UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Estadísticos ordenados y teoría de los valores extremos

Autor: Noelia Atencia Toro

Director: Dra. Carme Florit
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de enero de 2019

Abstract

This paper aims to approach the ordered statistics and the theory of extreme values.

In the part of the ordered statistics, the basic notions of distribution and density functions, both marginal and joint, are introduced. But above all, focusing on the distributions of the maximum and minimum values.

The second part is totally dedicated to the theory of extreme values, in which the most important results are explained to get to have a general idea on this subject.

Resumen

Este trabajo pretende acercarnos a los estadísticos ordenados y a la teoría de los valores extremos.

En la parte de los estadísticos ordenados se introducen las nociones básicas de las funciones de distribución y de densidad, tanto marginal como conjunta. Pero sobre todo, centrándose en las distribuciones de los valores máximos y mínimos.

La segunda parte está totalmente dedicada a la teoría de los valores extremos, en la cual se explican los resultados más importantes para llegar a tener una idea general sobre este tema.

2010 Mathematics Subject Classification. 62E20, 62G32

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la doctora Carme Florit su ayuda a la hora de guiarme en este proyecto.

Agradezco a todos mis compañeros que han estado a mi lado durante mi formación en la carrera y en la elaboración de este proyecto; con especial mención a Christian Argüelles, quien me ha ayudado cuando he tenido algún problema.

También agradezco a mi pareja, José Antonio Chica, su ayuda y su apoyo durante todo el proceso.

Y por último, mencionar y agradecer también a mis padres y a mi hermana el apoyo que me han dado durante todos estos años llenos de momentos realmente estresantes.

Índice

1. Introducción

La teoría de valores extremos está enfocada al estudio del comportamiento estocástico de los valores extremos de un proceso.

Los resultados más importantes fueron obtenidos en 1927 por Fréchet, donde se introduce la distribución asintótica del máximo de una muestra y, en 1928, por Fisher y Tippet que estudiaron el mismo problema, pero llegando a la conclusión de que hay tres tipos de distribuciones para la distribución asintótica del máximo. En 1943, Gnedenko encuentra las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de distribuciones del máximo y del mínimo.

Este trabajo pretende explicar la teoría de los valores extremos desde un punto de vista más simple y fácil de comprender, para el cual se necesita tener nociones básicas de probabilidad, estadística y de matemáticas.

El trabajo de final de grado comienza con un breve repaso a la historia de la teoría de los valores extremos.

El segundo capítulo comienza con la definición formal del concepto de estadísticos ordenados de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas. Después se estudian las funciones de distribución y de densidad de forma marginal y conjunta.

Una vez explicado esto, se expone la propiedad de la función de densidad condicionada para después poder ver que los estadísticos ordenados siguen una cadena de Markov. Y para finalizar el capítulo, se da la definición de distribución de los estadísticos ordenados media y rango.

Ya introducidos los estadísticos ordenados, el cuarto capítulo se centra en la teoría de los valores extremos, es decir, las distribuciones asintóticas de los máximos y mínimos. Primero de todo se expone el concepto de dominio de atracción y alguna de sus propiedades que nos serán útiles.

La segunda parte de este capítulo está dedicada al estudio de las distribuciones de los valores extremos y su clasificación en tres tipos y la clasificación de las funciones en los distintos dominios de atracción. En la última parte se muestran varios ejemplos de funciones típicas para ver sus distribuciones asintóticas.

En el último capítulo de este trabajo se exponen dos ejemplos típicos donde se utiliza la teoría de los valores extremos.

2. Un poco de historia

Las primeras personas que estudiaron el cálculo de las probabilidades se dedicaban plenamente al estudio general de los sucesos más comunes, es decir, sin dar importancia a los casos más extremos.

El matemático E. J. Gumbel menciona en su libro *"Stadistics of extremes"* que Nicolas Bernoulli ya consideró en 1709 el actual problema:

Si n hombres mueren con t años. ¿Cuál es la esperanza de vida del último superviviente?

Bernoulli redujo la pregunta anterior a esta siguiente:

¿n puntos se encuentran aleatoriamente en una recta de longitud t?

Lo que hace después es calcular la mayor longitud t desde el origen.

Los primeros casos extremos fueron estudiados en el ámbito de la astronomía, para medir el diámetro de estrellas, repetir observaciones del mismo objeto, etc.

Los valores extremos están relacionados con el cálculo de pequeñas probabilidades. Los primeros 60 años la ley Poison se utilizaba únicamente como curiosidad matemática hasta que L. von Bortkiewicz, en 1898, demostró el significado y la importancia de esta ley. Este autor, en 1922, fue el primero en estudiar los valores extremos. Al año siguiente, R. von Misses definió el concepto de las características del valor extremo (sin usar esta terminación).

El primer estudio de valores extremos de distribuciones que no fueran la normal fue llevado acabo por E.L. Dodd, en 1923, basando su trabajo en el cálculo de valores asintóticos.

En 1925, L.H.C. Tippett calculó todos los valores extremos y la media para casos simples en un rango de 2 a 1000. La tabla que estos resultados generó fue una herramienta fundamental para todos los usos prácticos de valores extremos de distribuciones normales.

M. Fréchet tiene la primera publicación de resolución inicial de distribuciones distintas a la normal, en el año 1927. También fue el primero en obtener una distribución asintótica de valor extremo. Uno de los resultados más relevantes fue que los valores extremos de diferentes funciones de distribución mostraban propiedades comunes y al mismo tiempo tenían una función de distribución asintótica en común.

Un año más tarde, R.A. Fisher y L.H.C. Tippet publicaron el teorema de los valores extremos. Utilizaron el mismo razonamiento que M.Fréchet y encontraron dos distribuciones alternativas a los tipos iniciales de distribuciones; lo demostraron utilizando que la convergencia débil de la distribución de valor extremo es asintótica.

En 1936, R. von Misses encontró algunas condiciones para que las funciones de distribución converjan a las tres distribuciones límites encontradas por Fisher y Tippett. Y en 1943, B. Gnedenko dio las condiciones suficientes y necesarias.

El físico e ingeniero W. Weibull utiliza la teoría de los valores extremos para el estudio de la resistencia de los materiales, y Emil Gumbel, en 1958, publico el libro *Statistics of extremes*, el cual es considerado por muchos matemáticos uno de los libros referente de la teoría de los valores extremos. A partir de entonces esta teoría ha tenido un crecimiento en estudio.

3. Introducción a los estadísticos ordenados

A continuación se realizará una breve introducción a los estadísticos ordenados y se expondrán diferentes resultados relacionados con las funciones de distribución realizadas de los mismos.

Es importante tener en cuenta los valores extremos por su relevancia.

3.1. Estadísticos ordenados

Se considera un conjunto de n variables aleatorias X_1,...,X_n que son independientes y tienen la misma función distribución, $F(x)$, es decir, que son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F(x)$ (notación $i.i.d$).

Si se ordenan X_1,...,X_n de menor a mayor, el resultado de la ordenación

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$$

recibe el nombre de muestra ordenada.

Cuándo dos elementos de la muestra tienen el mismo valor, el orden de su colocación en la muestra ordenada es indiferente.

Definición 3.1. *La variable aleatoria $X_{i:n}$ de $X_1,...,X_n$ recibe el nombre de i-ésimo estadístico ordenado o estadístico de orden i. En particular, las variables aleatorias $X_{1:n}$ y $X_{n:n}$ reciben el nombre de valores extremos, donde $X_{1:n}$ es el mínimo y $X_{n:n}$ es el máximo.*

3.2. Distribución de los estadísticos ordenados

Como previamente ya se ha definido el concepto de estadístico ordenado, paso a explicar las funciones de distribución y de densidad, marginales y conjuntas, de estos.

En primer lugar, vemos la función de distribución y de densidad marginal para los casos particulares del máximo y mínimo.

Proposición 3.2. *Sea $X_{1:n}$ el mínimo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$.*

La función de distribución de $X_{1:n}$ viene dada por:

$$F_{1:n}(x) = 1 - (1 - F(x)))^n.$$

Demostración. $F_{1:n}(x) = P(X_{1:n} \le x) = 1 - P(X_{1:n} > x) = 1 - (P(X_1 > x, ..., X_n > x) = 1 - [P(X_1 > x) \cdot ... \cdot P(X_n > x)] = 1 - [(1 - F(x)) \cdot ... \cdot (1 - F(x))] = 1 - (1 - F(x))^n$.

Para realizar esta demostración se utiliza la propiedad de independencia de la distribución y que el mínimo sea mayor que x, equivale a decir que todos los valores son mayor que x. □

Si la función de distribución es diferenciable, entonces se puede obtener la función de densidad.

Proposición 3.3. *Sea $X_{1:n}$ el mínimo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La función densidad de $X_{1:n}$ viene dada por:

$$f_{1:n}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x).$$

Demostración. Por la proposición 3.2, se tiene que la función de distribución de $X_{1:n}$ es $F_{1:n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$. Por tanto, si derivamos, se obtiene la función de densidad de $X_{1:n}$

$$f_{1:n}(x) = F'_{1:n}(x) = (1 - (1 - F(x))^n)' = n(1 - F(x))^{n-1} f(x).$$

□

Proposición 3.4. *Sea $X_{n:n}$ el máximo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$.*

La función de distribución de $X_{n:n}$ viene dada por:

$$F_{n:n}(x) = F(x)^n.$$

Demostración. $F_{n:n}(x) = P(X_{n:n} \le x) = P(X_1 \le x, ..., X_n \le x) = P(X_1 \le x) \cdot ... \cdot P(X_n \le x) = F(x) \cdot ... \cdot F(x) = F(x)^n$.

Para realizar esta demostración se utiliza la propiedad de independencia de la distribución y que el máximo sea menor o igual que x, equivale a decir que todos los valores son menor o igual que x. □

Suponiendo que la función de distribución es diferenciable, podemos encontrar la función de densidad.

Proposición 3.5. *Sea $X_{n:n}$ el máximo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La función densidad de $X_{n:n}$ viene dada por:

$$f_{n:n}(x) = n \cdot F(x))^{n-1} f(x).$$

Demostración. Por la proposición 3.4, se tiene que la función de distribución de $X_{n:n}$ es $F_{n:n}(x) = F(x)^n$. Por tanto, si derivamos, se obtiene la función de densidad de $X_{n:n}$

$$f_{n:n}(x) = F'_{n:n}(x) = (F(x)^n)' = n(F(x))^{n-1}f(x).$$

$\square$

A continuación, calculamos la función de distribución y de densidad para el estadístico ordenado i-enésimo.

Teorema 3.6. *Sea $X_{i:n}$ el i-ésimo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$.*

La función de distribución de $X_{i:n}$ viene dada por

$$F_{i:n}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}.$$

Demostración. $F_{i:n}(x) = P(X_{i:n} \leq x) = P($Mínimo i de los $X_1,...,X_n$ son menor o igual que $x) = \sum_{k=i}^{n} P($Exactamente k de los $X_1,...,X_n$ son menor o igual que $x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$. $\square$

La expresión del teorema anterior se puede expresar en forma de integral.

