

Invariants en dinàmica complexa*

NÚRIA FAGELLA RABIONET

Resum Usant com a fil conductor el mètode de Newton per a polinomis complexos, aquesta lliçó pretén mostrar els diferents comportaments que poden tenir les òrbites d'un sistema dinàmic generat per la iteració d'una funció analítica del pla complex. Veurem com aquestes òrbites s'agrupen en conjunts invariants amb dinàmiques molt variades, separats per fronteres fractals amb propietats remarcables, tant topològiques com dinàmiques.

Paraules clau: mètode de Newton, conjunt de Julia, conjunt de Fatou, component estable, òrbita, iteració.

Classificació MSC2000: 37F10, 30D05.

1 El mètode de Newton: els orígens

El mètode de Newton és probablement el mètode iteratiu més conegut i antic que pot trobar-se a les matemàtiques. Aquest mètode serveix per calcular solucions aproximades reals o complexes d'una equació

$$f(z) = 0,$$

on f ha de ser una funció derivable i z és una variable real o complexa. Aleshores construïm la funció

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

i observem que $f(\alpha) = 0$ si, i només si, $N_f(\alpha) = \alpha$.

L'estudi *local* del mètode de Newton data de l'any 1689, quan Joseph Raphson va demostrar el teorema següent.

* Aquest article correspon a la lliçó inaugural del curs 2007-2008 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Agraïm al degà d'aquesta Facultat l'autorització per a publicar-lo.

1 TEOREMA (ESTUDI LOCAL. RAPHSON, 1689) Si $f(\alpha) = 0$ i z_0 és prou proper a α , llavors la successió

$$z_0, z_1 = N_f(z_0), z_2 = N_f(z_1), \dots, z_n = N_f(z_{n-1}), \dots$$

convergeix en α .

El punt z_0 s'anomena una *condició inicial* i la successió $\{z_n = N_f^n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es coneix com l'*òrbita de z_0* . Així, doncs, el teorema ens diu que qualsevol arrel α de f té un entorn de condicions inicials l'òrbita de les quals convergeix cap a α , o en altres paraules, per les quals el mètode «funciona» (vegeu la figura 1).

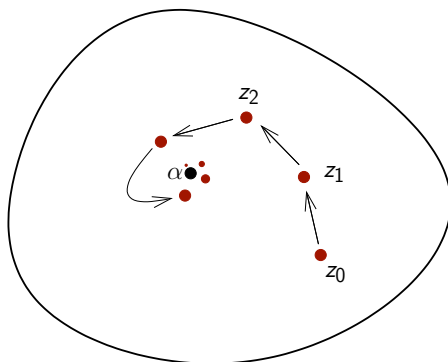


FIGURA 1: Tota arrel α de f té un entorn de condicions inicials per a les quals el mètode de Newton funciona, és a dir, l'òrbita de z_0 convergeix en α .

Ernst Schröder l'any 1870 [9, 10] i, independentment, Arthur Cayley l'any 1879 [2, 3] van ser els primers a plantejar-se un *estudi global* del mètode de Newton. Les preguntes que es van plantejar eren del caire següent:

- Si f té diverses arrels, quines condicions inicials tenen òrbites que convergeixen en l'una o l'altra?
- Totes les condicions inicials donen lloc a òrbites convergents? Convergeixen aquestes sempre cap a alguna de les arrels de f o bé hi ha altres comportaments possibles?

Schröder i Cayley no van arribar gaire lluny en els seus objectius, però així va néixer el que avui coneixem com la *dinàmica complexa*, que és l'estudi local i global dels sistemes dinàmics generats per la *iteració de funcions analítiques* al pla complex.

En aquest punt ens serà útil definir el concepte següent.

2 DEFINICIÓ Donada una arrel α de la funció f , definim la seva *conca d'atracció* com el conjunt de condicions inicials del pla tals que la seva òrbita pel mètode

de Newton convergeix en α , és a dir,

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid N_f^n(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha\}.$$

Tots dos matemàtics van solucionar el problema per al cas en què f és un polinomi de grau 2, demostrant que cada una de les dues arrels de f posseeix un semiplà de condicions inicials, les òrbites de les quals convergeixen cap a l'arrel en qüestió. Aquestes dues conques d'atracció estan separades per la recta mediatriu entre les dues arrels, formada per condicions inicials amb òrbites que no convergeixen en cap de les dues arrels, és a dir, condicions inicials per a les quals el mètode «falla» (vegeu la figura 2).

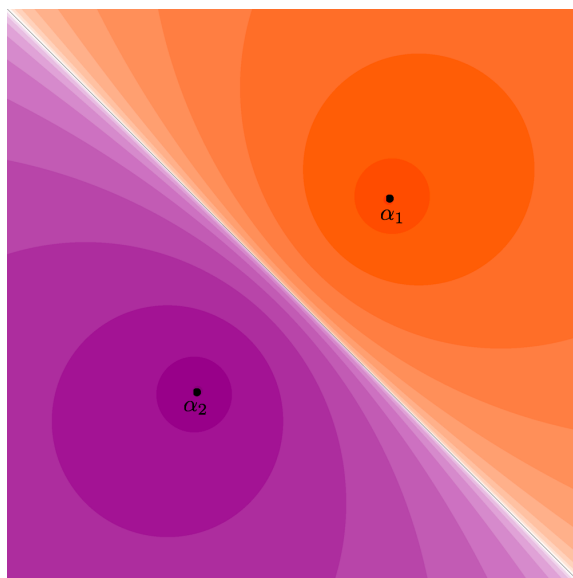


FIGURA 2: El mètode de Newton per a un polinomi P de grau 2 amb arrels α_1 i α_2 . En taronja, es veu la conca d'atracció de α_1 i en morat la de α_2 . La recta que les separa està formada per condicions inicials per a les quals el mètode «falla».

Però Cayley va rendir-se pel que fa al grau 3. En el seu article de 1880 [4] va deixar escrit:

[...] La divisió [del pla en conques diferents] es fa sense dificultat en el cas quadràtic; però en el cas següent, el de l'equació cúbica, no és en absolut obvi quina és la divisió; i l'autor no ha aconseguit trobar-la [...].

La raó per la qual Cayley va encallar-se és que, sense saber-ho, s'estava enfrontant a una fractal, sense cap eina per veure-la! A la figura 3 es poden veure les tres conques d'atracció del mètode de Newton per a un polinomi

cúbic, cada una amb un color diferent. Aquest pla de condicions inicials també s'anomena *pla dinàmic* o *pla de fases*.

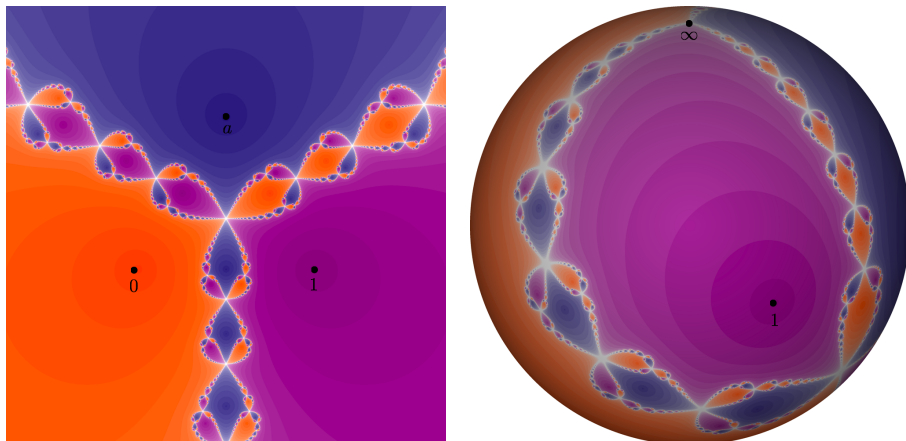


FIGURA 3: Espai dinàmic del mètode de Newton $N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ del polinomi $P(z) = z(z-1)(z-a)$, amb $a = 0,5 + i \sin(\pi/3)$. Les condicions inicials es poden veure al pla complex i també a l'esfera de Riemann (la compactificació de \mathbb{C} afegint-hi el punt de l'infinit, que correspon al pol nord). Les tres conques d'atracció de les tres arrels de P es mostren en colors diferents.

