Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 11, núm. 2, 1996. Pàg. 31–78.

Les matemàtiques i els matemàtics de la Revolució Francesa *

Josep Pla i Carrera

Resum

The French Revolution undoubtedly constituted a political revolution of great transcendence but, while occuring between two scientific, and in particular, mathematical revolutions —those of the seventeenth century, known as the "Century of Genius" and the nineteenth century, known as the "Golden Age"— during the French Revolution itself there was no mathematical revolution.

Nevertheless, the ideological background —the Enlightenment— upon which the French Revolution was based, was intimately intertwined with the scientific revolution of the seventeenth century whose mathematical roots are undeniable.

Among the work which followed from the seventeenth century mathematical revolution, that of the French Revolutionaries is distinguished by its insistence of the need for an authentic mathematical revolution, if mathematics were to follow in the revolutionary line initiated in the seventeenth century.

In addition, these men —the mathematicians of the French Revolution— participated in the functioning of government and fulfilled their political duties in the creation of new centres of teaching and research, amongst other important matters.

1 Introducció

El 14 de juliol de 1789 —ara ha fet dos-cents anys— els francesos portaren a terme, a París, una gesta puntual, la Presa de la Bastille. Aquest fet puntual constituïa, però, la culminació d'un procés ideològic —la Il·lustració—, alhora que encetava un esdeveniment polític —la instauració de la república a França— d'una transcendència política, cultural,

*AMS Subject Classification: 01A50, 00A25.
Treball subvencionat parcialment per la beca PB86–0269 de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica, sobre la base de la conferència inaugural del curs 1989-1990, llegida a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, el 4 d'octubre de 1989.

econòmica i social de la qual encara avui som hereus.[1]

D'antuvi pot semblar que aquest fet historicopolític no és res més que això: un fet historicopolític puntual; però entès com la síntesi de la convulsió política que, a partir d'aquest fet, havia d'esdevenir, entès com a síntesi de la Revolució Francesa, constitueix sense cap mena de dubte una autèntica **revolució política** en el sentit que avui dia hom atribueix a aquest mot i que podem trobar exposat acuradament, amb tot detall, a la interessant obra d'I. Bernard Cohen, *Revolution in Science*.[2] Aquest sentit el trobem sintetitzat a la gran obra de Diderot i d'Alembert, l'*Encyclopédie*, on "revolució en sentit polític" és "un canvi important en el govern d'un estat"[3] i, d'alguna manera, podem dir que la Revolució Francesa constitueix el paradigma d'una revolució política, un procés que abraça "violència, novetat i canvi total".[4] El mateix Cohen ens diu que "no solament establí d'una vegada per totes i per sempre més el sentit de les paraules [revolució en el sentit polític] sinó que aconseguí d'alterar la manera de pensar sobre ella en diversos sentits. Primer, els excessos i actes de violència feren témer per les conseqüències dolentes de les revolucions, [...] Segon, assentà una pauta segons la qual els canvis socials profunds apareixen vinculats a l'acció política. Tercer, s'ha dit que

1 Vegeu l'excel·lent dissertació de J.M. Bermudo [Bermudo, J.M. [1989], 5–35], llegida a l'Acte Inaugural de la Universitat de Barcelona, el dia 29 de setembre de 1989; s'hi analitza si avui encara queda alguna cosa de les idees de Llibertat, Igualtat i Fraternitat que constituïen l'eslògan de la Revolució Francesa i, en cas afirmatiu, què en queda, com les entenem avui, en què hem claudicat, etc.

Cal recordar que, poc abans, s'havia produït un altre fet políticament remarcable, la revolució americana de 1776, amb el canvi d'estatus polític que comportà per als Estats d'Amèrica del Nord i amb la Declaració d'Independència que redactà Jefferson, en la qual es diu que un poble pot arribar a "assumir, entre les potències de la Terra, el rang particular i igualitari que li atorguen les lleis de la naturalesa i les del déu natural".

2 Cohen, I.B. [1985], 22–29. A *Revolution and the Transformation of Societies*, S.N. Eisenstadt indica "cinc dimensions" del "procés revolucionari". Aquestes dimensions són:

1. Un "canvi violent del règim polític existent, de les seves bases de legitimització i dels seus símbols".
2. El "desplaçament de l'elit política que exerceix el poder o de la classe dominant per una altra".
3. Un "canvi d'una gran envergadura en totes les grans esferes institucionals, principalment en les relacions econòmiques i de classe que condueixen a la modernització de la vida social en gairebé tots els seus aspectes, al desenvolupament econòmic i la industrialització i a una creixent centralització i participació en l'esfera política".
4. "Una ruptura radical amb el passat".
5. L'aconseguiment "no solament de transformacions institucionals i organitzatives sinó també de canvis morals i educatius".

És clar que aquestes dimensions en cada cas particular, en cada revolució, es presenten amb les seves pròpies matisacions.

3 REVOLUTION, s.f., *signifie en termes politiques un changement considerable arrivé dans le gouvernement d'un état.*

4 Eisenstadt, S.N. [1978], 2–3. La revolució americana o Guerra de la Independència constitueix també una autèntica revolució política i "així va quedar expressat a la divisa del Gran Segell dels Estats Units d'Amèrica, creat poc després de la revolució, *Nova ordo seculorum*, és a dir, un nou ordre secular o, segons la reinterpretació de la dècada de 1930, un *New Deal* [Cohen, I.B [1985], 188]. "El caràcter de Revolució com a creació de quelcom de novell, en lloc de retorn a un passat millor que el present, també el trobem expressat en les vibrants frases de la Declaració d'Independència [vegeu nota 1] [...] Aquesta frase, lluny de ser una vindicació retrospectiva d'antics drets, és una afirmació explícita sobre el present. A més, el 'rang just i igualitari' que menciona Jefferson no es basa pas en el Déu Revelat ni en les Sagrades Escriptures sinó en la 'naturalesa' i en el 'déu natural'. El pla original de la Declaració preveia una invocació de 'veritats' considerades 'sagrades i innegables', però Jefferson declarà que certes veritats són 'evidents en elles mateixes', en el sentit en què Newton va concebre els axiomes damunt els quals havia de bastir els seus *Principia*. I, en afirmar de forma rotunda que els homes 'han rebut del seu creador' certs 'drets inalienables', entre els quals es troben 'la vida, la llibertat i la recerca de la felicitat', s'està declarant la novetat de la Revolució" [Cohen, I.B. [1985], 188–189].

aquest nou concepte de revolució connota un element d'inevitabilitat, semblant al que tenen els planetes en la seva revolució entorn del Sol".[5]

Hi ha, doncs, un cert antagonisme entre aquest concepte de revolució, la revolució en sentit astronòmic —retorn a l'origen, per tornar a començar— i la idea de revolució política —i, en particular, de Revolució Francesa— que "mira cap al futur i, en general, no se la pot pas concebre com el retorn a una situació anterior".[6] Com posa de manifest Hannah Arendt un dels senyals comuns a totes les revolucions polítiques és l'element del que "és novell" i "el concepte modern de revolució està indissolublement lligat amb la idea que el curs de la història experimenta un començament brusc i nou..."[7] i, en conseqüència, la revolució implica que "està a punt d'iniciar-se una història completament nova, que abans mai no s'havia conegut ni s'havia relatat".[8]

A nosaltres, però, el que ens interessa saber és si, al segle XVIII, i especialment al si de la Revolució Francesa, es produí també —paral·lelament o no a la revolució política— una **revolució científica**.[9] Cal indicar, però, que una de les diferències més notables entre el concepte de revolució política i el concepte de revolució científica —que ho és també solament en tant que s'inicia un període nou— la constitueix el fet que, en aquesta darrera, la revolució científica, cal que existeixin vincles de transformació entre allò que és nou i allò que és vell.[10] Una revolució científica és l'antítesi del sentit de les paraules d'Alfons el Savi quan diu que l'única cosa que val la pena en aquesta vida és "fusta vella per cremar, vi vell per beure, vells amics amb qui parlar i llibres vells per llegir" i malgrat que Cohen "no té cap resposta fàcil al problema de definir què constitueix una revolució [en ciència]",[11] "l'estudi d'un gran nombre de revolucions" portà aquest autor a distingir quatre grans etapes successives en totes elles.[12] Són:

1. La "revolució intel·lectual" o la "revolució en si mateixa" que, en síntesi, és el que realitza un científic o un grup de científics al començament d'una revolució científica.
2. L'"acceptació del nou mètode, concepte o teoria" per part de l'autor o grup d'autors, la qual segueix essent un acte íntim.
3. La "revolució dels papers" per la qual "la idea o el conjunt d'idees entra en circulació entre els membres de la comunitat científica".
4. L'"adopció per part d'altres científics de les teories o dels descobriments i la incorporació dels nous mètodes revolucionaris al seu propi treball".[13]

5 Cohen, I.B. [1985], 189. Cal dir també, d'altra banda, que un dels conceptes primitius del terme *revolució* era precisament aquest comportament cíclic que mostren els planetes entorn del Sol: aquesta és l'altra accepció que l'*Encyclopédie* dóna al mot *revolució*.

6 Cohen, I.B. [1985], 189.

7 Arendt, H. [1965].

8 Arendt, H. [1965]. Vegeu la nota 4 referent a la revolució americana.

9 Cal indicar que el caràcter violent del concepte de revolució política, que trobem agreujat a la Gran Revolució Russa i a la Revolució Cultural de Xina, féu que el terme aconseguís un estatus no massa desitjable, sobretot quan hom pensa a traslladar-lo a les revolucions científiques. És a dir, no tothom està disposat a acceptar l'existència de revolucions científiques, i es prefereixen termes com ara evolució, transformació, progrés... entre d'altres raons pel contingut de violència que el terme revolució, en política, comporta.

10 A les revolucions polítiques (i, àdhuc, a revolucions com la Revolució Francesa), malgrat tot, també succeeix el mateix, si bé en un grau molt més petit.

11 Cohen, I.B. [1985], 53.

12 Cohen, I.B. [1985], 42.

13 Cohen, I.B. [1985], 42–44. Cal indicar que, a partir del segle XVII, els autors o grups d'autors són conscients que la seva obra constitueix una revolució, malgrat que no ho manifestin amb aquestes paraules, però cal que el seu convenciment transcendeixi la comunitat científica.

Aquests senyals no constitueixen pròpiament una definició i això obliga Cohen a donar proves a favor de les revolucions en ciències.[14] Cada una d'aquestes proves, per separat, no és concloent, però juntes constitueixen la prova definitiva que ens trobem davant d'una revolució científica. Les proves són:

a) Els testimonis dels testimonis: els judicis emesos pels observadors científics i no científics.

b) L'examen de la documentació històrica vinculada amb la qüestió i posterior a l'època en què es produeix la pretesa revolució.

c) El judici dels historiadors i, en particular, el dels historiadors i filòsofs de la ciència.

d) L'opinió dels especialistes dels nostres dies.[15]

Malgrat que aquestes proves no són ni subjectives ni concloents i requereixen d'una "anàlisi i reflexió crítica" posteriors, la seva absència és definitiva: si en manca una sola, podem assegurar que la revolució científica no s'ha donat.

En el cas de les matemàtiques del segle XVIII i, en particular, dels matemàtics de la Revolució Francesa, **no existeix** cap de les quatre proves que proposa Cohen[16] —llevat que considerem que formen part de la revolució matemàtica (i científica) del segle XVIII, revolució que culmina en l'obra de Newton, els *Principia Mathematica*. La revolució dels *Principia* és la síntesi d'una revolució científica —en constitueix les proves 1 i 2— que, a l'igual que la Presa de la Bastille respecte de la Revolució Francesa, no és altra cosa que el punt de partida de la revolució científica que conduirà als canvis que constitueixen les proves 3 i 4 esmentades més amunt. Aquests canvis, en ser incorporats a la tasca de la totalitat dels científics, que els integren en els seus propis treballs, posen de manifest que s'ha donat una revolució científica, ja que com observà d'Alembert: "Un cop assentades les bases d'una revolució, gairebé sempre és la generació següent la que completa aquesta revolució".[17] El segle XVII havia començat una revolució científica indubtable; el segle otextscxviii, la completà i la portaria a les seves darreres conseqüències.

14 Cohen, I.B. [1985], cap. 3.

15 Cohen, I.B. [1985], 54–56. "Cal reconèixer que els quatre criteris són força subjectius i no cobreixen pas totes les contingències possibles. Però, en el pitjor dels casos, constitueixen les condicions suficients per a poder apuntalar el judici que s'ha produït una revolució en ciència, que cal confirmar per mitjà de la investigació i de la reflexió crítica" [Cohen, I.B. [1985], 57].

16 Al segle XVIII, no obstant això, tingué lloc la revolució científica de Lavoisier. S'aconseguí, "en sumar al coneixement químic provinent de la medicina, la demanda provinent de la revolució industrial, que augmentà enormement la necessitat de certs productes químics com ara els alcalins i els àcids minerals i, a més, la recerca de mètodes perfeccionats de fabricació conduí a noves tècniques químiques en la metallúrgia, la ceràmica i el tèxtil, en especial en el tintat i blanqueig dels teixits. Lavoisier constituí una part important d'aquesta tradició. Les seves investigacions sobre el guix, els mètodes per a il·luminar els carrers de París i la pólvora revelen el seu enfocament pràctic en l'estudi de la química. [...] La filosofia mecànica fou una altra font per al progrés de la química del segle XVIII. Newton tenia l'esperança de reduir la química a una ciència descriptiva de les interaccions mecàniques entre els àtoms; no obstant això, la seva esperança no s'acomplí. [...] Malgrat tot, però, si bé la nova ciència de la química no era mecànica, no obstant això, era física. La revolució que Lavoisier havia vaticinat en el seu memoràndum de 1773 havia de constituir una revolució tant en química com en física" [Hankins, T.L. [1985], 87]. Vegeu també Hankins, T.L. [1985], 100–118; Cohen, I.B. [1985], 207–213; Mason, S.F. [1953], vol. 3, 57–66; Taton, R. [1957–1961], vol. 6, 616–623.

17 L'*Encyclopédie* de Diderot i d'Alembert, article *Experimentale*.

2 La Il·lustració i les matemàtiques

Pel que fa a les matemàtiques, el segle XVIII està col·locat entre el Segle dels Genis —segle XVII— i el Segle d'Or —segle XIX.[18] El càlcul diferencial, la geometria analítica i la matematització de la naturalesa constitueixen els grans èxits del segle XVII; el ressorgiment de la geometria, l'aparició de l'àlgebra abstracta, l'aritmetització de l'anàlisi i el convenciment que la matemàtica és rigorosa i lògica són els èxits indiscutibles del segle XIX. Què queda, doncs, per als matemàtics del segle XVIII? El segle XVIII comença amb la desaparició dels genis G. W. Leibniz, alemany (1646–1717) i I. Newton, anglès (1642–1727)[19] i s'acaba amb l'aparició de la primera obra de C.F. Gauss (1777–1855);[20] al bell mig trobem el prolífic L. Euler (1707–1783).[21] Els matemàtics del segle XVIII —i, en particular, els matemàtics de la Revolució Francesa— el que faran serà portar les descobertes genials dels matemàtics del segle XVII, amb la mateixa mentalitat i amb les mateixes eines que els seus avantpassats, al límit de les seves possibilitats, sense deixar per als matemàtics futurs altra possibilitat que la d'un pensament revolucionari en el camp de les matemàtiques.[22] L'insigne matemàtic de Torí, Lagrange, arribarà a escriure a d'Alembert: "em sembla que les matemàtiques han arribat al límit de les seves possibilitats"[23] i a comparar-les amb una mina en la qual els minerals preciosos haurien estat explotats fins a una profunditat tan gran que s'hauria arribat al límit de l'accessibilitat humana: "Si hom no descobreix noves vetes de mineral, més tard o més d'hora, caldrà abandonar la mina."

La veu de Lagrange no fou pas l'única veu en aquest sentit. Fontenelle, "secretari perpetu" de l'Académie des Sciences de Paris, havia fet la mateixa advertència força anys abans, en 1699, i Diderot[24] es basava en l'esgotament de les matemàtiques com el millor argument per a fer un tomb vers ciències més descriptives com ara la història natural,

---

18 Boyer, C.B. [1968], 510.

19 Recordem que la darrera obra matemàtica important de Leibniz data de finals del segle XVII i que la de Newton, *De Quadratura Curvarum*, apareix, en forma d'apèndix, a l'edició de la seva *Opticks* de 1704.

20 *Disquisitiones Arithmeticæ* data de 1801. També podríem dir, com fa E.T. Bell [Bell. E.T. [1940], 376], que el segle XVIII es troba col·locat entre la mort de Newton [† 1727] i la de Laplace [† 1827], cent anys més tard.

21 L. Euler és el més prolífic dels matemàtics de tots els temps. La seva *Opera Omnia* la constitueixen 75 volums en quart que recullen gairebé 900 treballs, memòries i llibres dedicats al camp de la ciència pura i aplicada: això representa una mitjana de 800 pàgines anuals durant la major part de la seva vida activa, que fou veritablement molt llarga; amb ell, deixeble de l'obra de Leibniz i, sobretot, de la dels germans Bernoulli —sense rebutjar, però, en absolut, les idees i aportacions de Newton— s'aconseguí una síntesi entre el mètode de les sèries, degut principalment a Newton, i la metodologia del càlcul diferencial i integral de Leibniz i dels Bernoulli. No fou pas, como havien estat abans d'ell Descartes, Newton i Leibniz i com ho serien darrere seu Gauss, Riemann i Cauchy, un innovador, però "l'esperit inventiu que mostrà en el domini metodològic i la seva incomparable tècnica que es reflecteixen en el fet que constantment estem parlant de *fórmules* d'Euler, *polinomis* d'Euler, *integrals* d'Euler, *nombres* d'Euler i *constant* d'Euler" el converteixen en un matemàtic imprescindible per a comprendre el desenvolupament de les matemàtiques del segle XVIII i per a comprendre, de retruc, els matemàtics de la Revolució Francesa [Collette, J.-P. [1979], 191].

22 Boyer diu que ens mostrarà que "els matemàtics de l'època de la Revolució Francesa no solament contribuïren generosament al patrimoni comú del coneixement sinó que, en gran mida, foren els responsables de les grans línies de desenvolupament que prendria la matemàtica en la seva explosiva proliferació durant el segle XIX" [Boyer, C.B. [1968], 589].

23 Carta de Lagrange a d'Alembert, datada el 21 de setembre de 1871.

24 "A l'igual que les piràmides d'Egipte, les creacions matemàtiques perduraran durant segles, però també, com les piràmides, ben poques coses els podríem afegir i ben poc ús pràctic se'n pot treure", citat a Hankins, T.L. [1985], 19.

l'anatomia, la química i la física experimental.[25]

En canvi d'Alembert i el marquès de Condorcet instaven els matemàtics a mantenir viva la seva fe i a confiar en el futur de les matemàtiques, malgrat que aquest futur pogués semblar incert. Aquesta situació de crisi aparent de les matemàtiques pot sorprendre en una època de revolució política i social, acompanyada indubtablement de les corresponents revolucions filosòfica, ideològica, científica o tecnològica i, en general, del pensament.[26] Boyer ens recorda que, si bé existeixen històries erudites de les matemàtiques del segle XVI i XVII[27] i una història [parcial] del segle XIX,[28] no existeix cap història comparable de les matemàtiques del segle XVIII.[29] Diu: "ningú no pensa en les matemàtiques del segle XVIII quan considera els grans corrents de les matemàtiques".[30] Aquesta crisi aparent s'explica, però, com el resultat dels esforços realitzats pels matemàtics del segle XVIII —esforços que culminen precisament amb els matemàtics de la Revolució Francesa— i que pretenen dur a les últimes conseqüències la *philosphia naturalis* amb mitjans matemàtics, seguint les petjades, intuïcions i idees dels matemàtics del segle XVII —Kepler, Galileu, Descartes... i que en mans de Newton assoleix l'objectiu indiscutible en els *Principia Mathematica*—[31] com posa de manifest una llucada a la taula adjunta, en la qual es fa esment d'alguns treballs i dels textos mes remarcables —sense intenció, en absolut, d'exhaustivitat—, ometent la majoria d'articles, cartes, manuscrits inèdits, etc.[32]

Aquesta tasca, la portaren a terme fonamentalment sis matemàtics:

25 La física teòrica d'aquesta època és una disciplina molt lligada a la matematització de l'univers i, de retruc, a les matemàtiques; gairebé tots els matemàtics d'un cert renom de l'època plantejaren i resolgueren qüestions físiques i gairebé tots el problemes físics portaren a resoldre alguna qüestió matemàtica, en particular, alguna equació diferencial ordinària o en derivades parcials, alguna aproximació nova d'una solució algèbrica, etc. [Vegeu Hankins,T.L. [1985], 19–49; Taton, R. [1957–1961], 516–554; 558–562.]

