UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Introducción al problema espectral de un operador elíptico

Autor: Helena Garví Casas

Director: Dr. Alberto Enciso
Realitzat a: Departament Anàlisis Matemàtic

Barcelona, 18 de enero de 2019

Abstract

The following work has been done with the intention of creating a base on partial differential equations (PDE) so that it can be used in future years as a basis for other works, in order to cover more complex issues. Likewise, this work wants to show a bit of the famous and relatively recent problem "Can you hear the shape of a drum?"proposed by Mark Kac.

Resumen

El presente trabajo ha sido planteado con la intención de crear una base sobre las ecuaciones diferenciales parciales (PDE) para que pueda usarse en años venideros como base a otros trabajos, para así poder abarcar temas más complejos.
Así mismo este trabajo plantea dar a conocer un poco el famoso y clásico problema "¿Se puede oir la forma de un tambor?"(Can one hear the shape of a drum?) planteada por Mark Kac.

2010 Mathematics Subject Classification. 35J00, 35K00 35P00

Agradecimientos

Este trabajo no sería posible sin la ayuda de mucha gente de a mi alrededor; sin embargo quiero destacar el soporte recibido por parte de mis tutores Alberto Enciso y Maria Jesus Carro, sin los cuales este proyecto no hubiese llegado a buen término.
A Alberto por sus ánimos, consejos, correcciones y facilidades proporcionadas; a Maria Jesus Carro por la presión de hacer un trabajo merecedor de considerarse un TFG y buscar que cada frase sea la que mejor le corresponde a la ocasión.
Quisiera hacer mención al apoyo emocional que me han brindado a lo largo de este trabajo Rafael Arquero, Montserrat Casas, Manel Garví y Rusky; los cuales han estado siempre ahí brindado el apoyo moral necesario para que este trabajo llegase a su fín.
Por último agradecer a todos esos alumnos de la UB que me han ofrecido su apoyo, consejos, y han dedicado parte de su tiempo a oír ensayos sobre la exposición de mi proyecto.

Muchísimas grácias a todos.

Índice

1. Introducción

La teoría espectral tiene un recorrido amplio en el cual, si bien se centra en el estudio de los valores propios(también llamados indistintamente autovalores) y vectores propios(los cuales pueden ser referidos como autofunciones), estableciendo condiciones para que un operador pueda descomponerse en forma de operadores más simples, esta llega a abarcar estructuras de operadores en diversos espacios matemáticos- alguno de los cuales se le ha dedicado un capítulo entero de este proyecto.

De lo más fascinante que se puede ver entre líneas de este trabajo, es la existencia de una estrecha relación entre la teoría espectral y el análisis funcional; debido a que muchas propiedades de los operadores espectrales pueden tratarse desde un punto analítico. Eso permite, por ejemplo, llegar a conclusiones sobre la existencia de soluciones.
Este trabajo tratará de trabajar esta relación a un nivel básico con el fin de mostrar una parte de las posibilidades que ofrece esta ilación.

La teoría espectral es un campo matemático relativamente reciente, y es que fué un concepto introducido por David Hilbert(1862-1943)- matemático reconocido como uno de los más importantes del siglo XIX y principios del siglo XX; y descubridor y desarrollador de una gran cantidad de ideas fundamentales en distintas y amplias ramas de las matemáticas- con la formulación de la teoría del espacio de Hilbert, al cual puso su apellido.
Esta primera versión del teorema espectral estaba enfocada como una versión del teorema de los ejes principales de una elipsoide en dimensión infinita, y tenia un objetivo puramente de interés matemático.
Es casi 20 años después cuando en 1925 se aplican las ecuaciones de Schrödinger, desarrolladas por el físico austriaco Erwin Schrödinger, y se ve como el teorema espectral sirve en el ámbito de la mecánica cuántica para estudiar el espectro atómico.

Es decir se le encuentra una aplicación fortuita en el ámbito de la física a la teoría espectral que formuló Hilbert; de la cual el mismo Hilbet confesó sorprenderse

Después de esta teoría inicial, viendo sus aplicaciones, se empieza a desarrollar y a profundizar en formas de aplicar y expandir esta nueva teoría; siempre teniendo presente, y casi trabajándola de forma paralela, al ámbito de la física y sus posibles necesidades por cubrir y preguntas por resolver.
Uno de los matemáticos que más impactaron con sus contribuciones a la física en esa época fué probablemente Vonn Neumann(1903,1957)- pionero en la aplicación de la teoría de operadores matemáticos en relación al análisis funcional, pues es el primero en crear una teoría axiomática abstracta de los espacios de Hilbert y sus operadores, y personaje clave en el desarollo de la teoría de juegos y la teoría computacional.

Hubo otras teorías que se desarrollaron después en base a los espacios de Hilbert. El estudio más destacado en ese entonces, a partir de la idea de la teoría espectral, sería las álgebras de Banach y los espacios de Banach, desarrollados por Stefan Banach(1892,1945)-famoso por la creación de este espacio y la demostración de diversos teoremas asociados a el.

Otras contribuciones importantes en el ámbito de las PDE a lo largo del siglo XIX y el siglo XX fueron, por mencionar algunas, la derivación de las fórmulas explícitas para las ecuaciones de onda de R.Courant y D.Hilbert.
También sería destacable ya en 1990, la solución de H. Müller para resolver localmente sistemas hiperbólicos de segundo orden con valor, evitando el vértice del cono; y como M. Dossa resolvió ya en 1997 localmente casi-linealmente el problema en el vértice del cono.

1.1. Aplicaciones prácticas

Las ecuaciones diferenciales parciales se usan para estudiar el comportamiento de muchos fenómenos físicos.
Como se verá en el subapartado "Trinidades", la clasificación clásica de estas puede ser de carácter parabólico, hiperbólico o elíptico.
Las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, por ejemplo, son frecuentemente usadas para describir procesos estáticos(se usan para describir estados de equilibrio donde cualquier discontinuidad ha sido ya "suavizada"), mientras que las hiperbólicas y parabólicas son más útiles en descripciones de procesos dinámicos(pues guardan información de como se propagan).

Los operadores elípticos suelen aparecer mucho en ámbitos electroestáticos y en mecánica de medios continuos; haciendo referencia, sobretodo, al potencial(i.e $\triangle\phi = 4\pi\varphi$, donde ϕ hace referencia al potencial y φ es la densidad de carga).

1.2. Escuchando la forma de un tambor

Esta pregunta se hizo famosa en 1966 a raiz del artículo publicado por Mark Kac(1914-1984)- "Can we hear the shape of a drum?"- por el cual se le concedió el premio Lester R. Ford en 1967 y el premio Chauvenet en 1968.

El artículo plantea una pregunta: ¿ Sabiendo las frecuencias en las que suena un tambor, se puede predecir la forma de este?. Donde la idea de que las frecuencias en las que una membrana podia vibrar dependían de la forma de esta, era ya públicamente conocida y evidente.
Kac no sabia si era posible que dos membranas de distinta forma producieran las mismas frecuencias y dejó la pregunta abierta; la cual fué respondida inmediatamente por John Milnor dando un ejemplo en 16 dimensiones donde dos figuras con los mismos autovalores tenian distinta forma.
Sin embargo no fué hasta principios de los noventa que C.Gordon, D. Webb y S. Walpert dieron una respuesta negativa para el caso de dos dimensiones.
A pesar de todo, si salieron respuestas afirmativas a la pregunta siempre y cuando se

establecieran ciertas restricciones. Por ejemplo S.Zelditch dió un resultado positivo imponiendo restricciones fuertes de simetría y analiticidad en las regiones.

Aún así esta pregunta ha generado un sinfín de preguntas abiertas todavía sin resolver.

1.3. Bibliografía

El presente trabajo ha usado como principales libros de referencia el libro de Mohammad Asadzadeh -" An Introduction to the Finite Element Method (FEM) for Differential Equations "- y los capítulos 5 y 6 del libro de Lawrence Evans - " Partial Differential Equations".
La influencia del primero puede verse sobretodo en los capítulos 3 y 4 del proyecto, mientras que parte del capitulo 4 y 5 son influenciados por el libro de Evans.
Otros artículos y fragmentos de libros que han servido para la comprensión y mejor redacción de este trabajo estan mencionados en la bibliografia y en los apartados donde han sido de más relevancia.

2. Objetivos

El objetivo de este TFG será el sentar las bases de las PDE; es decir, estudiar los espacios más frecuentes en los que trabajamos, ver exactamente que son las ecuaciones diferenciales parciales y en concreto las PDE elípticas, estudiar los problemas de estas ecuaciones con condiciones en la frontera y ver la existencia de soluciones a esta clase de problemas.

El orden en el que se ha estructurado el trabajo es de hecho el orden en el que se plantean y resuelven las preguntas marcadas como objetivos:

- ¿Qué son las PDE con las que vamos a trabajar?
- ¿Qué son los espacios de Hilbert?
- ¿Qué son los espacios de Sobolev y que relación tienen con las PDE?
- ¿Qué son las ecuaciones elípticas?
- ¿Cómo encuentro sus soluciones y qué tan buenas son?

Todo esto trabajado con detalle nos permitirá luego trabajar en un problema en concreto, la pregunta de Kac, pero también permitirá a otro estudiante si quiere, usar este trabajo como base para el desarrollo de alguna pregunta más compleja.
El capítulo 6 se puede ver de hecho una recopilación de posibles temas de estudio que tratar en otros proyectos o TFGs.