No va ser fins a l'any 1918 que Pierre Fatou i Gaston Julia no van emprendre un estudi més sistemàtic [6, 7, 8] de la iteració de les funcions analítiques, i van establir les bases de la teoria moderna, del que avui coneixem com a *sistemes dinàmics complexos* o *dinàmica complexa*.

2 Sistemes dinàmics complexos: objectius

Deixarem de banda de moment el mètode de Newton, i ens centrarem en la iteració de funcions més generals que, per simplificar, demanarem que siguin holomorfes a l'esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o, equivalentment, funcions racionals $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, on P i Q són polinomis sense arrels comunes. Donada, doncs, una funció $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ racional, el nostre objectiu és estudiar el comportament asimptòtic de les òrbites

$$z_0, z_1 = F(z_0), \dots, z_n = F^n(z_0), \dots$$

en funció de la condició inicial z_0 .

Entre les òrbites més senzilles que podem trobar remarquem les següents (vegeu la figura 4):

Punts fixos: punts z_0 tals que $F(z_0) = z_0$.

Punts periòdics de període $p > 1$: punts z_0 tals que $F^p(z_0) = z_0$ i $F^k(z_0) \neq z_0$ per a cap $k < p$.

Punts preperiòdics: punts z_0 que no són periòdics, però tals que $F^k(z_0)$ sí que ho és per a alguna $k > 0$.

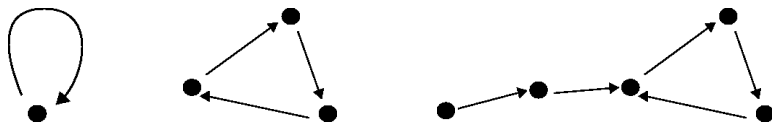


FIGURA 4: D'esquerra a dreta, un punt fix, una òrbita periòdica de període $p = 3$ i una òrbita preperiòdica.

Les òrbites mencionades són totes finites. Una òrbita infinita pot convergir per exemple a l'infinit, o en un punt fix, o pot no convergir enlloc. Fent un petit abús de llenguatge, direm que l'òrbita de z *convergeix en una òrbita periòdica*, diguem $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$, si $F^{np}(z)$ tendeix a z_i per a algun $0 \leq i < p$, quan $n \rightarrow \infty$. Observem que l'exponent és un múltiple de p , on p és la llargada de l'òrbita periòdica.

En estudiar el pla de fases de F , l'objectiu més bàsic és el de classificar les condicions inicials segons el comportament asimptòtic de les seves òrbites. Aquest pot ser un problema molt senzill en alguns casos i, en canvi, en d'altres pot ser de solució molt difícil o, a hores d'ara, impossible.

2.1 Conjunts invariants

Una manera de simplificar el problema que acabem de plantejar és buscar el que anomenem *conjunts invariants*. La definició d'aquests conjunts és la següent.

3 DEFINICIÓ Diem que $A \in \mathbb{C}$ és un conjunt

- *positivament invariant*, si $F(A) \subset A$;
- *negativament invariant*, si $F^{-1}(A) \subset A$, on entenem que $F^{-1}(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid F(z) \in A\}$;
- *totalment invariant*, si ho és positivament i negativament, o en altres paraules, si $F^{-1}(A) = A = F(A)$.

Els conjunts invariants són interessants en moltes àrees de les matemàtiques però en particular en qualsevol sistema dinàmic (real o complex, i de qualsevol dimensió), ja que permeten descompondre el sistema en *subsistemes* dinàmics més petits i potser més senzills d'estudiar. En sistemes dinàmics de \mathbb{R}^n trobem multitud d'exemples com ara varietats invariants, integrals primeres, etc. que moltes vegades permeten reduir la dimensió del sistema que s'estudia.

Els conjunts invariants més petits són les mateixes òrbites. En efecte, el que anomenem *l'òrbita positiva* de z_0 i denotem per

$$\mathcal{O}^+(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_n = F^n(z_0), \dots\}$$

és positivament invariant. *L'òrbita gran* de z_0

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid F^p(z) = F^q(z_0) \text{ per a } p, q \in \mathbb{N}\}$$

és totalment invariant (vegeu la figura 5).

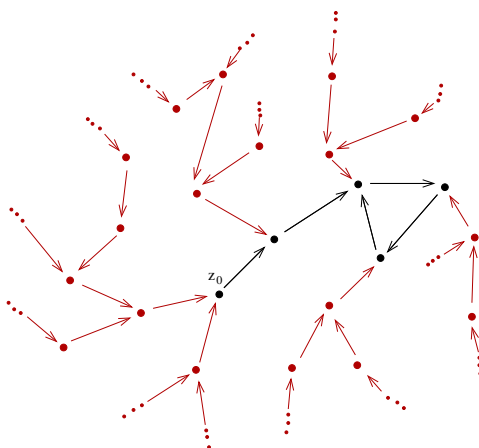


FIGURA 5: L'òrbita gran d'un punt z_0 , $\mathcal{O}(z_0)$ consisteix en el conjunt de punts «emparentats» amb z_0 a través d'iterats de F . En negre veiem l'òrbita positiva de z_0 , que en aquest cas és finita. Observem que si z pertany a $\mathcal{O}(z_0)$, llavors $\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(z_0)$.

Retornem a continuació a examinar el sistema dinàmic generat pel mètode de Newton, i considerem quins són els conjunts invariants que podem observar-hi.

Recordem que si α és una arrel d'un polinomi P , l'estudi local del mètode de Newton ens deia que α està equipada amb un entorn U de condicions inicials, les òrbites de les quals convergeixen en α . Amb la terminologia anterior, això és dir que U pertany a la conca d'atracció de α i, de fet, aquesta consisteix en totes les antiimatges (de tots els ordres) de U . És a dir:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid N_P^n(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha\} = \bigcup_{n \geq 1} N_P^{-n}(U).$$

Observem que U és un conjunt positivament invariant, mentre que la conca sencera $\mathcal{A}(\alpha)$ és totalment invariant. En general, una conca d'atracció $\mathcal{A}(\alpha)$ és un conjunt

- *obert*, per continuïtat;
- *totalment invariant*, per definició, ja que està format per òrbites grans, i aquestes són totalment invariants;
- format possiblement per *infinites components connexes*. En té un de principal $\mathcal{A}^*(\alpha)$ que és el que conté α .

A la figura 6, hi podem veure el pla dinàmic del mètode de Newton d'un altre polinomi cúbic. Hi observem tres conques d'atracció en tres colors diferents. Aparentment (i de fet és així) una d'aquestes està formada per un únic component connex, mentre que les altres en tenen infinits.

