

Operaciones financieras de financiación, inversión y cobertura de riesgos.



Trinidad Sancho, Maite Mármol
UNIVERSIDAD DE BARCELONA
23/10/2013

INDICE.

1. Sistemas y mercados financieros	5
1.1. Introducción	5
1.2. Mercados financiero	6
2. Métodos matemáticos aplicados a las operaciones financieras.	13
2.1 Primeros conceptos	13
2.2 Regímenes financieros.	16
2.2.1 Regímenes simples.	16
2.2.2 Regímenes financieros compuestos.	17
2.3. Regímenes financieros equivalentes.	22
2.4. Tasa Anual Equivalente y tanto efectivo de interés de la O.F.	24
2.5 Valoración financiera.	25
2.6 Equivalencia financiera entre conjuntos de capitales financieros.	27
2.7. Rentas financieras.	29
2.7.1. Valoración de rentas financieras. Valor actual y valor final.	30
2.7.2 Relación entre los valores de la renta inmediata y vencida y el resto de rentas.	31
2.7.3 Valoración de rentas constantes.	32
2.7.4. Valoración de rentas con término variable linealmente.	35
2.7.5. Valoración de rentas con término variable acumulativamente	36
2.7.6. Valoración de rentas fraccionadas	38
2.8. Reserva Matemática de una Operación Financiera.	41
3. Operaciones bancarias.	44
3.1 Operaciones bancarias de activo más habituales.	45
3.1.1 Descuento comercial.	45
3.1.2 Crédito bancario.	47
3.1.3 Préstamos.	49
3.2 Operaciones bancarias de pasivo más habituales.	69
3.2.1 Depósitos bancarios.	69
3.2.2 Cuenta corriente bancaria.	70
4. Operaciones no bancarias de financiación.	73
4.1. Ampliación de capital.	73
4.2. Empréstitos.	75
4.3. Leasing financiero.	84
4.4. Factoring de clientes.	87
4.5 Factoring de proveedores (Confirming).	89
4.6 Renting.	89
5. Introducción a la teoría de la inversión.	91
6. Instituciones de inversión colectiva	101
6.1. Concepto y tipo de fondos	101

6.2. Fondos de inversión mobiliaria	101
6.3. Parámetros para comparar fondos	103
6.4. Valoración de los activos de la cartera de inversión. Criterios contables	104
6.5. Rentabilidad del partícipe de un fondo de inversión	106
7. Inversión en activos de renta fija	108
7.1. Carteras de activos de renta fija	108
7.2. Carteras de renta fija y el tanto de interés de mercado	109
7.2.1. El tanto de interés de mercado	109
7.2.2. El tanto de interés de mercado y la rentabilidad de la renta fija	112
7.2.3. Rentabilidad final	121
8. Inversión en activos de renta variable	123
8.1. Análisis de la renta variable	123
8.2. El análisis fundamental	123
8.3. El análisis técnico	133
8.4. Introducción al diseño de carteras óptimas	149
9. Instrumentos a plazo.	158
9.1. El ambiente financiero. Riesgos del mercado financiero	158
9.2. Contratos a plazo sobre activos financieros	160
10. Futuros financieros	170
10.1. El mercado de futuros financieros	170
10.2. Funcionamiento del mercado de futuros financieros	170
10.3. Cobertura de activos financieros	177
10.4. Cobertura con futuros financieros	179
10.5. Contratos a plazo en el mercado O.T.C.	186
10.5.1. Contrato forward-forward	186
10.5.2. Contrato FRA	188
11. Opciones financieras	192
11.1. Concepto y características	192
11.2. Variables que inciden en el precio	193
11.3. El ejercicio de la opción	194
11.4. Relación entre el precio de un call y de un put	199
11.5. Sensibilidad del precio de una opción	201
11.6. Modelos de valoración de opciones	205
12. Mercado de opciones financieras	211
12.1. Descripción del mercado	211
12.2. Naturaleza del contrato	211
12.3. Cobertura con opciones financieras	213
12.4. Estrategias financieras	215
12.5. Operaciones que llevan incorporada una opción	225

12.5.1. Cap	225
12.5.2. Floor	228
12.5.3. Collar	230
13. Swaps	232
13.1. Concepto y características	232
13.2. Tipos de swaps	232
13.3. Cotización	234
13.4. Ventajas comparativas del mercado sin intermediario	235
13.5. Condiciones que deben cumplirse para poder reducir el tipo de interés final a ambas ramas.	242
13.6. Swaps de tipos de interés con intermediario	251
13.7. Valoración de un swap	254
14. Ejercicios.	260
15. Bibliografía	295

1. Sistema y Mercados Financieros

1.1 Introducción.

Un sistema financiero se compone de instituciones, mercados y activos financieros.

✿ Instituciones financieras.

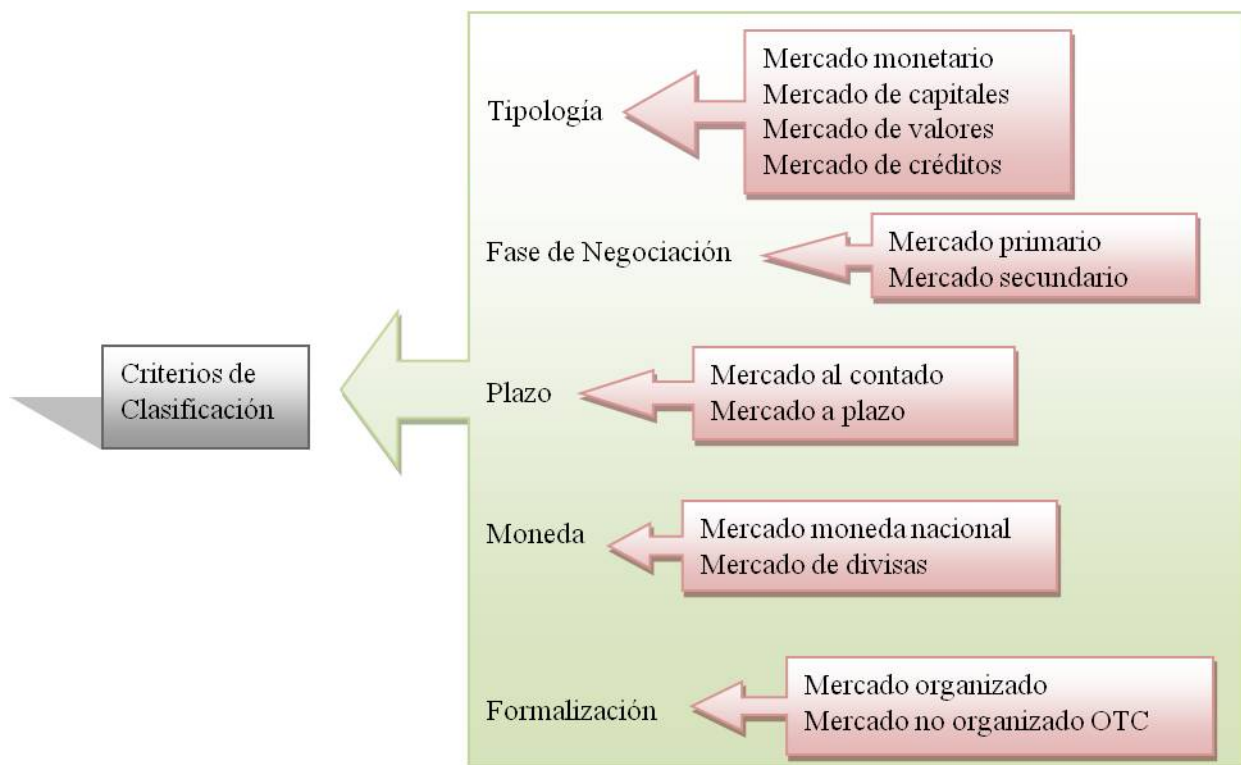
Las podemos considerar de dos tipos, aquellos mediadores que realizan funciones de comisionistas (*broker*, *dealer*, sociedad de valores, etc.) y los que tienen como función básica tomar fondos prestados y prestarlos (banca, cajas de ahorro, etc.)

✿ Mercados financieros.

Consideraremos un mercado financiero al conjunto de mecanismos y procedimientos mediante los cuales se intercambian los activos financieros y se fijan los precios. Sus funciones son:

- Poner en contacto a los compradores y vendedores de activos financieros.
- Establecer el mecanismo de fijación de los precios de los activos.
- Proporcionar liquidez.
- Reducir plazos y costes de intermediación.

Un mercado se considera eficiente cuando los precios reflejan toda la información relevante disponible y el ajuste de precios ante nueva información es instantáneo.¹



✿ Activos financieros.

Se trata de títulos emitidos por los demandantes de disponibilidades dinerarias y que constituyen un pasivo para los mismos. Las funciones que tradicionalmente se les ha asignado son:

- Transferencia de fondos de los receptores a los emisores.

¹ La teoría del mercado eficiente afirma que los precios que rigen en los mercados descuentan automáticamente toda nueva información que llega al mercado y que pueda repercutir en los mismos.

b) Transferencia de riesgos del emisor al receptor. Como los activos son un compromiso de pago del emisor al receptor, este compromiso se verá afectado por las variaciones positivas, o negativas, de la actividad del emisor, con lo que se transfiere parte del riesgo derivado del acto de inversión del emisor al receptor.

1.2 Mercados financieros.

Mercado al contado.

Dentro de este grupo se recogen todos aquellos mercados que realizan operaciones al contado, es decir, operaciones cuyo origen tienen lugar en el momento de la fecha de negociación: compra de una acción en bolsa, compra de un bono, descuento de una letra de cambio, apertura de una cuenta de depósito, etc.

Mercado Monetario.

Es un conjunto de mercados al por mayor, interdependientes o independientes pero relacionados.

Todos tienen una característica común el intercambio de dinero (o de activos muy líquidos con vencimientos no superiores a 18 meses)

Los activos financieros que se negocian en este mercado son activos con *bajo riesgo, elevada liquidez y plazos de las operaciones muy cortos*.

Los activos financieros que se negocian son:

- Préstamos de dinero entre bancos y entre bancos y el Banco Central Europeo.
- Deuda Pública a corto plazo.
- Pagarés de Empresas y letras bancarias.
- Bonos de Caja de empresas y Bonos de Tesorería de entidades de crédito.
- Facilidades del Banco Central Europeo.

La liquidación de este tipo de operaciones se realiza mediante cargos y abonos en las cuentas de tesorería que las entidades de crédito tienen abiertas en el Banco Central, a través del Sistema TARGET² (*Trans-European Automated Real-Time Gross Settlement Express Transfer System*).

Dentro de la zona euro podemos destacar el *Mercado Interbancario*³ que regula las operaciones de préstamo de dinero entre las distintas entidades de crédito; los plazos de las operaciones más frecuentes en el Mercado Interbancario son: 1, 7, 15, 30, 90 y 360 días y el tanto de interés que se aplica a dichas operaciones es el EURIBOR (*Euro Interbank Offered Rate*)⁴ a esos plazos, y se define como el tanto de interés de oferta para depósitos interbancarios nominados en euros realizados entre bancos acreditados la zona euro.

El EURIBOR está patrocinado por la Federación Bancaria de la Unión Europea y la Asociación Internacional de Cambistas; se obtiene como media aritmética de las cotizaciones diarias de los tipos de oferta de un conjunto de 57 instituciones financieras con el mayor volumen de negociación en los mercados monetarios de la zona euro⁵. La forma de colocación de los depósitos es la emisión al descuento o "tirón", es decir, se paga

² El horario será de 7h. a 18h. En España se canalizan las operaciones del Mercado Interbancario, Mercado de Deuda Pública, Sistema de Compensación y Liquidación de Valores, Espaclear y Mercado de Futuros Financieros. El sistema TARGET establece el calendario de días de mercado (días hábiles) para la zona euro.

<http://www.bde.es/f/webbde/Secciones/SalaPrensa/ComunicadosBCE/NotasInformativasBCE/00/Arc/Fic/pres133.pdf>

³ La mayoría de los depósitos interbancarios se realizan a plazos de 1 día, siendo los depósitos a 1 año los menos frecuentes.

⁴ Los datos sobre el Euribor se pueden encontrar en <http://www.euribordiarario.es/>

⁵ Este conjunto de instituciones financieras está compuesto por 47 entidades de UEM, 4 de la UE, que no forman parte de la UEM, y 6 bancos que no pertenecen a la UE pero tienen una importante participación en la zona euro.

una cantidad inferior al valor del depósito, utilizando el régimen financiero de interés simple vencido, y la base para la conversión a años de los plazos contados en día es ACT/360.

Se darán cotizaciones diariamente para los plazos desde 1 mes a 12 meses, siendo la base de cómputo del plazo Actual/360⁶, y el tanto de interés se dará con tres decimales. El factor financiero que se utilizará será el interés simple para operaciones inferiores al año y el interés compuesto para operaciones superiores al año. El cálculo del EURIBOR lo realizará *Dow Jones Markets* y se publicará en Bruselas a las 11 horas locales todos los días hábiles del TARGET. La tabla recoge el EURIBOR en % para distintos plazos.

EURIBOR	1 semana	2 semanas	3 semanas	1 mes	2 meses	3 meses	4 Meses	5 Meses	6 Meses	7 Meses	8 Meses	9 Meses	10 Meses	11 Meses	12 Meses
(05/02/2013)	0.084	0.094	0.104	0.123	0.179	0.233	0.284	0.333	0.38	0.419	0.461	0.501	0.545	0.584	0.618
(04/02/2013)	0.084	0.094	0.104	0.123	0.18	0.233	0.285	0.334	0.38	0.42	0.462	0.503	0.547	0.585	0.621

Otro tanto de interés interbancario que tiene especial importancia en las transacciones con divisas es el LIBOR⁷ (*Londos Interest Bank Offered Rate*); en Londres se registran los depósitos interbancarios nominados en distintas divisas y plazos, se puede conocer diariamente el tanto de interés interbancario cotizado para cada divisa. La siguiente tabla recoge el LIBOR para las divisas más importantes⁸:

05/02/2013	1 día	1 semana	2 semanas	1 mes	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses	7 meses	8 meses	9 meses	10 meses	11 meses	12 meses
EUR	0,01714 %	0,02829 %	0,03971 %	0,05571 %	0,10500 %	0,15429 %	0,19214 %	0,23214 %	0,27500 %	0,31071 %	0,35071 %	0,38643 %	0,42143 %	0,45857 %	0,50000 %
USD	0,15600 %	0,17270 %	0,18590 %	0,19920 %	0,24550 %	0,29550 %	0,34610 %	0,40790 %	0,46890 %	0,53470 %	0,58150 %	0,62900 %	0,67600 %	0,72200 %	0,77050 %
GBP	0,47375 %	0,48000 %	0,48750 %	0,49250 %	0,50063 %	0,51125 %	0,54500 %	0,60875 %	0,64625 %	0,69625 %	0,76125 %	0,81438 %	0,86563 %	0,92313 %	0,97688 %
JPY	0,08643 %	0,10000 %	0,11286 %	0,12943 %	0,14586 %	0,16714 %	0,19857 %	0,24014 %	0,27371 %	0,31786 %	0,35929 %	0,38900 %	0,41929 %	0,44643 %	0,47143 %
CHF	0,00100 %	0,00100 %	0,00100 %	0,00300 %	0,01100 %	0,02400 %	0,04400 %	0,07040 %	0,09640 %	0,11800 %	0,14400 %	0,16400 %	0,19540 %	0,23140 %	0,27240 %

Mercado de divisas.

Es el mercado donde se establece el valor de cambio de las monedas en las que se van a pagar las transacciones internacionales. El concepto de precio no tiene el mismo sentido que en los otros mercados, ya que se trata de una relación de intercambio. El **tipo de cambio** es el número de unidades de una moneda en función de otra moneda, el cual se determina mediante oferta y demanda. Cualquier divisa podrá ser libremente cotizada en el mercado por las entidades registradas. El Banco Central Europeo sólo negocia con unas divisas concretas, publicando diariamente los cambios de compra y de venta de divisas que él aplicará a las operaciones ordinarias que realice por su propia cuenta (éstos tendrán la consideración de cotizaciones oficiales, *fixing*).

El mercado interbancario de divisas ocupa el mayor volumen de transacciones en divisas, de las cuales casi la mitad son operaciones al contado (*spot*) y el resto a plazo (*forward*).

Las operaciones que se realizan son:

- Operaciones de compra-venta de divisas al contado (*spot*)

⁶ Actual/360 es el cociente entre los días naturales que tiene el plazo del depósito y 360 días.

⁷ <http://www.bbalibor.com/rates/historical> o bien en <http://www.euribordiarario.es/>

⁸ Si se compara el Euribor a un año (0,618%) y el Libor para el euro a un año del mismo día (0,5000%) se puede ver que tienen una diferencia de 0,118% lo que permitiría a un especulador pedir prestado en Londres al 0,5% y prestar en la zona euro al 0,618%. Esto pone en evidencia la imperfección del mercado por lo que es posible realizar operaciones de arbitraje.

La entrega de las divisas no debe ser superior a dos días hábiles y la forma de expresar el tipo de cambio al contado es dual, la entidad financiera deberá tener dos tarifas: el precio al que quiere comprar una divisa y el precio al que quiere vender la misma divisa⁹. La siguiente tabla recoge el tipo de cambio oficial del Banco Central Europeo (es el único que tiene el mismo precio de compra que de venta).

	TIPO DE CAMBIO AL CONTADO DEL EURO									
	Dólar	Yen	Franco suizo	Libra esterlina	Corona sueca	Corona danesa	Corona noruega	Dólar canadiense	Dólar australiano	Dólar neozelandés
2013	(USD)	(JPY)	(CHF)	(GBP)	(SEK)	(DKK)	(NOK)	(CAD)	(AUD)	(NZD)
ene-24	1,3349	119,73	1,2417	0,8439	8,6879	7,462	7,4135	1,3374	1,2737	1,5881
25	1,3469	122,71	1,2444	0,8514	8,6889	7,4626	7,424	1,3553	1,2917	1,6099
28	1,3444	122,21	1,2472	0,8545	8,6583	7,4605	7,442	1,3562	1,293	1,621
29	1,3433	121,52	1,2416	0,8536	8,611	7,4595	7,411	1,351	1,286	1,6072
30	1,3541	123,55	1,2392	0,8583	8,6117	7,4609	7,435	1,3573	1,2996	1,6262
31	1,355	123,32	1,2342	0,857	8,6325	7,4613	7,435	1,3577	1,3009	1,6164
feb-01	1,3644	125,78	1,2351	0,8617	8,6022	7,4602	7,4275	1,3637	1,3132	1,6191
4	1,3552	125,63	1,235	0,8619	8,5823	7,4599	7,4275	1,3509	1,299	1,6002
5	1,3537	126,33	1,2299	0,8599	8,5632	7,4595	7,414	1,3511	1,303	1,6074

- Operaciones a plazo (*forward*)

Son las transacciones con un plazo superior a dos días hábiles (1,2, 3 y 6 meses). Son contratos en firme en los que el tipo de cambio se fija hoy pero los efectos económicos van vinculados a una fecha futura. Son operaciones enmarcadas dentro del mercado de seguro de cambio. La cotización de las divisas para este tipo de operaciones no coincide con los cambios al contado siendo las causas:

- La diferencia de los tipos de interés de las respectivas divisas asociadas al tipo de cambio.
- El tipo de cambio al contado (spot) ese día¹⁰.

Tipo de cambio	Cambio al Contado	Cambio a 1 mes	Cambio a 3 mes	cambio a 6 mes	Cambio a 12 mes
USD/Euro	1,0768	1,0756	1,0734	1,0702	1,0648

Mercado de valores.

Está representado por las Bolsas de Valores, que son mercados secundarios oficiales destinados a “la negociación exclusiva de las acciones y valores convertibles o que otorguen algún derecho de adquisición o suscripción”.

La organización de cada Bolsa depende de su correspondiente Sociedad Rectora, S.A. cuyos accionistas son las Sociedades y Agencias de Valores; a dichos intermediarios se les conoce como miembros del mercado (*brokers*). La diferencia entre una Sociedad de Valores y una Agencia de Valores está en la capacidad que tiene cada una de ellas para operar en el mercado. Las Sociedades de Valores pueden realizar operaciones por cuenta propia (son creadores de mercado) o a cuenta de terceros y las Agencias de Valores sólo pueden operar a cuenta de terceros. El Mercado Continuo permite dirigir las órdenes a través de terminales informáticos al mismo ordenador central, las cuales se ordenan de acuerdo al precio y momento de introducción. Si existe contrapartida al precio fijado en la orden, ésta se ejecuta automáticamente.

⁹ http://www.bde.es/webbde/es/estadis/infoest/tc_1_1.pdf.

¹⁰ En el apartado “Contratos a plazo sobre activos financieros” de este libro se detalla la forma de calcular los tipos de cambio forward.

El funcionamiento del mercado continuo depende de cada país pero la franja horaria entre las 10h y las 17h es común a todos los mercados. Cada mercado tiene un Reglamento que rige la negociación de los activos, la fijación y publicación de los precios y la liquidación de las operaciones.

Los activos que se negocian son¹¹:

- Compra-venta de *warrants*, derechos de suscripción, etc.
- Compra-venta de acciones.
- Compra-venta de renta fija a medio y largo plazo.
- Compra-venta de ETF (*Exchange Traded Funds*) o Fondos Cotizados en Bolsa¹².

Mercado de Deuda Pública.

A pesar de ser una parte del mercado de renta fija, se configura como un mercado propio en el que se negocia Deuda Pública¹³.

La organización del mercado se articula alrededor de una estructura formada por diversas entidades, que permiten la conexión del Tesoro con los inversores finales.

Los activos que se negocian en este mercado son:

- Letras del Tesoro.

Son letras de nominal 1.000 euros y con vencimientos a 6 meses, 1 año y 18 meses.

- Bonos del Tesoro y Obligaciones del Estado.

Son títulos con un nominal de 1.000 euros, que pagan cupón anual y se amortizan al final del plazo. Los plazos emitidos hasta hoy son: 3, 5, 10,15 y 30 años.

Desde Julio de 1.997 se emiten Bonos y Obligaciones *segregables*, se separa cada bono en "n+1" valores (*strips*), uno por cada cupón y el correspondiente a la amortización. Cada uno de estos *strips* puede ser negociado independientemente del resto de *strips* procedentes del mismo bono¹⁴.

Estos activos se colocan en el mercado primario mediante subasta. En el mercado secundario se puede comprar y vender Deuda Pública a través de los intermediarios acreditados o a través de la Bolsa; los bonos cotizan el precio en porcentaje y "ex cupón", es decir, sin tener en cuenta el cupón corrido. El Banco Central ha armonizado los criterios de cálculo de precios y rendimientos siguiendo las recomendaciones de *EFFAS EUROPEAN BOND COMMISSION*; dichos criterios son:

Activos con rendimiento explícito y bonos cupón cero cualquiera que sea su plazo de vida:

El cómputo de las fracciones de año se hará mediante el criterio Actual/Actual (Días naturales/Días naturales), empezando a contar los años completos de la fecha de amortización hacia adelante, y el factor financiero será el de interés compuesto.

Letras del Tesoro:

- Con vencimiento superior al año:

Se utilizará el convenio Actual/360 y el régimen financiero será el de interés compuesto.

2. Con vencimiento inferior o igual al año:

¹¹ Se puede consultar el Reglamento del Mercado continuo en la página web <http://www.bolsamadrid.es/>

¹² <http://www.bolsasymercados.es/esp/mercados/etfs/marcos.htm>.

¹³ http://www.tesoro.es/sp/deuda/index_deuda.asp

¹⁴ La negociación de *strips* se inició en enero de 1.998.

Se utilizará el convenio Actual/360 y el factor financiero será el de interés simple.

Los plazos se contarán desde la fecha de liquidación, que será fecha de la operación más 3 día hábiles según el calendario TRAGET. Si uno de los pagos coincide con un día no hábil según el calendario TARGET se considerará la fecha valor el día siguiente hábil.

Las operaciones que pueden realizarse en el mercado de Deuda Pública son:

✱ **Operaciones simples:** La transacción se realiza en una sola operación; la Deuda se considera transmitida y el nuevo poseedor puede negociarla en el mercado secundario.

● **Operaciones al contado:** Estas operaciones se liquidan dentro de los 5 días hábiles siguientes al día de la transacción.

● **Operaciones a plazo:** Se liquidan con plazo superior a 5 días. Los elementos básicos de la operación (precio pactado, fecha de liquidación, valor nominal, valor efectivo, etc.) deben ser comunicados al Banco Central.

✱ **Operaciones dobles:** Se realizan a la vez dos operaciones simples, una de compra y otra de venta, y pueden ser contado-plazo y plazo-plazo. El comprador de la primera será el vendedor de la segunda y viceversa.

● **Simultáneas:** Se refieren al mismo tipo de activo y por el mismo importe nominal.

● **Repos:** Son operaciones simultáneas pero no existe plena disponibilidad de los activos implicados hasta la retrocesión de los activos.

La *Central de Anotaciones en Cuenta* es el servicio del Banco de España que se encarga de gestionar las emisiones y las amortizaciones de los títulos de Deuda Pública incluidos en el sistema de anotaciones en cuenta. Además, se encarga del pago de los intereses devengados y de las transferencias de títulos que se originan por su transmisión en el mercado secundario.

Otras de las funciones de la Central de Anotaciones en Cuenta es la organización del mercado secundario entre los titulares de cuentas abiertas en la propia Central, debiendo establecer los procedimientos de cotización, negociación, compensación y liquidación de las transacciones. También velará por la transparencia de operaciones y su correcta aplicación.

La liquidación se realizará mediante asiento simultáneo de la transferencia de los valores entre las cuentas de los Titulares en el Banco de España y su transferencia de dinero a las cuentas de tesorería abiertas por las Entidades Gestoras en el Banco de España, a través del Sistema Iberclear.

🏦 **Entidades de crédito (Banca en general)**

Recoge aquellas instituciones que tradicionalmente se han dedicado a la canalización del ahorro hacia la financiación de la actividad económica mediante el binomio depósito-préstamo.

Las operaciones de las entidades de crédito se pueden agrupar en las siguientes:

- Captación de depósitos u otros fondos reembolsables.
- Préstamo y crédito, incluyendo crédito al consumo, hipotecario y financiación de las transacciones comerciales.
- Las de "factoring" tanto de proveedores como de clientes (con y sin recurso)
- Las de arrendamiento financiero (*Leasing*).
- Las operaciones de pago, incluyendo los servicios de pago y transferencia.

- La emisión y gestión de medios de pago (tarjetas, cheques de viaje, etc.).
- La concesión de avales y garantías.
- La intermediación en los mercados interbancarios.
- Las operaciones con valores negociables, al contado y a plazo.
- Participación en la emisión de valores y aseguramiento de la suscripción de la emisión.
- Asesoramiento y prestación de servicios a empresas.
- Gestión de patrimonios.
- Actuar como depositarios de valores de terceros, representados en títulos, o como administradores de valores, representados en anotaciones en cuenta.
- Realización de informes comerciales.
- Alquiler de cajas fuertes.

Las operaciones bancarias de captación de recursos y de préstamo las agruparemos en dos:

Operaciones de activo: Aquellas que proporcionan a la Entidad de Crédito un interés. Las operaciones más frecuentes son: Crédito comercial (Descuento bancario, pólizas de crédito, crédito en cuenta corriente, pagarés de empresa, etc.), préstamos y créditos a medio y largo plazo, etc.

Operaciones de pasivo: Aquellas que exigen el pago de un interés por parte de las entidades de crédito: Cuentas bancarias a la vista (cuentas corrientes, cuentas de ahorro), cuentas a plazo, certificados de depósito, cuentas financieras, etc.

Inversión Colectiva: Fondos de Inversión y Sociedades de Inversión.

Son patrimonios pertenecientes a una pluralidad de inversores constituidos con el único objetivo de la adquisición, tenencia, disfrute, administración y enajenación de activos financieros para compensar, con una adecuada composición de las carteras, los riesgos y los tipos de rendimientos.

Fondos y Planes de Pensiones.

Un Plan de Pensiones es una institución de previsión voluntaria y libre, cuyas prestaciones de carácter privado pueden, o no, ser complemento del preceptivo sistema de Seguridad Social obligatoria, a la que en ningún caso sustituyen”. En un Plan de Pensiones se definen:

- El derecho de las personas, a cuyo favor se constituyen, a percibir rentas o capitales de jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez.
- Las obligaciones de contribución al Plan.
- Las reglas de constitución y funcionamiento del patrimonio.

El Fondo de Pensiones es el patrimonio creado al objeto de dar cumplimiento a los fines del Plan. Es una entidad sin personalidad jurídica, por lo que la gestión, custodia y control se realiza a través de una entidad gestora, una entidad depositaria y una comisión de control.

Mercado a plazo.

En estos mercados se negocian operaciones financieras en las cuales el inicio de las obligaciones financieras de los sujetos es posterior a la fecha de la firma del contrato, o de la negociación: compra del derecho de adquisición de un determinado número de acciones de una empresa en una fecha futura y a un precio fijado hoy, negociación de un tipo de cambio para una divisa que se deberá disponer en una fecha futura, fijar el precio de compraventa de una determinada mercancía que deberá entregarse en una fecha futura, etc.

Dentro de este mercado podemos hacer dos distinciones:

● ***Mercado organizado.***

Son aquellos mercados a plazo en los que los activos financieros que se negocian, las transacciones y la liquidación de las mismas, están sometidos a un reglamento. La existencia de ese reglamento garantiza el cumplimiento de las obligaciones contractuales y la transparencia en la formación de los precios. Fundamentalmente, existen dos mercados organizados a plazo:

✳ Futuros Financieros.

✳ Opciones Financieras.

En nuestro país están reunidos en un único mercado: Mercado Español de Futuros Financieros, S.A. (M.E.F.F.S.A.)¹⁵

● ***Mercado de mutuo acuerdo (mercado over the counter, OTC).***

Son aquellos mercados a plazo en los que los activos se diseñan a medida de los compradores y vendedores, no existen reglamentos que fijen la forma de realizar y liquidar las transacciones, el cumplimiento de las cláusulas de los contratos depende exclusivamente de las partes y la formación de los precios de las operaciones es poco transparente. Podemos considerar operaciones clásicas de este mercado:

- Operaciones “forward-forward”, FRA’s.
- Opciones no negociables: *warrants, caps, floors y collars*.
- Permuta financiera (*Swaps*): de tipos de interés y de divisas.

¹⁵ <http://www.meff.es/> .

2. Métodos matemáticos aplicados a las operaciones financieras.

Para poder realizar un análisis cuantitativo de los parámetros significativos de las operaciones financieras es necesario conocer las herramientas matemáticas que se utilizan. Se partirá del concepto de operación financiera: Acuerdo entre dos sujetos para el intercambio de disponibilidades monetarias en distintas fechas”.

Se tomará una fecha inicio (o de referencia) y se considerarán dos partes en la operación financiera:

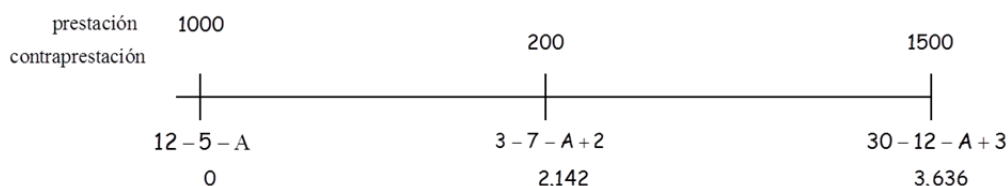
- Prestación: conjunto de disponibilidades monetarias que entran en la operación financiera.
- Contraprestación: conjunto de disponibilidades monetarias que salen de la operación financiera.

La existencia del acuerdo en el intercambio exige asumir que la prestación y la contraprestación son dos conjuntos equivalentes. El contenido del acuerdo se centra en los pactos relacionados con el cálculo, devengo y pago del precio de la operación financiera¹⁶.

2.1 Primeros conceptos

- **Sujetos de la operación financiera:** Sujeto activo, financia a la O.F. y sujeto pasivo, financiado por la O.F.
- **Capital financiero:** par ordenado de números reales no negativos, (C, T) , siendo C la cuantía o masa monetaria y T el diferimiento o tiempo medido en años desde la fecha de referencia.
- **Operación financiera elemental:** $(C, T) \sim (C', T')$ donde $\sim$ representa la equivalencia entre la prestación y la contraprestación en base al acuerdo aceptado por los sujetos de la operación financiera.
- **Operación financiera compleja:** $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n} \sim \{(C'_s, T'_s)\}_{s=1,2,\dots,m}$. Existen más de una prestación y más de una contraprestación.

Ejemplo 1: Hoy, 12-5-A, dos sujetos acuerdan y firman un contrato en el que el sujeto A le presta al sujeto B 1.000€. El sujeto B, para cancelar la deuda, se compromete a pagar 200€ el 3-7-A+2 y 1.500€ el 30-12-A+3. Expresar la prestación y la contraprestación de la operación financiera (O.F.).



El valor de los diferimientos en años dependerá del criterio adoptado (base)¹⁷:

Fechas	Días	Act/Act	Act/360	Act/365	30/360
12/05/A	0				
03/07/A+2	782	2,142	2,144	2,142	2,142
30/12/A+3	1328	3,634	2,644	3,636	3,633

Ejemplo 2: Determinar de qué tipo son las siguientes operaciones financieras:

- Realizar un depósito a 1 año y medio. **Es una O.F. elemental.**
- Hacer aportaciones cada año a un fondo durante 20 años para recuperar al final el capital acumulado. **Es una O.F. compleja.**

¹⁶ La operación financiera no deja de ser una operación mercantil de compra-venta de dinero, lo que lleva asociado un precio o interés.

¹⁷ Se ha considerado que el año A+3 es bisiesto.

- Pedir un préstamo en el que el interés va variando cada año y que se irá amortizando cada mes durante 15 años. **Es una O.F. compleja.**
- Los movimientos de una cuenta corriente. **Es una O.F. compleja.**
- Descontar hoy una letra de cambio que vencerá el 30-5-A. **Es una O.F. elemental.**

❖ Factor de valoración.

Partiendo de una O.F. elemental $(C, T) \sim (C', T')$, la equivalencia entre la prestación y la contraprestación permite obtener una función de T y T' , $f(T, T')$ que da la proporción entre las cuantías, $f(T, T') = \frac{C'}{C}$, a esta función se la denomina *factor de valoración*. Si se conoce $f(T, T')$ entonces $C' = C \cdot f(T, T')$ o su recíproca

$$C = \frac{C'}{f(T, T')}.$$

Esta función debe cumplir algunas propiedades:

➤ $f(T, T') \geq 0$.