26 Caldria aprofundir en l'estudi històric del segle XVIII per constatar la validesa (històricament) objectiva (?) d'aquestes afirmacions. Vegeu, per exemple, Mason, S.F. [1953], vol. 3.

27 Zeuten, H.G. [1903].

28 Klein, F. [1926–1927].

29 Boyer, C.B. [1968], 510.

30 Boyer, C.B. [1968], 510. Bell [Bell, E.T. [1940], 23–28] ens ofereix una "divisió més convencional de l'escala del temps" que "separa la història de les matemàtiques en set períodes", i el període cinquè, el constitueixen els segles XVII i XVIII, mentre que els capítols sisè i setè els dedica, respectivament, als segles XIX i XX. Ríbnikov, en canvi, a la seva *Història de les matemàtiques* [Ríbnikov, K. R. [1974], 207–338] dedica tot el capítol 6 —que titula "Desenvolupament de les parts fonamentals de les matemàtiques durant el segle XVIII"— a les matemàtiques del segle XVIII i ens ofereix una exposició detallada de l'aprofundiment i les possibilitats de les tècniques matemàtiques que tingueren, això sí, el seu origen al segle anterior: equacions diferencials i en derivades parcials, càlcul de variacions, el concepte de funció, introducció a l'anàlisi complexa, potenciació dels algorismes infinits com ara les sèries, les integrals, les fraccions contínues, els productes infinits..., sistematització de les tècniques teòriques i dels mètodes i algorismes recurrents de la teoria de nombres, aprofundiment de la teoria d'equacions algèbriques, anàlisi de la teoria analítica del càlcul de probabilitats, desenvolupament de les geometries descriptiva i projectiva, apropament a la geometria diferencial i a la topologia... com si volgués donar suport a l'afirmació de Nielsen [1929], segons la qual aquests matemàtics provocaren una revolució geomètrica i una revolució analítica.

31 El títol d'aquesta magna obra de Newton no deixa cap mena de dubte sobre el camí que calia seguir: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, esdevé una síntesi del programa a seguir per part dels homes de ciència dels segles XVII i XVIII. Aquest objectiu, ambiciós, apuntat a l'obra de Newton, obligà els matemàtics a afinar les eines matemàtiques i a fabricar totes les que feien falta en la consecució de l'esmentat objectiu; i així els matemàtics del segle XVIII desenvoluparan les matemàtiques a bastament —s'assolirà la culminació amb els matemàtics de la Revolució Francesa.

32 Recordem, tot de passada, que les obres completes de Lagrange i Laplace consten de 14 llibres amb un total de pàgines que oscil·la entre 7.500 i 9.000, per citar els dos més notables. Jean Itard [Itard, J. [1984], 335–350], al seu article "Legendre", atribueix a aquest autor 33 treballs entre llibres i articles. Alguns d'ells consten de dos o més volums.

1765	*Essai sur le calcul integral*	Condorcet
1772	*Reflexions sur la resolution algèbrique des equations*	Lagrange
1785	*Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des decisions rendues à la pluralité des voix*	Condorcet
1788	*Mécanique analytique*	Lagrange
1794	*Elements de géométrie*	Legendre
1796	*Exposition du système du monde*	Laplace
1797	*Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*	Carnot
1797	*Théorie des fonctions analytiques*	Lagrange
1798	*Traité de la resolution des equations numèriques*	Lagrange
1798−1825	*Traité de mécanique céleste*	Laplace
1798	*Essai sur la théorie des nombres*	Legendre
1799	*Géométrie descriptive*	Monge
1801	*Leçons sur le calcul des fonctions*	Lagrange
1801	*De la correlation des figures en géométrie*	Carnot
1812	*Aplications de l'algèbre à la géométrie*	Monge
1811−1819	*Exercices de calcul integral*	Legendre
1812	*Théorie analytique des probabilités*	Laplace
1814	*Essai philosophique sur les probabilités*	Laplace
1825–1832	*Traité des fonctions elliptiques et les integrals eulériennes*	Legendre
1830	*Théorie des nombres*	Legendre

Taula 1: **Taula de textos i articles més remarcables**

Joseph-Louis Lagrange	[1736–1813]
Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet	[1743–1794]
Gaspar Monge	[1746–1818]
Pierre-Simon de Laplace	[1746–1827]
Adrien-Marie Legendre	[1752–1841]
Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot	[1753–1823]

com veurem més endavant [§**3**].

Ara, però, el que desitjo posar de manifest és que, d'alguna manera, les matemàtiques **no són pas alienes del tot** a la revolució política que culminà a Amèrica amb la Guerra de la Independència i a Europa amb la Revolució Francesa perquè no són pas alienes, en absolut, a la revolució intel·lectual d'aquest moment històric que s'ha designat Il·lustració o Segle de les Llums, els trets de la qual citarem a corre-cuita. Aquest terme —la *Il·lustració*— s'aplica a un "gran moviment d'idees liberals i àdhuc iconoclastes que tenien com a objectiu millorar les condicions pràctiques de la vida a través de la raó".[33]

33 Burton, D.M. [1985], 494. Taton diu, *in extenso*:

> "[...] i per aquesta raó, el segle XVIII s'inaugura en una atmosfera d'optimisme. Aviat la majoria de reis europeus rivalitzaren en la fundació i manteniment d'acadèmies que permetien a gran quantitat de científics, cosmopolites per vocació, treballar amb comoditat. La Ciència pren part activa en el moviment filosòfic del 'segle de les llums' i en la preparació

Aquestes idees les trobem en tots els pensadors d'Europa i també en els pocs que comencen a aparèixer a Amèrica, però foren sintetitzades, sens dubte, en el centre intellectual d'Europa que cal situar a França —malgrat que no hem d'oblidar les aportacions alemanyes ni tampoc les angleses—[34] i es troben recollides a les obres de Charles-Louis de Secondat, baró de Montesquieu i de la Brède (1698–1755), François-Marie Arouet, de sobrenom Voltaire (1694-1778), Jean-Jacques Rousseau (1712–1778), Denis Diderot (1713–1784)[35] i en elles, aconsegueixen el seu punt més àlgid. Aquests pensadors, en general, no eren pas científics; eren els filòsofs de la Il·lustració, però tampoc no eren pas filòsofs en el sentit tradicional de la paraula. El nucli o síntesi de la Il·lustració consisteix

intel·lectual de la Revolució. Factor indiscutible en l'alliberació de l'esperit, la Ciència resulta per als enciclopedistes i per als seus coordiandors un agent poderós del progrés social, que els permet d'assolir una ràpida millora de les condicions de vida de la Humanitat. Aquest és, sens dubte, un punt de vista força utòpic però que, en conjugar-se amb el prestigi heretat de les grans descobertes del segle anterior i amb l'intens moviment de curiositat intel·lectual promogut per l'èxit del newtonianisme i de la Física experimental, contribueix a una millor difusió de la Ciència i, en conseqüència, a una acceleració del progrés.

La tasca essencial dels matemàtics del segle XVIII consisteix a precisar, coordinar, estendre i aplicar els descobriments recents. El desenvolupament del càlcul infinitesimal i la utilització de nous instruments —equacions diferencials, equacions en derivades parcials, càlcul de variacions, etc.— permetrà de completar l'edifici de la Mecànica celeste newtoniana, prosseguir la matematització de la Mecànica i iniciar l'Acústica i la Hidrodinàmica.

En paral·lel amb aquests esforços en el terreny teòric, el segle XVIII assisteix a un magnífic floriment del mètode experimental que, si bé ja havia estat proposat per gran nombre de físics del segle XVII, s'havia vist ofegat pel triomf del cartesianisme. Des d'Angleterra i els Països Baixos, la 'física experimental' s'estendrà per tot Europa i aconseguirà una adhesió entusiasta. La seva aparició coincidirà amb el triomf definitiu del newtonisme sobre el cartesianisme, convertit des de feia temps en un factor poderós de rutina. Els espectaculars progressos aconseguits en l'estudi de l'electricitat, el magnetisme, la calorimetria i la química són deguts a la coexistència i interacció d'aquests dos corrents: reflexió teòrica i investigació experimental.

Alhora que les ciències de la Terra estudiaven els problemes fonamentals amb una més gran llibertat d'esperit, les ciències de la vida experimentaven ràpids progressos gràcies a l'organització d'un nou mètode de classificació, al gran nombre d'estudis descriptius, a les importants investigacions de fisiologia animal i vegetal i a l'interès suscitat pels grans problemes de l'origen i generació dels éssers vius" [Taton, R. [1957–1961], 469–470].

Vegeu també Bell, E.T. [1940], 375–378: "[...] L'aportació més important que feren els matemàtics del segle XVIII a la civilització fou un punt de vista racional de l'univers físic degut principlament a l'astronomia dinàmica i a la mecànica analítica [...] El segle XVIII s'ha anomenat Edat de la Raó i també Segle de les Llums en part perquè en aquest segle les ciències físiques ens alliberaren de la teologia. En els cent anys que van de la mort de Newton, el 1727, a la de Laplace, el 1827, l'autoritat dogmàtica sofrí la pitjor de totes les derrotes possibles en mans de la investigació científica: la indiferència. Senzillament deixà d'importar, pel que fa a la ciència, si les afirmacions dels dogmes eren certes o falses. Al principi del període s'acostumava a buscar una explicació teològica als principis de la mecànica per posar-los d'acord amb la teologia ortodoxa de l'època; quan Laplace morí hom prescindia ja de tot això: estava fora de lloc feia quaranta anys pel cap baix. Per fi la mecànica havia trobat la seva maduresa. La ciència revelava que la veritat absoluta residia en les matemàtiques".

Una anècdota que s'insereix de ple en aquesta situació és la que tingué lloc entre Laplace i Napoleó Bonaparte (1769-1821), quan l'emperador rebé de mans del matemàtic el volum de la *Mécanique Celeste* que li havia dedicat. Napoleó digue: "M'han informat que Déu no apareix en la vostra obra d'astronomia". Laplace li va respondre simplement: "És una hipòtesi que no m'ha estat necessària".

A la *Història de les ciències* de Mason podem seguir de prop l'evolució de les ciències teòriques i experimentals al llarg del segle XVIII. Hankins, per la seva banda, ens ofereix un capítol excel·lent, digne de lectura, sobre les ciències socials.

Una visió més filosòfica podem trobar–la, per exemple, a Hull, L.W.H. [1959], cap. 6 i 7, i a Copleston, F. [1961], vol. 6, 15–64.

34 Vegeu Mason, S.F. [1953], III, 80–84 i el capítol setè, 114–131.

35 Matemàtic afeccionat. [Vegeu Coolidge, J.L. [1949], 178–185.]

en una extrapolació de l'obra dels científics del segle XVII, sintetitzada en l'obra senyera de Newton, els *Principia*: l'univers està regit per un ordre i aquest ordre admet una descripció matemàtica,[36] fet que Descartes havia ja reconegut com la "bona manera de filosofar", parlant de Galileu.[37] Calia extrapolar aquest ordre —trobant lleis generals anàlogues— a tots i cada un dels dominis de l'experiència humana.[38]

Aquesta idea de revolució científica, aplicada a la *nova manera de filosofar*[39] sintetitzada en els *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* d'Isaac Newton[40] i a la revolució gairebé total en geometria[41] —és a dir, a les matemàtiques, a la mecànica i a l'astronomia—, la trobem en boca dels matemàtics, però amb el convenciment que el "nou esperit geomètric" també podia millorar l'obra política, moral, de crítica literària,

36 Galileu havia afirmat que "la naturalesa està escrita en llenguatge matemàtic": "La filosofia està escrita en aquest llibre que tenim davant els ulls, vull dir, l'univers, i hom no pot entendre'l si abans no s'aprèn a comprendre el llenguatge, a conèixer els caràcters en què està escrit. Està escrit en llenguatge matemàtic i els seus caràcters són triangles, cercles i d'altres figures geomètriques sense les quals no és possible entendre ni una sola paraula; sense ells és com vagar vanament en un laberint obscur" [Galileu [1623], 61].

Kepler havia aconseguit llegir matemàticament el comportament dels planetes en el seu moviment de translació entorn del Sol. Va establir, com és ben conegut, les tres famoses lleis de Kepler:

1. Els planetes —la Terra— en el seu desplaçament entorn del Sol descriuen el·lipses i el Sol n'ocupa un dels focus i, a més, mentre es desplacen entorn del Sol, giren entorn del seu propi eix [Kepler [1609]].
2. Els planetes, en temps iguals, escombren sectors el·líptics, centrats en el focus ocupat pel Sol, de la mateixa àrea [Kepler [1609]].
3. Els períodes de revolució T dels planetes i la seva distància al Sol D estan lligats per la relació $T^2 = \kappa \cdot D^3$, on κ és una constant que és la mateixa per a tots el planetes [Kepler [1619]].

Galileu [Galileu [1634], 292–320; 384–400] establí el comportament matemàtic de la caiguda de greus i del tret d'un canó.

Descartes en el seu *Mètode* havia establert el mètode d'anàlisi i síntesi —heretat dels geòmetres grecs— com a mètode general per al coneixement de les ciències: "D'altra banda, em vaig adonar que la seva pràctica [la pràctica del seu mètode] habituava de forma progressiva el meu enginy a concebre de forma més clara i distinta els seus objectius i com que no l'havia limitat a cap matèria en particular m'era possible aplicar-la amb la mateixa utilitat a les dificultats d'altres ciències igual com havia succeït en àlgebra" [Descartes, R, [1637], 17].

Foren, però, Newton i els matemàtics del segle XVIII els qui aconseguirien, sens dubte, la màxima expressió; assoliren un desenvolupament important en les eines matemàtiques i uns èxits enormes en l'aplicació d'aquests utillatges matemàtics a la descripció dels fenòmens físics: mecànica, òptica, hidràulica... [Vegeu, per exemple, Hankins, T.L. [1985], 19–24, *El significat de l'anàlisi*.]

37 Vegeu Pla, J. [1989a], 2.

38 Caldria una lectura molt acurada per a constatar, en cada un dels dominis de l'experiència humana, fins a on s'assolí el projecte i, fins i tot, si arribà a començar.

39 "El nostre segle s'anomena [...] el segle de la filosofia per excel·lència [...] El descobriment i l'aplicació d'un nou mètode o manera de filosofar, el tipus d'entusiasme que acompanya els descobriments, una certa exaltació d'idees que ens produeix l'espectacle de l'univers... totes aquestes causes han provocat una vigorosa fermentació de la ment que s'estén per la naturalesa en totes les seves direccions com un riu que s'ha sortit del seu llit" [d'Alembert, citat a Cassirier, E. [1955], 3–4].

L'expressió revolució científica, segons sembla, fou encunyada pel matemàtic d'Alembert i, en ella, les matemàtiques constituïen la força revolucionària més gran [Hankins, L.T. [1985], 1].

40 Alexis-Claude Clairaut [1713–1765] atribueix, el 1747, la causa d'una "gran revolució física" als *Principia Mathematica* [Cohen, I.B. [1976], 267]: "A principis del segle XVIII, poc després que Fontenelle hagués reconegut que s'havia produït una revolució en matemàtiques, hom considerà que els *Principia* de Newton constituïen una revolució en física i ben aviat Robert Symmer proclamà que havia provocat una revolució en la ciència de l'electricitat" [Cohen, I.B. [1985], 23].

41 Segons expressió de Bernard Le Bovier de Fontenelle (1657–1757), que ens parla d'ella per primera vegada el 1700 tot referint-se a la revolució que havia començat amb la geometria analítica de Descartes [Cohen, I.B. [1976], 267].

etc.[42]

Els filòsofs de la Revolució esdevenen els portaveus d'aquesta exaltació de la ciència i d'una fe gairebé il·limitada en el poder de la raó i, amb la intel·ligència alliberada, s'imposaran la tasca de trobar, com dèiem, lleis generals vàlides en tot el domini, prou ampli, de l'experiència humana. Defensaren la necessitat de passar pel garbell de l'escrutini racional les condicions socials, el dogma religiós, l'autoritat, les astúcies governamentals, etc. Dessota hi havia el convenciment ferm que tota pregunta tenia, en correspondència unívoca, una resposta vertadera; és a dir, tenien el convenciment que tots els problemes es podien respondre amb la mateixa certesa que els problemes matemàtics.[43]

Aquest vincle entre raó i naturalesa —paraules clau del Segle de les Llums— havia de conduir a una generació molt crítica amb les institucions i, en particular, amb l'Església i la noblesa, les afirmacions dogmàtiques de les quals no tenien altra base que l'autoritat i xocaven frontalment amb l'esperit revolucionari de la Il·lustració, esperit basat en la raó i en les lleis que regeixen necessàriament qualsevol manifestació del comportament humà tant individual com col·lectiu; havia de permetre, doncs, de substituir arguments a priori i arguments basats en la revelació, com a prova principal de la religió i aconseguir, en canvi, de conèixer Déu per la seva obra, és a dir, per la creació i per les seves lleis;[44] així la Bíblia deixava d'ésser essencial per a establir l'existència de Déu.[45] El motiu inicial d'aquest canvi fou profundament religiós, però els seus efectes per a la ciència i la tècnica foren d'una gran transcendència:[46] si Déu pot ser conegut per la seva creació, la Bíblia deixa de ser necessària per a provar l'existència de Déu.[47]

---

42 Segons opinió del mateix Fontenelle expressada amb rotunditat al pròleg de la seva *Histoire de l'Acadèmie des Sciences de Paris*. Diu: "L'esperit geomètric no està pas tan lligat a la geometria que no es pugui separar d'ella i traslladar-lo a d'altres branques del coneixement. Una obra moral, de política, de crítica, potser fins i tot d'eloqüència, milloraria, *ceteris paribus*, si fos realitzada amb l'esperit geomètric" [Fontenelle, B. [1699]]. És el punt de vista de la filosofia mecanicista cartesiana.

43 Vegeu Burton, D.M. [1985], 493–496. Hume diu que "la humanitat és sempre la mateixa en tot temps i lloc", que "la història no ens informa mai de res nou al respecte. El seu ús principal consisteix a descobrir els principis universals constants de la naturalesa humana". Aquesta manera de pensar és el que s'ha designat *Il·lustració* o *Segle de les Llums*, els trets de la qual citarem a corre-cuita. Aquest terme —la *Il·lustració*— s'aplica a descobrir els principis universals constants de la naturalesa humana i Voltaire recomanava un esforç actiu per tal de fer progressar la humanitat per mitjà de la crítica a les creences tradicionals, propagant el coneixement recentment adquirit sobre el món natural. A la seva *Histoire de Carlemagne à la mort de Louis XIII*, de 1756, Voltaire indicava que "el progrés de les arts i de les ciències" constituïa la part principal del seu tema d'estudi i afirmava que "la raó i la indústria progressarien cada cop més, que les arts útils millorarien, que els mals que han afligit l'home i els prejudicis que no constitueixen pas, és clar, el més minço dels seus assots, desapareixerien gradualment d'entre tots aquells que governen les nacions" [Citat a Mason, F. [1953], vol. 3, 3].

44 Recordem, per exemple, que Maupertuis defensà el principi de la mínima acció com a prova indiscutible de l'existència d'un Déu intel·ligent que imposà a la naturalesa les mínimes lleis necessàries que permetessin el seu desenvolupament i funcionament autònoms. [Vegeu Pla, J. [1989b], 61–71.]

45 El filòsof John Locke (1632–1704) afirmà amb entusiasme que "l'obra de la Naturalesa constitueix arreu proves suficients d'una deïtat" [citat a *Basil Willey*, Hankins, T. L. [1985], 3, nota 6] i Robert Boyle (1627–1691), l'experimentador científic més notable de l'Anglaterra del segle XVII, coincidia a afirmar que mai no havia vist una "producció inanimada de la naturalesa, o de la casualitat, l'ingeni de la qual fos comparable amb la més humil extremitat del més menyspreable dels animals" [Boyle, R. [1744], IV, 523].