3. Primeros pasos

El objetivo de este capítulo será asentar las bases que usaremos en los siguientes capítulos así como crear una muy breve introducción al tema de las ecuaciones diferenciales parciales en general. Por esa razón este capítulo podria acoplarse con alguna modificación a otros trabajos de ecuaciones diferenciales parciales

3.1. Preliminares

En esta sección el objetivo será dar una breve introducción a conceptos básicos que engloban el tema de las ecuaciones diferenciales. Algunos de estos conceptos serán usados más adelante y definidos con más rigor en secciones venideras

- Una ecuación diferencial es una relación entre una función incógnita u i sus derivadas

- La solución a la ecuación diferencial es por tanto una función

- Si la función $u(x)$ depende solo de un término independiente ($x \in \mathbb{R}$) entonces a la ecuación diferencial se le llama ecuación diferencial ordinaria (ODE).

  Ejemplo 3.1. Un ejemplo simple de ODE sería el modelo dinámico:

  $$\frac{du}{dt}(t) = \lambda u(t) = f(t)$$

  Donde si f(t)=0 se dice que la ecuación es homogenia.

- Una ecuación diferencial u tiene orden K, $K \geq O$ Donde K viene determinado por la derivada de grado más alto en u presente en la ecuación

- Si la función u posee más de una variable, y la ecuación contiene derivadas con repecto al menos a dos de sus variables, entonces a la ecuación diferencial se le llama ecuación diferencial parcial (PDE).

  Ejemplo 3.2. Un ejemplo básico de PDE sería:

  $$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$$

  El cual claramente es una ecuación homogenia

3.2. Trinidades

En este apartado mencionaremos las clasificaciones que envuelven los procesos de problemas que son resueltos mediante PDE de segundo orden.
En futuras secciones trabajaremos con algunos de ellos más concretamente para trabajar un caso de problema concreto.

Los operadores más usuales en el ámbito de las PDE de segundo orden

- Laplaciano $\triangle_n := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
- Operador de Diffusión $\frac{\partial}{\partial t} - \triangle_n$
- Operador de Alembert $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle_n$

Definimos también el operador de primer orden llamado gradiente ∇_nde la forma:

$$\nabla_n := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}.\right)$$

Observación 3.3. Normalmente la dimensión se puede extraer como información del contexto, por lo que los operadores $\triangle_n$ y ∇_n los escribiremos simplemente como $\triangle$ y ∇ de ahora en adelante.

Clasificación de las PDE de orden 2, en 2 dimensiones

Separamos la clasificación en dos casos:
a) Con coeficientes constantes
Una ecuación de esta forma se puede escribir como:

$$\begin{aligned} Au_{xx}(x,y) + 2Bu_{xy}(x,y) + Cu_{yy}(x,y) + Du_x(x,y) \\ +Eu_y(x,y) + Fu(x,y) + G = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

con los coeficientes reales.
Para proseguir con la clasificación de las ecuaciones de esta forma introducimos el concepto de discriminante $d = AC - B^2$,el cual tomará forma real

Entonces si:

- $d > 0$: la ecuación es elíptica.
- $d = 0$: la ecuación es parabólica
- $d < 0$: la ecuación es hiperbólica

Ejemplo 3.4. Vamos a ver una ecuación de segundo orden, de cada tipo según el discriminante:

Ecuación del potencial:

$$\triangle u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Entonces siguiendo la forma en (3.1) tenemos que $A = C = 1 \quad y \quad B = 0$.
El discriminante por tanto es $d = 1$, con lo cual se trata de una ecuación elíptica

Ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0$$

$$u_t + u_{xx} = 0$$

Siguiendo (3.1) tenemos que $B = C = 0 \quad y \quad A = -1$.
El discriminante por tanto es $d = 0$, con lo cual se trata de una ecuación parabólica

Ecuación de onda:

$$\frac{{}_{2}u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$$

$$u_{tt} + u_{xx} = 0$$

Por lo que se tiene que $A = -1, \quad B = 0 \quad y \quad C = 1$.
El discriminante por tanto es $d = -1$, con lo cual se trata de una ecuación hiperbólica

b) Con coeficientes variables:

En este caso una solo puede aspirar a una clasificación local.
Para comprenderlo, veamos el ejemplo dado a continuación.

Ejemplo 3.5. Considerad la ecuación de para dinámica de gases:

$$L_u(x, y) = yu_{xx} + u_{yy}$$

Donde el coeficiente y no es constante y se cumple que $A = y$, $B = 0$ y $C = 1$. Por tanto $d = AC - B^2 = y$ y en consecuencia, el dominio de elipticidad es $y >$

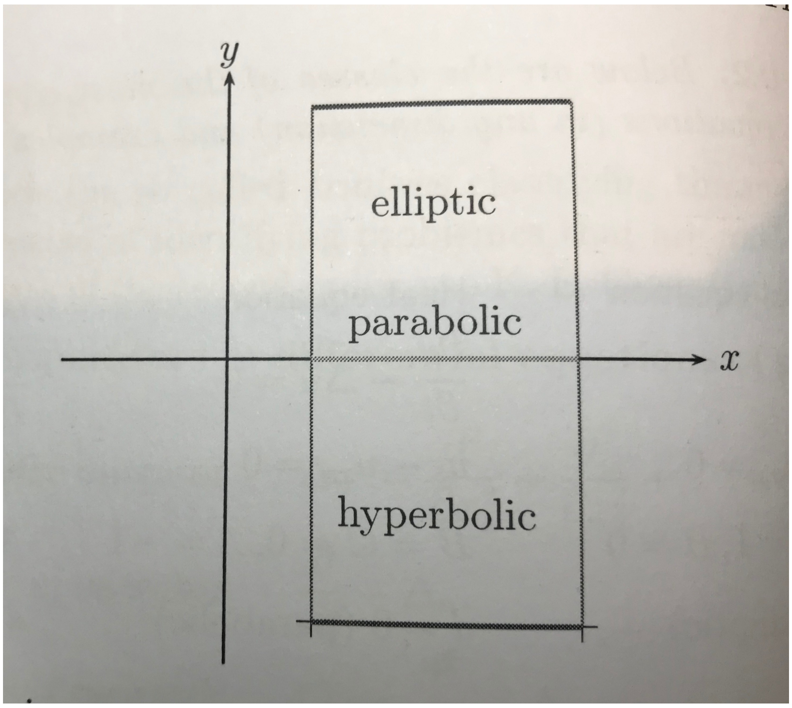

Figura 1: Ecuación de Triconi: ejemplo de clasificación de coeficiente variable

Los 3 tipos de problemas más comunes

- Problemas con valor inicial (IVP)
- Problemas con valor en la frontera (BVP)
- Problemas de valor propio (EVP)

3 tipos de condiciones en la frontera más comunes

- Condición de Dirichlet en la frontera
- Condición de Neumann en la frontera
- Condición de Robin en la frontera

3 tipos de cuestiones en la teoría:

- Existencia: se quiere conocer si al menos existe una solución u a la ecuación proporcionada
- Unicidad: se quiere ver que o existe solo una solución o no existe ninguna; pero en ningún caso dos o mas.
- Estabilidad: Se quiere ver que la solución depende continuamente de la información que proporciona la PDE

3 tipos de cuestiones en la práctica:

- Construcción: Se quiere ver si se puede crear la solución de la ecuación
- Regularidad: Se pretende ver si la solución u es continua diferenciable
- Aproximación: Cuando una solución exacta es imposible de construir, se pretende crear una u' que aproxime a la solución u

3 métodos generales para resolver una ecuación diferencial

- Método de variables separables: la idea es reducir las PDE a unas ODE más simples. también se lo conoce en algunos libros como método de Fourier o de expansión de autofunciones
- Formulación variacional (o débil): La idea es extraer información de la PDE multiplicando la ecuación diferencial por unas funciones de test convenientes. Este método se verá en más detalles en los capítulos siguientes.
  También se puede ver en algunos libros como método de energia.
- Función de Green: proporciona soluciones fundamentales o soluciones para ecuaciones con integral.

3.3. Herramientas matemáticas

En este apartado se definirá algunos espacios y herramientas necesarias para definir una base sobre la que poder trabajar los problemas posteriores

Definición 3.6. *Un conjunto V de funciones o vectores se llama espacio vectorial (o lineal) si $\forall u, v, w \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos:*

- $u + \alpha v \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$

- $u + v = v + u$
- $0 \in V$ *s.t.* $u + 0 = 0 + u = u$
- $\forall u, s(-u) \in V s, t, u + (-u) = 0$
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

Definición 3.7. *El producto escalar(o producto interno) es un operador real en* $V x V$*,* $(u, v)V x V \to \mathbb{R}$ *tal que* $\forall u, v, w \in V$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*,*

- $(u, v) = (u, v)$
- $(u + \alpha v, w) = (u, w) + \alpha(v, w)$
- $(v, v) \geq 0 \forall v \in V$
- $(v, v) = 0 \iff v = 0$

Observación 3.8. A veces el producto escalar (u, v) también puede encontrarse escrito como $< u, v >$

Definición 3.9. *A un espacio vectorial* V *se le llama espacio escalar si* V *tiene asociado el producto escalar* $(. \ , .)$ *definido en* $V \times V$*.*

Observación 3.10. El espacio $C^k((a, b))$ es un ejemplo de espacio escalar con el producto escalar usual asociado:

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx \tag{3.2}$$

Definición 3.11. *Al espacio de todas las funciones integrables cuadradas sobre un dominio dado* Ω *en* $\mathbb{R}^n$ *se le llama* $L_2(\Omega)$*-espacio.*
Si $u \in L_2(\Omega)$*, entonces la norma* L_2 *de* u *asociada con el producto escalar, es definida como:*

$$||u|| := \sqrt{(u, v)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 3.12. *Para un número real* $p \geq 1$*, definimos el espacio* $L_p(\Omega)$ *como:*

$$L_p(\Omega) := \{u : \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\} \tag{3.3}$$

Definición 3.13. *Definimos el espacio* $L_2(\Omega)$ *como:*

$$L_2(\Omega) := \{u : \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty\}$$

Definición 3.14. *Se llama espacio de Hilbert a un espacio vectorial dotado de un producto interior que como espacio métrico es completo.*

Observación 3.15. Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert, es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 3.16. $L_2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 3.17. *Un espacio normado es un espacio de Banach si la métrica asociada a la norma es completa.*

Observación 3.18. $L_p(\Omega)$ es por tanto un espacio de Banach.

