. En l'instant  $t$  i la posició  $x$ , la polsem transversalment al pla que descriu amb la resta de cordes. En la configuració donada, el problema és purament unidimensional:  $F > 0$  significa que pressionem cap amunt i  $F < 0$ , cap avall. La física clàssica ens assegura que la posició  $u(t, x)$  de la corda satisfà l'equació en derivades parcials

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = F(t, x), \quad t \geq 0, x \in [0, L]. \quad (1.1)$$

Aquesta equació, l'anomenada *equació d'ones*, ha estat àmpliament estudiada en el marc de la teoria de les equacions en derivades parcials (EDPs) i n'és, de fet, un dels exemples hiperbòlics més rellevants. La seva solució, que com és natural depèn de les condicions inicials en  $t = 0$  i de vora en  $x = 0$  i  $x = L$ , és ben coneguda i la deduirem a l'inici d'aquest treball.

En l'exemple que acabem d'exposar, la font de la vibració -la força  $F$  amb què premem la corda- té naturalesa determinista. Què passaria si fos aleatòria? Deixem la guitarra a la intempèrie, amb tan mala fortuna que esclata una tempesta de sorra. Aleshores, la corda rep un bombardeig de grans de sorra que la fan vibrar. Aquest és el famós exemple amb què Walsh introdueix les notes del curs que donà a Saint-Flour l'any 1984 [13].

Denotem per  $\dot{W}(t, x)$  la intensitat amb què la sorra impacta la corda en el punt  $x$  en l'instant  $t$ . La pertorbació aleatòria de la corda originada per les partícules de sorra que hi xoquen es pot modelar mitjançant alguna mena de soroll aleatori. Si assumim que el nombre de grans de sorra que impacten en regions disjunctes de l'espai-temps són independents, un bon model per a  $\dot{W}(t, x)$  és l'anomenat *soroll blanc espai-temps*. Com que aquesta magnitud juga el paper del terme determinista  $F$  en l'equació (1.1), l'evolució de la corda vindria donada per

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), \quad t \geq 0, x \in [0, L]. \quad (1.2)$$

Ara bé, per la irregularitat de  $\dot{W}$ , aquesta equació no té un sentit clàssic, de manera que en primer lloc cal establir què s'entén per la solució d'una equació en derivades parcials estocàstica (EDPE).

Existeixen dues aproximacions diferents que han portat al desenvolupament de dues escoles d'estudi d'EDPEs. D'una banda, la teoria desenvolupada a partir de Walsh [13] treballa amb l'anomenada *solució camp aleatori*, on la solució és funció del temps i l'espai i es defineix de tal forma que sigui coherent amb la solució de l'equació determinista, d'acord amb el principi de Duhamel que enunciarem al Capítol 2. D'altra banda, es pot entendre la solució des d'una òptica més propera a l'anàlisi funcional i considerar-la un procés estocàstic indexat pel temps que pren valors en un espai de Hilbert de funcions. Una referència important d'aquest segon acostament és el llibre de Da Prato i Zabczyk [3]. Totes dues opcions tenen els seus avantatges i en alguns casos, fins i tot, resulta útil combinar-les. Aquí seguirem l'aproximació de Walsh a través del llibre en procés de redacció de R.C. Dalang i M. Sanz-Solé [6].

En aquest treball, ens proposem en primer lloc introduir-nos en l'estudi de les equacions en derivades parcials estocàstiques des del punt de vista de la solució camp aleatori. Aquesta solució, com hem esmentat més amunt, està relacionada amb la solució de l'equació determinista, és a dir, la mateixa equació amb un terme no aleatori  $f(t, x)$  en comptes del soroll  $\dot{W}(t, x)$ . Per tant, el primer que cal estudiar són les equacions en derivades parcials deterministes: ho fem al Capítol 2 en els casos de l'equació de la calor i l'equació d'ones. En el Capítol 3, definim el soroll blanc espai-temps i la *integral de Wiener* respecte d'aquest procés, una integral per a integrands deterministes. Tot seguit, reprenent el fil de les EDPs deterministes del Capítol 2, analitzem què passa quan hi introduïm un soroll blanc espai-temps  $\dot{W}(t, x)$  i donem una noció de solució on la integral de l'anomenada *solució fonamental de l'EDP* respecte del soroll representa la component aleatòria.

En segon lloc, un objectiu central del treball és obtenir resultats de Hölder continuïtat de les trajectòries de la solució de l'equació d'ones lineal, del tipus que figuren en [6, Capítol 2] per a  $\mathbb{R}$ . A banda de la recta real, estudiem els dominis  $\mathbb{R}_+$  i  $[0, L]$ . La previsió és obtenir els mateixos exponents de Hölder continuïtat:  $\alpha, \beta \in ]0, 1/2[$  en les components temporal i espacial. Aquesta mena de resultats són importants, per exemple, a l'hora de fer simulacions numèriques: no podem esperar velocitats de convergència superiors a l'ordre de Hölder continuïtat. També esperem obtenir fites inferiors pels moments d'ordre 2 de la diferència  $u(t, x) - u(s, y)$ , on  $u(t, x)$  denota la solució de l'equació d'ones estocàstica en  $(t, x)$ . Això permet obtenir una expressió equivalent per la mètrica canònica associada al procés  $(u(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D)$ , on  $D$  és el domini espacial on considerem l'EDPE. Una conseqüència immediata d'aquestes fites inferiors serà l'optimalitat dels exponents de Hölder continuïtat obtinguts. Tots aquests resultats -originals en els dominis  $\mathbb{R}_+$  i  $[0, L]$ - els enunciem i demostrem en el Capítol 4.

En tercer lloc, en el Capítol 5 ens centrem en les equacions en derivades parcials no lineals estocàstiques. En aquest cas, cal integrar processos aleatoris respecte del soroll blanc espai-temps, de manera que la integral de Wiener definida al Capítol 3 no serveix i cal definir-ne una de nova. Una vegada introduïda aquesta integral, enunciem un teorema d'existència i unicitat de solució d'una EDPE no lineal, tot assumint Lipschitz continuïtat i creixement uniforme globals en els coeficients de l'equació, a banda d'unes hipòtesis en la solució fonamental que en el cas de l'equació d'ones es compleixen trivialment. Afegint dues condicions més a les hipòtesis del teorema d'existència i unicitat, provem també que la solució obtinguda és conjuntament Hölder contínua. Finalment, comprovant que se satisfan les hipòtesis d'aquests dos teoremes, concloem que l'equació d'ones no lineal estocàstica té solució camp aleatori amb trajectòries Hölder contínues.

## 2 Equacions en derivades parcials

Una equació en derivades parcials (EDP) és una expressió del tipus

$$\mathcal{L}u = f, \quad (2.1)$$

on  $f$  és una funció donada i  $\mathcal{L}$  és un operador lineal en derivades parcials, com ara l'operador d'ones  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . L'equació (2.1) ha d'anar acompanyada de condicions inicials i, si escau, de vora.

Quan substituïm la funció  $f$  pel que en diem un *soroll blanc*, obtenim una equació en derivades parcials estocàstica (EDPE). Naturalment, caldrà donar un significat a la *solució* d'aquesta equació. La noció de solució d'una EDPE que donarem estarà relacionada amb la solució de l'EDP clàssica, de manera que, en primer lloc, cal conèixer mínimament la teoria d'EDPs.

En aquest capítol, estudiarem l'equació de la calor i l'equació d'ones. Per tal de resoldre-les, es poden aplicar diversos mètodes; per exemple, com s'explica a [12, Capítol 1], l'equació d'ones es pot resoldre mitjançant ones viatgeres o bé superposant ones estacionàries. Nosaltres hem optat per utilitzar la transformada de Fourier, posant en pràctica així algunes de les eines i resultats que s'han vist durant el curs de màster.

La primera secció d'aquest capítol, on enunciem els resultats que ens permetran resoldre les EDPs, està basada en [7, Capítol 4] i [11, Capítol 7], mentre que les altres dues, en què resollem l'equació de la calor i l'equació d'ones, estan elaborades principalment a partir de [7, Capítols 2,4], i també de [8] i [9].

### 2.1 La transformada de Fourier

**Definició 2.1.** Una funció  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  és de decreixement ràpid si

$$\sup_{\alpha \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^2) |(D^\alpha f)(x)| < \infty$$

per a tot  $N \geq 0$ . El conjunt de les funcions de decreixement ràpid en  $\mathbb{R}$  es denota per  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Aquest espai també s'anomena de Schwartz.

En aquestes funcions, que són de  $L^1(\mathbb{R})$ , està ben definida la transformada de Fourier.

**Definició 2.2.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la transformada de Fourier de  $f$  ve donada per

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy.$$

En algunes referències, la constant multiplicativa  $1/\sqrt{2\pi}$  no hi és i apareix una constant  $2\pi$  a l'argument de l'exponencial. La virtut de la definició donada aquí és que aleshores la transformada de Fourier de  $\phi(x) = \exp(-x^2/2)$  és ella mateixa.

**Proposició 2.3.** Sigui  $\phi(x) = \exp(-x^2/2)$ . Aleshores  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  i  $\hat{\phi} = \phi$ .

Una propietat important de l'espai de Schwartz és que la transformada de Fourier d'una funció de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  també és de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . A més, tenim el següent teorema d'inversió:

**Teorema 2.4** (d'inversió). *Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , aleshores*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{ixy} dy.$$

La integral anterior és, de fet, la transformada de Fourier inversa de  $\hat{f}$ . Aquesta transformada, definida per funcions de  $L^1(\mathbb{R})$ , ve donada per

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{ixy} dy.$$

Observem que  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ . Amb aquesta notació, el teorema d'inversió es pot reescriure com  $f = (\hat{f})^\vee$ . Enunciem tot seguit alguns resultats que ens seran útils a posteriori.

**Teorema 2.5.** *Si  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , llavors*

- (a) *Si  $\lambda > 0$  i  $h(x) = f(x/\lambda)$ , aleshores  $\hat{h}(x) = \lambda \hat{f}(\lambda x)$ ,*
- (b)  *$f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , i*
- (c)  *$fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  i  $(fg)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})$ .*

Si tenim en compte que  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ , és senzill de demostrar a partir de (c) que  $(fg)^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\check{f} * \check{g})$ .

Gràcies a la densitat de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , s'obté una generalització del concepte de transformada de Fourier per a funcions en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.6** (Plancherel). *Existeix una isometria lineal  $\Psi$  de  $L^2(\mathbb{R})$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , unívocament determinada per la condició que*

$$\Psi f = \hat{f} \quad \text{per tot } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Aquesta extensió  $\Psi$  se segueix anomenant transformada de Fourier, i es manté la notació  $\hat{f}$  per a tota  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . El teorema següent mostra algunes propietats d'aquesta transformada de Fourier.

**Teorema 2.7.** *Siguin  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Aleshores*

- (a)  *$(f^{(n)})^\wedge = (iy)^n \hat{f}$  si  $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ .*
- (b) *Si, a més,  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , es compleix  $(f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$ .*
- (c)  *$f = (\hat{f})^\vee$ .*

Observem que (c) ens proporciona una fórmula d'inversió.

## 2.2 L'equació de la calor

Tot seguit, estudiem l'equació de la calor

$$u_t - u_{xx} = f$$



homogènia (si  $f = 0$ ) i no homogènia (si  $f \neq 0$ ), amb una certa condició inicial. El temps sempre és positiu,  $t > 0$ , i  $x \in \mathbb{R}$ . L'equació s'estudia més generalment en conjunts  $U \subset \mathbb{R}^n$ , però nosaltres centrarem l'anàlisi en la recta real. La funció  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve donada com a dada del problema.

Començarem resolent l'equació homogènia, és a dir, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Assumirem inicialment que  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  i  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Aquestes bones propietats tant de la funció dada com de la solució ens permetran desenvolupar un raonament heurístic que porti a un candidat a solució. Denotem per  $\hat{u}(t, x)$  la transformada de Fourier de  $u(t, x)$  respecte de  $x$ . Si apliquem aquesta transformada a (2.2), obtenim

$$\begin{cases} \hat{u}_t + y^2 \hat{u} = 0, & \text{en } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \hat{u} = \hat{g}, & \text{en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.3)$$

on s'ha utilitzat (a) del Teorema 2.7 i el fet que si  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , com hem suposat, podem derivar sota el signe integral i això permet deduir fàcilment que  $(u_t)^\wedge = \hat{u}_t$ .

Si fixem  $y \in \mathbb{R}$ , la solució de (2.3) és

$$\hat{u} = e^{-ty^2} \hat{g}.$$

Com que el membre dret és un producte de funcions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , aplicant els Teoremes 2.4 i 2.5, tenim que

$$u = (e^{-ty^2} \hat{g})^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F * g), \quad (2.4)$$

on  $F$  és tal que  $\hat{F} = e^{-ty^2}$ .

Combinant la Proposició 2.3 i l'apartat (a) del Teorema 2.5, arribem a

$$F(x) = (e^{-ty^2})^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Per tant, recuperant (2.4),

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F * g) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

**Definició 2.8.** *La funció*

$$\Phi(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

*s'anomena solució fonamental de l'equació de la calor.*

Observem que  $\Phi$  és singular en el  $(0, 0)$ .

A [7, Capítol 2], aquesta solució fonamental  $\Phi$  s'obté inicialment d'una altra manera. Es considera que la solució de  $u_t - u_{xx} = 0$  s'hauria de poder expressar com una funció del tipus  $u(t, x) = v(|x|^2/t)$  per  $t > 0$  i, mitjançant un seguit d'arguments, s'arriba a una expressió de la forma de  $\Phi$ . Aleshores, per resoldre el problema de Cauchy (2.2), s'observa que si la funció  $(t, x) \mapsto \Phi(t, x)$  resol l'equació de la calor lluny de la singularitat en el  $(0, 0)$ , també ho fa  $(t, x) \mapsto \Phi(t, x - y)$  per un  $y \in \mathbb{R}$  donat. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x - y)g(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

hauria de ser solució. Aquesta és una altra forma heurística d'arribar a (2.5) que tornarem a utilitzar més endavant.

A [7, Capítol 2] es demostra que, efectivament,  $u(t, x)$  és solució de (2.2) si assumim que  $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . És a dir, que

- (i)  $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$  (de fet, es prova més que això:  $u$  és  $C^\infty$ ),
- (ii)  $u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0$  si  $t > 0, x \in \mathbb{R}$ , i
- (iii)  $\lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (0,y) \\ t > 0, x \in \mathbb{R}}} u(t, x) = g(y)$ , per a cada  $y \in \mathbb{R}$ .

La demostració és bastant senzilla. Pel que fa a (i) i (ii), consisteix a diferenciar sota el signe integral, aprofitant que la funció  $\Phi$  té derivades uniformement fitades de tots els ordres en  $[\delta, \infty) \times \mathbb{R}$  per a cada  $\delta > 0$ , mentre que (iii) es prova separant la integral (2.5) en dos dominis d'integració: una bola prou petita centrada en  $y \in \mathbb{R}$  i el seu complementari.

El nostre proper objectiu és resoldre el problema de valor inicial no homogeni

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Seguirem un raonament similar al que acabem d'exposar. La funció  $(t, x) \mapsto \Phi(t - s, x - y)$  és solució de l'equació de la calor per  $y \in \mathbb{R}$  i  $0 < s < t$ . Aleshores, per una  $s$  fixada, la funció

$$u(t, x; s) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t - s, x - y)f(s, y) dy$$

resol

$$\begin{cases} u_t(t, x; s) - u_{xx}(t, x; s) = 0, & t > s, x \in \mathbb{R}, \\ u(s, x; s) = f(s, x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Aquest és senzillament un problema de Cauchy de la forma (2.2), però amb temps inicial  $t = s$  i funció donada  $f(s, \cdot)$  en comptes de  $t = 0$  i  $g$ . Naturalment,  $u(\cdot; s)$  no

resol (2.7). Ara bé, el *principi de Duhamel* assegura que podem obtenir una solució de (2.7) integrant respecte de  $s$  la solució de (2.8). És a dir, d'acord amb aquest principi, la solució seria

$$u(t, x) = \int_0^t u(t, x; s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

En el nostre cas,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s, y) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} f(s, y) dy ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

per  $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ .

A [7, Capítol 2] es prova que aquesta expressió és efectivament solució del problema (2.7), si se suposa que  $f$  és de suport compacte i  $f \in C_2^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ . Aquesta notació vol dir que  $f$  és contínuament diferenciable respecte de la primera component, la temporal, i dues vegades contínuament diferenciable en la segona component, l'espacial.

Finalment, combinant les solucions de (2.2) i (2.7), obtenim que

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s, y) dy ds \quad (2.10)$$

resol

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.11)$$

assumint les hipòtesis de regularitat i suport compacte de  $f$  i  $g$  prèviament esmentades.

## 2.3 L'equació d'ones

A continuació, estudiem l'equació d'ones

$$u_{tt} - u_{xx} = f$$

homogènia (si  $f = 0$ ) i no homogènia (si  $f \neq 0$ ), amb unes certes condicions inicials: ara caldrà també especificar  $u_t(0, x)$ . El temps sempre és positiu,  $t > 0$ , i  $x \in U \subset \mathbb{R}$ . El nostre estudi serà més exhaustiu que en el cas de la calor, perquè l'equació d'ones serà l'EDPE que treballarem amb més profunditat. Prendrem els dominis  $U = \mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}_+$  i  $U = [0, L]$ . Naturalment, quan  $U \neq \mathbb{R}$  caldrà especificar també condicions a la vora. Una opció és indicar el valor de  $u(t, x)$  en  $x \in \partial U$  (condició de Dirichlet), l'altra opció és donar el valor de la derivada normal a la vora,  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(t, x)$ , per cada  $x \in \partial U$  (condició de Neumann). En aquest treball, imposarem sempre condicions de Dirichlet. La funció  $f : \mathbb{R}_+ \times U \rightarrow \mathbb{R}$  ve donada com a dada del problema.

### 2.3.1 L'equació d'ones a la recta real

Començarem resolent l'equació homogènia, és a dir, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = h(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Com hem fet en el cas de la calor, suposarem que  $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  i  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Si apliquem la transformada de Fourier respecte de la variable  $x$  a (2.12), obtenim

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + y^2 \hat{u} = 0, & \text{en } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \hat{u} = \hat{g}, & \text{en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}_t = \hat{h}, & \text{en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Per un  $0 \neq y \in \mathbb{R}$  fixat, la solució de l'equació (2.13) és

$$\hat{u} = \hat{g} \cos(ty) + \frac{\hat{h}}{y} \sin(ty). \quad (2.14)$$

Si  $y = 0$ , la solució és  $\hat{u} = \hat{g} + t\hat{h}$ , que coincideix amb el límit quan  $y \rightarrow 0$  de l'expressió anterior.

Per obtenir  $u$  hauríem d'aplicar la transformada inversa de Fourier al membre dret de (2.14). Cal anar amb compte, però: si bé  $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\cos(ty) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , de manera que no podem aplicar el Teorema 2.5 com abans. Reescrivim (2.14) com

$$\hat{u} = \frac{1}{2} \hat{g} e^{ity} + \frac{1}{2} \hat{g} e^{-ity} + \hat{h} \frac{\sin(ty)}{y}.$$

Ara podem calcular la transformada de Fourier inversa dels dos primers termes de la dreta:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \hat{g} e^{ity} + \frac{1}{2} \hat{g} e^{-ity} \right)^\vee(x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{ity} e^{ixy} dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{-ity} e^{ixy} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{i(x+t)y} dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{i(x-t)y} dy \\ &= \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)], \end{aligned}$$

on en l'última igualtat hem utilitzat el Teorema 2.4 d'inversió.

Pel que fa a l'últim terme, si bé  $\frac{\sin(ty)}{y} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , tenim que  $\frac{\sin(ty)}{y} \in L^2(\mathbb{R})$  i per tant podem aplicar (c) del Teorema 2.7. Només cal observar que

$$\frac{\sin(ty)}{y} = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{[-t, t]} \right)^\wedge(y)$$

si  $y \neq 0$ . Aleshores, per (b) del Teorema 2.7 tenim que

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{[-t, t]} \right)^\wedge(y) = \hat{h} \frac{\sin(ty)}{y}.$$

D'aquesta manera,

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{[-t, t]} \right) (x) \\
&= \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbf{1}_{[-t, t]}(x-y) dy \\
&= \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Aquesta expressió es coneix amb el nom de *fórmula de d'Alembert*. A [7, Capítol 2] es mostra que  $u(t, x)$  és solució de (2.12) si  $g \in C^2(\mathbb{R})$  i  $h \in C^1(\mathbb{R})$ .

Per resoldre el problema de valor inicial no homogeni

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.16}$$

es pot utilitzar el mateix procediment que en el cas de l'equació de la calor. Sigui  $u = u(t, x; s)$  la solució de

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x; s) - u_{xx}(t, x; s) = 0, & t > s, x \in \mathbb{R}, \\ u(s, x; s) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(s, x; s) = f(s, x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Per la fórmula de d'Alembert (2.15), tenim que

$$u(t, x; s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(s, y) dy.$$

Definim

$$u(t, x) = \int_0^t u(t, x; s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Amb l'expressió de  $u(t, x; s)$ , podem explicitar  $u(t, x)$ :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(s, y) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \tag{2.18}$$

Pel principi de Duhamel, això serà solució de (2.16). A [8, Capítol 5] està demostrat que efectivament  $u(t, x)$  és solució de (2.16) si  $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ .

### 2.3.2 L'equació d'ones a la semirecta

Ara ens proposem resoldre l'equació d'ones en la semirecta  $\mathbb{R}_+$ . A banda de les condicions de valor inicial, cal imposar també una condició de vora en  $x = 0$ : assumirem que  $u(\cdot, 0) = 0$ . En aquest cas, el problema homogeni s'expressa així:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x > 0, \\ u(0, x) = g(x), & x > 0, \\ u_t(0, x) = h(x), & x > 0, \\ u(t, 0) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

amb  $g$  i  $h$  funcions donades.

Aquest problema es pot transformar en un problema de la forma (2.12) estenent  $u$ ,  $g$  i  $h$  a tot  $\mathbb{R}$  mitjançant una reflexió imparella en la coordenada espacial. És a dir, establim

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, x) &:= \begin{cases} u(t, x), & t \geq 0, x \geq 0, \\ -u(t, -x), & t \geq 0, x \leq 0, \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &:= \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ -g(-x), & x \leq 0, \end{cases} \\ \tilde{h}(x) &:= \begin{cases} h(x), & x \geq 0, \\ -h(-x), & x \leq 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{2.20}$$

D'aquesta manera, (2.19) esdevé

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(t, x) - \tilde{u}_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x > 0, \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{g}(x), & x > 0, \\ \tilde{u}_t(0, x) = \tilde{h}(x), & x > 0. \end{cases}$$

Aquest problema és de la forma (2.12) i, per tant, la solució ve donada per la fórmula de d'Alembert (2.15):

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy.$$

Tenint en compte les transformacions (2.20), podem obtenir finalment la solució  $u(t, x)$ :

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{si } x \geq t \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy & \text{si } 0 \leq x \leq t. \end{cases}\tag{2.21}$$

Estudiem tot el seguit el problema no homogeni amb condicions inicials i de vora nul·les:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x > 0, \\ u(0, x) = 0, & x > 0, \\ u_t(0, x) = 0, & x > 0, \\ u(t, 0) = 0, & t \geq 0. \end{cases}\tag{2.22}$$

Repetint l'esquema que hem seguit fins ara, el principi de Duhamel ens indica que la solució serà

$$u(t, x) = \int_0^t u(t, x; s) ds, \quad x \in \mathbb{R}_+, t \geq 0,$$

amb  $u(\cdot; s)$  la solució de

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x; s) - u_{xx}(t, x; s) = 0, & t > s, x > 0, \\ u(s, x; s) = 0, & x > 0, \\ u_t(s, x; s) = f(s, x), & x > 0, \\ u(s, 0; s) = 0, & t \geq s. \end{cases}$$

Per (2.21), tenim que

$$u(t, x; s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s, y) \, dy & \text{si } x \geq t - s \\ \frac{1}{2} \int_{(t-s)-x}^{x+(t-s)} f(s, y) \, dy & \text{si } 0 \leq x \leq t - s. \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t u(t, x; s) \, ds \\ &= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}_+} dy \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x-(t-s)| < y < x+(t-s)\}}(s, y) f(s, y), \quad x \in \mathbb{R}_+, t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.3.3 L'equació d'ones en un interval fitat

Ara passem a estudiar l'equació d'ones en un interval  $[0, L]$ . En general, si imposem que la solució s'anul·li a les vores, el problema és de la forma

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in ]0, L[, \\ u(0, x) = g(x), & x \in ]0, L[, \\ u_t(0, x) = h(x), & x \in ]0, L[, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Assumirem que les funcions donades són  $L^2[0, L]$ -integrables (en el cas de  $f$ , per cada  $t$  fixat). Això ens permetrà obtenir una solució  $u(t, x)$  com a desenvolupament en sèrie de Fourier de  $u(t, x)$  en  $L^2[0, L]$  per a cada  $t \geq 0$ . Definim les funcions  $e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La família  $(e_n)_n$  és una base ortonormal de  $L^2[0, L]$  i els seus elements satisfan les condicions de contorn. A més, per cada  $n$ ,  $e_n$  és un vector propi de l'operador  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  de valor propi  $-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$ .