➤ $\begin{cases} T' > T \Rightarrow C' > C \Rightarrow f(T, T') > 1, \text{ factor de capitalización} \\ T' = T \Rightarrow C' = C \Rightarrow f(T, T') = 1 \\ T' < T \Rightarrow C' < C \Rightarrow f(T, T') < 1, \text{ factor de descuento} \end{cases}$

➤ $f(T, T') \cdot f(T', T) = 1 \Leftrightarrow f(T', T) = \frac{1}{f(T, T')}$

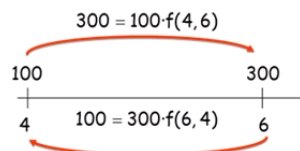
➤ $f(T, T') \cdot f(T', T'') = f(T, T'')$ (propiedad de escindibilidad)

➤ Si $\begin{cases} \Delta T = T' - T > 0 \Rightarrow \Delta C = C' - C > 0 \\ \Delta T = T' - T < 0 \Rightarrow \Delta C = C' - C < 0 \end{cases}$

Resumiendo, el factor de valoración debe ser una función del tiempo no negativa y tal que cuanto mayor es el plazo $t = \Delta T = T' - T$ mayor es la cuantía $C' = C \cdot f(T, T')$ del capital equivalente a (C, T) .

Ejemplo 3: Dada la O.F. $(100, 4) \sim (300, 6)$, el factor de capitalización es $f(4, 6) = \frac{300}{100}$ y el factor de

descuento es $f(6, 4) = \frac{100}{300}$.



❖ **Precios de una operación financiera elemental.** Se considerarán los precios que se pagan por vencido (al final de la O.F.) y los precios que se pagan por anticipado (al principio de la O.F.).

A partir de la O.F. elemental $(C, T) \sim (C', T')$ con plazo $t = T' - T$ definiremos:

❖ **Precios que se pagan por vencido.** Se calculan sobre la cuantía inicial y se pagan al final de la O.F.

➤ **Precio Total o Interés:** $Y = \Delta C = C' - C$, es el precio devengado por todo el plazo de la O.F. y teniendo en cuenta el total de dinero que se ha intercambiado.

➤ *Precio unitario o Tanto efectivo de interés:* $I(T, T') = \frac{Y}{C} = \frac{C' - C}{C}$. Es el precio devengado por todo el plazo de la O.F. pero asociado a cada unidad monetaria del capital inicial.

➤ *Precio unitario y medio o Tanto nominal de interés*¹⁸: $i(T, T') = \frac{I(T, T')}{T' - T}$. Es el precio por unidad monetaria del capital inicial y referido a un año.

Ejemplo 4: Determinar los precios por vencido de las siguientes operaciones financieras: (300,2) ~ (500,6) y (300,0) ~ (350, 0,5)

Capital inicial	Capital final	Plazo en años	Interés	Tanto efectivo	Tanto nominal
(300,2)	(500,6)	4	200	66,6667%	16,6667%
(300,0)	(350, 0,5)	0,5	50	16,6667%	33,3333%

La primera O.F. dura 4 años, el precio por cada u.m. de las 300 u.m. iniciales generado durante esos cuatro años es el 66,666%, siendo su parte alícuota a un año de 16,666% (su cuarta parte). La segunda O.F. dura medio año, el precio por cada u.m. de las 300 u.m. iniciales ha generado un precio durante ese medio año del 16,666%, siendo la parte alícuota a un año el doble, es decir, el 33,333%.

❁ **Precios que se pagan por anticipado.** Se calculan sobre el capital final y se pagan al principio de la O.F.

➤ *Precio Total o Interés:* $D = \Delta C = C' - C$, es el precio devengado por todo el plazo de la O.F. y teniendo en cuenta el total de dinero que se ha intercambiado.

➤ *Precio unitario o Tanto efectivo de descuento:* $D(T, T') = \frac{D}{C'} = \frac{C' - C}{C'}$. Es el precio devengado por todo el plazo de la O.F. pero asociado a cada unidad monetaria del capital final.

➤ *Precio unitario y medio o Tanto nominal de descuento:* $d(T, T') = \frac{D(T, T')}{T' - T}$. Es el precio por unidad monetaria del capital final y referido a un año.

Ejemplo 5: Determinar los precios por anticipado de las siguientes operaciones financieras:

(300,2) ~ (500,6) y (300,0) ~ (350, 0,5).

Capital inicial	Capital final	Plazo en años	Interés	Tanto efectivo	Tanto nominal
(300,2)	(500,6)	4	200	40,0000%	10,0000%
(300,0)	(350, 0,5)	0,5	50	14,2857%	28,5714%

La interpretación es idéntica a la del ejercicio n° 4 pero teniendo en cuenta que se han calculado sobre la cuantía del capital final.

Se puede comprobar que en una misma operación financiera los precios que se pagan por anticipado son inferiores a los precios que se pagan por vencido, pero el “precio” de la O.F. por año es único, ρ , e independiente del hecho que se calcule por anticipado o por vencido. Este precio existe y se cumple que $d(T, T') < \rho < i(T, T')$ ¹⁹

¹⁸ Este precio es un tanto de interés anual ya que el plazo al que va referido es el año, independientemente del plazo de la O.F.

¹⁹ La forma de determinar el valor de ρ se abordará más adelante.

2.2 Regímenes financieros.

Un régimen financiero es la expresión formal de los pactos que rigen la operación financiera. Estos pactos se concretan en:

- El cálculo del precio.
- El devengo del precio.
- El pago del precio.

Existen dos grupos de regímenes financieros, aquellos que pagan el precio por vencido y los que pagan el precio por anticipado. Dentro de cada uno de estos grupos podemos distinguir los regímenes financieros que hacen el cálculo y devengo del precio una sola vez (al principio o al final) de los que calculan y devengan el precio de forma periódica a lo largo de la vida de la O.F. Los que realizan el devengo del precio una sola vez son los regímenes financieros simples y los que devengan el precio de forma periódica son los regímenes financieros compuestos.

2.2.1 Regímenes financieros simples.

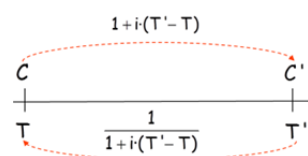
 **Régimen financiero de interés simple vencido**²⁰.

Dada la O.F. elemental $(C, T) \sim (C', T')$, y considerando $T' > T$, los pactos que se establecen son:

- El precio, $\Delta C = C' - C$, se calcula y se paga al final de la O.F.
- El precio es proporcional a la cuantía C y al plazo $t = T' - T > 0$, aplicando un coeficiente de proporcionalidad i .

A partir de estos pactos, $\Delta C = C \cdot t \cdot i \rightarrow C' = C + C \cdot t \cdot i = C(1 + it)$, relación entre las dos cuantías que permite encontrar el factor de valoración de capitalización $f(T, T') = \frac{C'}{C} = 1 + it$, siendo el factor de descuento

asociado $f(T', T) = \frac{1}{f(T, T')} = \frac{1}{1 + it}$.



Los precios obtenidos de los pactos serán:

- Precio Total, $\Delta C = C \cdot i \cdot t$
- Precio unitario, $I(t) = i \cdot t$
- Precio unitario y medio, $i(t) = i$. El coeficiente de proporcionalidad es el tanto nominal de interés simple.

Ejemplo 6: Una persona coloca en el banco un depósito de 1000€ a un plazo de 6 meses al 3% anual de interés simple vencido, el capital que recogerá al final del plazo será $C' = 1000 \left(1 + 0,03 \cdot \frac{1}{2} \right) = 1015 \text{ €}$.

 **Régimen financiero de descuento comercial**²¹

Dada la O.F. elemental $(C, T) \sim (C', T')$, y considerando $T' > T$, los pactos que se establecen son:

²⁰ El régimen financiero de descuento matemático es idéntico al del interés simple vencido dando el mismo factor de valoración y precios.

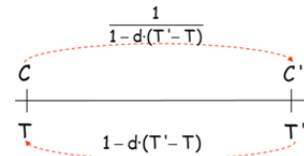
²¹ El régimen financiero de interés simple anticipado tiene la misma estructura que el régimen financiero de descuento comercial, dando el mismo factor de valoración y precios.

- El precio, $\Delta C = C' - C$, se calcula y se paga al principio de la O.F.
- El precio es proporcional a la cuantía C' y al plazo $t = T' - T > 0$, aplicando un coeficiente de proporcionalidad d .

A partir de estos pactos, $\Delta C = C' \cdot t \cdot d \rightarrow C = C' - C' \cdot t \cdot d = C'(1 - d \cdot t)$, relación entre las dos cuantías que permite

encontrar el factor de valoración de capitalización $f(T, T') = \frac{C'}{C} = \frac{1}{1 - d \cdot t}$, siendo el factor de descuento

asociado $f(T', T) = \frac{1}{f(T, T')} = 1 - d \cdot t$.



Los precios obtenidos de los pactos serán:

- Precio Total, $\Delta C = C' \cdot t$
- Precio unitario, $D(t) = d \cdot t$
- Precio unitario y medio, $d(t) = d$. El coeficiente de proporcionalidad es el tanto nominal de descuento comercial.

Ejemplo 6: Una empresa lleva al banco a descontar una cartera de efectos comerciales por un nominal de 20.000€. El 40% vence a 60 días y el resto a 90 días. El tanto de descuento es el 6% anual de descuento comercial. Los gastos de descuento son del 2 por mil sobre el nominal descontado. ¿Cuánto dinero recibirá la empresa por el descuento?



El dinero que recibirá será el valor descontado menos los gastos de descuento.

$$E = 8000 \left(1 - 0,06 \cdot \frac{60}{360} \right) + 12000 \left(1 - 0,06 \cdot \frac{90}{360} \right) - 0,002 \cdot 20000 = 9700,52.$$

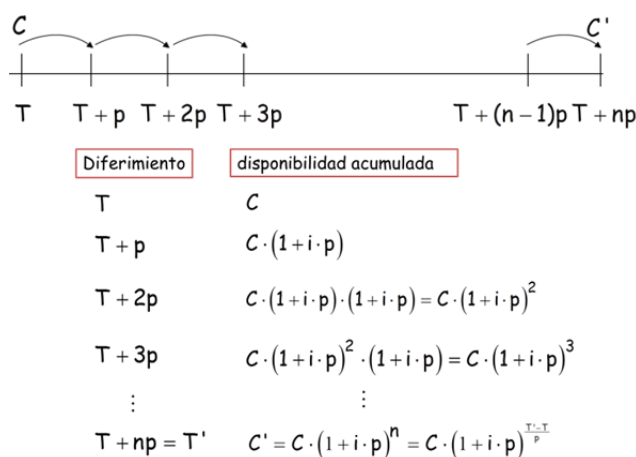
2.2.2 Regímenes financieros compuestos.

La diferencia con los anteriores está en el fraccionamiento del plazo de la operación en periodos iguales. Consideremos el plazo t y sea p el periodo, si se divide t por p se tendrá el número de periodos que caben en el plazo, $n = \frac{t}{p}$. Se supone que el plazo contiene un número exacto de periodos.

Régimen financiero de interés compuesto a tanto constante.

Dada la O.F. elemental $(C, T) \sim (C', T')$, los pactos que se establecen son:

- El precio se calcula y devenga al final de cada periodo (periodo de capitalización).
- El precio devengado en el periodo se acumula a la disponibilidad que hay al inicio del periodo.
- El precio es proporcional a la disponibilidad del inicio del periodo y al periodo transcurrido aplicando un coeficiente de proporcionalidad i .
- El precio se paga al final del plazo.



De la relación obtenida se puede obtener el factor de valoración $f(T, T') = \frac{C'}{C} = (1 + i \cdot p)^{\left(\frac{T'-T}{p}\right)}$. Si $T' < T$ entonces $f(T, T')$ es el factor de descuento y si $T' > T$ entonces $f(T, T')$ es el factor de capitalización²².

Los precios sólo se determinan para el periodo de capitalización por ser el plazo de devengo de precio. Sea

$m = \frac{1}{p}$ la frecuencia de capitalización, es decir, el número de periodos que caben en un año.



● Precio Total, $\Delta C = C \cdot i \cdot p = \frac{C \cdot i}{m}$

● Precio unitario, $I(p) = i \cdot p \Leftrightarrow I(m) = \frac{i}{m}$, o tanto efectivo de interés por periodo de capitalización, que se simbolizará por I_m .

● Precio unitario y medio, $i(p) = i \Leftrightarrow i(m) = i$, o tanto nominal (anual) de interés, que se simbolizará por i_m , luego, $i_m = I_m \cdot m$.

El factor de valoración se utilizará con la siguiente expresión, $f(T, T') = (1 + I_m)^{m(T'-T)}$ ²³

Ejemplo 7: Expresar mediante su símbolo correspondiente los siguientes tantos de interés compuesto y su factor de valoración:

□ 3% anual. $p = 1$, $m = 1$, $I_1 = 0,03$, $f(T, T') = (1 + 0,03)^{(T'-T)}$

□ 2% semestral. $p = \frac{1}{2}$, $m = 2$, $I_2 = 0,02$, $f(T, T') = (1 + 0,02)^{2(T'-T)}$

□ 4% anual capitalizable trimestralmente. $p = \frac{1}{4}$, $m = 4$, $I_4 = \frac{0,04}{4}$, $f(T, T') = (1 + 0,01)^{4(T'-T)}$

□ 1% mensual. $p = \frac{1}{12}$, $m = 12$, $I_{12} = 0,01$, $f(T, T') = (1 + 0,01)^{12(T'-T)}$

□ 6% nominal pagadero bimestralmente. $p = \frac{1}{6}$, $m = 6$, $I_6 = \frac{0,06}{6}$, $f(T, T') = (1 + 0,01)^{6(T'-T)}$

²² Observe la fórmula y verá que si $T' < T$ el exponente es negativo y si $T' > T$ el exponente es positivo.

²³ $m(T'-T)$ mide el plazo de la O.F. en periodos de capitalización, por ejemplo, si $m = 12$, el plazo se medirá en meses.

□ 3% efectivo bienal. $p=2$, $m=\frac{1}{2}$, $I_1=0,03$, $f(T,T')=(1+0,03)^{\frac{1}{2}(T'-T)}$

Ejemplo 8: Una empresa desea comprar dentro de 3 años y cuatro meses una maquinaria de cortar acero. Se estima que el precio será de 250000€.

a) ¿Cuánto dinero debe poner hoy en una cuenta bancaria para poder comprarla si la cuenta renta el 6% de interés anual pagadero por meses?

La cuenta se ha pactado a interés compuesto con periodo de capitalización el mes. Como la operación dura $n=3\cdot 12+4=40$ meses y el factor de valoración será:

$$f\left(0,3+\frac{4}{12}\right)=(1+I_{12})^{12\left(3+\frac{4}{12}\right)}=\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{40} \text{ siendo } i_{12}=0,06.$$

La O.F. será $(C,0)\sim\left(250000,3+\frac{4}{12}\right)$, luego $C\cdot f\left(0,3+\frac{4}{12}\right)=250000\rightarrow C=\frac{250000}{f\left(0,3+\frac{4}{12}\right)}$

$$C=250000\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{-40}=204.784,71\text{ €}.$$

b) Si hoy coloca 180.000€ en la cuenta ¿Cuál deberá ser el tanto de interés nominal acumulable semestralmente a pactar con el banco para poder realizar la compra?

La O.F. es $(180.000,0)\underset{I_2}{\sim}\left(250.000,3+\frac{4}{12}\right)$, se debe buscar el tanto de interés efectivo por semestre de

interés compuesto que cumple la equivalencia, es decir se debe buscar el factor $f(T,T')=(1+I_2)^{2(T'-T)}$.

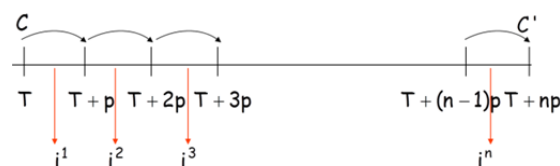
$$180.000\cdot(1+I_2)^{\overbrace{2\left(3+\frac{4}{12}\right)}^{6,5\text{ semestres}}}=250.000\rightarrow I_2=\left(\frac{250.000}{180.000}\right)^{\frac{1}{6,5}}-1=0,05183798,$$

De donde, $i_2=I_2\cdot 2=0,10367595$.

Régimen financiero de interés compuesto a tanto variable.

Dada la O.F. elemental $(C,T)\sim(C',T')$, los pactos que se establecen son:

- El precio se calcula y devenga al final de cada periodo (periodo de capitalización).
- El precio devengado en el periodo se acumula a la disponibilidad que hay al inicio del periodo.
- El precio es proporcional a la disponibilidad del inicio del periodo y al periodo transcurrido aplicando un coeficiente de proporcionalidad i^r para $r=1,2,\dots,n$.
- El precio se paga al final del plazo.



$$C'=C(1+i^1\cdot p)(1+i^2\cdot p)\dots(1+i^n\cdot p)$$

De la relación obtenida se puede obtener el factor de valoración $f(T, T') = \frac{C'}{C} = \prod_{r=1}^n (1 + i^r \cdot p)$. Si $T' > T$ entonces $f(T, T')$ es el factor de capitalización²⁴ y si $T' < T$ entonces $f(T, T')$ es el factor de descuento,

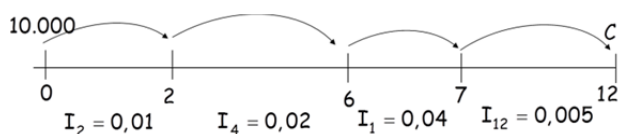
$$f(T, T') = \frac{C'}{C} = \prod_{r=1}^n (1 + i^r \cdot p)^{-1}.$$

Los precios sólo se determinan para el periodo de capitalización por ser el plazo de devengo de precio. Sea $m = \frac{1}{p}$ la frecuencia de capitalización, es decir, el número de periodos que caben en un año.

- Precio Total asociado al periodo r , $\Delta C = C \cdot i^r \cdot p = \frac{C \cdot i^r}{m}$
- Precio unitario, $I^r(p) = i^r \cdot p \Leftrightarrow I^r(m) = \frac{i^r}{m}$, o tanto efectivo de interés por periodo de capitalización, que se simbolizará por I_m^r .
- Precio unitario y medio, $i^r(p) = i^r \Leftrightarrow i^r(m) = i^r$, o tanto nominal (anual) de interés, que se simbolizará por i_m^r , luego, $i_m^r = I_m^r \cdot m$.

El factor se expresará de la forma $f(T, T') = \prod_{r=1}^n (1 + I_m^r)$ para $T' > T$.

Ejemplo 9: Una persona colocó hace 12 años, en una cuenta bancaria, 10.000€. Determinar el saldo acumulado hoy en la cuenta si ha rendido los siguientes tipos de interés compuesto: 1% semestral los dos primeros años, 8% anual pagadero por trimestres los siguientes cuatro años, 4% anual el siguiente año y 0,5% efectivo mensual el resto del plazo.



Utilizando la propiedad de escindibilidad del factor de valoración,

$$C' = 10.000 \cdot f(0, 2) \cdot f(2, 6) \cdot f(6, 7) \cdot f(7, 12)$$

$$C' = 10.000(1 + I_2)^4(1 + I_4)^{16}(1 + I_1)^1(1 + I_{12})^{60} = 20.039,43$$

Ejemplo 10: Una empresa retira hoy el saldo de 30.000€ de una cuenta bancaria que abrió hace 2 años y medio. La cuenta se pactó a interés compuesto al 3% efectivo semestral el primer año, al 5% nominal pagadero trimestralmente el segundo y el 4% efectivo anual el último. ¿Cuál es el importe del capital colocado inicialmente en la cuenta?

La O.F. $(C, 0) \sim (30.000, 2,5)$ se pactó a interés compuesto variable, luego $C = 30.000 \cdot f(2,5, 0)$, es decir,

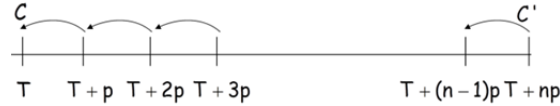
$$C = 30.000(1 + 0,03)^{-2} \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{-4} (1 + 0,04)^{-0,5} = 26.384,57€$$

²⁴ Observe la fórmula y verá que si $T' < T$ el exponente es negativo y si $T' > T$ el exponente es positivo.

Regimen financiero de descuento compuesto a tanto constante.

Dada la O.F. elemental $(C, T) \sim (C', T')$, los pactos que se establecen son:

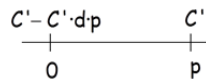
- El precio se calcula y devenga al principio de cada periodo (periodo de descuento).
- El precio devengado en el periodo se resta a la disponibilidad que hay al final del periodo.
- El precio es proporcional a la disponibilidad del final del periodo y al periodo transcurrido, aplicando un coeficiente de proporcionalidad d .
- El precio se paga al principio.



El factor de valoración $f(T, T') = \frac{C'}{C} = (1 - d \cdot p)^{-\left(\frac{T' - T}{p}\right)}$. Si $T' < T$ entonces $f(T, T')$ es el factor de descuento, y si $T' > T$ entonces $f(T, T')$ es el factor de capitalización²⁵.

Los precios sólo se determinan para el periodo de descuento por ser el plazo de devengo de precio. Sea

$m = \frac{1}{p}$ la frecuencia de descuento, es decir, el número de periodos que caben en un año.



● Precio Total, $\Delta C = C' \cdot d \cdot p = \frac{C' \cdot d}{m}$

● Precio unitario, $D(p) = d \cdot p \Leftrightarrow D(m) = \frac{d}{m}$, o tanto efectivo de interés por periodo de descuento, que se simbolizará por D_m .

● Precio unitario y medio, $d(p) = d \Leftrightarrow d(m) = d$, o tanto nominal (anual) de interés, que se simbolizará por d_m , luego, $d_m = D_m \cdot m$.

El factor de valoración se utilizará con la siguiente expresión, $f(T, T') = (1 - D_m)^{-m(T' - T)}$

Regimen financiero de interés a tanto continuo.

En este régimen financiero se parte de la hipótesis de que el precio se devenga de forma continua, el periodo de capitalización es dt , el precio devengado es $dC(t) = C(t) \rho \cdot dt$, siendo $C(t)$ la cuantía asociada el diferimiento t y ρ el coeficiente de proporcionalidad, esta relación define una ecuación diferencial de

variables separadas $\frac{dC(t)}{C(t)} = \rho \cdot dt$ cuya solución es:

$$\ln C(t) = \int \rho \cdot dt + K = \rho t + \ln k \Leftrightarrow C(t) = e^{\rho t + \ln k} = K \cdot e^{\rho t}$$

Para determinar el valor de K se tiene la condición de contorno: para $t = 0$ $C(0) = C_0$, luego,

$C(0) = C_0 = K \cdot e^0 = K$. La solución de la ecuación diferencial es $C(t) = C_0 \cdot e^{\rho t}$ y el factor de valoración asociado es $f(T, T') = e^{\rho(T' - T)}$.

²⁵ Observe la fórmula y verá que si $T' < T$ el exponente es positivo y si $T' > T$ el exponente es negativo.

- Precio Total, $\Delta C = C(t) \cdot \rho \cdot dt$
- Precio unitario, $I(dt) = \rho \cdot dt$, o tanto efectivo de interés por periodo de capitalización,
- Precio unitario y medio, $i(dt) = \rho$, o tanto nominal (anual) de interés continuo. El tanto nominal de interés continuo está desprovisto del hecho de pagar el precio al final o al principio del periodo de capitalización ya que el periodo de capitalización es un infinitésimo. Se puede considerar este precio como el “*precio financiero estricto*” de la O.F. al no verse afectado por el hecho de realizar el devengo periódicamente (no se calcula en intervalos discretos).

2.3 Regímenes financieros equivalentes.

Se parte de una operación financiera elemental $(C, T) \sim (C', T')$. Se considera que dos regímenes financieros son equivalentes cuando sus respectivos factores de valoración son iguales.

- *Equivalencia entre regímenes simples*: interés vencido y descuento comercial (interés anticipado).

$$(1 + i \cdot t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} \rightarrow \begin{cases} i = \frac{d}{1 - d \cdot t} \\ d = \frac{i}{1 + i \cdot t} \end{cases}$$

El los regímenes simples el tanto de interés es equivalente al tanto de descuento para una operación financiera que dure t años, si la operación pasara a durar t' años los tantos se tendrían que volver a calcular (dependen del plazo de la O.F.).

- *Equivalencia entre regímenes compuestos.*
- *Equivalencia entre regímenes de interés compuesto.*

Se tienen dos regímenes de interés compuesto con factor de valoración $f(T, T') = (1 + I_m)^{m(T'-T)}$ y $f(T, T') = (1 + I_{m'})^{m'(T'-T)}$, respectivamente. Serán equivalentes cuando

$$(1 + I_m)^{m(T'-T)} = (1 + I_{m'})^{m'(T'-T)} \rightarrow \begin{cases} I_m = (1 + I_{m'})^{\frac{m'}{m}} - 1 \\ I_{m'} = (1 + I_m)^{\frac{m}{m'}} - 1 \end{cases}$$

- *Equivalencia entre regímenes de descuento compuesto.*

Se tienen dos regímenes de descuento compuesto con factor de valoración $f(T, T') = (1 - D_m)^{-m(T'-T)}$ y $f(T, T') = (1 - D_{m'})^{-m'(T'-T)}$, respectivamente. Serán equivalentes cuando

$$(1 - D_m)^{-m(T'-T)} = (1 - D_{m'})^{-m'(T'-T)} \rightarrow \begin{cases} D_m = 1 - (1 - D_{m'})^{\frac{m'}{m}} \\ D_{m'} = 1 - (1 - D_m)^{\frac{m}{m'}} \end{cases}$$

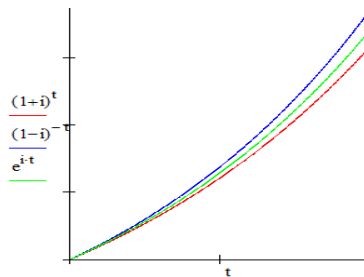
- *Equivalencia entre un régimen de interés compuesto y un régimen de descuento compuesto.*

Serán equivalentes cuando $(1 + I_m)^{m(T'-T)} = (1 - D_{m'})^{-m'(T'-T)} \rightarrow \begin{cases} I_m = (1 - D_{m'})^{\frac{-m'}{m}} - 1 \\ D_{m'} = 1 - (1 + I_m)^{\frac{-m}{m'}} \end{cases}$

- *Equivalencia entre los regímenes de interés compuesto, descuento compuesto y el régimen de interés continuo.*

Deberá cumplirse que $(1 + I_m)^{m(T'-T)} = (1 - D_m)^{-m'(T'-T)} = e^{\rho(T'-T)}$; $m \cdot \ln(1 + I_m) = -m' \cdot \ln(1 - D_m) = \rho$.

El “precio financiero estricto” se puede obtener directamente a partir del factor de valoración de interés compuesto o a partir del factor de valoración de descuento compuesto. La siguiente gráfica recoge los tres factores de valoración con el mismo nominal; el factor de descuento es el que da mayor capital final mientras que el factor de interés es el que da el capital final más pequeño.



En el límite cuando $p \rightarrow 0, i = d = \rho$ y para cualquier valor de p se cumple que, si son equivalentes, $d < \rho < i$

Ejemplo 11: Obtener el tipo de interés anual simple vencido equivalente a un 8% anual de descuento comercial para un plazo de 92 días. Base ACT/365.

Debe cumplirse que, para un plazo de $t = \frac{92}{365}$, $(1 + i \cdot t) = \frac{1}{1 - 0,08 \cdot t} \rightarrow i = \frac{0,08}{1 - 0,08 \cdot t} = 0,081646348$

Ejemplo 12: Obtener el tanto efectivo anual equivalente a los tantos de interés compuesto siguientes:

- ❑ 3% anual. $I_1 = 0,03$
- ❑ 2% semestral. $I_1 = (1 + I_2)^2 - 1 = (1 + 0,02)^2 - 1 = 0,04040000$
- ❑ 4% anual capitalizable trimestralmente. $I_1 = (1 + I_4)^4 - 1 = (1 + 0,01)^4 - 1 = 0,04060401$
- ❑ 1% mensual. $I_1 = (1 + I_{12})^{12} - 1 = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,12682503$
- ❑ 6% nominal pagadero bimestral. $I_1 = (1 + I_6)^6 - 1 = (1 + 0,01)^6 - 1 = 0,06152015$
- ❑ 3% efectivo bienal. $I_1 = (1 + I_{1/2})^{1/2} - 1 = (1 + 0,03)^{0,5} - 1 = 0,01488916$

El siguiente cuadro recoge los tantos efectivos y nominales asociados a distintos periodos de capitalización y que son equivalentes al 6% efectivo anual.

Tanto efectivo anual 6%			
Periodo de capitalización	Frecuencia de capitalización	Tanto efectivo por periodo	Tanto nominal por periodo
p	m	I_m	i_m
1/12	12	0,00486755	0,058410607
1/4	4	0,01467385	0,058695385
1/3	3	0,01961282	0,058838467
1/2	2	0,02956301	0,059126028
1	1	0,06000000	0,060000000
1 1/2	2/3	0,09133679	0,060891197
2	1/2	0,12360000	0,061800000
3	1/3	0,19101600	0,063672000
5	1/5	0,33822558	0,067645116

Como puede observarse, si el periodo de capitalización es inferior al año el tanto nominal es menor que el 6%, todo lo contrario si el periodo es superior al año.

2.4. Tasa Anual Equivalente y tanto efectivo de interés de la O.F.

La *Tasa Anual Equivalente (TAE)* es un tanto efectivo de interés compuesto anual resultante de la equivalencia de la prestación y contraprestación de la O.F., teniendo en cuenta que los capitales financieros que se podrán considerar deberán respetar el contenido de la Circular n^º8 y la Circular n^º 5 del Banco de España. El Banco de España no acepta todos los gastos de una operación financiera, sólo acepta unos muy concretos y explicitados cada tipo de operación. Como la *TAE* es un dato que toda entidad de crédito debe poner en el contrato, para que todas las entidades de créditos utilicen el mismo criterio, el Banco de España fija qué gastos y comisiones se deben tener en cuenta para calcularla²⁶.

El *tanto efectivo de interés de la O.F.* es el tanto efectivo anual de interés compuesto que hace equivalentes la prestación y la contraprestación teniendo en cuenta todos los cobros y pagos que la misma conlleva. Si se analiza la O.F. desde el punto de vista del sujeto pasivo (para él es una financiación), ese tanto de interés sería indicador del coste de la financiación; en el caso de que se analice desde la óptica del sujeto activo (para él es una inversión) ese tanto sería un indicador de la rentabilidad obtenida con esa O.F.

Tanto para el cálculo de la TAE como del tanto de interés de la O.F. es necesario conocer toda la prestación y toda la contraprestación.

Ejemplo 13: Una empresa ha pedido un préstamo de 1.000€ que tendrá que devolver dentro de 3 años y 2 meses. El préstamo se ha pactado al 5% nominal pagadero semestralmente. Hay unos gastos de apertura y gestión del préstamo del 1% sobre el capital prestado, determinar la TAE si el préstamo se cancelará de una sola vez al final del plazo.

En un préstamo el Banco de España admite los gastos de apertura y estudio como gastos a tener en cuenta para calcular la TAE.

El capital a devolver a los 3 años y dos meses es:

$$C' = 1000 \left(1 + \frac{0,05}{2} \right)^{2 \left(3 + \frac{2}{12} \right)} = 1000 (1 + 0,025)^{6 + \frac{1}{3}} = 1169,28 \text{ €}.$$

Para el cálculo de la TAE se planteará la O.F. $\{(1000,0)\} \sim \left\{ (10,0), \left(1169,28, 3 + \frac{2}{12} \right) \right\}$, siendo 10 los gastos

de apertura y gestión. La ecuación será: $1000 = 10 + 1169,28(1 + I_1)^{-\left(3 + \frac{2}{12} \right)} \rightarrow I_1 = 0,05396476$ (TAE).

Ejemplo 14: Una empresa lleva a descontar al banco letras de cambio domiciliadas por un nominal de 35.000€ y el vencimiento es a 60 días. Las condiciones del descuento son:

- Tipo de interés EUR 3M + 2,00%
- Comisiones:

Efectos Domiciliados: 0,25%	Efectos No Domiciliados: 0,50%
Efectos No Aceptados: 0,50%	Comisión Devolución: 4%

Calcule la TAE de este descuento y el coste de la financiación si el euribor a 3 meses es 0,763% y el Timbre asciende a 134,63€.

²⁶ http://app.bde.es/clf_www/leyes.jsp?id=9282#9294_11 y http://www.bde.es/f/webbde/SJU/normativa/Circular-5_2012.pdf, direcciones que contienen la normativa para el cálculo de la TAE.

Para calcular la TAE se debe conocer el valor descontado pero sin tener en cuenta el Timbre. La comisión de descuento a aplicar será del 0,25%.

El valor descontado es $E = 35000 \left(1 - 2,763\% \cdot \frac{60}{360} \right) - 0,25\% \cdot 35000 = 34751,32€$. La ecuación que permite

calcular la TAE es $34751,32(1 + I_1)^{\frac{60}{360}} = 35000 \rightarrow I_1 = 0,04371051$.

Si se quiere calcular el tanto efectivo anual que indique el coste de la financiación se deberá incorporar el Timbre como un gasto obligatorio para el descuento. La ecuación será:

$$(34751,32 - 134,63)(1 + I_1)^{\frac{60}{360}} = 35000 \rightarrow I_1 = 0,06830351$$

Ejemplo 15: Una entidad bancaria publicitaba el siguiente producto financiero: Realizar un Depósito a un plazo a elegir y a cambio el cliente recibe en el momento de hacer el depósito unos auriculares inalámbricos.

Auriculares inalámbricos



Descripción

- Forma ergonómica sin cables.
- Diseño con banda de LED azules, con receptor de radio FM.
- Compatible con PC, TV, DVD, VCD, MP3 y MP4.



A través de diferentes modalidades de contratación,

IPF en especie

Importe	Plazo	T.A.E.	
4.600 euros	3 meses	1,02 %	☐
2.300 euros	6 meses	1,02 %	☐
1.100 euros	12 meses	1,07 %	☒

CONTRATAR

La información que daba la entidad bancaria era la cantidad a poner en el depósito, el plazo y la TAE. En este tipo de producto los intereses se cobran en especie y por anticipado, luego al final del plazo sólo se recupera el capital invertido. Si se quiere saber a cuánto ascienden estos intereses se tendrá que descontar el importe del depósito a la TAE correspondiente.

$$C - C(1 + I_1)^{-t} = \text{Intereses}$$

Se hará este cálculo para cada una de las tres opciones.

