" L0S NUM3R0S:

1 P0C0 D3 H1ST0R1A "

C. Arenas
Departament d'Estadística
Universitat de Barcelona

"Ninguna investigación puede considerarse verdadera ciencia si no pasa por la demostración matemática".

Leonardo da Vinci

”Los números siempre han formado parte de la vida del hombre para contar cabezas de ganado, el paso de los días etc. Con seguridad fueron los diez dedos de la mano los que dieron lugar al sistema decimal actualmente por todos utilizado, pero otros números no tan conocidos son importantes en la naturaleza y merecen un poco de atención. Vamos a hablar pues del número cero, del número pi, del número de oro y del menos conocido número de plástico.”

1 EL CERO

El número cero es relativamente moderno. No lo conocían ni babilonios, ni chinos, ni egipcios, ni griegos ni romanos. El cero es una "nada" que puede hacer cambiar los números de valor. Así en nuestro sistema de numeración, que es posicional, un 8 representa 8 objetos, pero con un simple 0 se convierte en un 80.

Se sabe que los mayas conocían el cero, pero no lo usaban para realizar cálculos (como harían los hindúes y los pueblos que acuñarían su sistema), sino como símbolo en sus ritos religiosos. Fue en el año 650 cuando en India nació el cero que conocemos. No esta claro quien fue su inventor pero grandes matemáticos hindúes, como Aryabhata, Brahmagupta o Mahariva pusieron los cimientos de la aritmética moderna entre los siglos VI y IX. En el siglo VI, el astrónomo hindú Aryabhata ideó un sistema numérico decimal de nueve cifras, incluyendo la denominada kha (posición). A finales del mismo siglo Brahmagupta posiblemente ideó el símbolo del cero. Tanto él como Mahariva (siglo IX) lo utilizaban para hacer cálculos.

Figure 1: Retrato de Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci (http://www.mathekiste.de/fibonacci/inhalt.htm).

La primera aparición documentada del cero, data del año 876 y fue descubierta en una inscripción en una piedra (encontrada al sur de Delhi) en la que se describe las dimensiones de un jardín como 187 por 270 hastas (antigua medida hindú, equivalente a unos 45 cm) y su producción, en 50 unidades por día. Lo más curioso es que 270 y 50 aparecen escritos casi como los conocemos en la actualidad. Desde India, los diez dígitos incluido el cero, pasaron a la cultura árabe y de ahí probablemente llegó a Italia, extendiéndose por Europa. En 1202, Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci lo describió en su obra Liber Abaci, alabando su gran utilidad frente al sistema de numeración romano.

2 EL NUMERO PI

Probablemente es el número más famoso de la historia y representa la relación existente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

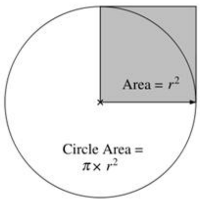


Figure 2: Relación existente entre la longitud de una circunferencia, su diámetro y el número Pi (http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Circle_Area.svg).

Aunque para la mayoría de la gente pi será siempre tres-catorce-dieciséis, su valor es 3.14159265358979323846... y así hasta el infinito sin que su secuencia de cifras se repita jamás.

Aparece en las gotas de lluvia, las estrellas, los planetas, las burbujas de agua, las ondas de un estanque... Del Libro de los Reyes (s.VI a.C.) se deduce que el valor atribuido en Oriente Próximo a la circunferencia era el 3. Los antiguos egipcios y babilonios sabían que su valor era algo mayor. Y es conocido como el número pi aparece en la construcción de las pirámides.

El científico griego Arquímedes de Siracusa, en su obra "Sobre la medida del círculo" se aproximó al cálculo de la longitud de una circunferencia a través de un sistema basado en inscribir una circunferencia en un polígono de 96 lados, afirmando que el valor de pi debía de estar entre 3 10/71 y 3 1/7, expresándolo como fracción ya que los griegos no conocían los decimales. El astrónomo y geógrafo griego Ptolomeo (150 d.C.) equiparó pi a 3.1416. En el siglo V, el

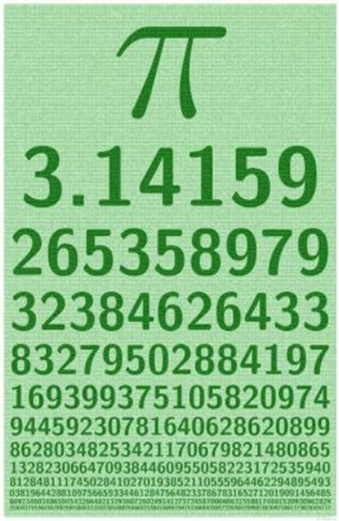


Figure 3: Póster representando el símbolo del número pi, así como gran cantidad de sus decimales (http://unihedron.com/projects/pi/).