Teorema 3.19. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz***

$$|(u, v)| \leq ||u||||v|| \tag{3.4}$$

Definición 3.20. *Sea* $u \in C(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, *definimos el soporte de* u *como el conjunto cerrado:*

$$supp \quad u := \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$$

El conjunto de todas las funciones $u \in C^k(\Omega)$ el soporte del cual es un subconjunto delimitado de Ω se define como $C_0^k(\Omega)$.
Definimos pues $C_0^\infty(\Omega)$ como:

$$C_0^\infty(\Omega) := \cap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega) \tag{3.5}$$

4. Espacios de Sobolev

En este capítulo nos centraremos en los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades; pues estos espacios serán de extrema importancia en capítulos venideros para poder trabajar con las PDE.

4.1. Derivadas débiles

Llamamos funcional a una función que toma funciones como valores de entrada en vez de números. De ese modo las funciones pueden actuar como funcionales lineales de la forma:
Dada una función $u(x)$, la evaluamos en $v(x)$ como (u, v), siendo este el producto escalar tal que $(u, v) = \int u(x)v(x)dx$, como esta especificado en (3.2).
Así se pueden usar conceptos de análisis funcional para estudiar la existencia de soluciones de la ecuación, siendo $u(x)$ la función incógnita.
Así la función $u(x)$ determina un funcional lineal que evalua en funciones de prueba $v(x)$ suficientemente regulares.
Si dotamos el espacio de las funciones con una topologia como la de L_p, explicitada en (3.3), entonces esta operación no solo es lineal, sino que también es continua. A continuación vamos a trabajar esta idea.

Definición 4.1. *LLamamos funciones de prueba(test functions) a las funciones* $v \in C_0^\infty(\Omega)$

Sea entonces $u(x) \in C^1(\Omega)$, si $v \in C_0^\infty(\Omega)$, por la fórmula de la integral por partes se satisface la identidad:

$$-\int_\Omega u(x)v_{x_i}(x)dx = \int_\Omega u_{x_i}(x)v(x)dx, \quad (i = 1, \dots, n)$$

Observar que no ho hay terminos en la frontera, pues v estando en C_0^∞ hace que se anule cerca de la frontera.
Haciendo el caso general, si $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $u \in C^k(\Omega)$, Ω un subconjunto abierno de $\mathbb{R}^n$, entonces tenemos que:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)v(x)dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx, \quad |\alpha| \leq k, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{4.1}$$

que consiste en aplicar la identidad anterior $|\alpha|$ veces.
El siguiente paso consiste pues en preguntarse si esta fórmula seguiria siendo cierta aunque u no fuera $k-$veces diferenciabe.

Observamos que la expresión del lado izquierdo de la igualdad solo tiene sentido si u es $k-$veces diferenciable, mientras que la expresión de la parte derecha solo requiere que u que sea mesurable.
La pregunta lógica que le sigue es ver si existe alguna función ϕ_α localmente integrable en Ω por la cual la fórmula fuese siendo válida. Pudiendo así, en caso de existir substituir la $D^\alpha u$ por la función ϕ_α en la fórmula anterior (4.1).

Definición 4.2. *Sea $w \subset \Omega$ un subconjunto abierto y acotado de Ω con $\overline{w} \subset \Omega$. Supongamos que $u \in L_1(w)$, $\forall w$(es decir u es localmente integrable en Ω). Supongamos también que existe una función ϕ_α localmente integrable en Ω por la cual se cumple:*
$\int_\Omega \phi_\alpha(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx,\ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$
Entonces llamamos a ϕ_α derivada débil de u de orden $|\alpha|$ (α-derivada parcial débil de u), y escribimos $D^\alpha u = \phi_\alpha$

En otras palabras, si nos dan una función u y sucede que existe una función ϕ_α que verifica la fórmula para toda v, entonces $D^\alpha u = \phi_\alpha$ en sentido débil.

Observación 4.3. Una distribución es un funcional lineal y continuo en un espacio de funciones de prueba, es decir de un soporte compacto.

Observación 4.4. Mucha teoría sobre las PDE consiste en encontrar soluciones débiles; en otras palabras, distribuciones cuyas derivadas débiles satisfagan la ecuación diferencial en cuestión.
Luego hay algunos procesos estandares para extender esa solución débil a una solución en sentido clásico, siempre bajo ciertas condiciones.

Ejemplo 4.5. Considerad $u(x) = (1-|x|)_+$ definido en $\mathbb{R}$. Notad que u no es diferenciable en 0 y ± 1, pero es localmente integrable en $\Omega := \mathbb{R}$ y con una posible derivada débil.
Sea ahora $v \in C_0^\infty(\Omega) = C_0^\infty(-\infty,\infty)$, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)v'(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(1-|x|)_+v'(x)dx = \int_{-1}^{1}(1-|x|)v'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0}(1-|x|)v'(x)dx + \int_{0}^{1}(1-|x|)v'(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (1+x)v(x)|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} v(x)dx + (1-x)v(x)|_0^1 + \int_0^1 v(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0}(-1)v(x)dx + \int_0^1 (1)v(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)v(x)dx\end{aligned}$$

donde $\chi(x) = \chi(x)_{(-1,0)} + \chi(x)_{(0,1)}$.
Entonces la función definida a trozos χ es la derivada primera débil de la función continua lineal u, y $\chi = u' = Du$.

Lema 4.6. *Si una función es derivable en sentido clásico, entonces también lo es en sentido débil y ambas derivadas coinciden.*

Lema 4.7. ***Unicidad de derivadas débiles***
Una α-derivada parcial débil de una función localmente integrable u, en caso de existir, está definida de forma única salvo en un conjunto de medida nula.

Demostración 4.8. Supongamos que ϕ_α y $\phi_{\alpha'}$ satisfacen los dos la fórmula:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_\alpha(x)v(x)dx &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)\\ &= \int_\Omega \phi_{\alpha'}(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned}$$

Entonces, por ser ϕ_α y $\phi_{\alpha'}$ localmente integrables y estar dentro de un espacio de medida completa:

$$\int_\Omega (\phi_\alpha - \phi_{\alpha'})vdx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Y por la proposición del principio variacional

$$\phi_\alpha - \phi_{\alpha'} = 0 \quad \square$$

Observación 4.9. La proposición del principio variacional no esta explicitada en este proyecto, porque requiere de una base superior para entenderla, pero puede encontrarse el lema 4.7 y la proposición en las páginas 39-40 de la tesis presentada por Sebasti an Rojas Torres mencionada en la bibliografia.

4.2. Espacios de Sobolev

Definición 4.10. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para un k, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, y un $p \in [1, \infty]$, definimos el espacio de Sobolev de orden k de la forma:*

$$W_p^k(\Omega) \coloneqq \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\} \tag{4.2}$$

Recordemos para ello que $u \in L_p(\Omega)$ si $\{\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$ definida previamente en (3.3)
Los casos en que $p = 1, 2, \infty$ y $k = 1, 2$ son los espacios más usados en análisis funcional; en particular cuando $p = 2$ y $\forall k$, $k > 0$ son denotados de la forma $H^k(\Omega)$.

Concretamente:

$H^1(\Omega) \coloneqq \{u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), j = 1, \ldots, n\}$

$||u||_{H^1(\Omega)} \coloneqq \left(||u||^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} ||\frac{\partial u}{\partial x_j}||^2_{L_2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$

$H^2(\Omega) \coloneqq \{u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), j = 1, \ldots, n, \frac{{}^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(\Omega), i, j = 1, \ldots, n\}$

$||u||_{H^1(\Omega)} \coloneqq \left(||u||^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} ||\frac{\partial u}{\partial x_j}||^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} ||\frac{{}^2 u}{\partial x_i \partial x_j}||^2_{L_2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$

Observación 4.11. Observemos que $H^0(\Omega)$ se corresponde con el espacio $L_2(\Omega)$

Observación 4.12. En general una función puede estar en el espacio de Sobolev y aún así ser discontiua y/o no acotada.

Para poder resolver problemas homogéneos, i.e, con condición de Dirichlet en la frontera, usaremos el espacio de Sobolev $H^1_0(\Omega)$, definido a continuación.