46 En aquest sentit és força interessant Kline, M. [1980], cap. 3 i 4.

47 Copleston diu: "Sembla que, en molts, hi ha la tendència natural de concebre la *Il·lustració Francesa* principalment com una crítica destructiva i una oberta hostilitat contra el cristianisme o, si més no, contra l'Església catòlica" [Copleston [1961], VI, 15] i continua "[...] donada aquesta interpretació de la Il·lustració, l'estima en què cada un de nosaltres la tingui dependrà considerablement de les pròpies conviccions religioses o de l'absència d'elles. Uns consideraran la filosofia francesa del segle XVIII com un moviment que continuà endinsant-se en la impietat fins a donar els seus darrers fruits en la profanació de la catedral de Notre Dame durant la Revolució; els altres la consideraran com el progressiu alliberament

La raó i la naturalesa eren manifestacions divines i les lleis de la raó no eren pas lleis lògiques sinó que eren lleis de la naturalesa i així els millors filòsofs del segle XVII —Galileu, Descartes, Pascal, Newton, Leibniz. . . — foren també els millors matemàtics. Calia passar per les matemàtiques per comprendre la naturalesa.[48] Raó s'identificava, de fet, amb raó matemàtica —o, si voleu, amb mètode matemàtic—[49] i àdhuc aquells que, com Denis Diderot i Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788), clamaven en contra d'una excessiva dependència matemàtica, no repudiaven pas, en absolut, l'aplicació de la raó i la raó es trobava representada en la perfecció de les matemàtiques.[50] Com diu Hankins, "les matemàtiques marcaren la pauta per a la ciència de la Il·lustració".[51]

Les matemàtiques, en el pensament de la Il·lustració, es convertiren així "en reina i serventa"; constituïen les regles amb les quals calia "jutjar" —o si més no, "amidar"— les altres ciències, però, d'altra banda, com ja hem dit, semblava com si les matemàtiques haguessin esgotat les seves possibilitats: "el poder de la nostra anàlisi s'ha esgotat"[52] i l'anàlisi era precisament la capacitat de resoldre problemes, tot reduint-los a equacions. Aquesta possibilitat assolí amb els matemàtics del segle XVIII i amb els de la Revolució Francesa, en particular, el límit de les seves forces. El seu èxit durant la Il·lustració constituí la raó del seu propi pessimisme i esgotament respecte de la possibilitat de futurs progressos. Sense noves idees provinents de camps matemàtics nous i, sobretot, sense nous punts de vista sobre camps matemàtics i problemes matemàtics vells no era ja possible anar més lluny.[53]

Aquesta revolució intel·lectual, gestada des del segle XVII, durant el segle XVIII portà, amb d'altres causes, a la revolució política més important d'Europa —la Revolució Francesa[54] de 1789 i també a la revolució americana de 1774.

---

espiritual respecte de la superstició religiosa i la tirania eclesiàstica" [Copleston [1961], VI, 15]. Més endavant afegeix encara: "Si bé, però, tant la interpretació com a actitud envers la religió com la interpretació sobre la base de conviccions polítiques (si bé, aquesta darrera, en una mida més petita) tenen fonament en els fets, descriure la filosofia francesa del segle XVIII con un atac perllongat al tron i a l'altar seria donar d'ella una imatge molt poc adequada. És clar que s'atacà l'Església en nom de la raó, la religió revelada i, en certs casos, tota forma de religió. Però *l'exercici de la raó era pe als filòsofs de la Il·lustració francesa molt més que la simple crítica destructiva practicada a l'esfera de la religió.* La crítica destructiva era, per dir-ho així, el costat negatiu de la Il·lustració. L'aspecte positiu consistia en l'intent d'entendre el món i, especialment, l'home en la seva vida psíquica, moral i social" [Copleston [1961], VI, 16].

48 Vegeu la nota 36.

49 Vegeu el *Mètode* de Descartes en aquest sentit [Pla, J. [1989b]]. Per a Descartes, el *Mètode* era, en definitiva, una adaptació del mètode d'anàlisi-síntesi dels geòmetres grecs que tan fructífer li resultaria per a desenvolupar la seva *Géométrie* i que "en no aplicar-lo a cap ciència en particular li resultava útil per a qualsevol ciència". Però Rashed va més lluny i ens diu: "no és pas una problemàtica antiga, que reprenem i reforcem, el que ara designem amb els termes d'*anàlisi* i de *mètode analític*", que, segons ens recorda constitueixen una constant en els escrits dels filòsofs i savis de la segona meitat del segle XVIII; "sinó que més aviat és una altra comprensió i una nova pràctica de la ciència el que volem expressar" i tot seguit ens recorda les paraules de Condorcet: "Concloem que, si l'anàlisi és el mètode que s'ha de seguir en la recerca de la veritat, també és el mètode que s'ha de fer servir per a exposar les descobertes que s'han fet" [Rashed, R. [1988], 6].

50 Ambdós obtingueren resultats matemàtics més o menys importants [vegeu nota 35]. Buffon, en particular, aportà l'anomenat *problema de Buffon* de les probabilitats, que havia de permetre una aproximació prou bona del nombre π.

51 Hankins, T.L. [1965], 18.

52 Kline, M. [1972], 623.

53 "El savi és com aquell pare de família que del bagul dels mals endreços treia coses noves i coses velles".

54 "Kant, el 1785, com d'Alembert en 1759, pensava que la revolució científica encara estava en marxa. Cinc anys després d'haver fet aquesta afirmació la revolució intel·lectual a França fou seguida per la primera gran revolució política dels temps moderns" [Hankins, T.L. [1985], 3].

Una de les moltes i complexes raons que permeté aquesta transposició de revolució intel·lectual a revolució política la constituí el fet que el clima intel·lectual de la Revolució arribà a una àmplia capa de la societat[55] a causa, entre d'altres, de l'aparició de les revistes populars que començaren a aparèixer amb el segle XVIII. Tenim revistes angleses —com ara *The Tatler* (1709); *The Guardian* (1710); *The Spectator* (1711)—[56] i també en francès —*Le Spectateur Français* (1772)— i també els avantpassats dels diaris: opuscles breus, intermitents, que contenien notícies passatgeres, com per exemple el *Daily Courant* (1702), anglès, i el *Journal de Paris* (1777), francès. I, amb l'aparició dels diaris i de les revistes, s'instituïren els clubs de lectura: un grup de persones llogava una o dues habitacions, feia una subscripció col·lectiva a diversos diaris i revistes i, de tant en tant, es feien reunions on es discutien els seus continguts.

Aquesta nova concepció segons la qual tot pot ser discutit i analitzat o, si més no, mencionat, portà un grup d'intel·lectuals francesos del segle XVIII a intentar recopilar tot el coneixement existent en un tot ordenat, estructurat alfabèticament i amb referències creuades. Així sorgí, a partir de 1759, l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raissonné des Sciences, des Arts, et des Métiers*, editada per Denis Diderot i Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783), amb un total de 28 volums, 11 dels quals eren volums d'il·lustracions i gravats. S'acabà el 1772. Aquesta iniciativa, però, no fou pas aïllada, ni tampoc local;[57] trobà un gran suport institucional —àdhuc l'emperadriu Caterina de Rússia volia contribuir al finançament amb la condició que l'obra fos editada a Rússia.

L'experiència es repetí a Anglaterra uns anys més tard. Els tres volums de l'*Encyclopedia Britannica* començaren a aparèixer l'any 1771.

La Il·lustració es donà fora de les universitats gairebé a tot Europa; [58] es donà al si de les acadèmies que eren subvencionades pels monarques, però no pas altruistament, sinó com una possessió més:eren senyors dels fruits intel·lectuals i, sobretot, de les aplicacions

55 Les idees de Newton foren àmpliament divulgades. El 1784, uns cent anys després de l'aparició dels *Principia* (1687), podien trobar-se llibres sobre l'obra de Newton en gairebé totes les llengües europees cultes: 40 llibres en anglès; 17 en francès —recordem la importància que tingué Voltaire a França en relació amb les idees de Newton i la seva divulgació; fou ell qui va convèncer Mme. Chatellet perquè traduís al francès els *Principia*—; 11 en llatí; 3 en alemany; un en italià i un altre en portuguès. Aquestes idees de Newton —el newtonianisme —, que arribaren a ser molt populars i d'una gran transcendència per a les idees dels filòsofs de la naturalesa, no foren pas de massa utilitat en el desenvolupament immediat d'altres ciències més aplicades, més experimentals i més de laboratori.

La popularitat del newtonianisme fou molt gran i, d'acord amb una de les característiques de la Il-lustració que convertia en herois els seus filòsofs de la naturalesa —fet que explica, per exemple, els elogis de Fontenelle als membres de l'Académie Française a mesura que anaven deixant aquest món, elogis que foren continuats per Condorcet quan assolí el lloc de secretari de l'Académie, elogis que no "descriuen solament els èxits científics més importants de l'època sinó que elogien la puresa dels motius de l'estudi científic"—, convertí Newton en l'heroi més gran de França —un cop vençudes, és clar, les reticències dels francesos envers una tasca que desautoritzava la *philosophia naturalis* de Descartes i la seva teoria dels remolins o dels vòrtexs. El motiu d'aquesta popularitat, ultra la seva obra, que havia resolt l'enigma dels planetes tot mostrant que els seus moviments obeïen les mateixes lleis que regeixen els moviments del cossos terrestres, era que fos anglès ja que, per als filòsofs de la Il·lustració, particularment Montesquieu i Voltaire, Anglaterra era la font de tota llibertat i, en particular, de la llibertat de pensament.

Cap altre problema no tenia un significat còsmic tan gran i, per això, ningú no podia ser considerat un heroi comparable. La filosofia natural o de la Il·lustració progressaria si els filòsofs eren capaços, seguint el mètode de Newton, de completar el seu programa.

56 Aquesta darrera revista, en alguns dels seus números, arribà a assolir 200.000 còpies.

57 Vegeu *L'Encyclopédie* a Hankins [1985], 176–183.

58 L'única excepció la trobem, potser, a Alemanya on, el 1737, es fundà una universitat moderna a Göttingen amb la intenció explícita de participar dels corrents de la Il·lustració. Amb una sola generació la seva biblioteca arribà a contenir 60.000 llibres i 100.000 fulletons i es convertí, així, en la biblioteca més important del segle.

que aquests fruits produïen.

Les acadèmies[59] proporcionaven sous als seus membres, editaven —amb més o menys fortuna—[60] els textos que consideraven més notables, revistes científiques, diaris on feien públics els resultats dels seus membres; també organitzaven expedicions científiques,[61] impulsaven la creació de museus, jardins botànics, laboratoris, observatoris astronòmics, etc.

La Revolució Francesa fou, doncs, en certa forma filla de la revolució intel·lectual dels filòsofs de la Il·lustració que, d'alguna manera, volien transportar els èxits matemàtics dels *Principia* de Newton a la totalitat de facetes i aspectes del pensament i l'activitat humans. Amb tot, però, l'esdeveniment polític i les seves conseqüències històriques i polítiques involucraren, en més o menys grau, més o menys activament, una munió de matemàtics francesos de primera fila que foren precisament els mateixos que portaren les matemàtiques i la nova manera de filosofar —la filosofia newtoniana— a la situació límit esmentada més amunt a bastament,[62] alhora que donaren a França la primacia matemàtica, primacia que havia perdut durant gairebé un segle, des de l'època de Gerard Desargues (1591–1661), René Descartes (1596–1650), Pierre de Fermat (1601–1665), Gilles Personne de Roberval (1602–1675), Blaise Pascal (1623–1662).

3 Els matemàtics de la Revolució Francesa i la seva obra científica

Ja hem indicat que les aportacions matemàtiques dels anomenats matemàtics de la Revolució Francesa —Lagrange, Condorcet, Monge, Laplace, Legendre i Carnot— fou enorme tant en extensió com en intensitat[63] i no és pas ara la nostra intenció fer-ne una presen-

59 Recordem que les acadèmies sorgiren arreu: a Itàlia, l'Academia dei Lincei —que passà per períodes de clausura i reobertura— el 1603, el 1610, el 1745 i, finalment, el 1801; a França —a partir de les reunions a la cel·la del pare mínim Marin Mersenne— el 1666; a Anglaterra —fruit també de reunions entorn de Collins— el 1660; a Alemanya —força anys després que Leibniz ho hagués proposat— el 1700; a Suècia, el 1720; a Rússia —l'Académie de St. Petesburg— el 1725; a Dinamarca, el 1742 i, finalment, als EUA, a Philadelphia —projectada per Franklin el 1743— es fundà el 1746.

60 Recordem les dificultats que trobaren els *Principia* de Newton per part de l'Acadèmia de Londres, hagué de ser el primer dels seus tres llibres editat amb el suport econòmic d'Edmund Halley [1656–1742], del qual, amb dret, en podríem dir el padrí dels *Principia*.

61 Recordem, per exemple, l'expedició de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis [1698–1759] que anà a Lapònia (1736–1737) acompanyat, entre d'altres, d'Alexis-Claude Clairaut i una altra que anà al Perú (1735–1744) a fi de constatar l'afirmació de Newton segons la qual el radi equatorial és 1/230 més llarg que el radi polar, fet que quedà així empíricament confirmat.

62 "[. . .] És la fi de la ciència clàssica, l'alba de la qual es remunta a la Grècia hel·lènica o, segons els casos, als segles IX–XX, i el començament de la ciència moderna. [. . .] Les ciències de la Revolució Francesa es presenten com la conclusió del que s'havia començat feia vuit segles, però també al segle XVII; [. . .] però contenen les primícies del que més tard s'anomenarà la ciència moderna" [Rashed, R. [1988], 15].

63 Vegeu les obres citades a la taula d'obres notables i a la nota 30. Les aportacions de Lagrange van des del càlcul de variacions, on introduí la variació d'una funció, a la teoria de funcions on aprofundí les funcions analítiques, passant per la teoria d'equacions algèbriques on aportà importants resultats teòrics i on es preocupà també dels mètodes aproximatius de resolució, introduint a més el mètode d'interpolació que duu el seu nom, passant per la teoria de nombres on establí gran quantitat de resultats conjecturats abans d'ell, com el teorema de Wilson-Waring, la convergència de les fraccions contínues, i d'altres novetats com les formes quadràtiques i la seva equivalència, etc., fins arribar a l'aprofundiment de la mecànica, on assolí una obra mestra de matemàtica pura en la qual la mecànica s'estableix per mitjà d'un mètode únicament algèbric sense necessitat de recórrer a cap figura.

Condorcet es procupà de sintetitzar els diferents mètodes i tècniques de resolució d'equacions diferencials, així com també del problema dels tres cossos, però la seva aportació més notable —una aportació realment revolucionària en aquell moment i en aquell context que, si bé per si sola no és prou significativa per poder afirmar que ens trobem davant d'una revolució en matemàtiques, sí que podem dir que constituiex tació ni superficial ni tampoc aprofundida —la primera fóra de poc interès i la segona sobrepassaria de molt les limitacions d'aquestra exposició.

La nostra intenció és ben bé una altra. Volem veure, amb uns quants exemples més o menys significatius, l'evolució de certs conceptes, idees i resultats matemàtics, o de certes tècniques de resolució, a partir de l'època de Newton i Leibniz fonamentalment, fins arribar als matemàtics de la Revolució Francesa. Ens serviran per a adonar-nos com arribaren a un punt en què es feia del tot indispensable introduir noves idees que evitessin l'exhauriment que alguns d'ells havien ja predit.[64]

3.1 El concepte de funció

No es tracta pas d'oferir aquí una exposició detallada i completa del concepte de funció des de Napier, Kepler i Galileu fin a Euler i Lagrange.[65] És suficient indicar que la idea de corba heretada de la geometria grega[66] es convertí en quelcom poc manejable per a ser interpretat en la geometria cartesiana i, sobretot, per a ser sotmès a la nova tècnica del càlcul diferencial i integral. Es feia indispensable disposar d'algorismes precisos que poguessin, d'una banda, ser interpretats (d'alguna manera), però sobretot que poguessin ser manipulats per mitjà del càlcul recentment inventat. Descartes es trobà tot seguit

un punt aïllat revolucionari— la constitueix un intent de portar les matemàtiques a la política i a tot allò que estigués d'alguna manera vinculat amb el que podem dir-ne social; una contribució, d'altra banda, netamente integrada en la mentalitat revolucionària de la Il·lustració.

Monge, ultra preocupar-se per la fabricació dels canons, establí les bases de la geometria analítica de l'espai, es preocupà de l'anàlisi de les corbes de doble curvatura; però probablement la seva aportació més notable, per la seva originalitat, fa referència a la geometria diferencial de les corbes de l'espai i de les superfícies, en lligar certes famílies de superfícies amb certs tipus d'equacions en derivades parcials. No hem d'oblidar tampoc que fou ell qui fixà els fonaments de la geometria descriptiva.

Laplace treballà fonamentalment en dos camps: el càlcul de probabilitats, on aconseguí fer una presentació del càlcul de probabilitats com una teoria matemàtica més —una teoria que feia servir totes les tècniques matemàtiques de càlcul conegudes: integrals, sèries, equacions diferencials, equacions en diferències finites, etc.— i la mecànica celeste, on Laplace desenvolupà el concepte de potencial. Laplace, fill de la Il·lustració, acompanyà les seves dues obres cabdals d'exposicions menys tècniques destinades a un públic més ampli i molt menys especialitzat en matemàtiques. No crec agosarat dir que Laplace fou l'únic matemàtic de la Revolució Francesa que, si més no en el camp de les probabilitats, encetà les grans conquestes que, en d'altres branques, haurien d'esperar, com veurem, al segle XIX.

Legendre, ultra els seus intents d'establir el cinquè postulat d'Euclides, féu aportacions remarcables en teoria de nombres, on aconseguí d'establir amb més o menys rigor la llei de reciprocitat quadràtica, que no existeix cap funció algèbrica racional la imatge de la qual estigui continguda en el conjunt dels nombres primers, conjecturà un valor aproximat per a $\pi(n)$ —nombre de nombres primers $\leq n$— i demostrà el teorema de Fermat per $n = 5$; tampoc hem d'oblidar les seves aportacions a l'estudi de les integrals el·líptiques $\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$, les quals reduí a tres tipus, i a l'estudi de les integrals eulerianes i, en particular, de la funció $\Gamma(x)$.

Carnot, el més jove de tots ells, estudià les màquines en general i establí les lleis generals del xoc i les lleis de conservació del treball; féu també un estudi aprofundit de les fortificacions, però la seva tasca matemàtica més remarcable la trobem en relació amb la geometria i, sobretot, en les seves reflexions sobre la metafísica del càlcul infinitesimal.

64 La nostra exposició, força breu, seguirà la metodologia expositiva de M. Kline [1972], o de K. Ríbnikov [1974], els quals ofereixen exposicions evolutives, més o menys rigoroses, de les idees, les tècniques i els resultats assolits. Serà útil recórrer a D.J. Struik [1969] i/o a les obres originals per tal de disposar dels textos en què es basaran les nostres argumentacions.

65 Vegeu Kline, M. [1972], 335–341; 403–406; 505–507; Ríbnikov, K. [1974], 219–230; Youschkevitx, A.P. [1976].

66 Sobretot les corbes de la geometria grega que no es troben recollides en els *Elements* d'Euclides sinó en obres com les *Còniques* d'Apol·loni, *Sobre l'el·lipse* d'Arquimedes i ens els diversos intents d'oferir mètodes per a duplicar el cub, trisecar l'angle i quadrar el cercle. [Vegeu Heath, T.L. [1921], 218–270; Thomas, I. [1939], 256–363; Dedron. P. i Itard, J. [1959], 379–423.]

amb la necessitat de distingir entre corbes algèbriques i transcendents;[67] la urgència de disposar d'un concepte genèric de funció portà James Gregory, a la *Vera Circuli et Hiperbolæ Quadratura* (1667) a oferir-nos una definició[68] que, realment, variaria poc fins a Euler. La seva definició ens diu, de fet, que a les cinc operacions algèbriques cal afegir les sèries, els productes infinits, les fraccions contínues, les integrals, etc. Aquest concepte, tan general, portà immediatament a la necessitat d'un algorisme abstracte de representació simbòlica així com també a la necessitat de distingir entre constants, variables, paràmetres, etc.[69] El 1718, Bernoulli ideà el símbol Φx, on Φ indicava la successió d'operacions algèbriques o l'altra operació imaginable.

Newton aconseguí tractar totes les funcions dites elementals expressant-les en sèries de potències; m'atreviria a dir amb Carl B. Boyer que, després de Newton, "les sèries no es consideraran ja com a simples recursos d'aproximació, sinó que seran formes alternatives de les funcions que representen".[70] Amb Newton, doncs, quedà gairebé fora de dubte que tota equació era representable en sèrie de potències.[71]

L'obtenció per part de James Gregory,[72] d'Isaac Newton[73] i, sobretot, de Colin McLaurin (1742) i Brook Taylor (1715)[74] de les famoses expressions que permeten d'obtenir el desenvolupament en sèrie de potències de qualsevol funció —suficientment regular per a ser derivable, però totes les funcions ho eren!— ajudà a reafirmar la conjectura anterior.

