UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

JOCS DE CAMP MITJÀ

Autor: Pau Borrós Cullell

Director: Dr. José Manuel Corcuera Valverde
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

Mean Field Games theory allows to find Nash Equilibria for games with a large number of players by analyzing the asymptotic behaviour when N tends to infinity. In the limit, equations simplify and the cost functions can be viewed as functions of an action of a generic player and a probability measure instead of viewed as a function of N actions of the players. In this work we will present this theory and we will show how to solve optimal control problems that we find when we take the limit of the N player games. We will also develop 2 examples of Mean Field Games.

Resum

La teoria de Jocs de Camp Mitjà permet trobar Equilibris de Nash per a jocs amb un nombre finit N molt gran de jugadors mitjançant l'anàlisi del comportament asimptòtic quan N tendeix a infinit. En el límit, les equacions es simplifiquen i les funcions de cost passen de dependre de N accions de jugadors a comportar-se com una funció que depèn de l'acció d'un jugador genèric i d'una mesura de probabilitat. En aquest treball presentarem aquesta teoria i com resoldre problemes de control òptim que se'ns presenten quan fem tendir els jocs de N jugadors al límit. També desenvoluparem 2 exemples de Jocs de Camp Mitjà.

Agraïments

En primer lloc vull agraïr al profesor José Manuel Corcuera per haver-me suggerit el tema del treball i haver-me guiat durant la realització del mateix.
Gràcies al meu germà Salvador, l'altre matemàtic de la família, per la seva ajuda quan més ho necessitava.
A la meva companya d'estudi, Andrea, amb la que he compartit moltes hores de biblioteca.
Voldria agraïr també als meus pares pel seu suport durant la carrera. Gràcies a vosaltres he arribat fins aquí.

Índex

1 Introducció

La teoria de Jocs de Camp Mitjà (Mean Field Games) és una branca creixent de la teoria de jocs que estudia la presa de decisions estratègiques en poblacions molt grans de petits agents que interaccionen. Va ser introduïda per Jean Michel Lasry i Pierre-Louis Lions en [18] i [19]. Aquets articles comprenen mètodes i tècniques per estudiar jocs diferencials amb una població molt gran de jugadors racionals. Aquests jugadors tenen preferències no només pel seu estat, sinó també de la distribució dels altres jugadors de la població.

Aquesta idea va ser primer utilitzada en física, per a modelar sistemes de moltes partícules. El terme camp mitjà està inspirat en la teoria de camp mitjà que considera el comportament de sistemes d'un nombre molt gran de partícules amb un impacte negligible al sistema. La diferència principal és que aquí ens trobarem amb agents racionals que intereccionaran de manera estratègica: cada agent realitzarà una acció depenent del que fagin els altres per a poder minimitzar el seu funcional de cost.

A temps continu, un joc de camp mitjà està generalment compost per l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman que descriu el problema de control òptim d'un jugador i l'equació de Fokker-Planck que descriu la dinàmica de la distribució agregada dels agents.

L'anàlisi de jocs de N jugadors involucra la minimització de N funcions de cost. Quan N és un nombre finit molt gran aquesta simultànea minimització de les funcions de cost suposa un repte, tant a nivell teòric com a nivell numèric. Per tant, buscarem simplificacions fent tendir la N a infinit, proporcionant una forma d'anàlisi asimptòtica del model. En altres paraules, el racional dels jocs de camp mitjà serà considerar el comportament asimptòtic quan N tendeixi a infinit de jocs que involucren un gran nombre de jugadors. Es considera que l'objectiu d'aquesta simultànea minimització s'assolirà quan el sistema de N jugadors es troba en un Equilibri de Nash, concepte que definirem més endavant. Es pot veure que solucions de jocs de camp mitjà poden proporcionar Equilibris de Nash per jocs amb un nombre finit de jugadors.

Per tant, el problema que volem resoldre és trobar Equilibris de Nash per a jocs amb un nombre finit molt gran de jugadors, mitjançant la solució de jocs de camp mitjà. Per assolir aquest objectiu, es proposa el següent plà de treball:

- En el capítol 2, considerarem un problema d'un jugador a través de sistemes de control. Vindrà determinat per una equació diferencial ordinària. Aquest jugador escollirà la seva trajectòria en un intèrval de temps, intentant minimitzar un cost. Serà un problema clàssic de control òptim. Plantejarem el mètode de programació dinàmica per trobar aquest control, que consistirà en resoldre una equació en derivades parcials no lineal. Aquest capítol ens servirà d'introducció al següent pas, ja que en la majoria de casos, un millor model per a certs fenòmens serà una equació diferencial estocástica.

- En el capítol 3, ampliarem el problema anterior afegint un soroll blanc a la trajectòria, permetent la possibilitat d'afectes aleatoris. Resultarà doncs en un problema de control òptim estocàstic i donarem també el mètode de programació dinàmica per a trobar el control òptim. La diferència amb el capítol 2 serà que el problema vindrà determinat per una equació diferencial estocàstica i calcularem el valor esperat de la funció de cost.

- En el capítol 4, plantejarem problemes de 2 jugadors per a explicar la noció d'Equilibri de Nash i donarem exemples senzills en el que s'enten molt bé el concepte. El primer serà un joc d'un període i el segon, en tindrà dos. Així podrem observar la diferència que pot haver-hi en l'Equilibri de Nash quan tens informació de les estratègies que realitzen els altres jugadors.

- En el capítol 5, presentarem la teoria de jocs de camp mitjà en la que buscarem simplificacions fent tendir la N cap a infinit. Veurem que les funcions de cost acabaran depenent d'un jugador genèric i de la distribució empírica dels altres jugadors, i així, convertirem el problema amb un problema de 1 jugador que el podrem resoldre amb la programació dinàmica presentada en els capítols 2 i 3.

- En el capítol 6, presentarem 2 exemples per veure com es plantejen els problemes de camp mitjà. En el primer estudiarem el temps d'arribada d'una reunió que començarà al obtenir-se el quòrum prèviament fixat. En el segon estudiarem un model molt important en la enginyeria financera moderna, ja que s'utilitza com a entrada a molts motors d'execució òptims en els mercats electrònics d'alta freqüència. El primer exemple el resoldrem amb un teorema de punt fix. El segon es complica més i estudiarem com es planteja el problema amb la teoria presentada al capítol 5, però no donarem una solució al problema.

2 Control òptim determinista

Un sistema dinàmic és aquell en el que l'estat evoluciona amb el temps. Estudiarem els *sistemes de control* sobre l'interval $[t_0, T]$, que estan representats per l'equació diferencial

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)), \ \ t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.1}$$

amb el valor inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

La funció $u(\cdot)$ és l'anomenada control. La funció a és la *dinamica del sistema de control* (2.1). Expresarem la idea de control com el procés mitjançant el cual influencïem un sistema dinàmic per a aconseguir un objectiu prèviament fixat. L'objectiu serà trobar un control òptim per a la minimització d'una funció de cost mitjançant la programació dinàmica, un mètode que explicarem al llarg del capítol. Aquesta secció conté resultats de [4], [8] i [9].

2.1 Plantejament del problema

Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunt compacte. Suposem que la funció $a : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és continua i Lipschitz respecte $x \in \mathbb{R}^n$.

Definició 2.1. *La família de controls admisibles és*

$$\mathcal{U} = L([t_0, T], U),$$

l'espai de totes les funcions definides en el intèrval $[t_0, T]$, mesurables segons Lebesgue, i tal que el seu rang estigui contingut en U, anomenat el conjunt de valors del control.

Donat un valor inicial $x(t_0) = x_0$ i un *control* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, les condicions donades garantitzaran l'existència i unicitat de la solució $x(\cdot)$ del sistema (2.1). L'anomenarem estat del sistema del control en el instant t. Observem que $x(\cdot) = x(\cdot, u(\cdot), x_0)$, és a dir l'estat del sistema varia segons l'elecció del control. Aleshores $x(\cdot)$ és solució de l'equació

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(x(s), u(s))ds, \ t \in [t_0, T].$$

L'objectiu serà trobar el control adequat pel sistema. Necessitarem introduïr alguns criteris per poder comparar-los.

2.1.1 Control òptim

Definició 2.2. *Siguin $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dues funcions conegudes. Donat un control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, definim el funcional de cost com:*

$$J^{u(\cdot)}(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{T} g(s, x(s), u(s))ds + h(T, x(T)) \tag{2.2}$$

on $x(\cdot)$ és la solució de (2.1) associada al control $u(\cdot)$ amb valor inicial $x(t_0) = x_0$. La funció g s'anomena cost variable i la funció h cost terminal.

El problema de control òptim serà trobar el control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ que minimitza el funcional (2.2). Aleshores, donat un instant inicial t_0 i un valor inicial $x(t_0) = x_0$, el problema de control òptim consistirà en trobar el valor de la expressió

$$\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \left\{ \int_{t_0}^{T} g(s, x(s), u(s))ds + h(T, x(T)) \right\},$$

i en determinar, en cas que existeixi, el *control optim* $u^*(\cdot)$ que compleixi aquest valor mínim. La trajectòria $x^*(\cdot)$ s'anomena trajectoria òptima. Es complirà:

$$J^{u(\cdot)}(t_0, x_0) \geqslant J^{u^*(\cdot)}(t_0, x_0), \ \forall u(\cdot) \in \mathcal{U},$$
$$\frac{d}{dt}x^*(t) = a(x^*(t), u^*(t)) \text{ a.e., } x^*(t_0) = x_0.$$

Definició 2.3. *Considerant el temps inicial i la condició inicial com a variables, podem definir una funció $v : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ anomenada funció valor, de la següent forma:*

$$v(s, x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} J^{u(\cdot)}(s, x).$$

on (s, x) és la condició inicial.
Notem que es té la condició terminal $v(T, x) = h(T, x(T))$.

2.2 Programació dinàmica

El mètode de programació dinàmica ens dóna una forma d'obtenir controls òptims utilitzant la funció valor. Donarem un principi bàsic que haurà de complir com a condició d'optimilitat. A més, la funció valor, sota certes condicions, haurà de complir una equació en derivades parcials. Aquest mètode redueix el problema de control òptim, que és un problema de minimització en l'espai de dimensió infinita $\mathcal{U}$, a resoldre una equació no lineal en derivades parcials de primer ordre.

Considerarem el temps inicial i el valor inicial com a variables, estudiant així una família més gran de sistemes dinàmics:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t), u(t)), \ s \leqslant t \leqslant T, \\ x(s) = x \end{cases}$$

amb funció de cost:

$$J^{u(\cdot)}(s, x) = \int_{s}^{T} g(t, x(t), u(t))dt + h(T, x(T)),$$

2.2.1 Principi de programació dinàmica

Lema 2.4. *Per a qualsevol condició inicial (s, x) i donat $r \in [s, T]$, es compleix*

$$v(s, x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \left\{ \int_{s}^{r} g(s, x(s), u(s))ds + v(r, x(r)) \right\} \tag{2.3}$$

Demostració. Per a demostrar el Lema 2.4, donem i demostrem una propietat de la funció v.