Escrivim la solució  $u(t, \cdot)$  de la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n(x),$$

amb

$$a_n(t) := \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L u(t, y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \, dy.$$

Igualment, desenvolupem  $f(t, \cdot)$  en sèrie de Fourier:

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) e_n(x), \quad (2.25)$$

on

$$b_n(t) := \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(t, y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \, dy. \quad (2.26)$$

Si apliquem el membre esquerre de l'EDP a la sèrie  $u(t, x)$ , obtenim

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t)e_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} a_n(t)e_n(x),$$

i igualant terme a terme amb la sèrie (2.25) obtinguda per a  $f$ , tenim les EDOs

$$a_n''(t) + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} a_n(t) = b_n(t). \quad (2.27)$$

Naturalment, la resolució d'aquestes equacions diferencials depèn de les condicions inicials  $a_n(0)$  i  $a_n'(0)$ , que al seu torn depenen de les funcions  $g$  i  $h$ .

Suposem en primer lloc que  $g = h = 0$ . En aquest cas,  $a_n(0) = 0$  i  $a_n'(0) = 0$ . Per teoria bàsica de resolució d'equacions diferencials, la solució de l'EDO (2.27) amb aquestes condicions inicials és

$$a_n(t) = \frac{L}{n\pi} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t-s)\right) b_n(s) ds,$$

com es pot veure a [9, Secció 4.2.3]. Així, d'acord amb l'expressió (2.26),

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{n\pi} \int_0^t \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t-s)\right) f(s, y) dy ds.$$

Per tant, la solució de l'equació d'ones en un interval amb condicions inicials nul·les, és a dir,

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in ]0, L[, \\ u(0, x) = 0, & x \in ]0, L[, \\ u_t(0, x) = 0, & x \in ]0, L[, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

és

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{n\pi} \int_0^t \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t-s)\right) f(s, y) dy ds e_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \int_0^t \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t-s)\right) f(s, y) dy ds \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \int_0^t \int_0^L \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t-s)\right) f(s, y) \right] dy ds. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ara resollem el problema (2.24) homogeni, és a dir, amb  $f = 0$ , però amb  $g$  i  $h$  qualssevol. Com que hem assumit que  $g$  i  $h$  són de  $L^2[0, L]$ , les podem desenvolupar com a sèries de Fourier:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x), & c_n &:= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \\ h(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n(x), & d_n &:= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L h(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy. \end{aligned}$$



En aquest cas, les condicions inicials de l'equació (2.27) (on ara  $b_n(t) = 0$ ) són

$$a_n(0) = c_n, \quad a'_n(0) = d_n.$$

La solució de (2.27) amb aquestes condicions inicials és

$$a_n(t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{d_n L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right).$$

Així doncs, la solució de l'equació d'ones homogènia en un interval  $[0, L]$ ,

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in ]0, L[, \\ u(0, x) = g(x), & x \in ]0, L[, \\ u_t(0, x) = h(x), & x \in ]0, L[, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

ve donada per

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{d_n L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] e_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

amb

$$\begin{aligned} C_n &:= \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \\ D_n &:= \frac{2}{n\pi} \int_0^L h(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy. \end{aligned}$$

Finalment, superposant totes dues solucions, podem concloure que la solució de (2.24) és

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &+ \int_0^t \int_0^L \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}(t-s)\right) f(s, y) \right] dy ds. \end{aligned}$$

### 3 Equacions en derivades parcials estocàstiques

Recuperant l'exemple de la Introducció, l'objectiu d'aquest tercer capítol és donar sentit a una expressió del tipus

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), \quad (3.1)$$

on  $\dot{W}(t, x)$  representi la intensitat amb què s'impacta el punt  $x$  d'una corda en el temps  $t$ . Com que es pretén que els impactes en un cert  $(t, x)$  siguin altament independents dels que es produeixen en un instant i posició diferents,  $(s, y)$ , una elecció raonable com a funció de covariança és

$$E[\dot{W}(t, x)\dot{W}(s, y)] = \delta(t - s)\delta(x - y),$$

on  $\delta$  denota una delta de Dirac. Això serà el que en direm un *soroll blanc espai-temps*. El primer que cal fer és definir rigorosament aquest soroll blanc, així com una noció d'integral respecte del soroll blanc: l'anomenada *integral de Wiener*. Destinem la primera secció del capítol a introduir aquestes nocions bàsiques, que ens han de permetre, d'acord amb les observacions que farem en la segona secció, donar un sentit al concepte de solució d'una equació del tipus (3.1), és a dir, una equació en derivades parcials estocàstica. Això ho farem en la darrera secció, on presentarem també com a exemple l'equació de la calor estocàstica.

Aquest capítol està basat en [6, Capítols 1,2].

#### 3.1 Nocions bàsiques

##### 3.1.1 Camps aleatoris gaussians

**Definició 3.1.** *Sigui  $T$  un conjunt arbitrari i  $G = \{G(t)\}_{t \in T}$  una col·lecció de variables aleatòries definides en un cert espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Diem que  $G$  és un camp aleatori Gaussià si el vector aleatori  $(G(t_1), \dots, G(t_k))$  té distribució Gaussiana per qualssevol  $t_1, \dots, t_k \in T$ ,  $k \geq 1$ .*

Les *distribucions finit-dimensionals de  $G$*  venen donades per la família  $(\mu_{t_1, \dots, t_k})$  de lleis de probabilitat dels vectors aleatoris  $(G(t_1), \dots, G(t_k))$ , és a dir,

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(A_1 \times \dots \times A_k) = P\{G(t_1) \in A_1, \dots, G(t_k) \in A_k\}, \quad (3.2)$$

amb  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  i  $t_1, \dots, t_k \in T$ ,  $k \geq 1$ .

Pel lema que veurem a continuació, aquestes distribucions queden completament determinades per dues funcions:

1. La *funció mitjana*  $\mu(t) := E[G(t)]$ ,
2. La *funció covariança*  $C(s, t) := \text{Cov}(G(s), G(t))$ .

La funció covariança és clarament simètrica ( $C(s, t) = C(t, s)$ ) i és també *definida no negativa*, és a dir, que per qualssevol  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  i  $t_1, \dots, t_k \in T$ ,  $k \geq 1$ ,

compleix

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0.$$

En efecte,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C(t_i, t_j) x_i x_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j \text{Cov}(G(t_i), G(t_j)) = \text{Var} \left( \sum_{i=1}^k x_i G(t_i) \right) \geq 0.$$

El següent lema clàssic ens assegura no només que la mitjana i la covariança determinen les distribucions finit-dimensionals d'un camp aleatori Gaussià, sinó també que donades dues funcions amb les propietats pertinents, existeix un camp aleatori Gaussià que les té per funcions mitjana i covariança. A [6, Capítol 1] se'n pot veure la demostració.

**Lema 3.2.** (1) *Les mesures de probabilitat  $\mu_{t_1, \dots, t_k}$  definides en (3.2) estan determinades per les seves funcions mitjana i covariança.*

(2) *Donades dues funcions  $\mu : T \rightarrow \mathbb{R}$  i  $C : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , amb  $C$  simètrica i definida no negativa, existeix un camp aleatori Gaussià  $G = \{G(t)\}_{t \in T}$  que té funció mitjana  $\mu$  i funció covariança  $C$ .*

D'aquesta manera, especificant una funció  $C$  simètrica i definida no negativa, podem obtenir un procés Gaussià de mitjana zero i funció de covariança  $C$ . És el que farem tot seguit amb el moviment Brownià i el drap Brownià.

*Exemple 3.3* (Moviment Brownià). Sigui  $T = \mathbb{R}_+$ . Prenem  $\mu(t) = 0$  i  $C(s, t) = s \wedge t$  per cada  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . La funció  $C$  és definida no positiva. En efecte, per qualssevol  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  i  $t_1, \dots, t_k \in T$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C(t_i, t_j) x_i x_j &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (t_i \wedge t_j) x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j \left( \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s) \mathbf{1}_{[0, t_j]}(s) ds \right) \\ &= \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s) \right)^2 ds \geq 0. \end{aligned}$$

Com que  $C$  és també simètrica, per (2) del Lema 3.2 és la funció de covariança d'un procés Gaussià  $B := \{B_t\}_{t \geq 0}$ . Aquest procés  $B$  s'anomena *moviment Brownià*.

**Observació 3.4.** Fins ara no hem dit res de les trajectòries del procés Gaussià  $B$ . Ara bé, per definició, tenim

$$E[|B_{t_1} - B_{t_2}|^2] = |t_1 - t_2|.$$

Com que  $B$  és un procés Gaussià, això implica que, per a tot  $\gamma \in ]0, 1/2[$ ,  $B$  té una modificació localment  $\gamma$ -Hölder contínua, és a dir, existeix un procés  $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t\}_{t \geq 0}$  tal que

- (i) q.s.,  $t \mapsto \tilde{B}_t$  és  $\gamma$ -Hölder contínua,
- (ii) Per tot  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P\{B_t = \tilde{B}_t\} = 1$ .

L'argument per obtenir aquesta modificació contínua s'exposa a [5, Capítol 1] i consisteix a observar que quan tenim un camp aleatori Gaussià  $X = \{X(t)\}_{t \in T}$  indexat per  $T \subset \mathbb{R}^N$ , amb  $N \geq 1$ , aleshores per tot  $p > 0$ ,

$$E[|X(t) - X(s)|^p] = c_p [E(|X(t) - X(s)|^2)]^{p/2},$$

on

$$c_p := \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \quad (3.3)$$

Aleshores, per aplicar el criteri de continuïtat de Kolmogorov, també enunciat a [5], n'hi ha prou amb controlar  $E[|X(t) - X(s)|^2]$ . Més concretament, si trobem un  $\epsilon > 0$  tal que per tot compacte  $K \subset T$ ,

$$E[|X(t) - X(s)|^2] \leq A(K)|t - s|^\epsilon \quad \text{per tot } t, s \in K,$$

on la constant  $A(K)$  pot dependre del compacte, aleshores  $X$  té una versió localment Hölder contínua de qualsevol ordre  $< \epsilon/2$ .

L'argument que acabem de reproduir el farem servir reiteradament al llarg del treball per provar la Hölder continuïtat dels processos Gaussians amb què treballarem.

*Exemple 3.5* (Drap Brownià). Sigui  $T = \mathbb{R}_+^k$ . Prenem  $\mu(t) = 0$  per a cada  $t \in \mathbb{R}_+^k$  i definim

$$C(s, t) = \prod_{i=1}^k (s_i \wedge t_i), \quad \text{per tot } s, t \in \mathbb{R}_+^k.$$

Es pot demostrar de manera semblant a l'exemple anterior que la funció  $C$  és simètrica i definida no negativa. Així, aplicant novament l'apartat (2) del Lema 3.2 obtenim un procés Gaussià  $W := \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+^k}$  de mitjana zero i funció de covariança  $C$  que anomenem *drap Brownià*. Observem que aquest procés generalitza el moviment Brownià a un procés  $k$ -dimensional.

**Observació 3.6.** Com en l'observació anterior, del fet que el drap Brownià satisfà

$$E[|W_{t_1, \dots, t_k} - W_{s_1, \dots, s_k}|^2] \leq C|t - s|$$

es dedueix que té una modificació localment  $\gamma$ -Hölder contínua per a qualsevol  $\gamma \in ]0, 1/2[$ .

### 3.1.2 Soroll blanc en $\mathbb{R}^k$

A l'apartat anterior hem vist dos exemples molt rellevants de processos Gaussians, el moviment i el drap Brownians. Ara en presentem un tercer que jugarà un paper central en aquest treball: el soroll blanc. Serà mitjançant aquest procés que introduïrem aleatorietat en les EDPs clàssiques.

Sigui  $\nu$  una mesura  $\sigma$ -finita en  $\mathbb{R}^k$ , és a dir, tal que existeixen compactes  $K_n \subset K_{n+1}$  amb  $\nu(E_n) < +\infty$  per tot  $n$  i  $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathbb{R}^k$ . La mesura de Lebesgue n'és l'exemple més típic i serà, de fet, la mesura que utilitzarem. Denotem per  $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)$  la família  $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : \nu(A) < +\infty\}$  dels conjunts Borelians de mesura  $\nu$  finita.

**Definició 3.7.** Un soroll blanc basat en  $\nu$  és un camp aleatori Gaussià indexat per  $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)$ , és a dir,  $\{W(A), A \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)\}$ , amb funció mitjana  $\mu(A) = E[W(A)] = 0$  i funció covariança  $C(A, B) = E[W(A)W(B)] = \nu(A \cap B)$ .

L'existència d'aquest soroll blanc es prova també a partir de (2) del Lema 3.2. En efecte, és clar que  $C$  és simètrica i només falta veure que és una funció definida no negativa. Siguin  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  i  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)$ ,  $k \geq 1$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C(A_i, A_j) x_i x_j &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j \left( \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{A_i}(x) \mathbf{1}_{A_j}(x) \nu(dx) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{1}_{A_i}(x) \right)^2 \nu(dx) \geq 0. \end{aligned}$$

*Exemple 3.8* (Soroll blanc). Quan  $\nu$  sigui la mesura de Lebesgue en  $\mathbb{R}^k$ , del soroll blanc basat en  $\nu$  en direm senzillament *soroll blanc*.

*Exemple 3.9* (Soroll blanc espai-temps). En  $\mathbb{R}^{1+k}$ , sovint considerarem la mesura  $\nu(dt, dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) dt dx$ , on  $t$  correspondrà al temps i  $x$ , a l'espai. El soroll blanc basat en aquesta mesura  $\nu$  s'anomena *soroll blanc espai-temps*.

A la proposició següent recollim les principals propietats del soroll blanc basat en  $\nu$ .

- Proposició 3.10.** (1) Si  $A \cap B = \emptyset$ , aleshores  $W(A)$  i  $W(B)$  són independents.  
(2) Si  $A \cap B = \emptyset$ , aleshores  $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$ .  
(3) Si  $A_n \downarrow A$  amb  $\nu(A_1) < +\infty$ , o bé si  $A_n \uparrow A$  amb  $\nu(A) < +\infty$ , aleshores  $W(A_n) \rightarrow W(A)$  en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

*Demostració.* (1) Com que el procés  $W$  és Gaussià, el vector  $(W(A), W(B))$  té distribució Gaussiana. Per tant, el fet que  $\text{Cov}(W(A), W(B)) = \nu(A \cap B) = 0$  equival a que  $W(A)$  i  $W(B)$  siguin independents.

(2) Es tracta d'un càlcul senzill:

$$\begin{aligned} E[(W(A \cup B) - W(A) - W(B))^2] &= E[W(A \cup B)^2] + E[W(A)^2] + E[W(B)^2] - 2E[W(A \cup B)W(A)] \\ &\quad - 2E[W(A \cup B)W(B)] + 2E[W(A)W(B)] \\ &= \nu(A \cup B) + \nu(A) + \nu(B) - 2\nu(A) - 2\nu(B) = 0. \end{aligned}$$

(3) Si  $A_n \downarrow A$  i  $\nu(A_1) < +\infty$ , per (2), tenim  $W(A_n) = W(A) + W(A \setminus A_n)$ . Per tant,

$$E[(W(A_n) - W(A))^2] = E[(W(A \setminus A_n))^2] = \nu(A \setminus A_n) \rightarrow 0$$

quan  $n \rightarrow \infty$ , ja que  $\bigcap_n (A_n \setminus A) = \emptyset$  i  $\nu(A_1 \setminus A) < +\infty$ .

D'altra banda, si  $A_n \uparrow A$  i  $\nu(A) < +\infty$ , aleshores

$$E[(W(A) - W(A_n))^2] = E[(W(A \setminus A_n))^2] = \nu(A \setminus A_n) \rightarrow 0$$

quan  $n \rightarrow \infty$ , ja que  $\bigcap_n (A \setminus A_n) = \emptyset$  i  $\nu(A \setminus A_1) < +\infty$ .

□

En els dos propers exemples, mostrem com a partir de certs sorolls blancs podem obtenir el moviment Brownià i el drap Brownià.

*Exemple 3.11* (El moviment Brownià). Sigui  $W$  un soroll blanc en  $\mathbb{R}$  basat en la mesura  $\nu(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx$ . Donat  $t \geq 0$ , per (2) de la Proposició 3.10, tenim que  $W(\cdot - \infty, t]$  i  $W([0, t])$  són iguals. Si definim

$$B_t = W(\cdot - \infty, t] = W([0, t]), \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

obtenim un moviment Brownià. Això és immediat, ja que per definició el procés és Gaussià. Per tant, només cal comprovar que, donats  $s, t \geq 0$ ,  $\text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$ :

$$E[B_s B_t] = E[W([0, s])W([0, t])] = \nu([0, s] \cap [0, t]) = s \wedge t.$$

*Exemple 3.12* (El drap Brownià). Sigui  $W$  un soroll blanc en  $\mathbb{R}^k$  basat en la mesura  $\nu(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^k}(x) dx$ . Per cada  $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$ , definim

$$\begin{aligned} W_{t_1, \dots, t_k} &= W(\cdot - \infty, t_1] \times \dots \times \cdot - \infty, t_k]) \\ &= \begin{cases} W([0, t_1] \times \dots \times [0, t_k]), & \text{si } (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k, \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

El cas  $k = 1$  es redueix clarament a l'anterior i és, doncs, un moviment Brownià. Provem tot seguit que el procés definit és, en general, un drap Brownià  $k$ -dimensional.

**Proposició 3.13.** *El procés  $(W_{t_1, \dots, t_k}, (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k)$  és un drap Brownià.*

*Demostració.* Per construcció, el procés és Gaussià, té esperança zero i donats  $(s_1, \dots, s_k), (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$ ,

$$\begin{aligned} E(W_{t_1, \dots, t_k} W_{s_1, \dots, s_k}) &= E(W([0, t_1] \times \dots \times [0, t_k])W([0, s_1] \times \dots \times [0, s_k])) \\ &= \nu(( [0, t_1] \times \dots \times [0, t_k] ) \cap ( [0, s_1] \times \dots \times [0, s_k] )) \\ &= \nu([0, t_1 \wedge s_1] \times \dots \times [0, t_k \wedge s_k]). \end{aligned}$$

□

### 3.1.3 La integral respecte del soroll blanc

Sigui  $\nu$  una mesura  $\sigma$ -finita en  $\mathbb{R}^k$  i  $W$  un soroll blanc basat en  $\nu$ . Al llarg del treball, aquesta mesura acostumarà a ser  $\nu(dt, dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) dt dx$ , que dona lloc al

soroll blanc espai-temps. El que fem tot seguit és definir un procés Gaussià indexat per  $H = L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$  a partir del soroll  $W$ . Aquest procés l'interpretarem com la integral respecte del soroll blanc  $W$ , i amb aquesta integral donarem sentit a les EDPs lineals estocàstiques.

Construïm, doncs, un camp aleatori Gaussià  $(W(h), h \in H)$ . Utilitzarem la mateixa notació per al procés construït que per al soroll blanc perquè no hi ha risc de confusió.

Si  $A \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)$ , definim

$$W(\mathbf{1}_A) := W(A).$$

Més generalment, si  $h = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{1}_{A_i}$  amb  $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)$  disjunts dos a dos i  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ , establim

$$W(h) = W\left(\sum_{i=1}^r c_i \mathbf{1}_{A_i}\right) := \sum_{i=1}^r c_i W(A_i).$$

Es comprova fàcilment que  $W$  està ben definida per a aquesta classe de funcions: si  $h$  també es pot expressar com  $\sum_{i=1}^m d_i \mathbf{1}_{B_i}$ , amb  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)$  disjunts dos a dos i  $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ , aleshores es pot veure que

$$E \left[ \left( \sum_{i=1}^r c_i W(A_i) - \sum_{j=1}^m d_j W(B_j) \right)^2 \right] = 0,$$

d'on  $\sum_{i=1}^r c_i W(A_i) = \sum_{j=1}^m d_j W(B_j)$ .

Com que els conjunts  $A_i$  són disjunts dos a dos i  $\{W(A), A \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^k)\}$  és un camp aleatori Gaussià, per la propietat (1) de la Proposició 3.10, les variables aleatòries  $W(A_1), \dots, W(A_r)$  són independents. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \left\| W\left(\sum_{i=1}^r c_i \mathbf{1}_{A_i}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^r c_i W(A_i) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^r c_i^2 E[W(A_i)^2] = \sum_{i=1}^r c_i^2 \nu(A_i) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{1}_{A_i}(x) \right)^2 \nu(dx) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{1}_{A_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)}^2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

de manera que l'aplicació  $h \mapsto W(h)$  és una isometria del conjunt de les funcions simples de la forma  $h = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{1}_{A_i}$  en  $L^2(\Omega)$ . Com que el conjunt de les funcions simples és dens en  $L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$ , aquesta isometria admet una extensió única de  $L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$  a  $L^2(\Omega)$ . Més concretament, donada  $h \in L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$ , prenem una successió de funcions simples  $(h_n)_n$  tal que  $\|h - h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)} \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Llavors (3.6)

garanteix que  $\{W(h_n)\}_{n \geq 1}$  és una successió de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ , i definim  $W(h)$  com el seu límit:

$$W(h) := L^2(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} W(h_n).$$

La isometria (3.6) es preserva per pas al límit i tenim, per tant,

$$\|W(h)\|_{L^2(\Omega)} = \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)}.$$

Aquesta isometria es coneix amb el nom d'*isometria de Wiener*. De la variable aleatòria  $W(h)$  en diem *integral de Wiener* i la representem com una integral que té el soroll blanc  $W$  com a integrador:

$$W(h) = \int_{\mathbb{R}^k} h(x)W(dx).$$

La col·lecció  $(W(h), h \in H)$  no és només un camp aleatori Gaussià, com es comprova directament de la definició de  $W(h)$ , sinó que és també un *procés Gaussià isonormal*: un procés indexat per un espai de Hilbert real separable (en el nostre cas,  $L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$ ), amb funció mitjana zero i funció covariança  $C(f, g) = \langle f, g \rangle_H$  per tot  $f, g \in H$ , on  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  denota el producte escalar de  $H$ .

**Proposició 3.14.** *La família  $(W(h), h \in H)$  és un procés Gaussià isonormal en  $L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$ .*

*Demostració.* Per definició,  $W(h)$  segueix una distribució Gaussiana de mitjana zero i variança  $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)}^2$ . Només falta comprovar que  $E[W(f)W(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)}$ . En efecte,

$$\begin{aligned} W(f)W(g) &= \frac{1}{4}[W(f) + W(g)]^2 - \frac{1}{4}[W(f) - W(g)]^2 \\ &= \frac{1}{4}[W(f+g)]^2 - \frac{1}{4}[W(f-g)]^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

on hem utilitzat que  $W(f+g) = W(f) + W(g)$ . Això és clar per funcions  $f$  i  $g$  simples, gràcies a (2) de la Proposició 3.10, i es generalitza fàcilment per pas al límit.