Importe	Plazo	TAE	Intereses
4600	0,25	1,02%	11,66
2300	0,5	1,02%	11,64
1100	1	1,07%	11,11

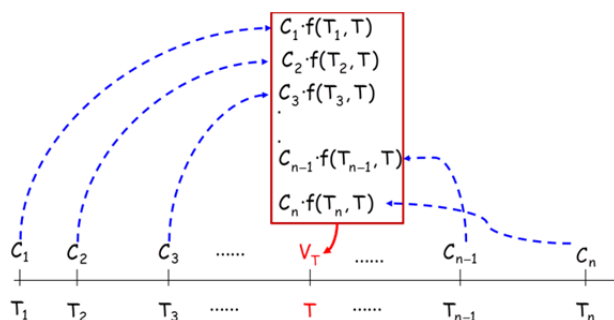
Como es lógico, el interés a cobrar por anticipado debe ser el mismo para las tres opciones ya que dan el mismo modelo de auriculares.

2.5 Valoración financiera.

Se sabe cómo comprobar que dos capitales financieros son equivalentes, basta encontrar el factor de valoración tal que $f(T, T') = \frac{C'}{C}$. Cuando la O.F. es compleja no existe esa relación directa entre la

prestación, la contraprestación y el factor de valoración; es necesario introducir un concepto nuevo: *Valor de un conjunto de capitales en un diferimiento*.

Dado $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$ y dado un factor de valoración $f(T, T')$, se define el valor en un diferimiento $\mathbf{T}$, V_T , a la suma de las cuantías de los capitales financieros que en $\mathbf{T}$ son equivalentes a cada uno de los capitales (C_r, T_r) que hay en el conjunto.



$V_T = \sum_{r=1}^n C_r \cdot f(T_r, T)$, siendo $C_r \cdot f(T_r, T)$ la cuantía del capital financiero que en $\mathbf{T}$ es equivalente al capital (C_r, T_r) ²⁷.

► **Propiedad:** Dado un factor de valoración, los valores de un conjunto de capitales financieros son siempre equivalentes entre sí.

Dado $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$ y dado un factor de valoración $f(T, T')$ entonces $(V_T, T) \sim (V_{T'}, T')$. El valor del conjunto de capitales financieros en $\mathbf{T}$ se puede hallar a partir del valor en $\mathbf{T}'$.

Demostración:

$$V_T = \sum_{r=1}^n C_r \cdot f(T_r, T) = \sum_{r=1}^n C_r \cdot \underbrace{f(T_r, T') \cdot f(T', T)}_{\text{escindibilidad}} = f(T', T) \cdot \sum_{r=1}^n C_r \cdot f(T_r, T') = f(T', T) \cdot V_{T'}$$

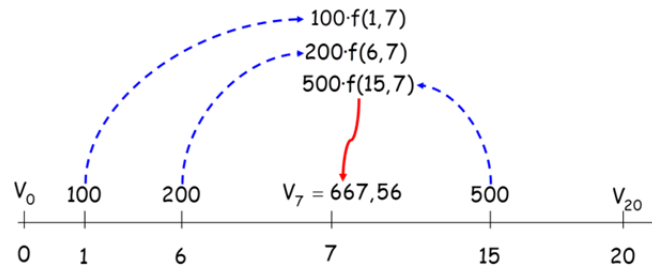
luego, $V_T = V_{T'} \cdot f(T', T)$ o su equivalente $V_{T'} = V_T \cdot f(T, T')$, c.q.d.

Si $T = 0$, V_0 es el valor actual y si $T = T_n$, $V_{T_n} \equiv V_n$ es el valor final.

Ejemplo 16: Hallar el valor en $T=0$, $T=7$, $T=20$ del conjunto de capitales $\{(100,1), (200,6), (500,15)\}$ si se valora al 6% anual de interés compuesto.

tanto de valoración		6%		
cuantía	diferimiento	$T=0$	$T=7$	$T=20$
100	1	94,34	141,85	302,56
200	6	140,99	212,00	452,18
500	15	208,63	313,71	669,11
	Valor	443,96	667,56	1423,85

²⁷ Si el conjunto de capitales financieros es infinito pero numerable, el valor $V_T = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot f(T_r, T)$ exige que la serie numérica sea convergente. Si la serie numérica fuera divergente su suma sería ∞ y económicamente no tiene sentido.



Se cumple que

$$443,96 \cdot (1 + 0,06)^7 = 667,56$$

$$1423,85 \cdot (1 + 0,06)^{-5} = 667,56$$

$$1423,85 \cdot (1 + 0,06)^{-20} = 443,96$$

2.6 Equivalencia financiera entre conjuntos de capitales financieros.

Dados dos conjuntos de capitales financieros y un factor de valoración, serán equivalentes según el factor de valoración dado cuando sean equivalentes sus respectivos valores.

Dados $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$ y $\{(C'_s, T'_s)\}_{s=1,2,\dots,m}$ y $f(T, T')$, $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n} \sim \{(C'_s, T'_s)\}_{s=1,2,\dots,m}$ si y sólo si $(V_T, T) \sim (V_{T'}, T')$.

$$\begin{array}{ccc} \{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n} & \xrightarrow{\sim} & \{(C'_s, T'_s)\}_{s=1,2,\dots,m} \\ \downarrow & \downarrow f(T, T') & \downarrow \\ (V_T, T) & \xrightarrow{\sim} & (V_{T'}, T') \end{array}$$

Luego $V_{T'} = V_T \cdot f(T, T')$ y si $T' = T$ entonces $V_{T'} = V_T$ (si se valoran los dos conjuntos de capitales en un mismo diferimiento T , ambos deben tener el mismo valor); a $V_{T'} = V_T$ se le denomina *ecuación de equilibrio de la O.F.*

Ejemplo 17: Una empresa pide hoy prestado un capital a una entidad de crédito. La operación financiera se pactó al 10% de interés continuo. Para la cancelación de la deuda el prestatario entregará 10.000€ dentro de un año, 13.000€ dentro de 3 años y 50.000€ a los 10 años de la concesión.

✱ El nominal del préstamo se obtendrá de la ecuación de equilibrio de la O.F. en $T=0$, que garantiza que el valor de la prestación (el nominal del préstamo) debe ser igual al valor de la contraprestación (los tres pagos acordado para cancelar la deuda), tomando como factor de valoración $f(T, T') = e^{0,1(T'-T)}$.

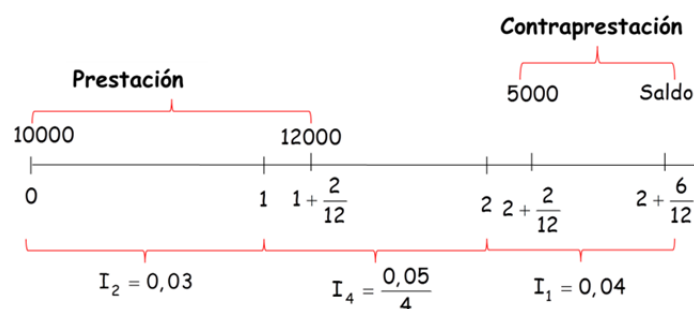
$$C = 10000 \cdot e^{-0,1} + 13000 \cdot e^{-0,1 \cdot 3} + 50000 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} = 37072,98.$$

✱ El tanto anual de interés al que resulta la financiación si hay unos gastos de apertura de 600€. Se deberá plantear la ecuación de equilibrio teniendo en cuenta que en 0 se pagan los gastos de apertura.

$$10000 \cdot (1 + I_1)^{-1} + 13000 \cdot (1 + I_1)^{-3} + 50000 \cdot (1 + I_1)^{-10} + 600 = 37072,98 \rightarrow I_1 = 0,1081993994$$

Ejemplo 18: Una empresa retira hoy el saldo de una cuenta bancaria que abrió hace 2 años y medio con una imposición de 10.000€. Al cabo de un año y dos meses de la apertura ingresó 12.000€ y hace cuatro meses

sacó 5.000€. La cuenta se pactó a interés compuesto al 3% efectivo semestral el primer año, al 5% nominal pagadero trimestral el segundo y el 4% efectivo anual el último. ¿Cuál es el importe del saldo que retirará?



$$\text{Saldo} = 10000(1 + I_2)^2(1 + I_2)^4(1 + I_1)^{0,5} + 12000(1 + I_4)^{4 \cdot \frac{10}{12}}(1 + I_1)^{0,5} - 5000(1 + I_1)^{\frac{4}{12}} = 19059,51\text{€}$$

Ejemplo 19: Una persona ha pedido un préstamo a 7 años. El acuerdo con el banco le obliga a pagar 10.000€ dentro de 2 años, 15.000€ dentro de 5 años y 20.000€ al final. El préstamo se ha pactado a interés compuesto variable: 5% nominal pagadero trimestral los 3 primeros años, 6% anual los dos siguientes y el 2% semestral los últimos.

□ ¿Cuál ha sido el capital prestado?

El capital prestado será el valor en 0 de los pagos a realizar para cancelar la deuda.

$$C = 10000\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{-8} + 15000(1 + 0,06)^{-2}\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{-12} + 20000(1 + 0,02)^{-4}(1 + 0,06)^{-2}\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{-12} = 34722,06\text{€}$$

□ ¿Cuál ha sido el coste medio de la financiación si ha tenido que pagar una comisión de apertura de 2.000€?

El coste medio de la financiación vendrá medido por un tanto efectivo anual de interés compuesto, para obtenerlo se debe plantear la ecuación de equilibrio teniendo en cuenta la comisión de apertura.

$$10000(1 + I_1)^{-2} + 15000(1 + I_1)^{-5} + 20000(1 + I_1)^{-7} + 2000 = 34722,06\text{€} \rightarrow I_1 = 0,064429905^{28}$$

Ejemplo 20: Una entidad financiera publico el siguiente anuncio,

Depósito Ascendente de CajaSur

11 de Mayo de 2010 a las 10:41 | Escrito por Bego



A un plazo de **2 años**, el Depósito Ascendente de **Cajasur** ofrece una rentabilidad creciente que llega a alcanzar el 4%, aunque su TAE global es de 2,516%.

- 1,5% nominal anual en el primer semestre
- 2,0% nominal anual el segundo semestre
- 2,5% interés nominal anual el tercer semestre
- 4,0% nominal anual el cuarto semestre
- 2,516% TAE

Este depósito se podrá contratar hasta el 1 de junio de 2010. El depósito puede cancelarse sin coste a partir del sexto mes y la inversión **mínima es de 10.000 euros**.

Para comprobar que la TAE es correcta se plantea la ecuación de equilibrio de la O.F. El capital que se obtiene al final de los dos años asciende a:

²⁸ La solución de la ecuación no es posible analíticamente, se debe utilizar un algoritmo de cálculo numérico para obtener las raíces de esa ecuación. Cualquier programa matemático permite el cálculo de las mismas de una manera sencilla y fácil de utilizar, por ejemplo, Mathcad. Otra opción es utilizar la rutina “buscar objetivo” de Excel.

$$C' = 10000 \left(1 + \frac{0,015}{2}\right) \left(1 + \frac{0,02}{2}\right) \left(1 + \frac{0,025}{2}\right) \left(1 + \frac{0,04}{2}\right) = 10509 \text{ €}$$

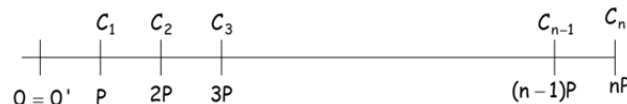
La TAE será el tanto efectivo anual constante que haga equivalentes (10000, 0) y (10509, 2), luego,

$$10000(1 + I_1)^2 = 10509 \rightarrow I_1 = 0,0251$$

2.7 Rentas financieras.

Se denomina renta financiera a todo conjunto de capitales financieros que tenga la siguiente característica:

$\forall r = 1, 2, \dots, n \quad T_{r+1} - T_r = P$, es decir, los diferimientos se distribuyen periódicamente.



Descripción de los elementos caracterizadores de una renta.

- El origen de la renta, $0'$.
 - ◆ Si $0'$ coincide con el origen de la O.F. la renta es *inmediata*.
 - ◆ Si $0' > 0$ entonces la renta está *diferida* $d = 0'$ años.
- El número de términos de la renta, n , es el número de capitales financieros que hay en el conjunto.
 - ◆ Si n es finito la renta es *temporal*.
 - ◆ Si n tiende a infinito la renta es *perpetua*.
- El periodo de la renta, P ; si

$$P = 1 \rightarrow \text{renta anual}$$

$$P = \frac{1}{2} \rightarrow \text{renta semestral}$$

....

$$P = \frac{1}{12} \rightarrow \text{renta mensual}$$

$M = \frac{1}{P}$ es la frecuencia de la renta, es decir, el número de periodos de renta que caben en un año.

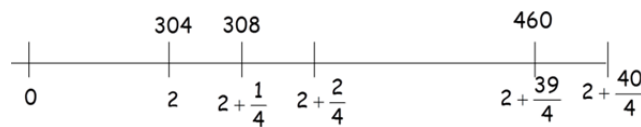
- ☞ Momento de pago del término dentro del periodo de renta.
 - ◆ Si el término se paga al inicio del periodo la renta es *anticipada*.
 - ◆ Si el término se paga al final del periodo la renta es *vencida*.
- ☞ El término r -ésimo de la renta, C_r , es la cuantía asociada al periodo r .
 - ◆ Si $\forall r \quad C_r = \alpha$ entonces la renta es *constante*.
 - ◆ Si el término no es constante, la renta es *variable*.

Ejemplo 21: Caracterizar el siguiente conjunto de capitales financieros:

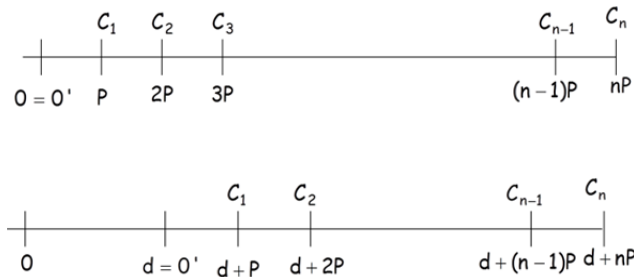
$$\left\{ \left(300 + 4r, 2 + \frac{1}{4}(r-1) \right) \right\}_{r=1,2,\dots,40}.$$

Se trata de una renta ya que la distancia entre los diferimientos es $\frac{1}{4}$, luego la renta es trimestral. Además, la renta es temporal ya que tiene 40 términos, $n=40$; el primer término se hace efectivo en 2 y el último en

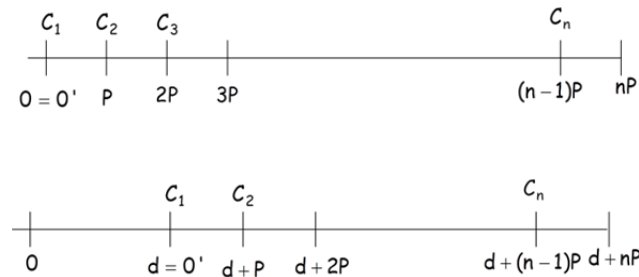
$2 + \frac{39}{4}$, luego la renta es anticipada y está diferida respecto al origen 2 años. Los términos de la renta varían siendo el primero de ellos de 304€, los términos crecen cada trimestre 4€, luego la renta es variable y los términos crecen linealmente (o en progresión aritmética).



El gráfico siguiente recoge los esquemas temporales de las rentas vencidas:



El siguiente gráfico recoge los esquemas temporales de las rentas anticipadas:



2.7.1 Valoración de rentas financieras. Valor actual y valor final.

Dada una *renta temporal inmediata y vencida*, $\{(C_r, rP)\}_{r=1,2,\dots,n}$ y dado un factor de valoración, el valor

actual es $V_0 = \sum_{r=1}^n C_r \cdot f(rP, 0)$ y el valor final es $V_n = \sum_{r=1}^n C_r \cdot f(rP, nP)$.

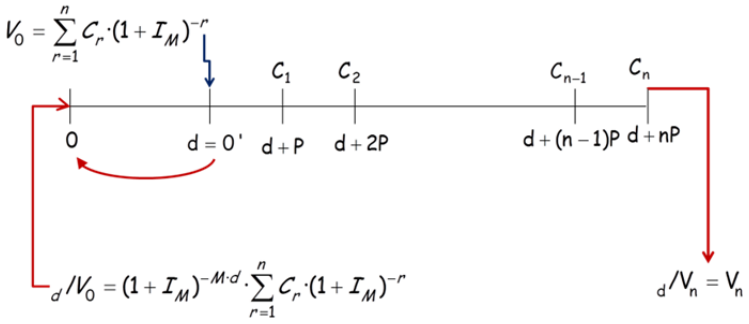
Si el factor de valoración es el régimen financiero de interés compuesto a tanto constante las expresiones se simplifican si se adapta el periodo de capitalización al periodo de la renta, es decir, si se utiliza el tanto efectivo por periodo de renta equivalente al dado. Sea I_m el tanto efectivo de interés compuesto de valoración

dado, $I_M = (1 + I_m)^{\frac{m}{M}} - 1$ es el tanto efectivo equivalente a I_m por periodo de renta, P ; el factor de valoración que se utilizará será $f(T, T') = (1 + I_M)^{M(T'-T)}$.

$$V_0 = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-\mathcal{M} \cdot r \cdot \mathcal{P}} = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-r} \quad \text{y} \quad V_n = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{\mathcal{M}(n-r)\mathcal{P}} = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{n-r}$$

2.7.2 Relación entre los valores de la renta inmediata y vencida y el resto de rentas.

• Rentas vencidas y diferidas.



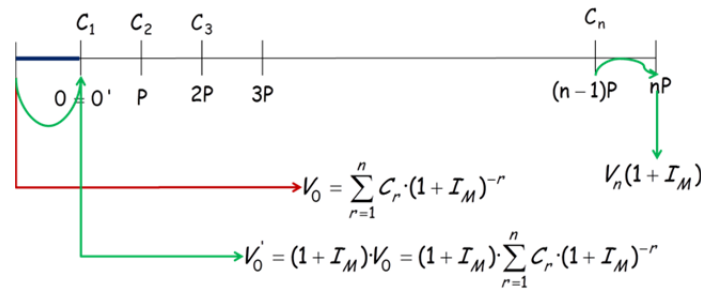
$$V_0 = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I_M)^{-r}$$

$$d/V_0 = (1 + I_M)^{-M \cdot d} \cdot \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I_M)^{-r}$$

$$d/V_0 = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-M(d+rP)} = (1 + I_M)^{-M \cdot d} \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-r} = (1 + I_M)^{-M \cdot d} \cdot V_0$$

$$d/V_n = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-M(d+nP-(d+rP))} = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{n-r} = V_n$$

• Rentas inmediatas y anticipadas.



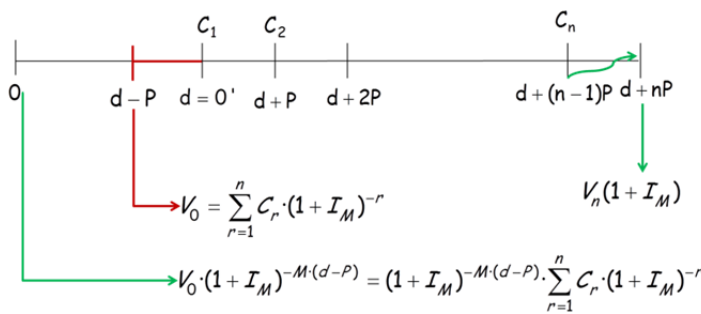
$$V_0 = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I_M)^{-r}$$

$$V_0' = (1 + I_M) V_0 = (1 + I_M) \cdot \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I_M)^{-r}$$

$$V_0' = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-M(r-1)P} = (1 + I_M) \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-r} = (1 + I_M) \cdot V_0$$

$$V_n' = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{M(nP-(r-1)P)} = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{n-r+1} = (1 + I_M) \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{n-r} = (1 + I_M) \cdot V_n$$

• Rentas diferidas y anticipadas.



$$d/V_0' = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-M(d+(r-1)P)} = (1 + I_M)^{-Md+1} \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{-r} = (1 + I_M)^{-Md+1} \cdot V_0$$

$$V_n' = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{M(d+nP-(d+(r-1)P))} = \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{n-r+1} = (1 + I_M) \sum_{r=1}^n C_r (1 + I_M)^{n-r} = (1 + I_M) \cdot V_n$$

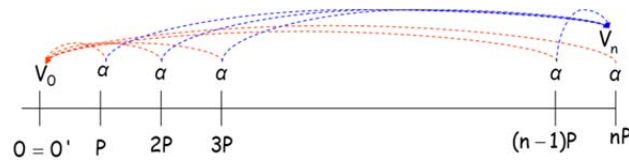
• Relación entre el valor actual y el valor final de una renta.

Los dos valores son equivalentes luego $V_0 = V_n(1 + I_M)^{-n}$ y $V_n = V_0(1 + I_M)^n$.²⁹

Si la renta es perpetua no hay valor final y el valor actual mantiene las mismas relaciones que las rentas temporales, siempre y cuando el valor actual de la renta perpetua inmediata y vencida, V_0^∞ , exista.

2.7.3 Valoración de rentas constantes.

Sólo se obtendrán las fórmulas para las rentas inmediatas y vencidas.



✿ *Valor actual.*

$V_0 = \sum_{r=1}^n \alpha(1 + I_M)^{-r}$, suma de términos que varían en progresión geométrica de razón $1 + I_M$, luego,

$$V_0 = \sum_{r=1}^n \alpha(1 + I_M)^{-r} = \alpha \frac{1 - (1 + I_M)^{-n}}{I_M}.$$

✿ *Valor final.*

El valor final será $V_n = V_0(1 + I_M)^n = \alpha \frac{(1 + I_M)^n - 1}{I_M}$.

✿ *Valor actual de la renta perpetua.*

$$V_0^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \frac{1 - (1 + I_M)^{-n}}{I_M} = \frac{\alpha}{I_M}$$

Si $\alpha = 1$ la renta es unitaria y para esta renta en concreto:

$$V_0 = \frac{1 - (1 + I_M)^{-n}}{I_M} = a_{\overline{n}|I_M} \quad V_n = \frac{(1 + I_M)^n - 1}{I_M} = s_{\overline{n}|I_M} \quad V_0^\infty = \frac{1}{I_M} = a_{\overline{\infty}|I_M}$$

Se pueden simbolizar los valores actuales y final de la renta constante de la siguiente forma:

Para $\alpha \neq 1$,

$$V_0 = \alpha \frac{1 - (1 + I_M)^{-n}}{I_M} = \alpha a_{\overline{n}|I_M} \quad V_n = \alpha \frac{(1 + I_M)^n - 1}{I_M} = \alpha s_{\overline{n}|I_M} \quad V_0^\infty = \frac{\alpha}{I_M} = \alpha a_{\overline{\infty}|I_M}$$

Ejemplo 22: Dada una renta constante de 100 u.m. mensuales y que dura 20 años, valorada al 8% anual capitalizable trimestralmente.

□ *Cuál será el valor final?*



$$I_4 = 0,02, \quad V_0 = 100 a_{\overline{80}|0,02} = 100 \frac{1 - (1 + 0,02)^{-80}}{0,02} = 3974,45 \text{ u.m.}$$

□ *Cuál sería el valor actual de la renta perpetua?*

²⁹ El valor final de una renta temporal se puede obtener capitalizando el valor actual al último diferimiento de renta.

$$V_0^\infty = \frac{100}{0,02} = 5000 \text{ u.m.}$$

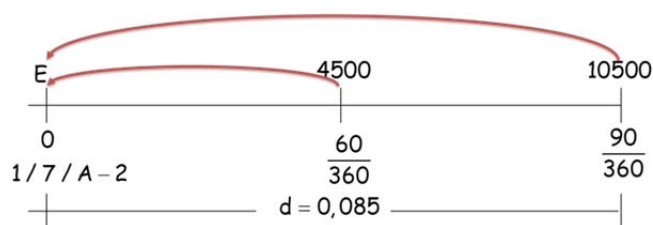
Ejemplo 23: Para la adquisición de un terreno el día 1-1-A, un inversor realiza imposiciones en una cuenta bancaria de 3.000€ trimestrales desde el día 1-1-(A-3) hasta el momento de la adquisición.

El día 1-7-(A-2) realizó una imposición adicional en dicha cuenta bancaria por el líquido obtenido por el descuento de un paquete de efectos comerciales de nominal 15.000€ y vencimientos: el 30% del nominal a 60 días y del resto a 90 días.

El día 1-1-A se adquiere el terreno entregando, en efectivo, el saldo acumulado en la cuenta bancaria hasta dicho día y comprometiéndose a pagar, por el resto aplazado, mensualidades vencidas de 1.500€ durante 5 años.

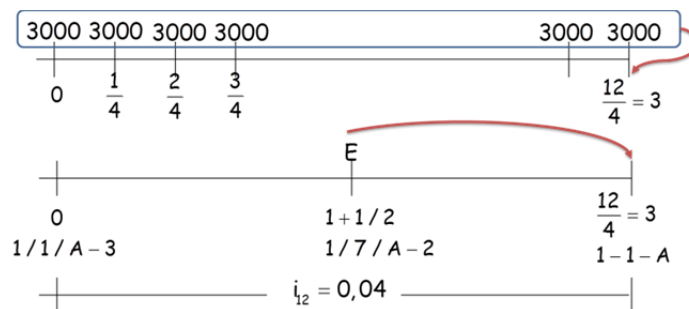
Se pide:

- Líquido obtenido por el descuento de los efectos comerciales si se realizó en régimen financiero de descuento comercial al 8,5% anual, con unos gastos de descuento del 3,5 por mil sobre el nominal.



$$E = 4500 \left(1 - 0,085 \cdot \frac{60}{360} \right) + 10500 \left(1 - 0,085 \cdot \frac{90}{360} \right) - \frac{15000 \cdot 3,5}{1000} = 14660,63 \text{ €}$$

- Saldo, el día 1-1-A, de la cuenta bancaria si ha rendido el 4% de interés anual pagadero por meses.



Desde el día 1-1-(A-3) hasta el 1-1-A se han hecho $3 \cdot 4 + 1 = 13$ ingresos en la cuenta bancaria (se tiene en cuenta la imposición del día 1-1-A). Luego se debe buscar el valor final de una renta constante y vencida que tiene 13 términos.

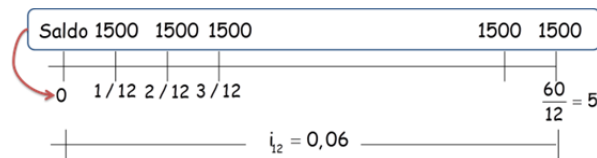
$V_n = 3000 \cdot a_{\overline{13}|I_4}$, siendo $I_4 = (1 + I_{12})^3 - 1 = \left(1 + \frac{0,04}{12} \right)^3 - 1 = 0,0100334$, luego $V_n = 41436,39$. Además,

hay que valorar la imposición realizada al año y medio de abrir la cuenta, 1-7-(A-2). El saldo será,

$$\text{Saldo} = V_n + E(1 + I_4)^{4,5} = 41436,39 + 15565,63 = 57002,02 \text{ €}$$

- Valor del terreno, el día 1-1-A, si el aplazamiento se pactó al 6% de interés anual pagadero por meses.

Para obtener el valor del terreno en el momento de la compra se deben tener en cuenta la cantidad entregada en efectivo y el valor en 0 de las mensualidades pactadas, tomando como tanto de valoración el 6% de interés anual pagadero por meses.



Valor del terreno = $57002.02 + 1500 \cdot a_{\overline{60}|I_{12}}$, siendo $I_{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$, luego el valor del terreno asciende a 134590,36€.

Ejemplo 24: Para renovar hoy su equipo informático la Empresa X debe hacer tres desembolsos de cuantías 30.000€, 25.000€ y 50.000€, con vencimientos hoy, 90 y 180 días, respectivamente.

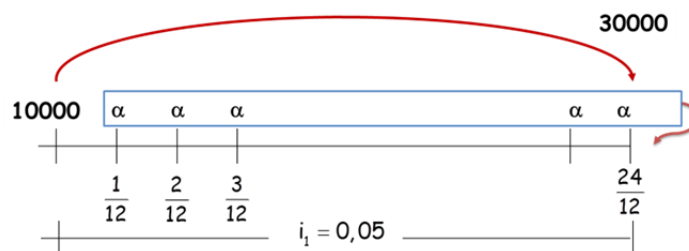
Para hacer frente al primer pago entregará, en el momento de su vencimiento, el saldo de una cuenta financiera abierta hace 2 años con una imposición inicial de 10.000€ y en la que se hicieron imposiciones mensuales constantes y vencidas de la cuantía necesaria para cubrir dicho pago.

Para el segundo pago descontará, en el momento de su vencimiento, una cartera de efectos comerciales que vence dentro de un año a fecha de hoy.

Para el tercer pago pedirá, en el momento de su vencimiento, un préstamo que se compromete a amortizar en tres pagos de igual cuantía pagaderos a los dos, tres y cuatro años de su concesión.

Se pide:

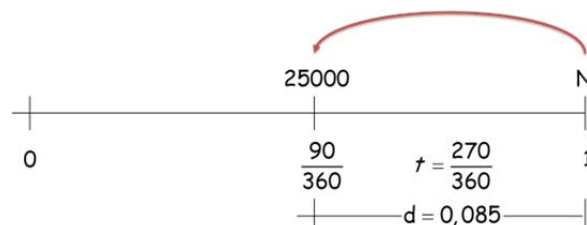
- ❑ Importe de las imposiciones mensuales hechas en la cuenta financiera si ha rendido un 5% de interés efectivo anual.



El saldo de la cuenta al final de los dos años debe ser el importe correspondiente al primer pago, luego,

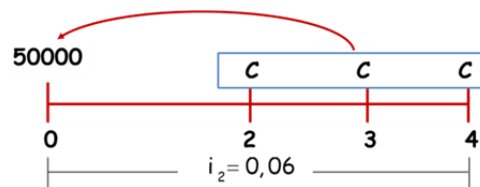
$$10000(1+0,05)^2 + \alpha \cdot s_{\overline{24}|I_{12}} = 30000 \rightarrow \alpha = \frac{30000 - 10000(1+0,05)^2}{s_{\overline{24}|I_{12}}} = 754,21$$

- ❑ Nominal de la cartera de efectos comerciales a descontar si se pactó al 7,5% anual de descuento comercial, con unos gastos financieros del 3 por mil sobre dicho nominal.



$$25000 = N \left(1 - 0,075 \frac{270}{360} \right) - \frac{3 \cdot N}{1000} \rightarrow N = 26574,54€$$

- ❑ Cuantía de los tres pagos que amortizan el préstamo si se pactó al 6% de interés anual pagadero por semestres.



$$50000 = C(1+0,03)^{-4} + C(1+0,03)^{-6} + C(1+0,03)^{-8} \rightarrow C = 19877,71\text{€}$$

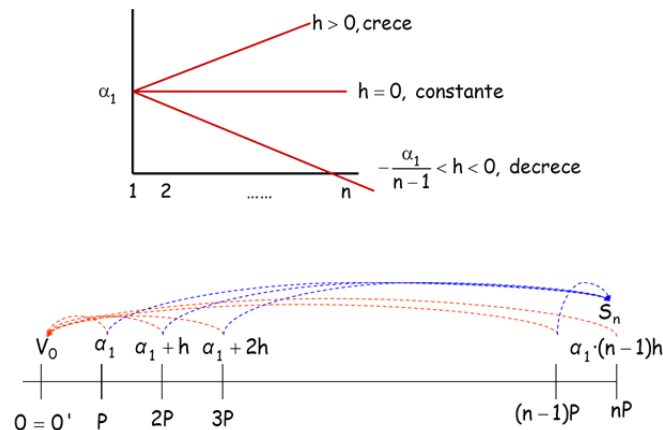
2.7.4 Valoración de rentas con término variable linealmente.

Una renta se tipificará como renta variable linealmente cuando se cumpla que

$$\forall r = 1, 2, \dots, n \quad \alpha_r = \alpha_1 + h \cdot (r - 1), \text{ siendo } \alpha_1 \text{ el primer término de la renta.}$$

El parámetro h puede ser positivo y negativo siempre que se cumpla que todos los términos de la renta son positivos. Como los términos están sobre una línea recta de pendiente h bastará que los dos puntos extremos sean positivos para que se cumpla la condición; el primero ya es positivo, luego, basta comprobar que el

$$\text{último lo es, así, } \alpha_n = \alpha_1 + h(n-1) > 0 \rightarrow h > -\frac{\alpha_1}{n-1}.$$



✿ Valor actual.

$$V_0 = \sum_{r=1}^n \alpha_r (1 + I_M)^{-r}, \text{ suma de términos cuyo valor es } V_0 = \left(\alpha_1 + \frac{h}{I_M} + n \cdot h \right) a_{\overline{n}|I_M} - \frac{n \cdot h}{I_M}$$

✿ Valor final.

$$\text{El valor final será } V_n = V_0 (1 + I_M)^n = \left(\alpha_1 + \frac{h}{I_M} \right) s_{\overline{n}|I_M} - \frac{n \cdot h}{I_M}.$$

✿ Valor actual de la renta perpetua.

$$V_0^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\alpha_1 + \frac{h}{I_M} + n \cdot h \right) a_{\overline{n}|I_M} - \frac{n \cdot h}{I_M} \right) = \frac{\alpha_1}{I_M} + \frac{h}{I_M^2}$$

Ejemplo 25: Hallar el valor actual y el valor final de una renta que dura 20 años, pagadera por anticipado y que está diferida del origen 3 años. La renta es trimestral siendo el primer término de 5000€, los términos siguientes se incrementarán el 10% del término inicial sucesivamente. El tanto de interés de valoración es el 6% efectivo anual.

La información que tenemos de la renta es:

$d=3$, diferida 3 años.

$P=1/4$, trimestral y anticipada, la primera trimestralidad se pagará en 3.

$n=20 \cdot 4=80$, la renta tiene 80 términos.

$\alpha_1 = 5000$, importe de la primera trimestralidad.

$h=0,1 \cdot 5000=500$, cada trimestralidad se incrementará respecto a la anterior en 500€.

$\alpha_r = 5000 + 500 \cdot (r-1)$ para $r=1,2,\dots,80$.

$$V_0 = \left(\underbrace{\left(5000 + \frac{500}{I_4} + 80 \cdot 500 \right) a_{\overline{80}|I_4} - \frac{80 \cdot 500}{I_4}}_{\text{valor de la inmediata y vencida un trimestre anterior a 3 por ser anticipada}} \right) (1 + I_4)^{-4 \cdot \left(3 - \frac{1}{4} \right)} = 837115.37\text{€},$$

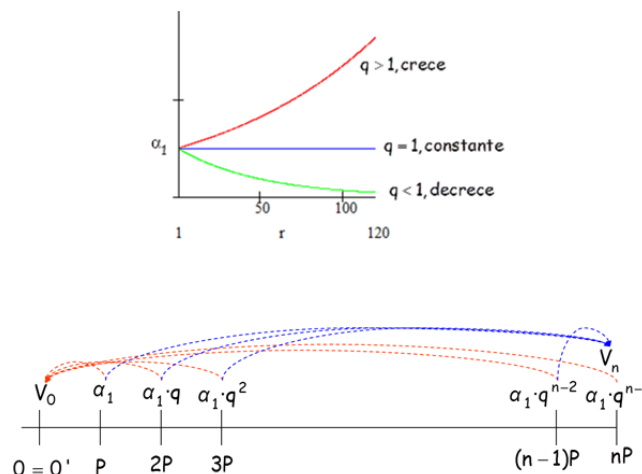
siendo $I_4 = (1 + 0,06)^{1/4} - 1 = 0.014673846$.