Lema 2.5. *Per a cada condició inicial (s,x), cada control admisible* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *i cada* $s \leqslant r \leqslant T$*, tenim que:*

$$v(s,x) \leqslant \int_s^r g(s,x(s),u(s))ds + v(r,x(r)). \tag{2.4}$$

Demostració. Per a cada $\delta > 0$, triem un control admisible $u^1(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que

$$\int_r^T g(s,x^1(s),u^1(s))ds + h(T,x^1(T)) \leqslant v(r,x(r)) + \delta$$

Aquí $x^1(t)$ és l'estat a temps t que correspon al control $u^1(t)$ amb condició inicial $(r,x(r))$. A un control com $u^1(t)$ se l'anomena *δ-òptim*. Definim un control admisible $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ com:

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), t \leqslant r \\ u^1(t), t > r. \end{cases}$$

Sigui $\widetilde{x}(t)$ l'estat corresponent a $\widetilde{u}(t)$ amb condició inicial (s,x). Tenim que

$$\begin{aligned} v(s,x) &\leqslant J^{\widetilde{u}}(s,x) \\ &= \int_s^T g(s,\widetilde{x}(t),\widetilde{u}(t))dt + h(T,\widetilde{x}(T)) \\ &= \int_s^r g(t,x(t),u(t))dt + \int_r^T g(t,x^1(t),u^1(t))dt \\ &\qquad\qquad + h(T,x^1(T) \\ &\leqslant \int_s^r g(t,x(t),u(t))dt + v(r,x(r)) + \delta. \end{aligned}$$

Com que δ és arbitrari, hem provat que

$$v(s,x) \leqslant \int_s^r g(t,x(t),u(t))dt + v(r,x(r)).$$

□

La prova del Lema 2.5 mostra que la part dreta de la desigualtat (2.4) no és una funció decreixent de r. Si $u(\cdot)$ és òptim, llavors aquesta funció és constant. De fet, si per a una $\delta > 0$ positiva triem un control admisible *δ-òptim* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, llavors per a qualsevol $r \in [s, T]$ tenim:

$$\begin{aligned}
\delta + v(s,x) &\geqslant J^{u(\cdot)}(s,x) \\
&= \int_s^T g(t, x(t), u(t))dt + h(T, x(T)) \\
&= \int_s^r g(t, x(t), u(t))dt + \int_r^T g(t, x(t), u(t))dt + h(T, x(T)) \\
&= \int_s^r g(t, x(t), u(t))dt + J^{u(\cdot)}(r, x(r)) \\
&\geqslant \int_s^r g(t, x(t), u(t))dt + v(r, x(r)).
\end{aligned}$$

Com que δ és arbitrari, hem probat (2.3). L'identitat (2.3) se'n diu el principi de programació dinàmica. $\square$

2.2.2 Equació de Hamilton-Jacobi-Bellman

Ara derivarem a una equació en derivades parcials no lineals. Per aconseguir-ho, estudiarem la versió infinitesimal del principi de programació dinàmica.

Teorema 2.6. *Suposem que $v(s,x) \in \mathcal{C}^1$. Llavors v soluciona l'equació diferencial no lineal següent:*

$$v_t(s,x) + \min_{b \in \mathcal{U}} \{D_x v(s,x) \cdot a(x,b) + g(t,x,b)\} = 0, \tag{2.5}$$

amb condició terminal

$$v(T,x) = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostració. Triem, per els temps $s \leqslant t \leqslant r$, un control constant $u(t) \equiv b$, on $b \in U$. Sigui $h = r - s$. Pel principi de programació dinàmica, tenim que:

$$v(s,x) \leqslant \int_s^{s+h} g(t, x(t), b)dt + v(s+h, x(s+h)).$$

Si passem restant el terme de l'esquerra i dividim per h, ens queda

$$\frac{v(s+h, x(s+h)) - v(s,x)}{h} + \frac{1}{h}\int_s^{s+h} g(t, x(t), b)dt \geqslant 0.$$

Volem veure que, quan prenem $h \to 0$, resulta:

$$v_t(s,x) + D_x v(s,x) \cdot \dot{x}(t) + g(x,b) \geqslant 0.$$

Pel Teorema Fonamental del Càlcul,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} g(x(t), b)dt = g(x(s), b).$$

Llavors, per la definició de derivada, obtenim que:

$$v_t(s,x) + D_x v(s,x) \cdot \dot{x}(t) + g(x,b) \geqslant 0.$$

Com que $x(\cdot)$ és solució del sistema dinàmic per el control constant b, substituïnt $\dot{x}(\cdot)$ per $a(x(\cdot),b)$ s'obté

$$v_t(s,x) + a(x,b) \cdot D_x v(s,x) + g(x,b) \geqslant 0,$$

i és vàlid per qualsevol $b \in U$, per tant

$$v_t(s,x) + \min_{b \in U}\{D_x v(s,x) \cdot \dot{x}(t) + g(x,b)\} \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Finalment, veiem que la desigualtat és una igualtat. Suposem que coneixem el control òptim $u^*(\cdot)$ i conseqüentment l'estat òptim x^*.

Pel Principi de Programació Dinàmica, i utilitant $\alpha^*(\cdot)$ pels temps $s \leqslant t < r$, sabem que

$$v(s,x) = \int_s^{s+h} g(t, x^*(t), u^*(t))dt + v(s+h, x^*(s+h)).$$

Si passem restant el terme de l'esquerra i dividim per h,

$$\frac{v(s+h, x^*(s+h)) - v(x^*(s), s)}{h} + \frac{1}{h}\int_s^{s+h} g(t, x^*(t), u^*(t))dt = 0,$$

i fent $h \to 0$,

$$v_t(s,x) + D_x v(s,x) \cdot \dot{x}^*(t) + g(s, x^*(s), u^*(s)) = 0,$$

Sabem també que x*(t) compleix la EDO:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t)) \\ x^*(s) = x. \end{cases}$$

Definint $b^* \in U$ com $b^* = u^*(t)$,

$$v_t(s,x) + D_x V(s,x) \cdot a(x, b^*) + g(t, x^*(t), b^*) = 0.$$

I així queda demostrat el teorema. □

2.2.3 Disseny de control òptim

Veurem com utilitzar el mètode de programació dinàmica per dissenyar controls òptims:

1. Solucionar l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman per a obtenir la funció de valor v.

2. Un cop obtingut v, per cada punt $x \in \mathbb{R}^n$ i $s \leqslant t \leqslant T$, definim $u(x,t) = b \in U$ on b és el paràmetre en el que s'assoleix el mínim en la equació per a (x,t). És a dir, escollim $u(x,t)$ tal que:

$$v_t(s,x) + D_x v(s,x) \cdot a(x, u(x,t)) + g(t,x,u(x,t)) = 0.$$

Resolem el següent sistema, assumint que $u(x,t)$ és suficientment regular:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u(x^*(t))) \ \ (s \leqslant t \leqslant T) \\ x(s) = x. \end{cases}$$

Finalment, definim el control òptim com

$$u^*(t) := u(x^*(t), t). \tag{2.7}$$

En resum, si l'estat del sistema a temps t és x, utilitzem el control que pren el valor $b \in U$ en t i tal que s'assumeix el mínim de l'equació Hamilton-Jacobi-Bellman. A continuació probem que aquest mètode ens construeix un control òptim:

Teorema 2.7. *El control definit per la construcció (2.7) és òptim.*

Demostració. Tenim que

$$J^{u^*(\cdot)}(s,x) = \int_s^T g(t, x^*(t), u^*(t))dt + h(T, x^*(T)),$$

Per la construcció de $u^*(\cdot)$, podem substituir g i obtenim

$$\begin{aligned} J^{u^*(\cdot)}(s,x) &= \int_s^T (-v_t(s,x) - D_x v(s,x) \cdot f(t,x^*,u^*))dt + h(T,x^*(T)) \\ &= -\int_s^T (v_t(s,x) + D_x v(s,x) \cdot \dot{x}^*(t))\, dt + h(T,x^*(T)) \\ &= -\int_s^T \frac{d}{dt} v(s,x) dt + h(T, x^*(T)) \\ &= -v(T,x) + v(s,x) + h(T,x^*(T)) \\ &= -h(T,x^*(T) + v(s,x) + h(T,x^*(T)) \\ &= v(s,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} J^{u(\cdot)}(s,x). \end{aligned}$$

Per tant,

$$J^{u^*(\cdot)}(s,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} J^{u(\cdot)}(s,x)$$

i $u^*(\cdot)$ és òptim. $\square$

3 Control òptim estocàstic

Hem vist en el capítol anterior com trobar controls òptims quan teniem *sistemes de control* deterministes. Ara inclourem la possibilitat d'afectes aleatoris en els sistemes. Donarem unes definicions necessàries per introduïr el problema i desenvoluparem un nou concepte d'integral incluïnt processos estocàstics que ens servirà per desenvolupar l'equació de HJB que, com en el capítol anterior, ens servirà per trobar la funció valor. En el nostre cas ens interessarà minimitzar una funció de cost mitjançant la recerca del control òptim aplicant la metadologia de programació dinàmica que explicarem al llarg del capítol. Aquest capítol conté resultats de [12], [17], [13], [10], [5], [14], [16], [20] i [11].

3.1 Definicions prèvies

Definició 3.1. *Sigui $\Omega \neq \emptyset$. Una col·lecció de subconjunts $\mathcal{F} \in \Omega$ és una σ-àlgebra si:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- *Si $Q \in \mathcal{F}$ aleshores $Q^c \in \mathcal{F}$.*
- *Si $Q_1, Q_2, ... \in \mathcal{F}$ aleshores $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{F}$.*

Si $(\Omega, \mathcal{F})$ és un espai mesurable i $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ és una σ-àlgebra en Ω, aleshores a $\mathcal{G}$ se li diu una sub-àlgebra de $\mathcal{F}$.

Definició 3.2. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F})$ un espai mesurable i $\mathcal{P}$ una mesura de probabilitat sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ se li diu espai de probabilitat.*

Definició 3.3. *Un procés estocàstic és una col·lecció o família de variables aleatòries $X(t)$ definides en el mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.*

Definició 3.4. *Sigui T un intèrval finit. Es diu que un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ és filtrat si existeix una successió de sub-àlgebres $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in T}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ $\forall n \in T$.*

A $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in T}$ se li dirà la filtració de l'espai de probabilitat.

Observació 3.5. Sigui $X = \{X(t)\}_{t\in T}$ un procés estocàstic. Aleshores $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \in 0, t)$ és una filtració generada per el procés estocàstic X.

Definició 3.6. *Es diu que un procés estocàstic $\{X(n)\}_{n\in T}$ és adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in T}$ si $X(n)$ és $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n \in T$.*

Entendrem que un procés estocàstic és adaptat si el conjunt de possibles esdeveniments fins a un instant donat només depèn dels esdeveniments passats i el procés no pot anticipar el futur.

A continuació, definirem un tipus de processos estocàstics que formaran part de les equacions diferencials estocàstiques que estudiarem.

Definició 3.7. *Un procés estocàstic $\{W(t) : t \leqslant 0\}$ amb valors a $\mathbb{R}$ és un moviment Brownià unidimensional si:*

(i) $W(0) = 0$.

(ii) La funció $t \to W(t)$ és continua en t amb probabilitat 1.

(iii) El procés $W(t)$ té increments estacionaris i independents. És a dir, donats els temps $t_0, t_1, ..., t_m \in T$ amb $t_0 < t_1 < ... < t_m$ es té que les variables aleatòries:

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_m) - W(t_{m-1})$$

són independents.

(iv) Els increments $W(t+s) - W(t)$ tenen distribució normal amb $\mu = 0$ i $\sigma^2 = s$. És a dir:

$$W(t+s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, s)$$

Un moviment Brownià d-dimensional és un vector de processos estocàstics

$$\mathbf{W} = (W(t)^{(1)}, W(t)^{(2)}, ..., W(t)^{(d)})$$

tal que les seves components són movimients Brownians unidimensionals i independents.