Teorema 3.7. *Sea $X_{i:n}$ el i-ésimo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$.*

La función de distribución de $X_{i:n}$ puede expresarse como:

$$F_{i:n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} dt.$$

Demostración. Por un lado, por el teorema 3.6, se tiene que

$$F_{i:n}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}.$$

Por otro lado, utilizando la identidad

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \int_0^{p} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} dt \qquad 0 < p < 1.$$

Por tanto, se obtiene:

$$F_{i:n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} dt.$$

$\square$

Definimos la función "beta" y "beta incompleta" para poder definir, la función "beta regularizada". De este modo, relacionar esta última función con la función de distribución del estadístico ordenado i-ésimo.

Definición 3.8. *La función beta, $\beta(a,b)$, de define como:*

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

Definición 3.9. *La función beta incompleta, $\beta(x;a,b)$, es una generalización de la función beta que se define como:*

$$\beta(x;a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

Definición 3.10. *La función beta incompleta regularizada o función beta regularizada, $I_\beta(x;a,b)$, se define en términos de la función beta incompleta y de la función beta (completa):*

$$I_\beta(x;a,b) = \frac{\beta(x;a,b)}{\beta(a,b)}.$$

Corolario 3.11. *La función de distribución de $X_{i:n}$ se puede escribir como la función beta incompleta regularizada*

$$F_{i:n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} dt = I_\beta(F(x); i, n-i+1).$$

Si consideramos que la función de distribución es diferenciable entonces se puede encontrar la función de densidad.

Proposición 3.12. *Sea $X_{i:n}$ el i-ésimo estadístico ordenado correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La función de densidad de $X_{i:n}$ puede expresarse cómo:

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x)^{i-1}(1-F(x))^{n-i} f(x).$$

Demostración. Por el teorema 3.7, se tiene que la función de distribución de $X_{i:n}$ es $F_{i:n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i}dt$.

Por tanto, si derivamos respecto x, se obtiene la función de densidad de $X_{i:n}$:

$$f_{i:n}(x) = F'_{i:n}(x) = \left(\int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i}dt \right)' =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x)^{i-1}(1-F(x))^{n-i} f(x).$$

□

Hasta aquí he explicado las funciones de distribucion y de densidad marginales. A partir de aquí, lo estudiaremos para casos conjuntos.

Teorema 3.13. *Sean $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ dos estadísticos ordenados, tal que $1 \leq i \leq j \leq n$, correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$.*

La función de distribución conjunta de $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ puede expresarse como:

$$F_{(i,j)}(x_i, x_j) = \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} [F(x_i)]^r [F(x_j) - F(x_i)]^{s-r} [1 - F(x_j)]^{n-s}$$

$$\forall x_i < x_j.$$

Demostración. $F_{(i,j)}(x_i, x_j) = P(X_i \leq x_i, X_j \leq x_j) = P($Mínimo i de los $x_1, ..., x_n$ son menor o igual que x_i y mínimo j de los $x_1, ..., x_n$ son menor o igual que $x_j) = \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} P($exactamente r de los $x_1, ..., x_n$ son menor o igual que x_i y exactamente s de los $x_1, ..., x_n$ son menor o igual que $x_j) = \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} [F(x_i)]^r [F(x_j) - F(x_i)]^{s-r} [1 - F(x_j)]^{n-s}$. □

Proposición 3.14. *Sean $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ dos estadísticos ordenados, tal que $1 \leq i \leq j \leq n$, correspondientes a una muestra aleatoria de tamaño n, con función de distribución $F(x)$.*

La función de distribución conjunta de $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ puede expresarse como:

$$F_{i,j:n}(x_i, x_j) = \int_0^{F(x_i)} \int_{t_1}^{F(x_j)} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1}(t_2 - t_1)^{j-i-1}(1-t_2)^{n-j} dt_2 dt_1$$

$$\forall x_i < x_j.$$

Demostración. Por un lado, por el teorema 3.13, se tiene que:

$$F_{(i,j)}(x_i, x_j) = \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} [F(x_i)]^r [F(x_j) - F(x_i)]^{s-r} [1 - F(x_j)]^{n-s}$$

$$\forall x_i < x_j.$$

Por otro lado, utilizando la identidad:

$$\sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} p_1^r (p_2 - p_1)^{s-r} (1 - p_2)^{n-s} =$$

$$= \int_0^{p_1} \int_{t_1}^{p_2} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1 - t_2)^{n-j} dt_2 dt_1$$

$$0 < p_1 < p_2 < 1.$$

De esta forma, se obtiene:

$$F_{(i,j)}(x_i, x_j) =$$

$$= \int_0^{F(x_i)} \int_{t_1}^{F(x_j)} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1 - t_2)^{n-j} dt_2 dt_1$$

$$\forall x_i < x_j.$$

□

Si la función de distribución es diferenciable entonces se puede encontrar la función de densidad.

Proposición 3.15. *Sean $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ dos estadísticos ordenados, tal que $1 \leq i \leq j \leq n$, correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La función de densidad conjunta de $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ puede expresarse como:

$$f_{i,j:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x_i)]^{i-1} [F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1} [1 - F(x_j)]^{n-j} f(x_i) f(x_j)$$

$$\forall x_i < x_j.$$

Demostración. Por la proposición 3.14, se tiene que la función de distribución de $X_{i,j:n}$ es:

$$F_{i,j:n}(x_i, x_j) = \int_0^{F(x_i)} \int_{t_1}^{F(x_j)} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1 - t_2)^{n-j} dt_2 dt_1.$$

Por tanto, si derivamos, se obtiene la función de densidad de $X_{i,j:n}$:

$$f_{i,j:n}(x) = F'_{i,j:n}(x) =$$

$$= \left(\int_0^{F(x_i)} \int_{t_1}^{F(x_j)} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1}(t_2 - t_1)^{j-i-1}(1-t_2)^{n-j} dt_2 dt_1 \right)' =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x_i)]^{i-1}[F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1}[1 - F(x_j)]^{n-j} f(x_i) f(x_j)$$

$$\forall x_i < x_j.$$

□

Corolario 3.16. *Sean $X_{1:n}$ y $X_{n:n}$ dos estadísticos ordenados correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La función de densidad conjunta de $X_{1:n}$ y $X_{n:n}$ puede expresarse como:

$$f_{1,n:n}(x_1, x_n) = n(n-1) f(x_1) f(x_n)[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} \qquad \textit{para } x_1 \leq x_n.$$

Demostración. La demostración de este corolario es un caso particular de la proposición 3.15.

Considerando $i = 1$ y $j = n$, se obtiene:

$$f_{1,n:n}(x) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1-1)!(n-n)!}[F(x_1)]^{1-1}[F(x_n) - F(x_1)]^{n-1-1}[1 - F(x_n)]^{n-n} \cdot$$

$$\cdot f(x_1) f(x_n) = n(n-1)[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_1) f(x_n) \qquad \forall x_1 < x_n.$$

□

En este caso, podemos generalizar la función de densidad para el caso de i estadísticos ordenados.

Proposición 3.17. *Sean $X_{1:n}$,..., $X_{i:n}$, i estadísticos ordenados correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La función de densidad conjunta de $X_{1:n}$,..., $X_{i:n}$ puede expresarse como:

$$f_{1,...,i:n}(x_1, ..., x_i) = \frac{n!}{(n-i)!}[1 - F(x_1)]^{n-i} f(x_1) \cdots f(x_i) \ \textit{para } x_1 \leq \cdots \leq x_i.$$

Demostración.

$$f_{1,2,\ldots,i:n}(x_1,x_2,\ldots,x_i)=n!f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_i)\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{x_i}^{\infty}\cdots\int_{x_i}^{x_{i+3}}\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_{i+1})f(x_{i+2})\cdots f(x_n)dx_{i+1}dx_{i+2}\cdots dx_n\right]=$$

$$=\frac{n!}{(n-i)!}[1-F(x_i)]^{n-i}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_i) \qquad -\infty<x_1<x_2<\cdots<x_i<+\infty.$$

□

Ahora, sin embargo, lo extendemos al caso n.

Corolario 3.18. *Sean $X_{1:n}$,..., $X_{n:n}$, n estadísticos ordenados correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y función densidad $f(x)$.*

La distribución conjunta de todos los estadísticos de orden es:

$$f_{1,\ldots n:n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=n!\prod_{i=1}^{n}f(x_i) \text{ para } x_1\leq x_2\leq\ldots.\leq x_n.$$

3.3. Propiedad de los estadísticos ordenados

En este apartado, se comprueba que la sucesión de estadísticos ordenados es un proceso de Markov, pero para poder demostrar esto, primero se dará la definición de “cadena de Markov” y la función de densidad condicionada.

Proposición 3.19. *Sean $X_{i:n}$ y $X_{j:n}$ dos estadísticos ordenados correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n, con función de distribución $F(x)$ y con función densidad $f(x)$.*

La función de densidad de $X_{j:n}$ condicionada por $X_{i:n}$ con $1\leq i<j\leq n$ se define como:

$$f_{j:n}(x_j|X_{i:n}=x_{i:n})=\frac{(n-i)!}{(j-i-1)!(n-j)!}\frac{[F(x_j)-F(x_i)]^{j-i-1}[1-F(x_j)]^{n-j}f(x_j)}{[1-F(x_i)]^{n-i}}.$$

Demostración. Sabemos que la función densidad de $X_{j:n}$ condicionada por $X_{i:n}$ es:

$$f_{j:n}(x_j|X_{i:n}=x_{i:n})=\frac{f_{i,j:n}(x_i,x_j)}{f_{i:n}(x_i)}.$$

Por tanto, como en las proposiciones anteriores se han calculado las funciones de densidad de $f_{i,j:n}(x_i, x_j)$ y $f_{i:n}(x_i)$, sustituyendo en la igualdad anterior se obtiene:

$$f_{j:n}(x_j|X_{i:n} = x_{i:n}) =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x_i)]^{i-1}[F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1}[1 - F(x_j)]^{n-j} f(x_i)f(x_j)}{\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x_i)^{i-1}(1 - F(x))^{n-i} f(x_i)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(j-i-1)!(n-j)!}[F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1}[1 - F(x_j)]^{n-j} f(x_j)}{\frac{1}{(n-i)!}(1 - F(x))^{n-i}} =$$

$$= \frac{(n-i)![F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1}[1 - F(x_j)]^{n-j} f(x_j)}{(j-i-1)!(n-j)!(1 - F(x))^{n-i}}.$$

□

Definición 3.20. *Una cadena de Markov es una sucesión de variables aleatorias X_n, $n \geq 1$, que toman valores en un conjunto continuo, conocido como espacio de estados, y que satisface la siguiente propiedad $P(X_{n+1} \leq x_{n+1}|X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = P(X_{n+1} \leq x_{n+1}|X_n = x_n)$ para todo n y cualesquiera estados $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ en E. La propiedad se conoce cómo la propiedad de Markov.*

Teorema 3.21. *Sea $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$, y tal que $\{X_{i:n}\}_i$ corresponde al orden estadístico i-ésimo. Entonces, la sucesión de órdenes estadísticos forman un cadena de Markov.*