2.7.5 Valoración de rentas con término variable acumulativamente.

Una renta se tipificará como renta variable linealmente cuando se cumpla que

$$\forall r = 1, 2, \dots, n \quad \alpha_r = \alpha_1 \cdot q^{r-1}, \text{ siendo } \alpha_1 \text{ el primer término de la renta.}$$

La razón de variación de los términos, q , deberá ser siempre positiva para asegurar que todos los términos de la renta son positivos.



✿ Valor actual.

$V_0 = \sum_{r=1}^n \alpha_r (1 + I_M)^{-r}$, suma de términos cuya expresión dependerá de la relación entre el tanto de valoración y la razón de variación de los términos.

◆ Si $q \neq 1 + I_M \rightarrow V_0 = \alpha_1 \frac{1 - (1 + I_M)^{-n} q^n}{(1 + I_M) - q}$

◆ Si $q = 1 + I_M \rightarrow V_0 = \alpha_1 \frac{n}{1 + I_M}$

✿ Valor final.

El valor final será:

◆ Si $q \neq (1 + I_M) \rightarrow V_n = V_0(1 + I_M)^n = \alpha_1 \frac{(1 + I_M)^n - q^n}{(1 + I_M) - q}$.

◆ Si $q = 1 + I_M \rightarrow V_n = \alpha_1 \cdot n \cdot (1 + I_M)^{n-1}$

✿ *Valor actual de la renta perpetua.*

$$V_0^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_1 \frac{1 - (1 + I_M)^{-n} q^n}{(1 + I_M) - q}, \text{ para que exista el límite finito se debe cumplir que } q < (1 + I_M).$$

$$\text{El valor actual de la perpetua en este caso será } V_0^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_1 \frac{1 - (1 + I_M)^{-n} q^n}{(1 + I_M) - q} = \frac{\alpha_1}{(1 + I_M) - q}.$$

Ejemplo 26: Obtener el valor actual y el valor final de una renta trimestral variable el 2% acumulativo, que durará 12 años y el primer trimestre de 100 € se cobrará dentro de dos años. El tanto de interés de valoración será el 4% efectivo anual.

La información que tenemos de la renta es:

$d=1+3/4$, diferida 1 año y 3 trimestres.

$P=1/4$, trimestral, la primera trimestralidad se pagará en 2.

$n=12 \cdot 4=48$, la renta tiene 48 términos.

$\alpha_1 = 100$, importe de la primera trimestralidad.

$q=1+0,02$, cada trimestralidad se incrementará respecto a la anterior según el factor 1,02.

$\alpha_r = 100 \cdot 1,02^{r-1}$, para $r=1,2,\dots,48$.

$$V_0 = 100 \underbrace{\frac{1 - (1 + I_4)^{-48} \cdot 1,02^{48}}{(1 + I_4) - 1,02}}_{\text{Valor de la renta inmediata y vencida en } 1+3/4} \cdot (1 + I_4)^{-7} = 5667.15\text{€},$$

Siendo $I_4 = (1 + 0,04)^{1/4} - 1 = 0,009853407$ el tanto efectivo por periodo de renta.

$$V_n = 100 \frac{(1 + I_4)^{48} - 1,02^{48}}{(1 + I_4) - 1,02} = 9717.92\text{€}$$

Ejemplo 27: Los ingresos anuales estimados para los próximos 40 años serán: el primer año de 200000€, creciendo cada año el 2% acumulativo durante los próximos 15 años. A partir de ese momento los ingresos crecerán el 3% lineal durante 10 años más. Los últimos años los ingresos se mantendrán constantes en la última cantidad alcanzada.

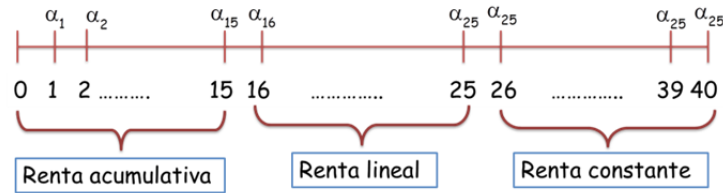
Los gastos se estiman que ascenderán, cada trimestre, a 10000€ durante los 15 primeros años, 20000€ durante 10 años más y 40000€ el resto de los años.

Si el tanto de interés de valoración es el 6% anual pagadero mensual el valor hoy de los beneficios estimados para los próximos 40 años se obtendrá mediante la diferencia entre el valor hoy de los ingresos y el valor hoy de los gastos.

Los ingresos definen una renta anual vencida y variable. Los 15 primeros años el crecimiento es acumulativo, con $q=1,02$; los 10 años siguientes pasa a crecer linealmente siendo la base para el cálculo de la razón de variación de los términos el ingresos obtenido en el año 15, $\alpha_{15}^{\text{ingresos}}$, luego,

$$h = \alpha_{15}^{\text{ingresos}} \cdot 0,03 = \alpha_1^{\text{ingresos}} \cdot 1,02^{14} \cdot 0,03 = 263895.75 \cdot 0,03 = 7916.87\text{€}$$

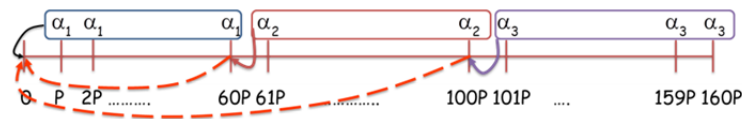
de donde, $\alpha_{16}^{\text{ingresos}} = \alpha_{15}^{\text{ingresos}} + h = 271812.63\text{€}$. En el último tramo de 15 años los ingresos son constantes y serán iguales a los ingresos del año 25, $\alpha_{25}^{\text{ingresos}} = 343064.48\text{€}$



$$V_0^{\text{Ingresos}} = \alpha_1^{\text{Ingresos}} \frac{1 - (1 + I_1)^{-15} q^{15}}{(1 + I_1) - q} + \left(\left(\alpha_{16}^{\text{Ingresos}} + \frac{h}{I_1} + 10 \cdot h \right) a_{10|I_1} - \frac{10 \cdot h}{I_1} \right) (1 + I_1)^{-15} + \alpha_{25}^{\text{Ingresos}} \cdot a_{15|I_1} (1 + I_1)^{-25} = 3808333.70\text{€}$$

$$\text{con } I_1 = \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} - 1 = 0,06167781$$

Los gastos definen una renta trimestral variable pero que por tramos es constante.



$$V_0^{\text{Gastos}} = \alpha_1 \cdot a_{60|I_4} + \alpha_2 \cdot a_{40|I_4} (1 + I_4)^{-60} + \alpha_3 \cdot a_{60|I_4} (1 + I_4)^{-100} = 10000 \cdot a_{60|I_4} + 20000 \cdot a_{40|I_4} (1 + I_4)^{-60} + 40000 \cdot a_{60|I_4} (1 + I_4)^{-100} = 988625.61$$

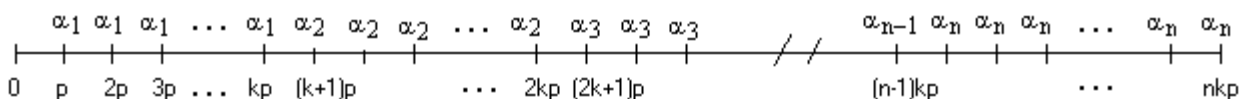
$$\text{con } I_4 = \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^3 - 1 = 0,015075125.$$

El valor hoy del beneficio neto es $V_0^{\text{Ingresos}} - V_0^{\text{Gastos}} = 2819708.09\text{€}$

2.7.6 Valoración de rentas fraccionadas.

Es frecuente que en un conjunto de capitales financieros aparezca una distribución de los mismos como la del siguiente ejemplo: un inquilino paga el alquiler de su vivienda cada primero de mes, el contrato de alquiler estipula que cada año se revisará la renta. En este ejemplo se tiene una renta mensual pero sólo es constante dentro del año, cuando se procede a la revisión del alquiler durante el año siguiente vuelve a ser constante pero con una cantidad distinta.

Se puede valorar este tipo de rentas (conocidas como rentas fraccionadas) a partir de las fórmulas utilizadas en las rentas anteriores.



La gráfica anterior representa una renta fraccionada donde, k es el número de fracciones que hay en cada intervalo o tramo y n es el número de intervalos o tramos. El periodo de la renta (fracción) es p y la amplitud

del intervalo es $P=k \cdot p$. Si el tanto de interés por periodo de renta (fracción) es I_m , el tanto efectivo por intervalo (tramo) equivalente será I_M con $M = \frac{I}{k \cdot p}$, tal que $(1 + I_m)^k - 1 = I_M$.

Para hallar el valor actual y final de esta renta se reducirá la renta a una que recoja el valor de las fracciones al final de cada tramo; como dentro de cada tramo la renta es constante se tendrá una renta de periodo P con n

términos, siendo el valor de cada término $\alpha'_r = \alpha_r \cdot s_{\overline{k}|I_m} = \alpha_r \frac{(1 + I_m)^k - 1}{I_m} = \alpha_r \frac{I_M}{I_m}$.

✿ *Valor actual.*

$$V_0^{\text{fraccionada}} = \sum_{r=1}^n \alpha'_r (1 + I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{I_M}{I_m} (1 + I_M)^{-r} = \frac{I_M}{I_m} \sum_{r=1}^n \alpha_r (1 + I_M)^{-r},$$

Donde $\sum_{r=1}^n \alpha_r (1 + I_M)^{-r}$ es el valor actual de una renta sin fraccionar V_0 , cuyo término es la fracción α_r ,

y $\frac{I_M}{I_m}$ es el factor corrector a aplicar sobre V_0 .

✿ *Valor final.*

El valor final será

$$V_n^{\text{fraccionada}} = \sum_{r=1}^n \alpha'_r (1 + I_M)^{n-r} = \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{I_M}{I_m} (1 + I_M)^{n-r} = \frac{I_M}{I_m} \sum_{r=1}^n \alpha_r (1 + I_M)^{n-r}$$

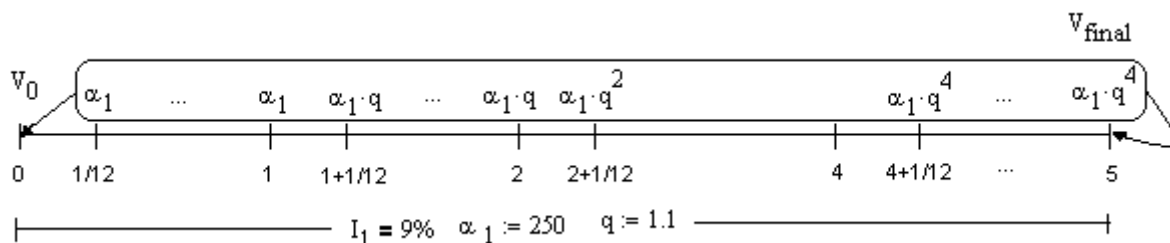
✿ *Valor actual de la renta perpetua.*

$$V_0^{\infty \text{fraccionada}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0^{\text{fraccionada}} = \frac{I_M}{I_m} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \alpha_r (1 + I_M)^{-r}.$$

Ejemplo 28: Calcular el valor actual y el valor final, en régimen financiero de interés compuesto, de las siguientes rentas fraccionadas:

a) Renta mensual, inmediata, vencida, con términos crecientes en un 10% anual acumulativo. Importe de los términos mensuales del primer año 250 €. Duración de la renta 5 años. Tanto de interés 9% efectivo anual.

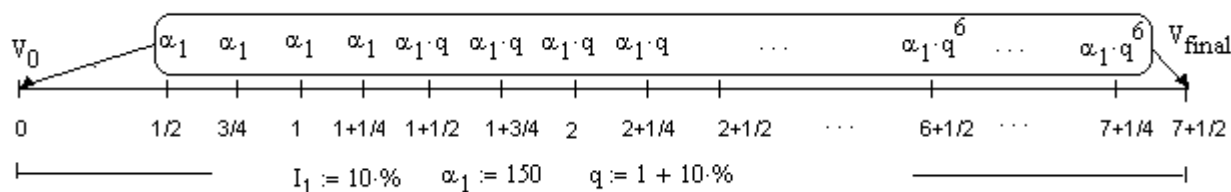
Es una renta variable acumulativamente (en progresión geométrica) de razón de variación de los términos $q=1,1$. La tiene 5 tramos de variación de los términos.



$$V_0^{\text{fraccionada}} = \frac{I_1}{I_{12}} 250 \frac{1 - (1 + I_1)^{-5} q^5}{I_1} = 14585.48, \text{ con } I_{12} = 0,00727$$

$$V_n^{\text{fraccionada}} = \frac{I_1}{I_{12}} 250 \frac{(1 + I_1)^5 - q^5}{I_1} = 22441.56, \text{ con } I_{12} = 0,00727$$

b) Renta trimestral, anticipada, diferida medio año, con términos crecientes a razón del 10% acumulativo cada año. Importe de los términos del primer año 150 €. Duración total de la operación 7,5 años. Tanto de interés 10% efectivo anual.

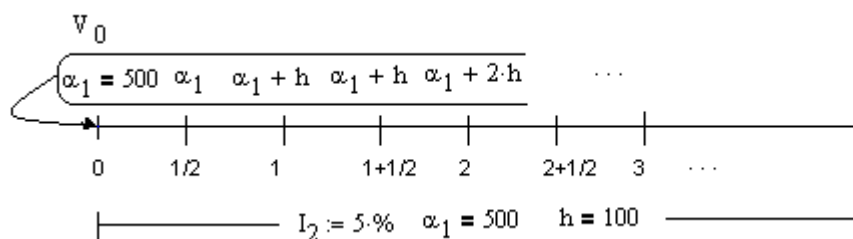


La renta tiene la misma estructura que la anterior solo que está diferida medio año, luego hay 7 tramos de variación del término, y anticipada.

$$V_0^{\text{fraccionada}} = \frac{I_1}{I_4} 150 \cdot 7 \cdot (1 + I_1)^{-1} (1 + I_4)^{-1} = 3865.31, \text{ con } I_4 = 0.0241137 \text{ (en este caso } (1 + I_1) = q \text{)}$$

$$V_n^{\text{fraccionada}} = V_0^{\text{fraccionada}} (1 + I_1)^{7.5} = 7900.05$$

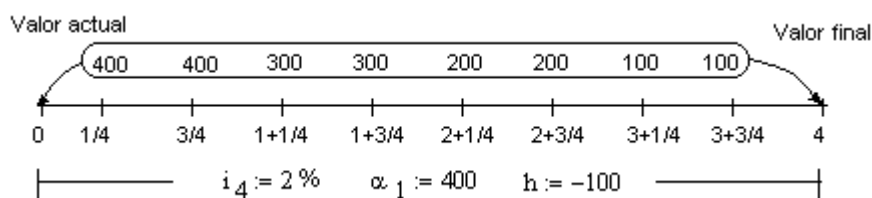
c) Renta perpetua, inmediata, semestral y anticipada, variable anualmente de manera que cada término es 100 € mayor que el correspondiente al mismo semestre del año anterior. Importe del primer término semestral 500 €. Tanto de interés 5% efectivo semestral.



Es una renta fraccionada que incrementa cada año en 100€.

$$V_0^{\infty \text{ fraccionada}} = \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{500 \cdot 2}{I_1} + \frac{2 \cdot 100}{I_1^2} \right) (1 + I_1)^{\frac{1}{2}} = 30987.80€, \text{ con } I_1 = (1 + 0.05)^2 - 1 = 0.1025$$

d) Renta semestral, con términos decrecientes anualmente a razón de 100 € cada término. El primer término, de 400 €, se hace efectivo al trimestre de concertada la operación financiera y la duración total de ésta es de 4 años. Tanto de interés 2% anual capitalizable trimestralmente.



En esta renta los términos decrecen cada año 100€, además, la renta está diferida del origen medio semestre.

$$V_0^{\text{fraccionada}} = \frac{I_1}{I_2} \left(\left(400 - \frac{100}{I_1} - 4 \cdot 100 \right) a_{\overline{4}|I_1} + \frac{4 \cdot 100}{I_1} \right) (1 + I_1)^{1/4} = 1941.45€,$$

$$\text{con } I_2 = (1 + 0.01)^2 - 1 = 0.010025, \quad I_1 = (1 + 0.01)^4 - 1 = 0.020151$$

El valor final será

$$V_n^{\text{fraccionada}} = V_0^{\text{fraccionada}} (1 + I_1)^4 = 2102.72€,$$

2.8 Reserva Matemática de una Operación Financiera.

Para entender el concepto de Reserva Matemática de una O.F. se debe observar la evolución de la O.F. de forma dinámica en el tiempo. Antes del origen de la O.F. la Reserva Matemática debe ser 0 y una vez finalizada la O.F. la Reserva Matemática debe ser 0, en un momento intermedio puede ser que la O.F. esté financiando al sujeto pasivo o al sujeto activo en función de la distribución en el tiempo de los cobros y pagos.

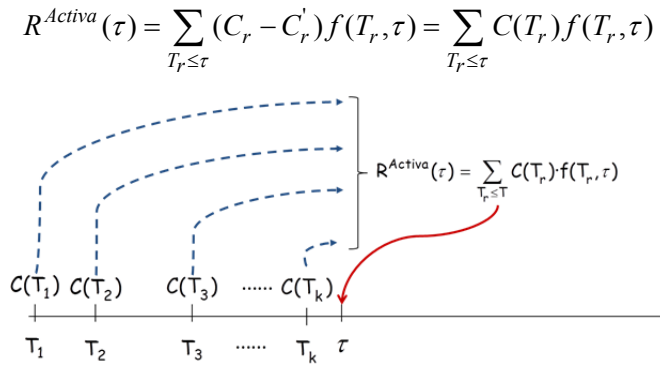
Sea $C(T_r) = C_r - C'_r$ el saldo neto entre cobros y pagos realizados en el momento T_r , con C_r el cobro y C'_r el pago. Si $C(T_r) = C_r - C'_r < 0$ se ha producido una salida neta de dinero en T_r , si $C(T_r) = C_r - C'_r > 0$ se ha producido una entrada neta de dinero.

Se distinguirá entre:

Reserva Matemática Activa (retrospectiva).

Sea la O.F. $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n} \sim \{(C'_s, T'_s)\}_{s=1,2,\dots,m}$, se definirá la Reserva Matemática Activa (Retrospectiva), a aquella función del tiempo que cuantifica la disponibilidad financiera que está financiando a la O.F. en un momento τ , para ello, sólo se tendrán en cuenta los cobros y pagos que se han producido en la O.F. desde su inicio hasta τ inclusive y el capital obtenido restaura la equivalencia financiera y se simbolizará por $R^{Activa}(\tau)$, $\{(C_r, T_r)\}_{T_r \leq \tau} \sim \{(C'_s, T'_s)\}_{T'_s \leq \tau} \cup (R^{Activa}(\tau), \tau)$.

Se define Reserva Matemática Activa en τ al valor de los cobros netos realizados desde el origen de la O.F. a τ ³⁰.



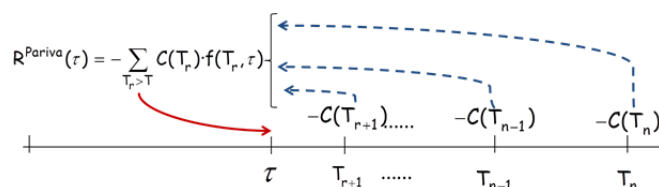
Reserva Matemática Pasiva (prospectiva).

De igual forma se puede obtener la Reserva Matemática Pasiva; ésta nos da el capital que en τ se debería entregar si en ese momento se quisieran cancelar los compromisos financieros de la O.F. (restaura la equivalencia entre cobros y pagos). $\{(C_r, T_r)\}_{T_r > \tau} \cup (R^{Pasiva}(\tau), \tau) \sim \{(C'_s, T'_s)\}_{T'_s > \tau}$.

Se define Reserva Matemática Pasiva en τ al valor en τ de los saldos netos $C'_r - C_r$ pendientes de pagar a partir de τ .

$$R^{Pasiva}(\tau) = \sum_{T_r > \tau} (C'_r - C_r) f(T_r, \tau) = - \sum_{T_r > \tau} C(T_r) f(T_r, \tau)$$

³⁰ Para valorar se utilizará el factor de valoración pactado en la O.F.



Propiedad: Si la operación financiera es cierta la Reserva Matemática Activa y la Reserva Matemática Pasiva en un mismo momento coinciden³¹. En este caso se denominará Reserva Matemática.

Para demostrarlo partimos de la ecuación de equilibrio de la O.F. en un diferimiento cualquiera τ ,

$$\sum_{\forall T_r} C_r \cdot f(T_r, \tau) = \sum_{\forall T_r} C'_r \cdot f(T_r, \tau) \Leftrightarrow \sum_{\forall T_r} C(T_r) \cdot f(T_r, \tau) = 0$$

$$\sum_{T_r \leq \tau} C(T_r) \cdot f(T_r, \tau) + \sum_{T_r > \tau} C(T_r) \cdot f(T_r, \tau) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{T_r \leq \tau} C(T_r) \cdot f(T_r, \tau)}_{R^{Activa}(\tau)} = - \underbrace{\sum_{T_r > \tau} C(T_r) \cdot f(T_r, \tau)}_{R^{Pasiva}(\tau)}$$

Para calcular la Reserva Matemática en un diferimiento τ que está entre T_{r-1} y T_r se calcula la Reserva Matemática en T_{r-1} y se capitaliza hasta τ ,

$$\text{Para } T_{r-1} < \tau < T_r \quad R(\tau) = R(T_{r-1}) \cdot f(T_{r-1}, \tau)$$

Si el factor de valoración es el de interés compuesto a tanto constante con tanto efectivo de interés I_m ,

$$\text{Para } T_{r-1} < \tau < T_r \quad R(\tau) = R(T_{r-1}) \cdot (1 + I_m)^{m(\tau - T_{r-1})}$$

La Reserva Matemática es una función continua en el tiempo y se puede observar su evolución de forma discreta haciendo las observaciones en cada uno de los diferimientos que intervienen en la O.F.

$$\forall r > 1, \quad R(T_r) = R(T_{r-1})(1 + I_m^r)^{m(T_r - T_{r-1})} + C(T_r), \text{ como } R(T_r) = R(T_{r-1}) + \Delta R(T_{r-1}).$$

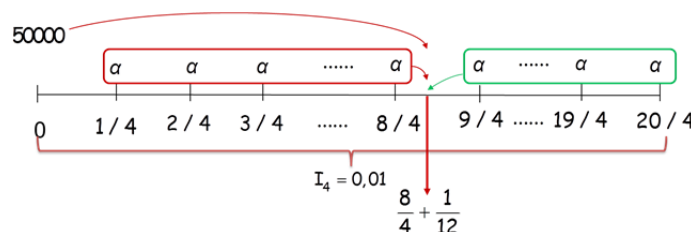
sustituyendo se obtiene que $R(T_{r-1}) \left[1 - (1 + I_m^r)^{m(T_r - T_{r-1})} \right] + \Delta R(T_{r-1}) = C(T_r)$, ecuación en diferencias finitas

lineal con la condición de contorno $R(T_n) = 0$.

Ejemplo 29: Un empresario hace dos años y un mes pidió un préstamo de 50000€ a devolver en 20 trimestralidades de igual importe. El tanto de interés pactado con el banco fue del 4% anual pagadero trimestral. Hallar la reserva matemática de la O.F. hoy.

Para poder calcular la Reserva Matemática se tienen que conocer los cobros y pagos, luego se tendrán que determinar las trimestralidades a pagar para cancelar la deuda.

$$50000 = \alpha \cdot a_{\overline{20}|I_4} \rightarrow \alpha = \frac{50000}{a_{\overline{20}|I_4}} = 2770,77, \text{ siendo } I_4 = 0,01.$$



³¹ Si en la O.F. no es cierta, se utilizará la Reserva Matemática Activa.

Se tiene que calcular la Reserva Matemática Activa en un diferimiento que no coincide con el pago de las trimestralidades, cae dentro del trimestre 9.

$$R^{Activa} \left(2 + \frac{1}{12} \right) = 50000 \cdot (1 + I_4)^{8 + \frac{1}{3}} - 2770,77 \cdot s_{\overline{8}|I_4} \cdot (1 + I_4)^{\frac{1}{3}} = \left(\underbrace{50000 \cdot (1 + I_4)^8 - 2770,77 \cdot s_{\overline{8}|I_4}}_{R^{Activa}(2)} \right) \cdot (1 + I_4)^{\frac{1}{3}} = 31288.79$$

De la misma forma se calculará la Reserva Matemática Pasiva,

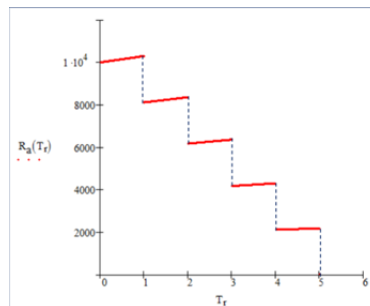
$$R^{Pasiva} \left(2 + \frac{1}{12} \right) = 2770,77 \cdot a_{\overline{20-8}|I_4} \cdot (1 + I_4)^{\frac{1}{3}} = \left(\underbrace{2770,77 \cdot a_{\overline{12}|I_4}}_{R^{Pasiva}(2)} \right) \cdot (1 + I_4)^{\frac{1}{3}} = 31288.79$$

Y como puede comprobarse ambas coinciden.

Ejemplo 30: Dibujar el perfil de la Reserva Matemática de un préstamo de 10000€ a devolver con el pago de 5 anualidades constantes, siendo el tanto de interés del préstamo el 3% anual.

El importe de las mensualidades se obtendrá a partir de la ecuación de equilibrio de la O.F. en 0.

$$10000 = \alpha \cdot a_{\overline{5}|0,03} \rightarrow \alpha = \frac{10000}{a_{\overline{5}|0,03}} = 2183.55\text{€}$$



Observando el gráfico se ve que la Reserva Matemática es una función discontinua con saltos de igual valor (el salto es el importe de la anualidad); en 0 asciende a 10000€ y en 5, después del pago de la última anualidad es 0.

3 Operaciones bancarias.

Las operaciones bancarias son aquellos productos financieros ofertados por la banca y que, en el desarrollo de su propia actividad de negocio, permiten canalizar el ahorro hacia la inversión. La banca agrupa sus productos en: operaciones de activo y de pasivo.

◆ **OPERACIONES DE ACTIVO.**

Se entienden por operaciones de activo aquéllas mediante las cuales los bancos conceden disponibilidades monetarias a sus clientes, con cargo a los depósitos de otros clientes o a sus propios recursos. Son operaciones de concesión de créditos obteniendo el derecho a su restitución en forma, plazo y condiciones pactadas.

Las operaciones de activo pueden pactarse a un tanto de interés constante o variable.

En aquellas pactadas a tanto de interés variable deberán analizarse con especial atención:

- El plazo total del crédito, o tiempo de validez de la operación financiera.
- El subplazo, o plazo de revisión del tipo de interés, que acostumbra a ser el año.
- El tanto de interés. El tanto de interés variable consta de dos elementos: un tanto de referencia y un marginal. El de referencia puede variar durante el plazo (siendo el año el periodo de revisión más frecuente), mientras que el marginal permanece fijo.

El tanto de interés de referencia pactado para cada periodo debe ser objetivo y elegirse en función de las características de la operación.

Actualmente el Banco de España acepta como tantos de referencia para los préstamos hipotecarios: el EURIBOR, la T.A.E. de los préstamos hipotecarios de Cajas y de Bancos, indicador CECA de tipos activos y la rentabilidad interna de la Deuda Pública.

◆ **OPERACIONES DE PASIVO.**

Las operaciones de pasivo son todos los depósitos que los clientes realizan en un banco.

Existe una gran variedad de operaciones de pasivo, aunque todas ellas pueden agruparse en dos clases: las cuentas de liquidez y las cuentas de rentabilidad.

Generalmente, el cliente que abre una cuenta de pasivo en un banco persigue dos objetivos: poder disponer el dinero cuando lo necesite y, hasta entonces, obtener la mayor rentabilidad posible, todo ello con el mínimo riesgo.

La relación entre la Entidad de Crédito y el cliente deberá enmarcarse en lo dispuesto en la Circular n.8 del Banco de España.

Otra forma de agrupar las operaciones bancarias puede ser sobre la base de los siguientes criterios:

● **LIQUIDEZ.**

- Cuentas corrientes bancarias ordinarias.
- Descuento bancario.
- Pagarés de empresa.
- Cuentas corrientes de crédito.
- Cuentas corrientes de alta rentabilidad.

● **AHORRO-RENTABILIDAD.**

- Cuentas a la vista.

- Cuentas a plazo. En las cuentas a plazo deberá analizarse: el plazo pactado, el tipo de interés, la cláusula de revisión del tipo de interés, la penalización por cancelación anticipada de la cuenta y los gastos de mantenimiento de la cuenta.

● FINANCIACION A MEDIO Y LARGO PLAZO.

- Préstamos ordinarios.

- Préstamos hipotecarios. Llevan una cláusula de garantía que afecta a bienes inmuebles. Se afecta la propiedad mediante escritura pública.

- Préstamos con garantía pignoratícia. Lleva incorporada una cláusula de garantía que afecta a activos mobiliarios: valores mobiliarios, mercaderías, imposiciones a plazo, efectos comerciales, etc.

- Préstamos sindicados. Un banco actúa como agente, es decir, es el que recibe la instrucción del solicitante del préstamo para que llegue a buen fin la operación. El agente elige un grupo de bancos directores que suscriben parte del préstamo colocando el resto a otras entidades. La responsabilidad de los prestamistas es mancomunada y se utiliza para préstamos con nominales elevados.

3.1 Operaciones bancarias de activo más habituales.

3.1.1 Descuento comercial.

Se considera crédito comercial el descuento, mediante libramiento o endoso, de efectos comerciales, pagarés u otros efectos aptos para la función de giro, creados para movilizar el precio de las operaciones de compraventa de bienes, o prestación de servicios.

La línea de descuento o descuento bancario mediante remesas consiste en un contrato bancario entre el cliente y el banco, que rige las condiciones financieras del descuento de efectos comerciales de forma continuada y repetitiva al amparo de una clasificación de riesgo comercial previamente estudiada por la entidad descontante.

Existen dos formas de aplicar las condiciones de descuento:

- A *tarifa general*: Supone un tanto de descuento comercial dependiente del vencimiento y de la categoría del cliente en el banco. Además, el banco cobrará unas comisiones de descuento que dependerán de la domiciliación bancaria.

- A *“precio único” (forfait)*: En este caso el banco aplicará un único tanto de descuento neto para toda la remesa, independientemente del vencimiento y sin comisiones.

Como el efecto comercial es un “documento-valor” se deberá pagar el Impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados, es decir, el Timbre.

La tabla vigente de Timbre según el nominal de la letra es la siguiente:

<i>Límite inferior</i>	<i>Límite superior</i>	<i>Timbre nominal</i>
	24,04	0,06
24,05	48,08	0,12
48,09	90,15	0,24
90,16	180,30	0,48
180,31	360,61	0,96
360,62	751,27	1,98
751,28	1502,53	4,21

1502,54	3005,06	8,41
3005,07	6010,12	16,83
6010,13	12020,24	33,66
12020,25	24040,48	67,31
24040,49	48080,97	134,63
48080,98	96161,94	269,25
96161,85	192323,87	538,51

El timbre para nominales superiores a 192323,87€ es un 3 por mil sobre el nominal.

Las variables que determinan el valor descontado, o efectivo, serán: nominal de la letra, el tanto nominal de descuento, el vencimiento, los gastos de descuento y el Timbre (la base es Act/360).

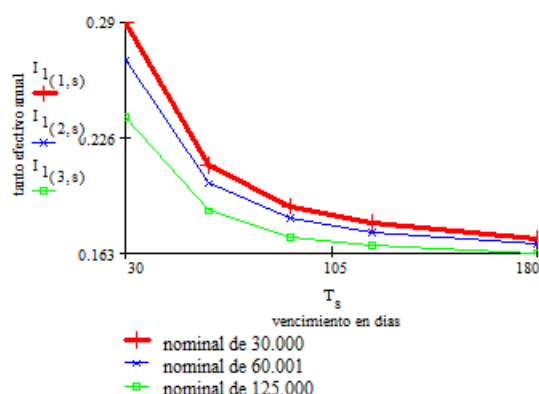
La fórmula para obtener el capital efectivo a recibir por el descuento es:

$$E = N \cdot (1 - d \cdot t) - G_0 - \text{Timbre},$$

El tanto efectivo anual de interés al que ha resultado el descuento es aquél que haga equivalente el nominal del efecto comercial con el capital efectivamente obtenido en el momento de realizar el descuento,

$$I_1 = \left(\frac{N}{E} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

El siguiente gráfico muestra el Tanto Efectivo Anual al que le ha resultado el descuento, según el vencimiento de la letra, estando cada curva asociada a un nominal:



Dado que las comisiones mantienen mínimos y que el Timbre es una cantidad fija para un intervalo, una buena gestión de la cartera de efectos a negociar deberá tener en cuenta la incidencia de dichas variables sobre el total de gastos financieros asociados al descuento de remesas de letras.

La Tabla siguiente muestra la incidencia de dichas variables sobre el coste de la financiación, pudiéndose observar que letras con el mismo vencimiento y el mismo tanto de descuento tienen coste financiero distinto como consecuencia de las comisiones y el Timbre (elementos vinculados al nominal de la letra).