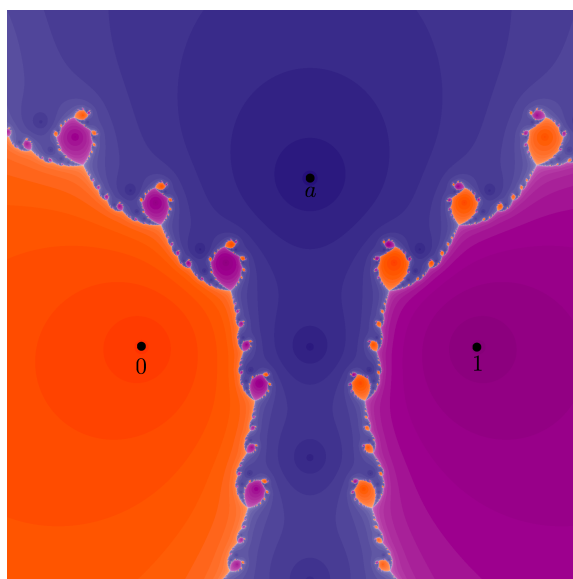


FIGURA 6: Pla dinàmic del mètode de Newton N_P per a $P(z) = z(z - 1)(z - a)$ amb $a = \frac{1}{2}(1 + i)$. Veiem tres conques d'atracció totalment invariants. Una d'aquestes, la de a , està formada per un únic component connex, mentre que les altres dues en tenen infinits.

Observem en aquest punt que, tot i haver definit el concepte de *conca d'atracció* pel mètode de Newton, aquest és fàcilment generalitzable a altres funcions. Donada una funció racional F amb un punt fix (o periòdic) que atregui les òrbites d'un entorn (els punts amb aquesta propietat s'anomenen *atractors*), la conca d'atracció d'aquest és, anàlogament, el conjunt d'òrbites que hi convergeixen. Així definida, qualsevol conca d'atracció té totes les propietats mencionades: és oberta, totalment invariant i possiblement formada per infinits components connexos.

No és difícil comprovar que si un conjunt A és totalment invariant, també han de ser-ho el seu complementari i la seva frontera. Per això, doncs, obtenim

el segon exemple de conjunts invariants: si $\mathcal{A}(\alpha)$ és una conca d'atracció, la seva frontera també és totalment invariant. Per definició, aquest conjunt és tancat i no pot tenir interior.

3 La partició bàsica: els conjunts de Julia i Fatou

Hi ha una diferència fonamental entre els dos exemples de conjunts totalment invariants que hem presentat: les conques d'atracció formen part del que anomenem *conjunt de Fatou* o *conjunt estable*, mentre que les seves fronteres pertanyen al *conjunt de Julia* o *conjunt caòtic*. Vegem ara com es defineixen aquests dos conjunts, en més d'un aspecte complementaris l'un de l'altre. Necessitem prèviament el concepte de *normalitat* de la família d'iterats en un cert obert del pla.

4 DEFINICIÓ Sigui $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ analítica. Diem que la família d'iterats $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és normal en un obert $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ si tota subsuccessió de $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ té una parcial que convergeix uniformement en compactes de U (potser a ∞).

Informalment, la família d'iterats és normal en un obert quan tots els punts de l'obert es comporten de manera similar sota la iteració de F , per la qual cosa relacionem aquest concepte amb el d'*estabilitat*.

5 DEFINICIÓ El *conjunt de Fatou*, $\mathcal{F}(F)$, es defineix com el conjunt de punts $z \in \hat{\mathbb{C}}$ per als quals la família d'iterats $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és normal en algun entorn U de z . El seu complementari l'anomenem *conjunt de Julia*. És a dir, $\mathcal{J}(F) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(F)$ és el conjunt de punts per als quals la família d'iterats no és normal en cap dels seus entorns.

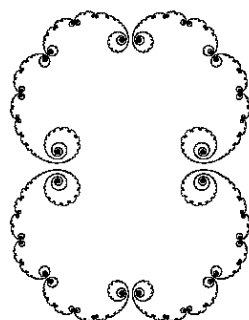
A partir de la mateixa definició, no és difícil deduir que qualsevol conca d'atracció d'un punt fix α és del conjunt de Fatou, ja que la mateixa successió d'iterats de F convergeix uniformement en compactes a la funció constant $G(z) \equiv \alpha$. La frontera de $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha)$, en canvi, pertany al conjunt de Julia. Vegem-ne una petita demostració.

PROVA En efecte, si z_0 pertany a $\partial \mathcal{A}$, qualsevol entorn U de z_0 conté punts de \mathcal{A} i del seu complementari (com ell mateix, per exemple, ja que \mathcal{A} és oberta). Qualsevol funció límit G de qualsevol parcial d'iterats hauria de valer α per a tots els $z \in U \cap \mathcal{A}$, que és un obert. Atès que G és analítica (teorema de Weierstrass), el principi de prolongació analítica ens diria que G ha de ser idènticament igual a α a tot U , la qual cosa contradia el fet que cap parcial d'iterats de z_0 pot convergir en α , perquè no pertany a la conca d'atracció. \square

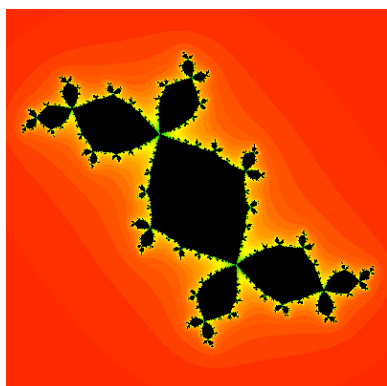
A partir de la mateixa definició podem veure que els conjunts de Julia i de Fatou són totalment invariants, ja que el concepte de *normalitat* és un concepte asimptòtic, que s'associa a les òrbites grans. Veurem tot seguit que aquests dos conjunts són completament oposats, tant en l'aspecte topològic com en l'aspecte dinàmic. Per aquest motiu diem que formen la *partició bàsica* de l'espai de fases. La figura 7 mostra plans de fase de diferents funcions on podem veure exemples de conjunts de Fatou i de Julia.



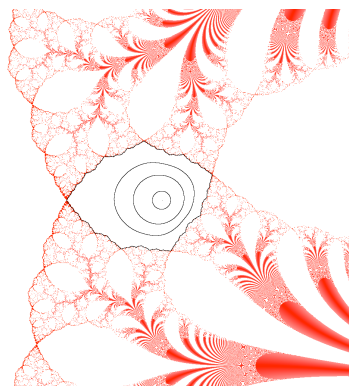
a) $F(z) = z^2 + i$



b) $F(z) = z^2 + 0,25$



c) $F(z) = z^2 - 0,122\dots + 0,744\dots i$



d) $F(z) = e^{2\pi i \theta} z e^z, \theta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

FIGURA 7: a) En vermell veiem la conca d'atracció de l'infinit que coincideix amb $\mathcal{F}(F)$. El conjunt de Julia (groc) és una *dendrita* (tancat, connex i sense interior). b) En blanc veiem $\mathcal{F}(F) = \mathcal{A}(\infty)$. El conjunt de Julia (negre) és un conjunt de Cantor. c) En vermell veiem $\mathcal{A}(\infty)$ i en negre el seu complementari K , conegut com el «conill d'en Douady». La frontera comuna a aquests dos conjunts és $J(F)$. Els punts de l'interior de K formen part de la conca d'atracció d'una òrbita periòdica de període 3. d) En vermell veiem $J(F)$, que consisteix en un conjunt de «filaments». En blanc veiem $\mathcal{F}(F)$ i en negre algunes de les seves òrbites, totes acumulant-se en corbes invariants, on F és bàsicament una rotació d'angle irracional.

3.1 Propietats topològiques del conjunt de Julia

Tot seguit enunciem diverses propietats de caire topològic del conjunt de Julia d'una funció racional. Algunes són senzilles de demostrar, mentre que d'altres requereixen demostracions fora de l'abast d'aquest text.

6 PROPOSICIÓ Sigui $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funció holomorfa i sigui J el seu conjunt de Julia. Llavors,

- J és tancat i no buit.
- $\text{int}(J) = \emptyset$ o bé $J = \hat{\mathbb{C}}$.
- J és «autosemblant», és a dir, en totes les seves parts trobem còpies a escala del conjunt original.

