Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

UNA NOTA SOBRE LA TOPOLOGIA Y EL FLUJO EN EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE 3 CUERPOS

Antoni Benseny

Dpt. Equacions Funcionals
Universitat de Barcelona

Abstract

We study the topology of the unbounded region of the invariant manifolds with fixed values of the Jacobi constant C of the two-body problem, when C>3. We describe the hamiltonian flow on this manifolds. Two main consequences have been given: (i) a clarifying result about the curves of zero velocity; (ii) using the fact that the circular,planar and restricted three-body problem is a little perturbation of the two-body problem, when m or C^{-1} is sufficiently small, we prove the stability of the first kind of periodic orbits.

§1. Introducción.

El espacio de fases del problema restringido de 3 cuerpos, plano y circular en el sistema de referencia sinódico es $W = (R^2 - \{(m,0),(m-1,0)\}) \times R^2$, con la estructura simpléctica standard; su hamiltoniano, en coordenadas polares sobre W, tiene la forma:

$$H(r,\theta,p_r,p_\theta) = (p_r^2 + p_\theta^2/r^2)/2 - p_\theta - V(r,\theta),$$

donde $V(r,\theta)=(1-m)/r_1 + m/r_2$, siendo $r_1^2=r^2-2mr\cos\theta+m^2$, $r_2^2=r^2-2(1-m)r\cos\theta+(1-m)^2$, $m\in[0,1/2)$.

(Se han normalizado las masas de los primarios y hecho cambios de escala en el tiempo y en el espacio de forma que la suma de sus masas, así como su velocidad angular y distancia relativa sean 1).

Haciendo m=0, se obtiene el espacio de fases $W_0 = R^2 - \{(0,0)\}$ y el hamiltoniano del problema de 2 cuerpos

$$H_0(r,\theta,p_r,p_\theta) = (p_r^2 + p_\theta^2/r^2)/2 - p_\theta - 1/r$$

que es integrable:

$E = (p_r^2 + p_\theta^2/r^2)/2 - 1/r$ (energía sidérea) y $K=p_\theta$ (momento angular)

son 2 integrales primeras en involución.

Se observa que $C = 2p_\theta + 2V(r,\theta) - p_r^2 - p_\theta^2/r^2$ es una integral primera de ambos problemas (de aquí, el interés de su estudio). C representa el doble de la energía sinódica cambiada de signo y se denomina constante de Jacobi. En el problema de 2 cuerpos, $C = 2(K-E)$.

Se definen las variedades invariantes del problema de 2 cuerpos por:

$I_{EK} = \{(r,\theta,p_r,p_\theta)\in W \mid (p_r^2 + p_\theta^2/r^2)/2 - 1/r = E,\ p_\theta = K\}$ y

$I_C = \{(r,\theta,p_r,p_\theta)\in W \mid (2p_\theta - C - p_r^2)r^2 + 2r - p_\theta^2 = 0\}$.

Las ecuaciones del flujo son:

$$\dot{r} = p_r\ ,\quad \dot{\theta} = p_r/r^2 - 1;\quad \dot{p}_r = p_\theta^2/r^3 - 1/r^2,\quad \dot{p}_\theta = 0.$$

§2. Estudio topológico de las variedades invariantes.

El estudio referente a las variedades I_{EK} fue hecho por Smale (1970) y se encuentra detallado en [1]. En esta sección se presenta un estudio topológico-analítico de las variedades I_C del problema de 2 cuerpos que continua siendo válido para las pequeñas perturbaciones analíticas de éste, citadas en la sección 5.

De [5], I_C es conexa, cuando $C\leq 3$ y tiene dos componentes conexas en caso contrario. En lo sucesivo, trataremos sólo con valores de $C>3$ y con la componente exterior de la variedad I_C que notaremos por $I_C^{ext} = \bar{I}_C^{ext} \times S^1$.