N_r	t_r	d_r	E_r	I_1
50000	30	0.12	49090	0.24659
200000	30	0.12	196500	0.235974
60000	30	0.12	58990	0.225954
500000	30	0.12	491600	0.225456
120000	30	0.12	117990	0.224708
200000	30	0.12	196500	0.235974

300000	60	0.1225	291275	0.193736
30000	60	0.1225	29057.5	0.211095
90000	60	0.1225	87472.5	0.186385
1000000	60	0.1225	972783.33	0.180058
700000	60	0.1225	680108.33	0.18883
40000	60	0.1225	38773.333	0.205483
350000	90	0.125	336262.5	0.173704
65000	90	0.125	62378.75	0.178981
800000	90	0.125	769000	0.171263

Para calcular la TAE asociada el descuento se deberá tener en cuenta: El capital descontado y las comisiones³² de descuento pero no se puede tener en cuenta el Timbre que se debe pagar, así:

$$TAE \rightarrow I_1 = \left(\frac{N}{E + \text{Timbre}} \right)^{\frac{1}{i}} - 1$$

Ejemplo 31: Descontar dos efectos con vencimiento y condiciones de descuento siguientes (base ACT/360):

Nominal de la letra	Vencimiento	Tipo de descuento comercial	Comisiones de descuento	Timbre IAJD
24.000	60 días	8%	1 per mil	67,31
56.000	120 días	8,5%	1 per mil	269,25

El efectivo obtenido con el descuento de cada una de los efectos comerciales es:

$$E_1 = 24000 \left(1 - 0,08 \frac{60}{360} \right) - \frac{24000}{1000} - 67,31 = 23588,69€$$

$$E_2 = 56000 \left(1 - 0,085 \frac{120}{360} \right) - \frac{56000}{1000} - 269,25 = 54088,08€$$

Para obtener el tanto efectivo anual al que ha resultado el descuento se tendrá que cumplir para cada efecto comercial,

$$23588,69(1+I_1)^{\frac{60}{360}} = 24000 \rightarrow I_1 = 0.109288504 ; \quad 54088,08(1+I_1)^{\frac{120}{360}} = 56000 \rightarrow I_1 = 0.109837475$$

La TAE se obtendrá de la misma forma pero sin tener en cuenta el Timbre.

$$(23588,69+67,31)(1+I_1)^{\frac{60}{360}} = 24000 \rightarrow I_1 = 0.090484711$$

$$(54088,08+269,25)(1+I_1)^{\frac{120}{360}} = 56000 \rightarrow I_1 = 0.093426845$$

3.1.2. Crédito bancario.

El crédito bancario es un contrato con el banco por el que se autoriza a un cliente a disponer de dinero hasta una cantidad límite máxima fijada. Durante la vida de la póliza de crédito el cliente puede retirar dinero pero también puede ingresar dinero, luego, la cantidad realmente prestada por el banco no es fija sino que varía en función de las entradas y salidas de dinero que se van produciendo.

Es un instrumento de financiación, normalmente a corto plazo, que aporta liquidez.

En el contrato se pactan:

³² Si las comisiones tienen un mínimo, este mínimo no puede incorporarse como gasto para calcular la TAE. Además, la TAE se debe hacer para cada letra individualmente, no para la cartera global.

a) Los intereses que el cliente debe pagar al banco. Normalmente se pacta el tanto nominal de interés a aplicar cuando la cantidad máxima no ha sido sobrepasada y el interés a aplicar sobre la cantidad excedida de límite. Los intereses sólo se pagan por la cantidad utilizada y durante el tiempo que se ha utilizado.

b) El periodo de liquidación de los intereses, lo más frecuente es el mes o el trimestre.

c) Las comisiones a pagar: comisión de mantenimiento, comisión por excedido de límite, ect.

La forma de cálculo de los intereses es el método hamburgués y se utiliza el interés simple³³.

Ejemplo 32: Una empresa solicita al banco una póliza de crédito de 100.000€, la liquidación de intereses se realizará al final de cada mes. El tanto nominal de interés pactado es el 9%, el interés nominal sobre excedidos es del 18%. La comisión de mantenimiento es mensual y del 1%, la comisión por excedidos es del 10% sobre el saldo medio excedido en el mes.

Los movimientos del mes de la póliza de crédito han sido:

Fecha Valor	Salidas	Entradas	Días	Crédito disponible	Crédito utilizado	Saldo excedido
01/01/2012			2	100000	0	
03/01/2012	20000		3	80000	20000	
06/01/2012	45000		6	35000	65000	
12/01/2012		3000	5	38000	62000	
17/01/2012	50000		3	0	100000	12000
20/01/2012		10000	5	0	100000	2000
25/01/2012	5000		3	0	100000	7000
28/01/2012		15000	3	8000	92000	

La liquidación de los intereses y de las comisiones a 31 de enero da lugar a los siguientes datos:

Fecha Valor	Salidas	Entradas	Días	Crédito disponible	Crédito utilizado	Saldo excedido	números	números excedidos
01/01/2012			2	100000	0		0	0
03/01/2012	20000		3	80000	20000		60000	0
06/01/2012	45000		6	35000	65000		390000	0
12/01/2012		3000	5	38000	62000		310000	0
17/01/2012	50000		3	0	100000	12000	300000	36000
20/01/2012		10000	5	0	100000	2000	500000	10000
25/01/2012	5000		3	0	100000	7000	300000	21000
28/01/2012		15000	3	8000	92000		276000	0
31/01/2012	567,50			7432,50	92567,50			
31/01/2012	935,33			6497,17	93502,83			
Suma de números normales				2136000				
Suma de números excedidos				67000				
Saldo medio normal	71200,00			Intereses normales	534,00			
Saldo medio excedido	2233,33			Intereses excedidos	33,50			
Comisión mantenimiento				712,00				
Comisión sobre excedidos				223,33				
Total Intereses	567,50							
Total comisiones	935,33							

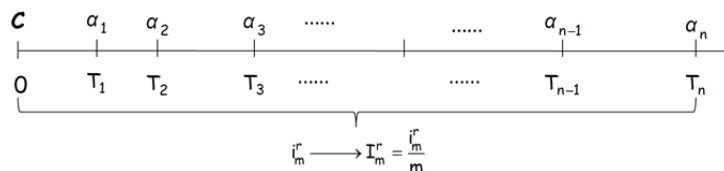
³³ En el apartado sobre la cuenta corriente se explica con detalle la forma de calcular el número comercial y el saldo medio.

3.1.3 Préstamos.

Un préstamo bancario es una O.F. a través de la cual el banco da dinero a un particular o una empresa como instrumento de financiación. El sujeto financiado se compromete a devolver el capital prestado y al pago de los intereses devengados.

Existen distintas formas de pactar la devolución del capital prestado y el pago de los intereses. Se expondrán las más habituales del mercado.

La representación gráfica de un préstamo habitual es la siguiente:



Donde, C es el nominal del préstamo (cantidad prestada), T_r es el diferimiento en el que vence un pago a realizar por el sujeto financiado, α_r es el término amortizativo a pagar en el diferimiento T_r , i_m^r es el tanto nominal de interés pactado con el banco y que se aplicará en el periodo $[T_{r-1}, T_r]$ y n es el número de *términos amortizativos* que tiene el préstamo.

La ecuación de equilibrio del préstamo es aquella que asegura que el valor en 0 de todos los términos amortizativos es igual al nominal del préstamo,

$$C = \sum_{r=1}^n \alpha_r \cdot f(T_r, 0)$$

• **Magnitudes amortizativas de un préstamo.**

De forma general se definirán las siguientes magnitudes, se supondrá que la amortización se realiza de forma periódica:

✿ **Capital pendiente de amortizar al final de cada periodo amortizativo:** es la parte del nominal, C , que todavía no se ha devuelto después de pagar el término correspondiente a ese periodo,

$$R_r, \text{ con } R_0 = C \text{ y } R_n = 0$$

✿ **Total amortizado hasta el final de cada periodo:** es la parte del nominal, C , que ya se ha devuelto después de pagar el término correspondiente a ese periodo,

$$M_r, \text{ con } M_0 = 0 \text{ y } M_n = C$$

Se cumple que $\forall r = 1, 2, \dots, n \quad M_r + R_r = C$.

✿ **Cuota de interés correspondiente al término r -ésimo:** es la parte del término amortizativo que cubre los intereses devengados. Los intereses se calculan sobre el periodo de amortización y sobre el capital pendiente de amortizar al inicio del periodo (se considera que los intereses se pagan por vencido),

$$\forall r = 1, 2, \dots, n \quad Y_r = R_{r-1} \cdot I_m^r$$

Siendo I_m^r el tanto efectivo de interés a aplicar en el periodo r pactado con el banco.

✿ **Cuota de amortización (de capital):** es la parte del término amortizativo que se paga para reducir el capital pendiente por amortizar,

$$\forall r = 1, 2, \dots, n \quad A_r = \alpha_r - Y_r$$

Se cumplen las siguientes relaciones³⁴:

$$\forall r = 1, 2, \dots, n \quad A_r = R_{r-1} - R_r, \quad \alpha_r = A_r + Y_r$$

$$C = \sum_{r=1}^n A_r, \quad M_r = \sum_{s=1}^r A_s, \quad R_r = \sum_{s>r}^n A_s$$

✳ **Cuadro de amortización:** es costumbre recoger todas las magnitudes amortizativas de un préstamo en una tabla o cuadro.

Periodo	Término	Cuota de Interés	Cuota de capital	Total amortizado	Capital pendiente
0					C
1	α_1	$Y_1 = R_0 \cdot I_m^1$	$A_1 = \alpha_1 - Y_1$	$M_1 = A_1$	$R_1 = R_0 - A_1$
2	α_2	$Y_2 = R_1 \cdot I_m^2$	$A_2 = \alpha_2 - Y_2$	$M_2 = M_1 + A_2$	$R_2 = R_1 - A_2$
...					
n	α_n	$Y_n = R_{n-1} \cdot I_m^n$	$A_n = \alpha_n - Y_n$	$M_n = C$	$R_n = 0$

Ejemplo 33: Un sujeto solicita un préstamo de 20000€ con las siguientes condiciones financieras: Duración: 6 años. Interés: 5% nominal pagadero semestral. Los intereses se pagan semestralmente y por vencido. El nominal del préstamo lo devolverá entregando las siguientes cuotas de capital: 3000 dentro de 1 año, 12000 dentro de 4 años y el resto al final de la vida del préstamo.

a) Construir el cuadro de amortización³⁵.

Datos del préstamo: $C=20000\text{€}$, $i_2 = 5\% \rightarrow I_2 = 2,5\%$, los capitales que debe pagar el sujeto pasivo para cancelar el nominal son (3000,1), (12000,4) y (5000,6), la suma de las tres cantidades da 20000. El cuadro de amortización es:

Periodos	Término (cuota)	Cuota de capital	Cuota de interés	Total amortizado	Capital pendiente	Reserva matemática
0				0	20000	20000
1	500	0	500	0	20000	20000
2	3500	3000	500	3000	17000	17000
3	425	0	425	3000	17000	17000
4	425	0	425	3000	17000	17000
5	425	0	425	3000	17000	17000
6	425	0	425	3000	17000	17000
7	425	0	425	3000	17000	17000
8	12425	12000	425	15000	5000	5000
9	125	0	125	15000	5000	5000
10	125	0	125	15000	5000	5000
11	125	0	125	15000	5000	5000
12	5125	5000	125	20000	0	0

b) Calcular la reserva matemática y el capital pendiente en $T= 5$ años y 3 meses. Para calcular la reserva matemática en un momento que está dentro del semestre se deberá calcular la reserva matemática al inicio del semestre 11 (final del semestre 10) y capitalizarla medio semestre (3 meses).

³⁴ Teniendo en cuenta que $A_r = R_{r-1} - R_r = -\Delta R_r$ y operando adecuadamente se obtiene que $\alpha_r = -\Delta R_{r-1} + R_{r-1} \cdot I_m^r$, que es una ecuación en diferencias finitas lineal con las condiciones de contorno $R_0 = C$ y $R_n = 0$; su solución permite obtener la expresión matemática del Capital pendiente por amortizar al final de cada periodo.

³⁵ Como los intereses se pagan por vencido, en el momento del pago del término amortizativo correspondiente el capital pendiente y la reserva matemática coinciden.

La reserva matemática al final del semestre 10 coincide con el capital pendiente por amortizar y ésta es de 5000€, luego la reserva matemática en $T = 5$ años y 3 meses será,

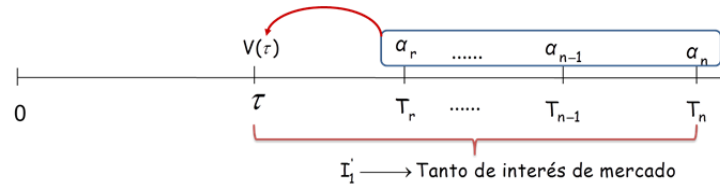
$$R\left(5 + \frac{3}{12}\right) = R_{10}(1 + I_2)^{\frac{1}{2}} = 5000(1 + I_2)^{0,5} = 5062,11€$$

El capital pendiente por amortizar en $T = 5$ años y 3 meses es el mismo que en $T = 5$ años (en medio de ambos diferimientos no se ha efectuado ninguna devolución de capital), es decir,

$$R_{10} = 5000 \rightarrow R_{10+1/2} = 5000$$

• Valoración de un préstamo.

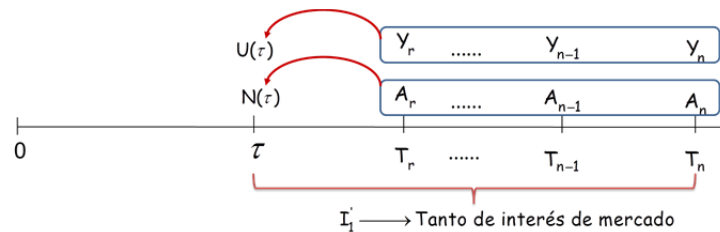
En una fecha, $0 < \tau < nP$, entre la concesión del préstamo y el final del mismo puede obtenerse el valor que el mercado le da a ese préstamo. Para poder obtener ese valor es necesario conocer en ese momento el tanto de interés que está vigente en el mercado³⁶, I'_1 , y todos los cobros y pagos que quedan pendientes de realizarse a partir de esa fecha.



Así, $V(\tau) = \sum_{T_r \geq \tau} \alpha_r (1 + I'_1)^{-(T_r - \tau)}$ nos dará el valor del préstamo (Valor de mercado) que no tiene que coincidir

con la Reserva Matemática, sólo coincidirán si el tanto de interés de valoración coincide con el tanto de interés del préstamo.

Si se quiere valorar de forma separado el conjunto de capitales que recoge las cuotas de interés y el conjunto de capitales que recoge las cuotas de capital aparecen los conceptos de **Usufructo** y **Nuda Propiedad** del préstamo en τ .



$$U(\tau) = \sum_{T_r \geq \tau} Y_r (1 + I'_1)^{-(T_r - \tau)} \quad y \quad N(\tau) = \sum_{T_r \geq \tau} A_r (1 + I'_1)^{-(T_r - \tau)}$$

Debiéndose cumplir que $V(\tau) = U(\tau) + N(\tau)$ si para todos se utiliza el mismo tanto de interés.

• Tanto prestatario, TAE y Tanto prestamista.

- El tanto prestatario es un tanto anual de interés compuesto que puede utilizarse como un indicador del coste de la financiación para el sujeto pasivo. Para obtenerlo se debe plantear la ecuación de equilibrio

³⁶ Se considerará un tanto de interés constante para todo el plazo de vida que le queda al préstamo.

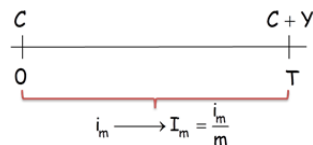
entre la prestaci3n, el nominal del préstamo y la contraprestaci3n, los términos amortizativos y todos los gastos asociados a la operaci3n de prestamo³⁷.

- El tanto prestamista es un tanto anual de interés compuesto que puede utilizarse como un indicador de la rentabilidad que ha obtenido el banco (sujeto activo). Para obtenerlo se debe plantear la ecuaci3n de equilibrio entre los pagos (nominal del préstamo y los gastos del préstamo que debe pagar el banco) y los cobros (los términos amortizativos y todos los gastos del préstamo que cobra el banco).
- La *TAE* es un tanto anual de interés compuesto que representa el coste de la financiaci3n bajo determinadas condiciones marcadas por el Banco de España, s3lo admite los gastos de apertura y estudio y las primas del seguro sobre el préstamo.

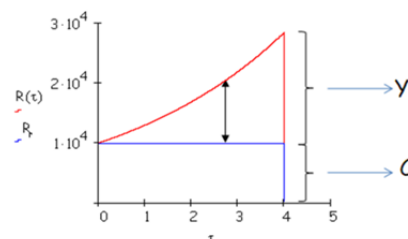
• Estudio de distintas estructuras amortizativas de un préstamo.

✚ Préstamo que se amortiza con un solo pago al final del plazo.

Este préstamo es el que tiene la estructura más sencilla, su representaci3n sobre el eje temporal es



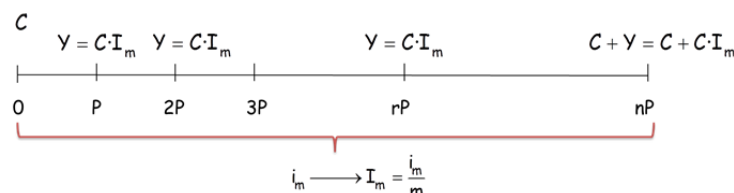
Donde $C + Y = C(1 + I_m)^{m(T'-T)}$. En este préstamo s3lo hay un pago de intereses que ascienden a $Y = C\left((1 + I_m)^{m(T'-T)} - 1\right)$ y una única cuota de capital igual al nominal del préstamo. El gráfico que recoge la evoluci3n de la reserva matemática y del capital pendiente por amortizar es:



La curva roja es la reserva matemática, que crece por la acumulaci3n de intereses devengados y no pagados, y la curva azul es el capital pendiente.

✚ Préstamo que se amortiza con un único pago al final del plazo y paga peri3dicamente los intereses devengados.

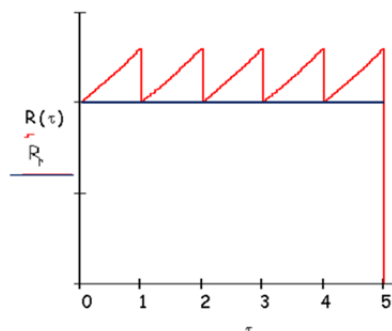
A diferencia del préstamo anterior, los intereses se van pagando peri3dicamente. La gráfica temporal de este préstamo es la siguiente:



La ecuaci3n de equilibrio del préstamo se cumple ya que si se valoran todos los pagos (intereses y amortizaci3n) en 0 se tiene $CI_m \cdot a_{\overline{n}|I_m} + C(1 + I_m)^{-n} = C$.

³⁷ Los gastos más frecuentes son: gastos de apertura, gastos de estudio, peritaci3n cuando hay una garantía hipotecaria, gastos notariales y de registro y gastos de gestoria.

El capital pendiente por amortizar es C hasta que se hace el último pago en nP , mientras que la reserva matemática crece dentro del periodo hasta alcanzar el importe de los intereses a pagar en ese periodo, Y . El gráfico de evolución de la reserva matemática y del capital pendiente es:



Ejemplo 34: Una empresa solicita un préstamo de 10000€ a 5 años. El banco le ofrece un interés del 5% nominal pagadero semestral y se amortizará al final, pagando los intereses cada semestre por vencido.

a) Construir el cuadro de amortización.

Los intereses se pagan semestralmente $Y = 10000 \cdot I_2 = 10000 \cdot 0,025 = 250$ €. El cuadro de amortización es:

periodos	término	interés	amortización	total amortizado	resto pendiente
0					10000
1	250,00	250,00	0	0	10000
2	250,00	250,00	0	0	10000
3	250,00	250,00	0	0	10000
4	250,00	250,00	0	0	10000
5	250,00	250,00	0	0	10000
6	250,00	250,00	0	0	10000
7	250,00	250,00	0	0	10000
8	250,00	250,00	0	0	10000
9	250,00	250,00	0	0	10000
10	10250,00	250,00	10000	0	0

b) Si el banco le hubiera ofertado un interés nominal del 3% el primer año, el 4% los dos siguientes y del 5% los dos últimos, construir el cuadro de amortización.

En este supuesto los intereses varían cada vez que cambia el tanto de interés. El cuadro resultante es:

periodos	término	interés	amortización	total amortizado	resto pendiente
0					10000
1	150,00	150,00	0	0	10000
2	150,00	150,00	0	0	10000
3	200,00	200,00	0	0	10000
4	200,00	200,00	0	0	10000
5	200,00	200,00	0	0	10000
6	200,00	200,00	0	0	10000
7	250,00	250,00	0	0	10000
8	250,00	250,00	0	0	10000
9	250,00	250,00	0	0	10000
10	10250,00	250,00	10000	0	0

c) Plantear y obtener el tanto efectivo anual medio al que resulta el préstamo si el banco le hace pagar una comisión de apertura del 1% del nominal prestado si los intereses pagados son los del apartado b).

Se debe plantear la ecuación de equilibrio de la O.F. incluyendo los gastos iniciales de apertura, que ascienden a 100€. La siguiente tabla recoge la prestación y la contraprestación:

Cuadro de cobros y pagos del préstamo		
0	10000	100,00
1		150,00
2		150,00
3		200,00
4		200,00
5		200,00
6		200,00
7		250,00
8		250,00
9		250,00
10		10250,00

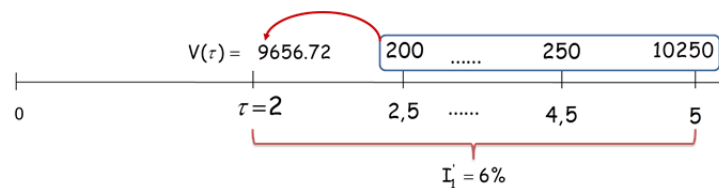
$10000 = 100 + 150 \cdot a_{\overline{2}|I_2} + 200 \cdot a_{\overline{4}|I_2} \cdot (1 + I_2)^{-2} + 250 \cdot a_{\overline{4}|I_2} \cdot (1 + I_2)^{-6} + 10000(1 + I_2)^{-10}$, la resolución de esta ecuación permite hallar I_2 .

El tanto efectivo anual será el equivalente a I_2 , $I_1 = (1 + I_2)^2 - 1 = 0,0442937$.

d) Trabajando con el supuesto del tanto de interés variable del apartado b), si el tanto de interés de mercado (tanto de valoración) a los dos años de su concesión es del 6% efectivo anual, el valor del préstamo a los 2 años de su concesión es:

$$V(2) = 200 \cdot a_{\overline{2}|I_2'} + 250 \cdot a_{\overline{4}|I_2'} \cdot (1 + I_2')^{-2} + 10000(1 + I_2')^{-6} = 9656,72,$$

siendo $I_2' = (1 + 0,06)^{1/2} - 1 = 0,029563014099$.

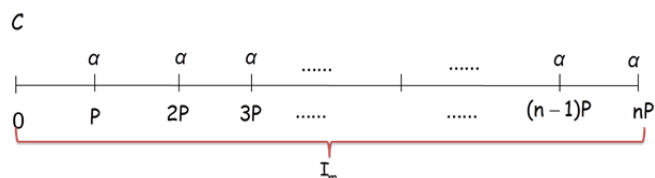


✚ Préstamo que se amortiza por el sistema francés a tanto constante.

Las características de este préstamo se pueden resumir en:

- El tanto de interés nominal es constante para toda la vida del préstamo.
- El préstamo se amortiza periódicamente con término amortizativo constante. i_m . El plazo de la O.F. se divide en periodos de amortización y al final de cada periodo se pagará una cantidad constante que comprenderá dos magnitudes, una corresponde al pago de los intereses devengados por el préstamo en ese periodo y otra que va destinada a rebajar el capital pendiente por amortizar.

La gráfica siguiente recoge el esquema temporal de este tipo de préstamo,



✚ Magnitudes del cuadro de amortización.

◆ Ecuación de equilibrio del préstamo.

$$C = \alpha \cdot a_{\overline{nP}|I_m} \rightarrow \alpha = \frac{C}{a_{\overline{nP}|I_m}}$$

◆ Capital pendiente por amortizar después de pagado el término r-esimo.

$$R_r = \alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_m} = C \frac{a_{\overline{n-r}|I_m}}{a_{\overline{n}|I_m}}$$

◆ *Cuota de capital y cuota de interés correspondiente al término pagado en el periodo r -ésimo.*

Como los intereses se pagan al final del periodo, éstos se calcularán sobre el capital pendiente de amortizar que hay después de haber pagado el término correspondiente al periodo $r-1$, luego,

$$Y_r = R_{r-1} \cdot I_m = C \cdot I_m \cdot \frac{a_{\overline{n-r+1}|I_m}}{a_{\overline{n}|I_m}} \quad \text{y} \quad A_r = \alpha - Y_r = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_m}} - C \cdot I_m \cdot \frac{a_{\overline{n-r+1}|I_m}}{a_{\overline{n}|I_m}}$$

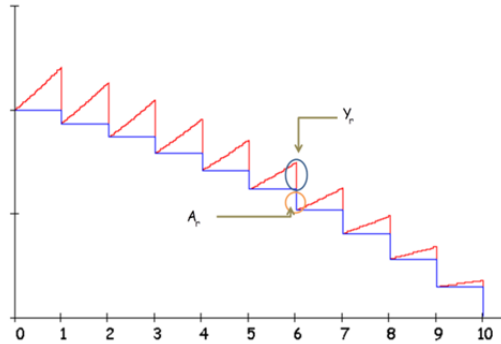
Las cuotas de capital de este préstamo varían en progresión geométrica de razón $(1 + I_m)^{38}$.

◆ *Reserva matemática en rP y en $(r-1)P < \tau < rP$.*

La Reserva Matemática en rP coincide con el capital pendiente por amortizar ya que se han pagado todos los intereses devengados en el periodo y sólo queda la parte de nominal del préstamo no devuelta,

$R(rP) = R_r = \alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_m}$, mientras que la Reserva Matemática en τ será el capital pendiente en $(r-1)P$ capitalizada hasta τ , $(r-1)P < \tau < rP$, $R(\tau) = R_{r-1}(1 + I_m)^{m(\tau - (r-1)P)}$.

El gráfico de evolución del capital pendiente y la reserva matemática es el siguiente:



Las líneas azules corresponden al capital pendiente y las curvas rojas a la reserva matemática.

Ejemplo 35: Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 10000€ amortizable por el sistema francés que dura 5 años y se amortiza semestralmente al 5% nominal.

Datos:

- Nominal, 10000
- Número de términos, 10
- Tanto efectivo semestral, $I_2 = 0,025$

El término amortizativo del préstamo es $\alpha = \frac{10000}{a_{\overline{10}|0,025}} = 1142,59\text{€}$. Las magnitudes del cuadro de amortización

se obtendrán utilizando las relaciones o las fórmulas adecuadas. Se sabe que

$$Y_1 = 10000 \cdot 0,025 = 250,$$

³⁸ $A_r = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_m}} - C \cdot I_m \cdot \frac{a_{\overline{n-r+1}|I_m}}{a_{\overline{n}|I_m}} = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_m}} \left(1 - C \cdot I_m \cdot a_{\overline{n-r+1}|I_m} \right) = C \frac{s_{\overline{r}|I_m}}{s_{\overline{n}|I_m}}$. Como $A_1 = \alpha - C \cdot I_m = \frac{C}{s_{\overline{n}|I_m}}$, se tiene que

$$A_r = R_{r-1} - R_r = A_1 (1 + I_m)^{r-1}.$$

$$A_1 = 1142,59 - 250 = 892,59 \text{ y } A_r = 892,59(1 + 0,025)^{r-1}$$

de donde $Y_r = 1142,59 - A_r$ y $R_r = R_{r-1} - A_r$. El cuadro resultante es el siguiente:

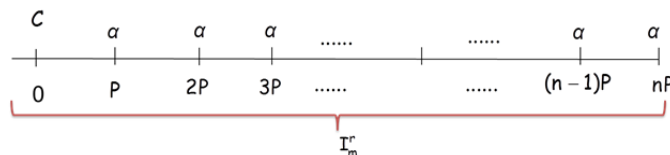
periodos	término	cuota de interés	cuota de amortización	total amortizado	capital pendiente
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10000.00
1.00	1142.59	250.00	892.59	892.59	9107.41
2.00	1142.59	227.69	914.90	1807.49	8192.51
3.00	1142.59	204.81	937.77	2745.26	7254.74
4.00	1142.59	181.37	961.22	3706.48	6293.52
5.00	1142.59	157.34	985.25	4691.73	5308.27
6.00	1142.59	132.71	1009.88	5701.61	4298.39
7.00	1142.59	107.46	1035.13	6736.74	3263.26
8.00	1142.59	81.58	1061.01	7797.75	2202.25
9.00	1142.59	55.06	1087.53	8885.28	1114.72
10.00	1142.59	27.87	1114.72	10000.00	0.00

✚ Préstamo que se amortiza periódicamente con tanto nominal de interés variable.

Las características de este préstamo se pueden resumir en:

- El tanto de interés nominal varía a lo largo de la vida del préstamo. i_m^r
- El préstamo se amortiza periódicamente con término amortizativo constante. El plazo de la O.F. se divide en periodos de amortización y al final de cada periodo se pagará una cantidad constante que comprenderá dos magnitudes, una corresponde al pago de los intereses devengados por el préstamo en ese periodo y otra que va destinada a rebajar el capital pendiente por amortizar.

La gráfica siguiente recoge el esquema temporal de este tipo de préstamo,



En este préstamo el tanto nominal de interés a aplicar en cada periodo varía, la ecuación de equilibrio del préstamo es

$$C = \sum_{r=1}^n \alpha \prod_{s=1}^r (1 + I_m^s)^{-1} \rightarrow \alpha = \frac{C}{\sum_{r=1}^n \prod_{s=1}^r (1 + I_m^s)^{-1}}$$

Una vez se ha calculado el término amortizativo el resto de las magnitudes se obtienen a partir de las relaciones generales. El cuadro de amortización se construye línea a línea.

Ejemplo 36: a) Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 10000€ a amortizar en 5 años con pagos anuales constantes. El tanto de interés es variables, siendo los tantos de interés a aplicar cada año los siguientes: 3.08%, 4.72%, 4.59%, 5.53%, 4.97%.

En este préstamo se conocen todos los tantos nominales de interés; el término amortizativo se obtendrá de la ecuación de equilibrio

$$10000 = \alpha \left[\begin{aligned} &(1 + 0,0308)^{-1}(1 + 0,0472)^{-1}(1 + 0,0459)^{-1}(1 + 0,0553)^{-1}(1 + 0,0497)^{-1} + \\ &(1 + 0,0308)^{-1}(1 + 0,0472)^{-1}(1 + 0,0459)^{-1}(1 + 0,0553)^{-1} + \\ &(1 + 0,0308)^{-1}(1 + 0,0472)^{-1}(1 + 0,0459)^{-1} + \\ &(1 + 0,0308)^{-1}(1 + 0,0472)^{-1} + \\ &(1 + 0,0308)^{-1} \end{aligned} \right]$$

Siendo $\alpha = 2261,85\text{€}$

periodos	tanto nominal	término	cuota de capital	cuota de interés	total amortizado	capital pendiente
0						10000
1	3,08%	2261,85	1953,85	308,00	1953,85	8046,15
2	4,72%	2261,85	1882,07	379,78	3835,92	6164,08
3	4,59%	2261,85	1978,92	282,93	5814,83	4185,17
4	5,53%	2261,85	2030,41	231,44	7845,24	2154,76
5	4,97%	2261,85	2154,76	107,09	10000,00	0,00

b) Si el préstamo tiene unos gastos de apertura del 1% y, además, se tiene que pagar en origen el 1.5% como gastos de registro y 300€ de la intervención de un perito, calcule la TAE del préstamo y el tanto prestatario. Para el cálculo de la TAE no se tendrán en cuenta los gastos de registro ni la intervención del perito, luego la ecuación que permite calcular la TAE es $10000 = 100 + 2261,85 \cdot a_{\overline{5}|X_1} \rightarrow X_1 = 0,04606724$ (TAE). El tanto prestatario se obtendrá teniendo en cuenta todos los cobros y pagos que hay en la O.F. La ecuación es

$$10000 = (100 + 150 + 300) + 2261,85 \cdot a_{\overline{5}|X_1} \rightarrow X_1 = 0,06301835 \text{ (Tanto prestatario)}.$$

Préstamo que se amortiza periódicamente con tanto nominal de interés revisable.

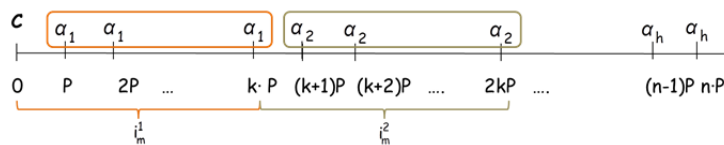
En estos préstamos el tanto de interés varía en función a como varía un índice de referencia al que van ligados. Como el tanto de interés nominal no se conoce en el origen de la O.F. sí es necesario conocer determinados datos:

- El índice de referencia y fecha de obtención del dato³⁹.
- Periodicidad de revisión del tanto de interés.
- Número de revisiones a realizar, h .
- Número de términos amortizativos dentro de cada tramo de revisión, k .
- El marginal que se debe sumar al índice de referencia para obtener el tanto nominal del préstamo, Δi . El tanto nominal es:

$$i_m^s = \text{Indice}^s + \Delta i \quad s = 1, 2, \dots, h$$

- La amortización es periódica, siendo α_s el término amortizativo a pagar cada periodo de amortización asociado a la revisión s del tanto nominal de interés.

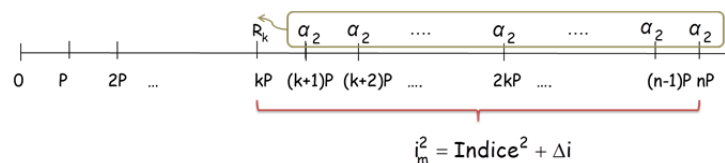
³⁹ Si el contrato de préstamo lo especifica, el índice deberá ajustarse a la periodicidad de los pagos del préstamo, por ejemplo, si el índice es anual y el préstamo paga los intereses mensualmente se deberá buscar el nominal pagadero mensual del índice antes de sumarle el marginal.



➤ La estructura amortizativa no es única, las siguientes son las más habituales.

❖ *Mantener el término constante hasta que se produzca un cambio del tanto de interés. Volver a calcular el nuevo término sobre el resto pendiente por amortizar en el momento de la revisión.*

Se considerará que el préstamo se amortiza por el sistema francés con el tanto constante mientras no que se produzca una nueva revisión del tanto nominal de interés. En el momento que se hace una revisión del tanto nominal de interés y para calcular el nuevo término amortizativo se deberá conocer: el capital pendiente por amortizar en ese momento, el número de periodos de amortización que quedan por vencer y el nuevo tanto nominal de interés.



El importe de los k primeros términos amortizativos se obtiene considerando que es un préstamo amortizable por el sistema francés al tanto nominal de interés inicial (conocido en el momento de la firma del contrato).

$\alpha_1 = \frac{C}{a_{n|I_m^1}}$, siendo n el total de periodos de amortización e I_m^1 el tanto efectivo de interés correspondiente al primer tramo de revisión.