Euler recull tot aquest desenvolupament a la *Introductio in Analysim Infinitorum* de 1748, pedra clau en el desenvolupament de l'anàlisi matemàtica i que constitueix la síntesi de la tasca desenvolupada fins aleshores. Reprèn la definició de funció, entenent per funció "qualsevol expressió analítica obtinguda a partir de variables i constants"; seguidament estableix una classificació de les funcions en *algèbriques* —que, al seu torn, classifica en irracionals i racionals, i aquestes darreres contenen les funcions *senceres* i

67 Descartes les anomena algèbriques i mecàniques; de fet són, respectivament, les que podien ser expressades per polinomis i les que no ho podien ser [Descartes, R. [1637], 295]. [Vegeu també Bos, H.J.M. [1981] i Pla, J. [1989b], 850–851.]
Els conceptes de corbes transcendents i algèbriques es deuen a James Gregory (1638–1675), i daten de 1667; foren, però, Leibniz i els germans Bernoulli els qui els imposaren definitivament. [Vegeu Leibniz, G.W. [1684], 9, i [1686], 17.]

68 "Una funció és una quantitat obtinguda d'altres quantitats per una successió d'operacions algèbriques o per *qualsevol altra* operació imaginable".

69 Aquesta tasca fou duta a terme per Leibniz i pels germans Bernoulli i, sobretot, per Euler, que sintetitzà les aportacions anteriors a ell.

70 Boyer, C. B. [1968], 497. Vegeu també Pla, J. [1989c]. El mateix Newton era conscient d'aquest fet i així després del *lema 2* del *Llibre II* dels *Principia* diu: "Aquest mètode [el mètode de les fluxions] s'ha lligat amb un altre mètode que consisteix a treballar amb equacions reduint-les a sèries infinites" [Newton, I. [1687], 302].

71 Leibniz [[1686], 25] oferí l'equació de la cicloide en forma integral: $y = \sqrt{2}x - x^2 + \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2\,x - x^2}}$, però amb les tècniques de desenvolupament en sèrie i de càlcul de Newton era fàcil d'expressar-la en sèrie de potències; Newton ens l'ofereix a les seves obres de càlcul diferencial i integral.
En els *Acta Eroditorum* de 1691 Jakob Bernoulli deriva l'equació de la tractriu —la corba per a la qual la raó de les distàncies PT i OT, on T és el punt d'intersecció de la tangent pel punt P a la corba i l'eix OX, és constant per a cada punt P de la corba. Integrant la seva equació diferencial obté:

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

que és fàcilment expressable en sèrie de potències.

72 Turnbull [1959], 45–48.

73 Newton, I. [1687], 569–571, *llibre III, lema 5.*

74 Vegeu Wollan, G.N. [1968], 310–312 i Struik [1969], 290–291; 329–333; 338–341.

les fraccionàries— i transcendents que es divideixen en trigonomètriques, logarítmiques, exponencials i integrals. Segons Euler, les funcions transcendents es poden expressar mitjançant un desenvolupament en sèrie de potències i d'aquest fet se'n segueix el resultat essencial següent: tota funció admet un desenvolupament en sèrie de potències —limitat o il·limitat segons que la seva naturalesa sigui algèbrica o transcendent.[75] A més, per a Euler, seguint Leibniz, una funció contínua era aquella que podia "ser expressada per mitjà d'una expressió única"; així les funcions passaven a ser les funcions que avui anomenem analítiques.[76] Aquesta ideologia del concepte de funció fou la que adoptà Lagrange a la seva *Théorie des fonctions analytiques* [1797].[77]

L'any 1715[78] Taylor deduí les equacions d'oscil·lació d'una corda vibrant a partir de la condició que l'acceleració a cada punt de la corda, $\partial^2 y/\partial t^2$, fos inversament proporcional al radi de curvatura

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Per a petites oscil·lacions obtingué

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1a}$$

on a depén de les característiques de la corda. Taylor imposà al problema una condició addicional segons la qual tots els punts de la corda que vibren tornen simultàniament a l'eix de les abcises. Això li permeté d'afirmar que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -b^2\, y; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(ab)^2\, y.$$

Després, prenent l'eix de les abcises com a posició inicial de la corda, els extrems de la qual suposa fixos, Taylor obté la solució de l'equació ($1a$) en la forma:[79]

$$y = A \sin b\,x \;\; \sin a\,b\,t. \tag{2a}$$

75 Vegeu *Opera Omnia* d'Euler, (1), 8, cap. 4, 74, o la *Introductio in Analysim Infinitorum* en qualsevol de les seves múltiples edicions.
Aquesta afirmació que, a més, es fonamenta en l'esperit mateix d'aquesta excel·lent obra, li permet d'afegir "si algú dubta que tota funció pot ser desenvolupada en sèrie de potències, deixarà de fer-ho desenvolupant efectivamenet cada una de les funcions" [*Opera Omnia* d'Euler, (1), 8, cap. 4, 75].

76 També introduí les funcions mecàniques o de traç lliure: eren aquelles funcions que no tenien una única expressió analítica però que, en canvi, podien ser representades gràficament amb un traç continu.

77 Cal indicar, tot de passada, que Lagrange aconseguia així alliberar-se d'una altra dificultat de l'època: la consideració dels infinitèsims, dels límits o de les fluxions, "reduint-los a l'anàlisi de les quantitats finites" [vegeu Edwards, [1980], 292–300 o Struik, [1969], 383–391]. Diu Lagrange: "L'àlgebra no és altra cosa que la teoria de funcions. A l'àlgebra les quantitats buscades han de ser funcions de quantitats donades, és a dir, expressions representades per operacions diferents que cal realitzar amb aquestes quantitats per tal d'obtenir els valors buscats. En l'àlgebra, en el propi sentit de la paraula, solament es consideren funcions elementals, provinents de les operacions algèbriques usuals; és la primera branca de la teoria de funcions. A la segona branca es consideren les derivades de les funcions i aquesta és simplemenet la branca que anomenen "Théorie des fonctions analytiques" i que conté tot el que es refereix al nou càlcul" [Lagrange, J.-L. [1881], IX, 16]. Aquesta idea estava ja, de forma incipient, a la ment de Newton. [Vegeu Pla, J. [1989c].]

78 Taylor discuteix el problema, per primera vegada, en 1713; aquest problema el discutirà en els núm. 17 i 18 del *Methodus incrementorum* de 1715.

79 Taylor, B. [1714], 26–32.

El 1747, Jean le Rond d'Alembert [1717–1783] trobà la solució general de l'equació $(1a)$.[80] Feu el canvi $at = \tau$ i obtingué:[81]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1b}$$

Seguidament observà que

$$\frac{\partial y}{\partial x}\, d\tau + \frac{\partial y}{\partial \tau}\, dx$$

i

$$\frac{\partial y}{\partial x}\, dx + \frac{\partial y}{\partial \tau}\, d\tau$$

són *diferencials totals*.[82] Fent aleshores $p = \frac{\partial y}{\partial \tau}$ i $q = \frac{\partial y}{\partial x}$ obté:

$$du = q\, d\tau + p\, dx \qquad \text{i} \qquad dy = p\, d\tau + p\, dx;$$

d'on: $d(y \pm u) = (p \pm q)\, d(\tau \pm x)$ i, per tant,

$$y + u = 2\varphi(at + x), \qquad y - u = 2\psi(at - x).$$

Finalment, doncs,

$$y = \varphi(at + x) + \psi(at - x), \tag{2b}$$

on φ i ψ són funcions arbitràries, determinades solament per les condicions inicials.[83] Però, d'Alembert, d'acord amb la filosofia sobre el concepte de funció que imperava en aquells moments, concluí que la funció arbitrària φ era contínua; és a dir, analítica; és a dir, diferenciable.[84]

El 1748 Euler introduí la idea segons la qual la posició d'una corba vibrant finita en un moment arbitrari t queda determinada per la seva posició inicial $y|_{t=0} = f(x)$ i per la seva distribució inicial de velocitats $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$. Això comportava un fet important: la funció arbitrària de d'Alembert $\varphi(x)$ —que, como hem vist, no ho era pas tant, d'arbitrària— es podia expressar en termes de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ —situació i velocitat inicial de la corda. Amb precisió:[85]

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(-x) &= f(x), && (1)\\ \varphi(x) + \varphi(-x) &= \frac{1}{2}\int g(x)\ dx. && (2) \end{aligned}$$

80 El 1727, Johann Bernoulli trobà l'expressió en el cas discret: carta al seu fill Daniel.

81 D'Alembert, J. [1747a], 214–219.

82 L'acumulació de resultats del càlcul diferencial augmentà molt ràpidament. El 1755, Euler escrigué el *Differential Calculus* on el càlcul de les equacions diferencials ordinàries es troba ja de forma força desenvolupada. En ell s'inclou la teoria de les diferencials totals, que Clairaut havia establert en els treballs de 1739 i 1740 i, abans, el 1734–35, el mateix Euler. S'estableix que

$$P\, dx + Q\, dy$$

és la diferencial exacta *df* d'una certa funció $f(x, y)$ si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Els símbols $\frac{\partial P}{\partial x}$ foren introduïts per Legendre, un dels matemàtics de la Revolució Francesa, el 1786. [Vegeu la nota 139.]

83 D'Alembert, a més, de les condicions inicials, $y(0, 0) = y(0, \ell) = 0$ i $\left.\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, en dedueix finalment que $y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x)$ i $\varphi(z + 2\,\ell) = \varphi(z)$.

84 Si més no, dues vegades diferenciable. Vegeu d'Alembert [1747b], art. 15–18.

85 Vegeu Euler [1749a], art. 11–29.

Però aleshores, observa Euler, les funcions $f(x)$ i $g(x)$ no han de ser pas necessàriament funcions *contínues* en el sentit de l'època que ell mateix havia precisat i, per tant, $\varphi(x)$ tampoc, ja que $f(x)$ és la posició inicial de la corda que solament cal que sigui dibuixable — és a dir, de traç seguit.

Ultra aquesta innovació, Euler analitza el cas particular en qu la posició inicial de la corda és periòdica —és a dir, analitza el cas de la periodicitat— i obté una solució en la línia de Taylor, però més general.[86] La funció $f(x) = y(0, x)$ ve donada per:

$$\alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \cdots$$

i la solució general, en aquest cas particular, és:

$$y(t, x) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi a t}{\ell}.$$

Aquest resultat, també l'obtingué Daniel Bernoulli (1700–1782), però per camins ben diferents: ho feu emprant raonaments físics.[87] El raonament de Bernoulli es basa en la superposició dels components harmònics de la vibració de la corda en cada instant; això fa que la vibració de la corda, en cada instant, presenti un comportament sinusoidal i d'ací dedueix que totes les corbes possibles són, no de la forma (2*b*), sinó de la forma:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \sin\ nx.$$

Però Daniel Bernoulli, per raons d'ordre físic —d'un problema físic és del que es tracta— "no inclou termes en t, reduint l'efectivitat de les seves afirmacions. En el seu desenvolupament solament usa sinus i això limita també la generalitat de la solució i, a més, no ofereix cap mitjà matemàtic per a calcular els coeficients a_n".[88] Per a ell, doncs, totes les solucions possibles s'obtenen com a combinacions trigonomètriques i aquesta solució ha d'incloure tant la de d'Alembert com la d'Euler.

Euler, però, considerà que la solució sinusoidal —pel fet que era periòdica i senar— no podia ser, en cap cas, la solució general del problema[89] ja que **no totes** les solucions són d'aquesta mena.

Enmig de la discussió intervé, tot just a l'inici de la seva brillant carrera matemàtica, J.-L. Lagrange. Es l'any 1759. Lagrange vol aclarir d'una vegada per totes, partint de raonaments matemàtics, qui té la raó en aquesta discussió. Malgrat les crítiques a què sotmet Euler i el seu mètode perquè, de fet, es restringeix a funcions contínues, Lagrange estableix finalment en un treball llarg i dens, que parteix del cas discret seguint les petjades de Johann Bernoulli (1755), que la conclusió d'Euler segons la qual tota corba de traç seguit pot servir per a donar-nos la solució general del problema és correcta. Fent un pas al límit, Lagrange aconsegueix[90]

86 Euler, L. [1749a], art. 30.
87 Bernoulli, D. [1755], 147–152 i 173–195, art. 1–4, 12–18 i 21–27.
88 Grattan-Guinness, I. [1976], 131.
89 Euler, L. [1765a], art. 1; [1765b], art. 22.
90 Lagrange, J.-L. [1728], I–X; 1–112.

$$\begin{aligned} y(t,x) &= \left[\frac{2}{\ell}\int_0^\ell Y(x)\ dx \sum_{n\geq 1} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell} \cos\frac{n\pi ct}{\ell} \\ &+ \left[\frac{2}{\pi\ell}\int_0^\ell V(x)\ dx \sum_{n\geq 1} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell} \sin\frac{n\pi ct}{\ell} \end{aligned} \tag{3}$$

on $Y(x)$ i $V(x)$ designen, respectivament, els desplaçaments i les velocitats inicials en el punt de coordenada x de la corda. Així es planteja una qüestió nova: quines funcions accepten desenvolupaments trigonomètrics?[91]

Per a la funció dels desplaçaments inicials obté

$$Y(x) = \left(\frac{2}{\ell}\int_0^\ell Y(x)\sum_{n\geq 1} \sin\frac{n\pi X}{\ell} dX\right) \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

i gairebé aconsegueix donar resposta a aquest nou problema, però como diu E. T. Bell "la seva consciència matemàtica **no** li permetia commutar els operadors $\int_0^\ell$ i $\sum_{n\geq 1}$ sense justificar-ho a partir de la seva pròpia recerca. Si ho hagués fet, s'hauria anticipat a l'anàlisi de Fourier".[92] Així s'arribà a la fi d'un camí; ara calia temps, un compàs d'espera, per veure cap a on calia seguir.[93]

3.2 Les integrals el·líptiques

La preocupació pel càlcul integral d'algunes funcions racionals la trobem ja el 1702 en Leibniz i en Johann Bernoulli.[94] Però el problema realment important el constituïa la preocupació per integrar funcions irracionals. Així, el 1694[95] Jakob Bernoulli es procupà

91 Aquestes funcions, en acceptar un algorisme únic per a ser descrites, foren contínues en el sentit d'Euler.

92 Bell, E.T. [1940], 532. Lagrange estigué a un pas d'obtenir els coeficients de Fourier de la funció $Y(x)$ arbitrària del seu desenvolupament en sèrie. Solament li calia fer una inversió entre els signes d'integral i de sumació. Hauria obtingut els coeficients a_n, coneguts com a coeficients de Fourier. Concretant, hauria aconseguit

$$Y(x) = \frac{2}{\ell}\sum_{n\geq 1} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \text{ on } a_n = \int_0^\ell Y(x)\sin\frac{n\pi X}{\ell}\, dX.$$

És curiós constatar, tot de passada, que quan cinquanta anys més tard Fourier presentà la seva descoberta, Lagrange (i també Legendre), s'oposà a ella —tan a prop com l'havia tingut— objectant manca de demostració.

93 El lector interessat en aquest tema pot consultar Bottazini, U. [1981], 21–43; Cerdà, J. [1984], 210–228; Dou, A. [1984], 11–28; Grattan-Guinness, I. [1970], 2–21; Kline, M. [1972], 503–514.

94 A l'*Acta Eroditorum*, 1702, Johann Bernoulli afirmava que la integral de qualsevol funció racional precisava solament de funcions trigonomètriques i logarítmiques. Leibniz, però, sostenia que això era impossible i oferia la descomposició complexa de $x^4 + a^4$:

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{i})(x - a\sqrt{i})(x + a\sqrt{-i})(x - a\sqrt{-i}).$$

Anys més tard Niklaus Bernoulli [1687–1759] establia [*Acta Eroditorum*, 1719] que

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2a^2x^2 = (x^2 + a^2 - ax\sqrt{2})(x^2 + a^2 + ax\sqrt{2}).$$

Per tant, la integral d'$\frac{1}{x^4+a^4}$ es pot donar en termes de funcions trigonomètriques i logarítmiques. [Vegeu Pla, J. [1992].]

95 Bernoulli, Jk. [1694], 262–270.

de la forma que assolia una cinta estreta i elàstica sotmesa a forces aplicades als seus extrems i obtingué l'equació diferencial

$$dy = \frac{(x^2+ab)}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}}\, dx,$$

la qual, segons que afirma, no era possible de resoldre en termes de funcions elementals.[96] També s'interessà per la lemniscata[97] i intentà de calcular-ne la longitud d'arc, des d'un dels vèrtexs a un punt arbitrari. Va obtenir la integral

$$s = \int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}\, dr$$

que, segons ell, tampoc no és integrable per mitjà de funcions elementals.[98] D'altres problemes d'interès per a l'astronomia i per a la física —problemes que menaven a integrals irracionals d'aquesta mena— foren els de la longitud d'un arc d'el·lipse,[99] el càlcul del període del pèndol simple.[100]

Aquestes integrals es coneixen amb el nom d'*integrals el·líptiques*;[101] els matemàtics del segle XVIII —malgrat que no arribaren a establir-ne mai la impossibilitat—[102] no foren pas capaços d'avaluar-les en termes de funcions algèbriques, circulars, logarítmiques o exponencials. Aquesta impossibilitat féu que la recerca de les integrals el·líptiques derivés vers el problema de la *reducció* de les integrals el·líptiques més complexes en funció d'integrals el·líptiques més simples —és a dir, de les que s'obtenien rectificant arcs d'el·lipse i/o d'hipèrbola— ja que, des del punt de vista geomètric, que en aquella

96 Euler a la seva obra sobre càlcul de variacions de 1744 estudià el cas general d'aquest problema, en un apèndix, i arribà a l'equació diferencial

$$dy = \frac{(a+bx+cx^2)}{\sqrt{a^4-(a+bx+cx^2)^2}}\, dx.$$

Euler, per tal de poder obtenir resultats físics, recorre a les sèries.

97 L'equació de la lemniscata de Bernoulli és, en coordenades cartesianes, $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ i, en polars, $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

98 Bernoulli, Jk. [1694b]. Recordem que, ja el 1655, John Wallis havia intentat de rectificar l'el·lipse i que s'havia trobat amb una integral que se li resistí a l'hora de resoldre-la. Jakob Bernoulli [1679] intentà per la seva banda de rectificar l'espiral parabòlica d'equació, amb coordenades polars, $(1-\rho)^2 = 2p\rho$.

99 Vegeu part de la nota 20. L'el·lipse en coordenades paramètriques s'expressa $x = a\sin\theta$, $y = b\cos\theta$ $[a<b]$ i la seva longitud per mitjà de la integral

$$L = a\int_o^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta.$$

En coordenades cartesianes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si fem $t = x/a$ i $k = 1-(b/a)^2$, s'obté

$$s = a\int_0^t \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt,$$

que és la integral de Wallis.

100 El període del pèndol és

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}}.$$

Recordem que, segons Galileu, el període d'un pèndol simple no depenia pas de l'amplada; l'error fou corregit per Huygens. [Vegeu Pla, J. [1989a].]

101 Els interessats en el tema poden consultar Bell, E.T. [1940], 405–414; Dieudonné, J. [1976], **II**, 1–113; Dieudonné, J. [1978], 293–315; Itard, J. [1984], 342–344; Kline, M. [1972], 411–422 i 644–651.