Prenent esperances a (3.7),

$$E[W(f)W(g)] = \frac{1}{4}\|f+g\|_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)}^2 - \frac{1}{4}\|f-g\|_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)}^2 = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^k, \nu)},$$

per la identitat de polarització en el cas real.  $\square$

Hem construït, doncs, una integral estocàstica  $\int h dW$  per funcions  $h \in L^2(\mathbb{R}^k, \nu)$  deterministes. Aquesta integral ens permetrà donar una noció de solució tant de l'equació de la calor com de l'equació d'ones unidimensionals.

Hem vist a l'Exemple 3.11 que quan  $\nu(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx$ , el soroll blanc  $W$  associat a  $\nu$  dona lloc a un moviment Brownià si prenem  $B_t = W([0, t])$  per cada  $t \geq 0$ . Així, integrar una funció determinista  $h$  respecte d'un soroll blanc basat en  $\nu$  seria en certa manera integrar-la respecte del moviment Brownià. El següent lema ens mostra que, en efecte, la integral coincideix amb la integral d'Itô respecte del moviment Brownià (que, de fet, per integrands deterministes se sol anomenar també integral de Wiener).



**Lema 3.15.** *Sigui  $W(h)$  la integral de Wiener tal com l'hem definit en aquesta secció, amb soroll blanc basat en  $\nu(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx$ . Aleshores,*

$$W(h) = \int_0^\infty h(t) dB_t,$$

on la integral de la dreta és la integral clàssica de Wiener respecte del moviment Brownià.

*Demostració.* Sigui  $h = \mathbf{1}_{]s,t]}$ ,  $0 \leq s < t$ . Aleshores, per definició de la integral clàssica de Wiener i (3.4),

$$\int_0^\infty h(t) dB_t = B_t - B_s = W(]s,t]) = W(\mathbf{1}_{]s,t]}) = W(h).$$

Per linearitat, aquesta identitat s'estén a funcions simples  $h(t) = \sum_{j=1}^r a_j \mathbf{1}_{]t_{j-1}, t_j]}(t)$ . Per les propietats d'isometria de les aplicacions  $h \mapsto W(h)$  i  $h \mapsto \int_0^\infty h(t) dB_t$  de  $L^2(\mathbb{R}, \nu)$  en  $L^2(\Omega)$ , la identitat s'estén a qualsevol  $h \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$ .  $\square$

A la secció anterior (Exemple 3.12), hem vist que, a partir d'un soroll blanc en  $\mathbb{R}^2$  basat en la mesura  $\nu(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x) dx$ , podem definir un procés  $W_{t_1, t_2}$  indexat per  $\mathbb{R}_+^2$  que resulta ser un drap Brownià. Ara veurem que també és possible anar en la direcció oposada: obtenir el soroll a partir del drap Brownià. No donarem aquí tots els detalls (vegeu [6, Capítol 1]) per arribar a aquesta expressió, però sí que esbossarem breument el camí a seguir.

Considerem una mesura  $\nu$  en  $\mathbb{R}^k$   $\sigma$ -finita i un soroll blanc basat en  $\nu$ . Integrant respecte d'aquest soroll, obtenim el procés isonormal  $(W(h), h \in L^2(\mathbb{R}^k, \nu))$  de la Proposició 3.14. Restringim aquest procés a l'espai de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ . Aleshores el procés  $(W(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k))$  és continu en probabilitat. Això vol dir que si  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ , es té  $W(\varphi_n) \rightarrow W(\varphi)$  en probabilitat. En efecte,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$  implica que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $L^2(\mathbb{R}^k)$ . Per la isometria de Wiener, això dona la convergència  $W(\varphi_n) \rightarrow W(\varphi)$  en  $L^2(\Omega)$  i, per tant, també en probabilitat. Hi ha un resultat que ens assegura que, en aquest cas, el procés  $(W(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k))$  té una modificació  $(\hat{W}(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k))$  amb valors en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ , l'espai de les distribucions temperades en  $\mathbb{R}^k$ .

Ara situem-nos en  $\mathbb{R}^2$  i prenem la mesura  $\nu(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x) dx$ . Es pot veure que el drap Brownià defineix, q.s., una distribució temperada; és a dir,  $W(\omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  q.s. Aleshores hi ha definides les derivades del drap Brownià; en particular,

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} W(\omega), \varphi \right\rangle = \left\langle W(\omega), \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \varphi \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

per cada  $\omega$  dins d'un subconjunt  $\Omega_1 \subset \Omega$  de probabilitat 1. Operant el membre de la dreta, es pot acabar veient que, q.s.,

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} W(\omega), \varphi \right\rangle = W(\omega)(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Com que l'espai  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  és separable, podem identificar la versió  $\hat{W}$  del soroll blanc basat en  $\nu$  amb la segona derivada creuada del drap Brownià,  $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} W$ .

### 3.2 De les EDPs a les EDPEs

En aquesta secció, discutirem com hauria de ser la solució d'una EDPE a través d'un raonament heurístic. Els arguments que exposarem, doncs, s'han de prendre com un acostament intuïtiu a la noció de solució d'una EDPE: busquem donar-li un sentit que resulti raonable a partir del que hem observat quan l'equació és determinista.

Sigui  $W$  un soroll blanc espai-temps en  $\mathbb{R}^2$ , és a dir, basat en  $\nu = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) dt dx$ . Recuperem l'equació de la calor  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.8)$$

que hem estudiat a la secció 2.2. Seguint el principi de Duhamel, hem conclòs que

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x - y)g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t - s, x - y)f(s, y) dy ds, \quad (3.9)$$

amb  $\Phi$  donada a (2.6), n'és solució.

Ara, en comptes d'una funció determinista, posem el soroll blanc  $W$  en (3.8) com a font de calor:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.10)$$

on el punt de  $\dot{W}$  és pura notació: vol indicar la segona derivada creuada de  $W$ , que en la secció anterior hem vist que existeix q.s. en el sentit de les distribucions temperades. En qualsevol cas, el que caracteritza l'aleatorietat que associem a l'EDP clàssica és el soroll blanc  $W$ .

Imaginem que aquest soroll fos suau. Aleshores, per analogia amb (3.9), la solució de (3.10) seria

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x - y)g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t - s, x - y)\dot{W}(s, y) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x - y)g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t - s, x - y)W(ds, dy). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observem que aquesta darrera expressió tindria sentit amb la integral que hem definit respecte del soroll blanc, sempre que es donés la integrabilitat  $L^2$  de la funció  $\Phi$ . És a partir d'aquesta aproximació que s'acaba definint la solució camp aleatori d'una EDPE.

### 3.3 EDPEs amb soroll blanc espai-temps

D'acord amb les observacions que hem fet en la secció anterior, tot seguit presentem una noció de solució d'una EDPE lineal amb dimensió espacial  $k = 1$ . La nostra equació serà

$$\mathcal{L}u(t, x) = \dot{W}(t, x), \quad t > 0, x \in D, \quad (3.12)$$

on  $D$  és un interval de  $\mathbb{R}$  o bé tot  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{L}$  representa un operador lineal en derivades parcials que suposarem amb coeficients constants i  $W$  és un soroll blanc espai-temps. L'equació (3.12) va acompanyada almenys d'una condició inicial  $u(0, x)$  (si l'ordre  $m$  de  $\mathcal{L}$  en  $t$  és  $m > 1$ , també cal indicar el valor en  $(0, x)$  de les derivades de  $u$  fins a ordre  $m - 1$ ) i, si escau, també de condicions de vora. Com s'ha indicat a l'inici de la Secció 2.3, treballarem sempre amb condicions de Dirichlet. La notació  $\dot{W}$ , per bé que formal, es justifica pel que hem vist al final de la Secció 3.1.3: quan el restringim a funcions de Schwartz, el soroll blanc espai temps (o, més rigorosament, el procés isonormal Gaussià que hi associem) té una versió amb valors en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ .

La noció de solució amb què treballarem les EDPEs lineal se serveix del fet que les EDPs més elementals admeten una representació integral per a la seva solució, com hem vist al Capítol 2. Establirem una distinció segons si el domini espacial és  $D = \mathbb{R}$  o bé  $D \subsetneq \mathbb{R}$ , però la idea és exactament la mateixa: el terme aleatori  $\dot{W}$  juga el paper del terme determinista  $f(t, x)$  de l'EDP i, en comptes d'integrar el que anomenarem *solució fonamental* o *funció de Green* respecte de  $f(s, y) ds dy$ , ho farem respecte del soroll blanc espai-temps  $W$ .

## Equacions en $\mathbb{R}$

Sigui  $\mathcal{L}$  un operador lineal en derivades parcials definit en  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Considerem el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, x) = \psi_j(x), & x \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, m - 1, \end{cases} \quad (3.13)$$

on  $m$  és l'ordre de  $\mathcal{L}$  en  $t$ . Encara que donem aquesta expressió general, cal tenir en compte que l'ordre màxim en  $t$  amb què treballarem serà 2, en el cas de l'equació d'ones.

Suposem que si imposem condicions inicials nul·les, és a dir,  $\psi_1, \dots, \psi_m = 0$ , la solució del problema es pot escriure

$$u(t, x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} dy \Gamma(t, x; s, y) f(s, y),$$

on  $\Gamma(t, x; s, y)$  és una funció definida per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  amb  $0 < s < t$ . Aleshores diem que la funció  $\Gamma$  és la *solució fonamental* del problema de Cauchy (3.13).

Quan els coeficients de l'operador  $\mathcal{L}$  són constants, la solució fonamental és homogènia, és a dir, es pot expressar com  $\Gamma(t, x; s, y) := \Gamma(t - s, x - y)$ . Aquest és el cas tant de l'equació de la calor com de l'equació d'ones estudiades en  $\mathbb{R}$ .

## Equacions en $D \subsetneq \mathbb{R}$

Ara considerem un domini propi  $D$  de  $\mathbb{R}$ . Llavors al problema de Cauchy (3.13) cal afegir-hi una condició de vora, que considerarem de tipus Dirichlet:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in D, \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, x) = \psi_j(x), & x \in D, j = 0, 1, \dots, m-1, \\ u(t, x) = \phi(t, x), & t \geq 0, x \in \partial D. \end{cases} \quad (3.14)$$

Si la solució del problema de Cauchy-Dirichlet (3.14) amb condicions inicials i de frontera nul·les es pot escriure com

$$u(t, x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} dy G(t, x; s, y) f(s, y),$$

amb  $G(t, x; s, y)$  definida per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R}_+ \times D$  amb  $0 < s < t$ , diem que  $G$  n'és la *funció de Green*. És clar que el paper d'aquesta funció de Green és el mateix que el de la solució fonamental quan el domini és tot  $\mathbb{R}$ .

## Solució camp aleatori

Ara ja podem donar la noció de solució que utilitzarem per a les EDPEs lineals en aquest treball.

Sigui  $\mathcal{L}$  un operador lineal en derivades parcials en  $\mathbb{R}_+ \times D$  amb coeficients constants, on  $D$  és o bé la recta real o bé un subconjunt propi de  $\mathbb{R}$ , que tant pot ser fitat com no fitat. Considerem l'EDPE  $\mathcal{L}u = \dot{W}$  amb condicions inicials en  $t = 0$  fins a l'ordre que corresponguin i, sempre que  $D \neq \mathbb{R}$ , condicions de vora. Per uniformitzar la definició de solució, assumim que  $\Gamma(t, x; s, y)$  representa la solució fonamental o la funció de Green en  $\mathbb{R}_+ \times D$  associada a  $\mathcal{L}$ . Per garantir que la podem integrar respecte del soroll blanc espai-temps, requerirem la següent condició.

**Hipòtesi 3.16.** Per tot  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$ , la funció

$$]0, t] \times \mathbb{R} \ni (s, y) \mapsto \Gamma(t, x; s, y) \mathbf{1}_{]0, t] \times D}(s, y)$$

pertany a  $L^2([0, t] \times \mathbb{R})$ .

**Definició 3.17.** Sigui  $W$  un soroll blanc espai-temps. Sota la Hipòtesi 3.16, la solució camp aleatori a l'EDPE  $\mathcal{L}u = \dot{W}$  en  $\mathbb{R}_+ \times D$ , amb condicions inicials i de frontera especificades, és

$$u(t, x) = I_0(t, x) + \int_{\mathbb{R}_+} \int_D \Gamma(t, x; s, y) W(ds, dy), \quad (3.15)$$

on  $I_0(t, x)$  indica la solució de l'EDP homogènia (és a dir,  $\mathcal{L}u = 0$ ) amb les mateixes condicions inicials i de frontera.

En el cas de les EDPEs que estudiarem, l'equació de la calor i l'equació d'ones, la Hipòtesi 3.16 només se satisfà en dimensió espacial  $k = 1$ . Per a dimensions superiors, doncs, la noció d'integral respecte del soroll blanc espai-temps que utilitzem aquí no serveix i cal recórrer a d'altres objectes matemàtics que s'escapen dels objectius d'aquest treball.

### 3.3.1 L'equació estocàstica de la calor en $\mathbb{R}$

Com a primer exemple d'EDPE, considerem

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.16)$$

on  $\dot{W}$  és un soroll blanc espai-temps en  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Aquí la font de calor  $f(t, x)$  amb què hem treballat a (2.7) se substitueix per una font aleatòria  $\dot{W}(t, x)$ . D'acord amb la definició de solució fonamental que hem establert més amunt, recuperant la solució (2.9) veiem que

$$\Gamma(t, x; s, y) := \Gamma(t - s, x - y),$$

amb

$$\Gamma(s, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left(-\frac{y^2}{4s}\right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(s),$$

és la solució fonamental de l'operador calor,  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

El següent pas per arribar a la solució de (3.16) és comprovar que se satisfà la Hipòtesi 3.16 d'integrabilitat: hem de veure que  $(s, y) \mapsto \Gamma(t - s, x - y)$  és de  $L^2([0, t] \times \mathbb{R})$ . En efecte,

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} dy \Gamma^2(t - s, x - y) &= \int_0^t dr \int_{\mathbb{R}} dz \Gamma^2(r, z) \\ &= \int_0^t dr \frac{1}{\sqrt{8\pi r}} \int_{\mathbb{R}} dz \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left(-\frac{z^2}{2r}\right) \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{8\pi r}} dr = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

on en la penúltima igualtat hem utilitzat que  $\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left(-\frac{z^2}{2r}\right)$  és la densitat d'una llei Gaussiana i, per tant, la seva integral val 1.

Així, per la Definició 3.17, la solució camp aleatori de l'EDPE (3.16) és

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} dy \Gamma(t - s, x - y) W(ds, dy), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

on hem tingut en compte que la condició inicial de (3.16) és  $u(0, x) = 0$  i, per tant, la contribució determinista també ho és:  $I_0(t, x) = 0$ .

Com que s'obté a partir de la integral de Wiener, automàticament el procés  $(u(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  és Gaussià. Això simplifica l'estudi dels moments de la solució i d'algunes propietats de les seves trajectòries: com hem explicat a l'Observació 3.4, en els processos Gaussians  $X$ , el moment  $E[|X(t) - X(s)|^p]$  es pot obtenir a partir de  $E[|X(t) - X(s)|^2]$ . A [6, Capítol 2] es fa un estudi exhaustiu d'aquest moment d'ordre 2, que per la isometria de Wiener es pot estudiar a través de la solució fonamental  $\Gamma(t, x; s, y)$ . En particular, s'obté una fita superior del moment d'ordre 2 de  $u(t, x) - u(s, y)$  que permet concloure, via el criteri de continuïtat de Kolmogorov, que el procés  $(u(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  té una versió amb trajectòries conjuntament Hölder contínues d'exponents  $\alpha \in ]0, \frac{1}{4}[$  en la coordenada temporal i  $\beta \in ]0, \frac{1}{2}[$  en la coordenada espacial. Encara més, a través d'una fita inferior del moment d'ordre 2 de  $u(t, x) - u(s, y)$  es comprova que  $\alpha = \frac{1}{4}$  i  $\beta = \frac{1}{2}$  són òptims, en el sentit que per exponents majors ja no es té Hölder continuïtat.

En el proper capítol, obtindrem resultats d'aquest tipus per a l'equació d'ones en  $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$  i  $[0, L]$ .

## 4 L'equació d'ones lineal estocàstica

En l'estudi de les equacions en derivades parcials, dues de les més rellevants són l'equació de la calor i l'equació d'ones. La raó, més enllà del fet que representen exemples relativament senzills d'equacions de tipus parabòlic i hiperbòlic, respectivament, la trobem en l'ús recurrent que en fan camps com la física o la biologia per modelar multitud de fenòmens reals.

Pel mateix motiu, l'equació d'ones estocàstica és una de les principals EDPEs de tipus hipèrbolic. Aquest pas de l'EDP a l'EDPE sorgeix quan el fenomen que es pretén modelar s'explica millor si es considera una certa aleatorietat en l'equació, que prové, per exemple, de considerar que els xocs entre la partícula que s'estudia i les molècules del medi que l'envolta són aleatoris.

Un exemple d'aplicació real de l'equació d'ones estocàstica es troba en l'estudi de l'ADN, com s'exposa a [5, Capítol 2]. Una molècula d'ADN es pot veure com una corda elàstica, d'una longitud que es considera infinita en comparació amb el seu diàmetre. La posició d'aquesta corda es descriu mitjançant una parametrització en  $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$  que pren valors en l'espai  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{u}(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \\ u_3(t, x) \end{pmatrix},$$

on l'origen espacial es pren en un dels extrems de la corda i la unitat de longitud s'escull de forma que la longitud total valgui 1.

Una molècula d'ADN "flota" en un fluid, d'una manera semblant a com una partícula de pol·len flota en un fluid seguint un moviment Brownià. El moviment de la corda es pot descriure a través de la segona llei de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ). Prenem  $m = 1$  per simplicitat. Les forces que actuen en la corda són de tres tipus: elàstiques -incloent forces de torsió-, de fricció -per la viscositat del fluid- i impulsos aleatoris, que s'expliquen pels impactes en la corda de les molècules del fluid. Així, anomenant  $\vec{F}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , aquestes tres forces, la llei de Newton ens diu que

$$\vec{u}_{tt} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Aquest és un sistema de tres EDPEs molt complicat, que se simplifica si només es considera el moviment vertical i es negligeix la torsió. Aleshores,  $u(t, x)$  és unidimensional i es pot expressar així:

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x) - \int_0^1 k(x, y)u(t, y)dy + \dot{W}(t, x),$$

on el primer terme del membre dret representa les forces elàstiques, el segon està relacionat amb la fricció i el tercer és un soroll que nosaltres considerarem, per simplicitat, espai-temps.

Si fem un pas més en la simplificació del model inicial i eliminem el terme de fricció, acabem obtenint:

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x) + \dot{W}(t, x),$$

i per a aquesta EDPE lineal tenim definida la noció de *solució camp aleatori* (Secció 3.3). Cal, això sí, que la funció de Green de l'operador d'ones sigui  $L^2$  integrable. Això és cert en dimensió  $k = 1$ , però no ho és en  $k = 2$ , mentre que en  $k = 3$  la funció de Green ni tan sols és una funció (vegeu [5, Capítol 2]).

En aquest capítol, ens restringim a  $k = 1$  i estudiem la solució camp aleatori de l'equació d'ones estocàstica en tres dominis diferents:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$  i  $[0, L]$ . Observeu que aquest últim domini es correspon amb l'exemple de motivació que acabem de presentar. L'objectiu és obtenir resultats del tipus que hem enunciat en el cas de la calor en la Secció 3.3.1: Hölder continuïtat de les trajectòries de la solució (caldrà veure amb quins exponents) i fites inferiors del moment d'ordre 2 de la solució que permetin concloure, finalment, l'optimalitat dels exponents obtinguts.

Per a l'estudi en  $\mathbb{R}$ , s'ha utilitzat [6, Secció 2.4.3].

## 4.1 L'equació d'ones estocàstica en $\mathbb{R}$

L'operador diferencial de l'equació d'ones és  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , i si recuperem l'expressió (2.18), que resolva l'equació d'ones no homogènia amb condicions inicials nul·les, veiem que la solució fonamental associada a  $\mathcal{L}$  en  $\mathbb{R}$  és

$$\Gamma(t, x; s, y) := \Gamma(t - s, x - y),$$

amb

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \mathbf{1}_{]-t, t[}(x), \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Considerem ara l'equació d'ones estocàstica

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.2)$$

on  $\dot{W}$  és un soroll blanc espai-temps. Per donar-ne la solució, cal comprovar que la solució fonamental (4.1) compleix la Hipòtesi 3.16. En efecte, s'obté fàcilment que l'aplicació  $(s, y) \mapsto \Gamma(t - s, x - y)$  és de  $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ; de fet, la norma  $L^2$  val  $\frac{t}{2}$ , com comprovarem més endavant.

Per tant, podem aplicar la Definició 3.17 i la solució camp aleatori de (4.2) és

$$u(t, x) = I_0(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{|x-y| < t-s} W(ds, dy), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

on la contribució determinista  $I_0(t, x)$  ha estat calculada a (2.15) i val

$$I_0(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

Com ja havíem observat en l'equació de la calor estocàstica (Secció 3.3.1), el procés  $u := \{u(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$  és Gaussià, perquè la part aleatòria (la



integral de la solució fonamental respecte del soroll blanc espai-temps) ho és per construcció.

Tot seguit, estudiem les trajectòries d'aquest procés. Assumim que  $f$  és una funció contínua. Aleshores és clar que  $I_0(t, x)$  és una funció contínua en les dues variables. La següent Proposició ens indicarà que, de fet, existeix una versió de  $u$  amb trajectòries contínues.

**Proposició 4.1.** (1) *El procés estocàstic*

$$v(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{|x-y| < t-s} W(ds, dy), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

satisfà

$$E[|v(t, x) - v(s, y)|^p] \leq c_p \left(\frac{T}{2}\right)^{p/2} (|t-s| + |x-y|)^{\frac{p}{2}},$$

per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , amb  $c_p$  la constant dependent de  $p$  donada a (3.3). Així, existeix una versió d'aquest procés que té trajectòries conjuntament Hölder contínues d'ordre  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$ .

(2) *Assumim que la funció  $f$  és contínua. Aleshores la solució camp aleatori  $u$  té trajectòries contínues.*

*Demostració.* La primera part se segueix de la Proposició 4.2 enunciada a continuació, del fet que el moment d'ordre  $p$  està determinat pel d'ordre 2 per ser  $v$  un procés Gaussià (recordeu l'Observació 3.4) i, finalment, del criteri de continuïtat de Kolmogorov [10, Teorema 1.4.1]. Com que les trajectòries Hölder contínues de la versió de  $v$  donada per aquest criteri són, en particular, contínues, la segona part és clara.  $\square$

**Proposició 4.2.** *Signi  $T > 0$ . Aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [\Gamma(t-r, x-z) - \Gamma(s-r, y-z)]^2 \leq C_T (|t-s| + |x-y|), \quad (4.3)$$

amb  $C_T = \frac{T}{2}$ , per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ .

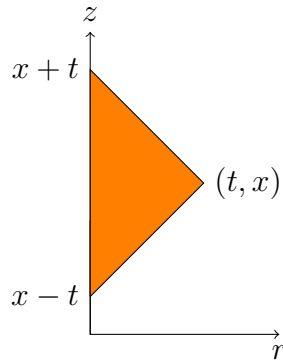


Figura 1:  $D(t, x)$ .