Teorema 3.8. *El moviment Brownià és casi segurament no diferenciable. A més, casi segurament i per a tot t, es té:*

$$\limsup_{h\to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h} = \infty \quad o \quad \limsup_{h\to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h} = -\infty \quad o\ ambdós.$$

Per a la demostració del teorema, utilitzarem els següents lemes:

Lema 3.9. *Suposem que $\{W(t) : t \geqslant 0\}$ és un moviment Brownià i sigui $a > 0$. Aleshores el procés $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ definit per $X(t) = \frac{1}{a}W(a^2t)$ és un moviment Brownià.*

La demostració es pot veure en [14].

Lema 3.10. *(Borel-Cantelli) Sigui $E_n : n \in \mathbb{N}$ una successió d'esdeveniments tal que $\sum_n \mathbb{P}\{E_n\} < \infty$. Aleshores,*

$$\mathbb{P}\{\limsup E_n\} = 0.$$

La demostració es pot veure en [14].

Demostració. (Del teorema 3.8) Suposem que $\exists t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|W(t_0+h) - W(t)|}{h} < \infty$$

Com que el moviment Brownià està acotat per una certa constant M en $[0,2]$, existeix t_0 tal que

$$\sup_{h\in[0,1]} \frac{|W(t_0+h)-W(t)|}{h} \leqslant M.$$

Volem mostrar que aquest esdeveniment té probabilitat 0 per a qualsevol M. Fixem M. Si $t_0 \in [(k-1/2^n, k/2^n]$ per $n > 2$, la desigualtat triangular ens dóna que per a tot $1 \leqslant j \leqslant 2^n - k$

$$\begin{aligned}
&|W((k+j)/2^n) - W((k+j-1)/2^n)| \\
&\qquad \leqslant |W((k+j)/2^n) - W(t_0)| + |W(t_0) - W((k+j-1)/2^n)| \\
&\qquad \leqslant M(2j+1)/2^n.
\end{aligned}$$

Definim els esdeveniments

$$\Omega_{n,k} := \{|W((k+j)/2^n) - W((k+j-1)/2^n)| \leqslant M(2j+1)/2^n \text{ per } j = 1,2,3\}.$$

Aleshores, per la propietat de que el moviment Brownià té increments independents i per el Lema 3.9, per $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\Omega_{n,k}\} &\leqslant \prod_{j=1}^{3} \mathbb{P}\{|W((k+j)/2^n) - W((k+j-1)/2^n)| \leqslant M(2j+1)/2^n\} \\
&\leqslant \mathbb{P}\left\{|W(1)| \leqslant 7M/\sqrt{2^n}\right\}^3,
\end{aligned}$$

que és com a molt $(7M2^{-n/2})^3$ ja que la densitat de la norma està acotada per $1/2$. Per tant,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k}\right) \leqslant 2^n(7M2^{-n/2})^3 = (7M)^3 2^{-n/2}$$

que es pot sumar sobre n. Per tant, per el lema de Borel-Cantelli,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\text{hi hagi } t_0 \in [0,1] \text{ amb } \sup_{h\in[0,1]} \frac{|W(t_0+h)-W(t)|}{h} \leqslant M\right\} \\
&\qquad \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k} \text{ per un nombre infinit d'}n\text{s}\right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Com hem vist, tot i que el moviment Brownià sigui continu, no és diferenciable. L'aleatorietat del moviment Brownià fa que no es comporti com hauria per ser integrat amb el mètode tradicional. Per això, utilitzarem el càlcul estocàstic.

3.2 Plantejament del problema

Com en el capítol anterior, l'objectiu d'aquesta secció serà trobar un control adequat per a un sistema donat que, en aquest cas, estarà modelitzat per una equació diferencial estocàstica. Una equació diferencial estocàstica és una equació diferencial que inclou la possibilitat d'afectes aleatoris:

$$\begin{cases} dX(t) = A(X(t))dt + B(X(t))\xi(t)dt, t \in [s,T] \\ X(s) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

on $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ i $\xi(t)$ és un soroll blanc m dimensional que causa fluctuacions aleatòries. T és el temps terminal. La solució de (3.1) és un procés estocàstic.

Una *equació integral estocàstica* és la forma integral de (3.1):

$$X(t) = x_0 + \int_s^T A(X(t),t)dt + \int_s^T B(X(t))d\mathbf{W}$$

on $\mathbf{W}$ és un moviment Brownià multidimensional tal que $d\mathbf{W} = \xi(t)dt$.

Observem que la primera integral a la dreta de la igualtat és una *integral de Riemann*, mentre que la segona no ho és, ja que els integrands i integradors són processos estocàstics. Per tant, haurem d'introduïr un nou concepte d'integral i com utilitzar-la per a trobar el control adecuat. Ho farem en la següent secció.

3.3 Integral de Itô

Sigui $\mathbf{W}$ un moviment Brownià i $X(t)$ un procés estocàstic adaptat a la filtració generada per $\mathbf{W}$. Definim la integral de Itô com:

$$Y(T) = \int_s^T X(t)d\mathbf{W}.$$

Una de les propietats més importats de la integral de Itô és la següent:

$$E\left[\int_s^T X(t)\mathbf{W}\right] = 0.$$

Es pot veure la demostració en [20].

Un cop definida la integral de Itô, es té un nou càlcul. En particular, la regla de la cadena conté termes adicionals en comparació amb la regla de la cadena usual. Això provocarà canvis en la equació de Hamilton-Jacobi-Bellman. Per tant, hem d'estudiar aquets canvis. Primer de tot, presentarem la fòrmula de Itô en una dimensió, i explicarem la idea de com s'arriba a la mateixa. Presentarem també la fòrmula de Itô multidimensional.

Lema 3.11. *Sigui $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^2. Siguin $a(t), b(t)$ dues funcions aleatòries en el temps. Sigui $W(t)$ un moviment Brownià unidimensional. Sigui $X(t)$ un procés* *estocàstic definit per la següent equació diferencial estocàstica:*

$$\begin{cases} dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

La solució de (3.2) compleix:

$$X(T) - x_0 = \int_0^T a(t)dt + \int_0^T b(t)dW(t).$$

Aleshores,

$$d(r(X)) = r'(X(t))\,[a(t)dt + b(t)dW(t)] + \frac{1}{2}b^2(t)r''(X(t))dt. \tag{3.3}$$

Anomanem a (3.3) la *regla de la cadena de Itô en una dimensió*.

Ara donarem una idea de com arribar a derivar aquesta fòrmula. Utilitzarem la regla $dW^2(t) = dt$. Es pot veure en [11] la justificació d'aquesta regla. Volem calcular $r(X(t) + \Delta X(t))$. Escriurem a_t, b_t i W_t en comptes de $a(t)$, $b(t)$ i $W(t)$ per simplicitat. Pensarem dt i dW_t com a petites quantitats, Δt i ΔW_t.

Pel teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} & r(X(t) + \Delta X(t)) \\ & \quad = r(X(t)) + r'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}r''(X(t))(dX(t)^2)) + o([dX(t)]^3) \\ & \quad = r(X(t)) + r'(X(t))(a_t\Delta t + b_t\Delta W_t) \\ & \quad + \frac{1}{2}r''(X(t))(a_t^2\Delta t^2 + 2a_tb_t\Delta t\Delta W_t + b_t^2\Delta W_t^2) + o([dt + dW]^2) \end{aligned}$$

On hem substituït $dX(t)$ utilitzant l'equació (3.2).

Ara, si considerem neglegibles els termes més petits que $o(\Delta t)$, deixem que $(\Delta t, \Delta W_t) \to (dt, dW_t)$ i utilitzant $dW^2(t) = dt$, obtenim la fòrmula de Itô:

$$d(r(X)) = r'(X(t))\,[a(t)dt + b(t)dW(t)] + \frac{1}{2}b^2(t)r''(X(t))dt.$$

Observació 3.12. Podem trobar l'expressió de r en forma d'integral:

$$\begin{aligned} r(X(t)) = r(X(0)) + \int_0^t [r'(X(s))a(s) + \frac{1}{2}b^2(s)r''(X(s))]ds \\ + \int_0^t r'(X(t))b(t)dW(t). \end{aligned}$$

Ara presentarem un resultat anàleg a la regla de la Cadena d'Itô vista a (3.3) en el cas de vàries variables. Serà la que utilitzarem, juntament amb el principi de programació dinàmica, per a derivar a l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman en la programació dinàmica.

Definició 3.13. *Sigui A un vector n-dimensional de processos adaptats, B una matriu n x m de processos integrables, i* $\mathbf{W}$ *un moviment Brownià m-dimensional. Aleshores al procés*

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)d\mathbf{W} \\ dX &= A(t)dt + B(t)\mathbf{W} \end{aligned} \tag{3.4}$$

l'anomanem procés de Itô n-dimensional.

Teorema 3.14. *Sigui X(t) un procés de Itô n-dimensional, definit per 3.4. Sigui* $R(t,x)$: $[0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 *en t i* C^2 *en x amb* $\partial_t R$, DR *i* $D^2 R$ *contínues.*

Aleshores:

$$\begin{aligned} R(t,X(t)) = R(0,X(0) &+ \int_0^t \{\partial_s R(s,X(s)) + DR(s,X(s)) \cdot A(s) \\ &+ \frac{1}{2} tr[BB^*(s) D^2 R(s,X(s))ds\} \\ &+ \int_0^t B^*(s) DR(s,X(s)) \cdot dW(s) \end{aligned}$$

Demostració. La demostració es pot veure en [12]. □

3.4 Programació Dinàmica

D'una manera similar al cas determinista, ens interessarà trobar funcions de control que minimitzin la funció de cost en el cas de processos estocàstics. Estudiarem el principi de programació dinàmica i la seva demostració i derivarem informalment a l'equació estocàstica de Hamilton-Jacobi-Bellman que, com en el cas determinista, haurà de ser satisfeta per la funció valor. Considerem el següent sistema estocàstic controlat:

$$\begin{cases} dX(t) = A(t,X(t),u(t))dt + B(t,X(t),u(t))d\mathbf{W}, \;\; t \in [s,T] \\ X(s) = x. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definició 3.15. *Siguin* $g : [s,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ *i* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dues funcions conegudes, definim el funcional de cost com:*

$$J^{u(\cdot)}(s,x) = \mathbb{E}\left\{ \int_s^T g(t,X(t),u(t))dt + h(X(T)) \right\}. \tag{3.6}$$

A g li direm el cost variable i a h el cost terminal. Noteu que en aquest cas, al tractar-se d'un procés estocàstic busquem de minimitzar, no la integral, sinó la seva esperança.

Definició 3.16. *Definim l'espai de controls admisibles com*

$$\mathcal{U}[s,T] = \{u(\cdot) \;\; mesurables \;\; en[s,T] \;\; i \;\; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0} - adaptats\}.$$

La restricció de controls admisibles implica que a qualsevol instant de temps, el jugador té coneixament d'una certa informació (depenent del camp $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) del que ha passat fins a aquest moment, pero no és capaç de predir que passarà més tard. En conseqüència, per a cada t, els jugadors no poden realitzar les seves accions $u(t)$ fins que no s'arriba al temps t.

El problema que voldrem resoldre és minimitzar (3.6) en $\mathcal{U}[s,T]$.

Donada una condició inicial $(s,t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, la funció valor en el cas estocàstic estarà definida com

$$\begin{cases} V(s,x) = inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}[s,T]} J^{u(\cdot)}(s,x) \\ V(T,x) = h(x(T)). \end{cases} \tag{3.7}$$

Com en el cas determinista, enunciarem el principi de programació dinàmica i desenvoluparem l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman per a arribar a una equació diferencial en derivades parcials per a trobar la funció que compleixi (3.7). A més, enunciarem i demostrarem el teorema de verificació.