102 L'establí Joseph Liouville el 1833.

època era el que imperava, la longitud d'arcs d'el·lipses i hipèrboles semblava la més simple possible (després de l'arc de circumferència). Una altra qüestió fou plantejada per Johann Bernoulli en un dels seus treballs, datat el 1698: és possible que, malgrat que els arcs d'una certa corba no siguin rectificables, ho sigui la suma o diferència d'arcs d'aquesta corba? Bernoulli constatà que la paràbola cúbica, per exemple, tenia aquesta propietat.[103]

L'impuls, però, vindrà de la mà del matemàtic amateur Giulio Carlo de'Toschi di Fangano (1682-1766) que, el 1714,[104] resol el mateix problema que Johann Bernoulli però per a la quàrtica $y = x^4$. Estableix, a més, els lligams que han de satisfer els extrems dels arcs de les paràboles per tal que les diferències de dos arcs siguin rectificables,[105] és a dir, un segment rectilini (que està vinculat amb les longituds de les tangents en els extrems dels arcs). També establí que la suma i la diferència de certs arcs d'el·lipse i d'hipèrbola és algèbrica, malgrat que cada un d'ells per separat no sigui rectificable.[106] El 1718[107] Fangano dedica tot un treball a la lemniscata de Bernoulli, en el qual estableix un bon grapat de resultats relatius a aquesta corba particular:

1) Dóna l'arc de lemniscata com un arc d'el·lipse, més un arc d'hipèrbola, més una expressió algèbrica.[108]
2) Entre dues integrals que expressen arcs de lemniscata existeix una relació algèbrica, malgrat que cada integral, per separat, sigui una funció transcendent d'una nova naturalesa.[109]
3) Troba, finalment, la manera de duplicar, triplicar, quintuplicar l'arc de lemniscata

103 Jakob Bernoulli (1679) observà, en estudiar la rectificació de l'espiral parabòlica —l'element d'arc de la qual és $ds = \frac{1}{p}\sqrt{\rho^2(1-\rho)^2 + p^2}\, d\rho$— per la simetria respecte de $\rho = 1/2$ que, a cada arc d'espiral eixit de l'origen hom podria fer-li correspondre un arc de la mateixa longitud (però no semblant) que ix del punt $\rho = 1, \theta = 0$.
Johann, per la seva banda, (Bernoulli, Jh. [1698]) estableix que, a cada arc d'hipèrbola cúbica és possible d'associar-li un arc la longitud del qual difereix de la del primer arc per una quantitat algèbrica en x. Afirmà, a més, que les corbes parabòliques del tipus $y^n = x^m$ són tals que els seus arcs sumats o restats són iguals a línies rectes. La idea —com ens recorda Struik [1969], 326— consisteix en el fet que integrals que no són calculables per separat ho són quan se sumen o es resten. Per exemple,

$$a \cdot \frac{dx}{\sqrt{2ax + x^2}} \qquad \text{i} \qquad x \cdot \frac{dx}{\sqrt{2\,a\,x + x^2}}.$$

104 Fangano, G.C. [1714], 271.
105 Vegeu, al respecte, Kline, M. [1972], 414. Per a la cúbica $y = x^3$ la condició dels extrems d'integració és $x\,z = 1$. Fangano, G.C. [1714], *Opere*, **II**, 271.
106 Fangano, G.C. [1716].
107 Fangano, G.C. [1718].
108 El mètode que segueix Fangano és la integració per parts, que mena a

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}}\, dz = \int \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - az}}\, dz + \int \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - a^4}}\, dt - \frac{zt}{a},$$

on $t = a \int \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}$. Aquest resultat serà retrobat, independentment, per McLaurin l'any 1742.
109 De fet Fangano estableix que

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} \tag{4a}$$

admet la integral

$$x^2 + y^2 + x^2 y^2 = 1; \tag{4b}$$

és a dir, els dos arcs de lemniscata, eixits respectivament del vèrtex i de l'origen, tenen la mateixa longitud.

i això li permet dividir un arc de lemniscata en parts.[110]

L'obra de Fangano fou publicada el 1750 a la seva *Produzioni matematiche* i el seu contingut frapà Euler, que tot seguit aprofundí la qüestió. D'entre les aportacions[111] d'Euler considerarem el teorema de l'addició de les integrals el·líptiques. Euler analitza el resultat de Fangano segons el qual (nota 104)

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}, \tag{4a}$$

sempre que

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1, \tag{4b}$$

i afirma que la solució de Fangano constitueix solament una solució particular, i que $x = y$ n'és una altra i estableix aleshores la solució general[112]

$$x^2 + y^2 + c\,x^2\,y^2 = c^2 + 2\,x\,y\sqrt{1-c^2}, \tag{4c}$$

constata la validesa de l'afirmació per diferenciació directa[113] i constata també que conté les solucions particulars $x = y$, que s'obté per a $c = 0$, i la ($4b$) de Fangano per a $c = 1$.

Ara bé, una integral general de ($4a$) és, òbviament,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{4d}$$

i, per tant, c, x i y han d'estar lligats per ($4c$) que és una altra solució general (i, en conseqüència, ambdues són la mateixa).[114]

Però ($4c$) es pot posar de la forma

$$x = \frac{y\sqrt{1-c^4} \pm c\sqrt{1-y^4}}{1+c^2y^2}.$$

110 Si $\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}$, aleshores $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{-2dt}{\sqrt{1-t^4}}$ i això li permet de duplicar la lemniscata i, per tant, dividir el quadrant en tres parts iguals [*Opera*, **II, 309].**

111 Vegeu Euler [1761a] i [1761b]. En [1761b] ens ofereix el següent resultat: Si en una lemniscata d'eix $CA = 1$, construim una corda $CM = z$ i al costat una altra

$$CM_1 = u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4},$$

aleshores l'arc CM_1 que sustenta aquesta corda u és dues vegades l'arc que sustenta la corda CM [Struik, D.J. [1969], 379–380].
Euler, donat u, calcula $u^2, \sqrt{1-u^2}, \sqrt{1+u^2}$ i $\sqrt{1-u^4}$, així com també du i obté:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{2dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

i, com que els arcs CM i CM_1 són, respectivament, $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ i $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$, aleshores arc $CM_1 = 2\,\text{arc}\;CM + \kappa$, però $u = 0$, dóna $z = 0$, d'on: $\kappa = 0$.

112 Sembla que Euler "endevinà" aquesta solució general [Dieudonné, J. [1976], **II**, 8] inspirant-se en el cas $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, en el qual la integral és $\sin^{-1} x = \sin^{-1} y + \sin^{-1} C$. Aplicant sinus a ambdós membres i operant s'obté: $x^2 + y^2 = c^2 + 2\,x\,y\sqrt{1-c^2}$.

113 Struik, D.J. [1969], 382.

114 Kline, M. [1972], 418.

Això portà Euler a estudiar el cas general $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, on $R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ i, per al cas parell (és a dir: $B = D = 0$), obtingué el lligam entre x i y per tal que

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \tag{5a}$$

és

$$y = \sqrt{A}\ \frac{x\sqrt{P(c)} + c\sqrt{P(x)}}{A - E\,c^2\,x^2}, \quad \text{(on } c \text{ és la constant d'integració).} \tag{5b}$$

És la *fórmula d'addició* de la integral $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ i diu:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

sempre que x, y i c estiguin lligats per (5b).[115]

La tasca de les integrals el·líptiques la reprendria Adrien-Marie Lebesgue, hi dedicà dos estudis bàsics[116] a partir dels quals elaborà els seus *Exercices de Calcul intégral* (3 vol. 1811, 1817 i 1816) i el *Traité des fonctions elliptiques* (3 vol. 1825, 1826 i 1828). El resultat fonamental el trobem, però, en una memòria de 1793 dedicada a la construcció de taules de les integrals el·líptiques;[117] consisteix a classificar les integrals el·líptiques en

115 Euler, L. [1761b]. Euler, però, no estava gens content de la seva demostració i fou Lagrange qui, el 1766, en donà una demostració mitjançant un mètode directe que provocà l'admiració d'Euler. Recordem, tot de passada, que, a l'època, no es feia servir la notació $\int_0^x$; aquesta notació és deguda a Fourier, J. [1822], 237–238. [Vegeu Struik, D.J. [1969], 376.]

116 Legendre, A.-M. [1786], 616–643 i 644–683.

117 Legendre [1793]. Parteix de la integral general $\int \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}dx$, on $Q(x)$ és racional i $R(x)$ és un polinomi de quart grau; descompon després $Q(x)$ en elements simples de la forma x^m $[m \in \mathbb{Z}]$ i $\frac{1}{(1+n\,x)^p}$ ($p \geq 1$, sencer); considera $d\left(\frac{x^m}{\sqrt{R(x)}}\right)$ i mostra que les integrals $\int \frac{x^m}{\sqrt{R(x)}}dx$ són sumes d'una expressió algèbrica i d'integrals del mateix tipus, però amb $-1 \leq m \leq 2$; després fa una anàlisi semblant amb els termes provinents de $\frac{1}{(1+n\,x)^p}$ i, finalment, obté

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}dx = V(x) + \int (A + B\,x + C\,x^2)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum_i N_i \int \frac{dx}{(1+n_i\,x)\sqrt{R(x)}},$$

on $V(x)$ és una funció algèbrica i A, B, C i N_i són constants. Ara, como havia fet abans Euler, considera que $B = D = 0$ (és a dir, considera que $R(x)$ solament conté termes parells) i transforma $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ en $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, amb $0 < k < 1$, i anomena $\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Finalment obté

$$\int Q(\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = V(\sin^2\varphi) + \int (A + C\,\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \\ + \sum_i N_i \int \frac{d\varphi}{(1+n_i\,\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}.$$

[Dieudonné, J. [1976], **II**, 12.] Si fem $x = \sin\varphi$ s'obtenen les formes de Jacobi. Aquestes formes no són pas les úniques formes acadèmiques possibles i se n'han proposat moltes més, però avui dia les de Legendre conserven encara la seva utilitat.

tres tipus o espècies, que són les integrals conegudes com a integrals de:

$$\begin{array}{lll} \text{primera espècie} & F(\varphi) = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, & \text{(període del pèndol)} \\ \text{segona espècie} & E(\varphi) = \displaystyle\int_0^\varphi \Delta(\varphi)d\varphi, & \text{(longitud de l'el·lipse)} \\ \text{tercera espècie} & \Pi(\varphi) = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}. & \end{array}$$

Legendre anomenà φ l'amplada i k el mòdul i, per a les integrals de la tercera espècie, n era el paràmetre; quan $\varphi = \frac{\pi}{2}$ s'obtenen les integrals completes

$$F^1 = F(\pi/2), \quad E^1 = F(\pi/2), \quad \Pi^1 = \pi(\pi/2).$$

Legendre reescriu el teorema d'addició d'Euler per a aquestes tres menes d'integrals: si φ, ϕ i μ estan lligats per $\cos\varphi\cos\phi - \sin\varphi\sin\phi\,\Delta(\mu) = \cos\mu$,[118] aleshores

$$\begin{array}{rc} F(\varphi)+F(\phi) = & F(\mu), \\ E(\varphi)+E(\phi) = & E(\mu) + c^2\sin\varphi\sin\phi\sin\mu, \qquad (4) \\ \Pi(\varphi)+\Pi(\phi) = & \Pi(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\phi\sin\mu}{1+n-n\cos\varphi\cos\phi\cos\mu}, \qquad (5) \end{array}$$

on $\alpha = (1+n)(1+k^2/n)$.

Legendre obté també[119]

$$\frac{\pi}{2 = F^1(\varphi)E^1(\varphi') + F^1(\varphi')E^1(\varphi) - F^1(\varphi)F^1(\varphi'),}$$

per a certs valors particulars de φ i φ', tals que $F^1(\varphi') = \sqrt{3}\ F^1(\varphi)$.

A més, si designem per $F(k,\varphi)$ la integral de primera espècie de mòdul k i amplada φ, el teorema de Landen[120] li permet d'establir la transformació que, amb els anys, s'anomenarà *transformació quadràtica*: si $\sin\,(2\varphi' - \varphi) = k\,\sin\,\varphi$ i $k' = \frac{2\sqrt{k}}{1+k'}$, aleshores

$$F(k',\varphi') = \frac{1+k}{2}F(k,\varphi).$$

Els treballs que hem mencionat, però, fan referència solament a les integrals el·líptiques i **no** fan cap referència a les funcions el·líptiques. Aquesta diferència, que **no** *fou*

118 Lagrange a la *Théorie des fonctions analytiques.* [1797], 82–90 [*Œuvres*, **IX**, 135–143], aplica el seu mètode a l'equació

$$\frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}} = \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

i obté la integral $\cos z\cos u + \sin z\sin u\cos M = \cos m$, on m és la constant d'integració i $\sin M = k\sin m$.

119 Euler, L. [1728], 91–118 a *Opera*, (1)**21** havia establert

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

integrant via la integral euleriana *Beta*. Ho retrobem a Legendre, *Œuvres*, **I**, 60–61.

120 John Landen (1719–1790) demostrà, el 1775, que tot arc d'hipèrbola es pot rectificar per mitjà de dos arcs d'el·lipse, un descobriment força remarcable que ha fet que hom donés el nom de *teorema de Landen* no solament a aquest descobriment sinó també a la primera transformació coneguda de les integrals el·líptiques.

observada pels matemàtics que hem esmentat —Fangano, Euler, Lagrange, Legendre—, era indispensable per a donar el tomb i l'impuls que calia per a poder avançar; caldria, no obstant això, esperar les aportacions dels matemàtics de la generació següent —Niels Hendrik Abel (1802–1829) i Carl Gustav Jakobi (1804–1851) fonamentalment. L'obra de Legendre fou d'una importància cabdal per a les recerques d'aquests joves matemàtics i també per a Cauchy que, a partir d'elles, establiria l'eficàcia del seu mètode de residus. Amb tot, però, cal dir amb E.T. Bell que l'obra de Legendre neix gairebé vella.[121] La idea que Legendre no aconseguí d'assolir fou la idea d'inversió que portà a terme Abel, el 1827, "en proposar l'estudi de les funcions inverses"; en lloc d'estudiar la integral el·líptica

$$\alpha = \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

on α és una funció d'x, calia considerar x com una funció d'α. Aquesta funció —doblement periòdica— esdevé tot seguit font de nous camins, progressos i suggerències.[122]

3.3 La geometria diferencial clàssica

La geometria diferencial clàssica, tal com la coneixem, estudia els objectes geomètrics —corbes, superfícies, etc.— i la seva particularitat resideix en el fet que, començant amb resultats de geomteria analítica, fa ús dels mètodes de l'anàlisi matemàtica i, en particular, del càlcul diferencial. Els seus inicis cal cercar-los al segle XVIII, tan bon punt la geometria cartesiana i el càlcul diferencial s'hagueren començat a consolidar; el nom de *geometria diferencial*, però, l'introduí per primera vegada Luigi Bianchi (1856–1928), l'any 1894.[123]

Ens limitarem a donar una llucada força superficial als inicis d'aquesta geometria, tot fixant-nos en les corbes de l'espai i en les superfícies.[124] El 1731, Alexis-Claude Clairaut publicà les seves *Recherches sur les courbes à double courbure*, on es preocupà fonamentalment de la geometria analítica tridimensional.[125] Una corba de l'espai es

121 Bell, E.T. [1940], 409.

122 Abel, N.H. [1827] i Jacobi, C.G. [1828]. Recordem les paraules ja clàssiques de Jacobi: "sempre cal invertir".

123 "Aquesta història [la de la geometria diferencial 'clàssica'] està íntimament lligada a la del 'càlcul infinitesimal' i a la de la 'geometria analítica' d'una banda i a la de l'astronomia, la de la mècanica i la de la física, d'una altra" [Dieudonné, J. [1986], 357].

124 Els primers resultats relatius a les corbes planes els trobem en l'*Horologium Oscillatorium* d'Huygens [1673]; en aquest treball, íntimament lligat a la cicloide [Pla, J. [1989a]], Huygens introdueix les evolvents i les evolutes. Entre d'altres resultats estableix que "tota corba té una evoluta" i el punt essencial de la seva demostració passa per la consideració del radi de curvatura d'una corba en un punt.

També Newton a la seva *Geometria Analytica*, escrita el 1671 i editada el 1736, calculà, usant la teoria de les fluxions, la curvatura i obtingué

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

[Coolidge, J.-L. [1940], 320]. També se n'ocuparen Leibniz i Johann Bernoulli, respectivament, el 1686 i el 1691; Leibniz, a més, introduí el cercle osculador. El 1692 aquest matemàtic es preocupà per trobar l'envolupant d'una família de corbes, i establí, en la nostra notació, que l'envolupant de la família uniparamètrica de corbes planes d'equació

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

s'obté eliminant α del sistema $f(x, y, \alpha) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0$ [Leibniz, G.L. [1692], 289–292].

125 Malgrat la tasca i les aportacions de Clairaut en l'anàlisi de les corbes de l'espai a través de l'estudi de les seves projeccions en els plans de coordenades, el seu estudi no va mai enllà de les propietats

defineix com la intersecció de dues superfícies cilíndriques amb base a les projeccions en els plans de coordenades; analíticament cada superfície està caracteritzada per una equació de tres variables (és a dir, per una equació del tipus $f(x,y,z) = 0$);[126] l'espai corbat comparteix aleshores les curvatures corresponents a les dues corbes planes obtingudes per projecció. Estudià la tangent a les corbes de doble curvatura i observà que un espai corbat pot tenir una infinitat de normals, totes elles contingudes en un pla —el pla normal— perpendicular a la tangent. Calculà tanmateix la longitud de certs arcs corbats i l'àrea de certes superfícies.[127]

El primer progrés important en l'estudi de les corbes de doble curvatura cal atribuir-lo sense cap mena de dubte a Monge i al seu deixeble Michel-Ange Lancret (1774–1807). Monge, el 1771, en una memòria que no es publicà fins al 1785,[128] en la qual es preocupa fonamentalment de les superfícies desenvolupables, introdueix conceptes de nova factura: les normals a una corba Γ en un punt (no singular) P es troben en un pla Π, que és precisament el pla normal. En ell Monge distingeix una normal particular, l'eix, que és el límit de les interseccions del pla normal amb els plans normals propers. Els eixos són tots ells tangents a una nova corba Γ' i, a més, engendren una superfície desenvolupable que anomena la *polar desenvolupable* Σ. El pla normal Π és tangent a Σ en tots el punts de l'eix.

Monge, a més, ens ofereix l'equació del pla normal Π a una corba Γ d'equacions

$$y = \phi(x), \quad z = \psi(x)$$

en un punt genèric (x,y,z), per mitjà de les derivades respecte d'x:

$$X - x + (Y - y)\cdot\phi'(x) + (Z - z)\cdot\psi'(x) = 0.$$

La polar desenvolupable s'obté, seguint Leibniz, eliminant x de l'equació de Π i de la seva derivada respecte d'x. Estableix també la curvatura de l'espai corbat[129] com la

---

de primer ordre (és a dir, solament fa servir derivades primeres). [Vegeu Boyer, C.B. [1956], cap. 6–8; Coolidge, J.-L. [1940], 134–140 i [1948], 76–86].

126 Clairaut dóna les equacions d'algunes superfícies i posa de manifest que, per a descriure una corba de l'espai, calen dues superfícies. Mostra també que certes combinacions de dues superfícies que passen per una corba, com ara l'addició, constitueixen també una nova superfície que passa per la corba. D'aquest fet, en dedueix la manera d'obtenir les equacions de les projeccions d'una corba donada o, equivalentment, les equacions dels cilindres perpendiculars als plans de projecció.

127 Clairaut contribuí també amb d'altres aportacions a la geometria diferencial. Trobant-se a Lapònia amb Maupertuis, el 1733, demostrà que "en tota superfície de revolució, el sinus de l'angle d'una geodèsica i un meridià arbitrari [qualsevol posició de la corba generatriu] és inversament proporcional al radi de gir". És a dir:

$$\rho \sin\alpha = k,$$

per citar-ne una [Clairaut [1735], 186–194 i Brunet, P. [1952]].

128 Monge, G. [1850], 392 i s.

129 Euler, el 1775, dedicà un treball a l'estudi de la curvatura d'una corba de l'espai que donarà en forma paramètrica en funció de la longitud d'arc:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

i aleshores $dx = p\,ds, dy = q\,ds, dz = r\,ds$, on p, q, r són el cosinus directors i, per tant, compleixen

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

A més considerarà $\mathrm{d}s$ constant.

Per introduir la curvatura introdueix prèviamente la indicatriu esfèrica. En un punt $P = (x,y,z)$ de la corba considera una esfera de radi 1 i, en ella, el lloc dels punts dels vectors tangents unitaris a la corba en (x,y,z) i en $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ (essent $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)^{1/2}$ i $\mathrm{d}s'$ l'angle que formen les inversa del radi de curvatura PQ, on Q és el punt en el qual una perpendicular per P a l'eix talla l'eix; Q és el centre de curvatura.

$$\rho = \frac{[1+\phi'(x)^2+\psi'(x)^2]^{3/2}}{[\phi''(x)^2+\psi''(x)^2+(\psi'(x)\phi''(x)-\phi'(x)\psi''(x))^2]^{1/2}}.$$

La torsió —l'altra curvatura en el sentit de Clairaut— fou introduïda per M.-A. Lancret. Ell atribuí tres direccions principals a una corba donada[130] en un punt. La primera direcció principal és la que ve donada per la tangent. Successives tangents determinen un pla: és el pla osculador. La normal que pertany al pla osculador és la normal principal i constitueix la segona direcció principal. La perpendicular al pla osculador, la binormal, ens dóna la tercera direcció principal. La torsió és la variació de la binormal respecte de l'arc. Així, per a Lancret, si dμ designa l'angle entre dos plans normals successius i dν l'angle entre dos plans osculadors successius, aleshores

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad \frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{\tau},$$

on ρ és la curvatura i τ la torsió.[131]

Euler, a més, es plantejà l'estudi de les línies geodèsiques sobre una superfície. Així, el 1728[132] es plantejà el problema següent: donats dos punts fixos G i H i un punt mòbil M que es mou de G a H damunt d'una corba, en quina posició $MG+MH$ és mínim? I obté, quan la corba es mou en una superfície donada $f(x,y,z)=0$ (o, diferenciant-la, $P\,dx = Q\,dy - R\,dz$), que la línia geodèsica té l'equació[133]

$$\frac{Q\,d^2x + P\,d^2y}{Q\,dx + P\,dy} = \frac{dx\,d^2x + \,dy\,d^2y}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Aquestes investigaciosn portaren Euler, ja el 1744, Euler a l'estudi del càlcul de variacions.