Hi ha exemples de conjunts de Julia topològicament molt diferents, com hem pogut començar a veure a la figura 7. Com a petita mostra, mencionem que existeixen exemples de diferents conjunts de Julia que són:

- connexos, disconnexos o conjunts de Cantor;
- localment connexos i no localment connexos;
- amb mesura de Lebesgue zero i amb mesura positiva (però sense interior!);
- amb dimensió de Hausdorff $1 + t$ per a tot $t \in (0, 1]$.

Val a dir que l'existència de funcions racionals amb conjunts de Julia de mesura positiva, però sense interior, ha estat una conjectura molt disputada durant més de vint anys, que ha estat resolta positivament molt recentment per X. Buff i A. Cheritat (2005). Aquests autors han demostrat que fins i tot dins les famílies més senzilles (els polinomis de grau dos) poden trobar-se conjunts de Julia amb aquesta propietat.

3.2 Propietats dinàmiques dels conjunts de Julia

Gairebé podríem dir que, de manera natural, la dinàmica sobre el conjunt de Julia és inestable, ja que és frontera entre els diferents comportaments estables i, per tant, ha de reflectir la tensió entre aquests. De fet, les òrbites del conjunt de Julia presenten totes les propietats que habitualment s'associen al concepte de *caos*. Sense entrar a definir què significa que una funció sigui caòtica (que, de fet, només és una qüestió de conveni), enumerarem unes quantes d'aquestes característiques, sense demostració. La dinàmica de les òrbites del conjunt de Julia exhibeix, doncs, les propietats següents.

$F|_J$ és **sensible respecte a condicions inicials**. Intuïtivament significa que òrbites que comencen molt a prop, a la llarga sempre acaben separant-se. Formalment escriuríem que existeix $k > 0$ tal que per a tot $z_0 \in J$ i per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $z_1 \in J$ amb $|z_0 - z_1| < \varepsilon$ i existeix $n > 0$ tal que $|f^n(z_0) - f^n(z_1)| \geq k$.

Les **òrbites (grans) són denses a tot J** . Per a tot punt $z \in J$, l'òrbita gran de z és densa a J . De fet, l'òrbita negativa $\mathcal{O}^-(z)$ (és a dir, el conjunt d'antiimatges de z) també és densa a J .

F és **transitiva a J** . Informalment, això significa que F «barreja» totes les òrbites. Formalment, per a tot U, V entorns de punts de J es té que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ per a alguna n .

Els punts periòdics (no atractors) de F són densos a J . En altres paraules, trobem punts periòdics tan a prop com vulguem de qualsevol punt de J . Observem que no poden ser atractors, ja que aquests formen part del conjunt estable.

Notem que de les propietats anteriors, per exemple de la segona o de la tercera, es dedueix el fet següent.

7 PROPOSICIÓ *J no pot tenir cap subconjunt propi totalment invariant. És a dir, no existeix cap subconjunt $A \subset J$ no buit, totalment invariant tal que $\bar{A} \neq J$.*

En altres paraules, podem dir que el conjunt de Julia ja no es pot descompondre més en el sentit dinàmic, és a dir, en parts significatives totalment invariants. Aquest no és el cas del seu complementari, com veurem a continuació.

4 El conjunt de Fatou o estable

Recordem que el conjunt de Fatou \mathcal{F} , el complementari de J , és obert i conté totes les condicions inicials amb òrbites de comportament asimptòtic estable. De fet, ja n'hem vist un exemple: la conca d'atracció d'un punt fix atractor sempre és part de \mathcal{F} . La condició perquè un punt fix sigui atractor és que $|F'(z_0)| < 1$, la qual cosa pot comprovar-se fàcilment observant els primers termes del desenvolupament de Taylor de F a prop de z_0 .

És natural preguntar-se, però, quins *altres comportaments* són possibles per a les òrbites de \mathcal{F} . Tot seguit en veiem alguns exemples.

EXEMPLE 1. Conca d'atracció periòdica.

Les òrbites «convergeixen» en una òrbita periòdica atractora, en el sentit definit anteriorment. Generalitzant el cas del punt fix, donada una òrbita periòdica $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ de període p , la condició necessària i suficient perquè sigui atractora és que el seu *multiplicador* tingui mòdul menor que 1, és a dir:

$$|\lambda| = |(F^p)'(z_i)| = |F'(z_0)F'(z_1) \cdots F'(z_{p-1})| < 1.$$

A la figura 8 veiem el pla dinàmic de la funció $F(z) = z^2 - 1$.

L'òrbita $\{0, -1\}$ és una òrbita de període 2 atractora. Aquesta està envoltada d'una *conca immediata* d'atracció que correspondria als dos components de color groc (oberts) que la contenen. La unió de totes les antiimatges d'aquests forma la totalitat de la conca dibuixada en groc. El seu complementari, dibuixat en tons de vermell, és una altra conca d'atracció, en aquest cas del punt de l'infinit. La frontera comuna entre les dues conques, ambdues del conjunt estable, és precisament el conjunt de Julia (en negre).

EXEMPLE 2. Conca parabòlica.

Un altre exemple de comportament estable el trobem en considerar el que anomenem *conques* (d'atracció) *parabòliques*. Són molt semblants a les anteriors, però amb la diferència que els punts «límit» (fixos o periòdics) es troben a

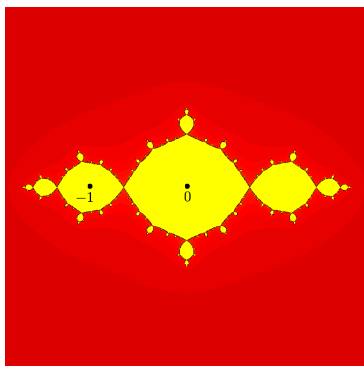


FIGURA 8: El pla de fases de $F(z) = z^2 - 1$. L'òrbita $\{0, -1\}$ és 2-periòdica i atractora. En groc es veu la seva conca d'atracció, part del conjunt de Fatou. En vermell es veu la conca d'atracció del punt de l'infinit. La frontera comuna de totes dues conques és el conjunt de Julia.

la frontera de la conca, i no al seu interior. Com abans, també disposem d'una condició necessària i suficient perquè una òrbita periòdica $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ de període p sigui *parabòlica*, i aquesta és que el seu multiplicador tingui mòdul exactament 1, amb la propietat

$$|\lambda| = |(F^p)'(z_0)| = e^{2\pi i p/q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (p, q) = 1.$$

A la figura 9 podem veure el pla de fases del polinomi $F(z) = z^2 + 0,25$, el qual té un punt fix a $z_0 = 1/2$, amb multiplicador $\lambda = 1$.

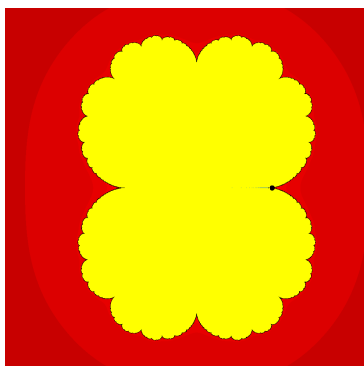


FIGURA 9: Pla de fases de $F(z) = z^2 + 0,25$, per al qual $z_0 = 1/2$ és un punt fix parabòlic. En groc es mostra la seva conca parabòlica, que té z_0 a la frontera (dreta). En vermell, la conca d'atracció de l'infinit.

A la figura veiem en groc la seva conca d'atracció parabòlica, en aquest cas formada per un sol component connex. Tots els punts d'aquest color

tenen òrbites que convergeixen en z_0 , situat a la frontera. Com abans, en vermell veiem la conca d'atracció de l'infinít i, en negre, la frontera comuna que correspon al conjunt de Julia (en aquest cas una corba de Jordan, no diferenciable en cap dels seus punts).

EXEMPLE 3. Disc de rotació.