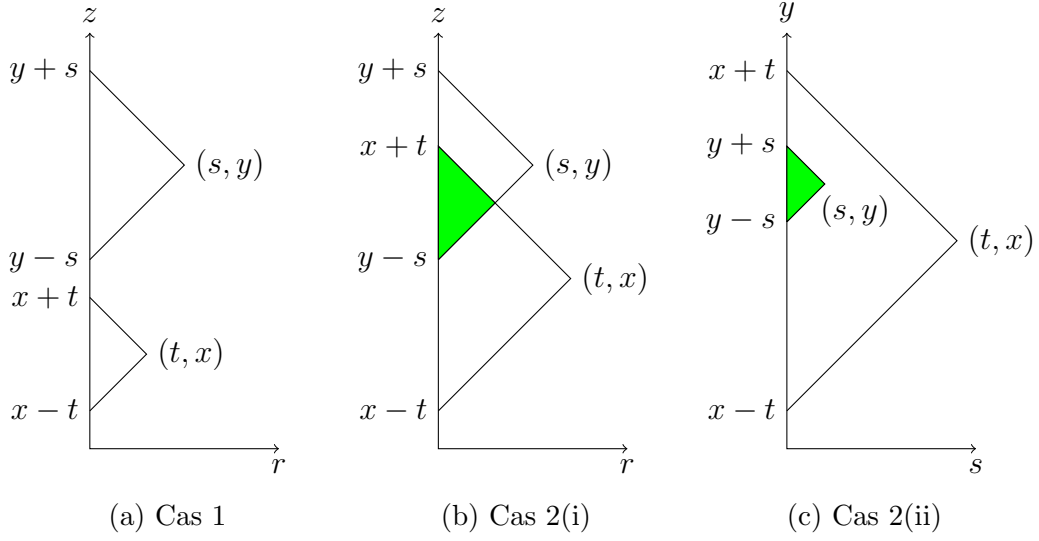


Figura 2: Els casos de la Proposició 4.2.

*Demostració.* Per  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , definim

$$D(t, x) = \{(s, y) \in [0, t] \times \mathbb{R} : |x - y| < t - s\}. \quad (4.4)$$

Si desenvolupem el quadrat de l'integrand de (4.3), tenint en compte que

$$\Gamma(t - r, x - z) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{D(t, x)}(r, z),$$

obtenim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [\Gamma(t - r, x - z) - \Gamma(s - r, y - z)]^2 \\ = \frac{1}{4} (|D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)|), \end{aligned}$$

amb  $|\cdot|$  la mesura de Lebesgue. És fàcil veure geomètricament que  $|D(t, x)| = t^2$  (vegeu la Figura 1). De fet, l'àrea d'un triangle rectangle isòscele és en general  $\frac{1}{4}h^2$ , on  $h$  denota la seva hipotenusa. Això ho utilitzarem recurrentment en aquesta demostració i les següents.

Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que  $x - t \leq y - s$  (si no és així, només cal intercanviar els papers de  $(t, x)$  i  $(y, s)$ ). A continuació, distingim casos (vegeu Figura 2).

*Cas 1.*  $D(t, x) \cap D(s, y) = \emptyset$ . Això passa si  $x + t \leq y - s$  o, equivalentment,  $t + s \leq y - x$ . Aleshores

$$\begin{aligned} |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| &= t^2 + s^2 \leq T(t + s) \\ &\leq T(y - x) = T|x - y|. \end{aligned}$$

*Cas 2.*  $D(t, x) \cap D(s, y) \neq \emptyset$ . Això passa si  $x + t > y - s$ . Llavors, hi ha dues configuracions possibles:

- (i)  $x + t \leq y + s$ . En aquest cas, l'àrea de  $D(t, x) \cap D(s, y)$  (vegeu Figura 2(b)) es pot calcular fàcilment amb l'expressió que hem donat més amunt per a triangles rectangles isòsceles, i val

$$|D(t, x) \cap D(s, y)| = \frac{1}{4}(x + t - (y - s))^2.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} & |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| \\ &= t^2 - 2\frac{1}{4}(x + t - (y - s))^2 + s^2 \\ &= t^2 - \frac{(x - y)^2}{2} - \frac{(t + s)^2}{2} - (x - y)(t + s) + s^2 \\ &\leq t^2 - \frac{(t + s)^2}{2} - (x - y)(t + s) + s^2 \end{aligned}$$

i utilitzant que  $s + t \geq 2(t \wedge s)$  i que  $t + s \leq 2T$ ,

$$\begin{aligned} &\leq t^2 - 2(t \wedge s)^2 + 2T|x - y| + s^2 \\ &= |t^2 - s^2| + 2T|x - y| \leq 2T(|t - s| + |x - y|). \end{aligned}$$

- (ii)  $x + t > y + s$ . Llavors  $D(t, x) \cap D(s, y) = D(s, y)$  (vegeu Figura 2(c)) i

$$\begin{aligned} |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| &= t^2 - 2s^2 + s^2 = t^2 - s^2 \\ &\leq 2T(t - s) = 2T|t - s|. \end{aligned}$$

□

Ara ens preguntem si els exponents de Hölder continuïtat que hem obtingut en la Proposició 4.1 per a  $v$  són òptims.

**Proposició 4.3.** *Fixat  $T > 0$ , considerem el procés estocàstic  $\{v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\}$  definit a la Proposició 4.1.*

- (1) *Per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ ,*

$$E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) \leq \frac{T}{2}(|t - s| + |x - y|).$$

- (2) *Fixem  $0 < t_0 \leq T$ ,  $M > 0$ . Per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [t_0, T] \times [-M, M]$ ,*

$$\min\left(\frac{t_0}{4}, \frac{t_0^2}{8M}\right)(|t - s| + |x - y|) \leq E(|v(t, x) - v(s, y)|^2).$$

*Demostració.* La fita superior se segueix d'aplicar la isometria de Wiener i la Proposició 4.2.

Ens centrem, doncs, a demostrar (2). Assumim, sense pèrdua de generalitat, que  $t_0 \leq s \leq t \leq T$ . Suposem també que  $x > y$  (el cas  $x \leq y$  es fa d'una manera semblant). En aquest cas,  $x + t > y + s$ . Distingim casos.

Cas 1.  $D(t, x) \cap D(s, y) = \emptyset$ , de forma que  $x - t \geq y + s$ . Aleshores

$$\begin{aligned} E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) &= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [\Gamma(t - r, x - z) - \Gamma(s - r, y - z)]^2 \\ &= \frac{1}{4} (|D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)|) \\ &= \frac{1}{4} (t^2 + s^2) \geq \frac{1}{2} t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{t_0^2}{2M} 2M \geq \frac{t_0^2}{4M} (x - y), \end{aligned}$$

ja que  $|x|, |y| \leq M$ .

Cas 2.  $D(t, x) \cap D(s, y) \neq \emptyset$ , de manera que  $x - t < y + s$ . En aquest cas,

$$\begin{aligned} E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) &= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [\Gamma(t - r, x - z) - \Gamma(s - r, y - z)]^2 \\ &\geq \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz [\Gamma^2(t - r, x - z) + \Gamma^2(s - r, y - z) - 2\Gamma(t - r, x - z)\Gamma(s - r, y - z)]. \end{aligned}$$

Aleshores, utilitzant l'expressió de la solució fonamental, obtenim

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz \Gamma^2(t - r, x - z) = \frac{1}{4} \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz \mathbf{1}_{\{|x-z| < t-r\}} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^s 2(t - r) dr = \frac{1}{4} (2st - s^2), \\ I_2 &:= \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz \Gamma^2(s - r, y - z) = \frac{1}{4} |D(s, y)| = \frac{1}{4} s^2 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz 2\Gamma(t - r, x - z)\Gamma(s - r, y - z) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s dr \int_{(x-t+r) \vee (y-s+r)}^{(x+t-r) \wedge (y+s-r)} dz = \frac{1}{2} \int_0^s dr \int_{(x-t+r) \vee (y-s+r)}^{y+s-r} dz, \end{aligned}$$

ja que  $t \geq s$  i  $x > y$ . Suposem que  $x - t > y - s$  o, equivalentment,  $x - y > t - s$ . Aleshores

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^s dr \int_{x-t+r}^{y+s-r} dz = \frac{1}{2} s(y - x + t).$$

Si, en canvi,  $x - t \leq y - s$  o, equivalentment,  $x - y \leq t - s$ ,

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^s dr \int_{y-s+r}^{y+s-r} dz = \frac{1}{2} s^2.$$

Per tant,

$$E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) \geq I_1 + I_2 - I_3 \geq \begin{cases} \frac{1}{2} t_0 (x - y), & \text{si } x - y > t - s, \\ \frac{1}{2} t_0 (t - s), & \text{si } x - y \leq t - s. \end{cases}$$

Si  $x - y > t - s$ , posem  $x - y = \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - y) \geq \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(t - s)$ . Observem que en el Cas 1 som en aquesta configuració, ja que  $x - y \geq t + s > t - s$ . Si  $x - y \leq t - s$ , fem el mateix amb  $t - s = \frac{1}{2}(t - s) + \frac{1}{2}(t - s) \geq \frac{1}{2}(t - s) + \frac{1}{2}(x - y)$  per obtenir el resultat.  $\square$

**Proposició 4.4.** Fixats  $0 < t_0 \leq T$ , sigui  $\{v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\}$  el procés estocàstic definit a la Proposició 4.1.

- (1) Siguin  $x \in \mathbb{R}$  i  $K \subset [t_0, T]$  un interval tancat. Aleshores, q.s, les trajectòries del procés  $(v(t, x), t \in K)$  no són Hölder contínues d'ordre  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .
- (2) Siguin  $t \in [t_0, T]$  i  $J \subset \mathbb{R}$  un interval tancat. Aleshores, q.s, les trajectòries del procés  $(v(t, x), x \in J)$  no són Hölder contínues d'ordre  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .

*Demostració.* La prova d'aquesta optimalitat es basa en la fita inferior obtinguda a la Proposició 4.3. Tots dos resultats s'obtenen amb el mateix argument.

Provem (1). Suposem que, fixat un  $x \in \mathbb{R}$  i un interval tancat  $K \subset [t_0, T]$ , les trajectòries de  $(v(t, x), t \in K)$  són q.s. Hölder contínues d'ordre  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Aleshores, q.s.,

$$\sup_{t, s \in K, t \neq s} \frac{v(t, x) - v(s, x)}{|t - s|^\alpha} < \infty.$$

Per tant, el procés Gaussià centrat

$$\left( \frac{v(t, x) - v(s, x)}{|t - s|^\alpha}, t, s \in K, t \neq s \right)$$

és finit q.s. D'aquí es pot concloure que

$$E \left( \sup_{t, s \in K, t \neq s} \frac{|v(t, x) - v(s, x)|^2}{|t - s|^{2\alpha}} \right) < \infty. \quad (4.5)$$

Això és conseqüència immediata de [1, Teorema 3.2]. Aquest teorema diu que donat un procés Gaussià centrat  $X$  i indexat per un cert conjunt  $J$ , aleshores

$$P \left\{ \sup_{j \in J} X_j < \infty \right\} = 1 \iff E \left[ e^{\alpha (\sup_{j \in J} X_j)^2} \right] < \infty$$

per un  $\alpha$  prou petit. Així doncs, la funció generatriu del quadrat del suprem existeix en un interval prou petit a l'entorn del 0 i, en conseqüència, té moments absoluts finits. En particular, per al moment absolut d'ordre 1, obtenim (4.5).

Per tant,

$$E(|v(t, x) - v(s, x)|^2) \leq C|t - s|^{2\alpha},$$

però al mateix temps, per la Proposició 4.3,

$$c_{t_0, M}|t - s| \leq E(|v(t, x) - v(s, y)|^2),$$

pel que arribem a contradicció. □

## 4.2 L'equació d'ones estocàstica en $\mathbb{R}_+$

Ara el nostre domini espacial serà  $\mathbb{R}_+$ . Això implica, d'entrada, una variació respecte del problema en  $\mathbb{R}$ : cal indicar una condició a la vora  $x = 0$ . Per simplicitat,

assumirem que la funció s'anul·la a la frontera, encara que el problema, que és purament determinista, està ben estudiat en general. L'expressió de la funció de Green, a més, difereix de la solució fonamental en  $\mathbb{R}$ .

Si tornem a l'expressió (2.23), que resolva l'equació d'ones no homogènia en  $\mathbb{R}_+$  amb condicions inicials i de vora nul·les, veiem que la solució de Green associada a l'operador d'ones  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  en  $\mathbb{R}_+$  és  $G(t, x; s, y) := G(t - s, x, y)$ , amb

$$G(t - s, x, y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x-(t-s)| < y < x+(t-s)\}}(s, y), \quad 0 < s < t, x \in \mathbb{R}_+. \quad (4.6)$$

Definirem

$$E(t, x) = \{(s, y) \in [0, t] \times \mathbb{R} : |x - t + s| < y < x + t - s\}.$$

Amb aquesta notació,

$$G(t - s, x, y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{E(t, x)}(s, y).$$

Considerem ara l'equació d'ones estocàstica

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), & t > 0, x > 0, \\ u(0, x) = f(x), & x > 0, \\ u_t(0, x) = g(x), & x > 0, \\ u(t, 0) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

on  $\dot{W}$  és un soroll blanc espai-temps. Per donar-ne la solució, cal comprovar que la funció de Green (4.6) compleix la Hipòtesi 3.16. En efecte, s'obté fàcilment que l'aplicació  $(s, y) \mapsto \Gamma(t - s, x, y)$  és de  $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ; de fet, com calcularem explícitament més endavant la norma  $L^2$  val  $\frac{t}{2}$  si  $x \geq t$  i  $\frac{1}{2}\sqrt{t^2 - (t - x)^2}$  en cas contrari.

Per tant, podem aplicar la Definició 3.17 i la solució camp aleatori de (4.7) és

$$u(t, x) = I_0(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{E(t, x)} W(ds, dy), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+. \quad (4.8)$$

on la contribució determinista  $I_0(t, x)$  ha estat calculada a (2.21) i val

$$I_0(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy & \text{si } x \geq t \\ \frac{1}{2}[f(x + t) - f(t - x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} g(y) dy & \text{si } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Només a tall d'apunt, si hom imposa una funció  $h$  com a condició de vora, aleshores cal afegir un terme  $I_0^{(b)}(t, x) = h(t - x) \mathbf{1}_{\{t \geq x\}}$  a  $I_0(t, x)$ .

Ara ens disposem a obtenir resultats del mateix estil que els de la secció anterior. El procés  $u := \{u(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$  és Gaussià. Tot seguit, estudiem les trajectòries d'aquest procés. Assumim que  $f$  és una funció contínua per garantir que  $I_0(t, x)$  és contínua. La següent Proposició dona una versió de  $u$  amb trajectòries contínues.

**Proposició 4.5.** (1) *El procés estocàstic*

$$v(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{E(t,x)} W(ds, dy), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+,$$

satisfà

$$E[|v(t, x) - v(s, y)|^p] \leq c_p \left(\frac{T}{2}\right)^{p/2} (|t - s| + |x - y|)^{\frac{p}{2}},$$

per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ , amb  $c_p$  la constant dependent de  $p$  donada a (3.3). Així, existeix una versió d'aquest procés que té trajectòries conjuntament Hölder contínues d'ordre  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$ .

(2) *Assumim que la funció  $f$  és contínua. Aleshores la solució camp aleatori  $u$  té trajectòries contínues.*

*Demostració.* Com en la secció anterior, la primera part és conseqüència de la Proposició 4.6 enunciada tot seguit, de la Gaussianitat del procés i del criteri de continuïtat de Kolmogorov. La segona part és òbvia.  $\square$

**Proposició 4.6.** *Sigui  $T > 0$ . Aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t - r, x, z) - G(s - r, y, z)]^2 \leq C_T (|t - s| + |x - y|), \quad (4.9)$$

amb  $C_T = \frac{T}{2}$ , per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ .

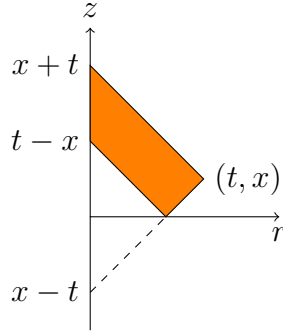


Figura 3:  $E(t, x)$  quan  $x - t < 0$ .

*Demostració.* Per  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ , mantenim la notació

$$D(t, x) = \{(s, y) \in [0, t] \times \mathbb{R} : |x - y| < t - s\}.$$

Aleshores,

$$E(t, x) = D(t, x) \quad (4.10)$$

si  $(t, x)$  és tal que  $x - t \geq 0$  i

$$|E(t, x)| = |D(t, x)| - (t - x)^2 \quad (4.11)$$

si  $x - t < 0$ . Això darrer és fàcil de calcular a partir de la Figura 3, restant àrees de triangles.

Si desenvolupem el quadrat de (4.9), tenint en compte que

$$G(t - r, x, z) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{E(t,x)}(r, z),$$

obtenim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t - r, x, z) - G(s - r, y, z)]^2 \\ = \frac{1}{4} (|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)|). \end{aligned}$$

Assumim  $x - t \leq y - s$  com a la Proposició 4.2. Encara més, considerem que  $x - t < 0$ , ja que en cas contrari, som en la situació (4.10) i val la Proposició 4.2. Dividim l'anàlisi en dos casos.

*Cas 1:*  $E(t, x) \cap E(s, y) = D(t, x) \cap D(s, y)$ . Aleshores la prova és immediata, ja que, per (4.10) i (4.11),

$$\begin{aligned} |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ = |E(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |E(s, y)| \\ \leq |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| \end{aligned}$$

i per la Proposició 4.2 ja estem.

*Cas 2:*  $E(t, x) \cap E(s, y) \neq D(t, x) \cap D(s, y)$ . Perquè passi això, és condició necessària que  $t - x > y - s$  (en cas contrari, com mostren les Figures 4(a) i 4(b), seríem en el Cas 1). Distingim casos:

*Cas 2.1:*  $x + t \leq y + s$ .

Suposem primer que  $y - s \geq 0$ . Utilitzant la Figura 4(c), tenim

$$\begin{aligned} |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ = |D(t, x)| - (t - x)^2 - 2(|D(t, x) \cap D(s, y)| - \frac{1}{4}(t - x - (y - s))^2) \\ + |D(s, y)| \end{aligned}$$

i, com que  $-(t - x)^2 \leq -\frac{1}{2}(t - x)^2$ ,

$$\begin{aligned} \leq |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| \\ - \frac{1}{2}(t - x)^2 + \frac{1}{2}(t - x - (y - s))^2 \\ \leq |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)|. \end{aligned}$$

En la darrera desigualtat hem usat que  $y - s \geq 0$ .



Suposem ara que  $y - s < 0$ . En aquest cas, per la Figura 4(d),

$$\begin{aligned}
& |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\
&= |D(t, x)| - (t - x)^2 - 2(|D(t, x) \cap D(s, y)| - \frac{1}{4}(t - x - (y - s))^2) \\
&\quad + |D(s, y)| - (s - y)^2 \\
&= |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| \\
&\quad - (t - x)^2 - (s - y)^2 + \frac{1}{2}(t - x + s - y)^2 \\
&= |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)| - \frac{1}{2}(t - x - (s - y))^2 \\
&\leq |D(t, x)| - 2|D(t, x) \cap D(s, y)| + |D(s, y)|.
\end{aligned}$$

En tots dos casos podem aplicar la Proposició 4.2.

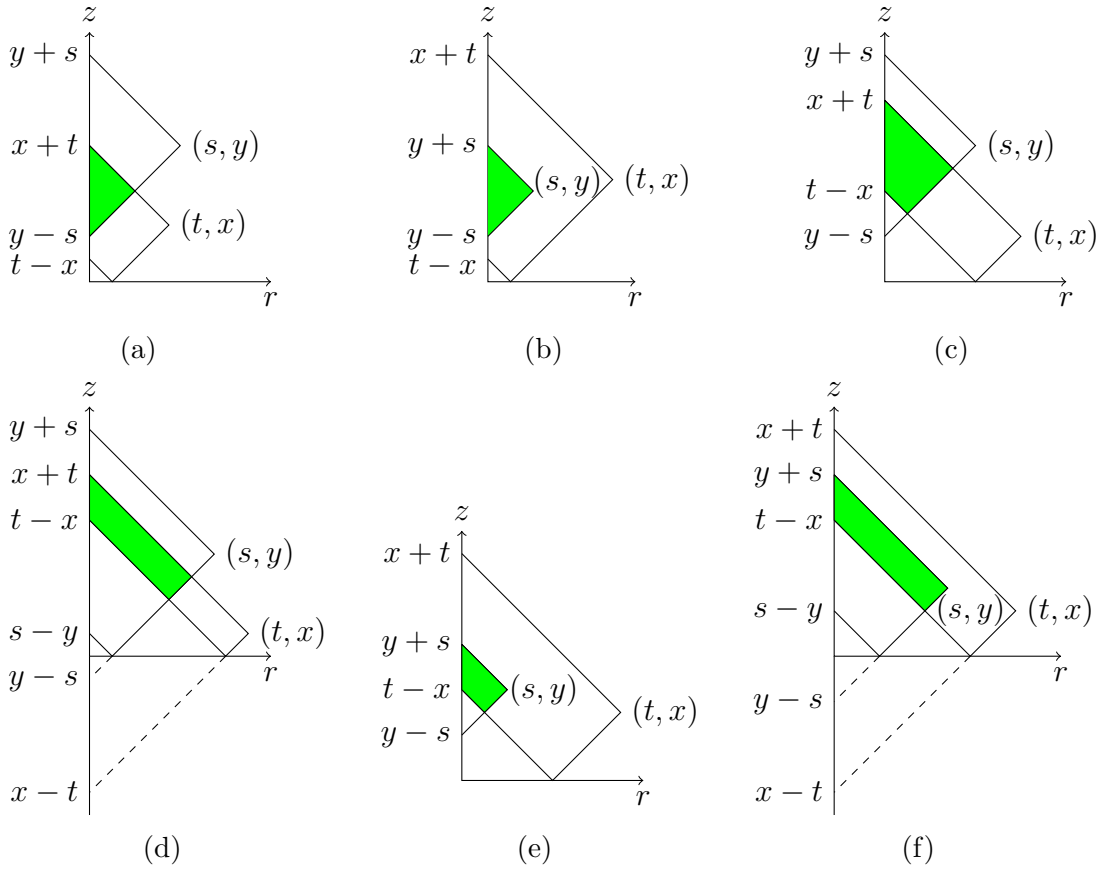


Figura 4: Els casos de la demostració de la Proposició 4.6.

*Cas 2.2:*  $x + t > y + s$ . Distingim casos:

- (i)  $t - x > y + s$  o, equivalentment,  $x + y < t - s$ . Aleshores  $E(t, x) \cap E(s, y) = \emptyset$ .

Si  $y - s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= |D(t, x)| - (t - x)^2 + |D(s, y)| = t^2 - (t - x)^2 + s^2 \\ &= 2tx - x^2 + s^2 \leq 2tx + 2s^2 \leq 2T(x + s) \end{aligned}$$

i, com que per hipòtesi  $s \leq y$  i  $x + y < t - s$ ,

$$\leq 2T(x + y) < 2T(t - s) = 2T|t - s|.$$

Si  $y - s < 0$ ,

$$\begin{aligned} & |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= |D(t, x)| - (t - x)^2 + |D(s, y)| - (s - y)^2 \\ &= t^2 - (t - x)^2 + s^2 - (s - y)^2 \\ &= 2tx + 2sy - x^2 - y^2 \leq 2tx + 2sy \\ &\leq 2T(x + y) < 2T|t - s|, \end{aligned}$$

on en l'última desigualtat hem usat de nou la hipòtesi  $x + y < t - s$ .

(ii)  $t - x \leq y + s$ . En aquesta configuració, s'obtenen resultats que ja han aparegut em el Cas 2.1. En efecte, si  $y - s \geq 0$ , per la Figura 4(e), tenim

$$\begin{aligned} & |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= |D(t, x)| - (t - x)^2 - 2(|D(t, x) \cap D(s, y)| - \frac{1}{4}(t - x - (y - s))^2) + |D(s, y)|. \end{aligned}$$

Si, per contra,  $y - s < 0$  (Figura 4(f)), aleshores

$$\begin{aligned} & |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= |D(t, x)| - (t - x)^2 - 2(|D(t, x) \cap D(s, y)| - \frac{1}{4}(t - x - (y - s))^2) \\ &\quad + |D(s, y)| - (s - y)^2. \end{aligned}$$

□

**Proposició 4.7.** Fixat  $T > 0$ , considerem el procés estocàstic  $\{v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+\}$  definit a la Proposició 4.5.