Demostración. Por la proposición 3.17, se obtiene que la función de densidad de $X_{1:n}$, $X_{2:n}$, ..., $X_{i:n}$ es:

$$f_{1,2,\ldots,i:n}(x_1, x_2, \ldots, x_i) = n! f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_i)\cdot$$

$$\cdot \left[\int_{x_i}^{\infty} \cdots \int_{x_i}^{x_{i+3}} \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_{i+1})f(x_{i+2})\cdots f(x_n) dx_{i+1}dx_{i+2}\cdots dx_n \right] =$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!}[1 - F(x_i)]^{n-i} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_i), \qquad -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < +\infty.$$

Y de forma similar se obtiene la función densidad de $X_{1:n}$, $X_{2:n}$, ..., $X_{i:n}$, $X_{j:n}$, para $(1 \leq i < j \leq n)$, es:

$$f_{1,2,\ldots,i,j:n}(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_j) = n!f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_i)f(x_j)\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{x_i}^{x_j}\cdots\int_{x_i}^{x_{i+3}}\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_{i+1})f(x_{i+2})\cdots f(x_{j-1})dx_{i+1}dx_{i+2}\cdots dx_{j-1}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{x_j}^{\infty}\cdots\int_{x_j}^{x_{j+3}}\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x_{j+1})f(x_{j+2})\cdots f(x_n)dx_{j+1}dx_{j+2}\cdots dx_n\right] =$$

$$= \frac{n!}{(j-i-1)!(n-j)!}[F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1}[1 - F(x_j)]^{n-j}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_i)f(x_j)$$

$$-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_j < +\infty.$$

Por las dos ecuaciones anteriores, se obtiene la función densidad de $X_{j:n}$ condicionada por $X_{1:n} = x_1$, $X_{2:n} = x_2$, $\ldots$, $X_{i:n} = x_i$:

$$f_{j:n}(x_j|X_{1:n} = x_1, \ldots, X_{i:n} = x_i) = \frac{f_{1,2,\ldots,i,j:n}(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_j)}{f_{1,2,\ldots,i:n}(x_1, x_2, \ldots, x_i)} =$$

$$= \frac{(n-i)!}{(j-i-1)!(n-j)!}\left[\frac{F(x_j) - F(x_i)}{1 - F(x_i)}\right]^{j-i-1}\left[\frac{1 - F(x_j)}{1 - F(x_i)}\right]^{n-j}\frac{f(x_j)}{1 - F(x_i)}$$

$$-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_j < +\infty.$$

La demostración se completa simplemente observando que esto es exactamente igual a la función de densidad de $X_{j:n}$ condicionada por $X_{i:n} = x_i$:

$$f_{j:n}(x_j|X_{i:n} = x_i) = \frac{f_{i,j:n}(x_i, x_j)}{f_{i:n}(x_i)} =$$

$$= \frac{(n-i)!}{(j-i-1)!(n-j)!}\left[\frac{F(x_j) - F(x_i)}{1 - F(x_i)}\right]^{j-i-1}\left[\frac{1 - F(x_j)}{1 - F(x_i)}\right]^{n-j}\frac{f(x_j)}{1 - F(x_i)},$$

$$-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_j < +\infty.$$

□

3.4. Distribución de la mediana y el rango

En la sección anterior, se hallaron distribuciones marginales y distribuciones conjuntas de los estadísticos de orden. En esta sección se hallará la distribución de probabilidades de ciertas funciones de estadísticos de orden.

Para ello, expresamos y demostramos las siguientes ideas.

Definición 3.22. *La mediana es el valor situado en el centro del conjunto de datos ordenados de más pequeño a más grande, de manera que la mitad de estos datos es más pequeño o igual a este valor y la otra mitad es más grande o igual que este valor. Es decir:*

$$\widetilde{X}_n = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}:n} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}\right) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Proposición 3.23. *Sea $\widetilde{X}_n$ la mediana de una muestra aleatoria simple de tamaño n, donde n es impar, y tiene función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$.*

La función de densidad de $\widetilde{X}_n$ es:

$$f_{\widetilde{X}_n}(x) = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2} \left[F(x)(1-F(x))\right]^{\frac{n-1}{2}} f(x) \qquad -\infty < x_0 < \infty.$$

Demostración. Considerando que $i = \dfrac{n+1}{2}$ y aplicando la proposición 3.12 se obtiene:

$$f_{\widetilde{X}_n}(x) = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2} \left[F(x)(1-F(x)\right]^{\frac{n-1}{2}} f(x)$$

siendo este el resultado que se quería demostrar. □

Proposición 3.24. *Sea $\widetilde{X}_n$ la mediana de una muestra aleatoria simple de tamaño n, con n impar, función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$.*

La función de distribución de $\widetilde{X}_n$ viene dada por:

$$F_{\widetilde{X}_n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2} t(1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Demostración. Considerando que $i = \dfrac{n+1}{2}$ y aplicando el teorema 3.7 se obtiene:

$$F_{\widetilde{X}_n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2} t(1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

siendo este el resultado que queríamos demostrar. □

Proposición 3.25. *Sea $\widetilde{X}_n$ la mediana de una muestra aleatoria simple de tamaño n, donde n es par, con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$.*

La función de densidad de $\widetilde{X}_n$ es:

$$f_{\widetilde{X}_n}(x) = \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \int_{-\infty}^{x} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(2x-x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1) f(2x-x_1) dx_1$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Demostración. Considerando que $i = \dfrac{n}{2}$ y $j = \dfrac{n}{2}+1$, aplicando entonces la proposición 3.15 se obtiene:

$$f_{i,j:n}(x_1,x_2) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}-1\right)!\left(n-\frac{n}{2}-1\right)!} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[F(x_2)-F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}-1} \cdot$$

$$\cdot \left[1-F(x_2)\right]^{n-\frac{n}{2}-1} f(x_1)f(x_2) = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(x_2)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1)f(x_2).$$

Como la muestra es par, se tiene que $\widetilde{X}_n = \dfrac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}\right)$. Por lo tanto $x = x_1 + x_2$, pero como se quiere encontrar la función de densidad en función de x y x_1 se debe realizar un cambio de variable $x_2 = 2x - x_1$. Además, como la transformación de (x_1,x_2) a (x_1,x) tiene *Jacobiano* 2, se obtiene:

$$f_{X_{\frac{n}{2}},\widetilde{X}}(x_1,x) = \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(2x-x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1)f(2x-x_1).$$

Por lo tanto, la función de densidad de $\widetilde{X}_n$ es:

$$f_{\widetilde{X}_n}(x) = \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \int_{-\infty}^{x} F(x_1)^{\frac{n}{2}-1}(1-F(2x-x_1)^{\frac{n}{2}-1} f(x_1)f(2x-x_1)dx_1$$

$$-\infty < x < \infty.$$

$\square$

Proposición 3.26. *Sea $\widetilde{X}_n$ la mediana de una muestra aleatoria simple de tamaño n, con n par, función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. La función de distribución de $\widetilde{X}_n$ viene dada por:*

$$F_{\widetilde{X}_n}(x_0) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \left[\int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}} f(x_1)dx_1 - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(2x_0-x_1)\right]^{\frac{n}{2}} f(x_1)dx_1 \right].$$

Demostración. La función de distribución de $\widetilde{X}_n$, por la proposición 3.25, viene dada por:

$$F_{\widetilde{X}_n}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_{\widetilde{X}_n}(x)dx =$$

$$= \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{x} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(2x-x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1)f(2x-x_1)dx_1dx.$$

Aplicando el teorema de *Fubini* e intercambiando el orden de integración se obtiene:

$$F_{\widetilde{X}_n}(x_0) = \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1) \left(\int_{x_1}^{x_0} \left[1-F(2x-x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(2x-x_1)dx\right) dx_1.$$

Y realizando el cambio de variable $y = 2x - x_1$:

$$F_{\widetilde{X}_n}(x_0) = \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1) \left(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{2x_0+x_1} \left[1-F(y)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(y)dy\right) dx_1 =$$

$$= \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1) \left[-\frac{1}{n}\left[1-F(y)\right]^{\frac{n}{2}}\right]_{x_1}^{2x_0+x_1} dx_1 =$$

$$= \frac{2n!}{\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]^2} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1) \left[\left[1-F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}} - \left[1-F(2x_0-x_1)\right]^{\frac{n}{2}}\right] dx_1 =$$

$$= \frac{2n!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} f(x_1) \left[\left[1-F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}} - \left[1-F(2x_0-x_1)\right]^{\frac{n}{2}}\right] dx_1 =$$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \left[\int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}} f(x_1)dx_1 - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{x_0} \left[F(x_1)\right]^{\frac{n}{2}-1} \left[1-F(2x_0-x_1)\right]^{\frac{n}{2}} f(x_1)dx_1\right].$$

□

Definición 3.27. *El rango o recorrido se calcula como el máximo menos el mínimo. Es decir,*

$$R{=}X_{n:n} - X_{1:n}.$$

Dicho estadístico da una medida de la dispersión de los valores.

La distribución del recorrido de la muestra es un caso particular de la distribución conjunta de dos valores.

Proposición 3.28. *Sea $R{=}X_{n:n} - X_{1:n}$, el rango de una muestra aleatoria simple de tamaño n, que tiene una función de distribución F(x) y una función de densidad f(x).*

La función de densidad de R es:

$$f_R(r) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}[F(x_1+r) - F(x_1)]^{n-2} f(x_1)f(x_1-r)dx_1 \quad r > 0.$$

Demostración. La función de densidad conjunta de $x_{1:n}$ y $x_{n:n}$ es:

$$f_R(x_1, x_n) = n(n-1)f(x_1)f(x_n)\left[F(x_n) - F(x_1)\right]^{n-2}.$$

Si sustituimos x_n, por $r + x_1$, la función de densidad conjunta en el muestreo del recorrido y del menor valor de la muestra es:

$$f_R(r, x_1) = n(n-1)f(x_1)f(r+x_1)\left[F(r+x_1) - F(x_1)\right]^{n-2}$$

Se obtiene la función de densidad del recorrido (como densidad marginal) integrando la función de densidad conjunta respecto a x_1:

$$f_R(r) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(r+x_1)\left[F(r+x_1) - F(x_1)\right]^{n-2} dx_1.$$

□

Proposición 3.29. *Sea $R{=}X_{n:n}{-}X_{1:n}$ el rango de una muestra aleatoria de tamaño n que tiene una función de distribución F(x) y una función de densidad f.*

La función de distribución de R es:

$$F_R(r) = n\int_{-\infty}^{\infty}[F(x_1+r) - F(x_1)]^{n-1} f(x_1)dx_1 \quad r > 0.$$

Demostración. A partir de la proposición 3.28, si se integra la función de densidad, se obtiene la de distribución $F_R(r)$:

$$F_R(r) = n(n-1)\int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(r+x_1)\left[F(r+x_1) - F(x_1)\right]^{n-2} dx_1 dr.$$

Obteniendo:

$$F_R(r) = n\int_{-\infty}^{\infty} [F(r+x_1) - F(x_1)]^{n-1} f(x_1) dx_1.$$

$\square$

4. Distribución de valores extremos

En el capítulo anterior se han dado algunas nociones de las funciones de distribución de los i-ésimo estadísticos ordenados. Pero, en esos estadísticos, nos queremos centrar más en los del mínimo y del máximo para el caso de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F(x)$.