Definición 4.13. *La clausura de $C^\infty_0(\Omega)$ con la norma $||u||_{H^1(\Omega)}$ es el conjunto de todas las $u \in H^1(\Omega)$ tal que u es el límite en $H^1(\Omega)$ de la sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^\infty_0(\Omega)$.*
Este conjunto define un espacio llamado $H^1_0(\Omega)$, el cual para un $\partial\Omega$ suficientemente continuo y derivable se puede definir como:

$$H^1_0(\Omega) \coloneqq \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \quad en \quad \partial\Omega\}$$

Observación 4.14. $H^1_0(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la misma norma que $H^1(\Omega)$ por construcción.

Definición 4.15. *Definimos como $W^{k,p}_0(\Omega)$ la clausura de $C^\infty_0(\Omega)$ en $W^k_p(\Omega)$*

Observación 4.16. En el caso $p = 2$ se suele escribir $W^{k,2}_0(\Omega)$ como $H^k_0(\Omega)$

4.3. Propiedades Elementales

En este apartado miraremos ciertas propiedades de las derivadas débiles que se consideran útiles para secciones posteriores.
Recordemos que aunque algunas de las propiedades que se vean son obvias para funciones continuas y derivables, las funciones en el espacio de Sobolev no tienen por qué ser de esta forma.

Teorema 4.17. ***Propiedades de las derivadas débiles***
Supongamos $u, v \in W^k_p(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Entonces se tiene que:

(a) $D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(\Omega)$ *y* $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u, \forall \alpha, \beta$ *s.t.* $|\alpha| + |\beta| \leq k$

(b) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*,* $\lambda u + \mu v \in W_p^k(\Omega)$ *y* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$*,* $|\alpha| \leq k$

(c) Si V *es un subconjunto abierto de* Ω*, entonces* $u \in W_p^k(V)$

(d) Si $\sigma \in C_0^\infty(\Omega)$*, entonces* $\sigma u \in W_p^k(\Omega)$ *y se tiene que:*
$D^\alpha(\sigma u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \sigma D^{\alpha-\beta} u$ ***(fórmula de Leibniz)***

donde $\binom{\alpha}{\beta}$ *es el número combinatorio.*

Demostración 4.18. Para demostrar (a), primero fijamos $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$. Entonces $D^\phi \in C_C^\infty(\Omega)$, y

$$\begin{aligned}\int_U D^\alpha u D^\beta \phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta} \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx\end{aligned}$$

Así $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ en el sentido débil.
Las proposiciones (b) y (c) son sencillas y sus demostraciones se omiten.
Demostraremos la fórmula de Leibniz por inducción en $|\alpha|$. Supongamos primero que $|\alpha| = 1$. Fijamos arbitrariamente $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_U \zeta D^\alpha \phi dx &= \int_U u D^\alpha(\zeta\phi) - u(D^\alpha \zeta)\phi dx \\ &= -\int_U (\zeta D^\alpha u - u D^\alpha \zeta)\phi dx\end{aligned}$$

Así pues $D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta$, como era requerido. Ahora asumamos que $l < k$ y la fórmula $D^\alpha(\sigma u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \sigma D^{\alpha-\beta} u$ es válida $\forall |\alpha| \leq l$ y todas las funciones ζ. Escojamos un multiindice α con $|\alpha| = l + 1$. Entonces $\alpha = \beta + \gamma$ para algún $|\beta| = l$, $|\gamma| = 1$. Entonces para ϕ,

$$\begin{aligned}\int_U \zeta u D^\alpha \phi dx &= \int_U \zeta u D^\beta (D^\gamma \phi) dx \\ &= (-1)^\beta \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\alpha \zeta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi dx\end{aligned}$$

(por la hipótesis de inducción)

$$= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u) \phi dx$$

(de nuevo por la hipótesis de inducción)

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^\rho \zeta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u] \phi dx$$

(donde $\rho = \sigma + \gamma$)

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U [\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u] \phi dx$$

pues

$$\binom{\beta}{\sigma - \gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma} \qquad \square$$

Proposición 4.19. *Los espacios W_p^k son espacios normados.*

Observación 4.20. La demostración a la preposición la veremos en el apartado 4.28.

Proposición 4.21. *Un espacio $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Proposición 4.22. *Los espacios de Sobolev son espacios completos, y por lo tanto espacios de Banach.*

Demostración 4.23. Queremos ver que $W_p^k(\Omega)$ es completo. Asumamos que $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $W_p^k(\Omega)$. Entonces para cada $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L_P(\Omega)$. Como $L_p(\Omega)$ es completo, existen funciones $u_\alpha \in L_p(\Omega)$ tal que

$$\lim D^\alpha u_m = u_\alpha \qquad \text{en} \quad L_p(\Omega)$$

para cada $|\alpha| \leq k$. En particular,

$$\lim u_m = u_{(0,\ldots,0)} =: u \qquad \text{en} \quad L_p(\Omega)$$

Ahora queremos ver que

$$u \in W_p^k(\Omega), \quad D^\alpha u = u_\alpha \quad (|\alpha| \leq k)$$

Fijemos $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_U uD^\alpha \phi dx &= \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \phi dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi dx\end{aligned} \tag{4.3}$$

Por lo tanto es válido. Ya que $\lim D^\alpha u_m = D^\alpha u$ en $L_P(\Omega)$ para cualquier $|\alpha| \leq k$, vemos que $\lim u_m = u$ en $W_p^k(\Omega)$ $\square$

4.4. Desigualdades básicas

Definición 4.24. *Si p y q son números positivos $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $p + q = pq$; o equivalentemente, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; entonces decimos que p y q son una pareja de exponentes conjugados.*

Teorema 4.25. ***Desigualdad de Minkowski***
Sea p un número positivo tal que $1 < p < \infty$. Para $u, v \in L_p(\Omega)$ tenemos que:

$$||u + v||_{L_p(\Omega)} \leq ||u||_{L_p(\Omega)} + ||v||_{L_p(\Omega)} \tag{4.4}$$

Teorema 4.26. ***Desigualdad de Hölder***
Sea p y q un par de exponentes conjugados, $1 < p, q < \infty$. Para $u \in L_p(\Omega)$ y $v \in L_q(\Omega)$, tenemos que:

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq ||u||_{L_p(\Omega)} + ||v||_{L_q(\Omega)} \tag{4.5}$$

Observación 4.27. La prueba de estos dos teoremas puede encontrarla el lector en el libro de Walter Rudin.

Proposición 4.28. *Los espacios de Sobolev son espacios normados*

Demostración 4.29. Veamos que $||u||_{W_p^k(\Omega)}$ es norma:
Es evidente que:

$$||\lambda u||_{W_p^k(\Omega)} = |\lambda| ||u||_{W_p^k(\Omega)}$$

y que

$$||u||_{W_p^k(\Omega)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0 \quad a.e$$

A continuación para ver la desigualdad triangular, suponemos $u, v \in W_p^k(\Omega)$. Si $1 \leq p \leq \infty$, por la desigualdad de Minkowski en (4.4), tenemos que:

$$||u + v||_{W_p^k(\Omega)} = \big(\sum_{|\alpha \leq k} ||D^\alpha u + D^\alpha v||^p_{L_p(\Omega)} \big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} (||D^\alpha u||_{L_p(\Omega)} + ||D^\alpha v||_{L_p(\Omega)})^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} (||D^\alpha u||_{L_p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(||D^\alpha v||_{L_p(\Omega)})^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= ||u||_{W_p^k(\Omega)} + ||v||_{Wp}^k(\Omega) \qquad \square$$

Teorema 4.30. ***Desigualdad de Poincaré***
Supongamos que u y $|\nabla u|$ son funciones integrables cuadradas en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Entonces, existe una constante C_Ω independiente de u tal que:

$$||u|| \leq C_\Omega ||\nabla u||, \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{4.6}$$

Demostración 4.31.
Caso d=1
Reformularemos el teorema como: Supongamos que u y u' son dos funciones integrables cuadradas en el intervalo $[0, L]$.
Entonces existe una constante C_L, independiente de u(aunque C_L si depende de L) tal que si $u(0) = 0$, entonces:

$$\int_0^L u(x)^2 dx \leq C_L \int_0^L u'(x)^2 dx$$

es decir:

$$||u|| \leq \sqrt{C_L}||u'||. \tag{4.7}$$

Demostraremos pues la reformulación:
Para qualquier $x \in [0, L]$ fijado, podemos escribir:

$$\begin{aligned} u(x) = \int_0^x u'(y)dy &\leq \bigg(\int_0^x |u'(y)|^2 dy\bigg)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^L 1^2 dy\bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{L}\bigg(\int_0^L |u'(y)|^2 dy\bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwardz(3.4) para hacer la última desigualdad.
Elevando al cuadrado cada lado tenemos que:

$$\int_0^L u(x)^2 dx \leq \int_0^L L\bigg(\int_0^L |u'(y)|^2 dy\bigg) dx$$

$$= L_2 \int_0^L |u'(y)|^2 dy$$

Es decir, hemos visto (4.7).

Caso d=n
Sea v una función tal que $\triangle v = 1$ en Ω, y $2|\triangle v| \leq C_\Omega$ en Ω. Construir una función así no es un requisito muy difícil(por ejemplo podemos tomar $v(x,y) = \frac{|x|^2}{2n}$).
Por la fórmula de Green, en (4.54) y usando la condición de frontera, tenemos que:

$$||u||^2 = \int_\Omega u^2 \triangle v = -2 \int_\Omega u(\nabla u \cdot \nabla v) \leq C_\Omega ||u|| ||\nabla u||$$

Es decir, hemos conseguido demostrar que

$$||u|| \leq C_\Omega ||\nabla u|| \qquad \square$$

Observación 4.32. La demostración del caso general puede encontrarse por ejemplo en el libro de Brenner-Scott

Observación 4.33. En el caso $d = 1$, que la constante $C_L = L_2$ significa que la desigualdad de Poincare es válida para cualquier intervalo acotado, pero no se cumple por intervalos no acotados.
En dimensión $\mathbb{R}^d$, tenemos que C_Ω se aproxima a $diam(\Omega)$, por lo que la desigualdad es también válida mientras se cumpla la condición de que Ω esta acotado.