(1) Per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ ,

$$E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) \leq \frac{T}{2}(|t - s| + |x - y|).$$

(2) Fixem  $0 < t_0 \leq T$  i  $M, x_0 > 0$ . Per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [t_0, T] \times [x_0, M]$ ,

$$\min\left(\frac{t_0}{16}, \frac{t_0^2}{8M}, \frac{t_0 x_0}{4T}\right)(|t - s| + |x - y|) \leq E(|v(t, x) - v(s, y)|^2).$$

*Demostració.* La fita superior se segueix d'aplicar la isometria de Wiener i la Proposició 4.6.

Provem (2). Assumim, sense pèrdua de generalitat, que  $t_0 \leq s \leq t \leq T$ . Suposem també que  $x > y$  (el cas  $x \leq y$  es fa d'una manera semblant). Aleshores tenim que  $x + t > y + s$ .

Recordem que, per la isometria de Wiener,

$$\begin{aligned} E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) &= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}_+} dz [G(t - r, x, z) - G(s - r, y, z)]^2 \\ &= \frac{1}{4} (|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)|). \end{aligned}$$

Si  $x - t \geq 0$  i  $y - s \geq 0$ , com que  $E(t, x) = D(t, x)$  i  $E(s, y) = D(s, y)$ , la Proposició 4.3 ja ens dona el resultat. Per tant, considerarem que

$$(x - t < 0) \quad \vee \quad (y - s < 0). \quad (4.12)$$

*Cas 1:*  $x - t < 0$ . Distingim casos segons el signe de  $y - s$ :

*Cas 1.1:*  $y - s \geq 0$ . Com que  $E(t, x) \cap E(s, y) \subset E(s, y) = D(s, y)$ , tenim

$$\begin{aligned} &|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &\geq |E(t, x)| - 2|E(s, y)| + |E(s, y)| = |E(t, x)| - |E(s, y)| \\ &= t^2 - (t - x)^2 - s^2 = 2tx - x^2 - s^2 \\ &= tx - x^2 + tx - st + st - s^2 \\ &= x(t - x) + t(x - s) + s(t - s). \end{aligned}$$

Com que, per hipòtesi,  $t - x > 0$  i  $x - s > y - s \geq 0$ ,

$$|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| > s(t - s) \geq t_0(t - s).$$

*Cas 1.2:*  $y - s < 0$ . Distingim casos:

(i)  $x - t > y - s$  o, equivalentment,  $x - y > t - s$ . Per la Figura 5(a),

$$\begin{aligned} &|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= t^2 - (t - x)^2 - 2\frac{1}{4}[(y + s - (x - t))^2 - (s - y - (x - t))^2] \\ &\quad + s^2 - (s - y)^2. \end{aligned}$$

Usant la identitat  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , tenim

$$(y + s - (x - t))^2 - (s - y - (x - t))^2 = 4y(s - (x - t)),$$

de manera que

$$\begin{aligned} &|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= t^2 - (t - x)^2 - 2y(s - (x - t)) + s^2 - (s - y)^2 \\ &= 2tx - x^2 - 2sy + 2xy - 2ty + 2sy - y^2 \\ &= 2tx - 2ty - x^2 - y^2 + 2xy \\ &= t(x - y) + x(t - x) + y(x - y) - y(t - x) \\ &= t(x - y) + (x - y)(t - x) + y(x - y). \end{aligned}$$

Com que, per hipòtesi,  $x > y$  i  $t - x > 0$ ,

$$|E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| > t(x - y) \geq t_0(x - y).$$

(ii)  $x - t \leq y - s$  o, equivalentment,  $x - y \leq t - s$ .

Suposem primer que  $t - x \geq y + s$ . Utilitzant la Figura 5(c), tenim que  $E(t, x) \cap E(s, y) = \emptyset$  i

$$\begin{aligned} & |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &= t^2 - (t - x)^2 + s^2 - (s - y)^2 \\ &= 2tx - x^2 + 2sy - y^2 \\ &= x(t - x) + y(s - y) + tx + sy. \end{aligned}$$

Emprant les hipòtesis  $t - x > 0$  i  $s - y > 0$ ,

$$\begin{aligned} & |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ &> tx + sy \geq 2t_0x_0 = \frac{2t_0x_0}{T}T \geq \frac{2t_0x_0}{T}(t - s), \end{aligned}$$

ja que  $t, s \leq T$ .

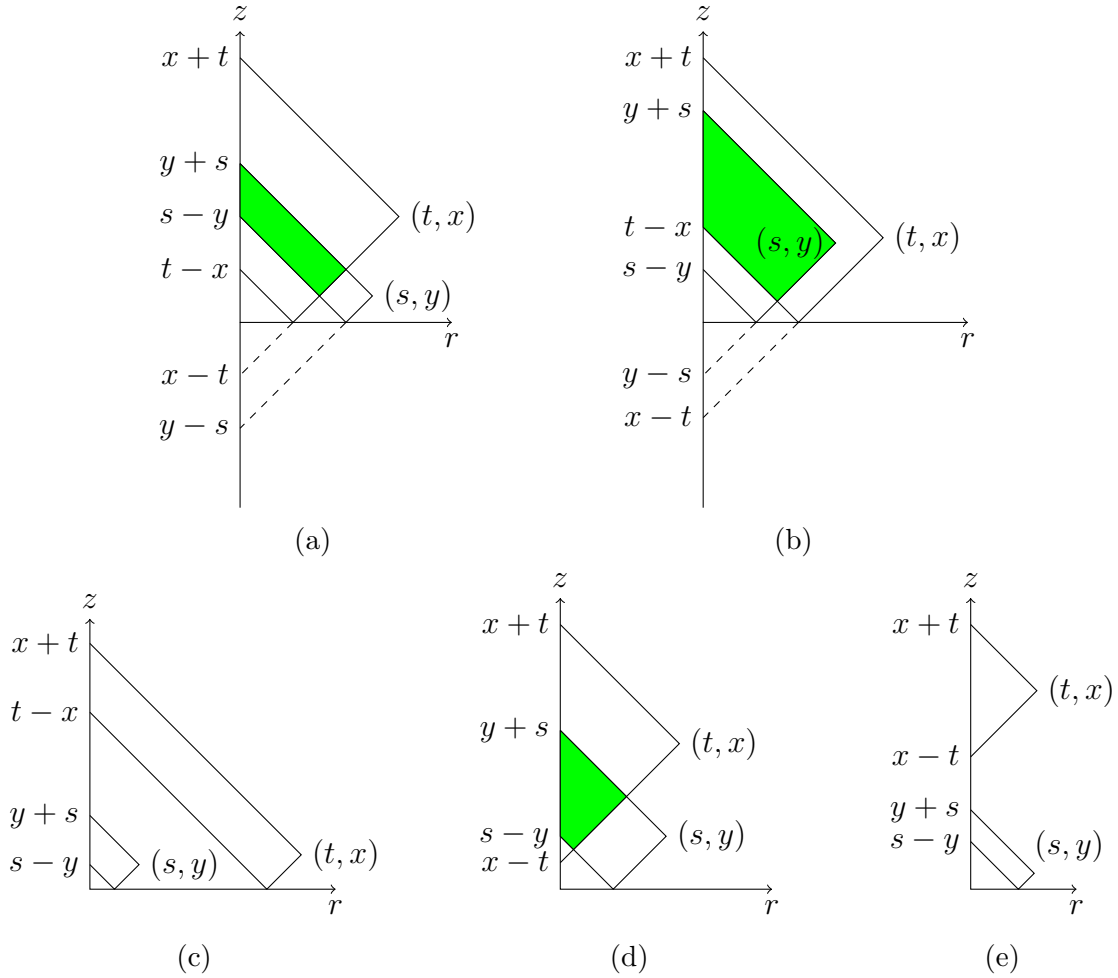


Figura 5: Els casos de la demostració de la Proposició 4.7.

Ara suposem que  $t - x < y + s$  (vegeu Figura 5(b)). Aleshores,

$$\begin{aligned}
& |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\
&= t^2 - (t - x)^2 - 2\left(s^2 - \frac{1}{4}(t - x - (y - s))^2\right) + s^2 - (s - y)^2 \\
&= t^2 - s^2 - (t - x)^2 + \frac{1}{2}(t - x + s - y)^2 - (s - y)^2 \\
&= t^2 - s^2 - \frac{1}{2}(t - x - (s - y))^2 \\
&= \frac{1}{2}(t + s)(t - s) + \frac{1}{2}(t + s)(t - s) - \frac{1}{2}(t - s - (x - y))^2 \\
&\geq \frac{1}{2}(t + s)(t - s) + \frac{1}{2}(t - s)^2 - \frac{1}{2}(t - s - (x - y))^2 \\
&\geq \frac{1}{2}(t + s)(t - s) \geq t_0(t - s),
\end{aligned}$$

ja que  $x - y > 0$ .

*Cas 2:*  $x - t \geq 0$ . Aleshores, per la hipòtesi (4.12),  $y - s < 0$ . Distingim dos casos:

*Cas 2.1:*  $y + s \geq x - t$ . Aleshores, mirant la Figura 5(d),

$$|E(t, x) \cap E(s, y)| \leq \frac{1}{4}(y + s - (x - t))^2.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
& |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\
&\geq t^2 - 2\frac{1}{4}(y + s - (x - t))^2 + s^2 - (s - y)^2 \\
&= \frac{1}{2}(2t^2 - (y + s - (x - t))^2 + 2s^2 - 2(s - y)^2).
\end{aligned}$$

Com que

$$\begin{aligned}
(y + s - (x - t))^2 &= (y + s - (x - t))(y + s - (x - t)) \\
&\leq (y + s)(y + s - (x - t)),
\end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned}
& |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\
&\geq \frac{1}{2}(2t^2 - (y + s)(y + s - (x - t)) - 2y^2 + 4sy) \\
&= \frac{1}{2}(2t^2 - (y + s)^2 + y(x - t) + s(x - t) - 2y^2 + 4sy) \\
&\geq \frac{1}{2}(2t^2 - (y + s)^2 + s(x - t) - 2y^2 + 4sy) \\
&= \frac{1}{2}(2t^2 - y^2 - s^2 - 2sy + sx - ts - 2y^2 + 4sy) \\
&= \frac{1}{2}(2t^2 - s^2 - ts + s(x - y) - 3y^2 + 3sy).
\end{aligned}$$

Com que  $t \geq s$ ,  $2t^2 - s^2 - ts \geq 0$ , i per tant

$$\begin{aligned} |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| \\ \geq \frac{1}{2}(s(x - y) + 3y(s - y)) > \frac{1}{2}t_0(x - y), \end{aligned}$$

ja que  $s - y > 0$ .

*Cas 2.2:*  $y + s < x - t$ . Aleshores  $E(t, x) \cap E(s, y) = \emptyset$  (Figura 5(e)) i

$$\begin{aligned} |E(t, x)| - 2|E(t, x) \cap E(s, y)| + |E(s, y)| = t^2 + s^2 - (s - y)^2 \\ > t^2 \geq t_0^2 = \frac{t_0^2}{M}M \geq \frac{t_0^2}{M}(x - y), \end{aligned}$$

ja que  $0 \leq x, y \leq M$ .

Per concloure la demostració, fem com a la prova de la Proposició 4.3. Si  $x - y > t - s$ , com passa als Casos 1.2(i) i 2, posem  $x - y = \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - y) \geq \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(t - s)$ ; si  $x - y \leq t - s$ , com passa als Casos 1.1 i 1.2(ii), fem el mateix amb  $t - s = \frac{1}{2}(t - s) + \frac{1}{2}(t - s)$  per obtenir el resultat.  $\square$

Com a la secció anterior, la fita inferior que acabem de provar ens garanteix l'optimalitat dels exponents que havíem obtingut en la Proposició 4.5. Ometem la demostració perquè és idèntica a la de 4.4.

**Proposició 4.8.** *Fixats  $0 < t_0 \leq T$ , sigui  $\{v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+\}$  el procés estocàstic definit a la Proposició 4.5.*

1. *Siguin  $x > 0$  i  $K \subset [t_0, T]$  un interval tancat. Aleshores, q.s, les trajectòries del procés  $(v(t, x), t \in K)$  no són Hölder contínues d'ordre  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .*
2. *Siguin  $t \in [t_0, T]$  i  $J \subset (0, \infty)$  un interval tancat. Aleshores, q.s, les trajectòries del procés  $(v(t, x), x \in J)$  no són Hölder contínues d'ordre  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .*

### 4.3 L'equació d'ones estocàstica en l'interval $[0, L]$

Finalment, estudiem l'equació d'ones en el domini  $[0, L]$ . D'acord amb el que hem vist a (2.29), la funció de Green de l'operador d'ones  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  en  $[0, L]$  és  $G(t, x; s, y) := G(t - s, x, y)$ , amb

$$G(t, x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \quad (4.13)$$

Aquesta funció presenta una simetria espacial que ens servirà més endavant: com que  $\sin(n\pi - x) = \sin(x)$  per qualsevol  $n \in \mathbb{Z}$  imparell i  $\sin(n\pi - x) = -\sin(x)$  per qualsevol  $n \in \mathbb{Z}$  parell, es té

$$\sin\left(\frac{n\pi(L - x)}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi(L - y)}{L}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

per tot  $n \in \mathbb{Z}$ , d'on

$$G(t, x, y) = G(t, L - x, L - y). \quad (4.14)$$

Observem que per tot  $(t, x) \in ]0, T] \times [0, L]$ ,  $G(t - \cdot, x, *) \in L^2([0, t] \times [0, L])$ . En efecte, de (4.13) es dedueix

$$\|G(t, x, *)\|_{L^2[0, L]}^2 = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (4.15)$$

i, fitant els sinus per 1, obtenim

$$\sup_{t \geq 0} \|G(t, x, *)\|_{L^2[0, L]}^2 \leq \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

d'on  $G(t - \cdot, x, *) \in L^2([0, t] \times [0, L])$ . Per tant, la funció de Green (4.13) compleix la Hipòtesi 3.16.

Considerem ara l'equació d'ones estocàstica

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = \dot{W}(t, x), & t > 0, x \in ]0, L[, \\ u(0, x) = f(x), & x \in ]0, L[, \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in ]0, L[, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

on  $\dot{W}$  és un soroll blanc espai-temps. Aplicant la Definició 3.17, la solució camp aleatori de (4.16) és

$$u(t, x) = I_0(t, x) + \int_0^t \int_0^L G(t - s, x, y) W(ds, dy), \quad t \geq 0, x \in [0, L].$$

on la contribució determinista  $I_0(t, x)$ , assumint que  $f, g \in L^2([0, L])$ , l'hem calculada a (2.31) i és

$$I_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

amb

$$\begin{aligned} C_n &:= \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \\ D_n &:= \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy. \end{aligned}$$

Com en els dos dominis anteriors, el procés  $u := \{u(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, L]\}$  és Gaussià i la seva part aleatòria té trajectòries Hölder contínues q.s.

**Proposició 4.9.** (1) *El procés estocàstic*

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^L G(t - s, x, y) W(ds, dy), \quad t \geq 0, x \in [0, L],$$

satisfà

$$E[|v(t, x) - v(s, y)|^p] \leq c_p (2T + L)^{p/2} (|t - s| + |x - y|)^{\frac{p}{2}},$$

per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times [0, L]$ , amb  $c_p$  la constant dependent de  $p$  donada a (3.3). Així, existeix una versió d'aquest procés que té trajectòries conjuntament Hölder contínues d'ordre  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$ .

- (2) Assumim que la funció  $f$  és contínua. Aleshores la solució camp aleatori  $u$  té trajectòries contínues.

*Demostració.* La prova és la mateixa que en els casos de  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R}_+$ , ara basada en la Proposició 4.10.  $\square$

**Proposició 4.10.** *Signi  $T > 0$ . Aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t - r, x, z) - G(s - r, y, z)]^2 \leq C_{T,L} (|t - s| + |x - y|), \quad (4.17)$$

amb  $C_{T,L} = 2T + L$ , per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times [0, L]$ .

*Demostració.* Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que  $s \geq t$ . Desenvolupem en primer lloc el quadrat que apareix a l'integrand de (4.17):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t - r, x, z) - G(s - r, y, z)]^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz G^2(t - r, x, z) + \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz G^2(s - r, y, z) \\ & \quad - 2 \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz G(t - r, x, z) G(s - r, y, z) =: I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned}$$

Aleshores, fent ús de (4.15) i de la identitat  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ , tenim que

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz G^2(t - r, x, z) \\ &= \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^t \sin^2\left(\frac{n\pi(t-r)}{L}\right) dr \\ &= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^t \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi(t-r)}{L}\right)\right) dr \\ &= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(t - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

i igualment,

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz G^2(s - r, y, z) \\ &= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \left(s - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi s}{L}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.19)$$



Calculem ara la integral corresponent al terme creuat:

$$\begin{aligned}
I_3 &:= 2 \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz G(t-r, x, z) G(s-r, y, z) \\
&= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \\
&\quad \times \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi(t-r)}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi(s-r)}{L}\right) dr \\
&= \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi(t-r)}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi(s-r)}{L}\right) dr,
\end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sin\left(\frac{n\pi(t-r)}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi(s-r)}{L}\right) dr \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^t \cos\left(\frac{n\pi(t-s)}{L}\right) dr - \int_0^t \cos\left(\frac{n\pi(t+s-2r)}{L}\right) dr \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( t \cos\left(\frac{n\pi(t-s)}{L}\right) + \frac{L}{2n\pi} \left[ \sin\left(\frac{n\pi(t+s-2r)}{L}\right) \right]_{r=0}^{r=t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( t \cos\left(\frac{n\pi(t-s)}{L}\right) + \frac{L}{2n\pi} \left[ \sin\left(\frac{n\pi(s-t)}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi(t+s)}{L}\right) \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( t \cos\left(\frac{n\pi(t-s)}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} \left[ \sin\left(\frac{n\pi(-t)}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( t \cos\left(\frac{n\pi(s-t)}{L}\right) - \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) \right),
\end{aligned}$$

on en la primera igualtat hem utilitzat la identitat

$$2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

i en la quarta,

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Així,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \\
&\quad \times \left( t \cos\left(\frac{n\pi(s-t)}{L}\right) - \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) \right). \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Posant en comú les expressions (4.18), (4.19) i (4.20), obtenim

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \left( t - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi t}{L} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \left( s - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi s}{L} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \left( -t \cos \left( \frac{n\pi(s-t)}{L} \right) + \frac{L}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Demostrem (4.17) quan  $x = y$ . Aleshores (4.21) pren la forma

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \left\{ t + s - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi t}{L} \right) - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi s}{L} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( -t \cos \left( \frac{n\pi(s-t)}{L} \right) + \frac{L}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Afitem  $\sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  per 1, reagrupem termes i utilitzem la identitat trigonomètrica  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ :

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &\leq \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ 2 \left( t - t \cos \left( \frac{n\pi(s-t)}{L} \right) \right) + s - t \right. \\
&\quad \left. + \frac{L}{n\pi} \left( -\sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) - \sin \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \right) \right\} \\
&= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ 2t \left( 1 - \cos \left( \frac{n\pi(s-t)}{L} \right) \right) + s - t \right. \\
&\quad \left. + \frac{L}{n\pi} \left( \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \left( \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) - \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \left( \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) - \sin \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Suposem que  $2k\pi \leq \frac{\pi(s-t)}{L} \leq 2(k+1)\pi$ , amb  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Recordem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4} \tag{4.22}$$

si  $x \in [0, 2\pi]$ . En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{4.23}$$

Fent ús d'aquests dos resultats,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ 2t \left( 1 - \cos \left( \frac{n\pi(s-t)}{L} \right) \right) + s - t \right\} \\
&= 2t \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi(s-t)}{L} - 2k\pi \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\pi(s-t)}{L} - 2k\pi \right)^2 \right) + \frac{\pi^2}{6}(s-t) \\
&\leq \left( 2T \frac{\pi^2}{2L} + \frac{\pi^2}{6} \right) (s-t) = \left( \frac{T}{L} + \frac{1}{6} \right) \pi^2 (s-t). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Pel teorema del valor mitjà,

$$\begin{aligned}
& \frac{L}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \left( \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) - \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right) \\
&\leq \frac{L}{n\pi} \left| \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) - \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right| \leq \frac{L}{n\pi} \frac{n\pi(s-t)}{L} = s-t,
\end{aligned}$$

i similarment

$$\frac{L}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \left( \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) - \sin \left( \frac{n\pi s}{L} \right) \right) \leq |t-s| = s-t.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &\leq \frac{L}{\pi^2} \left( \left( \frac{T}{L} + \frac{1}{6} \right) \pi^2 (s-t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2(s-t) \right) \\
&= \frac{L}{\pi^2} \left( \frac{T}{L} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \right) \pi^2 (s-t) = \left( T + \frac{L}{2} \right) |t-s|,
\end{aligned}$$

on en la primera igualtat hem utilitzat novament (4.23).

Provat el cas en què  $x = y$ , ara suposarem que  $t = s$ . Llavors, utilitzant que  $\sin(x) \cos(x) = \sin(2x)/2$  a la segona igualtat, l'expressió (4.21) esdevé:

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \left( \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sin^2 \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \right) \left( t - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi t}{L} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \left( -t + \frac{L}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right) \right\} \\
&= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( t - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi t}{L} \right) \right) \times \\
&\quad \left( \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sin^2 \left( \frac{n\pi y}{L} \right) - 2 \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \right) \\
&= \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( t - \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi t}{L} \right) \right) \left( \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) - \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

Tot seguit, afitem i utilitzem les identitats  $\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$  i  $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &\leq \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(T + \frac{L}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right)^2 \\ &= \frac{L}{\pi^2} \left(T + \frac{L}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi(x-y)}{2L}\right)\right)^2 \\ &\leq \frac{4L}{\pi^2} \left(T + \frac{L}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi(x-y)}{2L}\right) \\ &= \frac{2L}{\pi^2} \left(T + \frac{L}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{L}\right)\right). \end{aligned}$$

Suposem que  $2k\pi \leq \frac{\pi|x-y|}{L} \leq 2(k+1)\pi$ , amb  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Seguint el mateix procediment que a (4.24), obtenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{L}\right)\right) \leq \frac{\pi^2}{2L} |x-y|,$$

d'on

$$I_1 + I_2 - I_3 \leq \frac{2L}{\pi^2} \left(T + \frac{L}{2}\right) \frac{\pi^2}{2L} |x-y| = \left(T + \frac{L}{2}\right) |x-y|.$$

El cas general se segueix immediatament dels dos que hem demostrat:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t-r, x, z) - G(t-r, y, z) + G(t-r, y, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t-r, x, z) - G(t-r, y, z)]^2 \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}_+} dr \int_{\mathbb{R}} dz [G(t-r, y, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\ &\leq 2 \left(T + \frac{L}{2}\right) |x-y| + 2 \left(T + \frac{L}{2}\right) |t-s| = (2T+L) (|t-s| + |x-y|). \end{aligned}$$

□

Per obtenir la fita inferior del moment d'ordre 2 de  $v(t, x) - v(s, y)$ , utilitzarem una altra expressió de la funció de Green, que es pot obtenir mitjançant el mètode de les imatges i es troba a [2]. És la següent:

$$G(t, x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\mathbf{1}_{\{|x-2mL-y|\leq t\}} - \mathbf{1}_{\{|x-2mL+y|\leq t\}}), \quad t > 0, x, y \in ]0, L[. \quad (4.25)$$

Aquesta expressió és fàcilment representable (a la Figura 6, donat un horitzó  $T > 0$ , veiem  $G(t, x; r, z) = G(t-r, x, z)$  per  $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$  fixat).

Una altra virtut d'aquesta nova expressió és que presenta una forma més semblant a les funcions de Green de l'operador d'ones en  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R}_+$  (en la propera demostració, farem ús d'aquesta similitud).