La teoría de los valores extremos tiene como objetivo caracterizar las partes extremas de una función de distribución $F(x)$, para así poder prevenir un evento que sea poco frecuente pero, que puede llegar a ser de cierta importancia. Un ejemplo en el que se aplica esta teoría es en el nivel medio de lluvia en una localidad.

Se considera que la función de distribución $F(x)$ tal que la función de distribución del máximo y del mínimo son:

$$M_n(x) = F^n(x)$$
$$m_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

Cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = \lim_{n\to\infty} F^n(x) = \begin{cases} 1 & si \quad F(x) = 1 \\ 0 & si \quad F(x) < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - F(x))^n = \begin{cases} 1 & si \quad F(x) \leq 1 \\ 0 & si \quad F(x) = 1 \end{cases}$$

por tanto, las funciones de distribución son degeneradas.

Para que la función de distribución límite no sea degenerada, se tiene que normalizar, es decir, buscamos una sucesión $\frac{max(X_1,...,X_n)-a_n}{b_n}$ y $\frac{min(X_1,...,X_n)-c_n}{d_n}$, $n \geq 1$, donde a_n y c_n representan el cambio de localización y $b_n > 0$ y d_n representan el cambio de escala. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} M_n(a_n + b_n x) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x) \qquad \forall x$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n(c_n + d_n x) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - F(c_n + d_n x))^n = \tilde{G}(x) \qquad \forall x$$

Como $min(X_1, ..., X_n) = -max(-X_1, ..., -X_n)$ nos podemos centrar en el caso del máximo, porque para el caso del mínimo solo tenemos que reformular los resultados.

4.1. Dominios de atracción

Definición 4.1. *Una función de distribución $F(x)$ pertenece al dominio de atracción de máximos de una función de distribución no degenerada $G(x)$ si existen las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n > 0\}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x) \tag{4.1}$$

para todos los puntos de continuidad de $G(x)$.

Si se cumple (4.1), escribiremos que $F \in \mathscr{D}(G)$.

Podemos encontrarnos con varias cuestiones al respecto, como las siguientes:

1. ¿Cuándo se verifica (4.1)?
2. ¿Cómo encontrar $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$?
3. ¿Qué funciones límites puede tener?

Todas estas preguntas se resuelven en este y en el siguiente apartado.

Lema 4.2. *[12] Si G es una función de distribución no degenerada y $a > 0$, $\alpha > 0$, b y β son constantes tal que $G(ax + b) = G(\alpha x + \beta)$ para todo x, entonces $a = \alpha$ y $b = \beta$.*

Observación 4.3. Si G es una función de distribución no degenerada entonces existe $y_1 < y_2$ tal que $G^{-1}(y_1) < G^{-1}(y_2)$ está bien definida.

Observación 4.4. Sea $\Psi(x)$ una función continua no decreciente por la derecha, definimos la función inversa en el intervalo $(\text{ínf}\,\Psi(x), \sup \Psi(x))$ por

$$\Psi^{-1}(y) = \text{ínf}\{x; \Psi(x) \geq y\}.$$

Si $a > 0$, b y c son constantes, y $H(x) = \Psi(az + b) - c$, entonces $H^{-1}(y) = a^{-1}(\Psi^{-1}(y + c) - b)$.

Demostración. (Lema) Se considera $y_1 < y_2$ y $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ tales que $x_1 = G^{-1}(y_1)$ y $x_2 = G^{-1}(y_2)$.

Haciendo la inversa de $G(ax + b)$ y $G(\alpha x + \beta)$ se obtiene:

$$a^{-1}\left(G^{-1}(y) - b\right) = \alpha^{-1}\left(G^{-1}(y) - \beta\right) \qquad \forall y.$$

Aplicándolo a y_1 e y_2, se obtiene:

$$a^{-1}(x_1 - b) = \alpha^{-1}(x_1 - \beta)$$

y

$$a^{-1}(x_2 - b) = \alpha^{-1}(x_2 - \beta)$$

de lo que se deduce que $\alpha = a$ y $\beta = b$. $\square$

Teorema 4.5. *(Khintchine)[12] Sean F_n una sucesión de funciones de distribución y G una función de distribución no degenerada. Sea $a_n > 0$ y b_n constantes tal que*

$$F_n(a_n x + b_n) \to G(x) \tag{4.2}$$

para todos los puntos de continuidad de $G(x)$.

Entonces para alguna función de distribución no generada G_* y contantes $\alpha_n > 0$ y β_n

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \to G_*(x) \tag{4.3}$$

para todos los puntos de continuidad de $G_*(x)$ si, y solo si,

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \to a \qquad \text{y} \qquad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \to b \tag{4.4}$$

para todo $a > 0$ y b.

Además,

$$G_*(x) = G(ax + b). \tag{4.5}$$

Demostración. Se escribe $\alpha'_n = a_n^{-1}\alpha_n$, $\beta'_n = a_n^{-1}(\beta_n - b_n)$ y $F'_n(x) = F_n(a_n x + b_n)$, se reescriben las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4) como:

$$F'_n(x) \to G(x), \tag{4.6}$$

$$F'_n(\alpha'_n x + \beta'_n) \to G_*(x), \tag{4.7}$$

$$\alpha'_n \to a \qquad \text{y} \qquad \beta'_n \to b \tag{4.8}$$

para todo $a > 0$ y b, y para todos los puntos de continuidad de $G(x)$ y $G_*(x)$, respectivamente.

Si (4.6) y (4.8) se cumple, entonces obviamente (4.7) también, con $G_*(x) = G(ax + b)$. Así, (4.2) y (4.4) implican (4.3) y (4.5).

Dado que G_* se supone no degenerado, hay dos puntos distintos x' y x'' (que pueden tomarse como puntos de continuidad de G_*), de manera que $0 < G_*(x') < 1$ y $0 < G_*(x'') < 1$.

La sucesión $\{\alpha'_n x' + \beta'_n\}$ debe estar acotada. Sino, se podría elegir una sucesión $\{n_k\}$ para que $\alpha'_{n_k} x' + \beta'_{n_k} \to \pm\infty$, que por (4.6), dado que G es una función de distribución, implicaría claramente que el límite de $F'_{n_k}(\alpha'_{n_k} x' + \beta'_{n_k})$ es cero o uno que contradice (4.7) para $x = x'$. Por lo tanto, $\{\alpha'_n x' + \beta'_n\}$ está acotado, y también lo está $\{\alpha'_n x'' + \beta'_n\}$, que juntos muestran que las sucesiones $\{\alpha'_n\}$ y $\{\beta'_n\}$ están acotadas.

Por lo tanto, existen constantes a y b y una sucesión $\{n_k\}$ de enteros tales que $\alpha'_{n_k} \to a$ y $\beta'_{n_k} \to b$, y sigue como anteriormente que

$$F'_{n_k}(\alpha'_{n_k}x + \beta'_{n_k}) \to G(ax + b)$$

para todos los puntos de continuidad de $G(x)$, de ahí que por (4.7), $G(ax + b) = G_*(x)$, una función de distribución, se debe tener $a > 0$. Por otro lado, si otra sucesión $\{m_k\}$ de enteros diera $\alpha'_{m_k} \to a' > 0$ y $\beta'_{m_k} \to b'$, podríamos tener $G(a'x + b') = G_*(x) = G(ax + b)$ y, por lo tanto, $a' = a$ y $b' = b$ por el lema 4.2. Asi pues obtenemos, $\alpha'_n \to a$ y $\beta'_n \to b'$, tal y como queríamos demostrar. □

4.2. Distribución asintótica de los valores extremos

La distribución de valores extremos pretende ajustar los máximos, de los bloques de observaciones una vez normalizados, y esto sucede por el Teorema de Fisher y Tippet de 1928.

Según Fisher y Tippet, sea un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución común $F(x)$ y M representa el máximo de todas ellas, la cuestión a la que da respuesta es: ¿cuál es la distribución del máximo?

Teorema 4.6. *(Fisher-Tippett[1928]) [14] Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Si existen las constantes $a_n \in \mathbb{R}$ y $b_n > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x) \tag{4.9}$$

tiene la función límite de distribución no degenerada G. Entonces la función de distribución maximal es del tipo de una de las distribuciones:

$$G_1(x;\alpha) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & si \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$G_2(x;\alpha) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{\alpha}] & si \quad x < 0, \quad \alpha > 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

$$G_3(x) = \exp[-\exp(-x)] \quad si \quad -\infty < x < \infty \tag{4.12}$$

Notación 4.7. *La dos primeras funciones de distribución implican un parámetro adicional α que está relacionado con el comportamiento de la función de distribución de principal F. Las tres funciones de distribución G_1, G_2, y G_3 tienen el nombre de los matemáticos que la demostraron. La primera función de distribución se llama Frechét, la segunda se denomina Weibull y, por ultimo, la tercera se llama Gumbel. Se observa que el negativo de una variable aleatoria de Weibull, con el parámetro de forma α, tiene la función de distribución $G_2(x;\alpha)$.*

Demostración. Para todo $t \in \mathbb{R}$ se escribe $[t]$ ={la parte entera de t}.

Por la ecuación (4.9) se tiene que para todo $t > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} F^{[nt]}(a_{[nt]}x + b_{[nt]}) = G(x)$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} F^{[nt]}(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} (F^n(a_n x + b_n))^{\frac{[nt]}{n}} = G^t(x).$$

Por lo tanto $G(x)$ y $G^t(x)$ son del mismo tipo de familia. Aplicando el teorema de convergencia, es decir, el teorema de Khintchine, entonces existen $\alpha(t) > 0$ y $\beta(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{[nt]}} = \alpha(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{[nt]}}{a_{[nt]}} = \beta(t)$$

y

$$G^t(x) = G(\alpha(t)x + \beta(t)). \tag{4.13}$$

Por un lado se tiene que:

$$G^{ts}(x) = G(\alpha(ts)x + \beta(ts)$$

y por otro lado:

$$\begin{gathered} G^{ts}(x) = (G^s(x))^t = (G(\alpha(s)x + \beta(s))^t = \\ = G(\alpha(t)(\alpha(s)x + \beta(s) + \beta(t)) = G(\alpha(t)\alpha(s)x + \alpha(t)\beta(s) + \beta(t)). \end{gathered}$$

Como se ha dicho que $G(x)$ es una función de distribución no degenerada, se puede decir que para $t > 0$ y $s > 0$:

$$\alpha(ts) = \alpha(t)\alpha(s) \tag{4.14}$$

$$\beta(ts) = \alpha(t)\beta(s) + \beta(t) = \alpha(s)\beta(t) + \beta(t) \tag{4.15}$$

la última igualdad es por simetría.

La ecuación (4.14) es la ecuación funcional de Hamel. La única solución finita, medible y no degenerada es de la forma:

$$\alpha(t) = t^{-\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Se diferencian en tres casos:

(a) $\theta = 0$, entonces es del tipo Gumbel.

(b) $\theta > 0$, entonces es del tipo Fréchet.

(c) $\theta < 0$, entonces es del tipo Weibull.