3.4.1 Equació de Hamilton-Jacobi-Bellman

Com que utilitzarem la fòrmula de Itò multidimensional i el principi de programació dinàmica per a derivar a l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman, treballarem primer el principi de programació dinàmica i el demostrarem.

Lema 3.17. *Donada una condició inicial $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Sigui V(s,x) la funció valor i donat $r \in [s,T]$, es compleix:*

$$V(s,x) = \inf_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[\int_s^r g(t,X(t),u(t))dt + V(r,X(r))\right]. \tag{3.8}$$

Demostració. Sigui $h > 0$. Dividirem l'intèrval de temps en 2 parts, el primer subintèrval serà $[s,s+h]$ i el segon $(s+h,T]$. Assumim que existeix un control òptim $u^*(t,x)$. Definim el control $\hat{u}(s,x)$ de la següent manera:

$$\hat{u}(s,x) = \begin{cases} u(t,x), & (t,x) \in [s,s+h] \times \mathbb{R}^n \\ u^*(t,x), & (t,x) \in (s+h,T] \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

on $u(t,x)$ és un control arbitrari. Utilitzarem 2 estratègies del càlcul del cost total esperat, i les compararem:

- La primera estratègia serà considerar el control òptim en tot l'intèrval $[s,T]$. Per tant, obtindrem que $J^{u^*(\cdot)}(s,x) = V(s,x)$.
- En la segona estratègia considerarem el control $\hat{u}(t,x)$ sobre l'intèrval $[s,T]$.

Anem a calcular la funció de cost esperada per la segona estratègia:

- La funció de cost esperada en l'intèrval $[s, s+h)$ ve donada per:

$$\mathbb{E}\left[\int_s^{s+h} g(t, X(t), u(t)dt\right].$$

- En l'intèrval $[s+h, T]$, observem que a temps $t+h$, estarem en el estat $X(t+h)$. Com que per definició, utilitzarem el control òptim, la funció de cost esperada serà $V(t+h, x(t+h))$.

Aleshores, obtindrem que la funció de cost esperada en la segona estratègia, condicionat en que a temps s, estem a x, serà:

$$\mathbb{E}\left[\int_s^{s+h} g(t, X(t), u(t))dt + V(s+h, X(s+h))\right].$$

Comparant les estratègies, com que la primera estratègia utilitza el control òptim, tenim que:

$$V(s,x) \leqslant \mathbb{E}\left[\int_s^{s+h} g(t, X(t), u(t))dt + V(s+h, X(s+h))\right].$$

Aleshores, aplicant el mateix procediment que en la demostració de programació dinàmica determinista, triant un control $u(t,x)$ δ-òptim, veiem que

$$\delta + V(s,x) \geqslant J^{u(\cdot)}(s,x) \geqslant \mathbb{E}\int_s^{s+h} g(t, X(t), u(t))dt + V(s+h, X(s+h)).$$

Com que δ és arbitrari, queda demostrat. $\square$

Ara derivarem informalment a l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman:

Fixem $t \in [s, T)$. Triem $s = t$, $r = t+h$ per a un $h > 0$ petit. Obtenim que per la fòrmula de Itô i per (3.8)

$$\begin{aligned} V(s,x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\Bigg[&\int_s^{s+h} g(t, X(t), u(t))dt + V(s+h, x(s+h)) \\ &+ \int_s^{s+h} \Big[\partial_t V(s, X(s)) + DV(s, X(s)) \cdot A(t, X(t), u(t)) \\ &+ \frac{1}{2} tr(BB^*(t, X(t), u(t)) D^2 V(s, X(s)))\Big] dt\Bigg]. \end{aligned}$$

Simplificant $V(s,x)$, dividint per h i fent tendir $h \to 0^+$, obtenim l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\begin{aligned} 0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \Big[&g(t,x,u) + \partial_t V(s,x) \\ &+ DV(s,x) \cdot A(t,x,u) \frac{1}{2} tr(BB^*(t,x,u) D^2 V(s,x))\Big]. \end{aligned}$$

Per facilitar la notació, introduïm el Hamiltonià: per a $p \in \mathbb{R}^n$ i $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$H(t,x,p,M) := \sup_{u\in\mathcal{U}} \Big[-g(t,x,u) - p\cdot A(t,x,u) \\ - \frac{1}{2} tr(BB^*(t,x,u)M) \Big]. \tag{3.9}$$

Aleshores l'equació de Hamilton-Jacobi es pot escriure com:

$$\begin{cases} -\partial_t V(s,x) + H(t,x,DV(s,x),D^2V(s,x)) = 0 \quad \text{en}(s,T)\times\mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x) \quad \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.10}$$

La condició terminal ve determinada per la definició de V en $s = T$.

Teorema 3.18. *Sigui $u^*(t,x) \in \mathcal{U}$ el punt màxim en la definició de H quan $p = DV(s,x)$ i $M = D^2V(s,x)$, és a dir:*

$$\begin{aligned} H(t,x,DV(s,x),D^2V(s,x)) = &-g(t,x,u^*(t,x)) \\ &- DV(s,x)\cdot A(t,x,u^*(t,x)) \\ &- \frac{1}{2} tr(BB^*(t,x,u^*(t,x))D^2V(s,x)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aleshores:

$$V(s,x) = J^{u^*(\cdot)}(s,x).$$

El teorema ens diu que u^* és el control òptim a escollir a temps t per l'estat X.

Demostració. Sigui X^* la solució de

$$X^*(t) = x + \int_s^t A(r,X^*(r),u^*(r,X^*(r))dr + \int_s^t B(r,X^*(r),u^*(r,X^*(r))dW.$$

Per simplicitat escriurem $u_t^* := u^*(t,X^*(t))$. Per la fòrmula de Itô, tenim que

$$\begin{aligned} h(X^*(T)) =& V(T,X^*(T)) = V(s,x) + \int_s^T \Big(\partial_t V(s,X(s)) \\ &+ DV(s,X(s))\cdot A(t,X(t),u(t)) \\ &+ \frac{1}{2} tr(BB^*(t,X^*(t),u^*(t))D^2V(s,x)\Big)dt \\ &+ \int_s^T B^*(t,X^*(t),u^*(t))DV(s,x)\cdot dW(t). \end{aligned}$$

Si calculem la esperança, per u^* (3.11) i per l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman, obtenim que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X_T^*)] &= V(s,x) + \mathbb{E}\Bigg[\int_s^T (\partial_t V(s,x) \\
&\quad - H(t, X^*(t), DV(s,x), D^2V(s,x) - g(t, X^*(t), u^*(t))dt \Bigg] \\
&= V(s,x) - \mathbb{E}\Bigg[\int_s^T g(t, X^*(t), u^*(t))dt \Bigg].
\end{aligned}$$

Finalment, si reordenem, ens queda:

$$V(s,x) = \mathbb{E}\Bigg[\int_s^T g(t, X^*(t), u^*(t))dt + h(X^*(T)) \Bigg]$$

que mostra l'optimalitat de u^*. □

Per tant hem deduit principis anàlegs als del cas determinista per tal de minimitzar funcions de cost en el cas estocàstic. En el capítol 5 veurem que per trobar Equilibris de Nash plantejarem un problema de 2 passos. El primer pas es solucionarà utilitzant la teoria sobre control òptim determinista i control òptim estocàstic presentada en els capítols 2 i 3.

4 Jocs de 2 jugadors

En aquest capítol donarem una primera intuïció de què és l'equilibri de Nash. Donarem una definició formal per a N jugadors més endavant. Introduïrem també la noció de funció millor resposta. Aquest capítol conté resultats de [15].

Considerem un joc de 2 jugadors. La funció millor resposta per el jugador 1 és l'estratègia que ha de dur a terme, donada l'estratègia del jugador 2, amb el fi de maximitzar una utilitat o minimitzar un cost.

Un equilibri de Nash és una situació en la que cada jugador ha realitzat una estratègia i no tenen incentius de canviar-la. És a dir, si un dels jugadors canvia l'estratègia i l'altre no, el seu cost serà superior o la seva utilitat inferior. Pot existir més d'un equilibiri de Nash.

4.1 Exemples

Presentarem dos exemples de jocs de 2 jugadors on es coneix tota la informació. En el primer d'ells, els dos agents escolliran simultàneament la seva estratègia, mentre que en el segon, un dels agents escollirà primer i el segon reaccionarà, realitzant la millor respota, a l'estratègia escollida pel primer.

Equilibri de Cournot Considerem una indústria amb dos firmes competint en quantitats. Per simplicitat, considerem que tenen els mateixos costos marginals, $c > 0$ i no tenen costs fixes. La seva funció de demanda ve donada per l'equació $p(Q) = a - bQ$ on $a > 0$, $b > 0$, $Q = q_i + q_j$ és la quantitat produïda per les dos firmes i p és el preu de mercat. Les estratègies que hauran d'escollir les firmes seran el nivell de producció per tal de maximitzar el seu benefici.

El benefici de la firma i ve donat per l'equació

$$\pi_i = p(Q) \cdot q_i - cq_i.$$

Per tant, si notem per q_j el nivell de producció de la firma rival, el problema en que es troba la firma i és

$$\max_{q_i} (a - bq_i - bq_j)q_i - cq_i.$$

La condició de primer ordre serà doncs

$$a - 2bq_i - bq_j - c = 0$$

i si aïllem q_i trobem la millor resposta de la firma i

$$q_i(q_j) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j.$$

Observació 4.1. Veiem que la funció millor resposta de la firma i depèn de la quantitat produïda per la firma j.

Observació 4.2. Quan la firma j no produeix cap unitat, la firma i produirà $\frac{a-c}{2b}$, que és l'equilibri de monopoli. A mesura que la firma j comença a produir, la producció de la firma i disminueix, fins arribar al punt en que la firma j produeix $\frac{a-c}{b}$ i llavors la firma i deixa de produir.

Ara anem a trobar la funció millor resposta de la firma j. Com que és un joc simètric, ja que les dos firmes escolleixen l'estratègia simultàneament, la funció millor resposta de la empresa j és:

$$q_j(q_i) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i.$$

Ara que ja tenim la funció millor resposta de les dos empreses, podem trobar l'equilibri de Nash. L'equilibri de Nash serà el punt en el que es troben les dos funcions millor resposta, ja que cap de les dos firmes tindrà incentius de produir una quantitat diferent perquè llavors obtindra menys beneficis. Hem de resoldre per tant el següent sistema:

$$\begin{cases} q_i(q_j) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \\ q_j(q_i) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i \end{cases}$$

Obtenim doncs les quantitats produïdes en equilibri

$$\begin{cases} q_i^* = \frac{a-c}{3b} \\ q_j^* = \frac{a-c}{3b} \end{cases}$$

que maximitzaràn el benefici de cada firma.

Equilibri de Stackelberg Considerem una indústria igual que en l'equilibri de Cournot. En aquest cas però, tindrem una firma i líder i una firma j seguidora. El joc té dos períodes. En el primer període, la firma líder escolleix el seu nivell de producció q_i. Aquesta decisió ja no es pot canviar en el segon període. En el segon, la firma seguidora escolleix el seu nivell de producció q_j després d'observar què fa la firma líder. La demanda del mercat és igual que en l'equilibri de Cournot, $p(Q) = a - bQ$. Considerem que tenen els mateixos costos marginals $c > 0$, i tampoc tenen costos fixes.