Interpretando la gráfica precedente, han pasado k periodos de amortización y toca revisar el tanto nominal de interés. Una vez se conoce el nuevo dato se tiene que proceder a calcular el nuevo término amortizativo, que se supondrá constante durante todo la vida que le queda al préstamo hasta que se tenga que hacer otra revisión. Lo primero que se tiene que conocer es el capital pendiente por amortizar después de haber pagado el término

$$k, R_k = \alpha_1 \cdot a_{n-k|I_m^1}. \text{ El nuevo término será } \alpha_2 = \frac{R_k}{a_{n-k|I_m^2}}.$$

Se procede de esta forma sucesivamente hasta que se extingue el préstamo.

Ejemplo 37: Una empresa debe financiar la compra de una maquinaria y para ello solicita en el banco un préstamo por importe de 50.000€. El banco le ofrece un préstamo a 6 años a un interés variable vinculado al Euribor a 1 año. Durante el primer año, el tanto de interés nominal será del 4% y cada año se revisará en función del Índice de referencia vigente en el momento de la revisión, el tanto de interés será el Índice+0,5%. La amortización será semestral y con términos constantes. Los gastos de apertura ascienden al 1% sobre el nominal prestado.

Un análisis de los movimientos del Índice permite predecir que el Índice de referencia a un año y el tanto nominal a aplicar en los años futuros podría ser:

Año	Índice de referencia a un año	Interés nominal del préstamo
1	-	4%
2	3.75%	4,25%
3	4%	4,5%
4	4.2%	4,7%
5	4%	4,5%
6	3.8%	4,30%

Para calcular el término semestral a pagar el primer año se considerará un préstamo amortizable semestralmente por el sistema francés y que dura 6 años, al 2% efectivo semestral, $\alpha_1 = \frac{50000}{a_{12|0,02}} = 4727,98$.

Pasado un año se ha procedido a la revisión del tanto de interés y éste ha sido del 4,25% nominal pagadero semestral; para calcular las semestralidades a pagar durante el segundo año, se calcula

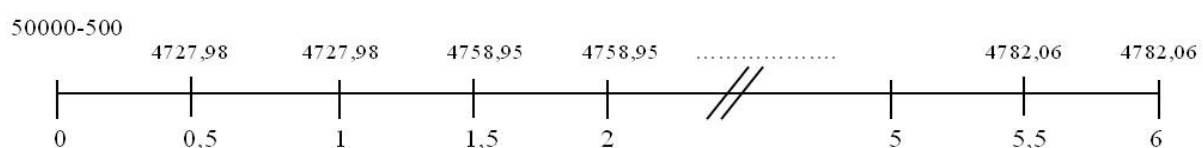
$$R_2 = \alpha_1 \cdot a_{10|0,02} = 42469,48$$

A partir de esa cantidad se plantea el cálculo del término semestral de un préstamo francés cuyo nominal es R_2 y que dura 10 semestres, siendo el tanto de interés nominal el obtenido en la revisión,

$\alpha_2 = \frac{R_2}{a_{10|0,0225}} = 4758,95$ y así sucesivamente. El cuadro resultante es el siguiente:

	Término amortizativo	Cuota de capital	Cuota de interés	Total amortizado	Capital pendiente
0	0	0,00	0,00	0,00	50000,00
1	4727,98	3727,98	1000,00	3727,98	46272,02
2	4727,98	3802,54	925,44	7530,52	42469,48
3	4758,95	3856,50	902,46	11388,02	38611,98
4	4758,95	3938,45	820,50	15326,47	34673,53
5	4784,55	4004,40	780,15	19330,87	30669,13
6	4784,55	4094,50	690,06	23425,37	26574,63
7	4800,64	4176,14	624,50	27601,51	22398,49
8	4800,64	4274,28	526,36	31875,79	18124,21
9	4789,06	4381,27	407,79	36257,06	13742,94
10	4789,06	4479,84	309,22	40736,90	9263,10
11	4782,06	4582,91	199,16	45319,81	4681,44
12	4782,06	4681,41	100,65	50000,00	0,00

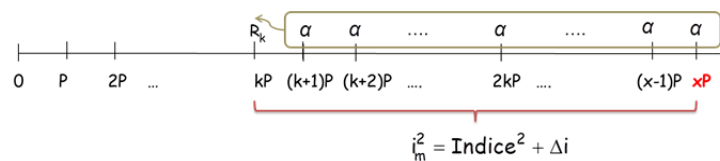
Si se quiere saber el coste medio de la financiación (tanto prestatario) se deberá plantear la ecuación de equilibrio de la O.F. con todos los cobros y pagos a cargo del prestatario,



$$50000 - 500 = \sum_{r=1}^{12} \alpha_r (1 + X_2)^{-r} \rightarrow X_2 \Leftrightarrow I_1 = (1 + X_2)^2 - 1 = 0,04689^{40}.$$

❖ *Mantener el término constante durante toda la vida del préstamo e ir recalculando la vida del mismo cuando se produce un cambio del tanto de interés.*

Cuando se pacta que el término amortizativo obtenido con la aplicación del primer tanto nominal de interés será el que se pagará durante toda la vida del préstamo, ante la variación del tanto nominal de interés, aparece una incógnita ¿cuánto va a durar ese préstamo si cambia el tanto de interés? Para responder a la pregunta se debe plantear la ecuación de equilibrio en cada fecha donde se empieza a aplicar el nuevo tanto nominal de interés. En la ecuación de equilibrio se tendrá, por un lado, el capital pendiente en ese momento y el importe del término amortizativo; lo que se desconoce es el número de pagos periódicos a realizar para amortizar el capital pendiente.



Si el tanto efectivo por periodo de amortización a aplicar en el origen es I_m^1 , y el préstamo se debe amortizar

en n periodos, el término amortizativo del préstamo es $\alpha = \frac{C}{a_{n|I_m^1}}$. El capital pendiente en la fecha⁴¹ que se

empieza aplicar el nuevo tanto nominal interés es $R_k = \alpha \cdot a_{n-k|I_m^1}$. Si el tanto efectivo de interés revisado es

I_m^2 , la ecuación de equilibrio que permitirá calcular el número de periodos de amortización que quedan

pendientes será, $R_k = \alpha \cdot a_{x|I_m^2}$, siendo x la incógnita de la ecuación, luego, $x = \frac{\ln\left(1 - \frac{R_k}{\alpha}\right)}{\ln(1 + I_m^2)}$. Lo más frecuente

es que x no sea un número natural por lo que el número de periodos de amortización que quedarán pendientes será “la parte entera de x ” más un periodo adicional que recogerá un pago residual inferior a α .

Ejemplo 38: Con los datos del préstamo del ejercicio anterior, construir el cuadro de amortización del préstamo si se ha pactado pagar siempre la misma semestralidad.

En este ejemplo el importe de la semestralidad es $\alpha = \frac{50000}{a_{12|0,02}} = 4727,98$. El cuadro se construirá utilizando

las relaciones entre las magnitudes del préstamo lo que da lugar a la siguiente tabla:

	Tantos de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de Capital	Total amortizado	Capital pendiente
0						50000.00
1	4%	4727.98	1000.00	3727.98	3727.98	46272.02
2	4%	4727.98	925.44	3802.54	7530.52	42469.48

⁴⁰ Para la resolución de la ecuación se deberá utilizar algún algoritmo de cálculo matemático, por ejemplo, la instrucción “buscar objetivo” de Excel permite hallar el dato.

⁴¹ Para simplificar las expresiones se considera que se está planteando la ecuación de equilibrio en la primera revisión del tanto nominal de interés y que éstas se producen cada k periodos.

3	4.25%	4727.98	902.48	3825.50	11356.02	38643.98
4	4.25%	4727.98	821.18	3906.80	15262.82	34737.18
5	4.50%	4727.98	781.59	3946.39	19209.21	30790.79
6	4.50%	4727.98	692.79	4035.19	23244.40	26755.60
7	4.70%	4727.98	628.76	4099.22	27343.62	22656.38
8	4.70%	4727.98	532.42	4195.56	31539.18	18460.82
9	4.50%	4727.98	415.37	4312.61	35851.79	14148.21
10	4.50%	4727.98	318.33	4409.65	40261.43	9738.57
11	4.30%	4727.98	209.38	4518.60	44780.04	5219.96
12	4.30%	4727.98	112.23	4615.75	49395.79	604.21

Como puede observarse, al final del sexto año el capital pendiente por amortizar no es 0, luego se tendrá que alargar el préstamo un semestre más y se pagará como término residual (el tanto nominal de interés del trimestre 13 se supone del 4,35%) $\alpha_{residual} = 604,21 \left(1 + \frac{0,0435}{2}\right) = 617,36€$.

El cuadro finalmente será:

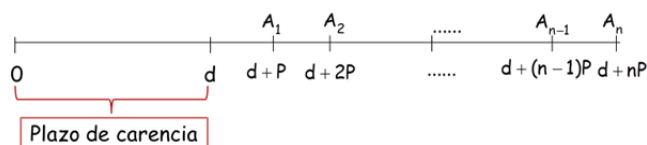
	Tantos de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de Capital	Total amortizado	Capital pendiente
0						50000.00
1	4%	4727.98	1000.00	3727.98	3727.98	46272.02
2	4%	4727.98	925.44	3802.54	7530.52	42469.48
3	4.25%	4727.98	902.48	3825.50	11356.02	38643.98
4	4.25%	4727.98	821.18	3906.80	15262.82	34737.18
5	4.50%	4727.98	781.59	3946.39	19209.21	30790.79
6	4.50%	4727.98	692.79	4035.19	23244.40	26755.60
7	4.70%	4727.98	628.76	4099.22	27343.62	22656.38
8	4.70%	4727.98	532.42	4195.56	31539.18	18460.82
9	4.50%	4727.98	415.37	4312.61	35851.79	14148.21
10	4.50%	4727.98	318.33	4409.65	40261.43	9738.57
11	4.30%	4727.98	209.38	4518.60	44780.04	5219.96
12	4.30%	4727.98	112.23	4615.75	49395.79	604.21
13	4.35%	617.36	13.14	604.21	50000.00	0.00

● Cláusulas adicionales en un contrato de préstamo.

En un contrato de préstamo se pueden incorporar cláusulas adicionales como la cancelación anticipada del préstamo, que puede ser total o parcial, y la existencia de una carencia inicial de amortización.

◆ Carencia.

Se entiende como carencia el hecho de diferir la amortización del capital pendiente durante un plazo inicial fijado.

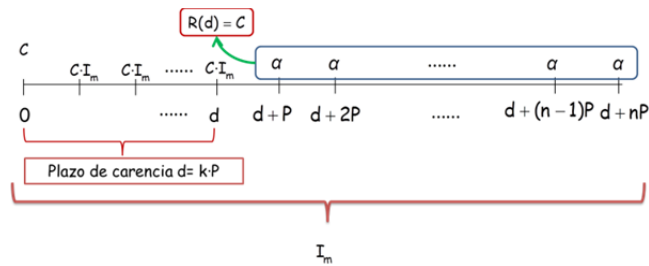


Se pueden dar dos clases de carencia:

■ Carencia parcial de amortización y pago periódico de los intereses.

En esta clase de carencia sólo se aplaza la amortización pero se van pagando los intereses devengados periódicamente.

Si se toma como préstamo de referencia el préstamo que se amortiza por el sistema francés la gráfica que recoge los cobros y pagos para este tipo de carencia será



El capital pendiente por amortizar al final del plazo de carencia es el nominal del préstamo al irse pagando los intereses devengados. La ecuación de equilibrio del préstamo es $C = C \cdot I_m \cdot a_{\overline{k}|I_m} + \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} (1 + I_m)^{-k}$.

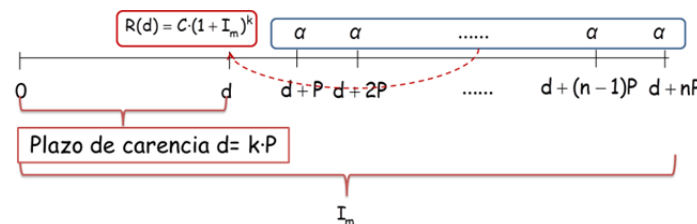
Ejemplo 39: Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 10000€ a amortizar en 5 años con pagos anuales. Este préstamo tiene una carencia parcial de dos años. El tanto de interés del préstamo es del 6% nominal.

El término amortizativo es $\alpha = \frac{R_2}{a_{\overline{5}|0,06}} = \frac{10000}{a_{\overline{5}|0,06}} = 2373,97$ y el cuadro de amortización será:

	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de Capital	Total amortizado	Capital pendiente
0					10000.00
1		600.00	0.00	0.00	10000.00
2		600.00	0.00	0.00	10000.00
3	2373.97	600.00	1773.97	1773.97	8226.03
4	2373.97	493.56	1880.41	3654.38	6345.62
5	2373.97	380.74	1993.23	5647.61	4352.39
6	2373.97	261.14	2112.83	7760.44	2239.56
7	2373.97	134.37	2239.56	10000.00	0.00

Carencia total.

En esta clase de carencia no se realiza ningún pago durante el plazo de carencia, los intereses que se devengan se acumulan al nominal de préstamo.



La ecuación de equilibrio del préstamo es $C(1 + I_m)^k = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m}$, de donde, $\frac{C(1 + I_m)^k}{a_{\overline{n}|I_m}} = \alpha$.

La construcción del cuadro de amortización se realiza bajo el siguiente criterio “los términos amortizativos se destinan prioritariamente al pago de los intereses acumulados durante el periodo de carencia”.

Una vez la reserva matemática se sitúa por debajo del nominal del préstamo el cuadro de amortización se construye como en el préstamo amortizable por el sistema francés.

El proceso general es el siguiente, se compara la reserva matemática con el capital pendiente por amortizar en $d+rP$, con $r=1,2,...,n$.

- Si la reserva matemática en $d+rP$ y antes de pagar el término correspondiente⁴² es mayor que $C + \alpha$, se destina todo el término amortizativo α al pago de los intereses acumulados (no hay cuota de capital en ese periodo)

$$R^-(d+rP) = R(d+rP) + \alpha > C + \alpha \rightarrow Y_r = \alpha, A_r = 0 \text{ y } R_r = C$$

- Si la reserva matemática en $d+rP$ y antes de pagar el término correspondiente está entre C y $C + \alpha$, se destina una parte de α al pago de los intereses acumulados y el resto a amortización del nominal.

$$C + \alpha < R^-(d+rP) < C \rightarrow Y_r = R(d+(r-1)P) \cdot I_m < \alpha, A_r = \alpha - Y_r \text{ y } R_r = C - A_r$$

- Si la reserva matemática en $d+rP$ y antes de pagar el término correspondiente coincide o es menor que el capital pendiente se construye el cuadro como un préstamo sin carencia.

$$R^-(d+rP) \leq C \rightarrow Y_r = R_{r-1} \cdot I_m, A_r = \alpha - Y_r \text{ y } R_r = R_{r-1} - A_r$$

Ejemplo 40: Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 10000€ a amortizar en 5 años con pagos anuales. Este préstamo tiene una carencia total de dos años. El tanto de interés del préstamo es del 6% nominal.

La reserva matemática al final de los dos años es $R(2) = 10000(1+0,06)^2 = 11236€$, el término amortizativo

será $\alpha = \frac{R(2)}{a_{\overline{5}|0,06}} = 2667,40€$. El primer pago de amortización es en el año 3. La reserva matemática en 3 antes

del pago de la anualidad correspondiente es $R^-(3) = R(2) \cdot (1+0,06) = 11910,16$.

Como $R^-(3) - C < \alpha \rightarrow 11910,16 - 10000 = 1910,16$, $Y_3 = 1910,16$ y $A_3 = 2667,40 - 1910,16 = 757,24$, el capital pendiente asciende a $R_3 = 10000 - 757,24 = 9242,76$. A partir de ahí se construye como un préstamo sin carencia.

	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de Capital	Total amortizado	Reserva matemática	Capital pendiente
0					10000	10000
1					10600	10000
2					11236	10000
3	2667.40	1910.16	757.24	757.24	9242.76	9242.76
4	2667.40	554.56	2112.83	2870.07	7129.93	7129.93
5	2667.40	427.79	2239.60	5109.68	4890.32	4890.32
6	2667.40	293.42	2373.98	7483.66	2516.34	2516.34
7	2667.40	150.98	2516.34	10000.00	0	0

Ejemplo 41: Construir el cuadro de amortización de un préstamo amortizable por el sistema francés durante 5 años, amortización semestral, tanto de interés el 7% nominal. El préstamo tiene una carencia total de 3 años.

⁴² $R^-(d+rP)$ simboliza la reserva matemática antes de pagar el término correspondiente al periodo r de amortización y ésta es igual a $R(d+rP) + \alpha$.

El término amortizativo es $\alpha = \frac{100000(1+0,035)^6}{a_{10|0,035}} = 14789,73\text{€}$

periodo	término	cuota interés	cuota capital	reserva antes del pago	reserva matemática	Capital pendiente
0				100000.00	100000.00	100000
1				103500.00	103500.00	100000
2				107122.50	107122.50	100000
3				110871.79	110871.79	100000
4				114752.30	114752.30	100000
5				118768.63	118768.63	100000
6				122925.53	122925.53	100000
7	14780.73	14780.73	0	127227.93	112447.19	100000
8	14780.73	14780.73	0	116382.84	101602.11	100000
9	14780.73	5158.18	9622.55	105158.18	90377.45	90377.45
10	14780.73	3163.21	11617.52	93540.66	78759.93	78759.93
11	14780.73	2756.60	12024.13	81516.53	66735.80	66735.80
12	14780.73	2335.75	12444.98	69071.55	54290.82	54290.82
13	14780.73	1900.18	12880.55	56191.00	41410.27	41410.27
14	14780.73	1449.36	13331.37	42859.63	28078.90	28078.90
15	14780.73	982.76	13797.97	29061.66	14280.93	14280.93
16	14780.73	499.83	14280.90	14780.73	0.00	0.00

En los semestres 7 y 8 todo el término amortizativo va destinado al pago de los intereses acumulados durante el periodo de carencia y empieza a amortizar a partir del semestre 9.

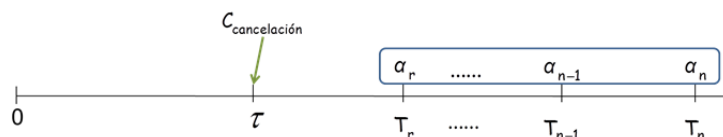
◆ Cancelación.

En la cancelación anticipada de un préstamo se pueden dar dos situaciones, una es la cancelación total de la deuda y con ella la cancelación de préstamo, otra es la cancelación parcial con la que se reduce la deuda pero el préstamo está vivo.

En la cláusula de cancelación se deben fijar los costes de cancelación, normalmente un porcentaje sobre la cantidad destinada rebajar el capital pendiente.

Cuando se procede a una cancelación, el *capital de cancelación* debe cubrir el capital destinado a reducir el capital pendiente por amortizar, los intereses devengados y no pagados y los costes de cancelación.

📌 Cancelación total en un momento $\tau < T_n$.



El capital de cancelación es $C_{cancelación} = R(\tau) \cdot (1 + g_{cancelación})$

Ejemplo 42: El 20 de Enero del año A-5, una empresa contrató un préstamo de 100000€, a amortizar trimestralmente con término constante durante 15 años. El tanto de interés del préstamo es el 7% nominal. La cláusula de cancelación anticipada establece que el prestatario deberá pagar al prestamista una comisión del 2% sobre la cantidad entregada. Hoy, 25 de Julio del año A, decide cancelar anticipadamente el préstamo.

– ¿Cuál sería la cantidad que tendría que entregar la empresa al banco?

La trimestralidad a pagar por este préstamo es $\alpha = \frac{100000}{a_{\overline{60}|0,0175}} = 2705,34$, la reserva matemática el 20 de Julio

del año A es el capital pendiente por amortizar en el trimestre 22, $R(22/4) = 2705,34 \cdot a_{\overline{38}|0,0175}$ y la reserva

matemática 5 días después es $R_{25-7-A} = R(22/4)(1+0,0175)^{4\frac{5}{365}} = 74701,15$. Luego, el capital de cancelación total será $C_{cancelación} = R_{25-7-A}(1+2\%) = 76195,15^{43}$.

– ¿Cuál habrá sido el tanto de interés final resultante para el prestatario, si se pagó el 1% en concepto de gastos de apertura?

Se tendrá que plantear la ecuación de equilibrio de cobros y pagos realizados, incluyendo los gastos de

apertura, $100000 = 1000 + 2705,34 \cdot a_{\overline{22}|X_4} + 76195,15(1+X_4)^{-\left(22+\frac{4,5}{365}\right)}$, el tanto prestatario $I_1 = (1+X_4)^4 - 1$ es 0,08809861.

Cancelación parcial en un momento $\tau < T_n$.

En la cancelación parcial la relación contractual no se extingue, solo se produce una reducción del capital pendiente. En ese momento se tiene que elegir una de las dos opciones: calcular el nuevo término amortizativo y mantener el plazo que queda del préstamo fijo o mantener el término amortizativo que se venía pagando y reducir el plazo del préstamo.

Cancelación parcial con reducción del término amortizativo.

En este caso, una vez se conoce el nuevo capital pendiente que queda por amortizar, se debe calcular el nuevo término amortizativo a pagar durante el tiempo que todavía le queda de vida al préstamo. El siguiente ejemplo describe el procedimiento.

Ejemplo 43: El 20 de Enero del año A-5, una empresa contrató un préstamo de 100000€, a amortizar trimestralmente con término constante durante 15 años. El tanto de interés del préstamo es el 7% nominal. La cláusula de cancelación anticipada establece que el prestatario deberá pagar al prestamista una comisión del 2% sobre la cantidad entregada. Hoy, 25 de Julio del año A, decide cancelar parcialmente el préstamo, para ello, dispone de 15000€.

El prestatario dispone de 15.000€ para realizar una cancelación parcial, luego la cantidad que podrá destinar a cancelar será menor al tener que cubrir los gastos de cancelación.

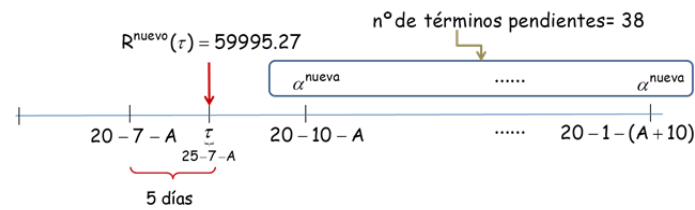
$$C_{a \text{ entregar}}(1+0,02) = 15000 \rightarrow C_{a \text{ entregar}} = \frac{15000}{1,02} = 14705,88€.$$

La Reserva matemática hoy es $R_{25-7-A} = R(22/4)(1+0,0175)^{4\frac{5}{365}} = 74701,15$, luego el nuevo capital pendiente después de la entrega del capital destinado a reducir la deuda es

$$R_{25-7-A} - C_{a \text{ entregar}} = 74701,15 - 14705,88 = 59995,27€.$$

⁴³ La práctica bancaria calcula la comisión de cancelación sobre el capital pendiente ese día, ya que primero cobra los intereses devengados hasta la fecha de cancelación, quedando sólo el capital pendiente. En este ejercicio se cobra sobre todo (capital pendiente e intereses devengados).

La nueva trimestralidad se obtendrá planteando la ecuación de equilibrio entre el nuevo capital pendiente y el conjunto de trimestralidades nuevas que quedan todavía por pagar.



$$59995,27(1+0,0175)^{-4 \cdot \frac{5}{365}} = \alpha^{nueva} \cdot a_{\overline{38}|0,0175} \rightarrow \alpha^{nueva} = \frac{59995,27(1+0,0175)^{-4 \cdot \frac{5}{365}}}{a_{\overline{38}|0,0175}} = 2172,75€$$

● Cancelación parcial con reducción del plazo.

En este caso, se mantiene el mismo término amortizativo lo que lleva asociado una reducción de la vida que le queda al préstamo. Para saber cuál es el plazo que todavía queda de vigencia se debe plantear la ecuación de equilibrio entre el nuevo capital pendiente y el conjunto de términos amortizativos a pagar, pero teniendo como incógnita el número de términos que hay en el conjunto. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 44: El 20 de Enero del año A-5, una empresa contrató un préstamo de 100000€, a amortizar trimestralmente con término constante durante 15 años. El tanto de interés del préstamo es el 7% nominal. La cláusula de cancelación anticipada establece que el prestatario deberá pagar al prestamista una comisión del 2% sobre la cantidad entregada. Hoy, 25 de Julio del año A, decide cancelar parcialmente el préstamo, para ello, dispone de 15000€.

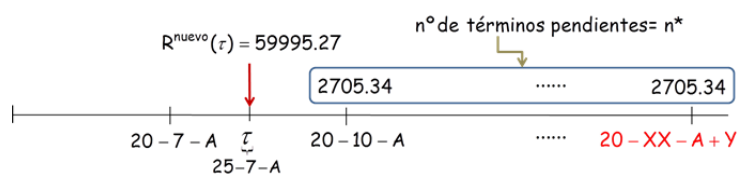
El prestatario dispone de 15.000€ para realizar una cancelación parcial, luego la cantidad que podrá destinar a cancelar será menor al tener que cubrir los gastos de cancelación.

$$C_{a \text{ entregar}}(1+0,02) = 15000 \rightarrow C_{a \text{ entregar}} = \frac{15000}{1,02} = 14705,88€.$$

La Reserva matemática hoy es $R_{25-7-A} = R(22/4)(1+0,0175)^{4 \cdot \frac{5}{365}} = 74701,15$, luego el nuevo capital pendiente después de la entrega del capital destinado a reducir la deuda es

$$R_{25-7-A} - C_{a \text{ entregar}} = 74701,15 - 14705,88 = 59995,27€.$$

Si se mantiene la trimestralidad la ecuación de equilibrio será,



$$59995,27(1+0,0175)^{-4 \cdot \frac{5}{365}} = 2705,34 \cdot a_{\overline{n^*}|0,0175} \rightarrow a_{\overline{n^*}|0,0175} = \frac{59995,27(1+0,0175)^{-4 \cdot \frac{5}{365}}}{2705,34}$$

$$\ln \left(1 - \frac{59995,27(1+0,0175)^{-4 \cdot \frac{5}{365}}}{2705,34} - 0,0175 \right)$$

De donde, $n^* = \frac{\ln \left(1 - \frac{59995,27(1+0,0175)^{-4 \cdot \frac{5}{365}}}{2705,34} - 0,0175 \right)}{-\ln(1+0,0175)}$, tomado como n^* el entero del cociente, en este

caso $n^*=29$ trimestres, de los cuales 28 serán trimestralidades de 2705,34 y el 29 será de un residuo de 754,10€.

El cuadro de amortización en este ejemplo es:

periodo	término	Cuota de interés	Cuota de amortización	total amortizado	capital pendiente	reserva matemática
22	2705.34	1330.09	1375.25	25369.94	74630.06	74630.06
22 4/73	14705.88	70.98	14634.90	40004.84	59995.16	59995.16
23	2705.34	991.91	1713.43	41718.27	58281.73	58281.73
24	2705.34	1019.93	1685.41	43403.68	56596.32	56596.32
25	2705.34	990.44	1714.90	45118.58	54881.42	54881.42
26	2705.34	960.42	1744.92	46863.50	53136.50	53136.50
27	2705.34	929.89	1775.45	48638.95	51361.05	51361.05
28	2705.34	898.82	1806.52	50445.47	49554.53	49554.53
29	2705.34	867.20	1838.14	52283.61	47716.39	47716.39
30	2705.34	835.04	1870.30	54153.91	45846.09	45846.09
31	2705.34	802.31	1903.03	56056.94	43943.06	43943.06
32	2705.34	769.00	1936.34	57993.28	42006.72	42006.72
33	2705.34	735.12	1970.22	59963.50	40036.50	40036.50
34	2705.34	700.64	2004.70	61968.20	38031.80	38031.80
35	2705.34	665.56	2039.78	64007.99	35992.01	35992.01
36	2705.34	629.86	2075.48	66083.47	33916.53	33916.53
37	2705.34	593.54	2111.80	68195.27	31804.73	31804.73
38	2705.34	556.58	2148.76	70344.02	29655.98	29655.98
39	2705.34	518.98	2186.36	72530.38	27469.62	27469.62
40	2705.34	480.72	2224.62	74755.01	25244.99	25244.99
41	2705.34	441.79	2263.55	77018.56	22981.44	22981.44
42	2705.34	402.18	2303.16	79321.72	20678.28	20678.28
43	2705.34	361.87	2343.47	81665.19	18334.81	18334.81
44	2705.34	320.86	2384.48	84049.67	15950.33	15950.33
45	2705.34	279.13	2426.21	86475.88	13524.12	13524.12
46	2705.34	236.67	2468.67	88944.55	11055.45	11055.45
47	2705.34	193.47	2511.87	91456.42	8543.58	8543.58
48	2705.34	149.51	2555.83	94012.25	5987.75	5987.75
49	2705.34	104.79	2600.55	96612.80	3387.20	3387.20
50	2705.34	59.28	2646.06	99258.87	741.13	741.13
51	754.10	12.97	741.13	100000.00	0.00	0.00

• Subrogación.

La subrogación es una figura jurídica que permite cambiar el titular de una de las partes del préstamo. Se puede subrogar un préstamo cambiando de prestatario, es decir, cambiar al titular del sujeto pasivo, o se puede subrogar un préstamo cambiando de prestamista, es decir, cambiar al titular del sujeto activo. Nos centraremos en la subrogación que permite al sujeto pasivo llevar su préstamo de un banco a otro. Desde un enfoque estrictamente formal lo que se realiza es la cancelación total del préstamo con el banco inicial para pedir un nuevo préstamo al banco nuevo (al que se ha subrogado).

La diferencia fundamental de una subrogación está en que los trámites de la subrogación los realiza el banco nuevo y los gastos asociados a la subrogación quedan incorporados al nominal del nuevo préstamo. El prestatario no se ve obligado a provisionar dinero para hacer frente a los gastos de subrogación.

Las condiciones iniciales del préstamo se mantienen y sólo se cambia el tanto nominal de interés nominal a pagar una vez realizada la subrogación.

Los gastos a tener en cuenta en una subrogación son:

- Gastos de gestoría, entre 150 y 300 euros.
- Gastos notariales, se tiene que elevar a escritura pública la subrogación. Dependen del nominal subrogado y pueden estar entre 200 y 300 euros.
- Está exento del impuesto de actos jurídicos documentados.
- Gastos de Registro en el Registro de la Propiedad. Si el préstamo es hipotecario.
- Comisión de subrogación, entre el 0,25% y el 0,5% sobre el nuevo nominal.
- Comisión de cancelación del préstamo inicial, la marcada en el contrato, máximo el 0,5% si el préstamo es a interés variable.

Ejemplo 45: Una empresa solicitó hace 4 años un préstamo de 100.000€ al banco A, a amortizar en 15 años mediante trimestralidades constantes. El tanto nominal de interés pactado fue del 6%. Se establecieron unos gastos de cancelación anticipada del 1.5%. Hoy, como consecuencia de una bajada general de los tipos de interés, esa empresa quiere reestructurar su deuda y gestiona con el Banco B la subrogación del préstamo.

La oferta del Banco B es la siguiente:

- Interés variable, con revisión anual. El tanto nominal de interés ofertado es el 1,75% el primer año y el Euribor a 1 año más 0,5% el resto.
- Los gastos de subrogación son del 0,3% del nominal del nuevo préstamo.
- Los gastos de registro ascienden a 90€.
- Los gastos de notaría son de 230€.
- Los gastos de gestoría son de 120 €

Para poder decidir si le interesa la subrogación debe comparar la trimestralidad que venía pagando inicialmente con la trimestralidad que tendrá que pagar si realiza la subrogación.

Como el préstamo inicial se amortiza por el sistema francés, el término amortizativo inicial es

$$\alpha = \frac{100000}{a_{\overline{60}|0,015}} = 2539,34\text{€} \text{ y el capital pendiente por amortizar hoy es } R_{16} = 2539,34 \cdot a_{\overline{60-16}|0,015} = 81362,12\text{€}.$$

Los gastos a incorporar al capital pendiente son: $1,5\% \cdot 81362,12 + 0,3\% \cdot C_{\text{nuevo}} + (90 + 230 + 120)$.

El importe del préstamo nuevo será:

$$C_{\text{nuevo}} = R_{16} \cdot (1 + 1,5\%) + 0,3\% \cdot C_{\text{nuevo}} + (90 + 230 + 120) \rightarrow C_{\text{nuevo}} = \frac{R(4) \cdot (1 + 1,5\%) + (90 + 230 + 120)}{1 - 0,3\%} = 83272,37\text{€}$$

$$\text{El importe de la trimestralidad nueva a pagar al banco B es } \alpha^{\text{nueva}} = \frac{C_{\text{nuevo}}}{a_{\overline{60-16}|0,004375}} = 2084,68 < 2539,34 \text{ con}$$

lo que la subrogación le interesa pues tiene un ahorro cada trimestre, mientras no cambie el tanto de interés, de 454,66€.

En el caso de que al préstamo sólo le quedasen 3 años de vida, el procedimiento sería el mismo, dando una trimestralidad nueva a pagar de 2455,02€. En este caso el ahorro es mucho menor, ello es debido al impacto que tienen las comisiones sobre el coste real de la financiación; cuanto menor sea el plazo de vida que le queda al préstamo más difícil es que la subrogación sea viable.

3.2 Operaciones bancarias de pasivo más habituales.

3.2.1 Depósitos bancarios.

“Los depósitos bancarios son uno de los productos financieros de ahorro más sencillos y más utilizados. Se denomina depósito a cualquier dinero que se entrega al banco para que éste lo guarde. Es decir, cualquier cuenta corriente o de ahorro que tengamos abierta en una entidad es un fondo de depósitos” Habitualmente, los depósitos ofrecen una rentabilidad que suele expresarse en un tanto por ciento.

Existen dos clases de depósitos:

- Los depósitos a la vista, el dinero depositado en el banco se puede sacar en cualquier momento.
- Los depósitos a plazo, el dinero depositado queda bloqueado durante un plazo fijado. Si se inmoviliza antes del plazo se aplica una penalización sobre el tanto de interés pactado.

Dentro de los depósitos a plazo hay una tipología que paga los intereses por anticipado y bajo la forma de un artículo u objeto, son los depósitos con remuneración en especie.