Caso (a) $\theta = 0$**:**

En este caso :

$$\alpha(t) = t^{-\theta} = \alpha(t) = t^{-0} = 1 \quad \text{y} \quad \beta(ts) = \alpha(t)\beta(s) + \beta(t) = 1 \cdot \beta(s) + \beta(t)$$

que es una variante de la ecuación de Hamel. La solución es de la forma:

$$\beta(t) = -c \cdot \log(t), \qquad t > 0, c \in \mathbb{R}.$$

Por la ecuación (4.13) se tiene

$$G^t(x) = G(x - c \cdot \log(t)). \tag{4.17}$$

Si $c = 0$ entonces $G(x)$ sería una función degenerada. Para cualquier x fijado , $G^t(x)$ no crece en t, entonces se puede considerar que $c > 0$.

Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, $G(x_0) = 1$ entonces de (4.17) se obtiene que:

$$1 = G(x_0 - c \cdot \log(t))$$

para todo t y haciendo el cambio de variable, $u = x_0 - c \cdot \log(t)$, se obtiene que $G(u) = 1$ para todo u, contradicción. Por lo tanto, $G(x) < 1$ para todo x.

Considerando que $G(x) = 0$ para todo x siguiendo los pasos del caso anterior llegamos a una contradicción y por lo tanto $G(x) > 0$.

Sustituyendo $x = 0$ en (4.17) se obtiene que para $t > 0$:

$$G^t(0) = G(-c \cdot \log(t)). \tag{4.18}$$

Considerando $exp\{-e^{-p}\} = G(0) \in (0, 1)$ y $u = -c \cdot \log(t)$. El rango de t es $(0, \infty)$, entonces el rango de u es $(-\infty, \infty)$ y haciendo el cambio de variable en (3,10) se obtiene:

$$G(u) = exp(-e^{-p}t) = exp(-e^{-(p+c^{-1}u)}) = G_3(p + c^{-1}u).$$

Caso (b) $\theta > 0$**:**

De la ecuación (4.15):

$$\alpha(t)\beta(s) + \beta(t) = \alpha(s)\beta(t) + \beta(s)$$

si $t \neq 1$ y $s \neq 1$, por tanto obtenemos:

$$\frac{\beta(s)}{1-\alpha(s)} = \frac{\beta(t)}{1-\alpha(t)}$$

es decir, la función $\dfrac{\beta(\cdot)}{1-\alpha(\cdot)}$ es constante. Entonces, para $t \neq 1$:

$$\beta(t) = \frac{\beta(s)}{1-\alpha(s)}(1-\alpha(t)) = c(1-t^{-\theta})$$

y sustituyendo en la ecuación (4.13) se obtiene:

$$G^t(x) = G(t^{-\theta}x + c(1-t^{-\theta})) = G(t^{-\theta}x + c)$$

es decir, haciendo cambio de variables:

$$G^t(x+c) = G(t^{-\theta}(x+c)+c).$$

Considerando $H(x) = G(x+c)$, entonces G y H son del mismo tipo, así que basta con resolver para H.

La función H satisface:

$$H^t(x) = H(t^{-\theta}x) \tag{4.19}$$

y H no es degenerada.

Si $x = 0$, de la ecuación (4.19) se obtiene $t \cdot \log H(0) = \log H(0)$ para $t > 0$ de modo que $\log H(0)$ es 0 ó es $-\infty$, es decir, $H(0) = 0$ ó 1. Pero no puede ser que $H(0) = 1$, ya que esto implica que existe un $x < 0$ tal que $H(x) < 1$ y por lo tanto el lado izquierdo de (4.19) es decreciente en t mientras que el lado derecho es creciente en t. Entonces se llega a que $H(0) = 0$.

Para $x = 1$, de la ecuación (4.19) se obtiene $H^t(1) = H(t^{-\theta})$. Si $H(1) = 0$ entonces $H \equiv 0$ y si $H(1) = 1$ entonces $H \equiv 1$, y ambas conclusiones contradicen la hipótesis de que H es no degenerada. Por lo tanto $H(1) \in (0,1)$.

Si $\theta^{-1} = \alpha$, $H(1) = exp(-p^{-\alpha})$, $u = t^{-\theta}$ tal que $u^{-\alpha} = t$. A partir de (4.19) y $x = 1$ se obtiene para $u > 0$:

$$H(u) = exp(-p^{-\alpha}t) = exp(-(pu)^{-\alpha}) = G_1(pu;\alpha).$$

Caso (c) $\theta < 0$**:**

La demostración de este caso es similar la del caso $\theta > 0$. □

Si incluimos los parámetros de localización μ y forma σ, las funciones de distribución acumulada son:

$$G_1(x;\mu,\sigma,\alpha) = \begin{cases} 0 & si \quad x-\mu \leq 0 \\ \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\} & si \quad x-\mu > 0, \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

$$G_2(x;\mu,\sigma,\alpha) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\} & si \quad x-\mu<0, \quad \alpha>0 \\ 1 & si \quad x-\mu \geq 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

$$G_3(x;\mu,\sigma) = \exp\left\{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right\} \quad si \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha = 0 \tag{4.22}$$

Independientemente de como se distribuya $F(x)$, la distribución asintótica del máximo siempre será una de las tres distribuciones descritas. Las tres distribuciones límites anteriores (4.20), (4.21) y (4.22) se pueden expresar en una única familia de distribuciones.

La distribución de valores extremos generalizada expresa las tres distribuciones de valores extremos en una única función de distribución con parámetros (μ, σ, ξ)

$$G(x;\mu,\sigma,\alpha) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & si \quad \xi \neq 0 \\ \exp\left\{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right\} & si \quad \xi = 0 \end{cases}$$

donde $1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0$ y los parámetros satisfacen $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ y $-\infty < \xi < \infty$. Cuando ξ es 0, la distribución se corresponde con una distribución Gumbel, cuando es negativo con una distribución Weibull y cuando es positivo con una distribución de Fréchet. Esta parametrización también es conocida como von Mises-Jenkinson.

La función de densidad viene dada por

$$g(x;\mu,\sigma,\alpha) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}-1}\dfrac{1}{\sigma} & si \quad \xi<0 \text{ y } -\infty<x-\mu<\frac{-\sigma}{\xi} \\ & \quad\quad \text{o } \xi>0 \text{ y } x-\mu>\frac{-\sigma}{\xi} \\ \exp\left\{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right\} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\dfrac{1}{\sigma} & si \quad \xi=0 \text{ y } x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Al principio del proyecto, comentamos que B. Gendenko (1943) dio las condiciones necesarias y suficientes para que las funciones converjan a las distribuciones anteriores, es decir, que pertenezca a uno de los tres dominios de atracción de las distribuciones límites. Las demostraciones de esas condiciones que dio Gnedenko se pueden ver en "Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire" [9].

Nosotros vamos a dar unas condiciones equivalentes a las que dio B. Gendenko.

Teorema 4.8. *Condición necesaria y suficiente para que converja, es decir, que pertenezca al uno de los tres dominios de las distribuciones limites.*

1. *$F \in \mathscr{D}(G_1)$ si, y solo si, $F^{-1}(1) = +\infty$ y que exista una contante $\alpha > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}(= -\log(G_1(x;\alpha))) \tag{4.23}$$

para todo $x > 0$.

Además, si se satisface (4.23) *entonces* $G_1(x) = G_1(x;\alpha)$, *y se escribe* $F \in \mathscr{D}(G_1(x;\alpha))$.

2. $F \in \mathscr{D}(G_2)$ *si, y solo si,* $F^{-1}(1)$ *es finito y existe una constante* $\alpha > 0$ *tal que para todo* $x > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1-F(F^{-1}(1)-\epsilon x)}{1-F(F^{-1}(1)-\epsilon)} = x^{\alpha}(= -\log(G_2(-x;\alpha))). \tag{4.24}$$

Si se cumple (4.24) *entonces* $G_2(x) = G_2(x;\alpha)$, *y se escribe* $F \in \mathscr{D}(G_2(x;\alpha))$.

3. $F \in \mathscr{D}(G_3)$ *si, y solo si,* $E(X|X > c)$ *es finito para un algun cierto* $c < F^{-1}(1)$, *y para todo real* x:

$$\lim_{t\to F^{-1}(1)} \frac{1-F(t+xE(X-t|X>t))}{1-F(t)} = \exp(-x)(= -\log G_3(x)) \tag{4.25}$$

donde X *representa la variable aleatoria de la población teniendo función de distribución* F.

La media condicional $E(X-t|X>t)$ *que aparece en* (4.25) *se conoce como media residual vida en la literatura de confiabilidad.*

Este resultado es una adaptación de los teoremas 2.1.1-2.1.3 y 2.4.1. del libro de J.Galambos [8].

Dominio de atracción

DISTRIBUCIÓN	MÁXIMO	MÍNIMO
NORMAL	Gumbel	Gumbel
EXPONENCIAL	Gumbel	Weibull
LOG-NORMAL	Gumbel	Gumbel
GAMMA	Gumbel	Weibull
GUMBEL MÁXIMO	Gumbel	Gumbel
GUMBEL MÍNIMO	Gumbel	Gumbel
UNIFORME	Weibull	Weibull
WEIBULL MÁXIMO	Weibull	Gumbel
WEIBULL MÍNIMO	Gumbel	Weibull
CAUCHY	Frechet	Frechet
PARETO	Frechet	Weibull
FRECHET MÁXIMO	Frechet	Gumbel
FRECHET MÍNIMO	Gumbel	Frechet

Figura 1: Tabla de dominios de atracción para algunas distribuciones

Respecto a la elección de las constantes de normalización, a_n y b_n, pueden ser elegidas como:

Teorema 4.9. *Sean a_n, $b_n > 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x)$, entonces a_n, $b_n > 0$ serán de la forma:*

1. $a_n = 0$, $b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ *si* $G = G_1$.

2. $a_n = F^{-1}(1)$, $b_n = F^{-1}(1) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ *si* $G = G_2$.

3. $a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $b_n = E(X - a_n | X > a_n)$ *o* $F^{-1}\left(1 - \frac{1}{ne}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ *si* $G = G_3$.

Observación 4.10. El teorema 4.9 no se puede aplicar a la función normal. En este caso, consideraremos las constantes:

$$a_n = (2log(n)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}(log(log(n)) + log(4\pi)}{(2log(n)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad b_n = (2log(n)^{\frac{1}{2}}.$$

Este resultado se puede encontrar en el libro de J.Galambos [8].

4.3. Ejemplos

Ejemplo 4.11. Considerando que $X_1, ..., X_n$ son *v.a.i.i.d.* con función de distribución exponencial y parámetro $\lambda > 0$, es decir:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

para $x > 0$.

La función de distribución del máximo está definida como $M_n(x) = F^n(x)$, por tanto:

$$M_n(x) = F^n(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n.$$

Normalizando la función, entonces:

$$P\left(\frac{x_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = P(x_n \leq b_n \cdot x + a_n) = (F(b_n \cdot x + a_n))^n. \tag{4.26}$$

Para calcular a_n y b_n se necesita tener la inversa de $F(x)$:

$$F^{-1}(x) = -\frac{\log(1-x)}{\lambda}.$$

Calculando las constantes a_n y b_n a partir del teorema (4.9).