L'estudi de les idees bàsiques de la geometria diferencial de les superfícies és força més tardana i cal buscar-ne els primers vestigis en un article d'Euler de 1767, *Recherches sur la courbure des surfaces.* En aquest treball s'obté el famós teorema d'Euler de la

dues tangents). El radi de curvatura és aleshores, per definició,

$$\rho = \frac{ds'}{ds} = \frac{ds^2}{[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]^{1/2}} = \frac{1}{[x''^2+y''^2+z''^2]^2}.$$

130 Lancret, M.-A. [1806], 416–454.

131 Serà Cauchy qui el 1826 imposarà aquest concepte i n'aclarirà el significat. Indiquem que Lancret, a diferència d'Euler, donava la corba en la forma $x=\phi(z)$ i $y=\psi(z)$.

132 Euler, L. [1728].

133 Vegeu Coolidge, J.-L. [1940], 324–325. Agafant eixos adequats s'obté que les coordenades dels punts G, H i M són, respectivament, $(-a,b,c)$, $(0,x,y)$ i (a,f,g) i la diferencial de la suma de distàncies és

$$\frac{(x-b)dx+(y-c)dy}{\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}} + \frac{(x-f)dx+(y-g)dy}{\sqrt{a^2+(x-f)^2+(y-g)^2}},$$

que ha de valer 0 . Damunt la superfície $P\,dx = Q\,dy - R\,dz$ resulta que, en M —on l'eix z és ortogonal a la tangent en M— tenim que $P\,dx = Q\,dy$, d'on s'obté finalment

$$\frac{(x-b)\,Q+(y-c)\,P}{\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}} = \frac{(x-f)\,Q+(y-g)\,P}{\sqrt{a^2+(x-f)^2+(y-g)^2}}.$$

Ara fem $a=dz$, $b=x-dx+d^2x, c=y-dy+d^2y, f=x+dx, g=y+dy$, substituïm, operem i hem acabat.

forma següent: la superfície que s'estudia, $z = z(x, y)$, la tallem per un pla arbitrari $z = \alpha x - \beta y + \gamma$. S'obté aleshores una corba plana la curvatura de la qual és[134]

$$\frac{\left[\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + p^2 + q^2\right]^{3/2}}{\left[(\alpha - q)^2 \frac{dp}{dx} + (\beta + p)^2 \frac{dq}{dy} + 2(\alpha - q)(\beta + p)\frac{dp}{dx}\right]\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}},$$

on

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{dq}{dy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{dq}{dy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Desencoratjat per la complexitat d'aquesta fórmula, decideix d'analitzar la curvatura de les seccions normals —és a dir, considera les corresponents als plans normals a la superfície—[135] i empra una altra notació. Elegeix la curvatura principal, que és la curvatura normal corresponent al pla normal perpendicular al pla OXY (també distingeix una segona curvatura principal, corresponent a la direcció perpendicular a aquesta primera). Aleshores a cada pla normal li associa un angle φ —l'angle que forma el pla normal i la secció principal— i obté la següent expressió per al radi de curvatura

$$\frac{-(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)^{3/2} \sec^2 \varphi}{(p - q \tan \varphi)^2 \frac{dp}{dx} + (q + p \tan \varphi)^2 \frac{dq}{dy} + 2(p - q \tan \varphi)(q + p \tan \varphi)\frac{dp}{dy}}$$

expressió que Euler dóna[136] per a cilindre $z = \sqrt{a^2 - y^2}$, el con $z = \sqrt{n^2 x^2 - y^2}$ i l'el·lipsoide $z^2 = a^2 - mx^2 - ny^2$ i que després transforma en

$$\frac{1}{L + M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi},$$

on L, M i N són funcions d'x, y, p, q, r, s, t, però no depenen de φ.

Aleshores d'entre totes les curvatures normals en un punt P de la superfície $k_\varphi = L + M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi$, Euler calcula quina és màxima i quina és mínima; derivant obté

$$\tan 2\varphi = \frac{N}{M}.$$

Les seccions normals que donen el màxim i el mínim són ortogonals i així obté les **dues** curvatures principals k_1 i k_2. Aleshores Euler efectua un canvi de variables de manera

134 Coolidge, J.-L. [1940], 325–326.

135 Una superfície $z = z(x, y)$ en cada punt $P = (x, y, z)$ té un pla tangent. El precursor fou A. Parent que, el 1700, calculà el pla tangent, en coordenades cartesianes, a l'esfera i a d'altres superfícies particulars. Autors com Clairaut, Euler i Monge admetien implícitament l'existència d'un pla tangent en cada un dels punts (no singulars) d'una superfície. L'any 1803 Lacroix mostrà que, d'entre tots el plans que passen per P, n'hi ha un tal que la distància a ell des d'un punt $P' = (x', y', z')$ pròxim a la superfície, prou "veí" a P, és d'ordre infinitesimal màxim en funció de la distància dels dos punts.
El 1813 Dupin i el 1826 Cauchy demostraren explícitament que les tangents a totes les corbes sobre la superfície que passen per P es troben en un mateix pla, que anomenaren el *pla tangent*. Cauchy, a més, trobà l'equació del pla tangent a la superfície $u(x, y, z) = 0$ en el punt $P = (x, y, z)$:

$$(X - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial u}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

La recta perpendicular per P a aquest pla tangent és la recta normal a la superfície en el punt P; qualsevol pla que conté la recta normal a la superfície en el punt P és un pla normal a la superfície en P; n'hi ha una infinitat.

136 Ríbnikov, K. [1974], 296.

que els angles de les dues curvatures principals siguin 0 i $\frac{\pi}{2}$ i obté

$$L + M = \frac{1}{\rho_1}, \quad L - M = \frac{1}{\rho_2}$$

i

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2},$$

ja que $N = 0$. Així obté la fórmula d'Euler:[137]

$$k_\varphi = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi.$$

Però l'estudi de les superfícies continuaria sota la pressió directa de la pràctica: la cartografia i la geodèsia i la necessitat d'aplicar-les. Aquesta pressió portà a l'estudi de les superfícies desenvolupables; així Euler, el 1771, a la seva memòria *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet*[138] introdueix la representació paramètrica d'una superfície

$$x = x(t,u), y = y(t,u), z = z(t,u)$$

i es pregunta "quines condicions haurien de satisfer aquestes funcions per tal que la superfície fos desenvolupable" —és a dir, desenrotllable isomètricament en el pla—, o sigui

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2,$$

considerant els paràmetres u, t com a coordenades rectangulars del pla. Considerà

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial u}du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial u}du, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial u}du$$

i, per tant,

$$(\tfrac{\partial x}{\partial t})^2 + (\tfrac{\partial y}{\partial t})^2 + (\tfrac{\partial z}{\partial t})^2 = (\tfrac{\partial x}{\partial u})^2 + (\tfrac{\partial y}{\partial u})^2 + (\tfrac{\partial z}{\partial u})^2 = 1 \quad (6)$$

$$\tfrac{\partial x}{\partial t} \cdot \tfrac{\partial x}{\partial u} + \tfrac{\partial y}{\partial t} \cdot \tfrac{\partial y}{\partial u} + \tfrac{\partial z}{\partial t} \cdot \tfrac{\partial z}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

137 L'any 1776, a l'*Académie des Sciences* fou presentada una demostració molt elegant per un matemàtic jove i desconegut que solament tenia 21 anys. Era Jean Batiste Marie Charles Mesnieur de la Place (1754–1793). Aquest il·lustre personatge havia treballat en hidràulica i també en qüestions relatives a la química amb Lavoisier. La idea de Mesnieur consistia a suposar que la superfície $t = t(u,v)$ era tangent al pla OUV en l'origen i, per tant, desenvolupant

$$t = \frac{1}{2}[cu^2 + 2euv + fv^2].$$

A l'origen

$$ddt = c\,du^2 + 2e\,du\,dv + f\,dv^2.$$

Suposant ara que, a l'origen $fc - e^2 \neq 0$, podem efectuar un canvi d'eixos i obtenim

$$ddt = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho}.$$

(Avui sabem, si bé Mesnieur no diu res al respecte, que $e^2 - cf$ i $c + f$ són invariants per rotació.) D'on:

$$c + f = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}, \quad e^2 - cf = -\frac{1}{r\rho}.$$

[Mesnieur, B. [1776], 481. Vegeu el teorema de Mesnieur a Dieudonné, J. [1986], 362.]

138 Euler, L. [1771].

Observa que el con i el cilindre són desenvolupables i que, alhora, són de revolució. Recíprocament, si una superfície de revolució és desenvolpuable damunt d'un pla, cal que s'hagi obtingut per la revolució d'una recta, ja que cal que l'equació $AB - BC = AC$ sigui invariant i això és l'equació d'una recta. També establí que la família de tangents a una corba arbitrària genera una superfície desenvolupable. Creia, però, en la validesa del recíproc que, de fet, és fals.

La teoria de les superfícies desenvolupables fou estudiada independentment per un dels matemàtics de la Revolució Francesa, Gaspar Monge. Els seus resultats més remarcables els trobem en el treball de 1771, *Mémoires sur les dévelopées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, publicat molt més tard, el 1785.[139] Segueix la presentació feta per Clairaut ja que, pel que sembla,[140] desconeix l'obra d'Euler. Aquest treball de Monge conté gran quantitat de conceptes nous i de propietats noves.[141] Entre d'altres qüestions trobem el càlcul de l'envolupant d'una família uniparamètrica de superfícies $V(x, y, z, \alpha) = 0$. Per veure on talla a una superfície infinitament veïna calcula $\frac{\partial}{\partial\alpha}V(x, y, z, \alpha) = 0$ i talla les dues superfícies

$$V(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}V(x, y, z, \alpha) = 0.$$

El tall d'ambdues superfícies és la corba característica. Eliminant α d'ambdues equacions obté l'envolupant de la família. Monge admet que, en cada punt de la corba característica, la superfície $V(x, y, z, \alpha) = 0$ i la seva envolupant "tenen el mateix pla tangent". A més les corbes caracterísitiques són tangents a una mateixa corba que satisfà, a més, l'equació $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}V(x, y, z, \alpha) = 0$; aleshores calculem x, y, z en funció d'α.

Monge ho aplica a una família uniparamètrica de plans $z = x\,\phi(\alpha) + y\,\psi(\alpha) + \alpha$. Elimina α d'aquesta equació i de l'equació $x\,\phi'(\alpha) + y\,\psi'(\alpha) + 1 = 0$. Afegint a aquestes dues equacions l'equació $x\,\phi''(\alpha) + y\,\psi''(\alpha) = 0$, obté x, y, x en funció d'α.

El 1715 Monge presenta a l'Acadèmie un altre article[142] relacionat amb les superfícies desenvolupables. Hi introdueix la següent definició de superfície desenvolupable: "és aquella superfície que, sense distorsió, pot ser aplanada" (o "aquella en la qual hom pot ajustar-hi un pla"). Estableix que tota superfície desenvolupable està constituïda per les tangents a una certa corba de l'espai. A més dóna una representació general de les superfícies desenvolupables: observa que, en aquest tipus de superfícies, la normal té la mateixa direcció tot al llarg d'un generador i, per tant, els cosinus directors són funcions d'un sol paràmetre

$$p = F(q), \quad \mathrm{d}z = F(q)\,dx + q\,dy$$

i, per tant,

$$dz = d[x\,F(q) + qy] - [x\,F'(q) + y]\,dq$$

d'on resulta que $[x\,F'(q) + y]\,dq$ és una diferencial total i, per tant, $y + x\,F'(q)$ és funció de q:

$$z = x\,F(q) + q\,y + f(q) \quad \text{i} \quad y = -x\,F'(q) - f'(q)$$

139 Monge, G. [1785].
140 Kline, M. [1972], 566.
141 Vegeu Coolidge, J.-L. [1940], 363; Dieudonné, J. [1986], 364; Kline, M. [1972], 566.
142 Monge, G. [1780].

i finalment[143]

$$z = x\,[F(q) - F'(q)\,q] + f(q) - q\,f'(q), \quad \text{on} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

També estableix que $r\,t - s^2 = 0$. Donada una corba $x = v, y = \psi(v), z = \phi(v)$, considerem el seu pla tangent en un punt $y = \psi(v) + (x - v)\,\psi'(v), z = \phi(v) + (x - v)\,\phi'(v)$. Resolem ara v en funció de x i y, que esdevenen aleshores variables independents:

$$\begin{aligned} 0 &= (x - v)\,\psi''\,\tfrac{\partial v}{\partial x} + \psi', & 1 &= (x - v)\,\psi''\,\tfrac{\partial v}{\partial y} \\ p &= (x - v)\,\phi''\,\tfrac{\partial v}{\partial x} + \phi', & q &= (x - v)\,\phi'' \cdot \tfrac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

i per tant[144]

$$p = \frac{\phi'\,\psi'' - \psi'\,\phi''}{\psi''}, \quad q = \frac{\phi''}{\psi''} \quad \text{i} \quad \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Monge estableix que les superfícies desenvolupables poden tractar-se com el lloc geomètric de les tangents a les corbes de l'espai i, també, que en essència són les envolupants de certes famílies de plans biparamètrics.[145]

Veiem, doncs, que Monge s'allunya cada cop més de la presentació algèbrica i s'apropa a una no algèbrica, força més natural, que s'estableix mitjançant equacions en derivades parcials: una classificació diferencial de les superfícies constituira el contingut de les seves lliçons a l'*École Polytechnique*, lliçons que constitueixen el que hom coneix com a*Feuilles.*[146] Troba que moltes superfícies corresponen a equacions diferencials en derivades parcials de primer ordre —superfícies cilíndriques, còniques, de revolució, acanalades,[147] helicoidals, *dels vessants dels terraplens.*[148] Així, per exemple, considerant les superfícies cilíndriques com aquelles superfícies en les quals el pla tangent és paral·lel a la generatriu, obté

$$x = a\,z, \qquad y = b\,z$$

que dóna l'equació diferencial: $a\,\frac{\partial z}{\partial x} + b\,\frac{\partial z}{\partial y} = 1$. Tenint en compte que la generatriu de la superfície cilíndrica és paral·lela a una recta s'obté

$$y - b\,z = -\varphi(x - a\,z),$$

on φ és una funció arbitrària; anàlogament per als cons i els terraplens.[149]

Naturalment aquesta aproximació de la teoria de les superfícies per mitjà de les equacions diferencials en derivades parcials portà Monge a estudiar a bastament les equacions diferencials en derivades parcials, però això és una altra història.[150]

---

143 La notació $\frac{\partial z}{\partial x}$ apareix per primera vegada al segle XIX i és suggerida per Jacobi a la seva teoria dels determinants [1841], si bé havia estat proposada per Legendre el 1786; Monge, G. [[1850], 48] introduí les notacions $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$; en canvi introdueix r, s, t per designar les derivades de segon ordre, que anomena *différences partielles du second ordre* [Monge, G. [1850], 71].

144 Cal excloure els cilindres perpendiculars al pla xy.

145 Establí la diferència entre superfícies desenvolupables i reglades.

146 Aquestes *Feuilles* són un bon exemple de la seva gran habilitat geomètrica i del seu gran coneixement analític.

147 Un cercle perpendicular a una certa corba es desplaça mantenint el seu centrre constantment en la corba.

148 En un terraplè, les línies de màxim descens són rectes de pendent constant.

149 Per als cons: $(x - a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c$ i $\frac{y-b}{z-c} = \varphi(\frac{x-a}{z-c})$; per als terraplens: $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = a^2$ i $z^2 = a^2[(x - a)^2 + (y - \varphi(a))^2]$.

150 Kline, M. [1972], 536–540; Ríbnikov, K. [1974], 265–267 i 302–303.

No podem pas dubtar de les grans aportacions dels matemàtics del segle XVIII —Euler, Lagrange, Mesnieur, etc.— i de Monge i els seus nombrosos deixebles[151] durant la primera meitat del segle XVIII, però la gran empenta havia de venir també en aquesta ocasió amb un **nou** canvi de punt de vista: aquest nou punt de vista l'aportà Carl Friedrich Gauss (1777-1855) amb la geometria intrínseca de les superfícies; és a dir, propietats invariants respecte del doblament i, fonamentalment, amb l'aportació genial de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) de 1854 amb el desenvolupament amb profunditat de la geometria intrínseca de qualsevol espai. Dieudonné és clar:[152] "Les etapes essencials del desenvolupament de la Geometria diferencial són les següents:

1. Al segle XVII, Fermat i Descartes creen la geometria analítica i Newton i Leibniz desenvolupen els algorismes del càlcul diferencial que, conjuntament, permetran l'estudi de corbes i superfícies des del punt de vista diferencial. Les corbes planes, des d'aquest punt de vista, són estudiades per Kepler, Descartes, Fermat i Pascal; el problema del pèndol permet Huygens d'introduir l'evolvent i l'evoluta. Al segle XVIII i començament del XIX, els treballs de Clairaut, Euler, Monge, Mesnieur, Dupin, Serret i Frenet estudien les corbes i superfícies submergides en l'espai de tres dimensions.
2. El 1827 s'obren noves vies a la geometria diferencial amb les aportacions de Gauss, que introdueix la "geometria intrínseca" d'una superfície, utilitzant "coordenades curvilínies" en lloc de coordenades cartesianes i mostra que la curvatura total solament depèn de l'element ds^2 de la superfície. Dóna, de forma incipient, la idea de "carta local" en un punt de la varietat, idea que esdevindrà fonamental tant en la geometria diferencial com en la topologia contemporànies. El teorema de Gauss-Bonnet, que lliga la curvatura total de la superfície amb l'àrea d'un triangle geodèsic, és el primer resultat que lliga la curvatura amb propietats globals; d'altres resultats d'aquesta naturalesa els obté Bonnet en el seu estudi de les geodèsiques.
3. Enmig del segle XIX un nou impuls ve de Riemann pel que fa a la geometria diferencial, el qual, d'una banda, empès per la mecànica i la física, comença l'estudi general dels espais amb un nombre arbitrari de dimensions, i d'una altra desenvolupa les idees de Gauss considerant, de cop, "multiplicitats" de dimensió arbitrària que no se suposen submergides en un espai euclidi: comença així l'estudi de la geometria diferencial moderna.[153]

Podíem haver ofert molts d'altres exemples per sostenir la nostra tesi,[154] però l'extensió ens ha semblat suficient i creiem que la tesi ha estat ben defensada i ha quedat

151 Citem André-Marie Ampère (1775-1836), Lazare Carnot (1753–1823), Pierre-Charles-François Dupin (1784–1873), Jean-Batiste Joseph Fourier (1768–1830), Jean-Frédéric Frenet (1816–1900), Denis Poisson (1781–1840), Joseph Alfred Serret (1819–1885).

152 Dieudonné, J. [1986], 358.

153 El lector interessat en la qüestió pot consultar Dieudonné, J. [1986], 357–377; Coolidge, J.-L. [1940], 318–342, 343–387; Ríbnikov, K. [1974], 264–270, 302–305.

154 La teoria dels nombres rep en mans d'Euler, Lagrange i Legendre un impuls enorme des que Fermat desvetllà el seu interès i la naturalesa de la seva recerca; caldrà, però, esperar Gauss i els seus **nous** conceptes, mètodes i plantejaments per donar el salt definitiu. La teoria de les equacions algèbriques —teorema fonamental de l'àlgebra i resolució de la quíntica— reberen un impuls important amb d'Alembert, Euler i, sobretot, Lagrange, entre d'altres, però novament seran les idees **noves** de Gauss, Abel i Galois les que donaran el canvi de rumb indispensable per continuar avançant. La geometria no euclidiana és desenvolupada de forma implícita per Saccheri i Legendre, però sempre amb la intenció de mostrar la validesa del cinquè postulat; sense les aportacions **noves** de Gauss, Bolyai i Lobachevsky, però, aquest camí no hauria portat enlloc. El concepte d'infinitèsim, d'indivisible, de primera i darrera raó es trobaven a bastamente en les obres de càlcul infinitesimal de d'Alembert —que fou l'únic que

establerta més enllà de qualsevol dubte raonable.