Podemos concretar como características relevantes de los depósitos:

- **Son simples y rápidos:** constituyen uno de los **instrumentos de ahorro** más sencillos y rápidos de formalizar. No se suelen necesitar muchos requisitos para contratarlos y tan solo se necesitan unos minutos para adquirirlos.
- **Disponibilidad:** el cliente puede **disponer del dinero** depositado en cualquier momento. Sin embargo, si se trata de un depósito a plazo y se retira todo o parte del dinero antes del vencimiento, normalmente la rentabilidad se verá reducida sensiblemente.
- **Seguros:** Existe una fuerte regulación de los depósitos bancarios y, para garantizar el dinero depositado, tenemos el **Fondo de Garantía de Depósitos** que nos asegura el reintegro de la mayoría del dinero en caso de algún problema con la entidad financiera, actualmente el tope de la garantía son 100.000€ por titular y entidad bancaria.

El los depósitos a plazo se puede pactar el pago periódico de los intereses o cobrar los intereses acumulados al final del plazo. En todos los contratos a plazo deberá aparecer la T.A.E. independientemente de la forma de cálculo, devengo y pago de los intereses.

Ejemplo 46: Una entidad de crédito publicaba el siguiente anuncio:

Depósitos a largo plazo de Self Trade Bank
17 de Noviembre de 2009 a las 15:49 | Escrito por Bego

Los **Depósitos** a largo plazo de Self Trade Bank nos permiten la posibilidad de contratar una imposición en la entidad por un periodo de 3 o de 5 años. Vamos a ver las **características** que tiene en cada caso:

Depósito a 5 años

- TAE: 3,00% (3,189% nominal anual).
- Importe de contratación mínimo: 3.000 €.
- Importe de contratación máximo: 1.000.000 €.
- Abono de intereses: Al vencimiento.
- Cancelación anticipada: lo permite, aunque sólo generará el 50% de los intereses hasta ese momento.

Depósito a 3 años

- TAE: 2,20% (2,250% nominal anual).
- Importe mínimo de contratación: 3.000 €.
- Importe máximo de contratación: 1.000.000 €.
- Abono de intereses: Al vencimiento.
- Cancelación anticipada: lo permite, aunque sólo generará el 50% de los intereses hasta ese momento.



En este anuncio aparece la TAE y el tanto nominal de interés compuesto del depósito; se puede ver que el tanto nominal es mayor que la TAE, luego el periodo de capitalización debe ser mayor al año. Como el único plazo que se conoce es el del préstamo se tomará como periodo de capitalización el plazo del depósito. La TAE será el tanto efectivo anual equivalente al tanto efectivo por periodo de capitalización igual al plazo del depósito. La ecuación será:

$$C(1 + I_m)^m = C(1 + I_1) \text{ con } m = \frac{1}{p}, \text{ siendo } p=t.$$

periodo	frecuencia	Tanto nominal	Tanto efectivo	TAE
3	1/3	0,02250	0,06750	0,02201
5	1/5	0,03189	0,15945	0,03003

3.2.2 Cuenta corriente bancaria.

Es un contrato entre banco y cliente en el cual se integran un conjunto de operaciones financieras tanto de activo como de pasivo: depósitos a la vista, crédito y contrato de giro. El contrato de giro es el elemento integrador del resto de las operaciones financieras vinculadas a la cuenta corriente al ofrecer el banco el servicio de caja con toda su amplitud.

La conjunción de varias operaciones financieras relacionadas a través del contrato de giro configura a la cuenta corriente como un contrato autónomo por razones de su contenido pero dependiente. En sí, se trata de un depósito de fondos de un cliente en un banco que le permite: utilizar servicios bancarios, verificar o recibir de otras personas deudoras sus ingresos, retirar fondos para sí o para terceros, librar cheques, ordenar giros o transferencias, domiciliar pagos de facturas y letras de cambio, pagar con cargo a los fondos de la cuenta retribuciones o comisiones devengadas por servicios prestados por su orden y por su cuenta. El uso de estos servicios hace variar la disponibilidad de la cuenta, lo que obliga al banco a llevar la contabilidad de la misma para conocer el saldo resultante (debe confeccionar un extracto con los movimientos de fondos y entregárselo periódicamente al cuentacorrentista).

Sin querer quitar importancia a aspectos tan importantes como las obligaciones entre el cuentacorrentista y el banco, y la observación de la normativa sobre criterios de valoración y fecha valor para el devengo de intereses, nos centraremos en el método de liquidación de intereses y obtención del saldo de una cuenta corriente en la fecha de cierre y liquidación de la misma.

Tradicionalmente, la práctica bancaria ha utilizado el método hamburgués para la liquidación de una cuenta corriente. Dicho método se basa en el cálculo de la Reserva Activa de la operación financiera, calculada mediante un régimen financiero de interés simple; para ello, se utilizará la función "Saldo Financiero" definida de la siguiente forma:

$$r = 1 \rightarrow S(T_1) = C(T_1)$$

$$r = 2, \dots, n \rightarrow S(T_r) = S(T_{r-1}) + C(T_r) + S_c(T_{r-1}) \cdot I^r(T_{r-1}, T_r)$$

siendo:

- $C(T_r)$ el movimiento neto que se realiza en la cuenta en el diferimiento T_r .
- $S_c(T_r)$ el saldo neto de todos los movimientos de la cuenta realizados desde el inicio hasta el diferimiento T_r inclusive, es decir, $S_c(T_r) = C(T_1) + C(T_2) + \dots + C(T_r)$ e $I^r(T_{r-1}, T_r) = i^r \cdot (T_r - T_{r-1})$, con i^r el tanto

nominal de interés que devenga la cuenta corriente entre T_{r-1} y T_r . Normalmente, este tanto de interés depende del saldo que en T_r hay en la cuenta: si el saldo $S_c(T_r)$ es positivo i^r es el tanto nominal de interés a favor del cuentacorrentista, si el saldo $S_c(T_r)$ es negativo, i^r es el tanto nominal de interés a favor del banco.

Puede demostrarse fácilmente que:

$$r = 1 \rightarrow S(T_1) = C(T_1)$$

$$r = 2, \dots, n \rightarrow S(T_r) = S_c(T_r) + \sum_{j=1}^{r-1} S_c(T_j) \cdot i^j \cdot (T_{j+1} - T_j)$$

Si al producto $S_c(T_j) \cdot (T_{j+1} - T_j)$ le llamamos *número comercial*, n_j , tendremos que:

$$r = 1 \rightarrow S(T_1) = C(T_1)$$

$$r = 2, \dots, n \rightarrow S(T_r) = S_c(T_r) + \sum_{j=1}^{r-1} n_j \cdot i^j$$

El número comercial n_j tomará el calificativo de número negro cuando el saldo neto, $S_c(T_j)$, sea positivo y tomará el calificativo de número rojo cuando $S_c(T_j)$ sea negativo.

El procedimiento para liquidar la cuenta será:

● Se calcularán los números comerciales (rojos o negros) entre dos movimientos consecutivos de la cuenta hasta llegar a la fecha de liquidación T : $n_j = S_c(T_j) \cdot (T_{j+1} - T_j) \quad \forall T_j < T$

● Se calculará el saldo de intereses Y ⁴⁴: $Y = \sum_{T_j < T} i^j \cdot n_j$

● Al saldo neto en T , $S_c(T)$, se le sumarán los intereses. El saldo al cierre será: $S = S_c(T) + Y$.

Factores a tener en cuenta en la liquidación de la cuenta corriente son: el conjunto de gastos y comisiones que lleva asociados y la fecha valor.

La fecha valor es la fecha en que el apunte es efectivo para el cómputo del saldo acumulado y para el devengo de intereses.⁴⁵

Las comisiones que normalmente inciden en una cuenta corriente son:

- Comisiones de apertura. Un % sobre la cantidad inicial.
- Comisión de mantenimiento. Una cantidad fija a pagar al final del periodo de liquidación de los intereses, dependiendo del saldo medio del periodo.
- Comisión de administración. Una cantidad fija asociada a cada apunte, a pagar acumuladamente al final del periodo de liquidación (puede existir un número de apuntes que estén libres de comisión)
- Comisión de disponibilidad. Afecta a una cuenta que tenga una póliza de crédito en cuenta corriente. Es un % sobre el saldo medio del crédito no dispuesto durante el periodo de liquidación.
- Comisión por descubiertos en cuenta y excedidos en cuenta de crédito. Es un %, generalmente, sobre el mayor saldo excedido de crédito dentro del periodo de liquidación.

Ejemplo 47: Una cuenta corriente ha presentado los siguientes movimientos en u.m.:

⁴⁴ Si se cuenta el plazo entre dos apuntes consecutivos en días $n_j = \frac{\text{días}_j}{360}$

⁴⁵ El Banco de España ha establecido los criterios para determinar la fecha valor.

<http://www.bde.es/webbde/es/secciones/normativa/circu/circulares3.html>

<i>Fecha valor</i>	<i>Importe</i>			<i>números</i>	<i>números</i>
	<i>C(Tr)</i>	<i>Sc(Tr)</i>	<i>Días</i>	<i>negros</i>	<i>rojos</i>
<i>1-3-A</i>	<i>100.000</i>	<i>100.000</i>	<i>6</i>	<i>600.000</i>	
<i>7-3-A</i>	<i>50.000</i>	<i>50.000</i>	<i>5</i>	<i>250.000</i>	
<i>12-3-A</i>	<i>70.000</i>	<i>20.000</i>	<i>8</i>		<i>160.000</i>
<i>20-3-A</i>	<i>30.000</i>	<i>10.000</i>	<i>11</i>	<i>110.000</i>	
<i>31-3-A</i>	<i>Suma de</i>	<i>números</i>		<i>960.000</i>	<i>160.000</i>

$$\text{Saldo medio positivo: } \frac{960.000}{30} = 32.000 \text{ u.m.}$$

$$\text{Saldo medio negativo: } \frac{160.000}{30} = 5.333,33 \text{ u.m.}$$

$$\text{Saldo medio: } \frac{960.000 - 160.000}{30} = 26.666,66 \text{ u.m.}$$

Si los intereses a favor del cuentacorrentista son del 2% y los intereses a favor del banco ascienden al 10%, el total de intereses será:⁴⁶

$$Y = \frac{960.000 \cdot 2}{100 \cdot 360} - \frac{160.000 \cdot 10}{100 \cdot 360} = 8,89 \text{ u.m.}$$

El saldo el día 31-3-A asciende a: $S = 10.000 + 8,76 = 10.008,76 \text{ u.m.}$

⁴⁶ La Banca trabaja con el criterio ACT/360 para el cálculo de los intereses.

4. Operaciones no bancarias de financiación.

Dentro de las distintas fuentes de financiación no bancarias, sólo se hará mención expresa a las siguientes.

4.1 Ampliación de capital.

La ampliación de capital puede representar un aumento de recursos para la empresa si su adquisición obliga a un desembolso dinerario; si la ampliación se realiza con cargo a reservas, lo único que se produce es un cambio en la estructura patrimonial de la empresa (este segundo supuesto se conoce como “ampliación de capital liberada y con cargo a reservas”).

Si se desea realizar una ampliación de capital, deberá tenerse en cuenta el efecto de la misma sobre el valor de las acciones viejas y el precio de las acciones una vez se ha realizado la ampliación.

Al accionista antiguo toda ampliación de capital le puede producir una devaluación de sus acciones al tener que repartir el patrimonio neto de la sociedad entre un número mayor de títulos.

La mayoría de las legislaciones societarias contemplan el derecho preferente de suscripción de acciones nuevas por parte de los antiguos accionistas. Si ese derecho preferente de suscripción lo ejercen todos los antiguos accionistas, y según las condiciones estipuladas en la ampliación, el valor global de sus acciones, viejas más nuevas, permanece invariante. En caso de que la suscripción de las nuevas acciones se realice por nuevos inversores, se está dando entrada a nuevos accionistas; en este caso, se produce una disminución del valor del título antiguo, si no se calcula adecuadamente el precio de emisión de las nuevas acciones para evitar el “efecto dilución”.

Distinguiremos dos formas distintas de llevar a cabo una ampliación de capital:

● *Ampliación de capital por incremento del nominal de las acciones ya existentes.*

En este caso no se produce un aumento del número de títulos, sino que se incrementa el nominal de los ya existentes y, por tanto, el antiguo accionista se ve forzado a asumir el desembolso que exige la ampliación al no poder ceder el derecho de suscripción.

● *Ampliación de capital por emisión de nuevas acciones.*

Consiste en un incremento de las acciones de la empresa, pasando de una cantidad N a otra N' .

Si un accionista no quiere adquirir nuevos títulos puede ceder el derecho preferente a un tercero a cambio de una cantidad monetaria.

Para poder determinar en qué cuantía se ve afectado el valor de una acción como consecuencia de la introducción en el mercado de más títulos se debe definir previamente algunos conceptos:

● Valor teórico de una acción.

El valor teórico, o contable, V_T , será el resultado de repartir el capital propio, P , por el número de títulos de la empresa, N , es decir,

$$V_T = \frac{P}{N}$$

● Valor teórico después de efectuada la ampliación de capital.

Si la empresa emite M acciones nuevas a un precio C_e el valor total del capital propio será $P + M \cdot C_e$, luego el valor teórico de cada acción después de efectuada la ampliación de capital será:

$$V'_T = \frac{P + M \cdot C_e}{N + M}$$

Si se quiere mantener el mismo valor teórico de todas las acciones, para que el accionista antiguo no se sienta afectado por la ampliación de capital, entonces se deberá calcular la prima de emisión, que sera de $P_e = V_T - C$, siendo C el nominal de la acción y V_T el valor teórico antes de la ampliación.

✿ Valor del derecho de suscripción.

Si la empresa decide un precio de emisión distinto al valor teórico, $C_e < V_T$, el accionista antiguo puede vender el derecho y recuperar en el mercado la diferencia ocasionada por la pérdida de valor.

Existe un mercado de derechos de suscripción en el que el accionista antiguo puede negociar la venta del derecho preferente de suscripción. La cotización que puede alcanzar el derecho de suscripción dependerá de las expectativas de la empresa y del valor de mercado de sus acciones.

Sin embargo, todo accionista que quiera desprenderse de él deberá calcular un precio inicial que le compense la pérdida de valor de sus acciones derivada de la ampliación de capital. Dado que el precio de emisión es $C_e < V_T$ y que al accionista antiguo le corresponde una acción nueva cada $\frac{N}{M} = k$ acciones antiguas, el valor del derecho dependerá de la diferencia entre la cotización de la acción en el mercado antes de la ampliación y el precio teórico después de la ampliación.

Así, si antes de la ampliación la cotización era C_1 y después C_2 , en condiciones de mercado perfecto deberá verificarse que C_2 debe representar el nuevo valor teórico tras la ampliación, V'_T , de donde:

$$d = C_1 - V'_T = C_1 - \frac{P + M \cdot C_e}{N + M},$$

Como C_1 es la cotización antes de la ampliación y P representa el valor total neto de mercado de la empresa antes de la ampliación deberá coincidir con $C_1 \cdot N$, sustituyendo en la expresión anterior tendremos,

$$d = \frac{C_1 \cdot (N + M) - C_1 \cdot N - C_e \cdot M}{N + M} = \frac{C_1 - C_e}{k + 1}$$

El derecho depende directamente de la cotización de la acción en el mercado, esta dependencia es lineal y creciente (a mayor cotización de la acción antigua mayor deberá ser la cotización del derecho). El derecho se puede negociar en Bolsa y est activa la negociación durante todo el tiempo que dura el plazo de la ampliación de capital.

Ejemplo 48: *El xx-xx-A una sociedad cotizaba en Bolsa a 3.555 u.m. y tenía anunciada una ampliación de capital por importe de 589.928.750 u.m., repartido entre 2.359.715 acciones nuevas. La paridad para acceder a la ampliación era de 20 acciones antiguas por 1 nueva, $k = 20 + 1 = 21$.*

El precio de emisión de las acciones nuevas es de: $C_e = \frac{589.928.750}{2.359.715} = 250 \text{ u.m./ acción}$

El importe teórico del derecho de suscripción será: $d = \frac{3.555 - 250}{21} = 157 \text{ u.m./ derecho}$

Para un inversor que no es accionista y desea acudir a la ampliación mediante la compra en Bolsa de 20 derechos el coste de la nueva acción, tomando como precio del derecho preferente 157 u.m. es $20 \cdot 157 + 250 = 3.390 \text{ u.m.}$ Ello supone comprar la acción nueva con una rebaja del 4,64% sobre la cotización en bolsa de la acción antigua.

4.2 Empréstitos.

El emisor, generalmente una empresa privada o una institución pública, decide financiarse accediendo al mercado de capitales para colocar partes alicuotas de un préstamo, representadas en un título-valor, directamente entre los inversores, quienes esperan recibir una rentabilidad y/o una seguridad superiores a las que se podrá obtener en el mercado de acciones, en una operación bancaria u otro tipo de operación financiera. La colocación de nuevos títulos procedentes de emisiones de empréstitos, o bonos, se realiza a través de los intermediarios financieros (generalmente instituciones bancarias) quienes, además de diseñar las características de la emisión, garantizarla en algunos casos y aconsejar sobre las implicaciones financiero-fiscales, canalizan el dinero de los inversores hacia ese tipo de títulos.

No puede hacerse efectiva la emisión de un empréstito de obligaciones, o bonos, sin que exista la aprobación de la memoria informativa de la emisión por parte de la Comisión Nacional del Mercado de Valores; la publicidad de la emisión exige que las Bolsas de Valores y todos los intermediarios que han aceptado la colocación de la emisión tengan una copia de la memoria. Todo ello, unido al cumplimiento de unos preceptos legales específicos, permite que las características de la emisión se fijen libremente por el emisor.

Información que debe contener la memoria de emisión.

Volumen de la emisión:

Es la suma del valor nominal de todos los títulos emitidos. El nominal de cada título no es estándar, pudiendo ser cualquier cantidad monetaria.

El número de títulos:

Está directamente relacionado con el volumen de la emisión y responde a las necesidades financieras del emisor.

El precio de reembolso de los títulos en la amortización:

Generalmente es el valor nominal, aunque se pueden realizar emisiones con precio de amortización distinto al nominal. En el mercado español, a excepción de las emisiones con cupón cero que no pagan interés periódicamente y que se amortizan con una prima de amortización equivalente a los intereses acumulados, la mayoría de los títulos se amortizan por su nominal.

El plazo de vida de la emisión:

Es el tiempo que media entre la fecha de emisión y la última fecha de las amortizaciones.

La fecha en que empiezan a devengarse los intereses:

Es uno de los datos significativos ya que puede producirse una pérdida del último cupón o un desfase del primer pago de cupones respecto a la periodicidad marcada en la emisión; es frecuente que el desfase de la fecha del primer cupón sea consecuencia de la duración del periodo de suscripción.

El periodo de suscripción de los títulos:

Este no está reglamentado y cada emisor puede fijar un plazo especial para cada emisión. El desembolso del coste de la suscripción de las obligaciones se realizará el último día del plazo de suscripción.

El periodo de suscripción puede afectar al desfase en la periodicidad del cobro del primer cupón; este efecto es más evidente en la Deuda Pública, donde se realiza una emisión en una fecha, pero la colocación de la misma se va realizando en distintas fases por el sistema de subasta.

El cupón:

Es el importe que se paga por devengo de los intereses. Para el cálculo del cupón se deberá tener en cuenta el tipo de interés nominal fijado en la emisión y la periodicidad en el pago de los intereses devengados.

Podemos destacar tres cláusulas distintas de revisión de intereses:

- Definir un tanto de interés que dependerá de un interés referencial fijado en el momento de la emisión; normalmente el interés de referencia es una media aritmética computada durante un periodo corto de tiempo anterior a la fecha de revisión.
- Definir un tanto de interés a un índice prefijado, pero deberá estar comprendido dentro de una banda fijada en el momento de la emisión.
- Fijar en el momento de la emisión un conjunto de tantos de interés a aplicar por tramos a lo largo de la vida del empréstito.

✿ *La estructura amortizativa de los títulos:*

Esta no responde a un estándar, cada emisor puede fijar la forma como va a realizar el pago de los cupones y cómo va a devolver el nominal del empréstito, sin embargo, las formas más frecuentes de proceder en la amortización son:

- ◆ Amortización periódica y mediante sorteo. En este caso la amortización se va realizando de forma periódica a partir de una fecha fijada en el momento de la emisión; en cada fecha de amortización se procede al sorteo de los títulos que deberán amortizarse, teniendo en cuenta que se conoce el número de títulos a amortizar en esa fecha.
- ◆ Amortización única al final del plazo de vida de la emisión. En este caso, todos los títulos se amortizan de una sola vez al final de la vida del empréstito. En la actualidad es la forma más corriente de definir la amortización y, en concreto, toda la Deuda Pública se amortiza de esa forma.
- ◆ Amortización por reducción del nominal del título. En este caso todos están en circulación hasta el final del plazo de la emisión, sin embargo, se establece una fecha, a partir de la cual se va amortizando periódicamente una parte del nominal, generalmente en cada periodo se reduce el nominal del título en la misma cantidad.

✿ *La cláusula que recoge el derecho de cancelación anticipada de la emisión (tanto por parte del tenedor como del emisor):*

Normalmente, la cancelación se realiza sobre la par para que le permita cubrir al tenedor de los títulos la pérdida producida por una bajada de los tipos de interés.

📌 **Tipo de títulos.**

✿ *Letras y Pagarés.*

Son activos de renta fija con vencimientos que normalmente no superan los 18 meses. Se negocian en el Mercado Monetario y son activos muy líquidos pero con rentabilidad baja. Se colocan por un precio inferior al nominal y no pagan cupón. En la fecha de amortización o vencimiento se recupera el nominal del título.

✿ *Bonos y obligaciones simples*

Son emisiones de empréstitos en los que el interés, fijo o variable, está determinado. La duración para ambos puede variar pero normalmente es superior a tres años. Generalmente, durante toda la vida del activo, el poseedor de las obligaciones cobra un cupón, o interés, de forma periódica. La única garantía que ofrecen es la propia solvencia de la entidad emisora.

🌸 *Bonos y Cédulas Hipotecarias.*

Son títulos que tienen como característica más relevante la incorporación de una garantía hipotecaria. La finalidad de las cédulas hipotecarias está perfectamente fijada en la memoria de la emisión, siendo ésta la financiación de un determinado inmueble.

🌸 *Bonos y obligaciones convertibles.*

Estos activos tienen asociado un derecho de opción que permite a su titular, en fechas y precio fijados en el momento de la emisión, acceder al canje del bono por otro tipo de activo.

El precio de conversión de una obligación recoge el valor de la obligación más el valor de la opción de conversión. Teóricamente, este precio de conversión debe garantizar a los accionistas antiguos que no se verán afectados por el “efecto dilución”. Una emisión de obligaciones con “*warrant*”, contiene dos activos: las obligaciones simples, que tendrán derecho a cobrar un cupón, y el “bono de suscripción de acciones”, que da la opción de compra, a cambio de un precio fijado en el momento de la emisión, de un número determinado de acciones de la empresa emisora. Una vez se ha efectuado la suscripción ambos documentos se separan entrando en el mercado secundario como dos valores distintos y con cotización propia.

🌸 *Empréstitos con amortización única (in fine).*

🌸 *Magnitudes.*

- **Nominal de un título:** C , valor facial de cada obligación (título de renta fija).
- **Número de títulos emitidos:** N .
- **Precio de emisión:** C_e , precio al que se coloca un título en el mercado primario (directamente por el emisor).
- **Cupón:** $Cu^r = C \cdot I_m^r$, interés periódico que paga cada título. i_M^r es el tanto de interés nominal de la emisión, éste puede ser constante o variar a lo largo de la vida de la emisión.
- Si el tanto nominal de interés es 0 la emisión se denomina “*emisión con cupón cero*”, los títulos no cobran ningún tipo de renta durante la vida de los mismos y solo reciben el precio de amortización al final.
- **Precio de Amortización:** C_a , precio de amortización de cada título a cobrar en el momento de la amortización.
- **Gastos de emisión:** G_e , son los gastos necesarios a cargo del emisor para que la emisión se pueda realizar. Estos gastos están detallados en el folleto de emisión.
- **Tanto efectivo emisor, tanto efectivo suscriptor.**

El *tanto efectivo emisor* es un tanto anual de interés compuesto que se utiliza como indicador del coste de la financiación para el emisor. Se obtiene de plantear la ecuación de equilibrio entre el dinero que recibe el emisor, $C_e \cdot N$, y los pagos de debe realizar (gastos de emisión, pago de los cupones y la amortización de los títulos).

El *tanto efectivo suscriptor* recoge el mismo concepto que el tanto efectivo emisor pero teniendo en cuenta los cobros y pagos a cargo de todo el colectivo de obligacionistas. Los suscriptores pagan $C_e \cdot N$ y los gastos de suscripción (si los hay), a cambio reciben los cupones periódicamente y la amortización de los títulos.

Se van a estudiar los siguientes tipos de empréstitos:

☀ **Empréstitos cupón cero.**

En estos empréstitos no hay pago de cupones, $C_u = 0$, y el precio de amortización C_a debe estar determinado en el folleto de emisión, e puede dar una cantidad o se puede dar un tanto de interés para capitalizar el nominal y hallar su valor en T (en este caso $C_a = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot T}$).

◆ Para el emisor la operación sería:



La ecuación de equilibrio $C_e \cdot N - G_e = C_a \cdot N \cdot (1 + I_1^e)^{-T}$ permite obtener el tanto efectivo emisor o indicador del coste de la financiación para el emisor.

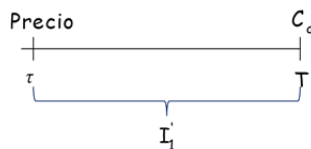
◆ Para el suscriptor, si no hay gastos de suscripción, la operación sería:



La ecuación de equilibrio $C_e \cdot N = C_a \cdot N \cdot (1 + I_1^s)^{-T}$ permite obtener el tanto efectivo suscriptor o indicador de la rentabilidad del suscriptor.

◆ **Valor o precio de mercado** de un título en una fecha intermedia, $0 < \tau < T$. Será necesario conocer el tanto de interés de mercado⁴⁷, I_1' , que está vigente en τ .

Gráficamente se puede expresar de la siguiente forma:



Luego el precio o valor de mercado en τ será: $\text{Precio} = C_a \cdot f(T, \tau) = C_a (1 + I_1')^{-t}$, donde $t = (T - \tau)$ es el plazo hasta la amortización.

Según el mercado donde se negocia el título el cálculo del plazo y del factor de valoración depende del Reglamento del mercado.

📰 **Mercado de Deuda Pública.**

- El plazo t se obtiene aplicando la Base ACT/360 si es una Letra del Tesoro. Si es un Bono del Tesoro se aplica la Base ACT/ACT.
- El nominal de un título es de 1000€ en toda la zona euro.
- El factor de valoración será, para plazos inferiores a 365 días el interés simple y para plazos superiores a 365 días el interés compuesto.
- El precio cotiza con cupón, es decir, el precio es precio final, y en porcentaje sobre el nominal del título.
- Se calcula a fecha valor y ésta es D+2 hábiles, es decir, la fecha de negociación más dos días hábiles según el calendario TARGET2.

⁴⁷ Este tanto de interés de mercado es el rendimiento interno medio del título en esa fecha si se negocia a ese precio.

Ejemplo 49: El Boletín del Mercado de Deuda Pública del día 4 de octubre del 2010 publicó el precio de una Letra del Tesoro que vencía el 18-2-11. El rendimiento interno medio (rentabilidad de la letra ese día o tanto de mercado) fue el 1,02%.

 BANCO DE ESPAÑA	Boletín del Mercado de Deuda Pública						
Año 23 Número 5609 4 de octubre de 2010							
Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento							
I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO							
1. DEUDA DEL ESTADO							
E M I S I O N	NUMERO OPERACS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX-CUPON)			RENTD. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
			MEDIO	MAXIMO	MINIMO		
ESOL01102182 L EST CUP=0 18.02.11	1	10,00	99,619	99,619	99,619	1,02	99,486 (28/09/2010)

Para calcular el precio de mercado (o valor) es necesario conocer:

- Plazo al vencimiento. Le faltan 135 días, la fecha valor es 6-10-2010, luego $t = \frac{135}{360} = 0,375$ años.

- El factor de valoración será el interés simple, de donde,

$$\text{Precio} = 1000(1 + 0,102 \cdot 0,375)^{-1} = 996,189575 \sim 99,619\%$$

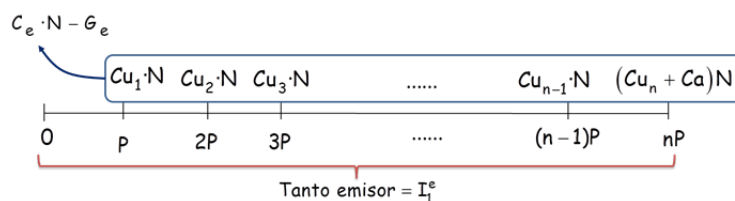
Mercado AIAP.

- El plazo t se obtiene aplicando la Base ACT/365.
- El factor de valoración será, para plazos inferiores a 376 días el interés simple y para plazos superiores a 376 días el interés compuesto.
- El precio cotiza con cupón, es decir, el precio es precio final, y en porcentaje sobre el nominal del título.
- Las operaciones realizadas serán comunicadas por el Sistema directamente a IBERCLEAR, produciéndose su liquidación y compensación con fecha valor tres días hábiles posteriores a su fecha de ejecución, D+3 hábiles. Para el cómputo del número de días hábiles se tendrá en cuenta el calendario de sesiones hábiles de mercado publicado por la Sociedad Rectora del Mercado AIAP.

Empréstitos con pago periódico del cupón.

En estos empréstitos el emisor paga periódicamente un cupón $Cu_r = C \cdot I_m^r$, el precio de amortización C_a debe estar determinado en el folleto de emisión.

◆ Para el emisor la operación sería:



Si el cupón es constante, la ecuación de equilibrio $C_e \cdot N - G_e = Cu \cdot N \cdot a_{n|I_m^e} + C_a \cdot N \cdot (1 + I_m^e)^{-n}$ permite obtener el tanto efectivo emisor o indicador del coste de la financiación para el emisor, $I_1^e = (1 + I_m^e)^n - 1$.

◆ Para el suscriptor, si no hay gastos de suscripción, la operación sería:



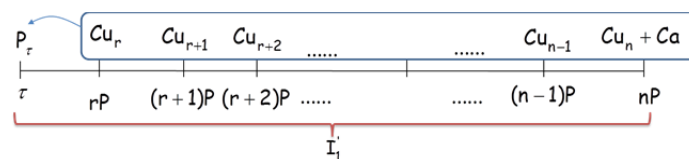
La ecuación de equilibrio $C_e \cdot N - G_{\text{suscripción}} = C_u \cdot N \cdot a_{\overline{n}|I_m^s} + C_a \cdot N \cdot (1 + I_m^s)^{-n}$ permite obtener el tanto efectivo suscriptor o indicador de la rentabilidad del suscriptor, $I_1^s = (1 + I_m^s)^n - 1$.

◆ **Valor o precio de mercado** de un título en una fecha intermedia, $0 < \tau < T$.

Para determinar el Valor o Precio de mercado de un título que paga cupones periódicamente será necesario:

- Conocer el tanto de interés de mercado⁴⁸, I_1' , que está vigente en τ .
- El conjunto de cupones que quedan pendientes de pagar y el precio de amortización del título.

Gráficamente se puede expresar de la siguiente forma:



Luego el precio o valor de mercado en τ será el valor en τ de los cupones y el precio de amortización futuros, utilizando como tanto de valoración el tanto de interés de mercado.

$$P_\tau = \sum_{rP > \tau} C_{u_r} \cdot (1 + I_1')^{-(rP - \tau)} + C_a \cdot (1 + I_1')^{-(nP - \tau)}$$

Según el mercado donde se negocia el título el cálculo del plazo y del factor de valoración depende del Reglamento del mercado.

🏠 **Mercado de Deuda Pública.**

- Para un Bono del Tesoro se aplica la Base ACT/ACT sobre el residuo inicial inferior al año. Se cuentan años completos desde la fecha de amortización hacia la fecha de valoración.

Ejemplo 50: El Boletín de Deuda Pública daba los siguientes datos:

 BANCO DE ESPAÑA	Boletín del Mercado de Deuda Pública 15 de noviembre de 2010 Año 23 Número 5639						
Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento							
I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO							
1. DEUDA DEL ESTADO							
E M I S I O N	NUMERO OPERACS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX-CUPON)			RENTD. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
			MEDIO	MAXIMO	MINIMO		
ES0000012932 O EST 4.20 31.01.37	5	39,70	83,491	84,000	83,300	5,39	82,512 (12/11/2010)

Se trata de una emisión de obligaciones del estado con fecha de amortización el 31-1-2037. Esta emisión paga un cupón anual del 4,20%. La fecha valor será D+2 hábiles, es decir, el 17-11-10. Para contar en

⁴⁸ Este tanto de interés de mercado es el rendimiento interno medio del título en esa fecha si se negocia a ese precio.

número de cupones que faltan se iniciarán a contar años completos desde el 31-1-2037 al 17-11-2010; hay 16 años completos y 75 días, luego en años tendremos $16 + \frac{75}{365} = 16,2054795$ años.

- El factor de valoración será, para plazos inferiores a 365 días el interés simple y para plazos superiores a 365 días el interés compuesto.

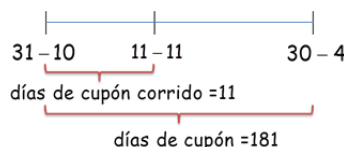
- El precio cotiza “ex cupón” y en porcentaje sobre el nominal del título, es decir, el precio final es la cotización más el “cupón corrido”, $\text{Precio} = \text{Cotización} \% \cdot 1000 + C_{\text{corrido}}$.

El cupón corrido es la parte de cupón devengada hasta la fecha de liquidación y no pagada,

$$C_{\text{corrido}} = C \cdot I_m^r \cdot \frac{\text{días cupón corrido}}{ACT}$$

Para el cálculo del cupón corrido se utiliza la Base ACT/ACT.

Ejemplo 51: Un bono paga un cupón semestral de 24€. El último cupón se pagó el 31 de octubre y el próximo cupón se pagará el 30 de abril. Se supone que entre octubre y abril hay 181 días. Hoy, 11 de noviembre el número de días transcurridos desde que se pagó el último cupón es de 11.



El cupón corrido será $C_{\text{corrido}} = 24 \cdot \frac{11}{181} = 1,45\text{€}$.

- Se calcula a fecha valor y ésta es D+2 hábiles, es decir, la fecha de negociación más dos días hábiles según el calendario TARGET2.