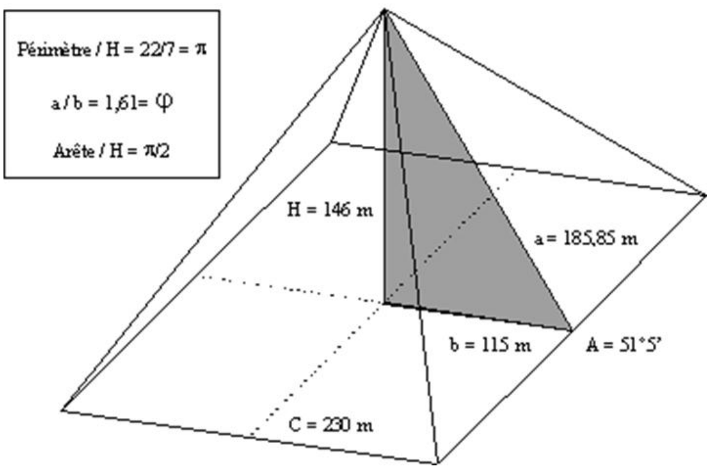


Figure 4: El número Pi era utilizado en la construcción de las pirámides egipcias (http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Esoteris/Image595.gif).

matemático y astrónomo Tsu Ch'ung Chi fijó el valor de pi en 355/113, que es exacto hasta la sexta cifra decimal. En 1430 el iraní Jamshid al-Kash escribió en "El tratado de la circunferencia" 14 decimales de pi, una exactitud que en Europa tardaría siglo y medio en superarse. Hacia 1600 el alemán Ludolph van Ceulen calculó, utilizando polígonos de 32000 millones de lados, el valor de pi con 35 decimales. Como homenaje se grabaron las 36 cifras de pi en su tumba, en Leiden. En su honor el número pi también se llama número ludolfino. En 1706 el matemático inglés William Jones propuso el nombre de π. Parece ser que eligió esta letra griega por ser el equivalente de nuestra p de perímetro. Pero fue en 1748 cuando el suizo Leonhard Euler fijo el empleo de este término en su obra "Introducción al cálculo infinitesimal". A finales del siglo XIX el matemático inglés William Shanks calculó a mano, tardando 20 años, 707 decimales de pi. En 1945 se detectó un error en su desarrollo y sólo las 527 primeras cifras eran correctas. Los informáticos Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi consiguieron superar los 6000 millones de decimales. Dos años mas tarde consiguieron los 51000 millones.

3 EL NUMERO DE ORO

Su valor numérico es 0.6180339887498948482....... y representa una proporción. Supongamos que dividimos una barra de un metro en dos trozos desiguales, de forma que la proporción entre la barra entera y el trozo mayor sea la misma que entre éste y el menor. Justamente esa proporción es el número de oro. Este número aparece en la naturaleza, desde la imbricación de las semillas en ciertas flores hasta la organización de las escamas en las piñas y otros frutos, o la distribución de las hojas de un tallo. El número áureo es antiquísimo. Su cálculo aparece en las obras de Euclides, matemático griego a caballo entre los siglos IV y III a. C. Pero probablemente, ya en el siglo VI a. C., el filósofo griego Pitágoras, fundador de una secta místico-religiosa dedicada al estudio de las matemáticas, lo investigó. En el arte, la Grecia clásica empezó a considerar la proporción áurea como la máxima calidad estética de un diseño. El Partenón levantado en la Atenas de Pericles, es una de las primeras manifestaciones de la aplicación del número áureo en la arquitectura.

Figure 5: Partenón, primera muestra de utilización del númerode oro en arquitectura (http://archigroup79.persianblog.com/).

Por ejemplo la distancia existente entre las columnas de su fachada es armónica. En el Renacimiento se rescatan las teorías geométricas de Grecia aplicadas a la arquitectura y escultura. La relación entre artistas y matemáticos era muy estrecha. Un ejemplo se encuentra en las figuras de Leonardo da Vinci y el matemático Luca Pacioli, autor de "La Divina proporción".

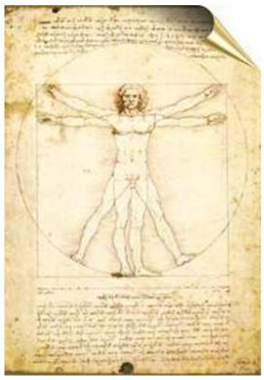


Figure 6: Relación entre el número de oro y las proporciones del cuerpo humano descritas por Leonardo da Vinci (http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Vitruvian.jpg).

Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Leonardo plasmó estas ideas en un dibujo en el que la relación entre la altura del hombre y la distancia desde el ombligo hasta la mano es el número de oro. El número de oro fue objeto de estudio durante muchos siglos. En la Edad Media el matemático italiano Fibonacci se encontró con él por sorpresa al resolver el siguiente problema: "A partir del mes de edad, una pareja de conejos tiene dos crías cada mes, un macho y una hembra. Al mes de nacidas, estas crías pueden concebir otros dos gazapos, y así sucesivamente. ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un año?". Lo que parecía un divertimento dió lugar a la sucesión de Fibonacci, que guarda escondido el número de oro.

4 EL NUMERO DE PLASTICO

El escultor y matemático Alan St. George hace referencia a este número no tan famoso como el número de oro en un catálogo de una exposición suya de 1995-1996: "El arquitecto Richard Padovan revelaba las glorias del número de plástico.....El número de plástico tiene poca historia, lo que es extraño considerando sus grandes virtudes como herramienta de diseño, pero su ascendencia en matemáticas es casi tan respetable como la de su primo de oro....No parece que se dé tanto en la naturaleza, pero tampoco lo ha buscado nadie".

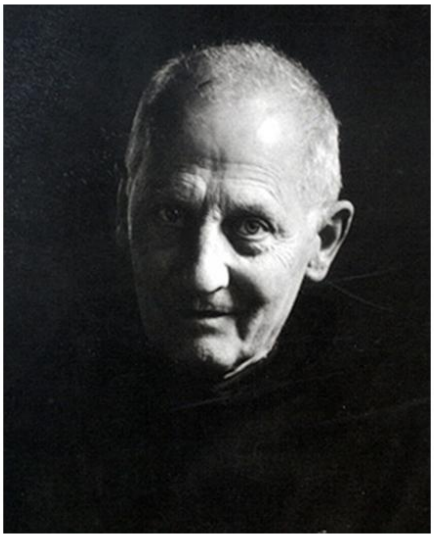


Figure 7: Dom Hans van der Laan, descubridor del número de plástico (http://www.classic.archined.nl/news/0111/dom_hans_vd_laan.html).

El número de plástico tiene un valor aproximado de 1.324718 y fue descubierto por Dom Hans van der Laan (1904-91) en 1928 después de abandonar sus estudios de arquitectura y convertirse en monje. Este número difiere de los sistemas de proporciones arquitectónicas anteriormente utilizados. Su obtención a partir de una ecuación de tercer grado es una respuesta a la dimensionalidad de nuestro mundo, teniendo gran aplicación en arquitectura, donde la proporción juega un papel crucial en la generación de espacios.

5 LA SUCESION DE FIBONACCI

Una de las sucesiones más conocidas e importantes es la denominada sucesión de Fibonacci ó números de Fibonacci. Obsérvese la figura 9, un sistema de cuadrados dispuestos en espiral.

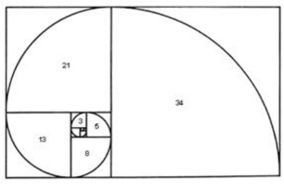
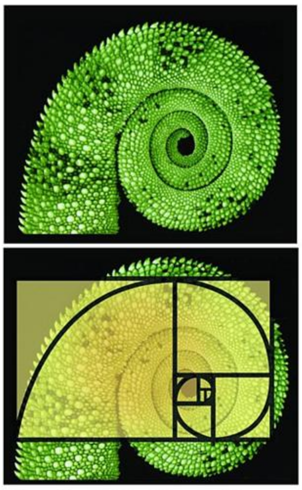


Figure 8: Sistema de cuadrados que originan los números de la sucesión de Fibonacci (http://www.bestcodingpractices.com/fibonacci_and_golden_ratio_in_web_design-39.html).

El cuadrado inicial tiene lado 1, como su vecino inmediato. Luego se añade un cuadrado de lado 2, para que encaje con los dos primeros, seguidos por cuadrados de lado 3, 5, 8, 13, 21, y así sucesivamente. Estos son los números de Fibonacci: cada número es la suma de los dos anteriores. La razón entre dos números consecutivos de esta sucesión tiende al número de oro (0.618). Por ejemplo 13/21= 0.61904, 21/34=0.6176 lo cual es consecuencia de la regla para generar números de Fibonacci, en combinación con la ecuación . La espiral que aparece es una buena aproximación de la denominada “espiral logarítmica” que tan a menudo se encuentra en la naturaleza como en la concha de un nautilus o en la cola de un camaleón.