4 Els matemàtics de la Revolució Francesa i la seva tasca política, docent i didàctica

Els principals artífexs de la Revolució Francesa,[155] Voltaire, Rousseau, d'Alembert i Diderot no visqueren pas la caiguda de la Bastille —aquest fet històric puntual que hem près com a síntesi de la Revolució Francesa. En canvi els sis matemàtics il·lustres que hem anomenat els matemàtics de la Revolució Francesa visqueren tots ells aquest fet històric singular. Els sis pertanyen pràcticament a una mateixa generació (i tots tenen la mateixa edat). Amb tot, però, els tres homes els noms dels quals comencen amb L —Lagrange, Laplace i Legendre— no prengueren part activa en el fet històric de la presa de la Bastille, ni tampoc en cap dels fets polítics i ideològics que havien de transformar completament França, i de retruc Europa, ja fossin anteriors o posteriors a la caiguda de la Bastille. Condorcet, en canvi, hereu de la ideologia de Diderot, serà un dels artífexs d'aquest enrenou revolucionari i alhora en serà víctima; perseguit i empresonat, se suïcidà el 1794.[156] La resta, en canvi, foren honorats o bé per la República o bé per l'Imperi: Lagrange, Monge i Carnot esdevingueren comtes de l'Imperi; Laplace fou nomenat marquès i Legendre aconseguí un enorme prestigi.[157]

Cap d'ells no està vinculat amb la universitat.[158] En canvi, gairebé tots ells estigueren vinculats a les Acadèmies Militars i, naturalment, a les Societats de Ciències i, en particular, a la de París; així, tenim que

Joseph-Louis Lagrange el precoç, és l'únic que no és nascut a França; natural de Torí, prové d'una família de negociants amb afers a Itàlia i França. Fou professor de l'*Académia Militar di Torino*; més tard obtingué un mecenatge de Frederic el Gran, de Prússia, i després de Lluís XVI de França.

Marie Jean Antoine Caritat de Condorcet l'intel·lectual, prové, a l'igual que Voltaire, Diderot i d'Alembert, d'una família de sacerdots i de soldats. Va estudiar als jesuïtes i més tard al Collège de Navarre, però no va seguir pas, com era el desig de la seva família, la carrera militar i no esdevindrà pas capità de cavalleria.

Gaspar Monge el professor, fou fill d'un botiguer pobre; gràcies a un lloctinent coronel entrà a l'École Militaire de Méziers, de la qual després esdevindria professor.

Pierre-Simon Laplace el físic, és també d'ascendència humil, però gràcies a d'Alembert aconseguí d'ingressar, com a professor, a l'École Militaire de Paris, el 1769.[159]

Adrien-Marie Legendre l'aneguet lleig, malgrat ser de bona família no s'educà tampoc a la universitat; ho feu al College Nazarino des Quatre Nations; fou, en canvi, professor de l'École Militaire de Paris, de la qual també era professor Pierre-Simon Laplace.

---

tingué la intuïció de límit—, Euler, Lacroix, Landen, i molt especialment de Carnot, però seran les intuïcions **novelles** de Cauchy i Weierstrass les que hauran de permetre l'impuls imparable en la consecució del rigor. Etc.

155 Aquest apartat està àmpliament inspirat en l'article de Boyer de 1960 i en el seu llibre d'història de les matemàtiques de 1968.

156 És l'únic dels sis matemàtics de la Revolució Francesa que no passà dels seixanta anys.

157 Amb tot cal considerar-lo, respecte dels altres quatre, l'aneguet lleig. Vegeu Itard, J. [1984], 337–338.

158 Les universitats del segle XVIII a França no prengueren part activa en el desenvolupament de la Il·lustració i tampoc no fou en elles on es desenvolupà la ciència ni les matemàtiques.

159 Fou l'únic que passà per la universitat.

Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot el polític, era fill d'una família burgesa i entrà sense cap mena de dificultat a l'École Militaire de Méziers, on era professor Gaspar Monge.

Tots ells, doncs, els trobem vinculats d'una o altra manera, durant un període de temps més llarg o més curt, a les acadèmies militars; la seva tasca, però, traspassà no solament les parets de les acadèmies militars sinó àdhuc les fronteres de França, i envaïren Europa amb tanta força i violència, almenys, com les tropes de Napoleó.

Tots ells, a més, begueren de les mateixes fonts; una de les enciclopèdies de més èxit del segle XVIII fou la de Bézout, un professor de l'Acadèmie Militaire de Méziers a la qual, com ja hem fet notar, assistiren Monge i Carnot. El seu *Cours de mathématiques* tingué molta influència fins gairebé mitjan segle XIX, influència que arribà a Amèrica del Nord, on en trobem parts, en anglès, entre els textos usats a l'Acadèmia Militar de West Point, entre d'altres.[160]

A França la geometria analítica i el càlcul diferencial s'estudiaven a les obres un xic sistematitzades del marquis de l'Hôpital —*Analyse des infinitement petits* [1696] i *Traité analytique des sections coniques* [1707]. L'Hôpital no fou mai professor, però la seva obra no tindrà rival durant tot el segle XVIII, probablement per la seva qualitat didàctica i pels seus continguts força abastables. L'obra clau, però, fou l'obra en dos volums, enormement didàctica i completa i alhora original i pregona, d'Euler, *Introductio in Analysim Infinitorum* (1748, 2 vol.). Aquesta obra assentaria les bases de l'anàlisi matemàtica superior, esdevindria lectura obligada per a tots els qui volien conèixer a bastament l'estat del càlcul diferencial i de la geometria analítica; la seva influència és difícilment avaluable globalment.[161]

Tots ells veieren la seva vida sotregada per la Presa de la Bastille. Tots ells, però, ja havien publicat quelcom abans d'aquesta data històrica:

Lagrange havia publicat ja la seva *Mécanique Analytique* (1788) i diversos treballs en gairebé tots els camps de les matemàtiques.[162]

Condorcet havia elaborat i editat *De Calcul Integral* (1765) i l'*Essai sur l'Application de l'Analyse aux probabilités des decisions rendues à la pluralité des voix* (1785).

Monge havia presentat ja diverses memòries a l'Acadèmie des Sciences i havia publicat el seu *Traité Elémentaire de Statique* (1788).[163]

Laplace i Legendre publicaven assíduament articles importants en camps força diversos.[164]

Carnot l'any 1786 havia vist ja la segona edició del seu *Essai sur les machines en general.*

160 Trobem traduïda fonamentalment la seva quarta part, que tracta dels principis de la mecànica i els lligams amb la navegació.

161 A diferència, però, de l'obra de l'Hôpital, no fou reeditada durant el segle posterior a la seva publicació.

162 Havien transcorregut els seus períodes anomenats *torinès* i *berlinès.*

163 La seva *Géométrie Descriptive* no s'havia publicat perquè els seus superiors van considerar que era necessari mantenir-la com a matèria reservada en defensa de l'interès nacional. També publicà certs resultats experimentals sobre l'aigua realitzats amb col·laboració de Lavoisier, una altra de les víctimes de la Revolució.

164 El primer treball de Legendre data ja dels seus anys d'estada a l'escola, quan tenia tan sols 18 anys. Els edità el 1774 el seu mestre en un *Traité de mechanique.* Les seves primeres memòries a l'Acadèmie des Sciences daten de gener de 1783 [Itard, J. [1984], 335]. Laplace començà a escriure els seus articles de probabilitat a partir de 1774, però sembla que la seva tasca productiva havia començat el 1769, quan tot just tenia vint anys.

Malgrat tot, però, el seu comportament davant els esdeveniments polítics que portaren a la caiguda de la Bastille els distingeix de forma clara. Condorcet, fisiòcrata, filòsof i enciclopedista, era del cercle de Voltaire i de d'Alembert. Fou un idealista inquiet i visionari. El preocupava tot el que tenia a veure amb el benestar de la humanitat. Malgrat ser marquès, les injustícies de l'*Ancien Régime* el portaren a treballar a favor de la reforma; creia que l'educació aconseguiria d'eliminar el vici; defensà l'educació lliure i pública, una actitud admirablement esperançada en el futur i, en especial, en aquell moment històric i el seu esdevenidor immediat. La seva tasca matemàtica és pionera en el camp social: aplicà les probabilitats i l'estadística als problemes socials. Les seves idees sobre educació lliure i pública, que presentà a l'Assemblea Legislativa i que publicà el 1792, no foren portades a terme fins molts anys després de la seva mort. Tanmateix li comportaren gran quantitat de problemes en el camp polític, problemes el final dels quals fou tràgic per a la seva pròpia vida.

Monge, en canvi, era plebeu i membre del club jacobí. Fou, doncs, més radical que els membres de l'ala girondina, més moderada, a la qual Condorcet mostrava les seves simpaties. Malgrat ser més radical també tindria problemes. Se li assignà un paper en la reforma dels pesos i mesures ordenada per l'Assemblea Constituent de 1790, però el seu treball d'examinador de la marina el mantingué allunyat de París dos anys. Fou nomenat ministre de Marina el 1792 a suggerència de Condorcet; aquest càrrec el portà a haver de signar el document referent al judici i l'execució del rei Lluís XVI, però la incompetència de la marina ens els esdeveniments militars l'obligà a dimitir. Es mantingué sempre al servei de la República i la Revolució, però en una situació compromesa i poc segura. Monge es preocupà intensament per la creació d'institucions d'ensenyament superior. A partir de 1794 fou membre de la comissió encomanada d'edificar una institució d'aquesta mena. Així contribuí, amb la seva passió i tasca personal, a l'aparició de l'École Polytechnique. En fou excel·lent mestre i brillant administrador. Els seus cursos de geometria descriptiva arribaren a tenir una assistència de 400 alumnes. Però, a més de l'École Polytechnique, es creà també, en aquesta mateixa època, l'École Normal: aquesta escola estava destinada a formar els futurs mestres, mestres educats en la ideologia de la Revolució d'acord amb les seves directrius; aquests mestres havien de sorgir d'alumnes seleccionats amb molta cura;[165] obrí les seves portes amb molta precipitació, però malgrat tot arribà a reunir entre 1.400 i 1.500 estudiants. La seva facultat de matemàtiques assolí un nivell molt alt i, entre els seus professors, hi trobem Lagrange, Laplace, Monge i Legendre. Una de les tasques indirectes de Monge fou el que s'ha anomenat la *revolució analítica* —revolució que fa referència a la gran empenta que rebé la geometria de Descartes—; entre 1798 i 1802 aparegueren quatre geometries analítiques elementals, producte totes elles de les lliçons donades a l'École Polytechnique.[166]

El personatge més notable i més íntimament vinculat als afers polítics i a la República i a l'Imperi fou probablement Carnot, conegut també com l' *"Organitzador de la victòria"*. Aquest insigne personatge organitzà l'exèrcit i el portà a la victòria a Wattignies. De retorn a França votà a favor de la mort de Lluís XVI; tenia molts enemics, entre els quals cal remarcar Robespierre, que esperava la primera derrota per demanar el seu cap.[167] El 1797 negà, en canvi, el seu suport a un cop d'estat i això l'obligà a emigrar, malgrat haver format part de tots els comitès i haver arribat al Directori. La seva cadira de la secció de geometria de l'Académie des Sciences passà a Bonaparte, per vot unànime

165 Burton, D.M. [1985].
166 Boyer, C.B. [1968], 604; Collette, J.P. [1979], **II**, 154.
167 El cap que caigué fou, en canvi, el de Robespierre.

inclòs el de Monge. Tornà, però, l'any 1797 i el 1799. Fou nomenat ministre de la Guerra sota l'Imperi i se li retornà la seva cadira a l'Académie, alhora que se li concedí el títol de comte de l'Imperi. Durant l'exili publicà les seves *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*. Fidel a Napoleó, hagué d'emigrar novament després de la derrota de Waterloo i el retorn de la monarquia en la persona de Lluís XVIII. Darrere seu deixà una família de científics i polítics molt il·lustre.[168]

Tots ells, però, tant els qui ideològicament i política estigueren vinculats amb els esdeveniments polítics i amb la República com els qui es mantingueren allunyats de la Revolució, es veieren units en un afer important: la reforma del sistema de pesos i mesures.[169] El 1790, Tayllerand proposà la reforma dels pesos i les mesures. La qüestió fou enviada a l'Académie des Sciences i aquesta nomenà un *comitè* que havia d'elaborar un projecte. En aquest comitè hi havia, entre d'altres científics, Lavoisier, Lagrange i Condorcet.[170] Una primera dificultat la introduí la discussió sobre l'elecció del sistema de numeració: el decimal o el duodecimal. Aquest darrer fou rebutjat gràcies, en part, a l'aferrissada defensa que Lagrange féu del sistema decimal. La segona dificultat la presentaven les alternatives existents en relació amb la unitat de longitud: una d'aquestes alternatives consistia a agafar com a unitat de longitud la longitud del pèndol que bat 1 segon. L'equació del període del pèndol és

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

i, per tant, s'hauria aconseguit com a longitud estàndard[171] $\frac{g}{\pi^2}$. Legendre, però, malgrat que no formava part del comitè influí en les seves decisions de forma important; havia aconseguit, prèvia triangulació, mesurar la longitud del meridià terrestre que unia Dunkerke i Barcelona.[172] El comitè decidí d'establir que el metre era igual a "la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre".[173]

La comesa estava gairebé acabada el 1791, però hi hagueren retards en la posada a punt i, el 1793, la Convenció decidí suprimir l'Académie des Sciences i alhora reforçar el Jardin des Plantes. Aquesta decisió pot ser el resultat de dos fets importants i independents. Un de polític: l'Acadèmie estava governada i regida per homes de més edat que no pas el Jardin i això la convertia en una institució més conservadora respecte de les idees dels republicans i dels revolucionaris i, en canvi, el Jardin era més revolucionari. Un d'ideològic: Rousseau i Voltaire defensaven un "retorn a la naturalesa" i això féu que, a França, es donés, entre el polítics, una situació d'una certa bel·ligerància, en la línia de Gœthe, contra la física, sobretot la física teòrica. El Jardin des Plantes oferia una ciència més segura. La clausura de l'Académie suposà un cop fort per a les ciències teòriques i, en particular, per a les matemàtiques; amb tot, però, es mantingué el Comitè de Pesos i

168 Lazare Carnot (1753–18239, l'organitzador de la victòria; els seus fills Sadi Carnot (1796–1832), físic, i Hippolite Carnot (1801–188?), membre de l'Assemblea i senador, i els fills d'aquest darrer, Sadi Carnot (1837–1894), president de França el període 1887–1894, i Adolphe Carnot (1839–1920), químic i nomenat membre de l'Académie des Sciences el 1895.

169 Aquesta reforma pot semblar-nos menys important, però per a la mentalitat dels prohoms de la República ho era força; una de les preocupacions dels il·lustrats era la unificació de França, unificació ideològica, lingüística, política, en els costums, en les lleis, en les idees, en les mesures, etc.

170 Legendre, malgrat el seu gran prestigi, inicialment en fou exclòs per qüestions d'ordre polític.

171 La longitud estàndard, la unitat de longitud, hauria depès de la gravetat g; aquesta dificultat s'hauria pogut resoldre fixant un valor estàndard de g, o bé agafant com a valor de g el valor de la gravetat en algun punt concret de la Terra, per exemple el valor de la gravetat a París.

172 També en aquesta ocasió era necessari triar un meridià com a meridià estàndard.

173 Del meridià mesurat per Legendre. Avui dia sabem que les mesures de Legendre eren força grolleres.

Mesures per la seva importància política, si bé se'n suprimí Lavoisier[174] i s'hi incorporà Monge. També Lagrange estigué a punt de perdre el seu lloc a l'esmentat Comitè, ja que les lleis de la República prohibien que un estranger ocupés un càrrec d'aquesta mena,[175] però no fou així i en fou el president. Més tard el Comitè passà a dependre de l'Institut National que substituïa l'Acadèmie. El 1802 n'eren membres Lagrange, Laplace, Legendre i Monge. El comitè finalitzà la seva tasca el 1799 i, amb el pas dels anys, hi havien participat cinc dels sis matemàtics de la Revolució Francesa.[176]

* * *

En resum, doncs, podem afirmar que les matemàtiques estigueren presents a la ideologia de la Il·lustració, que, en definitiva, és la ideologia de la Revolució Francesa, i també que estigueren presents en una de les tasques científiques més fructíferes d'aquell moment històric, col·locant França i les matemàtiques que feien a França els matemàtics francesos de la Revolució en un cim a partir del qual per a poder anar més enlaire caldria encetar un nou single; però, a més, aquests matemàtics prengueren part, amb més o menys intensitat, en la Revolució, i/o en algunes de les obres que la Revolució, i després l'Imperi, portaren a terme. No obstant això, hem de concloure que les seves obres matemàtiques concretes, malgrat l'enorme qualitat i quantitat, **no són pas revolucionàries**, amb la possible excepcio d'alguns treballs i resultats puntuals —per exemple els resultats de probabilitat de Laplace. Caldrà esperar la generació següent, que iniciarà el seu camí amb l'obra indiscutiblement revolucionària de Carl Friedrich Gauss.

Corbera del Llobregat, 15 de Juliol–2 de setembre 1989

Referències

La paginació fa referència a l'edició citada de la traducció castellana, quan existeix; altrament fa referència a l'edició de l'original citada a la bibliografia.

Abel, Niels Henrik

[1827] "Recherches sur les fonctions elliptiques". *Journ. für Math.*, **3**, 160–190. *Œuvres*, 346–388.

[1828] "Recherches sur les fonctions elliptiques". *Journ. für Math.*, **2**, 101–181. *Œuvres*, 263–345.

[1841] "Mémoires sur une propiété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes". *Mém. Acad. Sci.*, 1826. Paris. (Publicat a *Mém. des savants étrangers*, **7**, 1841, 176–264.) *Œuvres,145–211.*

[1881] *Œuvres*, 2 vol., ed. Sylow i Lie. Oslo.

Apol·loni

[**−225**] *Les Còniques.* Vegeu Vera, F. [**1970**] , vol. II, 317–454.

Arendt, Hannah

[1965] *On Revolution.* The Viking Press. New York.

174 Lavoisier fou una víctima més de la Revolució Francesa. Quan Lagrange conegué la notícia de l'execució de Lavoisier digué: "Només ha fet falta un instant per a prendre-li la vida, una vida que necessita més de cent anys per a ser produïda".

175 Lagrange fou expressament exclòs d'aquesta llei.

176 L'únic que mai no hi estigué vinculat fou el jove Carnot.

Arquimedes

[−**250**] *Sobre l'espiral.* Vegeu Vera, F. [**1970**] , vol. II, 147–183.

Bell, Eric Temple

[**1940**] *Development of Mathematics.* McGraw Hill. New York. Hi ha traducció castellana de R. Ortíz: *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México, 1949.

Bermudo, José Manuel

[**1989**] "El ciudadano del 89". *Inauguració del curs Acadèmic 89–90.* Publicacions de la Universitat de Barcelona. Barcelona.

Bernoulli, Daniel

[**1755**] "Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie", *Mém. Acad. Roy. Sci. Berlin* **9** (1753; publicat 1755), 147–172.

Bernoulli, Jakob

[**1691**] *Acta Eroditorum.*

[**1694a**] *Acta Eroditorum. Opera*, **II**, 576–600.

[**1694b**] "Constructio curvæ accessus et recessus æqualibus". *Acta Eroditorum. Opera*, **II**, 608–612.

[**1744**] *Opera*, 2 vol. Reimprès per Birkhäuser, 1968.

Bernoulli, Johann

[**1679**] *Acta Eroditorum.*

[**1691–1692**] "Lectiones mathematicæ de methodo integratium, aliique conscriptæ in usum Ill. Marchonis Hospitalii cum auctor Parisiis ageret annis 1691 et 1692". *Opera Omnia*, **III**, 305–555.

[**1698**] "Theoremata universale rectificatione linearum curvarum inserviens". *Acta Eroditorum. Opera Omnia*, **I**, 249–253.

[**1702**] "Solutionata Problematis Calculi Integrales". *Opera Omnia*, **I**, 393–397.

[**1732**] "Méditations sur vibrations avec petits poids à distances égales". *Com. Acad. Scie. Petrog.*, **3** (1728, publicat el 1732.), 13–28. *Opera Omnia*, **III**, 198-210.

[**1742**] *Opera Omnia*, 4 vol. Ed. H. Cramer. Lausanne i Généve. Reimprès per Georg Olms, 1968.