Un exemple molt diferent de component estable és el que s'anomena *disc de rotació*, també conegut com a *disc de Siegel* en honor a Carl Siegel (1896-1981), que va donar condicions suficients per a la seva existència.

El que es coneix com un *disc de rotació* fix per F és un obert U conformement equivalent al disc unitat, que conté un punt fix z_0 al seu interior, i tal que $F|_U$ és conformement conjugada a una rotació rígida $\mathcal{R}_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z$ al disc unitat, on $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Això vol dir que existeix un homeomorfisme conforme $h : U \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $h \circ F = \mathcal{R}_\theta \circ h$.

Això significa que les òrbites dins de U viuen sobre corbes invariants i, sobre aquestes, es comporten com una rotació irracional, és a dir, s'acumulen de manera densa sobre tota la corba.

A la figura 10 es mostra el pla de fases de la funció $F(z) = \lambda z(1 - z)$, on $\lambda = e^{2\pi i \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

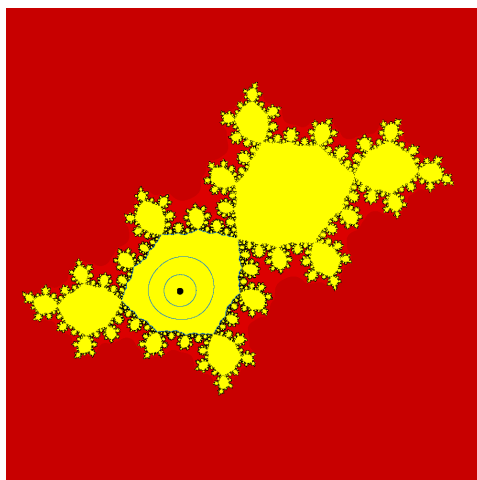


FIGURA 10: Pla de fases de $F(z) = \lambda z(1 - z)$, on $\lambda = e^{2\pi i \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. En groc es mostra un disc fix de Siegel al voltant de $z = 0$ i totes les seves antiimatges. En vermell, la conca d'atracció de l'infinít.

El punt en negre correspon a un punt fix i les corbes al seu voltant són algunes de les corbes invariants. L'òrbita de qualsevol dels seus punts és densa sobre la corba. El component groc que conté aquests elements és el disc fix de Siegel U . Tots els altres components del mateix color són antiimatges de U i juntes formen l'òrbita gran de U , que és totalment invariant. En vermell

tornem a veure la conca d'atracció de l'infinit i en negre la frontera comuna que és el conjunt de Julia. En aquest cas també disposem de condicions suficients que assegurin l'existència d'aquest tipus de components estables. Siegel ja va demostrar que si z_0 és un punt fix amb multiplicador $\lambda = F'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$, amb θ un nombre irracional diofàntic, aleshores sempre hi ha un disc de Siegel al voltant de z_0 . Més recentment (1971) aquesta condició ha estat millorada per Brjuno [1], en demostrar el mateix fet per a tots els nombres θ del conjunt de Brjuno, un conjunt d'irracionals que inclou els nombres diofàntics. Trobar condicions necessàries per a l'existència de discs de rotació és un problema més difícil que depèn de la família concreta que s'estudia. De fet, en la majoria dels casos, aquest és encara un problema obert.

EXEMPLE 4. Anell de rotació. Aquest és un exemple molt semblant a l'anterior, amb l'única diferència que el domini és conformement equivalent a un anell, en comptes de ser-ho a un disc. En aquest anell, tenim el mateix fenomen anterior, és a dir, que la funció és conjugada a una rotació irracional i, per tant, totes les òrbites són denses sobre corbes invariants. Aquests anells també es coneixen com a *anells de Herman* en honor a Michele Herman (1942–2000), que va trobar-ne els primers exemples.

Els anells de rotació es diferencien dels exemples anteriors en el fet que no estan associats a cap òrbita periòdica. A causa d'això no tenim cap criteri senzill del qual es pugui deduir la seva existència per a una funció concreta.

Com a conseqüència del principi del mòdul màxim, es té que tot anell de rotació requereix la presència d'un pol de la funció. Per això mai no podem trobar anells de rotació als plans de fase dels polinomis o de les funcions enteres en general.

A la figura 11 podem veure el pla de fases de la funció racional $F(z) = z^2 \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, per a un cert valor de a escollit convenientment. En gris es mostra un anell de Herman, dins del qual hi ha dibuixada una de les seves corbes invariants. Tots els components blancs en forma d'anell són antiimatges (de diferents ordres) de l'anell principal. Els components blancs isomorfs a discs formen part de la conca de l'infinit i de la conca de zero, que en aquest cas són, tant el zero com l'infinit, punts fixos atractors.

EXEMPLE 5. Domini parabòlic a l'infinit.

Un *domini parabòlic a l'infinit* fix és un obert U del pla tal que totes les seves òrbites convergeixen cap al punt de l'infinit, que ha de ser una singularitat essencial. Aquests components també es coneixen amb el nom de *dominis de Baker* en honor a Noel Baker (1932–2001), que va fer-ne els primers estudis exhaustius.

Per definició, doncs, aquests components estables només existeixen en funcions transcendents (és a dir, amb singularitats essencials). Tornem a trobar-nos amb un tipus de components que no està associat tampoc a cap òrbita periòdica.

A la figura 12 veiem el pla de fases de $F(z) = z + a + b \sin(z)$ amb a i b escollits adequadament perquè el conjunt de Fatou tingui un domini de Baker,

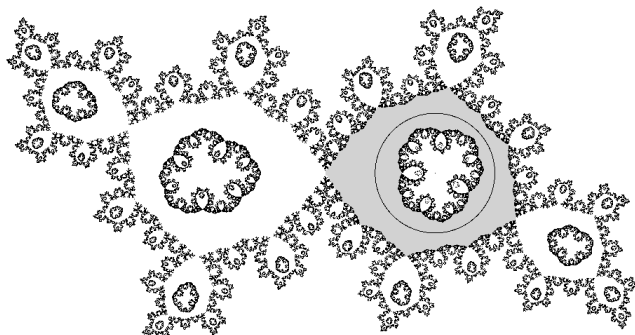


FIGURA 11: Pla de fases de $F(z) = z^2 \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ per a un cert valor de a escollit convenientment. En gris es mostra un anell de Herman, dins del qual hi ha dibuixada una de les seves corbes invariants.

que es mostra en vermell. Les òrbites dins d'aquest conjunt marxen cap a la dreta tendint cap a l'infinit, amb una velocitat essencialment lineal. En blau poden veure's les antiimatges del domini de Baker.

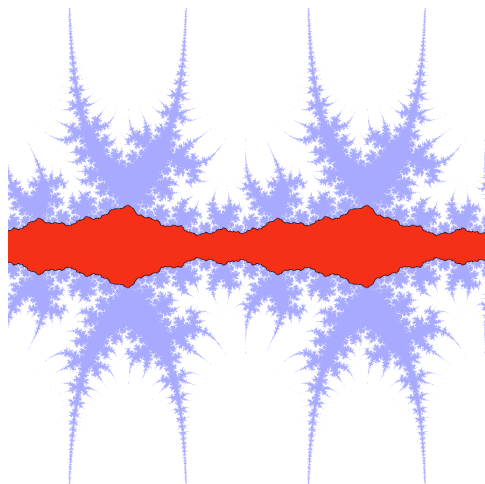


FIGURA 12: Pla de fases de $F(z) = z + a + b \sin(z)$ amb a i b escollits adequadament perquè el conjunt de Fatou tingui un domini de Baker, que es mostra en vermell. Les òrbites dins d'aquest domini tendeixen cap a l'infinit amb velocitat lineal. En blau veiem totes les antiimatges del domini de Baker.