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\log(1 - 1 + \frac{1}{n})}{\lambda} = -\frac{\log(\frac{1}{n})}{\lambda} = \frac{-\log(1) + \log(n)}{\lambda} = \frac{\log(n)}{\lambda}$$

$$b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{ne}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\log(1 - 1 + \frac{1}{ne})}{\lambda} + \frac{\log(1 - 1 + \frac{1}{n})}{\lambda} =$$

$$= \frac{-\log(\frac{1}{ne})}{\lambda} - \frac{\log(n)}{\lambda} = \frac{\log(n) + \log(e)}{\lambda} - \frac{\log(n)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Sustituyendo las constantes encontradas en la ecuación (4.26), se obtiene:

$$\left[F\left(\frac{1}{\lambda}x + \frac{\log(n)}{\lambda}\right)\right]^n = \left(1 - e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}x + \frac{\log(n)}{\lambda})}\right)^n = \left(1 - e^{-x} \cdot e^{-\log(n)}\right)^n =$$

$$= \left(1 - e^{-x} \cdot e^{\log(n^{-1})}\right)^n = \left(1 - e^{-x} \cdot n^{-1}\right)^n.$$

Para ver a qué tipo de función pertenece hacemos el límite, y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - e^{-x} \cdot n^{-1}\right)^n = \exp[-e^{-x}].$$

Por lo tanto, la función de distribución asintótica maximal de la exponencial es la distribución Gumbel.

Ejemplo 4.12. Se considera que $X_1, ..., X_n$ son *v.a.i.i.d.* con función de distribución uniforme, es decir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a < x < b \\ 1 & si \quad b < x \end{cases}$$

La función de distribución del máximo está definida como $M_n(x) = F^n(x)$, por tanto:

$$M_n(x) = F^n(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad \text{si } a < x < b.$$

Normalizamos la función, entonces:

$$P\left(\frac{x_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = P(x_n \leq b_n \cdot x + a_n) = (F(b_n \cdot x + a_n))^n. \tag{4.27}$$

Para calcular a_n y b_n necesitamos tener la inversa de $F(x)$:

$$F^{-1}(x) = x(b-a) + a.$$

Calculamos las constantes a_n y b_n a partir del teorema (4.9)

$$a_n = F^{-1}(1) = b - a + a = b$$
$$b_n = F^{-1}(1) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = b - \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)(b-a) + a\right) =$$
$$= b - \left(b - a - \frac{a-b}{n} + a\right) = \frac{b-a}{n}$$

Se tiene que $a_n = b$ y $b_n = \dfrac{b-a}{n}$. Sustituimos los valores en la ecuación (4.27), y se obtiene:

$$\left[F\left(\frac{b-a}{n}x + b\right)\right]^n = \left(\frac{\frac{b-a}{n}x + b - a}{b-a}\right)^n = \left(\frac{(b-a)x}{(b-a)n} + 1\right)^n = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n.$$

Para ver a qué función pertenece hacemos el límite, y obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}+1\right)^n = e^x.$$

Por lo tanto, la función de distribución asintótica maximal de la uniforme es la distribución Weibull.

Ejemplo 4.13. Se considera que $X_1, ..., X_n$ son *v.a.i.i.d.* con función de distribución Pareto, es decir:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha, \qquad \text{si } x > c.$$

La función de distribución del máximo está definida como $M_n(x) = F^n(x)$, por tanto:

$$M_n(x) = F^n(x) = \left(1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha\right)^n.$$

Normalizando la función, entonces:

$$P\left(\frac{x_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = P(x_n \leq b_n \cdot x + a_n) = (F(b_n \cdot x + a_n))^n. \tag{4.28}$$

Para calcular a_n y b_n necesitamos tener la inversa de $F(x)$:

$$F^{-1}(x) = \frac{c}{\sqrt[\alpha]{1-x}}.$$

Calculando las constantes a_n y b_n a partir del teorema (4.9):

$$a_n = 0$$

$$b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{c}{\sqrt[\alpha]{1-(1-\frac{1}{n})}} = \frac{c}{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{n}}} = c \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}$$

Una vez encontrados a_n y b_n, se sustituyen los valores en la ecuación (4.28), y se obtiene:

$$\left[F\left(x \cdot c \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]^n = \left(1 - \left(\frac{c}{x \cdot c \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha\right)^n = \left(1 - \left(\frac{1}{x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha\right)^n = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha n}\right)^n.$$

Para ver a qué función pertenece hacemos el límite, y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x^\alpha n}\right)^n = \left(\frac{x}{n}+1\right)^n = exp(-x^{-\alpha}).$$

Por lo tanto, la función de distribución asintótica maximal de la Pareto es la distribución Fréchet.

5. Ejemplos prácticos

En este capítulo se analizan dos casos prácticos, donde se utilizará el programa R que tiene implementado un paquete llamado 'evd' para obtener las estimaciones de los valores μ, σ y ξ de la función de distribución de valores extremos generalizada.

5.1. Temperaturas máximas

En este apartado se analizan las temperaturas máximas en la ciudad de Barcelona en los meses agosto, septiembre y octubre de 2018. Los datos los he conseguido a partir de la página web de la agencia estatal de meteorología, recogidos diariamente y que por tanto, tiene 92 observaciones.

Las temperaturas máximas están expresadas en grados centígrados (°C). Los datos son los siguientes:

```
 [1] 33.4 34.2 36.2 37.2 37.1 32.8 30.7 31.1 28.7 28.9
[11] 29.2 29.4 30.4 26.4 28.6 28.3 29.9 27.9 30.6 32.6
[21] 32.2 32.1 32.2 30.2 25.9 24.0 27.9 29.5 29.1 28.0
[31] 21.4 23.9 27.4 24.6 28.4 27.6 26.1 24.9 23.4 25.6
[41] 23.1 29.1 27.7 26.8 26.4 24.7 26.9 26.7 23.6 26.8
[51] 30.4 30.4 28.1 28.0 25.6 24.9 22.9 24.2 28.2 26.9
[61] 26.8 22.8 24.6 25.1 25.6 24.7 24.0 20.9 18.8 19.4
[71] 22.2 24.0 23.7 20.2 22.9 20.3 21.9 21.8 18.4 21.4
[81] 21.4 23.4 21.1 21.7 22.3 21.6 21.9 14.9  9.1 10.5
[91] 15.5 13.2
```

Figura 2: Temperaturas máximas en °C en Barcelona (agosto, septiembre y octubre de 2018)

Para hacernos una idea de como han sido el comportamiento de las temperaturas durante ese periodo de tiempo se hace el diagrama de puntos de dispersión y el de cajas.

```
 Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 9.10   22.88   26.00   25.71   28.95   37.20
```

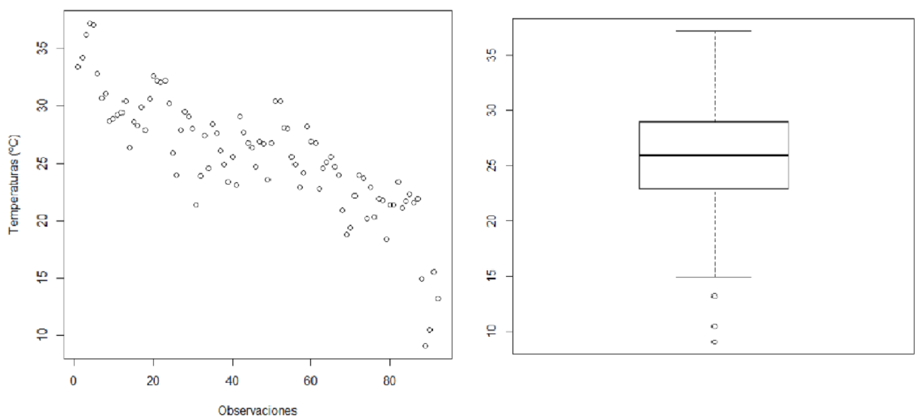

Figura 3: Diagrama de puntos y diagrama de cajas de las temperaturas

En el diagrama de puntos se puede observar que las temperaturas van decreciendo a medida que pasan los días, ya que entre agosto y octubre es una temporada donde las temperaturas tienden a decrecer. En el diagrama de cajas se observa que las temperaturas están centradas entre 22.88 y 28.95, mientras que la mediana es de 26^oC.

Ahora que ya se tiene estos dos gráficos pasamos a buscar la distribución de valores extremos que de una mejor aproximación a las observaciones anteriormente especificadas. Por tanto, lo que se va a hacer es estimar los tres parámetros de los que depende la función de distribución. Utilizando el programa R se obtiene:

```
Call: fgev(x = temp, std.err = TRUE, corr = TRUE, method $
Deviance: 561.8072

Estimates
    loc     scale    shape
24.0948   5.4640  -0.3626

Standard Errors
    loc     scale    shape
0.61332  0.41630  0.04928

Correlations
         loc       scale     shape
loc      1.0000  -0.1698  -0.3458
scale  -0.1698   1.0000  -0.5995
shape  -0.3458  -0.5995   1.0000

Optimization Information
  Convergence: successful
  Function Evaluations: 42
  Gradient Evaluations: 15
```

Figura 4: Resultados de la estimación para las temperaturas

Por tanto los valores de los parámetros estimados son los siguientes:

$$\mu = 24,0948$$
$$\sigma = 5,4640$$
$$\xi = -0,3626$$

El valor de ξ es próximo al valor 0, pero para confirmar que no es 0 lo calculamos los intervalos de confianza de cada uno de los parámetros estimados para un $\alpha = 0{,}95$, que son:

$$\mu \in [23'0859978, 25'1036443]$$
$$\sigma \in [4'7792036, 6'1487134]$$
$$\xi \in [-0'4436438, -0'2815312]$$

Entonces, se puede decir que la función de distribución de las temperaturas máximas de los tres meses anteriormente especificados es una Weibull ya que el valor de ξ es más pequeño que 0. La especificación es:

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1 - 0,3626\left(\frac{x - 24,0948}{5,4640}\right)\right]^{-\frac{1}{-0,3626}}\right\}$$

con dominio $-\infty < x < -\dfrac{5,4640}{-0,3626} + 24,0948 = 39,1637$

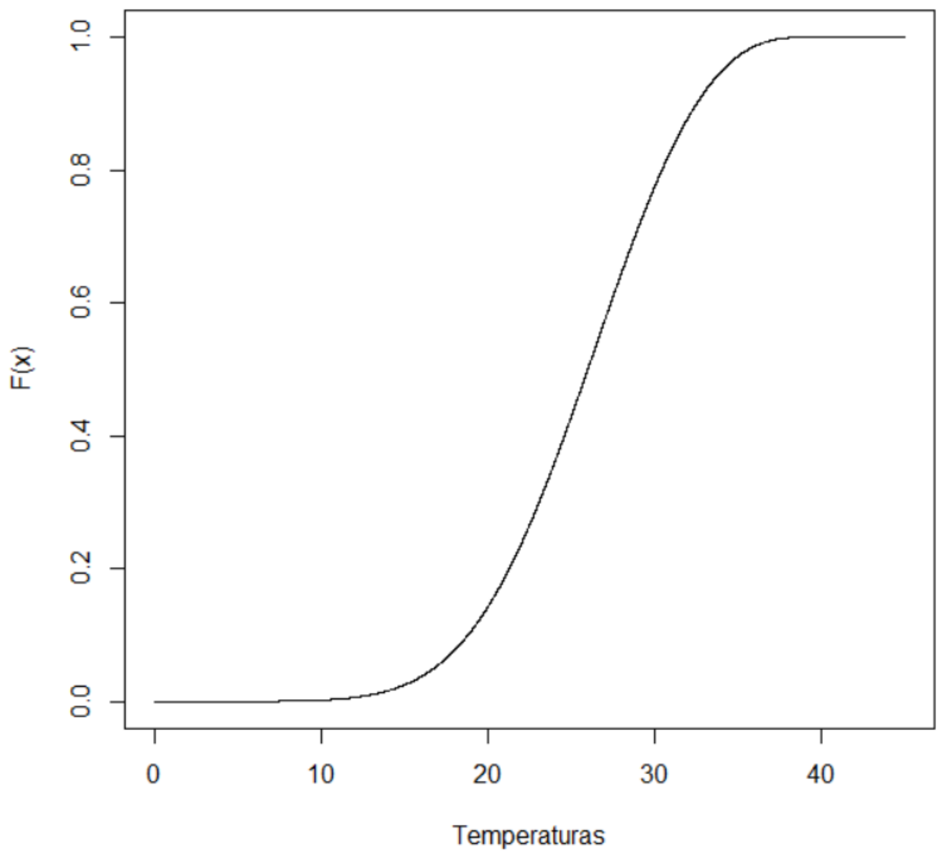

Figura 5: Función de distribución GEV(24’0948,5’4640,-0’3626)