Bernoulli, Nicholas

[**1719**] *Acta Eroditorum.*

Bezout, Etienne

[**1764–1769**] *Cours de mathématique.* Paris.

Bos, H.J.M

[**1981**] "On the representation of Curves in Descartes 'Géométrie' ". *Archives of History of Exact Sciences*, **24**, 295–338.

Bottazzini, Umberto

[**1981**] *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* Springer-Verlag. New York.

Boyer, Carl B.

[1956] *History of Analytic Geometry.* Publicat per *Scripta Mathematica.* New York.

[1960] "Mathematicians of the French Revolution". *Scripta Mathematica*, **25**, 11–31.

[1968] *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons. New York. Hi ha traducció castellana de Mariano Martínez: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad. Madrid, 1986.

Boyle, Robert

[1985] *Works*, vol. iv. London.

Brunet, P.

[1951–1953] "La vie et l'œuvre de Clairaut". *Revue d'Histoires des Sciences et leurs Applications*, **4** (1951), 13–40, 109–153; **5** (1952), 334–349; **6** (1953), 1–17.

Burton, David M.

[1985] *The History of Mathematics.* Allyn and Bacon, Inc. Boston. Hi ha traducció castellana de Josep Pla: *La Historia de las Matemáticas.* Editorial Reverté. Barcelona. [En preparació.]

Carnot, Lazare-Nicolas-Marguerite

[1783] *Essai sur les machines en général.* Paris.

[1797] *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal.* Paris.

[1801] *De la correlation des figures en géometrie.* Paris.

Cassirier, E.

[1951] *Philosophy of the Enlightenment.* Traducció anglesa de Fritz C.A. Koelln i James P. Pettegrove, Boston. Hi ha traducció castellana: *La filosofía de la Ilustración.* México, FCE, 1943.

Cauchy, Augustin-Louis

[1826] *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie.* Paris. *Œuvres complètes*, (2)**5**.

[1882–] *Œuvres complètes*, 27 vol. Gauthier-Villars. Paris, 1882–1974.

Cerdà, Joan

[1984] *El Desenvolupament de les Matemàtiques al Segle* xix, 210–228. Inst. d'Estudis Catalans. Barcelona.

Clairaut, Alexis-Claude

[1731] "Recherches sur les courbes à double courbure". Paris.

[1735] *Histoire de l'Acadèmie des Sciences, Paris*, 1733, 186–194, publicat el 1735.

Cohen, I. Bernard

[1976] "The eighteenth-century origins of the concept of scientific revolution", *Journal of the History of Ideas*, **37**, 257–288.

[1985] *Revolution in Science.* Harvard University Press. Harvard. Hi ha traducció castellana de Daniel Zadunaisky: *Revolución en ciencia.* Gedisa Editorial. Barcelona, 1989.

Collette, Jean Paul

[1979] *Histoire des mathématiques*, 2. Éditions du Renouveau Pedagogique, Montréal. Hi ha traducció castellana d'Alfonso Casal: *Historia de las matemáticas*, II. Siglo XXI de España Editores, S.A. Madrid, 1985.

Condorcet, Marie Jean Antoine Caritat de

[1765] *Essai sur le calcul integral.* Paris.

[1785] *Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des decisions rendues à la pluralité de voix.* Paris.

[1847–1849] *Œuvres*, 12 vol. Paris.

Coolidge, Julian Lowell

[1940] *A History of geometrical methods.* Clarendon. Oxford. Reeditat a Dover, 1963. New York.

[1948] "The Beginnings of analytic geometry in three dimensions". *American Mathematical Montly*, **45**, 78–86.

[1963] *The Mathematics of Great Amateurs.* Dover Publications Inc. New York.

Copleston, Frederick

[1973] *A History of Philosophy*, vol. VI. *Wolff to Kant.* Burns and Oates Ltd. London. Hi ha traducció castellana de Manuel Sacristán: *Historia de la Filosofía*, vol. vi. *De Wolff a Kant.* Editorial Ariel. Barcelona, 1973.

d'Alembert, Jean le Rond

[1747a] "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration". *Mém. Acad. Roy. Berlin*, **3** (1947), 214-219.

[1747b] "Suite des recherches". *Ibid.*, 220–249.

[1751–1780] Vegeu Diderot, Denis i d'Alembert, Jean le Rond.

Dedron, Pierre i Itard, Jean

[1959] *Mathématiques et Mathématiciens.* Editions Maquard. Paris.

Descartes, René

[1637] *Discours de la Méthode, la dioptrique, les météors, la géométrie.* Leyden. Hi ha traducció castellana de Guillermo Quintás: *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría.* Ediciones Alfagura. Madrid, 1981.

Diderot, Denis i d'Alembert, Jean le Rond

[1751–1780] *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers.* Chez Briasson, David l'aîné, Le Breton, Durand, Paris.

Dieudonné, Jean

[1976] *Abrégé d'histoire des Mathématiques, 1700–1900*, 2 vol. Hermann. Paris.

[1978] *Abrégé d'histoire des Mathématiques, 1700–1900.* Hermann. Paris.

Dou, Alberto

[1984] "Leonhard Euler (1707–1783)". *But. Soc. Cat. de Ciències*, **II**, 4, 11–28.

Dupin, Charles

[1813] *Développements de géométrie.* Paris.

[1822] *Applications de géométrie et de mécanique.* Paris.

Eisenstadt, S.N.

[1978] *Revolution and the transformation of societies: a comparative study of civilizations.* The Free Press. London.

Edwards Jr, C.H.

[1980] *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag. New York.

Euclides

[-300] *Els Elements.* Vegeu Vera, F. [1970] , vol. I, 702–980.

Euler, Leonhard

[1732] "De Linea Brevissima in superficie quacunque". *Commentarii Academiæ Scientiaurum Imperialis Petropolitanæ* , **3** (1728, publicat el 1732), 110–124. *Opera*, (1), **25**, 1–12.

[1740] "De infinitis curvis eiusdem generis, seu methodus inveniendi æquationes pro infinitis curvis eiusdem generis". *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, **7** (1734–35, publicat el 1740), 174–193. St. Petersbourg . *Opera*, (1)**22**, 36–56.

[1748] *Introductio Analysim Infinitorum*, 2 vol. Lausanne. *Opera*, (1)**8-9**.

[1749] "De vibratione cordarum exertatio". *Nova Acta Eroditorum*, 512–527. *Opera*, (2)**10**, 50–62.

[1750] "Sur la vibration des cordes". *Hist. Acad. Roy. Berlin*, **4** (1748, publicat en 1750), 69–85. *Opera*, (2)**10**, 63–77.

[1752] "Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration". *Mém. Acad. Roy. Berlin*, **6** (1750), publicat el 1752, 355–360. *Opera*, (2)**10**, 78-63.

[1755a] "Rémarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli". *Mém. Acad. Sci. Berlin*, **9** (1753, publicat el 1755), 196–222. *Opera*, (2)**10**, 253–254.

[1755b] *Institutiones calculis differentialis.* St. Petersbourg. *Opera*, (1)**10**.

[1761a] "De intrepretationes æquationes differentialis". *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, **6**, (1756–57, publicat el 1761), 37–57. *Opera*, (1)**20**, 153–200.

[1761b] "Observationes de comparatione arcuum curvarum ellipticarum". *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, **6**, (1756–57, publicat el 1761), 58–84. *Opera*, (1)**20**, 80–107.

[1766] "Eclairciessements sur le mouvement des cordes vibrantes". *Miscell. Taurin.*, **3**(1762–65, publicat el 1766), cl. math., 1–26. *Opera*, (2)**10**, 377–396.

[1767] "Recherches sur la courbure des surfaces". *Mém. Acad. Berlin.* **16** (1760, publicat el 1767), 119–143. *Opera*, (1)**28**, 1–22.

[1767] "Sur le mouvement d'une corde, qui au commencement n'a été ébranlé que dans une partie". *Mém. Acad. Sci. Berlin*, (1765, publicat el 1767), 307–334. *Opera*, (2)**10**, 426–450.

[1768–1770] *Institutiones calculi integralis*, 3 vol. St Petersbourg. *Opera*, (1), **11-13**.

[1774] *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Propietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti.* Lausanne i Généve. *Opera*, (1)**24**.

[1775] "De solidis quorom superficiem in planum explicare licet". *Novi Com. Acad. Scie. Petrop.*, **19** (1772, publicat el 1775), 340–370. *Opera*, (2)**11**, 158–179.

[1911–] *Opera Omnia*. Ed. per Rudio i d'altres. B.G. Teubner. Leipzig i Lausanne.

Fangano, Giulio Carlo de'Toschi di

[1714] *Giornali dei Litterati d'Italia*, **19** i s.

[1716] "Teoremata de cui si deduce una nuova misura degli archi elittici, iperbolici e cicloidali". *Giornali dei Litterati d'Italia*, **26**. *Opere*, **II**, 287–292.

[1718] "Metodo per misurare la lemniscata". *Giornali dei Litterati d'Italia*, **29**. *Opere*, **II**, 293–313.

[1750] *Produzione mathematische.* Pesaro.

[1911] *Opere mathematische*, 2 vol., Albrighi, Segati & Co. Milano, Roma. Napoli.

Fontenelle, Bernard Le Bovier de

[1699] *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Paris.

Fourier, Joseph

[1822] *Théorie Analitique de la chaleur.* Didot. Paris.

Galilei, Galileo

[1623] *Il Saggitore.* Hi ha traducció castellana de José Manuel Revuelta: *El ensayador.* SARPE. Madrid, 1984.

[1638] *Discorsi e Demostratione Mathematiche intorno à due Nuove Scienze attenenti alla Mecanica e à Movimenti Locali.* Leiden. Hi ha traducció castellana de Javier Sábada: *Discursos y demostraciones en torno a dos ciencias nuevas.* Editora Nacional. Madrid, 1981, 1988.

Gauss, Karl-Friedrich

[1801] *Disquisitiones Arithmeticæ.* Hi ha traducció anglesa d'A.A. Clarke. Yale University Press. Yale, 1965. Hi ha traducció francesa de Poullet Delisle, Paris, 1806. Reedició a Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris, 1963. Hi ha traducció catalana de Griselda Pascual. Barcelona, 1996.

Grattan-Guinness, I.

[1970] *The Development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* Cambridge University Press. Cambridge. Massachusetts.

[1976] *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910. An Introductory History.* Durckworth. London. Hi ha traducció castellana de Mariano Martínez: *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910. Una introducción histórica.* Alianza Editorial. Madrid, 1984.

Gregory, James

[1667] *Vera Circuli et Hiperbolæ Quadratura.* Padova.

Hankins, Thomas L.

[1985] *Science and the Enlightenment.* Cambridge University Press. Cambridge. Hi ha traducció castellana d'Alfredo Mersa: *Ciencia e Ilustración.* Siglo XXI de España Editores, S.A. Madrid, 1988.

Heath, Thomas L.

[1921] *A History of Greek Mathematics*, vol. I. Oxford University Press. Oxford. (Reimprès a Dover el 1981.)

[1931] *A Manual of Greek Mathematics.* Oxford University Press. Oxford. (Reimprès a Dover el 1963.)

Hermann, Jakob

[1732–1733] "De superficiis ad æquationes locales revocatis". *Com. Acad. Scie. Petrop.*, **6**, 36–37.

L'Hôpital, Guillaume Antoine François de

[1696] *Analyse des infinitement petits.* Paris. [Hi ha una reedició de 1988. Paris.]

[1707] *Traité analytique des sections coniques.* Paris.

Hull, L.W.H.

[1959] *History and Philosophy of science.* Longmans, Grenn & Co. Ltd. London. Hi ha traducció castellana de Manuel Sacristán: *Historia y filosofía de la ciencia.* Ediciones Ariel. Barcelona, 1961.

Huygens, Christian

[1673] *Horologium Oscillatorium.* François Muguet. Paris. Hi ha traducció francesa de Jean Peyroux: *L'Horloge oscillante.* Librairie Scientifique et Tecnique Albert Blanchard. Paris.

Itard, Jean

[1984] *Essais d'histoire des mathématiques.* Librairie Scientifique et Tecnique Albert Blanchard. Paris.

Jacobi, Carl Gustav Jacob

[1829] *Fundamenta Nova Theoriæ Functionuum Ellipticarum. Werke*, **1**, 49–239.

[1841] "De Determinantibus Functionalibus". *Crelle J. für die Reine und Angew. Math.*, **22**, 319.

[1881–1891] *Gesammelte Werke*, 7 vol. G. Reimer. Berlin.

Kepler, Johannes

[1609] *Astronomia Nova.*

[1619] *The Harmony of the World.*

[1937] *Gesammelte Werke.* Ed. Walther von Dick i Max Caspar. C.H. Beck, München.

Klein, Felix

[1926–1927] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematic im 19. Jahrhundert*, 2 vol. Berlin. Hi ha traducció anglesa del primer volum: *Development of Mathematics in the 19th century.* Math. Sci. Press. New York.

Kline, Morris

[1972] *Mathematical Tought from to Ancient to Modern Times.* Oxford University Press. New York.

[1980] *Mathematics. The Loss of certainty.* Oxford University Press. New York. Hi ha traducció castellana d'Andrés Ruíz: *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Siglo XXI de España Editores, S.A. Madrid, 1985.

Lacroix, Sylvester François

[1806] *Traité du calcul différentiel.* Paris.

Lagrange, Joseph-Louis

[1759] "Recherches sur la nature et la propagation du son". *Miscellania Turinensia. Œuvres*, **I**, i-x; 1–112.

[1766] "Sur l'intégration de quelques équations différentielles". *Miscellania Turinensia*, *Œuvres*, **IV**, 5–33.

[1797] *Mécanique Analytique*. Paris. *Œuvres*, **IX**.

[1867–1892] *Œuvres*, 14 volums. Paris.

Lancret, Michel-Ange

[1806] "Mémoire sur les courbes à double courbure". *Mém. présentés à l'Inst. par divers Savants*, **1**, 416–454.

Laplace, Pierre-Simon

[1796] *Exposition du système du monde*. Paris.

[1798–1825] *Traité de Mécanique céleste*. Paris.

[1812] *Théorie analytique des probabilités*. Paris.

[1825–1832] *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris.

[1878–] *Œuvres completes*, 14 vol. Gauthier Villars. Paris, 1878–1912.

Legendre, Adrien-Marie

[1786] "Mémoires sur les Integrations par arcs, et sur la comparaison de ces arcs". *Mém. de l'Acad. Sci.*, 1786, 616–643, 644–683.

[1793] *Mémoires sur les transcendantes elliptiques*. Paris.

[1794] *Elements de géométrie*. Paris.

[1798] *Essais sur la théorie des nombres*. Paris.

[1811–1817] *Exercices de Calcul Intégral*, 3 vol. Paris.

[1825–1828] *Traité des fonctions elliptiques*, 3 vol. Paris.

[1830] *Théorie des nombres*. Paris.

Leibniz, Gottfried Wilhelm

[1684] "Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". *Acta Eroditorum*. Hi ha traducció castellana de Javier de Lorenzo: *Análisis Infinitesimal*, 3–15. Editorial Tecnos, S.A. Madrid, 1987.

[1686] "De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum". *Acta Eroditorum*. Hi ha traducció castellana de Javier de Lorenzo: *Análisis Infinitesimal*, 16–29. Editorial Tecnos, S.A. Madrid, 1987.

[1848–1863] *Mathematische Schriften*. Ed. C.I. Gerhardt, 7 vol., Ascher-Schmidt. Reimprès per Georg Olms, 1962.

[1983] *Oeuvre concernant le calcul infinitésimal*. Traducció francesa de Jean Peyroux. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.

Liouville, Joseph

[1833] "Premier mémoire sur la determination des intégrales dont la valeur est algébrique". *Journ. de l'École Polytechn.*, **14**, 22, 124–148.

[1833] "Seconde mémoire sur la determination des intégrales dont la valeur est algébrique". *Journ. de l'École Polytechn.*, **14**, 22, 149–193.

[1880] "Leçons sur les fonctions doublement périodiques". *J. für die Reine und angew. Math.*, **88**, 277–310.

Mason, Stephen F.

[1953] *Main currents of scientific thought: A History of Sciences.* Henry Schuman. New York. Hi ha traducció castellana de Carlos Solís: *Historia de las ciencias*, vol. 3: *La Ciencia del Siglo* XVIII. Alianza Editorial Madrid, 1985.

McLaurin, Colin

[1742] *Treatise of Fluctions*, 2 vol. Edimburg.

Mesnieur, Jean Batiste Marie

[1785] "Mémoire sur la courbure des surfaces". *Mém. de Mathém. et Phys.*, **10**, 511–550.

Monge, Gaspar

[1785] "Mémoires sur les développés, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure". *Mém. de l'Acad. des Sciences*, **10**, (1771, publicat el 1785), 511–550.

[1795] *Feuilles d'analyse appliqués à la Géométrie à l'usage de l'École Polytechnique.* Paris.

[1799] *Géométrie Descriptive.* Paris

[1812] *Aplications de l'algèbre à la géométrie; traité des surfaces de second degré*, escrita per J.-N. P. Hachette el 1850. Paris.

Newton, Isaac

[1687] *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* Hi ha traducció castellana d'Antonio Escohotado: *Principios matemáticos de la Filosofía natural.* Editorial Tecnos, S.A. Madrid, 1987.

[1707] *Optiks.* London.

[1711] *De Methodis Serierum et Fluxionum*, escrit el 1676. [Vegeu Whiteside, D.T. [1967–1981] , vol. III, 32–353.] Hi ha traducció francesa de M. Buffon: *La méthode des fluxions et des suites infinites.* Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris, 1966.

[1736] *Geometria Analytica.* Editada a *Opera Quæ exstant Omnia.*

[1779–1785] *Opera quæ exstant Omnia.* Editada per Samuel Horsley. Reimprès a Sttutgart, 1964.

Nielsen, Niels

[1929] *Géométres français sous la révolution.* Levin & Munksgaard. Copenhagen.

Parent, Antoine

[1713] *Essais et recherches de mathèmatiques et physique*, 3 vol. Paris.

Pla, Josep

[1989a] "L'elena de les matemàtiques i el principi de la mínima acció". *Quaderns*, **43**, 61–71. Abril. Barcelona.

[1989b] "El 'Mètode' a la 'Geometria' de Descartes". *Actas del Tercer Congreso de Lenguajes Naturales y Formales*, 821–863. Sitges.

[1989c] "Les sèries a Newton". *But. Soc. Cat. de Mat.*, **5**, 9–20.

[1992] "The Fundamental Theorem of Algebra before Carl Friedrich Gauss". *Publicacions Matemàtiques*, 36, 879–911.

Rashed, Roshdi

[1988] *Sciences à l'époque de la Revolution Française.* Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.

Ríbnikov, Konstantín

[1974] *HCTOPHR MATEMATHKH.* Moscou. Hi ha traducció castellana de Concepción Valdés: *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir. Moscou, 1987.

Struik, Dirk J.

[1969] *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts.

Sylvester, François

[1904–1912] *Collected Mathematical Papers.* Cambridge.

Taton, René

[1957–1961] *La science moderne (De 1450 à 1800).* Press Universitaire de France. Paris. Hi ha traducció castellana de Manuel Sacristán: *Historia general de las ciencias*, vol. 6: *El siglo* XVIII. *I. Las ciencias técnicas. II. Las ciencias físicas.* Ediciones Orbis. Barcelona, 1988.

Taylor, Brook

[1713] "De motu nervi tensi". *Philosophical Transactions*, 28 (1713).

[1715] *Methodus incrementorum directa et inversa.* London.

Thomas, Ivor

[1939] *Selections illustrating the history of Greek Mathematics.* Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts.

Turnbull, H.W. i d'altres (eds.)

[1959–1978] *The Correspondence of Isaac Newton*, 7 vol. Cambridge University Press. Cambridge.

Voltaire

[1756] *Histoire de Carlemagne à la mort de Louis XIII.* Paris.

Vera, Francisco

[1970] *Los científicos griegos.* Aguilar S.A. de Editores. Madrid.

Whiteside, D.T.

[1967–81] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 8 vol. Cambridge University Press. Cambridge.

Willey, Basil

[1940] *The eighteenth century background: studies on the ideas of nature in the thought of the period.* New York.

Wollen, G.N.

[1968] "McLaurin and Taylor and their series". *The Mathematics Teacher*, **61**, 310–312.

Youschkevitx, A. P.

[1976] "The concept of function up to the middle of the 19th century". *Archive History of Exact Sciences*, **16**, 37–85.

ZEUTEN, H.G.
[**1985**] *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert.* Teubner. Leipzig.

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
pla@cerber.mat.ub.es