Observación 4.34. Otra forma de expresar la desigualdad para el caso $d = 1$, cuando $u(x_0) \neq 0$, para $x_0 \in [0, L]$, y para simplificar, $L = 1$, es:

$$||u||^2_{L_2(0,1)} \leq 2(u(x_0)^2 + ||u'||^2_{L_2(0,1)}$$

Teorema 4.35. ***Fórmula de Green***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ y $v^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx dy = \int_{\delta\Omega} (\nabla u \cdot n) v ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx dy \tag{4.8}$$

Observación 4.36. El lector, si esta interesado, puede encontrar la prueba fácilmente en cualquier libro de cálculo en varias variables

Teorema 4.37. ***Teorema de la traza***
Sea $u \in W^1_p(\Omega)$, existe entonces una constante C tal que, para cada p, $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que:

$$||u||_{L_p(\partial\Omega)} \leq C ||u||^{1-\frac{1}{p}}_{L_p(\Omega)} ||u||^{\frac{1}{p}}_{W^1_p(\Omega)} \tag{4.9}$$

Este teorema también es frecuentemente encontrado de la forma:
Supongamos Ω es acotado y que $\partial\Omega$ es de clase C^1.
Entonces existe un operador lineal acotado

$$T : W_p^1(\Omega) \to L_p(\partial\Omega)$$

tal que

- $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *si* $u \in W_p^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $||Tu||_{L_p(\partial\Omega)} \leq C||u||_{W_p^1(\Omega)}$

Observación 4.38. En particular cuando $p = 2$, se tiene que:

$$||u||^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq C||u||_{L_2(\Omega)}||u||_{H^1(\Omega)}$$

Teorema 4.39. ***Funciones de traza 0 en*** W_p^1
Supongamos que Ω esta acotado y que su frontera es de clase C^1.
Supongamos también que $u \in W_p^1(\Omega)$. Entonces

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \quad en \quad \partial\Omega$$

4.5. Desigualdades de Sobolev

En este apartado se buscará responder a la pregunta: ¿ Si una función u pertenece a $W_p^1(\Omega)$, automáticamente pertenece entonces a algún otro espacio?
Es decir, en esta sección se quiere encontrar relaciones entre espacios de Sobolev.

Definición 4.40. *Si $1 \leq p < n$, el conjugado de Sobolev de p es*

$$p^* := \frac{np}{n-p}$$

Observación 4.41. Observemos que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, para $p^* > p$.

Teorema 4.42. ***Teorema de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev***
Supongamos $1 \leq p < n$. Entonces existe una constante C, la cual depende únicamente de p y n(es decir, es invariable por u), tal que:

$$||u||_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du||_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{para toda} \quad u \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \tag{4.10}$$

Demostración 4.43. Primero asumamos $p = 1$.

Como u tiene un soporte compacto, para cada $i = 1, \ldots, n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)dy_i$$

y entonces

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| dy_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Consecuentemente

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} (\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| dy_i)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrando esta desigualdad respecto a x_1:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} (\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= (\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} (\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq (\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1)^{\frac{1}{n-1}} (\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad resulta de la desigualdad de Hölder (4.5).
Ahora integrando respecto a x_2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq (\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1; i\neq 2}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

con

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \\
I_i &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_1 \quad (i = 3, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la desigualdad de Hölder (4.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq (\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2)^{\frac{1}{n-1}} (\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dx_2)^{\frac{1}{n-1}} \\
\prod_{i=3}^{n} (\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Continuamos integrando respecto a $x_3, \ldots, x_n$, para eventualmene obtener

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^{n} (\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_n)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= (\int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx)^{\frac{n}{n-1}}\end{aligned}$$

Este es el estimado para $p = 1$.

Analizamos ahora el caso $1 < p < n$:
Aplicamos el (4,53) a $v \coloneqq |u|^{\gamma}$, donde $\gamma > 1$ aún debe ser seleccionado.
Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{R^n} |D|u|^{\gamma}| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Decidimos pues ahora que γ sea tal que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}$.
En otras palabras:

$$\gamma \coloneqq \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$$

Por lo que se tiene en verdad que:

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$

Entonces por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev(4.10), nuestro estimador queda de la forma:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Como queriamos ver. $\square$

Definición 4.44. *Llamamos Eu a la extensión de u en $\mathbb{R}^n$; donde E es un operador lineal acotado tal que:*

$$E : W_p^1(\Omega) \to W_p^1(\mathbb{R}^n) \tag{4.11}$$

El cual cumple que:

- *$Eu = u$ a.e en Ω*
- *Eu tiene un soporte dentro de V*
- $||Eu||_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W_p^1(\Omega)}$

Donde C es una constante la cual depende únicamente de p, Ω y V; donde Ω es acotado y $\partial\Omega$ es de clase C^1 y V es un conjunto abierto y acotado elegido de tal forma que $U \subset\subset V$

Teorema 4.45. ***Estimadores para W_p^1, con $1 \leq p < n$***
Sea Ω un subconjunto acotado y abierto de R^n, y supongamos entonces que $\partial\Omega$ es de clase C^1, asumiendo también que $1 \leq p < n$ y $u \in W_p^1(\Omega)$; entonces se tiene que $u \in L_{p^*}(\Omega)$ cumpliendo que:

$$||u||_{L_p^*(\Omega)} \leq C||u||_{W_p^1(\Omega)}, \tag{4.12}$$

con la constante C dependiendo únicamente de p, n y Ω

Demostración 4.46. Como por hipótesis $\partial\Omega$ es de clase C^1, por el teorema anterior, existe una extensión $Eu = \bar{u} \in W_p^1$ como en (4.11), tal que

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ en } U, \quad \bar{u} \text{ tiene un soporte compacto, y} \\ ||\bar{u}||_{W_1^p(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W_1^p(\Omega)} \end{cases}$$

Como $\bar{u}$ tiene un soporte compacto, $C_0^\infty(\Omega)$ denso en $W_p^1(\Omega)$, existen funciones $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ tal que

$$\lim u_m = \bar{u} \quad \text{ en } W_1^p(\mathbb{R}^n)$$

Ahora, según el teorema anterior, $||u_m - u_l||_{L_{p^*}} \leq C||Du_m - Du_l||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ para todo $l, m \geq 1$. Así

$$\lim u_m = \bar{u} \quad \text{ en } L_{p*(\mathbb{R}^n)}$$

también se cumple.
Puesto que el teorema anterior también implica
$||u_m||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du_m||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$, de los últimos dos límites se deduce que:

$$||\bar{u}||_{L_{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq C||D\bar{u}||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

Entonces, con esta igualdad y la Eu que hemos definido,
demostramos el teorema. $\square$

Teorema 4.47. ***Estimadores para*** $W_0^{1,p}$***, con*** $1 \leq p < n$
Sea Ω *un subconjunto acotado y abierto de* R^n*, y supongamos entonces* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para algún* p*,* $1 \leq p < n$*. Entonces se tiene que:*

$$||u||_{L_q(\Omega)} \leq C||Du||_{L_p(\Omega)}$$

para cada $q \in [1, p^*]$*, con la constante* C *dependiendo únicamente de* p, q, n *y* Ω*.*

Observación 4.48. En particular se tiene para $1 \leq p \leq \infty$ la desigualdad de Poincaré (4.6).

Caso extremo; cuando p=n:

Por el teorema (4.45), y por la definicion de $p*$ -el cual tiende a infinito cuando p tiende a infinito- dada una $u \in W_n^1(\Omega)$, podemos pensar u en $L_\infty(\Omega)$. Aún así eso es falso cuando $n > 1$.
Por ejemplo, replicando el ejercicio en el libro de Evans, si $\Omega = B^0(0,1)$, la función $u = loglog(1 + \frac{1}{|x|})$ pertenece a $W_n^1(\Omega)$, sin embargo no pertenece a $L_\infty(\Omega)$.

Teorema 4.49. ***Desigualdad de Morrey***
Supongamos n$< p \leq \infty$*.*
Entonces existe una constante C*, dependiendo esta solo de* p *y* n*, tal que:*

$$||u||_{C_0^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W_p^1(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$*, donde* $\gamma := 1 - n/p$

Observación 4.50. La demostración del teorema no se reproducirá aquí; sin embargo, el lector interesado puede encontrar la demostración en el capítulo 5 del libro de Evans.

Definición 4.51. *Decimos que* u^* *es una aproximación de una función* u *si* $u = u^*$ *a.e.*

Teorema 4.52. ***Estimadores para*** W_p^1***, con*** $n < p \leq \infty$
Sea Ω *un subconjunto abierto y acotado de* $\mathbb{R}^n$*, y supón* $\partial\Omega$ *es de clase* C^1*.*
Supongamos también que $n < p \leq \infty$ *y que entonces* $u \in W_p^1(\Omega)$*.*
Entonces u *tiene una aproximación de ella, llamémosla* u^**, tal que* $u^* \in C_0^\gamma(\overline{\Omega})$*, para un* $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ *y se cumple que:*

$$||u^*||_{C_0^\gamma(\overline{\Omega})} \leq C||u||_{W_p^1(\Omega)}$$

Donde la constante C *depende únicamente de* p, n *y* Ω*.*

Teorema 4.53. ***Desigualdad general de Sobolev***
Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, con una frontera de clase C^1. Supongamos $u \in W_p^k(\Omega)$.