Per trobar l'equilibri, començarem trobant la funció millor resposta de la firma seguidora. Ha de solucionar la següent funció de benefici:

$$max_{q_j} \pi_j = P(Q) \cdot q_j - c \cdot q_j$$

La condició de primer ordre serà

$$a - b \cdot q_i - 2 \cdot b \cdot q_j - c = 0$$

La funció millor resposta de la firma j serà doncs

$$q_j(q_i) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_i}{2} \tag{4.1}$$

Ara busquem la funció millor resposta de la firma 1, un cop sabem que la firma j produirà $q_j(q_i) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}$. La firma i vol solucionar:

$$\begin{aligned} max_{q_i} p(Q) \cdot q_i - c \cdot q_i &= \left(a - bq_i - b\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{q_i}{2}\right)\right) q_i - cq_i \\ &= \left(\frac{a+c}{2} - \frac{bq_i}{2}\right) q_i - cq_i \end{aligned}$$

Per tant la condició de primer ordre serà:

$$\frac{a+c}{2} - bq_i - c = 0.$$

El nivell de producció de la firma i en equilibri serà:

$$q_i^* = \frac{a-c}{2b}.$$

La producció en equilibri de la firma j serà substituïr la producció en equilibri de la firma i en la funció millor resposta 4.1, per tant

$$q_j^* = \frac{a-c}{4b}.$$

Observació 4.3. Com podem observar, el fet de que la firma líder escolleixi en el primer període i la seguidora en el segon, fa que l'equilibri de Nash varií. La firma i produirà més que la firma j i per tant obtindrà més beneficis.

5 Jocs de N jugadors

En aquesta secció, considerarem jocs amb N jugadors, on N serà un nombre molt gran. Cada jugador i tindrà la seva funció de cost J^i que voldrà minimitzar. L'anàlisis d'aquest jocs involucra la minimització simultànea de N funcions $J^1, ..., J^N$ que tindran com a argument les accions realitzades pels N jugadors. Aquestes accions les notarem per $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$. S'anomenen jocs de camp mitjà aquells que consideren el comportament quan $N \to \infty$ de jocs amb un nombre molt gran de jugadors. Aquesta secció conté resultats de [2] i [1].

5.1 Equilibri de Nash

Considerarem que l'objectiu de la simultànea minimització serà assolir l'Equilibri de Nash en el sistema.

Sigui A un espai mètric compacte. Per simplicitat suposarem que tots els jugadors poden realitzar accions en el mateix espai A.

Definició 5.1. *Un punt $(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_N) \in A^N$ és un Equilibri de Nash si per a tot $i = \{1, ..., N\}$,*

$$J^i(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_i, ..., \bar{\alpha}_N) \leqslant J^i(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_{i-1}, \alpha, \bar{\alpha}_{i+1}, ..., \bar{\alpha}_N) \qquad \forall \alpha \in A.$$

La noció d'Equilibri de Nash es pot entendre com a punt fix de la funció millor resposta $B : A^N \to A^N$ definida per:

$$B(\alpha_1, ..., \alpha_N) = (\beta_1, ..., \beta_N) \text{ si } \forall i \in \{1, ..., N\},$$
$$\beta_i = \arg\min_{\alpha} J^i(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_N).$$

5.2 Límit dels jocs

Aquesta simultànea minimització és molt complicada tant a nivell teòric com a nivell numèric quan N és un nombre finit. En aquesta secció, treballarem amb els jocs fent tenir la $N \to \infty$ i buscant simplificacions en les equacions. Es pot veure en [3] que les solucions dels jocs de camp mitjà donen Equilibris de Nash aproximats en jocs amb un nombre finit de jugadors.

Haurem de restringir la nostre atenció sobre jocs amb unes propietats específiques, ja que aquestes simplificacions quan $N \to \infty$ no es poden esperar amb tota generalitat. Assumirem que:

- Cada funció de cost J^i és una funció simètrica de les $N-1$ variables α_j per $j \neq i$. La suposició de simetria implica que:

  $$J^i(\alpha_1, ..., \alpha_N) = J^i(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(i-1)}, \alpha_i, \alpha_{\sigma(i+1)}, ..., \alpha_{\sigma(N)}).$$

  Per a tota permutació σ en $\{1, ..., N-1\}$.

- La influència de cada jugador en el sistema va disminuïnt a mesura que N és més gran.

Abans de passar al límit, introduïrem una notació per les distribucions empíriques.

Definició 5.2. *La distribució empírica d'un punt donat $X = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in A^N$ és*

$$\bar{\mu}_X^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\alpha_i} \tag{5.1}$$

on usem la notació δ_{α^i} per denotar l'unitat de massa en el punt $\alpha_i \in A$.

Observació 5.3. La distribució empírica $\bar{\mu}_X^N$ pertany a $\mathcal{P}(A)$.

Assumire'm que l'espai $\mathcal{P}(A)$ està equipat amb la topologia de la convergència dèbil, és a dir, una successió de mesures de probabilitat $(\mu_k)_{k\geqslant 1}$ en $\mathcal{P}(A)$ convergeixen a $\mu \in \mathcal{P}(A)$ si i només si,

$$\int_A f d\mu_k \to \int_A f d\mu$$

quan $k \to \infty$ i per a tota funció contínua f en A.

L'espai $\mathcal{P}(A)$ és un espai mètric compacte i denotarem per ρ la distància compatible amb aquesta topologia.

Lema 5.4. *Per a cada $N \in \mathbb{N}$, sigui $u^N : A^N \to \mathbb{R}$ una funció simètrica de les N variables. Assumi'm que aquesta funció compleix:*

1. $\sup_{N\geqslant 1} \sup_{X\in A^N} |u^N(X)| < \infty$;

2. *Existeix una constant $c > 0$ tal que per a tot $N \geqslant 1$ i $X, Y \in A^N$, tenim:*

$$|u^N(X) - u^N(Y)| \leqslant c\rho(\bar{\mu}_X^N, \bar{\mu}_Y^N).$$

Aleshores, existeix una subsuccessió (u^{N_k}) i una funció contínua Lipschitz $U : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{X\in A^{N_k}} |u^{N_k}(X) - U(\bar{\mu}_X^N)| = 0.$$

Per a la demostració del lema 5.4, utilitzarem el teorema d'Arzelà-Ascoli:

Definició 5.5. *Es diu que tot conjunt S és relativament compacte en un espai topològic Q si tota successió d'elements de S té una subsuccessió que convergeix en Q.*

Definició 5.6. *Un subconjunt H de $C(K, Q)$ és equicontinu en el punt $z_0 \in K$ si per cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ (que depèn de ϵ y z_0) tal que, per a tota $f \in H$,*

$$d_Q(f(z), f(z_0)) < \epsilon \ \ si \ \ d_K(z, z_0) < \delta$$

H es equicontinu si ho és en tot punt de K.

Corol·lari 5.7. *Si totes les funcions de H són Lipschitz contínues amb una mateixa consant c, llavors H és equicontinua.*

Observació 5.8. Aquesta propietat és la que veurem que es compleix en la demostració del lema 5.4 i que permetrà aplicar el Teorema d'Arzelà-Ascoli.

Teorema 5.9 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sigui K un espai mètric compacte i Q un espai mètric complet. Un subconjunt H de C(K,Q) és relativament compacte en C(K,Q) si i només si:*

1. *H és equicontinu*
2. *Per a tot $z \in K$, el conjunt $H(z) = \{f(z) | f \in K\}$ és relativament compacte en X.*

La demostració es pot veure en [6].

Observació 5.10. Notem que si $Q = \mathbb{R}$, la condició 2 equival a demanar que per a cada $q \in Q$, el conjunt $H(q)$ sigui acotat.

Demostració. (del lema 5.4) Per a cada enter $N \geqslant 1$, definim la funció U^N en $\mathcal{P}(A)$ com:

$$U^N(\mu) = \inf_{X \in A^N} \left[u^N(X) + c\rho(\bar{\mu}_X^N, \mu) \right], \quad \mu \in \mathcal{P}(A). \tag{5.2}$$

Aquestes funcions són acotades uniformament ja que, com hem vist en la condició 1 del lema 5.4, les funcions $(u^N)_{N \geqslant 1}$ són acotades uniformament i, a més, la funció $\mathcal{P}(A)^2 \ni (\mu, \nu) \mapsto \rho(\mu, \nu)$ és acotada ja que $\mathcal{P}(A)$ és compacte. Les funcions $(U^N)_{N \geqslant 1}$ extenen les funcions originals $(u^N)_{N \geqslant 1}$ a $\mathcal{P}(A)$ en el sentit que $u^N(Y) = U^N(\bar{\mu}_Y^N)$ per a $Y \in A^N$ i $N \geqslant 1$. Per veure-ho, triem $X = Y$ i veiem que en l'ínfim de l'equació (5.2) obtenim $U^N(\bar{\mu}_Y^N) \leqslant u^N(Y)$. Es compleix la igualtat ja que sinó, existiria un $X \in A^N$ tal que $u^N(X) + c\rho(\bar{\mu}_X^N, \bar{\mu}_Y^N) < u^N(Y)$ que contradiria la condició 2 del lema 5.4. A més, aquestes extensions són contínues i c-Lipschitz en $\mathcal{P}(A)$ en el sentit que:

$$|U^N(\mu) - U^N(\nu)| \leqslant c\rho(\mu, \nu)$$

per a tot $\mu, \nu \in \mathcal{P}(A)$. Per provar-ho, siguin $X \in A^N$ i $Y \in A^N$ tal que $U^N(\mu) = u^N(X) + c\rho(\bar{\mu}_X^N, \mu))$ i $U^N(\nu) = u^N(Y) + c\rho(\bar{\mu}_Y^N, \nu))$. L'ínfim de la definició (5.2) s'aconsegueix ja que A^n és compacte i, per a cada $\mu \in \mathcal{P}(A)$, la funció $A^N \ni X \mapsto u^N(X) + c\rho(\bar{\mu}_X^N, \mu))$ és contínua. Aleshores tenim que:

$$\begin{aligned} U^N(\mu) - U^N(\nu) &\leqslant u^N(Y) + c\rho(\bar{\mu}_Y^N, \mu) - u^N(Y) - c\rho(\bar{\mu}_Y^N, \nu) \\ &= c\left[\rho(\bar{\mu}_Y^N, \mu) - \rho(\bar{\mu}_Y^N, \nu)\right] \\ &\leqslant c\rho(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Similarment, provem que $U^N(\nu) - U^N(\mu) \leqslant c\rho(\mu, \nu)$ utilitzant que X és l'ínfim que defineix $U^N(\nu)$. Això completa la prova de la continuïtat c-Lipschitz.

Com que $\mathcal{P}(A)$ és un espai mètric compacte, el teorema d'Arzelà-Ascoli ens dóna l'existència d'una subsuccessió $(N_k)_{k\geqslant 1}$ per la cual U^{N_k} convergeix uniformament cap a un límit U i conseqüentment:

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{X\in A^{N_k}} |u^{N_k}(X) - U(\bar{\mu}_X^{N_k})| \leqslant \lim_{k\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{P}(A)} |U^{N_k}(\mu) - U(\mu)| = 0,$$

que ve donat, com ja hem vist abans, pel fet que $u^{N_k}(X) = U^{N_k}(\bar{\mu}_X^{N_k})$ i que conclou la demostració. $\square$

Observació 5.11. També es pot veure un cas més general, utilitzant un mòdul de continuïtat en la condició 2 del lema anterior, com es pot veure en [1].

El que acabem de veure és que funcions simètriques que depenen feblement dels seus arguments seran convenientment aproximades(llevat d'alguna subsuccessió) per funcions de mesures evaluades a la distribució empírica dels arguments originals.