I_C es simétrica respecto al plano $P:\{p_r=0\}$; la parte superior a dicho plano puede definirse explícitamente por la función:

$$p_r(r,p_\theta) = (2p_\theta - C + 2/r - p_\theta^2/r^2)^{1/2},$$

definida en el conjunto de puntos (r,p_θ) que hacen positivo el radicando.

Se observa que esta función presenta un máximo sobre la parábola $r=p_\theta^2$.

I_C^{ext} está formada por:

a) órbita circular: $\mathcal{C} = \{(r=r_C=K_C^2,\ p_r=0,\ p_\theta=K_C)\} \times S^1 \equiv \bar{\mathcal{C}} \times S^1$,

b) órbitas elípticas:

$E = \{(r,p_r,p_\theta)\mid (2p_\theta-C-p_r^2)r^2+2r-p_\theta^2=0,\ p_\theta\in(K_C,K_P)\} \times S^1 \equiv \bar{E} \times S^1$,

c) órbitas parabólicas: $P = \{(r,p_r,p_\theta)\mid p_r^2r^2+2r-p_\theta^2=0,\ p_\theta=K_P\}\times S^1 \equiv \bar{P} \times S^1$,

d) órbitas hiperbólicas:

$H = \{(r,p_r,p_\theta)\mid (2p_\theta-C-p_r^2)r^2+2r-p_\theta^2=0,\ p_\theta>K_P\} \times S^1 \equiv \bar{H} \times S^1$.

(K_C es el cero mayor de $g(p_\theta)=2p_\theta + 1/p_\theta^2 - C$ y $K_P = C/2$.)

$\bar{E}$ corta al plano P en 2 ramas:

$$R_{2,3} = \{(r,p_\theta)\mid r=r_{2,3}(p_\theta)=(1\mp(1-p_\theta^2(2p_\theta-C))^{1/2})/(C-2p_\theta),\ p_\theta\in(K_C,K_P)\};$$

$\bar{P}$ corta en el punto $(r=K_P^2/2,\ p_\theta=K_P)$ y $\bar{H}$, en la rama R_2', que es continuación de la R_2, ya que la rama R_3 ha llegado al infinito: $R_2' = \{(r,p_\theta)\mid r=r_2(p_\theta), p_\theta>K_P\}$.

En las coordenadas $(s=r/p_\theta^2, p_r, p_\theta)$ se observa que la proyección de $\bar{I}_C^{ext}$ sobre planos p_θ=cte. es un homeomorfismo con la imagen, dicha imagen es homeomorfa a un semidisco abierto foliado como indica la figura, de forma que $\bar{C}$, $\bar{E}$, $\bar{P}$ y $\bar{H}$ se corresponden con el punto central, la región de curvas cerradas, la primera curva no cerrada y la región restante de curvas no cerradas, respectivamente. De donde:

Teorema 1. I_C^{ext} es homeomorfa a un toro sólido abierto foliado, primero, por toros y, después, por cilindros que se corresponden por el homeomorfismo con las regiones E y $P \cup H$, respectivamente.

§3. Curvas de velocidad cero exteriores.

Las curvas de velocidad cero, que determinan las regiones permitidas del espacio de configuración fijada la constante de Jacobi C, vienen dadas por $\dot{r}=0$, $\dot{\theta}=0$ que implican, usando las ecuaciones del movimiento, $p_r=0$, $p_\theta=r^2$ y $r^2+2/r = C$. Las curvas de velocidad cero exteriores corresponden a la solución mayor de dicha ecuación; corresponden también con el punto de la rama $R_2 \cup R'_2$ con r mínima. De donde:

Teorema 2. Las curvas de velocidad cero exteriores indican el valor crítico de p_θ, p_θ^*, a partir del cual la proyección de $\bar{I}_C^{ext} \cap \{p_\theta < p'_\theta\}$, si $p'_\theta > p_\theta^*$, sobre planos p_θ=cte. deja de ser inyectiva. Estas curvas pertenecen a E, si $C<32^{1/3}$; a P, si $C=32^{1/3}$; a H, en caso contrario.

§4. Análisis del flujo en E.