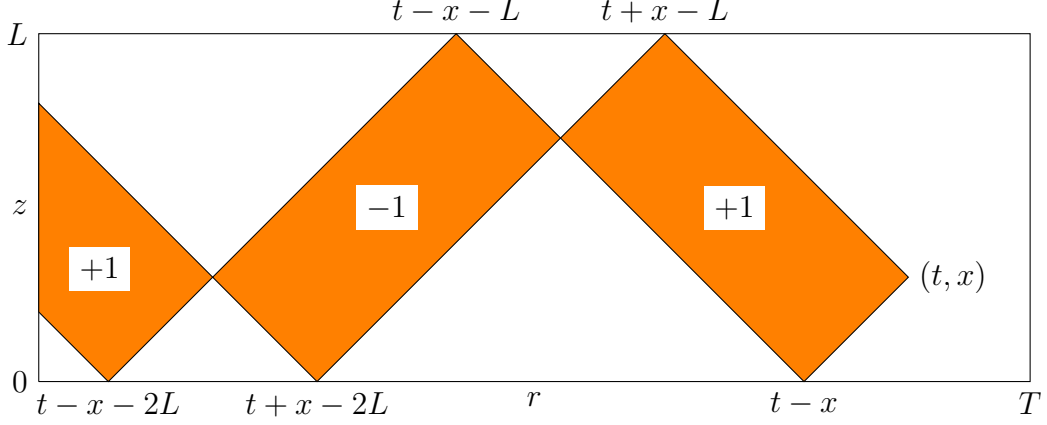


Figura 6:  $2G(t-r, x, z)$ , que val  $+1$  o  $-1$  segons s'indica a la figura.

**Proposició 4.11.** Fixat  $T > 0$ , considerem el procés estocàstic  $\{v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times [0, L]\}$  definit a la Proposició 4.9.

(1) Per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times [0, L]$ ,

$$E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) \leq (2T + L)(|t - s| + |x - y|).$$

(2) Fixem  $0 < t_0 \leq T$ ,  $0 < x_0 < \frac{L}{2}$ . Per cada  $(t, x), (s, y) \in [t_0, T] \times [x_0, L - x_0]$ ,

$$C(T, L, t_0, x_0)(|t - s| + |x - y|) \leq E(|v(t, x) - v(s, y)|^2),$$

$$\text{amb } C(T, L, t_0, x_0) := \min\left(\frac{t_0}{16}, \frac{t_0^2}{8(L-x_0)}, \frac{t_0 x_0}{4T}, \frac{x_0^2}{8T}\right).$$

*Demostració.* La fita superior és immediata de la isometria de Wiener i la Proposició 4.10.

Provem, per tant, la fita inferior. Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que  $t_0 \leq s \leq t \leq T$  (si no, intercanviem  $(t, x)$  i  $(s, y)$ ).

Per la isometria de Wiener,

$$E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) = \int_0^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2.$$

És suficient provar la Proposició si  $x \geq y$ . En efecte, assumim que en aquest cas és certa i prenem  $x' = L - x$  i  $y' = L - y$ , tenim  $x' \geq y'$  i per (4.14),

$$\begin{aligned} E(|v(t, x) - v(s, y)|^2) &= \int_0^L dz \int_0^t dr [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\ &= \int_0^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x', L-z) - G(s-r, y', L-z)]^2 \end{aligned}$$

i aplicant el canvi de variable  $z' = L - z$ ,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t dr \int_0^L dz' [G(t-r, x', z') - G(s-r, y', z')]^2 \\
&= E(|v(t, x') - v(s, y')|^2) \\
&\geq C(T, L, t_0, x_0)(|t-s| + |x' - y'|) \\
&= C(T, L, t_0, x_0)(|t-s| + |x - y|),
\end{aligned}$$

on en la desigualtat hem utilitzat la hipòtesi que si  $x' \geq y'$ , la desigualtat és certa. Per tant, podem assumir  $t_0 \leq s \leq t \leq T$  i  $x \geq y$ .

Per provar el resultat, aplicarem la Proposició 4.7 amb  $M = L - x_0$  diverses vegades, i denotarem per  $G_+$  la funció de Green associada a l'operador d'ones en  $\mathbb{R}_+$ . Distingim casos segons la zona del pla  $[0, T] \times [0, L]$  que ocupa  $(t, x)$ .

*Cas 1.*  $t - x < 0$  i  $t + x - L < 0$ . Aleshores som en la regió I de la Figura 7.

Observant la Figura 8, és immediat de veure que  $G(t-r, x, z) = G_+(t-r, x, z)$  (de fet, com que en aquest cas  $E(t, x) = D(t, x)$ , també és igual a la funció de Green en  $\mathbb{R}$ ) i  $G(s-r, y, z) = G_+(s-r, y, z)$ . Aquestes observacions també es poden fer recorrent a l'expressió analítica (4.25). Per tant, val el resultat de la Proposició 4.7.

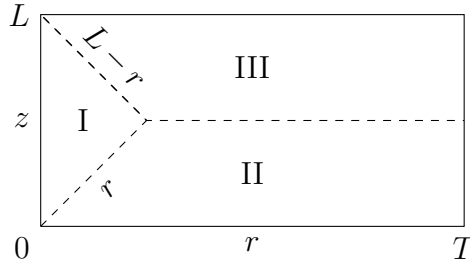
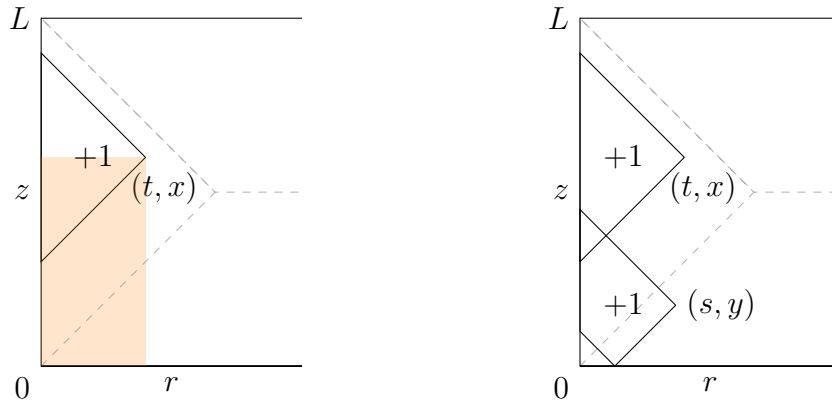


Figura 7: Regions en què subdividim el pla  $[0, T] \times [0, L]$ .



- (a) Donat  $(t, x)$ ,  $2G(t-r, x, z)$ . La regió ombrejada representa els punts on pot ser  $(s, y)$ , d'acord amb  $x \geq y$  i  $t \geq s$ .
- (b) Donats  $(t, x)$  i  $(s, y)$ ,  $2G(t-r, x, z)$  i  $2G(s-r, y, z)$ .

Figura 8: Cas 1:  $(t, x)$  és en la regió I.

Cas 2.  $t - x \geq 0$  o  $t + x - L \geq 0$ . Distingim casos segons el valor de  $x$ :

Cas 2.1.  $x \leq \frac{L}{2}$ . Aleshores som en la regió II de la Figura 7 i  $t - x \geq 0$ . Llavors

$$\begin{aligned} \int_0^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\ \geq \int_{t-x}^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2. \end{aligned}$$

Si  $(s, y)$  és tal que  $s < t - x$  (regió vermella de la Figura 9), tenim

$$\int_{t-x}^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 = \int_{t-x}^t dr \int_0^L dz G^2(t-r, x, z),$$

i per la Figura 9 s'obté

$$\begin{aligned} \int_{t-x}^t dr \int_0^L dz G^2(t-r, x, z) &= \frac{1}{4}x^2 \geq \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{x_0^2}{4T}T \\ &\geq \frac{x_0^2}{4T}(t-s) \geq \frac{x_0^2}{8T}(|t-s| + |x-y|), \end{aligned} \quad (4.26)$$

on en l'última desigualtat s'ha utilitzat que, com a conseqüència de la hipòtesi  $s < t - x$ , es té  $t - s > x > x - y$ .

Suposem ara que  $s \geq t - x$  (regió taronja de la Figura 9). Gràficament, es veu que  $G(t-r, x, z) = G_+(t-r, x, z)$  i  $G(s-r, y, z) = G_+(s-r, y, z)$  en  $t-x \leq r \leq t$ . En qualsevol cas, ho podem comprovar analíticament. Si  $t-x \leq r \leq t$ , tenim  $0 \leq t-r \leq x \leq \frac{L}{2}$  (això últim per hipòtesi del Cas 2.1). Aleshores  $\mathbf{1}_{\{|x-2mL-z|\leq t-r\}}$  i  $\mathbf{1}_{\{|x-2mL+z|\leq t-r\}}$  valen 0 llevat que  $m = 0$ . Per tant,

$$\begin{aligned} G(t-r, x, z) &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{\{|x-z|\leq t-r\}} - \mathbf{1}_{\{|x+z|\leq t-r\}}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{|x-t+r|\leq z\leq x+t-r\}} = G_+(t-r, x, z). \end{aligned}$$

El mateix val per  $(s, y)$  en lloc de  $(t, x)$ .

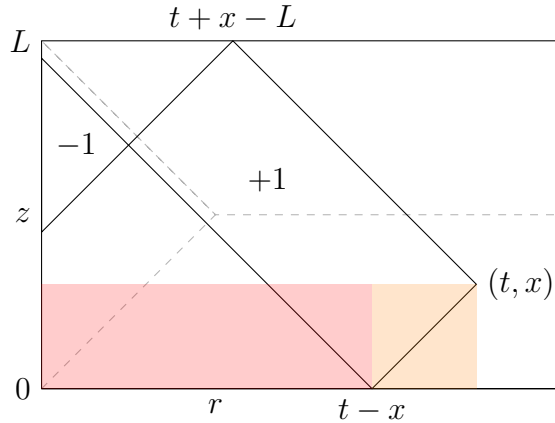


Figura 9: Donat  $(t, x)$  en la regió II,  $2G(t-r, x, z)$ . La regió ombrada representa els punts on pot ser  $(s, y)$ , d'acord amb  $x \geq y$  i  $t \geq s$ : en vermell, els punts amb  $s < t - x$  i en taronja, on  $s \geq t - x$ .

Llavors tenim

$$\begin{aligned}
& \int_{t-x}^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\
&= \int_{t-x}^t dr \int_0^L dz [G_+(t-r, x, z) - G_+(s-r, y, z)]^2 \\
&= \int_{t-x}^t dr \int_{\mathbb{R}_+} dz [G_+(t-r, x, z) - G_+(s-r, y, z)]^2,
\end{aligned}$$

ja que, si  $r \geq t-x$ ,  $G_+(t-r, x, z) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x-t+r| \leq z \leq x+t-r\}}$  només pot ser no nul·la quan  $z \leq x+t-r \leq 2x \leq L$  (això últim per hipòtesi del Cas 2.1) i el mateix per  $G_+(s-r, y, z)$ , ja que llavors cal que  $z \leq y+s-r \leq x+t-r \leq L$ .

Fent el canvi de variables  $r' = r - (t-x)$ , l'anterior integral esdevé

$$\int_0^{t-(t-x)} dr' \int_{\mathbb{R}_+} dz [G_+(t-(t-x)-r', x, z) - G_+(s-(t-x)-r', y, z)]^2.$$

Per la isometria de Wiener primer i la Proposició 4.7 amb  $M = L - x_0$  després,

$$\begin{aligned}
& \int_{t-x}^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\
&= E(|v(t-(t-x), x) - v(s-(t-x), y)|^2) \\
&\geq \min \left( \frac{t_0}{16}, \frac{t_0^2}{8(L-x_0)}, \frac{t_0 x_0}{4T} \right) (|t-(t-x) - (s-(t-x))| + |x-y|) \\
&= \min \left( \frac{t_0}{16}, \frac{t_0^2}{8(L-x_0)}, \frac{t_0 x_0}{4T} \right) (|t-s| + |x-y|).
\end{aligned}$$

*Cas 2.2.*  $x > \frac{L}{2}$ . En aquest cas som en la regió III de la Figura 7 i  $t+x-L \geq 0$ .

Aquest cas és molt similar al Cas 2.2. Això gràficament es veu clar a través de la Figura 6: en la regió III,  $(t, x)$  es reflecteix abans en  $t+x-L$  que en  $t-x$  (de fet, hi ha una zona de la regió on no es dona aquesta reflexió). N'hi ha prou amb aplicar el mateix procediment que en el Cas 2.1, però ara amb  $t+x-L$  en el paper de  $t-x$ . És a dir, s'afita

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2 \\
&\geq \int_{t+x-L}^t dr \int_0^L dz [G(t-r, x, z) - G(s-r, y, z)]^2
\end{aligned}$$

i es distingeixen casos segons si  $s < t+x-L$  o  $s \geq t+x-L$ .

En el primer cas, l'equivalent a (4.26) (integrant el temps entre  $t+x-L$  i  $t$ ), la integral val  $\frac{1}{4}(L-x)^2$ , que per la hipòtesi  $x \leq L-x_0$  de l'enunciat també està afitat per  $\frac{1}{4}x_0^2$  i estem en la mateixa situació que a (4.26). En el segon cas, s'observa que  $G(t-r, x, z) = G_+(t-r, x, z)$  i  $G(s-r, y, z) = G_+(s-r, y, z)$  en  $t+x-L \leq r \leq t$  i repetint el procediment usat en el Cas 2.1 s'obté la mateixa fita.  $\square$



Per acabar el capítol, deduïm com en les seccions precedents l'optimalitat dels exponents de Hölder obtinguts.

**Proposició 4.12.** *Fixats  $0 < t_0 \leq T$ , sigui  $\{v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times [0, L]\}$  el procés estocàstic definit a la Proposició 4.9.*

1. *Siguin  $x \in (0, L)$  i  $K \subset [t_0, T]$  un interval tancat. Aleshores, q.s, les trajectòries del procés  $(v(t, x), t \in K)$  no són Hölder contínues d'ordre  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .*
2. *Siguin  $t \in [t_0, T]$  i  $J \subset (0, L)$  un interval tancat. Aleshores, q.s, les trajectòries del procés  $(v(t, x), x \in J)$  no són Hölder contínues d'ordre  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .*

## 5 EDPEs no lineals

Hem vist a l'inici del Capítol 4 que l'equació d'ones estocàstica s'utilitza per modelar el moviment d'una molècula d'ADN. Ara veurem un altre exemple, relacionat amb l'estudi de l'estructura interna del Sol. Segons s'explica a [5, Capítol 2], els punts de la superfície solar es van apropant i allunyant del centre, per l'acció d'unes ones de xoc que es propaguen a través del Sol. L'origen d'aquestes ones de xoc no està del tot clar, i hi ha un corrent que l'atribueix a certes turbulències. En qualsevol cas, la localització i la intensitat d'aquests xocs són desconegudes, de forma que es modelen probabilísticament. Un d'aquests models, proposat per P. Stark, assumeix que la principal font dels xocs se situa en una regió esfèrica de radi  $R$  a l'interior del sol. Aleshores, l'equació de dilatació del sol, que es coneix amb el nom d'equació de Navier, s'expressa de la següent manera:

$$u_{tt}(t, x) = c^2(x)\rho_0(x) \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla u \right) + \nabla \cdot F(t, x) \right), \quad (5.1)$$

on  $x \in B(0, R)$ ,  $c^2(x)$  és la velocitat de propagació de l'ona en  $x$ ,  $\rho_0(x)$  és la densitat en  $x$  i  $F(t, x)$  és un terme aleatori que modela el xoc originat en  $x$  en el temps  $t$ . Un model que se sol prendre per a  $F$  és un soroll Gaussià tridimensional concentrat en l'esfera  $\partial B(0, r)$ , amb  $0 < r < R$ . Aquesta mena de sorolls s'escapa dels objectius del treball, però no està de més reproduir el model tal com es treballa realment. Nosaltres el reduïrem a un soroll blanc espai-temps.

L'equació (5.1) és una equació d'ones per a un medi de densitat no constant. Aquí considerarem equacions del tipus

$$(u_{tt} - u_{xx})(t, x) = \sigma(t, x, u(t, x))\dot{W}(t, x) + b(t, x, u(t, x)), \quad (5.2)$$

per  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , on  $\dot{W}(t, x)$  serà un soroll blanc espai-temps, i les funcions  $\sigma, b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s'assumiran amb unes certes propietats, com ara Lipschitz continuïtat i creixement lineal en la component espacial.

L'equació (5.2) és un exemple d'EDPE no lineal. Més endavant, donarem la noció de solució d'aquestes EDPEs, però és fàcil d'imaginar que caldrà integrar  $\sigma(t, x, u(t, x))$  respecte del soroll blanc espai-temps  $W(t, x)$ . Ara bé, en general,  $\sigma(t, x, u(t, x))$  és aleatori, de manera que la integral de Wiener definida a la Secció 3.1.3 no serveix.

Dedicarem la primera secció d'aquest capítol a definir una integral respecte del soroll blanc espai-temps que admeti integrands aleatoris. En la segona secció, provarem un resultat general d'existència i unicitat de solució d'EDPEs no lineals, així com un teorema que assegura la Hölder continuïtat de les trajectòries de la solució. Finalment, aplicarem els resultats obtinguts a l'estudi de l'equació d'ones estocàstica no lineal.

Aquest capítol s'ha elaborat a partir de [6, Capítol 2].

## 5.1 La integral estocàstica respecte del soroll blanc espai-temps

Tot seguit, desenvolupem una teoria d'integració estocàstica respecte del soroll blanc espai-temps que, a diferència de la presentada al Capítol 3, admet integrands aleatoris. Aquest nou objecte matemàtic ens permetrà estudiar EDPEs no lineals.

Sigui  $D$  un interval (afitat o no) de  $\mathbb{R}$ , que serà el domini en què estudiem l'EDPE. En aquesta secció, restringim el soroll blanc espai-temps (recordeu l'Exemple 3.9) a  $[0, T] \times D$ , és a dir, considerem un soroll blanc en  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  basat en la mesura  $\nu(dt, dx) = \mathbf{1}_{[0, T]}(t) dt \mathbf{1}_D(x) dx$ .

Considerem l'espai de Hilbert  $H = L^2([0, T] \times D)$ . Com hem vist a la Secció 3.1.3, el soroll blanc espai-temps es pot identificar amb un camp aleatori Gaussià  $\{W(h), h \in H\}$  que, per la Proposició 3.14, és isonormal. Aquest camp aleatori Gaussià no és altra cosa que la integral de Wiener respecte del soroll blanc espai-temps. Per cada  $t \in [0, T]$  i  $\varphi \in L^2(D)$ , definim

$$W_t(\varphi) = W(\mathbf{1}_{[0, t]} \times \varphi).$$

Aleshores tenim les següents propietats:

- (1) Per  $s, t \in [0, T]$  i  $\varphi, \psi \in L^2(D)$ ,

$$E(W_s(\varphi)W_t(\psi)) = \langle \mathbf{1}_{[0, s]} \times \varphi, \mathbf{1}_{[0, t]} \times \psi \rangle_{L^2([0, T] \times D)} = (s \wedge t) \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(D)}, \quad (5.3)$$

on hem utilitzat la isonormalitat del procés  $\{W(h), h \in H\}$ .

- (2) Per un  $\varphi \in L^2(D)$  fixat, com que el procés és Gaussià i, per l'expressió anterior,

$$E(W_s(\varphi)W_t(\varphi)) = (s \wedge t) \|\varphi\|_{L^2(D)}^2,$$

resulta que el procés  $\{W_t(\varphi), t \in [0, T]\}$  defineix un moviment Brownià de variances  $t \|\varphi\|_{L^2(D)}^2$ .

Per  $t \geq 0$ , definirem  $\mathcal{F}_t$  com la  $\sigma$ -àlgebra generada per  $(W_s(\varphi), 0 \leq s \leq t, \varphi \in L^2(D))$  i els conjunts  $P$ -negligibles. Al llarg d'aquest capítol, considerarem processos estocàstics que siguin adaptats a la filtració  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ .

Denotarem per  $V$  l'espai de Hilbert  $L^2(D)$ , i  $(e_j, j \geq 1)$  en designarà una base ortonormal. Observem aleshores que  $\{W_t(e_j), 0 \leq t \leq T\}_{j \geq 1}$  és una successió de moviments Brownians independents. Això és conseqüència directa de (5.3). La integral estocàstica que presentem tot seguit s'obté precisament com una sèrie d'integrals respecte d'aquests Brownians independents.

**Definició 5.1.** *Sigui  $G$  un procés estocàstic adaptat i conjuntament mesurable que pertanyi a  $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$ . La integral estocàstica de  $G$  respecte del soroll blanc espai-temps és la variable aleatòria*

$$\int_0^T G_s dW_s := \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j), \quad (5.4)$$

on la convergència de la sèrie és en  $L^2(\Omega)$ . Aquesta convergència està assegurada per la hipòtesi d'integrabilitat de  $G$ . En efecte, per  $1 \leq n < m$ ,

$$\begin{aligned} E \left| \sum_{j=1}^m \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) - \sum_{j=1}^n \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \right|^2 \\ = E \left| \sum_{j=n+1}^m \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \right|^2 \\ = \sum_{j,k=n+1}^m E \left( \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \int_0^T \langle G_s, e_k \rangle_V dW_s(e_k) \right) \\ = \sum_{j=n+1}^m E \left| \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \right|^2 = E \left( \int_0^T \sum_{j=n+1}^m \langle G_s, e_j \rangle_V^2 ds \right), \end{aligned}$$

on la penúltima igualtat s'obté del fet que els termes creuats tenen esperança zero (com a conseqüència de la independència dels moviments Brownians  $W(e_j)$ ) i en l'última igualtat s'aplica la propietat d'isometria de la integral d'Itô. Com que  $G \in L^2(\Omega \times [0, T]; V)$ , fent el límit  $n, m \rightarrow \infty$ , veiem que

$$\sum_{j=1}^n \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j), \quad n \geq 1,$$

és una successió de Cauchy en  $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$  i, per tant, convergeix a una variable aleatòria que, per definició, és la integral estocàstica.

També denotarem aquesta integral  $\int_0^T G_s dW_s$  per

$$\int_0^T \int_D G(s, y) W(ds, dy).$$

Abans de prosseguir, donem un exemple d'aquests integrands. En la propera secció, treballarem amb integrands del tipus

$$G_s(y) = \Gamma(t, x; s, y) Z(s, y),$$

on  $t \in ]0, T]$ ,  $x \in D \subset \mathbb{R}$  són fixats, i  $0 < s < t$ ,  $y \in D$ . La funció  $\Gamma$  serà la solució fonamental o equació de Green de l'operador en derivades parcials que estiguem considerant, mentre que  $Z = (Z(s, y), (s, y) \in [0, T] \times D)$  serà un procés adaptat i conjuntament mesurable tal que

$$\sup_{(s,y) \in [0,T] \times D} E(|Z(s, y)|^2) =: C < \infty.$$

Les hipòtesis que imposarem en  $\Gamma$  (vegeu (i) – (iiib) al començament de la Secció 5.2), que naturalment seran satisfetes en el cas de les equacions d'ones i de la calor, implicaran que

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} \int_0^t ds \int_D dy \Gamma^2(t, x; s, y) < \infty.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} E \left( \int_0^t ds \int_D dy (\Gamma(t, x; s, y) Z(s, y))^2 \right) \\ \leq \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|Z(t, x)|^2) \left( \int_0^t ds \int_D dy \Gamma^2(t, x; s, y) \right) \\ \leq C \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} \int_0^t ds \int_D dy \Gamma^2(t, x; s, y) < \infty, \end{aligned}$$

uniformement en  $(t, x) \in [0, T] \times D$ . D'aquesta manera,  $G \in L^2(\Omega \times [0, T]; L^2(D))$  i la integral

$$\int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) Z(s, y) W(ds, dy)$$

està ben definida.