D'ara en endavant, utilitzarem la notació α_{-i} per denotar els $N-1$ punts α_j amb $j \neq i$ i $j \in \{1, ..., N\}$.
A més, identificarem (α, α_{-i}) amb $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_N)$, és a dir, canviarem en la posició i el punt α_i per α.

Denotarem les funcions de cost per $(J^{N,i})_{i=1,...,N}$ per emfatitzar que depenen de N variables.

Per a seguir amb les simplificacions en el límit, assumire'm que les funcions de cost compleixen les següents propietats:
Per a cada $N \geqslant 1$, existeix una funció $J^N : A^N \to \mathbb{R}$ tal que:

- Per a tot $N \geqslant 1$ i $(\alpha_1, ..., \alpha_N) \in A^N$,

$$J^{N,i}(\alpha_1, ..., \alpha_N) = J^N(\alpha_i, \alpha_{-i}).$$

- $\sup_{N\geqslant 1} \sup_{(\alpha_1,...,\alpha_N)\in A^N} |J^N(\alpha_1, ..., \alpha_N)| < \infty$.

- Existeix una constant finita $c > 0$ tal que per a tot $N \geqslant 1$ i tot $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$, $(\beta_1, ..., \beta_N) \in A^N$,

$$|J^N(\alpha_1, ..., \alpha_N) - J^N(\beta_1, ..., \beta_N)| \leqslant c \left[d_A(\alpha_1, \beta_1) + \rho(\bar{\mu}^{N-1}_{\alpha^{-1}}, \bar{\mu}^{N-1}_{\beta^{-1}}) \right],$$

  on d_A és la distància en A i ρ és la distància en $\mathcal{P}(A)$.

Observació 5.12. La primera suposició es pot entendre com que tots els jugadors tenen la mateixa funció de cost.

Observació 5.13. Tal i com hem vist abans, la notació $\bar{\mu}^{N-1}_{\alpha^{-i}}$ representa

$$\bar{\mu}^{N-1}_{\alpha^{-i}} = \frac{1}{N-1} \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant N} \delta_{\alpha^j}.$$

Seguint el lema 5.4, per a cada $N \geqslant 1$, $\alpha \in A$ i $\mu \in \mathcal{P}(A)$ definim:

$$J^{(N)}(\alpha, \mu) \\ = \inf_{(\alpha_2,\dots,\alpha_N)\in A^{N-1}} \left[J^N(\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^N) + c\rho(\bar{\mu}^{N-1}_{(\alpha_2,\dots,\alpha_N)}, \mu) \right]. \tag{5.3}$$

Clarament $J^{(N)}$ és c-Lipschitz en α. Per el lema 5.4, és c-Lipschitz en μ respecte ρ. Com que $\sup_{N\geqslant 1} \sup_{(\alpha^1,\dots,\alpha^N)\in A^N} |J^N(\alpha_1, \dots, \alpha_N)| < \infty$, la successió $(J^{(N)})_{N\leqslant 1}$ és acotada uniformament. Repetint la prova del lema 5.4, deduïm que existeix una funció contínua $J : A \times \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$ i una subsuccessió $(N_k)_{k\geqslant 1}$ tal que $(J^{(N_k)})_{k\geqslant 1}$ convergeix uniformament a J. Aleshores,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\alpha_{N_k}\in A^{N_k}} \left| J^{N_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_k}) - J(\alpha_1, \bar{\mu}^{N_k-1}_{\alpha_{-1}}) \right| = 0.$$

Per acabar la formulació de jocs de camp mitjà com a límit de jocs amb un nombre finit de jugadors, demostrarem la següent proposició.

Proposició 5.14. *Assumi'm que per a cada enter $N \geqslant 1$, $\hat{X}^N = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_N)$ és un equilibri de Nash per el joc definit per les funcions de cost $J^{N,1}, \dots, J^{N,N}$. Escriurem $\hat{X}^N$ per emfatitzar que depèn de N variables. Assumi'm que la mètrica ρ satisfà, per a tot $N \geqslant 1$, $\alpha \in A$ i $\mu \in \mathcal{P}(A)$:*

$$\rho\left(\mu, \frac{N-1}{N}\mu + \frac{1}{N}\delta_\alpha\right) \leqslant \frac{c}{N}, \tag{5.4}$$

per a una constant $c > 0$. Aleshores existeix una subsuccessió $(N_k)_{k\geqslant 1}$ i una funció contínua $J : A \times \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$ tal que la successió $(\bar{\mu}^{N_k}_{\hat{\alpha}^{N_k}})_{k\geqslant 1}$ convergeix a una mesura de probabilitat $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(A)$ quan $k \to \infty$. A més,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\alpha_{N_k}\in A^{N_k}} \left| J^{N_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_k}) - J(\alpha_1, \bar{\mu}^{N_k-1}_{\alpha_{-1}}) \right| = 0, \tag{5.5}$$

i

$$\int_A J(\alpha, \hat{\mu}) d\hat{\mu}(\alpha) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}(A)} \int_A J(\alpha, \hat{\mu}) d\mu(\alpha). \tag{5.6}$$

Observació 5.15. La propietat (5.6) és equivalent a dir que el suport de $\hat{\mu}$ està contingut en el conjunt dels mínims de la funció $J(\alpha, \hat{\mu})$.

En efecte, si el $\mathrm{Sup}(\hat{\mu}) \subset \arg\min_{\alpha\in A} J(\alpha, \hat{\mu})$, aleshores clarament $\hat{\mu}$ satisfà (5.6). Inversament, si es satisfà (5.6), aleshores triant $\mu = \delta_{\alpha'}$ mostra que $\int_A J(\alpha, \hat{\mu}) d\hat{\mu}(\alpha) \leqslant J(\alpha', \hat{\mu})$ per a qualsevol $\alpha' \in A$. Per tant, $\int_A J(\alpha, \hat{\mu}) d\hat{\mu}(\alpha) \leqslant \min_{\alpha'\in A} J(\alpha', \hat{\mu})$, i això implica que $\hat{\mu}$ està dins del suport de $\arg\min_{\alpha\in A} J(\alpha, \hat{\mu})$.

Observació 5.16. L'acotament (5.4) es pot veure fàcilment per mètriques consistents amb la convergència dèbil de mesures.

Demostració. Com que A és compacte, podem trobar una subsuccessió $(N_k)_{k\geqslant 1}$ tal que $(\bar{\mu}^{N_k}_{\hat{\alpha}^{N_k}})_{k\geqslant 1}$ convergeix cap a una mesura de probabilitat $\hat{\mu}$. A més, pel lema 5.4 podem assumir que es compleix (5.5).

Per la definició d'Equilibiri de Nash, tenim que:

$$\delta_{\hat{\alpha}_i} \in \arg \inf_{\mu \in \mathcal{P}(A)} \int_A J^{(N)} \left(\alpha, \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{\hat{\alpha}_j} \right) d\mu(\alpha),$$

per a qualsevol $i \in \{1, ..., N\}$, on hem utilitzat que, en (5.3),

$$J^{(N)} \left(\alpha, \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{\hat{\alpha}_j} \right) = J^N(\alpha, \hat{\alpha}_{-i}).$$

Ara utilitzem el fet que

$$\rho \left(\mu, \frac{N-1}{N} \mu + \frac{1}{N} \delta_\alpha \right) \leqslant \frac{c}{N},$$

per a tot $\mu \in \mathcal{P}(A)$ i $\alpha \in A$. Com que les funcions $(J^{(N)})_{N\geqslant 1}$ són uniformament Lipschitz i contínues, podem trobar una constant c', independent de N, tal que:

$$J^{(N)}(\hat{\alpha}_i, \bar{\mu}^N_{\hat{X}^N}) \leqslant \inf_{\mu \in \mathcal{P}(A)} \int_A J^{(N)}(\alpha, \bar{\mu}^N_{\hat{X}^N}) d\mu(\alpha) + \frac{c'}{N},$$

on $\hat{X} = (\hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_N)$.

Sumant sobre $i = 1, ..., N$ i dividint per N, obtenim:

$$\int_A J^{(N)}(\alpha, \bar{\mu}^N_{\hat{X}^N}) d\bar{\mu}^N_{\hat{X}^N}(\alpha) \leqslant \inf_{\mu \in \mathcal{P}(A)} \int_A J^{(N)}(\alpha, \bar{\mu}^N_{\hat{X}^N}) d\mu(\alpha) + \frac{c'}{N}.$$

Triant $N = N_k$ i utilitzant el fet que la successió $(J^{(N_k)})_{k\geqslant 1}$ convergeix uniformament cap a J, deduïm que existeix una successió de reals positius $(\epsilon_k)_{k\geqslant 1}$ convergent cap a 0 a mesura que $k \to \infty$ tal que:

$$\int_A J(\alpha, \bar{\mu}^{N_k}_{\hat{X}^{N_k}}) d\bar{\mu}^{N_k}_{\hat{X}^{N_k}}(\alpha) \leqslant \inf_{\mu \in \mathcal{P}(A)} \int_A J(\alpha, \bar{\mu}^{N_k}_{\hat{X}^{N_k}}) d\mu(\alpha) + \epsilon_k.$$

Fent tendir $k \to \infty$ i utilitzant el fet que J és Lipschitz i contínua en $A \times \mathcal{P}(A)$, obtenim:

$$\int_A J(\alpha, \hat{\mu}) d\hat{\mu}(\alpha) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}(A)} \int_A J(\alpha, \hat{\mu}) d\mu(\alpha),$$

que completa la prova. □

Observació 5.17. Per a la següent secció utilitzarem una forma especial de la Proposició 5.14. Començant la funció de cost en el límit $J : A \times \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$, reconstruïrem les funcions de cost J^i per a $i \in \{1, ..., N\}$ imposant:

$$J^{N,i}(\alpha_1, ..., \alpha_N) = J(\alpha_i, \bar{\mu}^{N-1}_{\alpha^{-i}}).$$

5.3 Estratègia dels jocs de camp mitjà

Per resoldre el problema d'equilibri d'un joc de N jugadors quan $N \to \infty$, considerarem un jugador genèric que minimitzarà la seva funció objectiu donades les estratègies dels altres jugadors. Simularem la construcció de la funció millor resposta fixant una distribució de probabilitat μ(com a representant de les estratègies escollides dels demés jugadors, que es suposa que en són molts) i resoldrem el problema de minimització:

$$\inf_{\alpha \in A} J(\alpha, \mu).$$

En aquest context, l'últim pas per a buscar l'equilibri, és a dir, l'argument del punt fix, equival a assegurar-se que el suport de la mesura μ està inclòs en el conjunt de minimitzadors.

Trobar un equilibri de Nash es pot reformular doncs en els següents dos passos:

- Fixar una distribució de probabilitat $\mu \in \mathcal{P}(A)$ i resoldre el problema de minimització $\inf_{\alpha \in A} J(\alpha, \mu)$;
- Resoldre el pas del punt fix trobant una mesura $\hat{\mu}$ satisfent la condició (5.6).

El primer pas el resoldrem mitjançant la programació dinàmica estudiada en els capítols 1 i 2, trobant així controls òptims.

El problema dels dos passos que acabem de veure és el que anomanem problema de jocs de camp mitjà.

L'objectiu de l'anàlisi del problema és trobar la distribució d'equilibri $\hat{\mu}$ per a la població.

5.4 Unicitat

La unicitat no és certa en general. La principal condició que ha de complir és la propietat de monotonicitat identificada per Lasry i Lions.

Teorema 5.18. *Assumim que F satisfà*

$$\int_A \left[J(\alpha, \mu_1) - J(\alpha, \mu_2)\right] d(\mu_1 - \mu_2)(\alpha) > 0 \qquad \forall \mu_1 \neq \mu_2.$$

Aleshores hi ha com a molt una mesura satisfent (5.6).