El gráfico de la función de distribución que resulta, se podría decir que, se ajusta bastante a la realidad porque en los tres meses, sobre los cuales hemos hecho el estudio, hay poca probabilidad que la temperatura mínima sea menor que $15^{o}C$ y que sea mayor que $38^{o}C$.

Para tener una idea más precisa se calcula la función de densidad y se realiza el gráfico para poder sacar algunas conclusiones. La función de densidad viene definida por:

$$f(x) =$$
$$\exp\left\{-\left[1-0,3626\left(\frac{x-24,0948}{5,4640}\right)\right]^{-\frac{1}{-0,3626}}\right\}\left[1-0,3626\left(\frac{x-24,0948}{5,4640}\right)\right]^{-\frac{1}{-0,3626}-1}\frac{1}{5,4640}$$

definida en todo $-\infty < x < -\dfrac{5,4640}{-0,3626} + 24,0948 = 39,1637.$

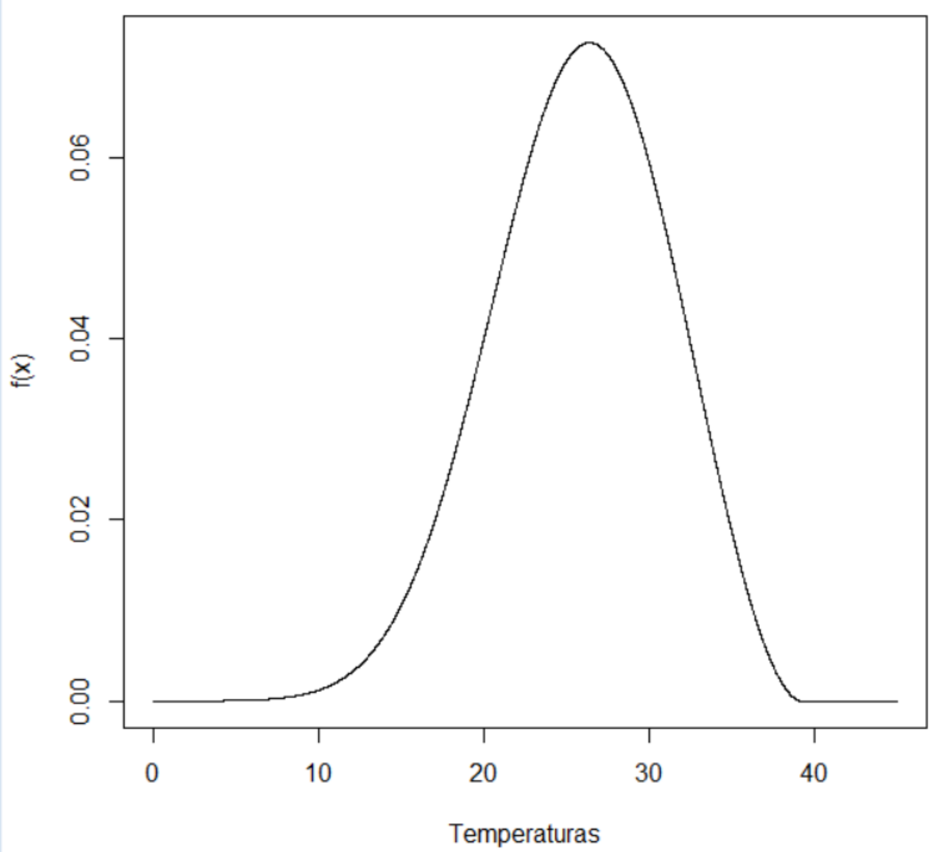

Figura 6: Función de densidad GEV(24'0948,5'4640,0'3626)

Se puede observar que la temperatura más frecuente que se tiene en Barcelona es de 26,4 grados centígrados, en la temporada sobre la que hemos hecho el estudio. También observamos que tenemos un 53,44 por ciento de probabilidad de que la temperatura de Barcelona sea entre 23ºC y 31ºC.

Desde el punto de vista estadístico coger solo tres meses de año para ver si las temperaturas máximas de Barcelona son elevadas o no, no es un buen estudio. Pero nos inicia en la modelización de valores extremos.

5.2. Máximo del caudal medio

Este segundo ejemplo analizamos el caudal medio del río Llobregat por el paso de Castellbell i el Vilar durante el año 2018. Estos datos han sido recopilados desde la página web del Ministerio para la Transición Ecológica. El caudal del río está expresado m^3/s. Los datos son los siguientes:

```
 [1]   2.720   7.470   7.380  61.395  47.755  22.070  48.735  19.700   6.765  53.025
[11]  31.110  48.560  20.755  23.295 135.405  91.895  41.065  33.895  89.765  89.665
[21]  31.525 100.440 148.840  33.640  18.705  36.750  12.450  13.485  23.235  10.485
[31]   8.745  23.525  29.225  27.420  40.550  25.570  26.095  18.895  10.770   8.040
[41]  39.150 198.095  26.805  96.385  71.755  56.545  52.250  37.985  24.195  18.645
[51]  15.760  12.370
```

Figura 7: Caudal medio del río Llobregat en 2018

Contamos con 52 observaciones, cuyos datos son recopilados semanalmente. Para hacernos una idea de cómo ha sido el comportamiento del caudal durante este año hacemos dos diagramas, uno llamado dispersión de puntos y otro llamado caja.

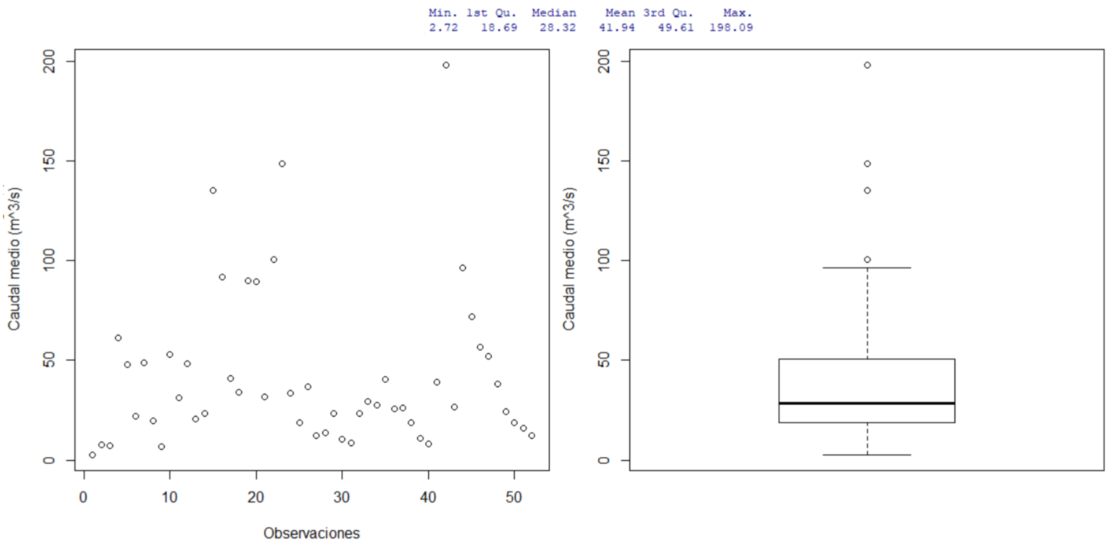

Figura 8: Diagrama de puntos y diagrama de cajas del caudal

Antes de ver cuál es la función de distribución de valores extremos, para hacernos una primera idea de este estudio comentamos los dos diagramas de la figura 8.

Se observa que hay dos periodos donde el caudal es más elevado de lo habitual, probablemente sea debido a la época del año donde están recogidas las observaciones o también por el temporal. Por lo que vemos que, en el diagrama de cajas, la mediana es de $28,32m^3/s$, es decir, que un 50 % de las observaciones esté por debajo de $28,32m^3/s$.

Estimamos los parámetros de la función de distribución de valores extremos generalizada, de esta forma intentamos encontrar una función que se aproxime a las observaciones anteriormente especificadas. Para estimar estos parámetros utilizamos el programa R y obtenemos:

```
Call: fgev(x = rio, std.err = TRUE, corr = TRUE, method = "BFGS", warn.inf = TRUE)
Deviance: 485.1333

Estimates
    loc    scale    shape
22.1691  17.2146   0.4248

Standard Errors
   loc   scale   shape
2.7907  2.5451  0.1467

Correlations
          loc       scale      shape
loc     1.000000   0.716068  -0.320372
scale   0.716068   1.000000  -0.006289
shape  -0.320372  -0.006289   1.000000

Optimization Information
  Convergence: successful
  Function Evaluations: 35
  Gradient Evaluations: 20
```

Figura 9: Resultados de la estimación para el caudal

Por tanto los valores de los parámetros estimados son los siguientes:

$$\mu = 22,1691$$
$$\sigma = 17,2146$$
$$\xi = 0,4248$$

El valor de ξ es próximo al valor 0, pero para confirmar que no es 0 miramos los intervalos de confianza de cada uno de los parámetros estimados con un $\alpha = 0{,}95$ que son:

$$\mu \in [17'5788702, 26'7593020]$$
$$\sigma \in [13'0282966, 21'4009151]$$
$$\xi \in [0'1835312, 0'6660147]$$

Se puede decir que la función de distribución asintótica de valores extremos de caudales máximos del año 2018 sigue una distribución tipo Fréchet ya que el valor de ξ es mayor que 0. La especificación es :

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left[1 + 0,4248\left(\frac{x - 22,1691}{17,2146}\right)\right]^{-\frac{1}{0,4248}}\right\}$$

con dominio todo $x > -\dfrac{\sigma}{\xi} + \mu$ y la función de densidad es:

$$f(x) =$$
$$\exp\left\{-\left[1+0,4248\left(\frac{x-22,1691}{17,2146}\right)\right]^{-\frac{1}{0,4248}}\right\}\left[1+0,4248\left(\frac{x-22,1691}{17,2146}\right)\right]^{-\frac{1}{0,4248}-1}\frac{1}{17,2146}$$

definida en todo $x > -\dfrac{\sigma}{\xi} + \mu$.