EXEMPLE 6. Dominis errants.

Un *domini errant* és un obert U tal que $F^n(U) \cap F^m(U) = \emptyset$ per a tot $n, m \in \mathbb{N}$. És a dir, els dominis errants no són components periòdics ni preperiòdics.

A la figura 13 veiem el pla dinàmic de la funció transcendent $F(z) = z + 2\pi + \sin(z)$. Els components centrals de color gris, centrats als punts $z_k = (2k + 1)\pi$, corresponen a una òrbita de dominis errants. Els més petits són antiimatges d'aquests.

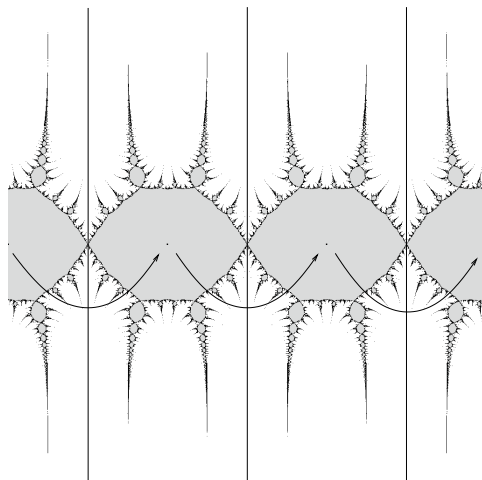


FIGURA 13: Pla dinàmic de la funció transcendent $F(z) = z + 2\pi + \sin(z)$. Els components centrals de color gris corresponen a una òrbita de dominis errants.

Fatou i Julia van demostrar que, en teoria, aquests dominis eren possibles. No va ser fins molt més tard, l'any 1985, que Dennis Sullivan va demostrar el celebrat teorema que estableix que les funcions racionals no poden tenir dominis errants. Aquest resultat va obrir una nova era de la dinàmica complexa, no per l'enunciat en si mateix, sinó per les tècniques utilitzades en la seva demostració, molt innovadores en aquell moment.

8 TEOREMA ([11]) *Les funcions racionals $F(z) = \frac{Q_1(z)}{Q_2(z)}$, on Q_1, Q_2 són polinomis) no tenen dominis errants.*

4.1 Classificació de components estables

Els exemples anteriors ens han mostrat una varietat de components del conjunt de Fatou en què cada un exhibeix un comportament diferent dels iterats de la funció. Fatou, el 1918, no tenia la possibilitat de «veure» aquests exemples, però tot i així va ser capaç de demostrar el següent teorema de classificació.

9 TEOREMA (FATOU, 1918) *Sigui U un component connex periòdic de $\mathcal{F}(F)$, on F és una funció racional a $\hat{\mathbb{C}}$. Llavors U és part d'una conca d'atracció, d'una conca parabòlica, d'un disc de rotació o d'un anell de rotació.*

Si F és transcendent, U també pot ser un domini parabòlic a l'infinit. Si U no és periòdic, llavors U és una antiimatge d'algun dels anteriors o bé pot ser un domini errant.

Fatou va trobar exemples de la majoria d'aquests comportaments, i va conjecturar que probablement els dominis de rotació no existien. No va ser fins molts anys després que se'n va poder demostrar l'existència, tal com hem mencionat anteriorment, així com la no-existència dels dominis errants per a funcions racionals.

4.2 El mètode de Newton revisat

Haviem vist que, donat un polinomi $P(z)$ amb arrels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, cada una està equipada amb la seva conca d'atracció pel mètode de Newton $F(z) = N_P(z)$, consistent en totes les condicions inicials amb òrbites que convergeixen cap a l'arrel en qüestió. En efecte, és senzill comprovar que $N_P(\alpha_i) = \alpha_i$ i que $N'_P(\alpha_i) = 0$, si α_i és una arrel simple, però que, en tot cas, $|N'_P(\alpha_i)| < 1$. Això ens diu que les arrels de P són punts fixos atractors de N_P i que, per tant, tenen una conca d'atracció.

Denotarem per \mathcal{A} la unió de totes les conques, és a dir:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(\alpha_k).$$

Però en el pla dinàmic de N_P (l'espai de condicions inicials), què més hi ha a part de les conques d'atracció? Quines condicions inicials tenen òrbites que *NO convergeixen* en cap de les arrels de P ? Aquestes condicions inicials les anomenarem *dolentes*, en el sentit que no funcionen per al propòsit del mètode de Newton.

Clarament, totes les condicions inicials del conjunt de Julia són dolentes. Però en la majoria de casos,¹ la mesura del conjunt de Julia és zero i, per tant, la probabilitat de començar a l'atzar amb una condició inicial de J és nul·la.

Però, a més, també són dolentes totes les condicions inicials a

$$\mathcal{F}(N_P) \setminus \mathcal{A},$$

que és un *obert*, i no necessàriament buit. Com podem saber si conté punts?

Per a un polinomi fixat és senzill fer un experiment numèric que ens indiqui si aquest conjunt és no buit. Tal com hem fet en imatges anteriors, a la figura 14 hem pintat punts d'una xarxa de diferents colors en funció de si les seves òrbites tendeixen a una arrel o a una altra (i amb més o menys intensitat segons la velocitat amb què ho facin), o bé en negre si no convergeixen en cap d'aquestes.

Podem esperar no veure en negre les condicions inicials del conjunt de Julia, ja que en tenir mesura zero, és segur que no seran a la xarxa de càlcul. Tot i

¹ Podria quantificar-se dient que el conjunt de Julia del mètode de Newton té mesura zero gairebé per a tot polinomi de grau $k > 0$ fixat, considerant l'espai de funcions i la mesura adequada.

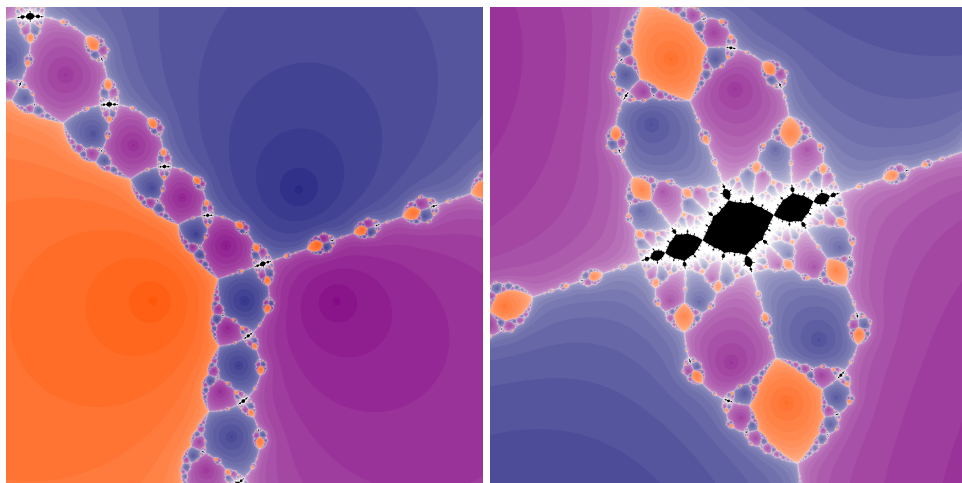


FIGURA 14: Esquerra: el pla de fases del mètode de Newton del polinomi $P(z) = z(z - 1)(z - a)$ amb a escollit adequadament. Dreta: una ampliació en què veiem un dels conjunts de condicions inicials dolentes. En aquest cas concret, es tracta de la conca d'atracció d'una òrbita periòdica de període 2.

així, les veurem gairebé blanques gràcies a la gradació dels colors, ja que com més propera sigui una condició inicial a \mathcal{J} més tardarà la seva òrbita a apropar-se a l'arrel corresponent. A les figures 3 i 6, podem veure que no s'observa cap conjunt de color negre, la qual cosa ens indica que probablement els dos polinomis escollits en aquests casos no tenen condicions inicials dolentes per al mètode de Newton, a part de les del conjunt de Julia. Però un cas diferent el veiem amb el polinomi de la figura 14, en què és òbvia l'existència de conjunts amb mesura positiva que no pertanyen a cap conca d'atracció. Amb qualsevol ampliació, aquests conjunts de condicions inicials dolentes es fan perfectament visibles.