Siguiendo {2}, pueden usarse las variables de acción-angulo siguientes en E:

ϕ_1 = arc cos $((1+2Er)(1+2EK^2)^{1/2})-(-2E)^{1/2}(-2Er^2-2r+K^2)^{1/2}$, $\phi_2 = \theta$;

$I_1 = (-2E)^{-1/2}-K$, $I_2=K$;

dichas variables dan un comportamiento muy simple del flujo hamiltoniano:

$$\dot{I}_1 = 0, \qquad \dot{\phi}_1 = \omega_1(I_1,I_2) = -(I_1+I_2)^{-3}$$
$$\dot{I}_2 = 0, \qquad \dot{\phi}_2 = \omega_2(I_1,I_2) = -(I_1+I_2)^{-3}-1.$$

Por tanto, usando {2}:

Teorema 3. En E, el flujo hamiltoniano es casi-periódico de frecuencias $(-2E)^{-1/2}$ y $(-2E)^{-1/2}-1$. Si $(-2E)^{1/2}$ es racional, dicho flujo es periódico; en caso contrario, ergódico.

§5. El problema restringido de 3 cuerpos plano y circular como perturbación del de 2 cuerpos.

Escribiendo $H = H_0 + \Delta H$, donde $\Delta H = 1/r - (1-m)/r_1 - m/r_2$, se pueden obtener desarrollos asintóticos en potencias de m, C^{-1} y d (distancia entre los primarios) cuando $m\to 0$, $C^{-1}\to 0$ ó $d\to 0$, de ΔH. El desarrollo en m es directo. Para hacer el desarrollo en potencias de C^{-1}, debe hacerse,primero,respecto a r y después, usar acotaciones inferiores de r dadas por las curvas de velocidad cero exteriores; conviene, entonces, usar el cambio de escala $r=r'C^{1/2}$ para situar las curvas de velocidad cero a distancia finita del origen. El estudio con d pequeño se reduce, escalando variables, a uno con d=1 y C grande.

Proposición. Podemos considerar un problema restringido de 3 cuerpos, plano y circular como una pequeña perturbación del de 2 cuerpos cuando m, C^{-1} o d sean suficientemente pequeños.

§6. Aplicación del teorema del twist de Moser a pequeñas perturbaciones del problema de 2 cuerpos.

Usando las variables de acción-ángulo en E, fijando C, puedo suprimir otro grado de libertad del sistema con el uso de la aplicación de Poincaré sobre una sección transversal al toro sólido que representa la región elíptica tal que la imagen de un punto de la sección es el nuevo corte de la órbita del flujo que pasa por éste con la misma sección. Si cortamos por planos ϕ_1=cte. obtenemos una aplicación de la forma:

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ \theta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p_\theta \\ \theta+\alpha(p_\theta) \end{pmatrix}$$

donde $\alpha(p_\theta) = 2\pi(C-2p_\theta)^{-3/2}$.

Dicha aplicación es un twist ya que $\alpha'(p_\theta)>0$ en E y como que p_θ y θ son variables conjugadas, conserva medida; estamos, por tanto, en las condiciones del teorema del twist de Moser (véase [4]) que nos asegura la existencia de curvas invariantes en la hipersuperficie con C constante para valores de p_θ próximos a K_p. Tenemos, por consiguiente:

Teorema 4. En los problemas restringidos de 3 cuerpos planos y circulares con m, C^{-1} o d suficientemente pequeños se asegura la estabilidad de las órbitas periódicas de primera especie.

Bibliografía

{1} Abraham,R.,Marsden,J.:Fondations of Mechanics, 2^a edición, Benjamin (1978).

{2} Arnol'd,V.,Avez,A.: Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin (1968).

{3} Llibre,J.,Simó,C.: Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem, Ann. Math. 248, 153-184 (1980).

{4} Siegel,C.L.,Moser,J.K.: Lectures on Celestial Mechanics, Springer (1971).

{5} Szebehely,V.: Theory of Orbits, Academic Press (1967).