Figure 9: Espiral logarítmica en un caparazón de nautilus (http://facultystaff.vwc.edu/ trfanney/golden-mean-WOWslides/gm11.html).



Chameleon Tail - Fibonacci Pattern

Figure 10: Cola de camaleón. La figura muestra como sigue el patrón de construcción de la sucesión de Fibonacci (http://taos-telecommunity.org/epow/EPOW-Archive/archive_2003/EPOW-031117.htm).

Los sucesivos giros de la espiral crecen a un ritmo aproximadamente igual al número de oro. A continuación se incluyen los veinte primeros términos de la sucesión de Fibonacci y la regla algebraica de generación:

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \text{ donde } F(0) = F(1) = 1.$$

n	$F(n)$
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	199
14	343
15	542
16	885
17	1427
18	2312
19	3739
20	6051

6 LA SUCESION DE PADOVAN

Otra interesante succesión, ahora relacionada con el número de plástico, es la sucesión de Padovan. Se parte de un diagrama muy similar al de la figura 9, pero compuesto de triángulos equiláteros.

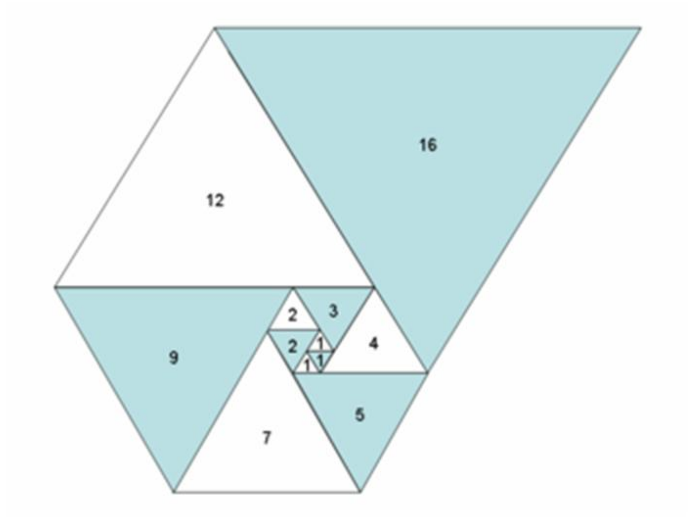


Figure 11: Sucesión de triángulos que determinan la sucesión de Padovan (http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Padovan_triangles.png).

Los triángulos siguen una espiral en el sentido de las agujas de un reloj y de nuevo se trata de una espiral aproximadamente logarítmica. Los tres primeros triángulos tienen lado 1. Los dos siguientes tienen lado 2, y luego los números van como 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21 y así sucesivamente. De nuevo hay una regla de formación sencilla: cada número de la secuencia es la suma de los que le preceden dos y tres lugares antes. Por ejemplo, 12 = 7 + 5, 16 = 9 + 7. Esta sucesión se llama sucesión de Padovan en honor a Richard Padovan. De forma similar a lo que ocurre en la sucesión de Fibonacci, ahora las razones de dos números consecutivos de la sucesión de Padovan tienden hacia el número de plástico. Así por ejemplo 200/151 = 1.3245. A continuación se incluyen los veinte primeros términos de la sucesión de Padovan y la regla algebraica de generación:

$$P(n+1) = P(n-1) + P(n-2) \text{ donde } P(0) = P(1) = P(2) = 1.$$

n	$P(n)$
0	1
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	5
8	7
9	9
10	12
11	16
12	21
13	28
14	37
15	49
16	65
17	86
18	114
19	151
20	200

Obsérvese que los números 3, 5 y 21 forman parte de la sucesión de Fibonacci y de la de Padovan. Benjamín de Weger demostró que éstos son los únicos números que son a la vez de Fibonacci y de Padovan, junto con los triviales 0, 1 y 2. Algunos números de Padovan como 9, 16 y 49 son cuadrados perfectos y sus raíces 3, 4 y 7 también son de Padovan. La cuestión de saber cuántos hay que cumplan esta norma, así como saber si es una coincidencia o una regla, es una cuestión que todavía permanece abierta. Algunos edificios arquitectónicos siguen en su construcción la sucesión de Padovan.

7 LA SUCESION DE PERRIN

Una sucesión con la misma regla de formación que la de Padovan, pero que utiliza diferentes valores iniciales, fue estudiada por el matemático francés Edouard Lucas en 1876.