Com la integral d'Itô i la integral de Wiener que hem introduït al Capítol 3, aquesta integral estocàstica també té una propietat d'isometria:

$$E \left( \int_0^T G_s dW_s \right)^2 = E \left( \int_0^T \|G_s\|_V^2 ds \right). \quad (5.5)$$

En efecte, com que

$$\sum_{j=1}^n \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \int_0^T G_s dW_s,$$

aleshores també hi ha convergència en norma  $L^2(\Omega)$ :

$$E \left( \int_0^T G_s dW_s \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \right)^2 \right]$$

Recordant que els termes creuats tenen esperança zero per la independència dels Brownians  $W(e_j)$ ,  $j \geq 1$ , i aplicant la isometria d'Itô,

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} E \left[ \left( \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E \left( \int_0^T \langle G_s, e_j \rangle_V^2 ds \right), \end{aligned}$$

Per convergència monòtona i per la identitat de Parseval,

$$\begin{aligned} &= E \left( \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \langle G_s, e_j \rangle_V^2 ds \right) \\ &= E \left( \int_0^T \|G_s\|_V^2 ds \right). \end{aligned}$$

El procés donat per la integral indefinida  $(\int_0^t G_s dW_s, t \in [0, T])$  és una martingala respecte de la filtració  $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$  que té una versió contínua. La seva variació quadràtica és el procés

$$\int_0^t \|G_s\|_V^2 ds, \quad t \in [0, T]. \quad (5.6)$$

En efecte, per cada  $j \geq 1$ ,  $(\int_0^t \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j), t \in [0, T])$  és una martingala respecte de  $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$  amb variació quadràtica  $(\int_0^t \langle G_s, e_j \rangle_V^2 ds, t \in [0, T])$ . Utilitzant la independència de  $(W(e_j))_{j \geq 1}$ , que dona variació quadràtica nul·la entre Brownians de diferent índex, tenim que, per cada  $n \geq 1$ , la variació quadràtica de la martingala

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \langle G_s, e_j \rangle_V dW_s(e_j), \quad t \in [0, T], \quad (5.7)$$

val

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \langle G_s, e_j \rangle_V^2 ds, \quad t \in [0, T].$$

Com que, per cada  $t \in [0, T]$ ,  $\int_0^t G_s dW_s$  és el límit en  $L^2(\Omega)$  de (5.7), s'obté finalment (5.6).

Com a conseqüència, es pot provar una desigualtat de Burkholder:

$$E \left[ \left( \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s G_s dW_s \right| \right)^p \right] \leq C_p E \left[ \left( \int_0^t \|G_s\|_V^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] \quad (5.8)$$

per qualsevol  $t \in [0, T]$  i  $p \geq 2$ .

## 5.2 EDPEs no lineals

Al llarg d'aquesta secció,  $D \subset \mathbb{R}$  serà el domini (afitat o no) en què estarà definida l'EDPE i fixarem  $T > 0$ . Una EDPE no lineal és una equació de la forma

$$\mathcal{L}u(t, x) = \sigma(t, x, u(t, x)) \dot{W}(t, x) + b(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in ]0, T] \times D, \quad (5.9)$$

amb condicions inicials donades i, si escau, condicions de vora. Com fins ara,  $\mathcal{L}$  és un operador lineal en derivades parcials de coeficients constants i  $W$ , un soroll blanc espai-temps.

Direm que  $u(t, x)$  és la solució camp aleatori de (5.9) si:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= I_0(t, x) + \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u(s, y)) W(ds, dy) \\ &+ \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) b(s, y, u(s, y)) ds dy, \quad (t, x) \in [0, T] \times D. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Com a la Secció 3.3,  $\Gamma$  és la solució fonamental o funció de Green associada a l'operador  $\mathcal{L}$ , mentre que el terme  $I_0(t, x)$  és la contribució determinista de les condicions inicials i de vora, exactament com teníem en el cas de les EDPEs lineals.

El resultat principal d'aquesta secció és un teorema d'existència i unicitat de la solució camp aleatori de (5.10). Aquest resultat parteix d'una sèrie d'hipòtesis en  $I_0$ ,  $\Gamma$  (satisfetes en els casos de l'equació d'ones i de la calor),  $\sigma$  i  $b$ . Les establim a continuació.

*Hipòtesis en  $I_0$*

(0)  $I_0$  és Borel-mesurable i afitada en  $[0, T] \times D$ .

*Hipòtesis en  $\Gamma$*

(i) L'aplicació  $(t, x; s, y) \mapsto \Gamma(t, x; s, y)$  de  $\{(t, x; s, y) \in [0, T] \times D \times [0, T] \times D : 0 < s < t \leq T\}$  en  $\mathbb{R}$  és conjuntament measurable.

(ii) Existeix una funció Borel-mesurable  $H: [0, T] \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$|\Gamma(t, x; s, y)| \leq H(t - s, x, y), \quad 0 < s < t \leq T, \quad x, y \in D.$$

(iii)

$$\int_0^T ds \sup_{x \in D} \int_D dy H^2(s, x, y) < \infty.$$

(iiib)

$$\int_0^T ds \sup_{x \in D} \int_D dy H(s, x, y) < \infty.$$

En cas que  $D$  sigui afitat, és clar que (iiib) se segueix de (iii) per la desigualtat de Cauchy-Schwarz.

*Hipòtesis en  $b$  i  $\sigma$*

(iv) Les funcions  $b, \sigma : \Omega \times [0, T] \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  són  $\mathcal{P} \times B(D) \times B(\mathbb{R})$ -mesurables, on  $\mathcal{P}$  denota la  $\sigma$ -àlgebra dels subconjunts de  $\Omega \times [0, T]$  ( $\mathcal{F}_t$ )-progressivament mesurables.

(v) La funció  $b$  és de la forma

$$b(\omega, t, x, z) = b_1(\omega, t, x) + b_2(\omega, t, x, z),$$

on  $b_1$  és afitada en  $\Omega \times [0, T] \times D$  i  $b_2(\omega, t, x, 0) = 0$ .

(vi) *Condicció de Lipschitz global.* Existeix una constant  $C := C(T) < \infty$  tal que per tot  $(\omega, t, x) \in \Omega \times [0, T] \times D$  i  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$|b_2(\omega, t, x, z_1) - b_2(\omega, t, x, z_2)| + |\sigma(\omega, t, x, z_1) - \sigma(\omega, t, x, z_2)| \leq C|z_1 - z_2|.$$

(vii) *Creixement lineal uniforme de  $\sigma$ .* Existeix una constant  $\bar{C} := \bar{C}(T)$  tal que per tot  $(\omega, t, x) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}$  i tot  $z \in \mathbb{R}$ ,

$$|\sigma(\omega, t, x, z)| \leq \bar{C}(1 + |z|).$$

**Observació 5.2.** La condició de Lipschitz global en  $b_2$  també implica el creixement lineal uniforme de  $b_2$ :

$$|b_2(\omega, t, x, z)| \leq C(1 + |z|) \tag{5.11}$$

i, encara més,

$$|b_2(\omega, t, x, z)| \leq C|z|,$$

ja que per la hipòtesi (v),  $b_2(\omega, t, x, 0) = 0$ .

### 5.2.1 Existència i unicitat de solució

**Teorema 5.3.** *Sota les hipòtesis (0)-(vii), existeix un procés adaptat i conjuntament mesurable  $u = (u(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  tal que, per tot  $(t, x) \in [0, T] \times D$ , (5.10) se satisfà q.s. A més, per tot  $p \geq 2$ ,*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|u(t, x)|^p) < \infty, \quad (5.12)$$

*i la solució  $u$  és única (en el sentit de versions) entre els camps aleatoris que satisfan (5.12) amb  $p = 2$ .*

*Demostració.* La demostració segueix un argument de punt fix. Considerem les següents iteracions de Picard:

$$\begin{aligned} u^0(t, x) &= I_0(t, x), \\ u^{n+1}(t, x) &= I_0(t, x) + \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u^n(s, y)) W(ds, dy) \\ &\quad + \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) b(s, y, u^n(s, y)) ds dy, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

*Pas 1.* Provem per inducció en  $n$  que, per cada  $n \geq 1$ , el procés

$$u^n = (u^n(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$$

està ben definit, és adaptat i conjuntament mesurable, i satisfà

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|u^n(t, x)|^p) < \infty \quad (5.13)$$

per tot  $p \geq 2$ .

Comencem provant-ho per  $n = 1$ . Fixem  $p \geq 2$ . El procés estocàstic  $Z(t, x) = \sigma(t, x, u^0(t, x))$  satisfà

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|Z(t, x)|^p) < \infty. \quad (5.14)$$

En efecte, per la Hipòtesi (vii),

$$|Z(t, x)| = |\sigma(t, x, u^0(t, x))| \leq \bar{C}(1 + |I_0(t, x)|), \quad (5.15)$$

i, per la Hipòtesi (0), arribem a (5.14).

Per  $(t, x)$  fixat,  $\Gamma(t, x; s, y)Z(s, y)$  defineix un procés adaptat i conjuntament mesurable i, com que per (iiia)

$$E \left( \int_0^t \int_D |\Gamma(t, x; s, y)Z(s, y)|^2 ds dy \right) < \infty,$$



és de  $L^2(\Omega \times [0, T]; L^2(D))$ . Així, la integral estocàstica

$$\mathcal{I}^0(t, x) := \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u^0(s, y)) W(ds, dy)$$

està ben definida.

Definim

$$J(s) = \sup_{x \in D} \int_D H^2(s, x, y) dy.$$

Per (iia), tenim que

$$\int_0^T ds J(s) < \infty.$$

Per la desigualtat de Burkholder (5.8), la desigualtat de Hölder, la Hipòtesi (ii) i (5.14),

$$\begin{aligned} E(|\mathcal{I}^0(t, x)|^p) &\leq c_p E \left( \left| \int_0^t \int_D (\Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u^0(s, y)))^2 ds dy \right|^{p/2} \right) \\ &\leq c_p \left( \int_0^t \int_D \Gamma^2(t, x; s, y) ds dy \right)^{\frac{p}{2}-1} \\ &\quad \times E \left( \int_0^t \int_D \Gamma^2(t, x; s, y) |\sigma(s, y, u^0(s, y))|^p ds dy \right) \\ &\leq c_p \left( \int_0^t ds J(t-s) \right)^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t ds \int_D dy H^2(t-s, x, y) E[|Z(s, y)|^p] \\ &\leq \tilde{c}_p \left( \int_0^t ds J(t-s) \right)^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t ds \int_D dy H^2(t-s, x, y) (1 + |I_0(s, y)|^p) \\ &\leq \tilde{c}_p \left( \int_0^t ds J(t-s) \right)^{\frac{p}{2}} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} (1 + |I_0(t, x)|^p) \\ &= C_p \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} (1 + |I_0(t, x)|^p). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|\mathcal{I}^0(t, x)|^p) \leq C_p \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} (1 + |I_0(t, x)|^p), \quad (5.16)$$

per la Hipòtesi (0).

Ara analitzem l'altra integral de  $u^1$ :

$$\mathcal{J}^0(t, x) := \int_0^t ds \int_D dy \Gamma(t, x; s, y) b(s, y, u^0(s, y)).$$

Per la desigualtat de Hölder,

$$\begin{aligned} E(|\mathcal{J}^0(t, x)|^p) &\leq \left( \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| \right)^{p-1} \\ &\quad \times \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| E(|b(s, y, u^0(s, y))|^p). \quad (5.17) \end{aligned}$$

Per (v) i (5.11), podem afitar (5.17) per

$$\bar{C}_p \left( \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| \right)^p \times \left( \sup_{\omega, s, y \in \Omega \times [0, T] \times D} |b_1(\omega, s, y)|^p + 1 + \sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} |I_0(t, x)|^p \right). \quad (5.18)$$

Finalment, en virtut de (iiib), obtenim

$$\sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} E(|\mathcal{J}^0(t, x)|^p) \leq C_p \sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} (1 + |I_0(t, x)|^p) < \infty, \quad (5.19)$$

en virtut de (0). Això implica, en particular, que la integral  $\mathcal{J}^0(t, x)$  està ben definida. Com que ja hem vist que la integral  $\mathcal{I}^0(t, x)$  també està ben definida, deduïm que el procés  $(u^1(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  està ben definit i, combinant les estimacions (5.19) i (5.16), concloem que se satisfà la fita del  $p$ -moment (5.13) per  $n = 1$ . És clar que  $u^1$  és adaptat i la mesurabilitat conjunta s'obté del Lema A.2. Hem provat, doncs, el primer pas d'inducció.

Ara suposem que per  $1 \leq m \leq n$ , el procés  $(u^m(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  està ben definit, és adaptat i conjuntament mesurable i compleix que, per tot  $p \geq 2$ ,

$$\sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} E(|u^m(t, x)|^p) < \infty. \quad (5.20)$$

Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^n(t, x) &= \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u^n(s, y)) W(ds, dy), \\ \mathcal{J}^n(t, x) &= \int_0^t ds \int_D dy \Gamma(t, x; s, y) b(s, y, u^n(s, y)) \end{aligned}$$

Si definim  $Z(t, x) = \sigma(t, x, u^n(t, x))$  i procedim com en el cas  $n = 0$ , de la Hipòtesi (vii) s'obté immediatament que, per tot  $p \geq 2$ ,

$$\sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} E(|Z(t, x)|^p) \leq \tilde{c}_p \left[ 1 + \sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} E(|u^n(t, x)|^p) \right] < \infty. \quad (5.21)$$

Això implica, en particular, que la integral estocàstica  $\mathcal{I}^n(t, x)$  està ben definida. Emulant (5.17) i (5.18), podem obtenir

$$\begin{aligned} E(|\mathcal{I}^n(t, x)|^p) &\leq c_p \left( \int_0^t ds J(t-s) \right)^{\frac{p}{2}-1} \\ &\quad \times \int_0^t ds \left( 1 + \sup_{x \in D} E(|u^n(s, x)|^p) \right) J(t-s), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
E(|\mathcal{J}^n(t, x)|^p) &\leq \left( \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| \right)^{p-1} \\
&\quad \times \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| E(|b(s, y, u^n(s, y))|^p) \\
\tilde{C}_p &\leq \left( \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| \right)^{p-1} \\
&\quad \times \int_0^t ds \int_D dy |\Gamma(t, x; s, y)| \left( 1 + \sup_{x \in D} E[|u^n(s, x)|^p] \right), \quad (5.23)
\end{aligned}$$

on en la segona desigualtat hem utilitzat la Hipòtesi (v) ( $b_1$  és acotat) i (5.11).

Prenent el suprem en  $[0, T] \times D$  en les desigualtats (5.22) i (5.23), arribem a

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} [E(|\mathcal{I}^n(t, x)|^p + |\mathcal{J}^n(t, x)|^p)] \\
\leq C_p \left( 1 + \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|u^n(t, x)|^p) \right) < \infty. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Per tant, tenint en compte la Hipòtesi (0), queda provat (5.13). L'adaptabilitat és clara i la mesurabilitat conjunta se segueix del Lema A.2.

*Pas 2.* La successió de processos  $(u^n)_{n \geq 0}$  és uniformement afitada en  $L^p$  per tot  $p \geq 2$ :

$$\sup_n \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} E(|u^n(t, x)|^p) < \infty. \quad (5.25)$$

Ho veurem tot seguit. Abans, però, definim

$$H(s) = \sup_{x \in D} \int_D dy H(s, x, y) \quad (5.26)$$

Observem que per (iiib),

$$\int_0^T ds H(s) < \infty.$$

Aquesta definició de  $H$  ens ajudarà a provar (5.25). Per les desigualtats (5.22) i (5.23) i (0),

$$\begin{aligned}
E(|u^{n+1}(t, x)|^p) \\
\leq C_p \left[ 1 + \int_0^t ds (H(t-s) + J(t-s)) \left( 1 + \sup_{x \in D} E(|u^n(s, x)|^p) \right) \right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Definim  $\varphi^n(t) = \sup_{x \in D} E(|u^n(t, x)|^p)$  i  $g(s) = H(s) + J(s)$ . Per la desigualtat (5.27), per  $n \geq 0$ , existeixen constants  $k_1, k_2 \geq 0$  tals que

$$\varphi^{n+1}(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t ds (1 + \varphi^n(s))g(t-s).$$

A més, per la Hipòtesi (0), és clar que  $\sup_{t \in [0,T]} \varphi^0(t) < \infty$ . Aleshores podem aplicar el lema de Gronwall A.1 per obtenir (5.25).

*Pas 3.* Anem a veure que la successió de processos  $(u^n(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$ ,  $n \geq 0$ , convergeix en  $L^p$  uniformement en  $(t, x) \in [0, T] \times D$ . Això es pot obtenir replicant els arguments que ens han conduït a (5.27), però utilitzant la Lipschitz-continuitat (vi) de  $\sigma$  i  $b_2$  en comptes del creixement lineal. Ho veurem amb la integral estocàstica; l'altra integral es tracta de la mateixa manera. Fixem un  $t \in [0, T]$  i prenem  $(s, x) \in [0, t] \times D$ . Aleshores, per  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} & E(|\mathcal{I}^n(s, x) - \mathcal{I}^{n-1}(s, x)|^p) \\ & \leq c_p \left( \int_0^s dr J(s-r) \right)^{\frac{p}{2}-1} \int_0^s dr \sup_{x \in D} E(|u^n(r, x) - u^{n-1}(r, x)|^p) J(s-r) \\ & \leq \tilde{c}_p \int_0^s dr \sup_{(v, x) \in [0, r+(t-s)] \times D} E(|u^n(v, x) - u^{n-1}(v, x)|^p) J(s-r) \end{aligned}$$

Fent el canvi de variables  $r' = r + (t - s)$  en la integral anterior, obtenim

$$\begin{aligned} & E(|\mathcal{I}^n(s, x) - \mathcal{I}^{n-1}(s, x)|^p) \\ & \leq \tilde{c}_p \int_{t-s}^t dr' \sup_{(v, x) \in [0, r'] \times D} E(|u^n(v, x) - u^{n-1}(v, x)|^p) J(t-r') \\ & \leq \tilde{c}_p \int_0^t dr' \sup_{(v, x) \in [0, r'] \times D} E(|u^n(v, x) - u^{n-1}(v, x)|^p) J(t-r') \\ & = \tilde{c}_p \int_0^t ds \sup_{(r, x) \in [0, s] \times D} E(|u^n(r, x) - u^{n-1}(r, x)|^p) J(t-s). \end{aligned}$$

Procedint d'una manera similar, obtenim

$$\begin{aligned} & E(|\mathcal{J}^n(s, x) - \mathcal{J}^{n-1}(s, x)|^p) \\ & \leq \bar{c}_p \int_0^t ds \sup_{(r, x) \in [0, s] \times D} E(|u^n(r, x) - u^{n-1}(r, x)|^p) H(t-s). \end{aligned}$$

Combinant totes dues desigualtats, i prenent el suprem en  $[0, t] \times D$  als membres de l'esquerra,

$$\begin{aligned} & \sup_{(s, x) \in [0, t] \times D} E(|u^{n+1}(s, x) - u^n(s, x)|^p) \leq \tilde{C}_p \sup_{(s, x) \in [0, t] \times D} E(|\mathcal{I}^n(s, x) - \mathcal{I}^{n-1}(s, x)|^p) \\ & \quad + \tilde{C}_p \sup_{(s, x) \in [0, t] \times D} E(|\mathcal{J}^n(s, x) - \mathcal{J}^{n-1}(s, x)|^p) \\ & \leq C_p \int_0^t ds \sup_{(r, x) \in [0, s] \times D} E(|u^n(r, x) - u^{n-1}(r, x)|^p) (J(t-s) + H(t-s)). \quad (5.28) \end{aligned}$$

Per tant, si per cada  $n \geq 0$  definim

$$M_n(t) = \sup_{(s, x) \in [0, t] \times D} E(|u^{n+1}(s, x) - u^n(s, x)|^p),$$

la desigualtat (5.28) es pot expressar

$$M_n(t) \leq C_p \int_0^t ds M_{n-1}(s) (H(t-s) + J(t-s)), \quad \text{per } n \geq 1.$$

Pel lema de Gronwall (Lema A.1), es té

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times D} \|u^{n+1}(t,x) - u^n(t,x)\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Això implica que la successió  $(u^n(t,x), (t,x) \in [0,T] \times D)$ ,  $n \geq 0$ , convergeix en  $L^p(\Omega)$ , uniformement en  $(t,x) \in [0,T]$ . El seu límit  $(u(t,x), (t,x) \in [0,T] \times D)$  té una versió adaptada i conjuntament mesurable que, com a conseqüència de (5.25), satisfà (5.12). Tot seguit, argumentem la mesurabilitat conjunta. Hem vist en el Pas 1 que, per cada  $n \geq 0$ , el procés  $(u^n(t,x), (t,x) \in [0,T] \times D)$  té una versió conjuntament mesurable. Això equival a que el procés defineix una aplicació Boreliana  $(t,x) \mapsto u^n(t,x)$  de  $[0,T] \times D$  en  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  és l'espai de les classes d'equivalència de variables aleatòries amb la topologia de la convergència en probabilitat. Com que per cada  $(t,x) \in [0,T] \times D$ ,  $u(t,x)$  és límit en  $L^p(\Omega)$  (i, per tant, en probabilitat) de  $u^n(t,x)$ , resulta que, efectivament,  $u$  defineix una aplicació Borel-mesurable de  $[0,T] \times D$  en  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , i això és equivalent a l'existència d'una versió conjuntament mesurable de  $(u(t,x), (t,x) \in [0,T] \times D)$ .

*Pas 4.* Ara es tracta de veure que el procés  $(u(t,x), (t,x) \in [0,T] \times D)$  satisfà l'equació (5.10). Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t,x) &= \int_0^t \int_D \Gamma(t,x;s,y) \sigma(s,y,u(s,y)) W(ds,dy), \\ \mathcal{J}(t,x) &= \int_0^t ds \int_D dy \Gamma(t,x;s,y) b(s,y,u(s,y)). \end{aligned}$$

Per arguments similars als que ens han permès concloure (5.27), però utilitzant la Lipschitz-continuitat de  $\sigma$  and  $b_2$  en comptes del creixement lineal, s'obté

$$\begin{aligned} E(|\mathcal{I}^n(t,x) - \mathcal{I}(t,x)|^p) &\leq C_p \left( \int_0^t ds J(t-s) \right)^{\frac{p}{2}-1} \\ &\quad \times \int_0^t ds J(t-s) E(|u^n(s,x) - u(s,x)|^p) \\ &\leq C_p \left( \int_0^t ds J(t-s) \right)^{\frac{p}{2}} \sup_{(s,x) \in [0,t] \times D} E(|u^n(s,x) - u(s,x)|^p). \end{aligned} \tag{5.29}$$

i, de la mateixa manera,

$$\begin{aligned} E(|\mathcal{J}^n(t,x) - \mathcal{J}(t,x)|^p) &\leq \left( \int_0^t ds H(t-s) \right)^{p-1} \\ &\quad \times \int_0^t ds H(t-s) E(|u^n(s,x) - u(s,x)|^p) \\ &\leq C_p \left( \int_0^t ds H(t-s) \right)^p \sup_{(s,x) \in [0,t] \times D} E(|u^n(s,x) - u(s,x)|^p). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ara bé, hem vist al Pas 3 que  $u^n$  convergeix a  $u$  en  $L^p(\Omega)$  uniformement en  $[0, T] \times D$ , de manera que els membres drets de les desigualtats (5.29) i (5.30) tendeixen a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ . Per definició de les iterades de Picard,

$$u^{n+1}(t, x) = I_0(t, x) + \mathcal{I}^n(t, x) + \mathcal{J}^n(t, x).$$

El membre de l'esquerra convergeix en  $L^p(\Omega)$  a  $u(t, x)$ , uniformement en  $[0, T] \times D$ , mentre que per (5.29) i (5.30) el membre dret convergeix a  $I_0(t, x) + \mathcal{I}(t, x) + \mathcal{J}(t, x)$ . Per tant, el procés  $(u(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  satisfà l'equació (5.10).