- *Si*

$$k < \frac{n}{p}$$

entonces $u \in L_q(\Omega)$, donde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

y tenemos el estimador

$$||u||_{L_q(\Omega)} \leq C||u||_{W_p^k(\Omega)}$$

con la constante C dependiendo únicamente de k, p, n y Ω

- *Si*

$$k > \frac{n}{p}$$

entonces $u \in C_\gamma^{k-[\frac{n}{p}]-1}(\Omega)$, donde

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, \quad \text{si} \quad \frac{n}{p} \quad \text{no es un entero} \\ \text{cualquier número positivo} < 1, \ \text{si} \ \frac{n}{p} \ \text{es un entero} \end{cases}$$

Observación 4.54. La demostración del teorema se deja para el lector, que puede encontrarla en el capítulo 5 del libro de Evans(el cual esta anotado en la bibliografia como referencia).

5. Problemas espectrales para operadores elípticos

Esta sección pretende ser la principal y más substanciosa del proyecto.
Es una realidad que las otras secciones tienen el principal objetivo de acercar la comprensión del lector a este capítulo; y si bien hubiese sido posible prescindir de ellas, hubiese negligido la motivación de este trabajo a ser útil en proyectos futuros de PDE, sirviéndoles de base.
Este apartado pues se centrará en la existencia de soluciones de las PDE de segundo orden con operadores elípticos, el cual lleva el nombre del trabajo, y tratará con la famosa pregunta de Mark Kac: ¿Se puede oir la forma de un tambor?.
Para ello veremos importantes teoremas, muchos de los cuales no se demostrarán, pero que serán de suma importancia a la hora de estudiar las soluciones de la ecuación de derivadas parcial(i.e el teorema de Lax-Milgram).

5.1. Ecuaciones elípticas

Definición 5.1. *Sea la ecuación diferencial parcial con valores en la frontera:*

$$\begin{cases} Lu = f & en \quad \Omega \\ u = 0 & en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

Con Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, f es una función dada y u es la función incógnita.
L es en el sistema, el operador de derivadas parciales de segundo orden, el cual toma forma:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \qquad \textit{(forma divergente)} \tag{5.2}$$

o

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \qquad \textit{(forma no divergente)} \tag{5.3}$$

A un problema de este tipo se le dice que tiene condición de Dirichlet en la frontera

Ejemplo 5.2. Un caso práctico es cuando $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i = 0$, $c = 0$.
Donde L es por tanto $-\triangle$

Definición 5.3. *Decimos que un operador diferencial parcial L es elíptico si $\exists\theta > 0$ tal que:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{5.4}$$

para casi todo $x \in \Omega$ y $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observación 5.4. En términos matriciales, que L sea elíptico significa que $\forall x \in \Omega$, la matriz simétrica nxn correspondiente a $A(x) = ((a^{ij}(x)))$ está definida positivamente(i.e $\forall x \neq 0, \quad x^t Ax > 0$), con su menor VAP más grande o igual a 0.

5.2. Soluciones débiles

Una vez nos proporcionan un problema con condición en la frontera como en (5.1), los pasos a seguir son primeramente tratar de determinar una solución débil de u, para luego ya estudiar su deribabilidad u otras propiedades de la función. Para esta sección vamos a suponer ciertas hipótesis:

$$a^{ij}, b^i, c \in L_\infty(\Omega), \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

i que

$$f \in L_2(\Omega)$$

Vamos a tratar de definir entonces una solución débil al problema (5.1).
Sea $Lu = f$, donde de momento suponemos que u es continuamente derivable. Multiplicamos la ecuación por una función test $v \in C^0_\infty(\Omega)$ e integramos ambos lados de la ecuación. Primero de todo observar que podemos aplicar la formula de Green(4.8), y que asociada con la condición en la frontera de Dirichlet $v = 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que:

$$\int_\Omega (\triangle u) v dxdy = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy$$

pasa a simplificarse como:

$$\int_\Omega (\triangle u) v dxdy = - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy \tag{5.5}$$

Entonces aplicando (5.5) a nuestra ecuación, esta pasa a quedar de la forma:

$$\int_\Omega \big(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \big) dx = \int_\Omega fv dx$$

Por aproximación entonces encontramos que esta identidad se cumple $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ y que el resultado final solo tiene sentido si $u \in H^1_0(\Omega)$.

Definición 5.5. *Sea la forma bilineal $B[\quad,\quad]$ asociada con el operador elíptico L en su forma divergente; esta viene definida de la forma:*

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \tag{5.6}$$

para $u, v \in H^1_0(\Omega)$.

Definición 5.6. *L a función incógnita u es una solución débil del problema (5.1) si*

$$B[u,v] = (f,v) \tag{5.7}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, donde $(\quad,\quad)$ denota el producto interno en $L_2(\Omega)$.
A la identidad (5.11) se la llama Variación Funcional (VF) del sistema (5.1).

5.3. Teorema de Lax-Milgram

Queremos ver la existencia de soluciones únicas. Para hacerlo vamos a citar un conjunto de teoremas los cuales vendrán sin demostración; la cual si el lector quiere hacerse con ella, es fácil de encontrar en la mayoria de libros de PDE.
Para facilitar la lectura, a partir de este momento nos vamos a referir como (u,v) a $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ y $\int_0^1 f(x)v(x)dx$ como a $l(v)$.

Proposición 5.7. *Cada funcional lineal y acotado puede ser representado como un producto escalar con una función u dada. Esta u es la única solución al problema de formulación variacional(VF)(encontrar $u \in H_0^1$, tal que $(u,v) = l(v)$)*

Teorema 5.8. ***Teorema de representación de Riesz***
Si V es un espacio de Hilbert con el producto escalar (u,v) y la norma $||u|| = \sqrt{(u,u)}$, y $l(v)$ es un funcional lineal y acotado en V, entonces existe una única $u \in V$ tal que $l(v) = (u,v)$, $\forall v \in V$

Teorema 5.9. ***Teorema de Lax-Milgram***
Supongamos que $l(v)$ es un funcional lineal y acotado en V y que $a(u,v)$ es bilineal acotado y elíptico en V; entonces existe una única $u \in V$, tal que:

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V \tag{5.8}$$

Observación 5.10. Aquí bilineal significa que $a(u,v)$ cumple las mismas propiedades que el producto escalar exceptuando la simetria.

Observación 5.11. En algunos libros se encuentra el teorema escrito de la siguiente forma:
Supongamos a aplicación bilineal en V, para la cual existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que:

$$|a(u,v)| \leq \alpha ||u|| ||v||, \quad u,v \in V \quad y \quad \beta ||u||^2 \leq a(u,u), \quad u \in V$$

Finalmente, sea $l(v)$ un funcional lineal y acotado en V, entonces existe un único elemento $u \in V$ tal que:

$$a(u,v) = l(v)$$

Se ve que las condiciones son exactamente las mismas, si bien al estar en muchos libros explicitadas, se ha decidido volver a transcribirlo para facilitar la comprensión del lector.

5.4. Estimadores de energia

Sea $B[\quad,\quad]$ la forma bilineal definida en (5.7) tal que:

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
Queremos poder verificar las hipótesis del teorema de Lax-Milgram (5.9).

Teorema 5.12. ***Estimadores de energia***
Existen constantes α, β y γ, $\alpha, \beta > 0$ y $\gamma \geq 0$ tales que:

$$|B[u,v]| \leq \alpha ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)} \tag{5.9}$$

y

$$\beta ||u||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma ||u||^2_{L_2(\Omega)} \tag{5.10}$$

Para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración 5.13. Comprovamos que es cierta la primera desigualdad (5.9):

$$|B[u,v]| \leq \sum_{i,j=1}^{n} ||a^{ij}||_{L_\infty} \int_\Omega |Du||Dv| dx +$$
$$\sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L_\infty} \int_\Omega |Du||v| dx + ||c||_{L_\infty} \int_\Omega |u||v| dx$$
$$\leq \alpha ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}$$

para alguna constante α.
Veamos la segunda desigualdad (5.10) :
Por la condicion de elíptico (5.4), tenemos que

$$\theta \int_\Omega |Du|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx = B[u,u] - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u + cu^2 dx$$
$$\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L_\infty} \int_\Omega |Du||u| dx + ||c||_{L_\infty} \int_\Omega u^2 dx \tag{5.11}$$

Por la desigualdad de cauchy con ϵ, vemos que:

$$\int_\Omega |Du||u| dx \leq \epsilon \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_\Omega u^2 dx, \quad \epsilon > 0$$

Poniendo esta cota en (5.11) y eligiendo $\epsilon > 0$ tal que cumpla:

$$\epsilon \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L_\infty} < \frac{\theta}{2}$$

Se tiene que:

$$\frac{\theta}{2}\int_{\Omega}|Du|^2dx \leq B[u,u] + C\int_{\Omega}u^2dx$$

para una constante C.
Por la desigualdad de Poincaré en (4.6) tenemos que

$$||u||_{L_2(\Omega)} \leq C||Du||_{L_2(\Omega)}$$

Con lo que se deduce que

$$\beta||u||^2_{H^1_0(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma||u||^2_{L_2(\Omega)}$$