Una vegada constatada la seva existència, és natural que ens preguntem quants d'aquests conjunts podem trobar en un pla dinàmic. La resposta probable és que n'hi hagi infinits, atès que normalment els components estables tenen infinites antiimatges. Però seria interessant saber quantes podem trobar-ne de «diferents». A l'exemple de la figura 14 veiem una infinitat de «taques» negres. Agafant-ne algunes a l'atzar i amb uns quants càlculs podríem comprovar que totes corresponen a una conca d'atracció d'una òrbita periòdica de període 2. En altres paraules, sembla que totes les condicions inicials dolentes, a part de les de \mathcal{J} , tenen òrbites que convergeixen en la mateixa òrbita periòdica atractora. És a dir, sembla que totes pertanyen a la mateixa conca d'atracció. Però això, com ho sabem del cert?

4.3 Components sencers de Fatou i singularitats de la inversa

Direm que \mathcal{U} és un *component gran de Fatou* si és l'òrbita gran d'un component connex del conjunt de Fatou. Quan considerem una òrbita gran, tenim un conjunt obert, totalment invariant, típicament format per infinits components connexos.

El problema de la secció anterior pot reformular-se en general i en termes de components grans de Fatou. Donada una funció F concreta, com sabem quins components grans de Fatou es troben al seu pla dinàmic? Quants n'hi poden haver de diferents? Per respondre aquesta pregunta cal que parlem de les *singularitats de F^{-1}* . Per simplificar, suposarem, com hem fet fins ara, que F és una funció racional, com seria el cas del mètode de Newton d'un polinomi.

Qualsevol funció racional $F(z) = \frac{Q_1(z)}{Q_2(z)}$ és una funció contínua i analítica en tots els punts quan la considerem com una funció de l'esfera de Riemann, és a dir, de $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A més, F és un *homeomorfisme local* en un entorn de tots els seus punts, excepte en entorns dels zeros de la derivada F' . Això motiva la definició següent.

10 DEFINICIÓ Diem que c és un *punt crític de F* si $F'(c) = 0$. Llavors, $v = F(c)$ s'anomena un *valor crític* i és una singularitat de F^{-1} , en el sentit que la branca de F^{-1} que envia v a c no està ben definida a cap entorn de v (teorema de la funció inversa).

En ser F un quocient de polinomis, aquesta només té un *nombre finit de punts crítics*, $2d - 2$ per ser precisos, on d és el grau màxim entre Q_1 i Q_2 . Aquests punts tenen un paper crucial a la dinàmica de F , com mostra el teorema següent.

11 TEOREMA ([7, 8]) *Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}(F)$ és un component gran de Fatou, llavors \mathcal{U} té «associat» almenys un punt crític. Més concretament:*

- *Les conques d'atracció i parabòliques contenen almenys un punt crític.*
- *Els discs de Siegel i els anells de Herman tenen l'òrbita d'algun punt crític que s'acumula a la seva frontera (de fet, dos per a l'anell!).*

Volem remarcar que aquest fet és molt particular de les funcions analítiques d'una variable. Res de semblant és cert per als sistemes dinàmics diferenciables, ni per als analítics mirats només a la recta real, excepte en casos molt especials.

Observem que això ens proporciona un gran control sobre els conjunts estables. D'alguna manera, només cal iterar els punts crítics per localitzar tots els possibles components estables.

5 El mètode de Newton i el seu pla de paràmetres

Finalment, ens agradaria aplicar de nou els conceptes generals que hem vist al mètode de Newton. Per al teorema anterior, és important veure en primer lloc quins són els punts crítics de N_p i com són les seves òrbites.

Si P és un polinomi de grau $k > 2$, els punts crítics del mètode de Newton $N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ són les solucions de

$$N'_P(z) = \frac{P(z)P''(z)}{(P'(z))^2} = 0.$$

Per tant (suposant les arrels de P simples):

$$\{\text{Punts crítics de } N_P\} = \{\text{Zeros de } P\} \cup \{\text{Zeros de } P''\}.$$

Els primers són les *arrels de P* que hem anomenat $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, i que ja són els punts crítics associats a les respectives conques d'atracció.

Però els segons són els *punts d'inflexió de P* (n'hi ha $k - 2$) i aquests queden *lliures* per generar, o no, altres components de Fatou. En altres paraules, el mètode de Newton N_P pot tenir com a molt $k - 2$ components grans de Fatou diferents de les conques d'atracció de les arrels de P , una per a cada punt crític lliure.

Estudiem amb més detall el cas especial dels polinomis de grau 3. Per a un polinomi cúbic, N_P té quatre punts crítics: les tres arrels de P , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i un punt crític lliure, diguem-li c . Com hem vist, el comportament de l'òrbita del punt crític, $\mathcal{O}^+(c)$, ens dóna informació sobre els possibles components grans de Fatou que podem trobar al pla dinàmic, diferents de les conques d'atracció $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3)$, la unió de les quals hem anomenat \mathcal{A} . Per exemple, en el cas en què el punt crític c és atret per una de les arrels, ja no pot estar «generant» cap altre component estable. Això ens dóna una condició suficient, tot i que no necessària, perquè un mètode de Newton concret funcioni a gairebé tot punt del pla (suposant que el conjunt de Julia tingui mesura zero):

$$\mathcal{O}^+(c) \rightarrow \alpha_i \text{ per a alguna } i \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \mathcal{F}(N_P) = \mathcal{A}$$

i, per tant, les úniques condicions inicials «dolentes» es troben a J . Quan no és així, hi ha la possibilitat (no l'obligació) que existeixin altres components grans de Fatou.

Aquesta condició pot ser comprovada pel mètode de Newton de cada polinomi en particular. És un fet, no difícil de comprovar, que tot polinomi cúbic és conjugat per una aplicació afí a un altre de la forma

$$P_a(z) = z(z - 1)(z - a).$$

És, per tant, suficient fer un estudi de la família P_a per saber com es comporten els mètodes de Newton de tots els polinomis de grau 3. Per a aquesta família, un cop fixat el valor de a , hauríem d'iterar el punt crític $c_a = \frac{a+1}{3}$ (el zero de P''). Podem mostrar el resultat en el pla complex, on cada punt del pla representi un valor del paràmetre a , i on pintem el punt de colors diferents segons si l'òrbita de c_a és atreta per alguna de les arrels (colors blau, lila o taronja) o no és atreta per cap (negre).

El resultat d'aquest experiment concret es mostra a la figura 15, que anomenem el *pla de bifurcacions* o simplement el *pla de paràmetres*. El fet que aquest estudi pugui plasmar-se en un pla és perquè només tenim un punt crític lliure. Si volguéssim fer el mateix per a polinomis de grau 4, necessitaríem \mathbb{C}^2 per representar l'espai de paràmetres.