En las siguientes gráficas se puede ver la representación de las funciones.

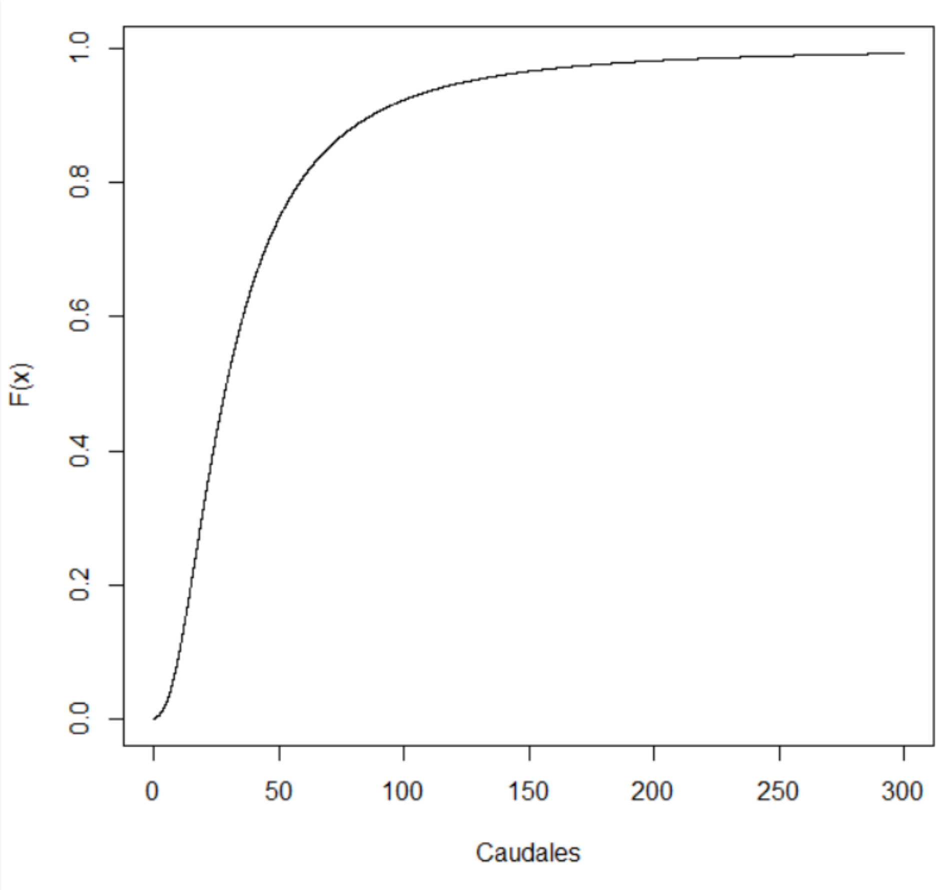

Figura 10: función de distribución GEV(22'1691,7'1204,0'4248)

En la figura 10, representamos la función de distribución de los valores extremos con los parámetros (22'1691,7'1204,0'4248). Se observa que es poco probable que el caudal sea próximo a 0 y 150, es decir, que el río Llobregat casi siempre llevará agua y que el caudal sea mayor que 150 seguramente sea porque es la época de lluvia o cuando se deshace la nieve. También vemos que el pendiente es más inclinado entre el caudal medio 10 y 22. Seguramente es cuando la probabilidad es más alta. Eso lo veremos con más detalle en la gráfica de función de densidad (figura 11).

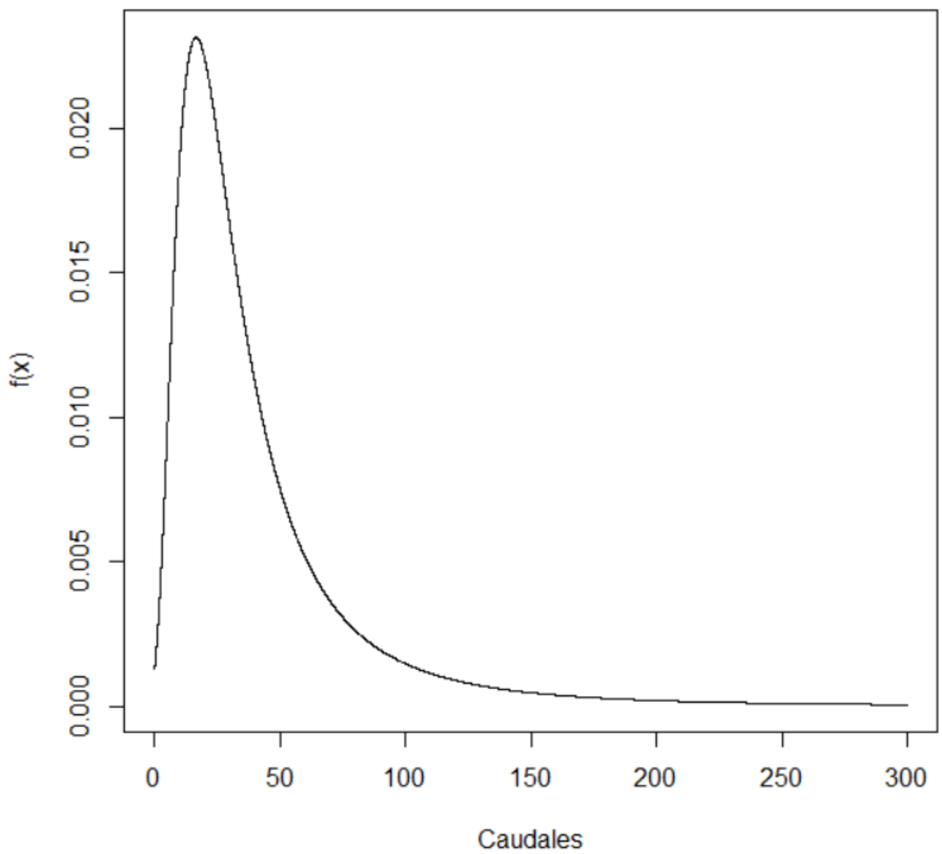

Figura 11: Función de densidad GEV(22'1691,7'1204,0'4248)

En la gráfica de densidad se observa que hay un extremo en la observación 16,52, es decir, que es más probable.

También se puede decir que este modelo se aproxima bastante al caudal medio que suele haber, porque ronda por los $19m^3/s$.

Ahora, para ver si el río lleva mucha agua necesitamos introducir el concepto de caudal relativo. El caudal relativo es la relación entre el caudal medio anual y la superficie de la cuenca fluvial. Se expresa en $l/s/km^2$, es decir,

$$M_r = 1000\frac{M}{Sup}$$

Si $M_r < 5$, entonces hay escasez; si $5 < M_r < 15$ entonces los valores son medios y si $15 < M_r$ entonces los valores son elevados.

Con el modelo que hemos estimado vamos a ver si hay posibilidades de que haya valores elevados.

En nuestro caso la superficie donde hemos tomado los datos es de 4.562 km^2, por tanto, sustituyendo el valor máximo y la superficie en la fórmula anterior se obtiene que:

$$M_r = 1000\frac{16,52}{4562} = 3,6212$$

Obtenemos que hay escasez. Los valores serán elevados, pero no quiere decir que el río se desborde, cuándo el caudal medio del río supere los 68,43 m^3/s, esto es poco probable por lo que vemos en las gráfica, exactamente las probabilidad es del 15,34 %.

El estudio es una aproximación, ya que solo hemos estudiado un año. Si se estudiaran mas años, tendríamos una un modelo bastante mas ajustado a la realidad.

6. Conclusiones

Cuando la doctora Carme Florit me introdujo el tema de los estadísticos ordenados y la teoría de los valores extremos para realizar el proyecto me resultó muy interesante y, aunque no tenía conocimientos al respecto, me animé en la búsqueda de información. Al principio de este trabajo no sabía exactamente qué eran los estadísticos ordenados y cuáles eran las distribuciones límite, pero a medida que iba investigando y buscando información me iba llamando más la atención de para qué se utilizaba esta teoría.

En el tema de los estadísticos ordenados me he centrado mucho en las funciones de distribución marginal y conjunta, pero no tanto en sus propiedades y utilidades. Todo y que es un tema aún con mucha teoría que estudiar, no he querido enfocar mi trabajo en esto ya que quería darle más importancia a los valores extremos.

La teoría de los valores extremos es un tema muy complejo y extenso, por tanto me he tenido que centrar más en los resultados más importante como los dominios de atracción y el teorema de Fisher y Tippet. Una vez entrada en materia, me di cuenta de que la teoría de valores extremos está más presente en la vida cotidiana de lo que pensamos. Al principio de ser estudiada esta teoría solo la utilizaban en el ámbito de las ciencias medioambientales e ingenierías, pero en la actualidad también se aplica en las finanzas, seguros y muchas otras disciplinas.

Referencias

[1] A. David, H.: *Order Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., Second Edition, New York, 1981.

[2] Agencia Estatal de Meteorología. Disponible en: https://opendata.aemet.es/centrodedescargas/inicio

[3] Beirlant, J; Goegebeur, Y; Segers, J; Teugels, J: *Statistics of Extremes: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, England, 2004.

[4] C. Arnold, B.; Balakrishnan, N.; Nagaraja, H. N.: *A First Course in Order Statistics*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1992.

[5] Castillo, E.; Hadi, A. S.; Balakrishnan, N.; Sarabia, J. M.: *Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science*, John Wiley & Sons, New York, 2004.

[6] De Hann, L.; Ferreira, A.: *Extreme Value Theory: An Introduction*, Springer Science+Business Media, New York, 2006, p.3-34.

[7] Embrechts, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T.: *Modelling Extremal Events*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1997.

[8] Galambos, J: *The Asumptotic Theory of Extreme order Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 1978.

[9] Genedenko, B.: *Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire*,Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 44, No. 3 (Jul., 1943), pp. 423-453, Mathematics Department, Princeton University. Disponible en: https://www.jstor.org/stable/1968974

[10] Gumbel, E.J.: *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.

[11] Kotz, S; Nadarajah, S: *Extreme Value Distributions: Theory and Applications*, Imperial College Press, London, 2000.

[12] Leadbetter, M. R.; Lindgren, G.; Rootzén, H.: *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1983.

[13] Ministerio para la Transición Ecológica. Disponible en: http://eportal.mapama.gob.es/BoleHWeb/

[14] Resnick, S. I.: *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer Science+Business Media, New York, 2008.

[15] Rohatgi, Vijay K.; Ehsanes Saleh, A. K. Md.: *An introduction to probability and statistics*, 2a edicion, John Wiley & sons, New York, 2001, p.171-179.

[16] Ruiz-Maya, L.; Martín, F. J.: *Estadística Vol.II: Inferencia*, Editorial AC, 2a edición, Madrid, 2001.

[17] Vaz de Melo Mendes, B: *Introdução à Análise de Eventos Extremos*, E-papers Serviços Editoriais, Brasil, 2004.