Demostració. Siguin μ_1 i μ_2 dos solucions del problema de camp mitjà. Aleshores,

$$\int J(\alpha, \mu_1) d\mu_1(\alpha) \leqslant \int J(\alpha, \mu_1) d\mu_2(\alpha)$$

ja que μ_1 és òptim i similarment,

$$\int J(\alpha, \mu_2) d\mu_2(\alpha) \leqslant \int J(\alpha, \mu_2) d\mu_1(\alpha)$$

perquè μ_2 és òptim. Si sumem les dos desigualtats, ens queda

$$\int J(\alpha, \mu_1) d\mu_1(\alpha) + \int J(\alpha, \mu_2) d\mu_2(\alpha) \leqslant \int J(\alpha, \mu_1) d\mu_2(\alpha) + \int J(\alpha, \mu_2) d\mu_1(\alpha)$$

Si restem $\int J(\alpha, \mu_1) d\mu_2(\alpha) + \int J(\alpha, \mu_2) d\mu_1(\alpha)$ a les dos bandes de la desigualtat, obtenim

$$\int J(\alpha, \mu_1) d\mu_1(\alpha) - \int J(\alpha, \mu_1) d\mu_2(\alpha) + \int J(\alpha, \mu_2) d\mu_2(\alpha) - \int J(\alpha, \mu_2) d\mu_1(\alpha) \leqslant 0.$$

Com que la integral és lineal, podem reescriure-ho com

$$\int J(\alpha, \mu_1) d[\mu_1 - \mu_2](\alpha) + \int J(\alpha, \mu_2) d[\mu_2 - \mu_1](\alpha) \leqslant 0.$$

Com que $\int J(\alpha, \mu_2) d[\mu_2 - \mu_1](\alpha) = - \int J(\alpha, \mu_2) d[\mu_1 - \mu_2](\alpha)$, finalment ens queda

$$\int_A [J(\alpha, \mu_1) - J(\alpha, \mu_2)]\, d(\mu_1 - \mu_2)(\alpha) \leqslant 0,$$

i arribem a una contradicció a no ser que $\mu_1 = \mu_2$. □

Per tant, en aquest capítol 5, hem vist que per el lema 5.4, quan la funció de cost $J^{N,i}$ del jugador i és una funció de α_i i d'una funció simètrica dels altres α_j amb $j \neq i$ i la dependència de $J^{N,i}$ sobre cada jugador α_j és menor, aleshores la funció $J^{N,i}$ pot ser vista com una funció de α_i i de la distribució empírica dels demés α_j. En altres paraules, en el límit quan $N \to \infty$ dels jocs amb un gran nombre de jugadors, les funcions de cost $J^{N,i}$ poden ser vistes com funcions de α_i i una mesura de probabilitat. A més, un cop feta aquesta simplificació quan $N \to \infty$, hem estudiat una estratègia per resoldre aquesta minimització, composada per 2 passos. El primer pas que, com hem vist, és un problema de control òptim, que podrà ser resolt amb la teoria donada als capítols 2 i 3, i un problema de punt fix. Aquest segon pas és equivalent a que la mesura de probabilitat compleixi (5.6).

6 Exemples

En aquest capítol estudiarem dos exemples de jocs de camp mitjà. En el primer exemple, només ens interessarà l'instant que els jugadors escolleixen per arribar a una reunió. Es resoldrà utilitzant un teorema de punt fix. El segon és un problema de gran importància en la enginyeria finançera moderna ja que s'utilitza com a entrada a molts motors d'execució òptims en els mercats electrònics d'alta freqüència. Ens interessa el model ja que presenta un exemple de joc diferencial estocàstic en el que els jugadors interaccionen mitjançant la distribució empírica dels seus controls. S'anomenen *jocs de camp mitjà extesos*. Aquesta secció conté resultats de [2] i [7].

6.1 Quan comença una reunió?

Una reunió està prevista que començi a temps t_0, conegut per tothom. Cada participant de la reunió $i \in \{1, ..., N\}$ intenta arribar a la reunió a temps t_i. Aquest instant t_i és un nombre totalment controlat per el jugador i. Tot i el desitg d'arribar a t_i, degut a certes incerteses, l'individu i arriba a la reunió a temps X^i. Aquestes incerteses poden ser de tràfic o problemes amb el transport públic, entre d'altres. El temps X^i és una realització d'una variàble aleatòria Gaussiana de mitjana t_i i variància $\sigma_i^2 > 0$, que també és aleatòria. Aleshores, el control del individu i és el temps t_i. El notarem per α_i per a seguir amb la notació del capítol 5.

Les variàbles aleatories X^i poden no tenir les mateixes variàncies ja que els jugadors no tenen perquè venir del mateix lloc, ja que uns poden viure més lluny del punt de la reunió que d'altres. Així, assumirem que per $i \in \{1, ...N\}$, $X^i = \alpha^i + \sigma^i \epsilon^i$ per a una seqüència $(\epsilon^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ de variàbles aleatories independents i idènticament distribuïdes $N(0, 1)$, i una altre seqüència $(\sigma^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes i a més, independent de $(\epsilon^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$. Utilitzem la notació ν per a la distribució de $(\sigma^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$; ν és una mesura de probabilitat en $[0, \infty]$ tal que el seu suport no conté el 0.

Si la reunió està prevista per començar a temps t_0 realment comença a temps t, i si cada individu arriba a temps X^i controlat de manera com hem explicat abans, la funció de cost prevista per cada participant i esta definida per:

$$J^i(\alpha_1, ..., \alpha_N) = \mathbb{E}[a(X^i - t_0)^+ + b(X^i - t)^+ + c(t - X^i)^+], \tag{6.1}$$

per a tres constants positives a, b i c. Utilitzem la notació x^+ per denotar la part positiva max(0,x) d'un nombre real $x \in \mathbb{R}$. Els tres termes de la funció de cost del individu i tenen el següent significat:

- el primer terme $a(X^i - t_0)^+$ representa el cost de reputació per arribar tard a la reunió;
- el terme $b(X^i - t)^+$ quantifica la inconveniència de perdre's el principi de la reunió;

- $c(t - X^i)^+$ representa el cost del temps perdut per arribar d'hora a la reunió i haver d'esperar.

Assumim que el temps en que comença la reunió es decideix algorítmicament computant una funció acordada de la distribució empírica $\bar{\mu}_X^N$ dels temps d'arribada $X = (X^1, ..., X^N)$. En altres paraules, assumim que $t = \tau(\bar{\mu}_X^N)$ per a alguna funció $\tau : \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}$. Podem pensar en el cas de que $\tau(\mu)$ és el $100p$-percent de μ, per a un nombre $p \in [0, 1]$. En altres paraules, la reunió comença quan el 100p-percent dels individus ja han arribat a la reunió. Aquesta és una forma de *quòrum*. Fixem-nos que el fet de que el temps t sigui una funció de la distribució empírica $t = \tau(\bar{\mu}_X^N)$ és la font de les interaccions entre els individus que necessiten tenir en compte les decisions dels altres per a poder decidir la seva pròpia decisió per minimitzar (6.1).

Com era d'esperar, la recerca de l'Equilibri de Nash comença amb el càlcul de la funció millor resposta de cada jugador donada les decisions dels altres jugadors. És a dir, per a cada individu $i \in \{1, ..., N\}$ necessitem assumir que els altres jugadors han realitzat les accions α_{-i}, i solucionar el problema de minimització següent:

$$\inf_{\alpha^i} \mathbb{E}[a(X^i - t_0)^+ + b(X^i - t)^+ + c(t - X^i)^+], \tag{6.2}$$

amb $t = t(X^1, ..., X^N) = \tau(\bar{\mu}_X^N)$.

El problema (6.2) no és fàcil de solucionar, ja que el càlcul de la funció millor resposta ve seguida per el càlcul dels seus punts fixos per a poder identificar l'equilibri de Nash. Per tant, en comptes de buscar l'equilibri exacte per el joc d'un nombre finit de jugadors, ens conformem amb una solució aproximada i intentem solucionar el problema fent tendir el nombre de jugadors cap a infinit. El fonament de la estratègia dels jocs de camp mitjà explicada abans estava parcialment basada en la convergència de les distribucions empíriques cap a una mesura de probabilitat μ. Ara bé, a causa de l'aleatorietat dels temps d'arribada i de la hipòtesi d'independència, la intuïció darrere de l'estratègia es reforça quan N és relativament gran, ja que fent ús de la llei dels grans nombres, les distribucions empíriques $\bar{\mu}_X^N$ haurien de convergir cap a una mesura de probabilitat determinística μ. A més, la sensibilitat de $\bar{\mu}_X^N$ respecte a les perturbacions de α_i d'un sol individu no haurien de afectar el limit, i sembla raonable considerar el problema d'optimització alternatiu obtingut reemplaçant $t = \tau(\bar{\mu}_X^N)$ en (6.2) per $t = \tau(\mu)$. En altres paraules, assumim que el temps d'arribada dels individus tenen una distribució estadística μ, i calculem per a un individu genèric la millor resposta a aquesta distribució. Atès que triem una regla determinada per la funció predeterminada τ de la distribució dels temps d'arribada, de fet, calculem la millor resposta $\hat{\alpha}$ a $t = \tau(\mu)$. El pas del punt fix necessari per determinar l'equilibri de Nash, podria ser imitat buscant un valor d'inici t que conduiria a la millor resposta $\hat{\alpha} = t$.

Proposició 6.1. *Sigui $t \in [t_0, \infty)$ i $X = \alpha + \sigma\epsilon$ on $\sigma \sim \nu$ i $\epsilon \sim$ N(0,1) són variables aleatòries independents. Llavors, per a qualsevol conjunt de constants estrictament* *positives a, b, i c, existeix un únic minimitzador $\hat{\alpha}$:*

$$\hat{\alpha} = \arg\inf_{\alpha} \mathbb{E}[a(X - t_0)^+ + b(X - t)^+ + c(t - X)^+],$$

el cual pot ser identificat com la única solució α de l'equació implícita:

$$aF(\alpha - t_0) + (b + c)F(\alpha - t) = c, \tag{6.3}$$

on F denota la funció de distribució de la variable aleatòria $Z = \sigma\epsilon$.

Demostració. Donem-nos compte que $F(z) = \int \phi(z/s)\nu(ds)$ i que F és una funció contínua estrictament positiva i estrictament creixent complint $\lim_{z\searrow -\infty} F(z) = 0$, $\lim_{z\nearrow\infty} F(z) = 1$, i $1 - F(z) = F(-z)$. D'aquí en endavant, ϕ denota la funció de distribució acumulativa de la distribució gaussiana estàndard N(0,1). El fet que el suport topològic de ν no conté el 0 implica que F és diferenciable i que la seva derivada està uniformament acotada sobre $\mathbb{R}$.