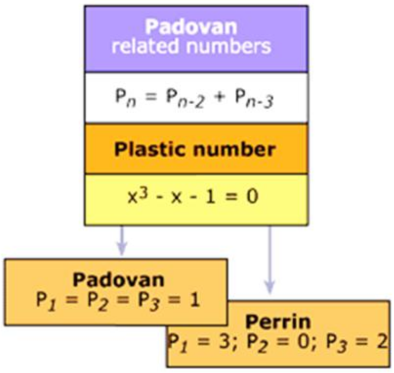


Figure 12: Relación entre diferentes sucesiones y el número de plástico (http://www.archimedes-lab.org/nombredormachine.html).

En 1899 sus ideas fueron desarrolladas por R. Perrin y por ello la sucesión se conoce como sucesión de Perrin. La diferencia estriba en los primeros términos, que son ahora A(0) = 3, A(1) = 0 y A(2) = 2. También incluimos una tabla con los 20 primeros valores de la sucesión.

$$A(n+1) = A(n-1) + A(n-2) \text{ donde } A(0) = 3, A(1) = 0, A(2) = 2.$$

n	$A(n)$
0	3
1	0
2	2
3	3
4	2
5	5
6	5
7	7
8	10
9	12
10	17
11	22
12	29
13	39
14	51
15	68
16	90
17	119
18	158
19	209
20	277

De nuevo la razón entre dos números consecutivos tiende al número de plástico, pero Perrin destacó una curiosa propiedad. Dado un número primo cualquiera p, este número divide exactamente a A(p). Por ejemplo 13 es primo, A(13) = 39, y 39/13=3. Esta propiedad permite un curioso test para saber si un número es primo o no.

8 SERIES

La doble hélice del ADN, el ciclo de las manchas solares y las señales aserradas que la electrónica utiliza se reducen matemáticamente en estos casos de curvas ondulantes a una serie.

Figure 13: La doble hélice del ADN (http://geologia.igeolcu.unam.mx/academia/Temas/RegistroFosil/evolucion.htm).

Pero series más sencillas de números han permitido por ejemplo obtener aproximaciones del famoso número π. El matemático Srinivasa Ramanujan (1887) produjo multitud de series infinitas, amén de aproximaciones explícitas, que son aproximaciones de π.

Algunas de ellas se dan en el único artículo formal que Ramanujan dedicó al tema, "Modular Equations and approximations to π," publicado en 1914. Hay que resaltar que el método básico que subyace a los cálculos más recientes de π lo ideó Ramanujan, por mucho que su puesta en marcha tuviese que esperar a la formulación de los correspondientes algoritmos y al advenimiento de los modernos superordenadores. Pero, ¿cuál es esta famosa serie?.

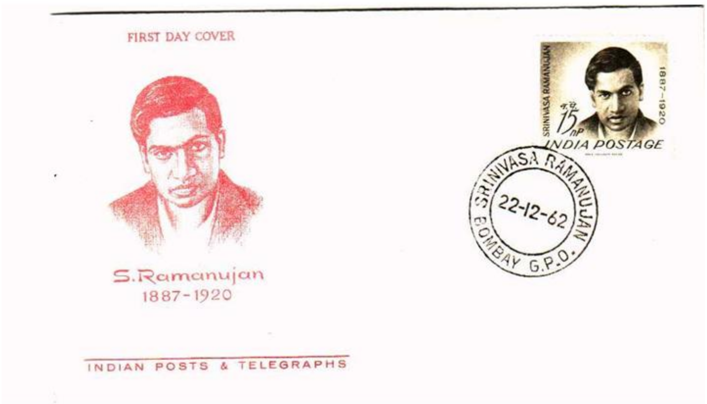


Figure 14: Sellos editados en honor de Ramanujan (http://www.schulmodell.de/mathe/briefmarken/fdc/index4.htm).

Ramanujan (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,[1,103 + 26,390n]}{(n)!^4 396^{4n}}.$$

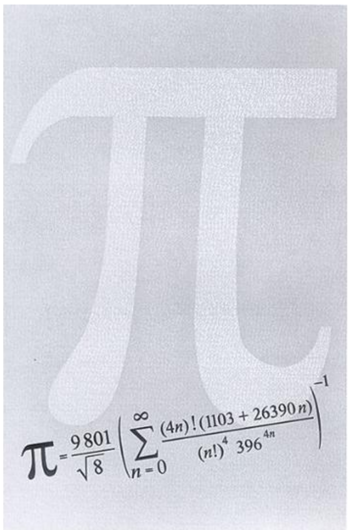


Figure 15: El número Pi y la serie de Ramanujan (http://www.galerie-joellenbeck.de/2717/Mields.html).