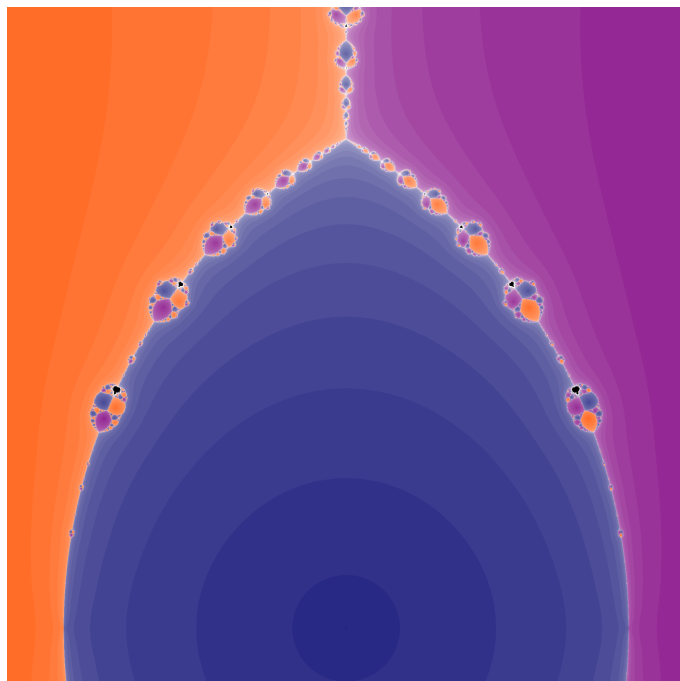


FIGURA 15: Pla de paràmetres del mètode de Newton per a la família de polinomis cúbics $P_a(z) = z(z - 1)(z - a)$. Cada punt del pla representa un valor de a i és de color si l'òrbita del punt crític lliure és atreta per alguna de les arrels 0, 1 o a , i és negre si té algun altre comportament.

En aquesta figura tot seguit podem observar multitud de taques negres, aparentment oberts de valors del paràmetre, per als quals el mètode de Newton dels corresponents polinomis possiblement té conjunts de mesura positiva de condicions inicials dolentes. A la figura 16 (esquerra), s'hi mostra un zoom al voltant d'una qualsevol d'aquestes taques negres, on veiem que la taca en qüestió no té una forma qualsevol. Ben al contrari, el conjunt que veiem és una còpia (quasiconforme) del cèlebre *Conjunt de Mandelbrot* M , el conjunt de bifurcació de la família quadràtica $Q_c(z) = z^2 + c$, tal com mostra la figura 16 (dreta). Aquest és el pla de paràmetres dels polinomis Q_c (no dels seus mètodes de Newton), i el que veiem és el resultat d'iterar el seu punt crític $z = 0$ per als diferents polinomis Q_c , pintant els valors de c segons el comportament d'aquesta òrbita.

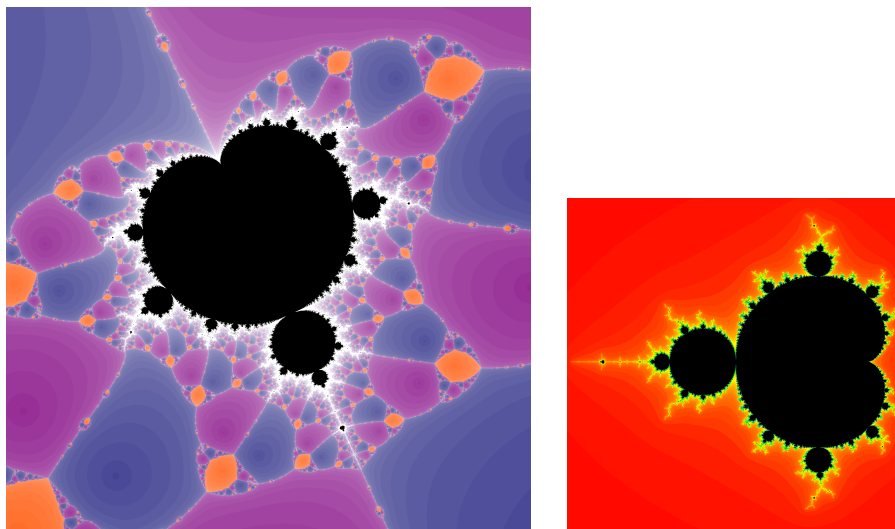


FIGURA 16: Esquerra: zoom al voltant d'una de les petites taques negres de la figura 15. Dreta: el conjunt de Mandelbrot, a l'espai de paràmetres dels polinomis quadràtics $Q_c(z) = z^2 + c$ (no dels seus mètodes de Newton!). En altres paraules, el resultat d'iterar el punt crític $z = 0$ per a cada un dels polinomis Q_c .

L'aparició «inesperada» del conjunt de Mandelbrot en un espai de paràmetres aliè a la família Q_c no és un fet casual ni estrany. Sabem que no és casual, ja que va ser explicat amb tot detall l'any 1985 per mitjà de la teoria dels *polynomial-like mappings*, de Douady i Hubbard [5]. Aquesta teoria pot resumir-se dient que funcions de tot tipus, sota unes certes condicions, es comporten *localment* com a polinomis. Per això veiem conjunts de Julia polinomialment en els seus plans dinàmics (vegeu la figura 14 i compareu-la amb la figura 8), i conjunts de Mandelbrot (o altres d'anàlegs de grau superior) en els seus plans de paràmetres. D'aquesta relació, se'n dedueix molta informació sobre la dinàmica per als paràmetres que viuen dins d'aquestes còpies de M . Per exemple, remarcarem un fet: per a tots els paràmetres a l'interior d'una còpia de M , els corresponents plans dinàmics tenen una òrbita periòdica atractora i, per tant, una conca d'atracció, o bé els conjunts de Julia tenen mesura positiva. Deduïm, doncs, que tenim conjunts oberts de paràmetres (tots els interiors de les còpies de M), per als quals els mètodes de Newton fallen en conjunts de mesura positiva.

Acabarem aquesta lliçó remarcant que trobar còpies del conjunt de Mandelbrot en espais de paràmetres diversos no és un fet gens estrany, ja que les condicions que es demanen perquè això passi són relativament habituals i, de fet, es donen en multitud de famílies de tota mena; no només racionals com les

que ens han ocupat, sinó també transcendents. A causa d'aquest fet, diem que el conjunt de Mandelbrot és un conjunt *universal*. I també és per això que el conjunt de Mandelbrot ha estat i segueix essent un objecte de gran interès per a multitud de matemàtics, especialment també perquè és una font inesgotable de problemes oberts, molts dels quals s'han resistit a ser resolts fins al mateix dia d'avui.

Referències

- [1] BRJUNO, A. D. «Analytic form of differential equations». *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 25 (1971).
- [2] CAYLEY, A. «Applications of the Newton-Fourier Method to an imaginary root of an equation». *Quat. J. of Pure and App. Math.*, 16 (1879), 179-185.
- [3] CAYLEY, A. «The Newton-Fourier Method imaginary problem». *Am. J. of Math.*, 2 (1879), 97.
- [4] CAYLEY, A. «On the Newton-Fourier imaginary problem». *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 3 (1880), 231-232.
- [5] DOUADY, A.; HUBBARD, J. «On the dynamics of polynomial-like mappings». *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 18 (1985), 287-343.
- [6] FATOU, P. «Sur les équations fonctionnelles». *Bull. Soc. mat. Fr.*, 47 (1919), 161-271; 161-271; 48 (1920), 33-94; 208-314.
- [7] FATOU, P. «Sur les substitutions rationnelles». *Comp. Rend. heb. S. Acad. Sci.*, 164 (1917), 806-808; 165 (1917), 992-995.
- [8] JULIA, G. «Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles». *J. Mat. Pur. Appl.*, 8 (1918), 47-245.
- [9] SCHRÖDER, E. «Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichunge». *Mathematische Annalen*, 2 (1870), 317-365.
- [10] SCHRÖDER, E. «Ueber iterite Functionen». *Mathematische Annalen*, 3 (1871), 296-322.
- [11] SULLIVAN, D. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics». *Annals of Math.*, 122 (1985), 401-418.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I ANÀLISI
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
nfagella@ub.edu