*Pas 5.* Provada l'existència, demostrem la unicitat. Siguin  $(u(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  i  $(v(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  dos processos estocàstics conjuntament mesurables, adaptats i que satisfan (5.12) amb  $p = 2$ . Repetint, per a  $p = 2$ , els arguments amb què hem obtingut (5.29) i (5.30), tenim

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} E(|u(t, x) - v(t, x)|^2) &\leq C_2 \int_0^t ds (H(t-s) + J(t-s)) \\ &\quad \times \sup_{x \in D} E(|u(s, x) - v(s, x)|^2). \end{aligned}$$

Aplicant el Lema A.1, es conclou que aquesta esperança és zero, de manera que els processos  $u$  i  $v$  són versions l'un de l'altre.  $\square$

### 5.2.2 Hölder continuïtat de les trajectòries de la solució

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar que la solució de (5.10) té trajectòries Hölder contínues (sempre que el terme determinista també sigui Hölder continu). Comencem donant condicions suficients per garantir la Hölder continuïtat d'integrals tant estocàstiques com deterministes; més endavant, les aplicarem a les integrals del membre dret de (5.10) per concloure la Hölder continuïtat cercada.

Donat un camp aleatori  $(Z(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$ , amb  $D \subset \mathbb{R}$  un domini afitat o no, definim

$$\|Z\|_{T, \infty, p} = \sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} \|Z(t, x)\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Lema 5.4.** *Considerem una funció  $\Gamma(t, x; s, y)$  que satisfà les Hipòtesis (i)-(iiib), i prenem  $\Gamma(t, x; s, y) = 0$  si  $t < s$ . Suposem també que  $\|Z\|_{T, \infty, 2} < \infty$ .*

(a) *Sigui*

$$u_1(t, x) = \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; r, z) Z(r, z) W(dr, dz).$$

*Suposem que existeixen constants  $C < \infty$  i  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ , tals que per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times D$ ,*

$$\int_0^T dr \int_D dz (\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z))^2 \leq C^2 (|t - s|^{\alpha_1} + |x - y|^{\alpha_2})^2. \quad (5.31)$$

*Aleshores, per  $p \geq 2$ , existeix una constant  $C_p$  tal que per cada  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times D$ ,*

$$\|u_1(t, x) - u_1(s, y)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p C \|Z\|_{T, \infty, p} (|t - s|^{\alpha_1} + |x - y|^{\alpha_2}). \quad (5.32)$$

(b) *Sigui*

$$u_2(t, x) = \int_0^t dr \int_D dz \Gamma(t, x; r, z) Z(r, z).$$

Suposem que existeixen constants  $c < \infty$  i  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ , tals que per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times D$ ,

$$\int_0^T dr \int_D dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \leq c(|t - s|^{\beta_1} + |x - y|^{\beta_2}). \quad (5.33)$$

Aleshores, per  $p \geq 2$ , existeix una constant  $c_p$  tal que per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times D$ ,

$$\|u_2(t, x) - u_2(s, y)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|Z\|_{T, \infty, p} (|t - s|^{\beta_1} + |x - y|^{\beta_2}). \quad (5.34)$$

**Observació 5.5.** Quan  $D$  és afitat, aleshores (5.33) se segueix de (5.31), amb  $\beta_1 = \alpha_1$  i  $\beta_2 = \alpha_2$ , per la desigualtat de Cauchy-Schwarz.

*Demostració.* Podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que  $0 \leq s \leq t \leq T$  (en cas contrari, només cal reanomenar  $s$  i  $t$ ). Considerem

$$u_1(t, x) - u_1(s, y) = \int_0^t \int_D (\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)) Z(r, z) W(dr, dz).$$

Per la desigualtat de Burkholder (5.8) primer i per la desigualtat de Hölder després,

$$\begin{aligned} \|u_1(t, x) - u_1(s, y)\|_{L^p(\Omega)}^p &= E(|u_1(t, x) - u_1(s, y)|^p) \\ &\leq C_p^p E \left[ \left( \int_0^t dr \int_D dz (\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z))^2 Z^2(r, z) \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq C_p^p \left( \int_0^t dr \int_D dz (\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z))^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \\ &\quad \times \int_0^t dr \int_D dz (\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z))^2 E(|Z(r, z)|^p) \\ &\leq C_p^p \|Z\|_{T, \infty, p}^p (C^2(|t - s|^{\alpha_1} + |x - y|^{\alpha_2})^2)^{\frac{p}{2}} \\ &= C_p^p C^p \|Z\|_{T, \infty, p}^p (|t - s|^{\alpha_1} + |x - y|^{\alpha_2})^p, \end{aligned}$$

on hem usat (5.31) i la definició de  $\|Z\|_{T, \infty, p}$ . Obtenim, doncs, (5.32).

Per la desigualtat integral de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|u_2(t, x) - u_2(s, y)\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \left( \int_0^t dr \int_0^L dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \|Z(r, z)\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \\ &\leq \|Z\|_{T, \infty, p}^p \left( \int_0^t dr \int_0^L dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \right)^p \\ &\leq c^p \|Z\|_{T, \infty, p}^p (|t - s|^{\beta_1} + |x - y|^{\beta_2})^p, \end{aligned}$$

on en l'última desigualtat hem utilitzat (5.33). Això prova (5.34).  $\square$

A partir d'aquest lema, el següent resultat prova que la part aleatòria de la solució de (5.10) té trajectòries contínues.

**Teorema 5.6.** *Assumim les hipòtesis del Teorema 5.3 i, a més a més, les condicions (5.31) i (5.33) del Lema anterior per a  $\Gamma(t, x; s, y)$ . Suposem també que  $I_0(t, x)$  és una funció Hölder contínua conjuntament en  $(t, x)$ , amb exponents  $\eta_1, \eta_2 \in ]0, 1[$ , respectivament. Aleshores la solució camp aleatori de (5.10) satisfà la següent fita:*

*Per qualsevol  $p \geq 2$ , existeix una constant  $0 \leq C_p < \infty$  tal que, per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times D$ ,*

$$\|u(t, x) - u(s, y)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(|t - s|^{\eta_1 \wedge \alpha_1 \wedge \beta_1} + |x - y|^{\eta_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_2}). \quad (5.35)$$

*Així, q.s., les trajectòries de  $(u(t, x), (t, x) \in [0, T] \times D)$  són Hölder contínues, conjuntament en  $(t, x)$ , amb exponents  $\gamma_1 \in ]0, \eta_1 \wedge \alpha_1 \wedge \beta_1[$  i  $\gamma_2 \in ]0, \eta_2 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_2[$ , respectivament.*

*Demostració.* Sigui

$$Z(s, y) := \sigma(s, y, u(s, y)), \quad (s, y) \in [0, T] \times D.$$

Per la Hipòtesi (vii) de creixement lineal de  $\sigma$ , per tot  $p \geq 2$ , tenim

$$\|Z\|_{T, \infty, p}^p \leq \bar{C}^p(T) \left( 1 + \sup_{(t, x) \in [0, T] \times D} \|u(t, x)\|_{L^p(\Omega)}^p \right) < \infty, \quad (5.36)$$

on la finitud ve donada per (5.12). Així, utilitzant (5.32),

$$u_1(t, x) := \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u(s, y)) W(ds, dy)$$

satisfà

$$\|u_1(t, x) - u_1(s, y)\|_{L^p(\Omega)} \leq \tilde{C}_p(|t - s|^{\alpha_1} + |x - y|^{\alpha_2}), \quad (5.37)$$

per una constant positiva  $\tilde{C}_p$ .

Si ara definim

$$Z(s, y) := b(s, y, u(s, y)), \quad (s, y) \in [0, T] \times D,$$

com que  $b$  també té creixement lineal (recordem (5.11)), aquesta  $Z$  també satisfà (5.36). Per tant, si prenem

$$u_2(t, x) := \int_0^t ds \int_D dy \Gamma(t, x; s, y) b(s, y, u(s, y)),$$

per (5.34) tenim

$$\|u_2(t, x) - u_2(s, y)\|_{L^p(\Omega)} \leq c(|t - s|^{\beta_1} + |x - y|^{\beta_2}), \quad (5.38)$$

per una constant  $c$ .

Combinant (5.37) i (5.38) amb la  $(\eta_1, \eta_2)$ -Hölder continuïtat de  $I_0$ , obtenim (5.35).

La Hölder continuïtat enunciada se segueix del criteri de continuïtat de Kolmogorov [10, Teorema 1.4.1].  $\square$



### 5.3 L'equació d'ones no lineal estocàstica en $\mathbb{R}$

A la Secció 4.1 hem estudiat l'equació d'ones lineal estocàstica en  $\mathbb{R}$ . Ara estudiem una equació d'ones (és a dir, amb el mateix operador diferencial  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ) no lineal. La solució fonamental associada a  $\mathcal{L}$  en  $\mathbb{R}$  és, com ja hem vist a (4.1):

$$\Gamma(t, x; s, y) := \Gamma(t - s, x - y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \mathbf{1}_{]-t, t[}(x), \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Per tal de garantir l'existència (i unicitat) de solució de l'EDPE (5.10) cal, en primer lloc, comprovar les Hipòtesis (i)-(iiib). La primera és clara i la segona, també: només cal definir  $H(r, x, y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x-y| < r\}}$ . Pel que fa a les dues Hipòtesis restants, són immediates:

$$\begin{aligned} \int_0^T ds \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dy H^2(s, x, y) &= \frac{1}{4} \int_0^T ds \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{x-s}^{x+s} dy = \frac{T^2}{4}, \\ \int_0^T ds \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dy H(s, x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^T ds \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{x-s}^{x+s} dy = \frac{T^2}{2}. \end{aligned}$$

El següent teorema, que utilitza els resultats exposats en la secció anterior, ens indica la regularitat de les trajectòries de la solució camp aleatori de l'equació d'ones no lineal estocàstica en  $\mathbb{R}$ , amb condicions inicials donades per funcions  $f$  i  $g$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, x) = I_0(t, x) + \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) \sigma(s, y, u(s, y)) W(ds, dy) \\ \quad + \int_0^t \int_D \Gamma(t, x; s, y) b(s, y, u(s, y)) ds dy, \quad (t, x) \in [0, T] \times D, \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (5.39)$$

on  $I_0$  ve donada, com hem demostrat a (2.15), per

$$I_0(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \quad (5.40)$$

**Teorema 5.7.** *Assumim que les funcions  $\sigma$  i  $b$  satisfan les Hipòtesis (iv)-(vii), que  $f$  i  $g$  són Hölder contínues d'exponents  $\gamma_1, \gamma_2 \in ]0, 1[$ , respectivament, i que, a més,  $g$  és acotada en  $\mathbb{R}$ .*

*Sigui  $u = (u(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R})$  la solució camp aleatori de (5.39). Definim  $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2$ . Aleshores, q.s., les trajectòries de  $u$  són conjuntament Hölder contínues de grau  $\eta_i \in ]0, \frac{1}{2} \wedge \gamma[$  en cada variable  $i = 1, 2$ .*

*Demostració.* Per demostrar aquest resultat, utilitzarem el Teorema 5.6. Hem comprovat més amunt les Hipòtesis (i)-(iiib), referents a  $\Gamma$ , i la resta d'hipòtesis (iv)-(vii), referents a  $\sigma$  i  $b$ , s'assumeixen en les condicions de l'enunciat. Cal comprovar, doncs, que  $I_0$  és Hölder contínua conjuntament en  $(t, x)$  i que  $\Gamma$  satisfà les condicions (5.31) i (5.33) del Lema 5.4.

Comencem demostrant que  $I_0$  és conjuntament Hölder contínua en  $(t, x)$  amb grau  $\gamma$ . Pel que fa al primer terme de (5.40), per qualssevol  $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , tenim:

$$\begin{aligned} & |(f(x+t) + f(x-t)) - (f(y+s) + f(y-s))| \\ & \leq |f(x+t) - f(x+s)| + |f(x+s) - f(y+s)| \\ & \leq |f(x-t) - f(x-s)| + |f(x-s) - f(y-s)| \\ & \leq 2\|f\|_{C^{\gamma_1}}(|t-s|^{\gamma_1} + |x-y|^{\gamma_1}), \end{aligned} \tag{5.41}$$

on definim  $\|f\|_{C^\gamma}$ , per  $f$  funció real, com

$$\|f\|_{C^\gamma} := \sup_{x, y \in \mathbb{R}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Analitzem ara el segon terme de (5.40). Fixem  $x \in \mathbb{R}$  i considerem  $0 \leq t \leq s \leq T$ . Aplicant canvis de variables immediats,

$$\int_{x-t}^{x+t} g(z) dz - \int_{x-s}^{x+s} g(z) dz = \int_0^{2t} g(z+x-t) dz - \int_0^{2s} g(z+x-s) dz.$$

Afitant,

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-t}^{x+t} g(z) dz - \int_{x-s}^{x+s} g(z) dz \right| & \leq \int_0^{2t} |g(z+x-t) - g(z+x-s)| dz \\ & \quad + \int_{2t}^{2s} |g(z+x-s)| dz \\ & \leq 2T\|g\|_{C^{\gamma_2}}|t-s|^{\gamma_2} + 2\|g\|_\infty|t-s|. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Fixem ara  $s \in [0, T]$  i siguin  $x, y \in \mathbb{R}$ . Aplicant novament canvis de variable,

$$\int_{x-s}^{x+s} g(z) dz - \int_{y-s}^{y+s} g(z) dz = \int_0^{2s} [g(z+x-s) - g(z+y-s)] dz.$$

En conseqüència,

$$\left| \int_{x-s}^{x+s} g(z) dz - \int_{y-s}^{y+s} g(z) dz \right| \leq 2T\|g\|_{C^{\gamma_2}}|x-y|^{\gamma_2}. \tag{5.43}$$

Combinant les dues fites (5.42) i (5.43), tenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-t}^{x+t} g(z) dz - \int_{y-s}^{y+s} g(z) dz \right| \\ \leq 2T\|g\|_{C^{\gamma_2}}|t-s|^{\gamma_2} + 2\|g\|_\infty|t-s| + 2T\|g\|_{C^{\gamma_2}}|x-y|^{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Aquesta fita, juntament amb (5.41), permet concloure la Hölder continuïtat conjunta d'ordre  $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2$  de la contribució determinista  $I_0$ .

A continuació, comprovem que se satisfan les condicions (5.31) i (5.33) del Lema 5.4. La primera s'obté de la fita que hem provat en la Proposició 4.2, amb  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . Es tracta, doncs, de provar la segona.

Suposem que  $0 \leq s \leq t \leq T$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} & \int_0^t dr \int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \\ &= \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| + \int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} dz \Gamma(t, x; r, z). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Pel que fa al segon terme,

$$\int_s^t dr \int_{\mathbb{R}} dz \Gamma(t, x; r, z) = \int_s^t dr 2(t-r) = (t-s)^2 \leq T|t-s|.$$

Centrem-nos, doncs, en el primer terme. Recordem que  $\Gamma(t, x; s, y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{D(t,x)}(s, y)$ , on  $D(t, x)$  es defineix com a (4.4). És immediat de comprovar que

$$\begin{aligned} |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, x; r, z)| &= \Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, x; r, z) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{1}_{D(t,x)}(r, z) - \mathbf{1}_{D(s,x)}(r, z)). \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, x; r, z)| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dz (\mathbf{1}_{D(t,x)}(r, z) - \mathbf{1}_{D(s,x)}(r, z)) = t - s,$$

d'on

$$\int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, x; r, z)| = (t-s) \int_0^s dr \leq T(t-s).$$

Ara fixem  $s \in [0, T]$  i, sense pèrdua de generalitat, suposem que  $y \leq x$ . Distingim dos casos:

(i)  $y + s \leq x - s$ . Tenim

$$\begin{aligned} & \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(s, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz |\mathbf{1}_{D(s,x)}(z, r) - \mathbf{1}_{D(s,y)}(z, r)| \\ &= \frac{1}{2} (|D(s, x)| + |D(s, y)|) = s^2 \leq \frac{T}{2} |x - y|, \end{aligned}$$

on en la segona igualtat utilitzem que, per la hipòtesi  $y + s \leq x - s$ , tenim  $D(s, x) \cap D(s, y) = \emptyset$  i en l'última igualtat hem usat que  $|D(s, x)| = s$  amb independència de  $x$ , com s'ha explicat en la demostració de la Proposició 4.2. La desigualtat és conseqüència també de la hipòtesi  $y + s \leq x - s$ .

(ii)  $y + s > x - s$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} & \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(s, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}} dz |\mathbf{1}_{D(s,x)}(z, r) - \mathbf{1}_{D(s,y)}(z, r)| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s dr \left( \int_{y+s-r}^{x+s-r} dz + \int_{y-s+r}^{x-s+r} dz \right) \\ &= \int_0^s dr (x - y) \leq T|x - y|, \end{aligned}$$

on en la segona igualtat hem utilitzat la Figura 10 per visualitzar quant val  $\mathbf{1}_{D(s,x)}(z,r) - \mathbf{1}_{D(s,y)}(z,r)$  en cada regió.

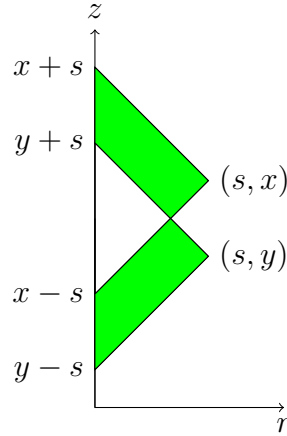


Figura 10:  $D(s, x)$  i  $D(s, y)$ ; en verd, la regió on  $|\mathbf{1}_{D(s,x)} - \mathbf{1}_{D(s,y)}| = 1$ .

Combinant les fites obtingudes, resulta que

$$\int_0^t dr \int_{\mathbb{R}} dz |\Gamma(t, x; r, z) - \Gamma(s, y; r, z)| \leq C_T (|t - s| + |x - y|),$$

per una constant  $C_T$  que depèn de  $T$ . Per tant, se satisfà (5.33) amb  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  i pel Teorema 5.6 hem acabat.  $\square$

## 6 Conclusions

Aquest projecte m'ha ajudat a introduir-me en les equacions en derivades parcials, no només estocàstiques, sinó també clàssiques; per l'itinerari curricular que vaig seguir durant el grau, no tenia nocions de teoria d'EDPs. Naturalment, tothom coneix l'equació de la calor i l'equació d'ones, però no ha estat fins ara que he vist alguns dels procediments per resoldre-les. Ha estat encertat utilitzar la transformada de Fourier com a mètode de resolució, perquè m'ha permès aplicar coneixements adquirits durant el curs de màster.

L'estudi inicial d'equacions en derivades parcials deterministes ha servit també per arribar de forma natural al concepte de solució camp aleatori d'una EDPE. Aquesta noció de solució ens ha portat a definir dues integrals, la integral de Wiener, amb integrand determinista, i una integral per a integrands aleatoris que coincideix amb la de Walsh [13]. Ara bé, com hem apuntat al llarg del treball, fins i tot en el cas relativament senzill de l'equació d'ones aquestes integrals no serveixen per a dimensions espacials superiors a  $k > 1$ . Una continuació natural del treball seria analitzar què passa en aquests casos i quina noció d'integral es pot utilitzar: una opció és considerar el *soroll Gaussià espacialment homogeni*, a partir del qual es pot construir el que Walsh en digué una *worthy martingale measure*. Com s'explica a [5, Capítol 2], hi ha sorolls d'aquesta mena respecte dels quals té sentit integrar la funció de Green de l'equació d'ones en dimensió  $k = 2$ . Com que en  $k = 3$  la funció de Green no és ni tan sols una funció, sinó una mesura, aquest cas és molt diferent i demana encara més maquinària matemàtica.

A banda d'introduir-me en la teoria d'EDPEs, l'altre gran objectiu del treball era obtenir la Hölder continuïtat de les trajectòries de la solució de l'equació d'ones lineal estocàstica en els dominis  $\mathbb{R}_+$  i  $[0, L]$ , de la mateixa manera que es té el resultat en [6, Capítol 2] per a  $\mathbb{R}$ . Aquest objectiu s'ha acomplert a través de dues proves de naturalesa ben diferent: en el cas de  $\mathbb{R}_+$ , hem fet una demostració molt geomètrica, mentre que la prova en el domini  $[0, L]$  és purament analítica.

Com era de preveure, les fites inferiors del moment d'ordre 2 de  $u(t, x) - u(s, y)$ , que ens han permès concloure també l'optimalitat dels exponents de Hölder obtinguts, han estat les més problemàtiques. A causa de la reflexió del con de llum, les configuracions geomètriques es divideixen en multitud de casos. En el cas de l'interval  $[0, L]$ , com que la reflexió és doble (en  $x = 0$  i  $x = L$ ), el problema esdevé encara més difícil de controlar, i precisament aquest era l'obstacle que ens impedia avançar: calia trobar la manera de simplificar l'estudi a un nombre raonable de casos. Finalment, ha resultat suficient restringir-nos a una regió temporal on la funció de Green en  $[0, L]$  coincideix amb la de  $\mathbb{R}_+$  per utilitzar els resultats ja provats en la semirecta.

## A Resultats auxiliars

Tot seguit, presentem dos resultats que s'utilitzen repetidament en la prova del Teorema 5.2.1 d'existència i unicitat de solució d'EDPEs. El primer és una extensió del lema de Gronwall, demostrada a [4, Lema 15].

**Lema A.1.** *Sigui  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  una funció tal que*

$$\int_0^T g(s) ds < \infty.$$

*Aleshores existeix una successió  $(a_n), n \geq 1$  de nombres reals no-negatius tal que per tot  $p \geq 1$ ,  $\sum_{n \geq 1} a_n^{1/p} < \infty$ , amb la següent propietat. Sigui  $(f_n, n \geq 0)$  una successió de funcions no-negatives en  $[0, T]$  i siguin  $k_1, k_2 \geq 0$  dues constants tals que per tot  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$f_n(t) \leq k_1 + \int_0^t (k_2 + f_{n-1}(s))g(t-s) ds, \quad n \geq 1.$$

*Si  $\sup_{0 \leq s \leq T} f_0(s) = M < \infty$ , aleshores per cada  $n \geq 1$ ,*

$$f_n(t) \leq k_1 + (k_1 + k_2) \sum_{i=1}^{n-1} a_i + (k_2 + M)a_n.$$

*En particular,  $\sup_{n \geq 0} \sup_{0 \leq t \leq T} f_n(t) < \infty$ , i si  $k_1 = k_2 = 0$ , aleshores  $\sum_{n \geq 0} f_n(t)^{1/p}$  convergeix uniformement en  $[0, T]$ .*

El segon resultat ens dona condicions suficients per garantir la mesurabilitat conjunta de la integral estocàstica. Es troba demostrat, en un context més general, a [6, Lema 7.1.5].

**Lema A.2.** *Sigui  $\{Z(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\}$  un procés conjuntament mesurable tal que*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} E(|Z(t, x)|^2) < \infty.$$

*Sigui  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció Borel-mesurable tal que*

$$\int_0^T ds \int_{\mathbb{R}} dy |f(t, x; s, y)|^2 < \infty.$$

*Definim*

$$I^f(t, x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(t, x; s, y) Z(s, y) W(ds, dy).$$

*Aleshores, el procés  $\{I^f(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\}$  té una versió conjuntament mesurable.*

## Referències

- [1] R. J. Adler. *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*. Institute of Mathematical Statistics, 1990.
- [2] R. Carmona i D. Nualart. Random non-linear wave equations: Smoothness of the solutions. *Probability Theory and Related Fields*, 79(4):469–508, nov 1988.
- [3] G. Da Prato i J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [4] R. C. Dalang. Extending the Martingale Measure Stochastic Integral With Applications to Spatially Homogeneous S.P.D.E.'s. *Electronic Journal of Probability*, 4, 1999.
- [5] R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, C. Mueller, D. Nualart i Y. Xiao. *A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer, Salt Lake City, Utah, 2006.
- [6] R. C. Dalang i M. Sanz-Solé. *Stochastic partial differential equations*. Llibre en procés de redacció, 2018.
- [7] L. C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [8] G. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 1995.
- [9] M. S. Gockenbach. *Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, segona edició, 2002.
- [10] H. Kunita. *Stochastic flows and stochastic differential equations*. Cambridge University Press, 1997.
- [11] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [12] E. M. Stein i R. Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [13] J. B. Walsh. An introduction to stochastic partial differential equations. Dins *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984*, Lecture Notes in Mathematics, 1180, pàgines 265–439. Springer Berlin Heidelberg, 1986.