Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

ÀLGEBRES QUASI HILBERTIANES

Josep Pla Carreras, Ventura Verdú Solans

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Abstract:

In this paper we study the algebras obtained by having the deduction theorem on the sets of two elements, calling them Q.H.-algebras. Adding to them the FREGE'S law, we obtain a Hilbert algebra; adding to them the law $(x.y).y = (y.x).x$, we obtain that thay form a variety; suposing the existence of a least element to the later , we obtain an ortolattice wich gives a boolean algebra on an ortomodular lattice, according to the nature of implication classical or strong .

Una àlgebra QUASI-HILBERTIANA [QH-àlgebra] és una terna $(S,.,u)$, on $S \neq \emptyset$ i . és una operació en S i $u \in S$, tal que, per tot $x,y,z,t \in S$ tenim

QH.1. $x.x = u$

QH.2. $x.y = u$ i $y.x = u$ implica $x = y$;

QH.3. $u.x = x$;

QH.4. $x(y.x) = u$;

QH.5. $\left.\begin{array}{l} x.(y.z) = u \\ x.(y.(zt)) = u \end{array}\right.$ implica $x.(y.t) = u$.

Immediatament deduïm que $x.u = u$ per tot $x \in S$.

S'estableix també fàcilment que

i) $x.y = u$ i $y.x = u$ implica $x.y = u$;

ii) $x.y = u$ implica $(y.z).(x.z) = u$ i $(z.x).(z.y) = u$-

iii) $x.(x.y) = x.y$;

iv) $x.(y.z) = u$ implica $y.(x.z) = u$;

v) $x. [(x.y).y] = u$.

Donada una QH-algebra considerem el sistema clausura associat

$\mathcal{C} = \{ T \subseteq S : u \in T$ i $(x.y \in T$ i $x \in T)$ implica $y \in T \}$

i designem per C l'operador conseqüencia associat.

Aleshores tenim:

TEOREMA 1.

Una terna (S,.,u) és una QH-àlgebra si, i només si, exsiteix un operador conseqüencia arbitrari en S tal que, per tot $X \subseteq S$ i tot $\alpha \subseteq S$, card$(\alpha) \leq 1$ i tot $x,y \in S$, satisfà:

A 1. M.P : $x.y \in C(X)$ implica $y \in C(X,x)$

A 2. T.de la deducció: $y \in C(\alpha, x)$ implica $x,y \in C(\alpha)$

A 3. $C(x) = C(y)$ implica $x=y$.

Aquest resultat generalitza la caracterització de les àlgebres de Hilbert - vía T. de la deducció de tipus 2 i les àlgebres de tipus 1-vía T. de la deducció de tipus 0. [V.Verdú [1980]] .

TEOREMA 2.

En tota QH-àlgebra les condicions següents són equivalents:

H 1. $[x.(y.z)] . [(x.y).(x.z)] = u;$

H 2. $[x.(y.z)] . [y.(x.z)] = u;$

H 3. $(x.y). [(y.z).(x.z)] = u;$

H 4. (S,.,u) és una àlgebra de Hilbert. o equivalentment, C satisfà A1,A3 i A2 amb card $(\alpha) \leq 2$.

Anomenem ara QH-àlgebra de Sales una QH-àlgebra tal que

$$(x.y).y = (y.x).x \quad , \text{per tot } x.y \in S$$

Hom constata fàcilment que $x \vee y = (x.y).y = \sup (x.y)$ i per tant, tota QH-àlgebra de Sales és supra-reticle.

Les QH-àlgebres de Sales constitueixen una VARIETAT; i.e: són equacionalment definibles.

Si les QH-àlgebres de Sales tenen mínim 0 tindrem una negació en $(S,.,u;0)$

$$x' = x.0$$

Hom constata que

$$(S, \wedge, \vee, ')$$

és un orto-reticle.

En aquest cas, si $x.y = x' \vee y$, aleshores . és la implicació feble de l'ortoreticle [cf.Cignoli [1977]] . i per tant,$(S, \wedge , \vee, ')$ és una àlgebra de Boole.

Si $x.y = x \not\to y$ aleshores [cf. of cit.] $(S, \wedge , \vee , ')$ és un reicle ortomodular.

<u>Bibliografia</u>:

CIGNOLI,R. "Deductive Systems and Congmence Relations in Ortolattices". in Math.Logic, Proc. of the first brazilian conference. 1977.

VERDU,V "Lògiques abstractes i estructures algebraiques associades". Curs de Doctorat. 1980.