Para ciertas constantes $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$

Observación 5.14. Si se da el caso con $\gamma > 0$ en los estimadores de energia, entonces $B[\quad,\quad]$ no satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram

Teorema 5.15. ***Primer teorema de existencia de soluciones débiles***
Existe un número $\gamma \geq 0$ tal que para cada

$$\mu \geq \gamma$$

y cada funcion

$$f \in L_2(\Omega)$$

existe una única solución débil $u \in H^1_0(\Omega)$ para el problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & en \quad \Omega \\ u = 0 & en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Demostración 5.16. Tomemos γ del teorema anterior a este (5.12). Sea $\mu \geq \gamma$, y definimos la forma bilineal

$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu(u,v) \quad u,v \in H^1_0(\Omega)$$

donde $(\quad,\quad)$ corresponde al producto interno en $L_2(\Omega)$, y $B[\quad,\quad]$ corresponde al operador

$$L_\mu u := Lu + \mu u$$

Entonces se puede comprobar que $B_\mu[\quad,\quad]$ satisface las condiciones del teorema de Lax-Milgram.
Fijemos ahora $f \in L_2(\Omega)$. Tenemos que $(f,v)_{L_2(\Omega)}$ es un funcional linear acotado en $L_2(\Omega)$ y por lo tanto en $H^1_0(\Omega)$.
Aplicando ahora el teorema de Lax-Milgram, obtenemos una única función $u \in H^1_0(\Omega)$ la cual satisface

$$B_\mu[u,v] = (f,v)_{L_2(\Omega)}$$

$\forall v \in H^1_0(\Omega)$.
u es por lo tanto la única solución débil del sistema. $\square$

Ejemplo 5.17. Verificamos las hipótesis del teorema de Lax-Milgram (5.8) y determinaremos las constantes de las hipótesis, para $I = (0,1)$, $f \in L_2(I)$, $V = H^1(I)$, $||w||_V^2 = ||w||_{L_2(I)}^2 ||w'||_{L_2(I)}^2$, y

$$a(v,w) = \int_I (uw + v'w')dx + v(0)w(0), \quad L(v) = \int_I fvdx$$

Solución:
Para empezar es trivial ver que $a(\quad,\quad)$ es bilineal y que $b(\quad)$ es lineal.
Tenemos entonces que

$$a(v,v) = \int_I (v^2 + (v')^2 dx + v(0)^2 \geq ||v||_V^2$$

donde tenemos la desigualdad de que $a(\quad,\quad)$ es coercitiva, con $c_1 = 1$.
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$|a(v,w)| \leq |\int_I vwdx| + |\int_I v'w'dx| + |v(0)w(0)|$$

$$\leq ||v||_{L_2(I)}||w||_{L_2(I)} + ||v'||_{L_2(I)}||w'||_{L_2(I)} + |v(0)||w(0)|$$

$$\leq \big(||v||_{L_2(I)} + ||v'||_{L_2(I)}\big)\big(||w||_{L_2(I)} + ||w'||_{L_2(I)}\big) + |v(0)||w(0)|$$

$$\leq \sqrt{2}\big(||v||_{L_2(I)} + ||v'||_{L_2(I)}\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}\big(||w||_{L_2(I)} + ||w'||_{L_2(I)}\big)^{\frac{1}{2}} + |v(0)||w(0)|$$

$$\sqrt{2}||v||_V\sqrt{2}||w||_V + |v(0)||w(0)|$$

Ahora tenemos que

$$v(0) = -\int_0^x v'(y)dy + v(x), \quad \in I \tag{5.12}$$

y por el teorema del valor medio para las integrales tenemos que existe $\xi \in I$ tal que $v(\xi) = \int_0^1 v(y)dy$.
Eligiendo $x = \xi$ en (5.12), tenemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3.4):

$$|v(0)| = |-\int_0^\xi v'(y)dy + \int_0^1 v(y)dy|$$

$$\leq \int_0^1 |v'|dy + \int_0^1 |v|dy \leq ||v'||_{L_2(I)} + ||v||_{L_2(I)} \leq \sqrt{2}||v||_V$$

implica que:

$$|v(0)||w(0)| \leq 2||v||_V||w||_V$$

por lo que se tiene

$$|a(u,w)| \leq 2||v||_V||w||_V + 2||v||_V||w||_V = 4||v||_V||w||_V$$

Con que $c_2 = 4$ en la desigualdad de que $a(\quad,\quad)$ es acotada.
Finalmente,

$$|L(v)| = |\int_I fvdx| \leq ||f||_{L_2(I)}||v||_{L_2(I)} \leq ||f||_{L_2(I)}||v||_V$$

tomando $c_3 = ||f||_{L_2(I)}$ para la desigualdad de que $l(\quad)$ es acotada, hemos encontrado todas las constantes para que se cumplan las condiciones del teorema de Lax-Milgram.

Teorema 5.18. ***Alternativa de Fredholm o segundo teorema de existencia de soluciones débiles***
Se cumple que:

$$\begin{cases} \text{para cada} \quad f \in L_2(\Omega) \quad \text{existe una única solución débil } u \text{ para el problema} \\ \begin{cases} Lu = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

o en caso contrario

$$\begin{cases} \text{existe una solución débil } u \neq 0 \text{ para el problema homogenio} \\ \begin{cases} Lu = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

Teorema 5.19. ***Tercer teorema de existencia de soluciones débiles***

- *Existe a lo sumo un conjunto contable $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que el problema con condiciones en la frontera*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

  posee una única solución débil para cada $f \in L_2(\Omega) \iff \lambda \notin \Sigma$.

- *Si Σ es finito, entonces $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, succ creciente con*

$$\lambda_k \to \infty$$

Definición 5.20. *Llamamos a Σ el espectro del operador L.*

Observación 5.21. El problema en la frontera

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una solución no trivial $w \neq 0$ si y solo si, $\lambda \in \Sigma$.
En este caso a λ se le llama el valor propio de L y a w su correspondiente autofunción.

Teorema 5.22. ***Delimitación del inverso***
Si $\lambda \notin \Sigma$, existe una constante C tal que

$$||u||_{L_2(\Omega)} \leq C||f||_{L_2(\Omega)}$$

cuando $f \in L_2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución débil de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f \quad en \quad \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

la constante C depende únicamente de λ, U y los coeficientes del operador L.

5.5. Valores propios y funciones propias

En este capítulo nuestra intención es hacer una breve recopilación de un tema realmente extenso, para poder así extraer las ideas básicas de este para poder trabajar en él.

Teorema 5.23. ***Valores propios de operadores elípticos simétricos***

- *Cada valor propio de L es real*
- *Si repetimos cada valor propio con su correspondiente multiplicidad(finita), se tiene que*

  $$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

  donde

  $$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \ldots$$

  y tal que

  $$\lambda_k \to \infty \quad cuando \quad k \to \infty$$

- *existe una base ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L_2(\Omega)$, donde $w_k \in H_0^1(\Omega)$ es una autofunción correspondiente a λ_k*

  $$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k \quad en \quad \Omega \\ w_k = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

  para $k = 1, 2, \ldots.$ y se tiene que $w_k \in C_\infty(\Omega)$.

Teorema 5.24. ***Ley de Weyl***
Sean $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ los autovalores del laplaciano en un subconjunto abierto continuamente derivable y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sin condiciones para la frontera.
La ley de Weyl dicta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k^{\frac{n}{2}}}{k} = \frac{(2\pi)^n}{|\Omega|\alpha(n)}$$

donde $|\Omega|$ hace referencia al volumen de Ω, (n) denota el volumen de la bola unidad en dimensión n.

Definición 5.25. *Se llama valor propio principal a $\lambda_1 > 0$, es decir al menor autovalor distinto a 0.*

Teorema 5.26. ***Principio variacional para el autovalor principal***

- $\lambda_1 = min\{B[u,u] | u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L_2} = 1\}$
- *Ese mínimo se obtiene para una función w_1, positiva en Ω, que resuelve*
- *Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil cualesquiera de* $\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & en \quad \Omega \\ u = 0 & en \quad \partial\Omega \end{cases}$ *entonces u es un múltiple de w_1.*

Observación 5.27. El tercer punto nos indica que el valor propio principal es siempre simple.
En particular,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots$$

Observación 5.28. Al primer punto, su fórmula es conocida como fórmula de Rayleigh, y es equivalente a la afirmación

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{B[u,u]}{||u||^2_{L_2(\Omega)}}$$

5.6. ¿Se puede oir la forma de un tambor?

Como se dijo anteriormente en la introducción, la respuesta a la pregunta de Mark Kac: "¿Queda determinada la frontera de una área dados sus autovalores ?."es negativa; pero cierta bajo ciertas hipótesis, se pueden encontrar resultados con respuesta afirmativa a la pregunta.
En esta sección hablaremos brevemente de un resultado positivo a la pregunta; es decir trabajaremos en el disco como dominio.

Definición 5.29. *Llamaremos tambor a un dominio en el plano tal que su frontera es fija.*

Es decir, sea Ω un tambor, y sea λ los autovalores en Ω para el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \triangle u = \lambda u & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5.13}$$

La pregunta de Kac queda reformulada a: ¿ Podemos conocer Ω si únicamente sabemos los valores de λ?"