La quantitat per minimitzar és:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[a(X^i - t_0)^+ + b(X^i - t)^+ + c(t - X^i)^+] \\
&\qquad = \mathbb{E}[a(X^i - t_0)^+ + (b + c)(X^i - t)^+ + c(t - X)] \\
&\qquad = a\mathbb{E}[(\alpha - t_0 + Z)^+] + (b + c)\mathbb{E}[(\alpha - t + Z)^+] - c(\alpha - t),
\end{aligned}$$

i així, prenent la derivada respecte α obtenim la condició de primer ordre d'optimització:

$$a\mathbb{P}[\alpha - t_0 + Z > 0] + (b + c)\mathbb{P}[\alpha - t + Z > 0] = c, \tag{6.4}$$

que és exactament (6.3). Donades les propietats de F, aquesta equació té una única solució $\hat{\alpha}$. $\square$

Teorema 6.2. *Assumim que la funció $\tau : \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfà les següents tres propietats:*

1. *$\forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, $\tau(\mu) \geqslant t_0$, la reunió mai comença abans de t_0;*
2. *Monotonicitat: si $\mu, \mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ i si $\mu([0, \alpha]) \leqslant \mu'([0, \alpha])$ per a tot $\alpha \geqslant 0$, llavors $\tau(\mu) \geqslant \tau(\mu')$;*
3. *Sub-additivitat: si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, aleshores per a tot $\alpha \geqslant 0$, $\tau(\mu(\cdot - \alpha)) \leqslant \tau(\mu) + \alpha$;*

Si les constants a, b i c són estrictament positives, existeix un únic punt fix per la funció $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ definit en la proposició anterior com $t = \tau(F(\cdot - \alpha))$. Identifiquem a la funció de distribució acumulada $F(\cdot - \alpha)$ amb la distribució de la variable aleatòria $\alpha + \sigma\epsilon$.

Demostració. Estem buscant un punt fix per la funció $\alpha \mapsto G(\alpha) = \hat{\alpha}$ definida per:

$$\alpha \mapsto F(\cdot - \alpha) \mapsto t = \tau\left(F(\cdot - \alpha)\right) \mapsto \hat{\alpha} = \hat{\alpha}(t),$$

l'últim pas sent donat per la solució de la equació (6.3). Assumint que $x < y$, la monotonicitat en τ ens dóna que:

$$\tau(F(\cdot - x)) \leqslant \tau(F(\cdot - y)),$$

i la suposició de sub-additivitat implica que:

$$\tau(F(\cdot - y)) - \tau(F(\cdot - x)) \leqslant y - x.$$

Utilitzant la forma especial de (6.3), el teorema de la funció implícita implica que quan veiem $\hat{\alpha}$ com a una funció de t, aleshores:

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dt} = \frac{(b+c)F'(\hat{\alpha}(t) - t)}{aF'(\hat{\alpha}(t) - t_0) + (b+c)F'(\hat{\alpha}(t) - t)}$$

que esta acotat superiorment per una constant estrictament més petita que 1 ja que F' és no negativa. Això implica que G és una contracció estricte, i que admet un únic punt fix. $\square$

6.2 Un model d'impacte de preus

Analitzem la interacció entre N comerciants. Cada comerciant i controla el seu inventari X_t^i, és a dir, el nombre d'accions que té a temps t per la seva *taxa de negociació* α_t^i mitjançant una equació diferencial estocàstica de la forma:

$$dX_t^i = \alpha_t^i dt + \sigma^i dW_t^i, \ \ t \in [0, T],$$

on $W^i = (W_t^i)_{t \geqslant 0}$ són moviments brownians 1-dimensionals independents. Les funcions σ^i es suposen constants per simplicitat, i totes iguals al mateix nombre positiu $\sigma > 0$ per raons de simetria. Tots els agents comercien el mateix estoc amb un preu mitjà a temps t denotat per S_t. La quantitat d'efectiu que el comerciant i té a temps t es denota per K_t^i. Evoluciona acord amb:

$$dK_t^i = -[\alpha_t^i S_t + c(\alpha_t^i)]dt,$$

on la funció $\alpha \mapsto c(\alpha)$ és convexa i no negativa complint $c(0) = 0$. La funció c representa *el cost per comerciar a rati* α.

L'impacte real dels preus segueix la següent fòrmula:

$$dS_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} h(\alpha_t^i) dt + \sigma_0 dW_t^0, \ \ t \in [0, T],$$

pels canvis del preu mitjà al llarg del temps. Assumim que $\alpha \mapsto h(\alpha)$ és una funció determinística que tots els comerciants coneixen, que $\sigma_0 > 0$ és una constant i que $W^0 = (W_t^0)_{t \geqslant 0}$ és un moviment brownià independent de la família $(W^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$. Ja que el canvi del preu mitjà és la integral de la funció h respecte la mesura empírica $\hat{\mu}_{\alpha_t}^N$ dels controls α_t^i, veiem que en aquest model, cada participant interacciona amb la distribució empírica dels controls dels demés participants. Denotarem aquesta integral per $\langle h, \hat{\mu}_{\alpha_t}^N \rangle$.

La funció h sovint s'anomena *funció instantànea d'impacte de mercat*. Ja que d'una compra s'espera que augmenti el preu de l'estoc i una venda tendirà a disminuir-lo, la funció h hauria de satisfer $h(\alpha)\alpha \geqslant 0$.

6.2.1 El problema d'optimització del comerciant

La riquesa V_t^i del comerciant i es defineix com la suma del efectiu que té i el valor del inventari com es marca al preu mitjà:

$$V_t^i = K_t^i + X_t^i S_t.$$

Els canvis al llarg del temps de la riquesa V_t^i venen donats per la següent equació:

$$\begin{aligned} dV_t^i &= dK_t^i + X_t^i dS_t + S_t dX_t^i \\ &= [-c(\alpha_t^i) + X_t^i \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} h(\alpha_t^j)]dt + \sigma S_t dW_t^i + \sigma_0 X_t^i dW_t^0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Assumim que els comerciants estan subjectes a una restricció de liquidació en execució modelada per una funció c_X de les accions que poseeixen, i a una restricció de liquidació terminal a venciment T representada per una funció escalar g. Si com de costum denotem per J^i el cost esperat del comerciant i com una funció dels controls de tots els comerciants, llavors tenim:

$$J^i(\alpha^1, \cdots, \alpha^N) = \mathbb{E}\left[\int_0^T c_X(X_t^i)dt + g(X_t^i) - V_T^i\right]. \tag{6.6}$$

Per (6.5), podem escriure la funció de cost esperat del comerciant i com:

$$J^i(\alpha^1, \cdots, \alpha^N) = \mathbb{E}[\int_0^T f(t, X_t^i, \bar{\mu}_{\alpha_t}^N, \alpha_t^i)dt + g(X_T^i)], \tag{6.7}$$

on com abans, utiltizem la notació $\bar{\mu}_{\alpha_t}^N$ per la distribució empírica dels N components de α_t, que és una mesura de probabilitat a l'espai A on els controls hi prenen valor. Aquí, la la funció de cost de funcionament f està definida per:

$$f(t, x, \theta, \alpha) = c(\alpha) + c_X(x) - x\langle h, \theta\rangle, \tag{6.8}$$

per a $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \in \mathcal{P}(A)$, i $\alpha \in A$. Aquest model és un exemple perfecte d'un joc estocàstic de N jugadors amb interacció entre ells mitjançant la distribució empírica dels seus controls. No podrem resoldre el problema del joc finit. Ens acostarem a la seva solució mitjançant l'anàlisi de la teoria de jocs de camp mitjà basada en la intuïció (i dels resultats provats abans) del límit $N \longrightarrow \infty$ d'un gran nombre de jugadors.

Observació 6.3. És important emfatitzar el paper crucial que juga la suposició de que els comerciants són neutrals al risc ja que opten per minimitzar l'expectativa del seu cost. De fet, els termes de variació quadràtica desaparèixen en el càlcul del cost esperat, i així, el soroll comú W^0 i el preu mitjà $\mathbf{S}$ desaparèixen de la expressió del cost esperat individual. El joc seria molt més difícil de solucionar si no fos així.

Ja que el soroll comú ha desaparegut del model, si restringim les taxes de comerç a funcions dels inventaris, o en el cas dels models en que els comerciants no poden observar les accions dels altres jugadors, si assumim que són adaptats a filtracions generades per W^i i són independents del soroll comú, la independència dels xocs aleatòris dW_t^i suggereix que en el límit quan $N \longrightarrow \infty$, la mesura empírica $\bar{\mu}_{\alpha_t}^N$ convergeix a una mesura determinística θ_t sempre i quan les taxes siguin suficientment simètriques. Aquesta mesura determinística θ_t, en equilibri, hauria de ser la distribució de les taxes de comerç òptimes d'un jugador genèric. Hem canviat la notació de μ_t a θ_t per emfatitzar que les interaccions entre els jugadors són ara mitjançant les distribucions empíriques dels controls, d'aquí tenim una mesura de probabilitat en $\mathcal{P}(A)$ en comptes d'una mesura de probabilitat en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Conseqüentment, l'enfocament del joc de camp mitjà en aquest joc és fixar un flux determinístic $\theta = (\theta_t)_{t\geqslant 0}$ de mesures en el espai de controls i solucionar el problema de control òptim següent:

$$\begin{cases} \inf_\alpha \mathbb{E}[\int_0^T f(t, X_t, \theta_t, \alpha_t)dt + g(X_T)] \\ dX_t = \alpha_t dt + \sigma dW_t, t \in [0, T], \end{cases} \tag{6.9}$$

per a un moviment brownià $\mathbf{W}$ donat i després, intentar trobar un flux de mesures $\theta = (\theta_t)_{t \geqslant 0}$ tal que $\theta_t = \mathcal{L}(\hat{\alpha}_t)$ on $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ és un control òptim per el problema (6.9). $\mathcal{L}(\hat{\alpha}_t)$ denota la llei dels controls $\hat{\alpha}_t$.

Per a trobar el control òptim de (6.9) s'utiltizarà la teoria explicada en el Capítol 3 sobre el control òptim estocàstic derivant a l'equació de Hamilton-Jacobi-Bellman. El segon pas, el de punt fix, és més complicat ja que aplica el principi del Màxim de Pontygrain, que se'ns escapa dels coneixaments d'aquest treball. Es pot veure en [3] com ho ho soluciona. Per això diem que desenvoluparem aquest segon exemple però, en canvi, no el resoldrem.

Referències

[1] P. Cardaliaguet. A short course on mean field games. Notes del curs, 2018.

[2] R. Carmona and F. Delarue. *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I*. Springer, 2018.

[3] R. Carmona and F. Delarue. *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications II*. Springer, 2018.

[4] L. M. Chiappara. Juegos de campo medio. Master's thesis, Universidad de Buenos Aires, 2011.

[5] M. Dai. Stochastic control, hjb equations in finance. Notes del curs.

[6] H. de Jesús Argueta Villamar. Análisis matemático. Notes del curs, 2018.

[7] A. C. et al. *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*. Springer, 2003.

[8] L. C. Evans. An introduction to mathematical optimal control theory. Notes del curs: Versió 0.2.

[9] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer, 2006.

[10] J. Goodman. Stochastic calculus notes, lecture 7. Notes del curs, 2007.

[11] G.Pollock. Ito's lemma. Notes del curs.

[12] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Difussion Processes*, volume 2. Elsevier, 1992.

[13] S. Lalley. Brownian motion. Notes del curs.

[14] A. Mcknight. Some basic properties of brownian motion. Curs d'estiu VIGRE, 2009.

[15] L. V. Meléndez. Teoria de juegos y modelos de oligopolio. Notes del curs, 2011.

[16] L. Rincón. Construyendo la integral estocástica de itô. Notes del curs.

[17] C. Shalizi. Stochastic integrals and stochastic differential equations. Notes del curs.

[18] J.-M. L. y P.-L. Lions. Jeux à champ moyen. i. horizon fini et contrôle optimal. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343:619–625, 2006.

[19] J.-M. L. y P.-L. Lions. Jeux à champ moyen. ii. horizon fini et contrôle optimal. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343:679–684, 2006.

[20] J. Yong and X. Y. Zhou. *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer, 1999.