Definición 5.30. *Dos dominios se llaman isoespectrales si tienen los mismos autovalores*

Los autovalores de Dirichlet en un tambor son los tonos fundamentales que este es capaz de producir(los que aparecen como coeficientes de Fourier en la solución de la ecuación de onda con condición en la frontera); es decir, si dos tambores distintos son isospectrales estos serian capaces de producir los mismos tonos.

Teorema 5.31. ***Desigualdad isoperimétrica***
Dado un dominio compacto y regular $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se tiene que

- $$4\pi A(\Omega) \leq Long(\partial\Omega)^2 \tag{5.14}$$

  donde $A(\Omega)$ es el área del dominio, y $Long(\Omega)$ es su longitud.

- $$4\pi A(\Omega) = Long(\partial\Omega)^2 \iff \Omega es\ un\ disco \tag{5.15}$$

Definición 5.32. *La traza del calor se define como: Tr* $e^{-\,t\,(-\triangle)} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\,t\,\lambda_n}$

Teorema 5.33. ***Resultado positivo a la pregunta de Kac***
Cualquier dominio plano con el mismo espectro de Dirichlet que un disco, tiene que ser congruente a este.

El resultado procede del hecho de que los discos son los únicos minimizadores de la desigualdad isoperimétrica y de que el área del dominio, así como su longitud, son obtenidos a partir de las asimptotas a corto plazo de la traza del calor.
Para ver como se obtiene el resultado, el lector puede hacer referencia al artículo de A. Spivak y Z. Schuss mencionados en la bibliografia, el cual desarrolla el proceso.

Observación 5.34. A parte del disco, el único dominio del plano que se conoce está determinado por su espectro sin ninguna simetria ni condiciones analíticas previas, es la familia de óvalos con cuatro vértices cuyos cocientes isoperimétricos(los cuales miden la proporcion del área de la curva a la área de un círculo con el mismo perímetro) son muy próximos a los de un disco.

6. Otras preguntas

La pregunta de Mark Karc inevitablemente creó otras cuestiones.
Bajo que condiciones esa respuesta es afirmativa, es solo la punta del iceberg de la infinidad de preguntas que derivaron de ellas.
En esta sección queremos introducir algunas pocas de ellas para tratar de vislumbrar su alcance.

6.1. Escuchando la forma de un hilo

Supongamos que nuestro tambor es un hilo, i.e, una cuerda de guitarra de longitud l. La vibración causada al pellizcarla, con sus extremos fijos, se escribe como la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = c^2 \frac{{}^2 F}{\partial t^2}$$

Separando variables suponiendo que F se puede expresar de la forma $F(x,t) = f(x)g(t)$, y escalando el tiempo por tal de que $c = 1$, tenemos como resultado

$$f''(x)g(t) = f(x)g''(t)$$

Dividiendo ambos lados por $f(x)g(t)$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Como los extremos de la cuerda estan fijados, tenemos las condiciones iniciales $f(0) = f(l) = 0$.
Se tiene pues que las soluciones son:

$$f_k(x) = sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \text{con} \quad \lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L_2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Queremos ver pues si podemos oir la "forma"de la cuerda.
La forma del hilo es solo su longitud, por la que la pregunta queda reformulada a: ¿Sabiendo el conjunto de todos los autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, podemos conocer la longitud de la cuerda?
La respuesta a este caso es positiva, y solo tenemos que conocer el autovalor principal λ_1, pues se tiene que

$$l = \sqrt{\frac{\pi^2}{\lambda_1}}$$

En dimensiones mayores también hay resultados positivos, algunos ejemplos son:

Teorema 6.1. *Si dos paralelogramos tienen el mismo espectro, estos son congruentes.*
Si dos trapecios agudos(i.e. tienen dos ángulos agudos adyacentes) tienen el mismo espectro, entonces son congruentes

También es posible de determinar la simetria. El siguiente teorema trata de mostrarlo

Teorema 6.2. *Si un polígono con n lados es isoespectro a un polígono regular de n lados, entonces estos son congruentes.*

Es decir, entre todos los polígonos regulares de n lados uno puede escuchar la simetria del polígono regular correspondiente.
Todos los teoremas tratados hasta ahora en esta sección tratan con la idea de que conocemos todo el conjunto de autovalores, es decir todos los tonos que produce el objeto.
Otras preguntas que se han hecho es, si solo conocemos una parte de esos autovalores, que podemos llegar a determinar.
Una conjetura famosa basada en esta idea es la siguiente.

Conjetura de Pólya-Szego
Para cada $n \geq 5$, el polígono regular de n lados minimiza únicamente λ_1 entre todos los polígonos de n lados con una área fija.

Observación 6.3. El caso $n = 3, 4$ es un teorema provado por Pólya y Szego.

Esta conjetura sin embargo aún no ha estado provada, pero existe una versión más débil de esta que si ha podido ser demostrada.

Teorema 6.4. ***Teorema débil de Pólya-Szego***
Para cada $n \leq 3$ existe N, el cual depende únicamente de n tal que si los primeros N valores propios de un polinomio convexo de n lados coincide con los de un polinomio regular de n lados, entonces este es congruente al polinomio regular.

7. Polígonos regulares

A pesar de la posibilidad de añadir la sección que viene a continuación dentro de la sección anterior, se ha creido conveniente asignarle un espacio personal por el hecho de ser mi tutor en el proyecto uno de los autores de este resultado.
El artículo "Spectral determination of semi-regular polygons", autores de los cuales son Alberto Enciso y Javier Gómez-Serrano,fue enviado por Cornell University durante el año 2017.
Como el artículo provee un resultado y una demostración, se hablará aquí solo del resultado, y se deja al lector la posibilidad de acceder a la demostración mediante un link en la bibliografia. La idea es pues, hacer un breve mapa mental del artículo.

Definición 7.1. *Un polígono se llama semi-regular si es circunscrito y todos sus ángulos, excepto quizás uno, son iguales; y en ese caso, el ángulo distinto a los demás es mayor al resto.*

Observación 7.2. Todos los polígonos regulares son polígonos semi-regulares

Alberto y Javi quieren demostrar entonces que para un dominio convexo derivablemente continuo a trozos, los Polígonos semi-regulares estan determinados por su espectro.
Dice así:

Teorema 7.3. *Si es un dominio convexo acotado, derivablemente continuo a trozos, con quizás posibles esquinas rectas, el cual su espectro de Dirichet o Neumann coincide con el de un polígono semi-regular de n lados, P_n; entonces Ω es congruente a P_n.*

Observación 7.4. El motivo de que pueda tener esquinas rectas es debido a que el cuarto coeficiente asimptótico de la traza del calor aún no ha sido calculado para dominios con esquinas no rectas

La prueba de este resultado consta de dos partes:

- Cualquier polígono con el mismo espectro que un polígono semi-regular, es congruente a él
- Cualquier dominio con el mismo espectro que un polígono, tiene que ser un polígono

Una vez se demuestran los dos puntos, se puede pasar a demostrar el teorema 7.3.

Observación 7.5. El teorema, al demostrarse por polígonos semi-regulares, muestra que los polígonos regulares también están determinados por su espectro de Neumann o Dirichlet en los dominios convexos, acotados y derivablemente continuos a trozos.

8. Conclusiones

Este trabajo presenta una base bastante compacta sobre las ecuaciones diferenciales parciales; lo cual me ha permitido poder llegar a los resultados de los apartados 5.6, 6 y 7. El apartado 6 concretamente puede verse como una recopilación de resultados los cuales pueden estudiarse para extender el proyecto.

En esta base hemos podido ver las respuestas a las preguntas planteadas al inicio del trabajo en los objetivos; así como otras preguntas que nos han ido surgiendo. Hemos visto por ejemplo, algunos de los espacios de Hilbert más usuales en la resolución de problemas con condición en la frontera, alguna de las formas de encontrar una posible solución al problema y distintos estimadores con los que trabajar.

El resultado final ha sido una mejor comprensión de las PDE, la certeza de lo amplio que es este ámbito, así como otras preguntas de las que indagar su respuesta.
Partiendo de que inicié el trabajo con una base nula sobre las ecuaciones diferenciales parciales, y más concretamente, de las ecuaciones diferenciales, el resultado ha sido positivo en el sentido de conocimientos adquiridos.

Indirectamente también ha permitido desarrollar más mi habilidad con el Latex, escribir de forma ordenada y narrativa y sobretodo aprender a trabajar en un proyecto con dos directores; presentar plazos e ir cumpliendo objetivos para llegar al resultado final deseado.

Referencias

[1] Enciso A., Gómez S., J *Spectral determination of semi-regular polygons*; 2017, `https://arxiv.org/abs/1709.05960`

[2] Torres, S. R.*Aplicación del método variacional a los problemas de Dirichlet i Neumann*; 2013, Tesis para la Universidad Pontificia Javeriana `https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/14572/RojasTorresSebastian2013.pdf?sequence=1`, 2000.

[3] Escudero, L. A, *Escuchando la forma de un triángulo*, Tesis de Licenciatura de la Universidad de Buenos Aires; 2018

[4] Asadzadeh, M: *An introduction to the finite element method(FEM) for differential equations*; 2016

[5] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis*; Mc Graw-Hill, 3rd edition, 1976

[6] Brenner, S.; Scott, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*; Springer-Verlag, New York, 1994

[7] Lawrence C., Evans: *Partial Differential Equations*, Second Edition, American Mathematical Society; Providence, Rhode Island