Ejemplo 52: El mercado de Deuda Pública da la información siguiente:

	Boletín del Mercado de Deuda Pública 15 de noviembre de 2010 Año 23 Número 5639	
---	--	---

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento

I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO

1. DEUDA DEL ESTADO

E M I S I O N	NUMERO OPERACS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX-CUPON)			RENTD. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
			MEDIO	MAXIMO	MINIMO		
ES0000012932 O EST 4.20 31.01.37	5	39,70	83,491	84,000	83,300	5,39	82,512 (12/11/2010)

La cotización media del día es el 83,491% sobre el nominal (1000€). Como cotiza “ex cupón” el precio en euros deberá incorporar el cupón corrido que es: $C_{\text{corrido}} = 42 \cdot \frac{290}{365} = 33,36\text{€}$.

El precio es de $834,91 + 33,36 = 868,27\text{€}$.

Mercado AIAF.

- Para el cálculo del plazo de cupón corrido se utiliza la base ACT/ACT.

- El factor de valoración será, para plazos inferiores a 376 días el interés simple y para plazos superiores a 376 días el interés compuesto.

- El precio cotiza “ex cupón”.
- La Base que utiliza para pasar días a años es ACT/365; se calculan los días desde la fecha de liquidación a la fecha donde se hace efectivo el pago de cupón o de la amortización y se divide por 365.
- La fecha de liquidación es $D+3$ hábiles.

Ejemplo 53: El mercado AIAF el 23-4-2013 dio un precio medio de 102,661% sobre el nominal “ex cupón” y paga un cupón del 6%. La fecha de liquidación será el 26-4-2013.



1 Operaciones al contado
Fecha: 23/04/2013
Núm. Boletín: 759

1.1 Renta Fija Privada

Descripción del valor					Nº	Volúmenes euros		Precio		
ISIN	Cód	Emisor	Cupón	Fecha vto.	Op.	Nominal	Efectivo	Máximo	Medio	Mínimo
ES0211839172	OS	Audasa	6,000	31-05-21	5	52,50	55,01	102,800	102,611	102,500

Según información del mercado, los desembolsos que debe pagar el emisor están en la siguiente tabla:

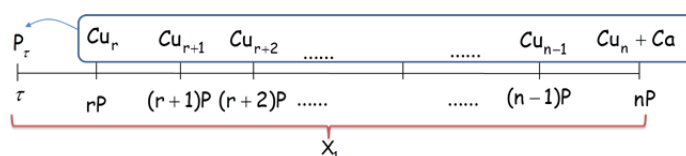
ISIN	Tipo de Activo	Emisor	Fecha Emisión	Fecha Vencimiento	Nominal Unitario	Divisa
ES0211839172	OBLIGACIONES	AUDASA	31/05/2011	31/05/2021	500,00	EUR

Fecha	Tipo	Porcentaje
31/05/2011	Emisión	0,00
31/05/2011	Devengo	0,00
15/12/2011	Interés	3,25
15/12/2012	Interés	6,00
15/12/2013	Interés	6,00
15/12/2014	Interés	6,00
15/12/2015	Interés	6,00
15/12/2016	Interés	6,00
15/12/2017	Interés	6,00
15/12/2018	Interés	6,00
15/12/2019	Interés	6,00
15/12/2020	Interés	6,00
31/05/2021	Interés	2,75
31/05/2021	Amortización	100,00

El precio total en % sobre el nominal será: $102,611\% + 6\% \frac{132}{365} = 104,78\%$

◆ **Rendimiento interno medio** de un título en una fecha intermedia, $0 < \tau < T$ según la cotización ese día (Tanto obligacionista).

Para obtener el rendimiento interno medio según la cotización que tiene un título en el mercado se debe plantear la ecuación de equilibrio entre el precio en τ y el conjunto de cupones y amortización que queda por pagar, de esa ecuación de equilibrio se obtiene el tanto efectivo anual que mide la rendimiento interno medio del título.



$$P_{\tau} = \sum_{rP > \tau} Cu_r \cdot (1 + X_I)^{-(rP - \tau)} + Ca \cdot (1 + X_I)^{-(nP - \tau)} \rightarrow X_I \text{ es el valor a buscar}$$

Ejemplo 54: El mercado AIAF el 23-4-2013 dio un precio medio “ex cupón” de 102,661% sobre el nominal y paga un cupón del 6%. La fecha de liquidación será el 26-4-2013.



1 Operaciones al contado
Fecha: 23/04/2013
Núm. Boletín: 759

1.1 Renta Fija Privada

Descripción del valor					Nº	Volúmenes euros		Precio		
ISIN	Cód	Emisor	Cupón	Fecha vto.	Op.	Nominal	Efectivo	Máximo	Medio	Mínimo
ES0211839172	OS	Audasa	6,000	31-05-21	5	52,50	55,01	102,800	102,611	102,500

La siguiente tabla recoge los capitales a cobrar hasta la amortización y su valor en la fecha valor al tanto de interés que iguala ese valor con el precio total del bono.

Fecha	Tipo	Porcentaje	días	años	Valor el 26-4-2013	Rendimiento interno medio
26/04/2013	precio mercado	104,78				5,585502%
15/12/2013	Interés	6	233	0,6384	5,80	
15/12/2014	Interés	6	598	1,6384	5,49	
15/12/2015	Interés	6	963	2,6384	5,20	
15/12/2016	Interés	6	1329	3,6411	4,92	
15/12/2017	Interés	6	1694	4,6411	4,66	
15/12/2018	Interés	6	2059	5,6411	4,42	
15/12/2019	Interés	6	2424	6,6411	4,18	
15/12/2020	Interés	6	2790	7,6438	3,96	
31/05/2021	Interés	2,75	2957	8,1014	1,77	
31/05/2021	Amortización	100	2957	8,1014	64,38	
Valor el 26-4-2013 de todos los cupones y amortización pendientes.					104,78	

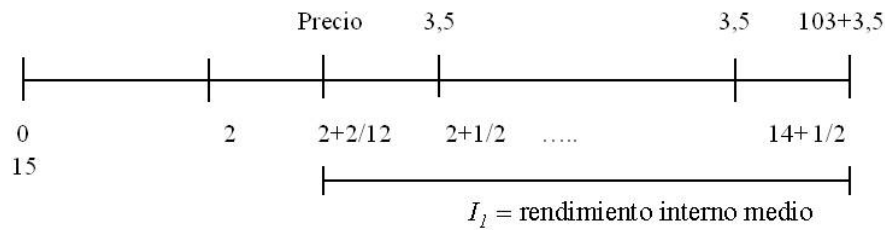
Ejemplo 55: Un organismo público decide lanzar al mercado la emisión de un empréstito con 100.000 títulos a un nominal por título de 100 u.m. Los títulos pagarán un cupón semestral al 7% nominal y se amortizarán a los 15 años con una prima de amortización de 3 u.m. Hay una prima de emisión del 1% bajo la par.

❑ La rentabilidad interna media de ese título en el momento de la emisión (tanto suscriptor) será aquel tanto de interés que haga equivalente el precio a pagar en la emisión con el valor en 0 de los cobros futuros que proporcionará uno cualquiera de sus títulos.

El precio de emisión es $100 - 1 = 99$ u.m., el precio de amortización es de 103 u.m. y el cupón semestral es de 3,5 u.m. En total el suscriptor debe cobrar 30 cupones.

$$99 = 3,5 \cdot a_{\overline{30}|I_2} + 103(1 + I_2)^{-30} \rightarrow I_2 = 0,03612188 \quad \text{y} \quad I_1 = (1 + I_2)^2 - 1 = 7,3548\%$$

❑ Supóngase que el emisor ha colocado los títulos en el mercado de renta fija y que han pasado dos años y dos meses desde la emisión. Si los títulos cotizan “ex cupón” y están cotizando al 102%, el rendimiento interno medio será aquel tanto de interés anual que haga equivalente el precio en el mercado con el conjunto de cobros futuros que proporcionará el bono.



El cupón corrido es $c_{\text{corrido}} = 3,5 \cdot \frac{4}{12} = 1,11566$ y el precio del bono asciende a $102 + 1,1566 = 103,1566$. La rentabilidad interna media se obtendrá de la ecuación:

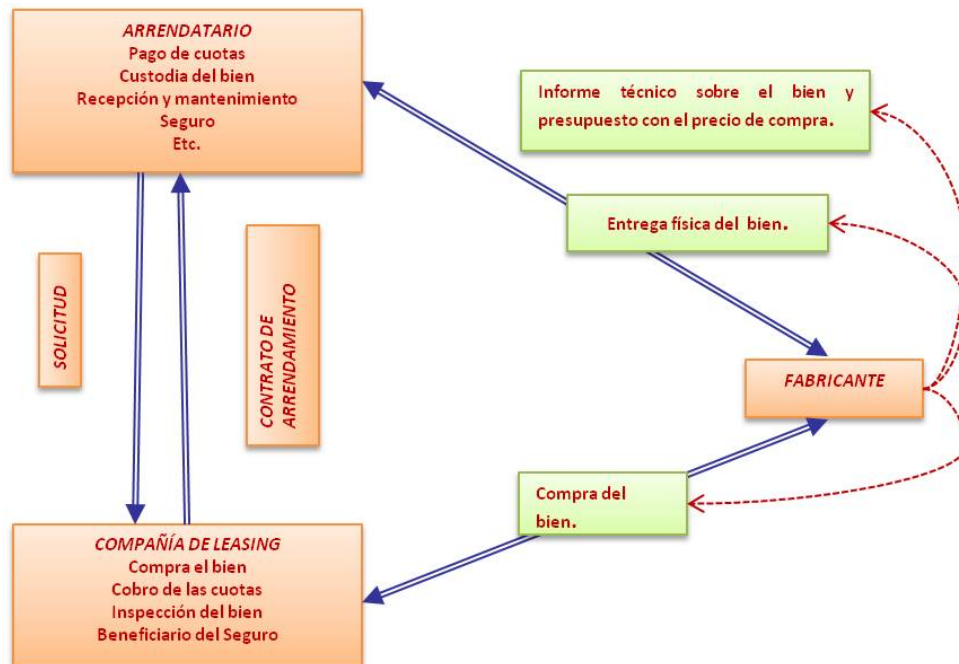
$$103,1566 = \left(3,5 \cdot a_{\overline{26}|I_2} + 103 \cdot (1 + I_2)^{-26} \right) \cdot (1 + I_2)^{\frac{4}{12}},$$

de donde $I_2 = 0,034555$, $I_1 = (1 + I_2)^2 - 1 = 7,03048\%$

4.3. Leasing financiero.

Tendrán la consideración de operación de arrendamiento financiero aquellos contratos que tengan como objetivo exclusivo la cesión del uso de bienes muebles o inmuebles adquiridos para dicha finalidad a cambio de una contraprestación consistente en el abono periódico de una cuota para recuperación del coste del bien, excluido el valor de la opción de compra, y la carga financiera.

El contrato de arrendamiento financiero incluirá necesariamente una opción de compra al término del mismo en favor del usuario. Los bienes objeto de cesión habrán de quedar afectados por el usuario únicamente a sus explotaciones agrícolas, pesqueras, industriales, comerciales, artesanales, de servicios o profesionales.



Son condiciones usuales del contrato de “leasing”:

- El arrendatario libera de toda responsabilidad a la Sociedad de Leasing de la inadecuación objetiva o subjetiva del bien objeto de arriendo.
- El rendimiento, mantenimiento y productividad el bien arrendado corresponde al arrendatario, por ello, éste no podrá oponer al arrendador ninguna causa de mal funcionamiento para no atender el pago de las cuotas.

- No efectuar sin consentimiento de la arrendadora modificaciones en el bien que puedan variar su esencia o naturaleza; también quedarán en propiedad de la arrendadora las piezas añadidas al bien y que no hayan sido retiradas, no teniendo derecho a indemnización el arrendatario.
- Mantener el bien en el lugar indicado en el contrato, siendo necesaria la autorización expresa de la arrendadora para su traslado a otro lugar distinto.
- Sólo podrán utilizar el bien aquellas personas dependientes del arrendatario - El arrendatario deberá hacerse cargo de los gastos de entrega, devolución, transporte, montaje, instalación y puesta a punto del bien.
- La arrendadora tendrá derecho a acceder al lugar donde está ubicado el bien para su inspección e identificación.
- El arrendatario deberá comunicar a la arrendadora dentro de 24 horas cualquier tipo de siniestro o robo que afecte al bien arrendado.
- En caso de existir un seguro sobre el bien, el beneficiario será el arrendador hasta que finalice el contrato.
- La falta de pago total o parcial de una de las cuotas faculta a la entidad arrendadora para exigir, si se ha especificado en el contrato, el pago de todos las cuotas vencidas y pendientes de vencer incluida la representativa del valor residual, así como los intereses de demora. También puede exigir, alternativamente, la devolución del bien y una indemnización de un porcentaje de las cuotas pendientes de vencer.

El arrendatario del bien contrata directamente con el fabricante el bien que desea adquirir, fijando condiciones técnicas, precio, plazo de entrega, etc.; posteriormente, contacta con una Sociedad de Leasing para que ésta efectúe la compra al contado basándose en el informe técnico y precio que le ha facilitado el fabricante.

La Sociedad de Leasing y el arrendatario acuerdan un contrato de alquiler del bien en el que debe figurar, además de las condiciones de carácter general:

- Valor de adquisición del bien, desglosando la parte de IVA.
- Duración del contrato; según la legislación vigente esta no podrá ser inferior a 2 años para los bienes muebles ni inferior a 10 años para los bienes inmuebles.
- El valor residual es el que pacta en la opción de compra del bien al final del plazo del contrato de arrendamiento.
- Periodicidad del pago de las cuotas de alquiler. Habitualmente es mensual.
- Importe de las cuotas de alquiler. Estas acostumbran a ser constantes (pueden ser crecientes), se pagan por anticipado y pueden ascender a un importe igual al valor residual del bien (excepto para el leasing inmobiliario que suele establecerse como valor residual el 15% del valor del bien, correspondiente al valor del suelo)
- El importe anual de la parte de las cuotas de arrendamiento financiero correspondiente a la recuperación del coste del bien deberá permanecer constante o tener carácter creciente, aunque dentro del año se pueden distribuir en la forma que convenga a las partes con la correspondiente carga financiera, así es posible aminorar o no realizar pagos en algún mes del año. Las cuotas de alquiler contienen dos magnitudes: la cuota de reconstrucción del precio de adquisición y los intereses repercutidos por la financiación de la compra del bien. El tanto nominal de interés es vencido y constante.

- Al tener la consideración de arrendamiento las cuotas periódicas de alquiler deben soportar el IVA correspondiente al bien que se adquiere (en leasing inmobiliario se puede repercutir el Impuesto sobre Transmisiones Patrimoniales). En el momento de la formalización del contrato puede soportarse el Impuesto de Actos Jurídicos Documentados, si es necesaria la elevación de escritura pública.
- Las comisiones de apertura, estudio, cancelación anticipada y por gestión de cobro de cuotas impagadas.
- El interés de demora.

Desde la óptica fiscal esta operación presenta ciertas ventajas, las más visibles son:⁴⁹

- La cuota de alquiler es gasto deducible, lo que permite de hecho amortizaciones aceleradas del bien, dentro de los límites que marca la legislación vigente, puede llegar a ser del doble de los coeficientes legales de amortización lineal
- El IVA se repercuta, lo que no añade coste adicional.

Como operación financiera, el siguiente gráfico representa la corriente de capitales asociados al contrato de *Leasing*:



Teniendo en cuenta la opción de compra y dado que el último pago corresponde al pago del valor residual, éste no puede contener ningún tipo de carga financiera.

Para calcular el importe de la cuota de alquiler se plantea la siguiente ecuación de equilibrio asociada a la operación donde hay un pago inicial en 0 y se incorpora el valor residual en nP :

$$\{(C, 0)\} \sim \{(\alpha, (r-1) \cdot P)\}_{r=1,2,\dots,n+1}$$

de donde,

$$C = \alpha \cdot (1 + a_{\overline{n}|I_m})$$

siendo la cuota de alquiler:

$$\alpha = \frac{C}{1 + a_{\overline{n}|I_m}}$$

Para construir el cuadro del Leasing se adaptará la estructura de la operación a la de un préstamo amortizable por el sistema alemán. Para ello, se debe buscar el nominal del préstamo. En 0 se efectúa el pago de α u.m. correspondientes al primer periodo, si ésta cantidad es superior a los intereses anticipados del préstamo alemán del primer periodo, entonces, en 0 se están pagando los intereses y una entrega inicial a cuenta que reduce la deuda de C a una cantidad C' . El nominal de préstamo alemán será la cuantía C' tal que $C' = C - (\alpha - C' \cdot I_m)$ siendo:

- ✳ C , el precio de adquisición del bien.
- ✳ α , cuota de alquiler pactada durante n periodos, pagadera por anticipado (además, se incluirá una cantidad α en el periodo n –ésimo por el valor residual).

⁴⁹ Estos dos hechos pueden producir un ahorro fiscal entre el 15% y el 20% del coste del bien.

☀ I_m , el tanto efectivo de interés vencido pactado en el contrato de Leasing. I'_m , el tanto de interés periódico anticipado equivalente al I_m vencido, es decir, $I'_m = \frac{I_m}{1 + I_m}$

El nominal del préstamo alemán que se adapta a los pagos del leasing será $C' = (C - \alpha) \cdot (1 + I_m)$. A partir de ese nominal se puede construir el cuadro de amortización del préstamo alemán cuyo término amortizativo será de α y siendo $\alpha - Y_0$ la cantidad inicial a cuenta que se entrega en el momento de la firma del contrato de leasing. La cuota de alquiler a desembolsar por el comprador del bien será $\alpha' = \alpha \cdot (1 + \%IVA)$.

Ejemplo 56: Se supone la financiación a través de un contrato de leasing de una maquinaria cuyo precio de adquisición es de 20.000 u.m., mediante el pago de mensualidades anticipadas iguales durante 10 años. El valor residual es el 1% del precio de adquisición y el tanto nominal de interés es el 18% nominal pagadero mensualmente.

Interés trimestral vencido	Tanto nominal vencido	Interés trimestral Anticipado
$I_{12} = 0,015$	$i_2 = 0,18$	$I'_{12} = 0,0147816$

El importe de la cuota de alquiler se obtendrá de la ecuación: $C - \alpha = \alpha \cdot a_{\overline{119}|0,015} + 200 \cdot (1 + 0,015)^{-120}$ de donde, $\alpha = 354,50$ u.m.

El capital ficticio que debe servir de base para calcular el cuadro de Leasing, según la estructura amortizativa del préstamo alemán es la reserva matemática de la operación a final del primer mes y antes de hacer efectivo el pago de la mensualidad correspondiente:

$$C' - C' \cdot I'_{12} = 354,50 \cdot a_{\overline{119}|I_{12}} + 200 \cdot (1 + I_{12})^{-120} \Rightarrow C' = 19.940,19$$

La cantidad que se entrega a cuenta en el momento de la firma del contrato será, $354,50 - 47,50 = 307,45$

El cuadro del Leasing sin añadir el porcentaje de IVA es (primeras 11 mensualidades):

Periodo	Mensualidad	Carga financiera	Cuota de recuperación del coste del bien	Resto pendiente de recuperar	Capital recuperado
0	354,50	59,75	294,75	19940,19	59,81
1	354,50	60,65	293,85	19879,54	120,46
2	354,50	61,56	292,94	19817,99	182,01
3	354,50	62,48	292,02	19755,51	244,49
4	354,50	63,42	291,08	19692,09	307,91
5	354,50	64,37	290,13	19627,72	372,28
6	354,50	65,34	289,16	19562,38	437,62
7	354,50	66,32	288,18	19496,06	503,94
8	354,50	67,31	287,19	19428,75	571,25
9	354,50	68,32	286,18	19360,43	639,57
10	354,50	69,35	285,15	19291,08	708,92
11	354,50	70,39	284,11	19220,70	779,30

4.4 Factoring de clientes.

Es un medio de financiación que se formaliza mediante un contrato en virtud del cual una de las partes (*cedente*) cede a la otra (*factor*) sus créditos comerciales contra sus clientes, a cambio de un importe convenido en términos relativos en el contrato, con o sin unos márgenes de variación. En esta operación los

créditos pueden estar documentados bajo cualquier forma admitida en derecho: letras, pagarés, facturas, certificaciones, etc.

Los servicios que puede proporcionar el factor son:

✿ *Gestión de cobro.*

El factor se encarga de cobrar al vencimiento los créditos cedidos. El cedente no garantizará la solvencia del deudor pero sí la legitimidad del crédito cedido. El factor asume la titularidad de los créditos, por lo que el cedente debe comunicar a sus clientes la existencia del contrato de *factoring*, indicándoles a quién deberán pagar las deudas.

✿ *Administración de cuentas.*

El factor dará cuenta al cedente de la situación de los créditos y facturas cedidos.

✿ *Financiación.*

El cedente puede disponer de anticipos sobre los créditos cedidos.

En España, que ocupa el sexto lugar en Europa, esta forma de financiación se está consolidando hasta alcanzar en 2.009 los 104.223 millones de €. Se pueden encontrar las siguientes modalidades:

- ✿ **Factoring con recurso.** El factor puede repercutir una posible insolvencia de los créditos cedidos al titular de los mismos, mediante una acción similar a la que se produce en las letras de cambio cuando se ejerce la acción de regreso contra el librador o último endosante.
- ✿ **Factoring sin recurso.** El factor no puede repercutir dicha pérdida al titular, salvo en los casos en que no se deba a la presunta insolvencia del deudor, sino a la presentación, por parte de este último, de una reclamación de tipo comercial contra su proveedor.
- ✿ **Factoring secreto.** El servicio se presta sin cumplir el requisito de notificarles a los deudores el hecho de que se ha producido una transferencia de deuda.
- ✿ **Factoring al por mayor.** Se presta el servicio financiero de conceder al cliente prepagos a cuenta de la facturación pero el factor no realiza ningún tipo de trabajo administrativo ni cubre el riesgo de insolvencia de los deudores.

La cesión en firme sin recurso de los créditos es la forma más genuina de *factoring*, implica la calificación del nivel de riesgos de los clientes cedidos por la empresa, por ello, la empresa debe elevar una propuesta a la entidad de *factoring*, quien se reserva el derecho de admitir los créditos o rechazarlos.

En la modalidad de la cesión en firme y sin recurso, es decir, sin admisión de devoluciones por parte del cesionario, representa la eliminación de saldos deudores al traspasar las facturas y los documentos de presentación al cobro al factor, percibiendo la empresa vendedora el importe de los créditos cedidos de inmediato, descontados los gastos de gestión, intereses y la cobertura por impagados.

El coste del *factoring* deberá compararse con el descuento bancario, y al que habrá que añadir el coste estimado de pérdidas por morosos irrecuperables, el coste de la clasificación de clientes y los costes de seguimiento y recuperación de impagados y morosos. Tendremos como costes:

- Comisiones de administración: están entre el 0,5% y el 1% del nominal cedido.
- Intereses: Se utiliza el tipo de interés del mercado para las operaciones a corto plazo, habitualmente trabajan con el interés interbancario más 1% o 1,5%.

Ejemplo 57: Una empresa de factoring adquiere una cartera de deudores por un total de 100 millones de u.m., venciendo las facturas dentro de 60 días. Las comisiones de administración son del 1,7% y el tanto de interés de descuento es del 5%; la cantidad que el factor deberá entregar al cedente es de

$$C = 100.000.000 \cdot \left(1 - 0,05 \cdot \frac{60}{360} \right) - 1.700.000 = 97.467.000 \text{ u.m.}$$

El coste de la financiación ha sido, $100.000.000 = 97.467.000 \cdot (1 + I_f)^{\frac{60}{360}} \longrightarrow I_f = 16,642\%$.

4.5 Factoring de proveedores (Confirming).

Es un acuerdo entre una entidad financiera y una empresa a través del cual la entidad financiera se compromete a gestionar los pagos que la empresa tiene que realizar a sus proveedores. La empresa, una vez a recibido y confirmado la factura de un proveedor, comunica a la entidad financiera la conformidad de la factura y la fecha que deberá pagarse. Cuando la entidad financiera recibe la confirmación envía al proveedor un comunicado donde le informa que sus facturas han sido confirmadas y la fecha que se realizará el pago. Además, el proveedor recibirá una oferta de la entidad financiera de cobro anticipado, aplicándole un tanto de interés de descuento que acostumbra a ser el Euribor más un diferencial. La entidad financiera cobrará a la empresa una comisión por el servicio.

Las ventajas del *confirming* son:

- ✳ Para la empresa: reduce los gastos de gestión, puede conseguir financiación para hacer efectivo el pago de las deudas y permite rentabilizar mejor los excedentes de tesorería.
- ✳ Para el proveedor: tiene conocimiento del estado de sus facturar a cobrar a la empresa y puede conseguir financiación mediante el cobro anticipado de dichas facturas.

Ejemplo 58: Una empresa de “Confirming” (factoring de proveedores) le “confirma” a una empresa A que la empresa B le pagará una factura de 100 millones de u.m., que vence dentro de 23 días. El factor le ofrece a la empresa A la posibilidad de descontar esa factura, aplicándole un interés del 1,5% y una comisión del 0,5 por mil. Si la empresa A acepta el descuento el factor le anticipará el siguiente capital:

$$E = 100.000.000 \cdot \left[\left(1 - 0,015 \cdot \frac{23}{360} \right) - \frac{0,5}{1000} \right] = 99.854.416,66 \text{ u.m.}$$

El coste de la financiación se obtendrá de la ecuación $99.854.416,66 = 100.000.000 \cdot (1 + I_f)^{\frac{23}{360}}$, de donde $I_f = 2,311\%$.

4.6 Renting.

El *renting* puede definirse como un contrato de alquiler a largo plazo de un bien. Actualmente el sector de automoción y el de equipamiento informático son los que más activamente están entrando en este tipo de operación. Básicamente, constituye un contrato de alquiler por un tiempo determinado de un bien a cambio del pago de unas cuotas de alquiler a lo largo de la vida del contrato, no teniendo como finalidad que el bien pase a ser propiedad de arrendatario.

La diferencia más significativa respecto al Leasing es que el pago de las cuotas de alquiler, además de dar derecho de uso del bien, incorpora el compromiso por parte de la compañía de *renting* de asumir el mantenimiento del mismo, con lo cual, ante un funcionamiento inadecuado del bien, la compañía de *renting*

debe responder con la reparación correspondiente, sin coste para el arrendatario, o entregando un nuevo bien de idénticas características que el averiado y no pudiendo modificar las cuotas de alquiler pactadas. Las cuotas de alquiler acostumbrar a cubrir, también, un seguro a todo riesgo sobre el bien.

5. Introducción a la teoría de la inversión.

El proceso de inversión es una cadena de decisiones que comienza cuando se plantea la voluntad de invertir y termina cuando se ha realizado y salido de la misma. Así, una inversión adecuada será aquella que optimice el nivel de riesgo que el inversor está dispuesto a asumir y el nivel de rentabilidad a obtener con el fin de aportarle la máxima satisfacción.

Aparecen los dos parámetros fundamentales que marcarán la toma de decisión para la elección de una inversión: riesgo y rentabilidad. Para poder entender el papel que juegan dichas variables en la selección de inversiones es necesario conocer el comportamiento del inversor.

Todos los problemas de decisión presentan un elemento común: la delimitación de alternativas y la definición de objetivos. La teoría económica de la elección intenta la resolución del problema de decisión mediante un proceso dividido en dos partes; la primera consiste en especificar el conjunto de operaciones financieras a las que puede acceder el inversor, la segunda se centra en determinar cuál es el criterio de elección.

Invertir a un periodo es plantearse la inversión a un único plazo, de t a $t+1$. En t el inversor dispone de una renta Y_t y en $t+1$ dispone de una renta Y_{t+1} . La elección de una inversión dependerá de la comparación entre el sacrificio que debe realizar en t no consumiendo toda la renta y la satisfacción que en $t+1$ obtendrá consumiendo el dinero que obtendrá de la inversión realizada más la renta cobrada en $t+1$.

El problema a resolver es “determinar la cantidad de dinero que no se debe consumir en t para que se pueda obtener la máxima satisfacción derivada del consumo en $t+1$ ”.

● El conjunto de oportunidades.

En el primer paso es definir el **Conjunto de Oportunidades**, concretamente se trata de determinar la cantidad de dinero procedente de la renta que se destina a invertir (ahorro) entre dos posiciones extremas:

- Destinar en un momento t toda la renta, Y_t al ahorro, siendo el consumo nulo, luego, en el momento $t+1$ se dispondrá para el consumo de la renta Y_{t+1} más el capital conseguido al invertir durante un periodo la cantidad Y_t .
- Destinar al consumo toda la renta Y_t más la renta anticipada del momento $t+1$ mediante un préstamo.

Las dos situaciones posibles se resumen en los dos cuadros siguientes:

<i>Momento</i>	<i>Renta disponible</i>	<i>Consumo</i>	<i>Inversión/ahorro</i>
t	Y_t	0	Y_t
$t+1$	Y_{t+1}	$C^*_{t+1} = Y_t + Y_{t+1} + R_{t+1}$	0

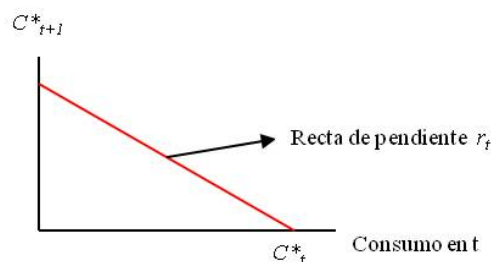
<i>Momento</i>	<i>Renta disponible</i>	<i>Consumo</i>	<i>Inversión/ahorro</i>
t	Y_t	$C^*_t = Y_t + Y_{t+1} - D_{t+1}$ ⁵⁰	0
$t+1$	Y_{t+1}	0	0

La cantidad que podrá consumir el inversor en t estará comprendida en el intervalo $[0, C^*_t]$ y la cantidad que en $t+1$ podrá consumir estará dentro del intervalo $[0, C^*_{t+1}]$. La recta que relaciona el consumo entre dos periodos consecutivos será:

⁵⁰ D_{t+1} es el interés que tiene que pagar por el préstamo solicitado sobre la renta que cobrará en $t+1$. $Y_{t+1} - D_{t+1}$ = Nominal del préstamo a disponer en t .

$$C_{t+1} = Y_{t+1} + (Y_t - C_t) \cdot (1 + r_t)$$

Siendo, C_t la cantidad destinada al consumo en t y r_t el tanto de rentabilidad de la inversión del periodo.



El conjunto de oportunidades, es decir, las posibilidades de inversión estarán directamente relacionadas con la capacidad y voluntad de ahorro al principio del periodo, pero todas las combinaciones de ahorro entre dos periodos consecutivos estarán marcadas por el conjunto de oportunidades, al ser el ahorro la diferencia entre renta y consumo.

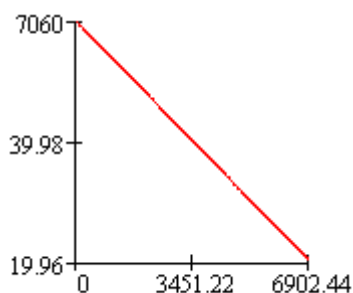
Ejemplo 59: Un sujeto tiene hoy una renta de 3000€ y dentro de 3 meses tendrá asegurada una renta de 4000€. Si el inversor tiene la posibilidad de invertir durante 3 meses en un activo que renta el 2% efectivo trimestral y el banco le concede préstamos al 2.5% efectivo trimestral, la cantidad máxima que hoy podrá destinar al consumo será, $C_t^* = 3000 + 4000 \cdot (1 + 2.5\%)^{-1} = 6902.44\text{€}$

Y la cantidad máxima que podrá consumir dentro de 3 meses será, $C_{t+1}^* = 4000 + 3000 \cdot (1 + 2\%) = 7060\text{€}$

Cualquier cantidad destinada al consumo hoy comprendida entre 0 y 6902.44€ tendrá su correspondiente cantidad disponible dentro de 3 meses comprendida entre 0 y 7060€.

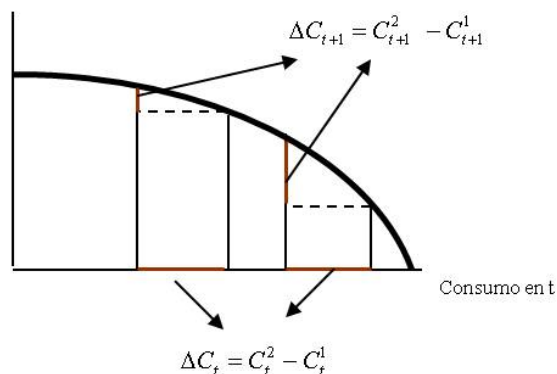
La relación entre los dos consumos será:

$$C_{t+1} = \begin{cases} C_t \cdot (1 + 0,02) + 4000 & 0 \leq C_t \leq 3000 \\ C_t \cdot (1 + 0,02) + 4000 - (C_t - 3000) \cdot (1 + 0,025) & 3000 < C_t \leq 6902,44 \end{cases}$$



Si un inversor con renta en t , Y_t , puede acceder a varias inversiones, $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$, que exijan determinados desembolsos parciales de riqueza, cada una de ellas tendrá asociada una recta de oportunidad de forma que el conjunto de oportunidades de la inversión global estará definido por una curva en la que se determinará la cantidad destinada a consumir en t y su correspondiente riqueza disponible en $t+1$.

Consumo en t+1



Ejemplo 60: Un inversor tiene una renta periódica y puede invertir a un periodo en los siguientes activos:

Activo	Cantidad máxima a invertir	Rentabilidad de la inversión por periodo.
Activo A	1000€	8%
Activo B	2000€	7%
Activo C	5000€	5%

La cantidad máxima a invertir dependerá de la renta. Si la renta periódica es de 500€, elegirá el activo A que es el de mayor rentabilidad. Si la renta es de 2500€ podrá como máximo invertir 1000€ al 8% y 1500 al 7%. Si la renta es de 7000€ podrá invertir como máximo, 1000€ al 8%, 2000 al 7% y el resto al 5%. Si la renta es de 10000€ podrá invertir como máximo, 1000€ al 8%, 2000 al 7%, 5000€ al 5% y el resto destinarlo al consumo. La riqueza máxima disponible al final del periodo para cada nivel de renta será: 1040€, 5185€, 14420€ y 18470€ respectivamente.

Aceptando que el conjunto de oportunidades viene definido por una función continua, el perfil habitual será el de una función cóncava y decreciente, ya que la inversión que primero se elegirá será la que aporte mayor rendimiento con el mismo nivel de riesgo.

● La utilidad del inversor.

El resultado de una inversión con riesgo se tipificará por las siguientes alternativas: ganar, mantenerse o perder. Sea W el resultado de la inversión, $V(W)$ el valor financiero asociado a un resultado y $P(W)$ la probabilidad de que se produzca dicho resultado, una medida de la utilidad proporcionada por la inversión puede ser la **ganancia esperada** por la misma:

$$E(V) = \sum_W V(W) \cdot P(W)$$

Los axiomas sobre los que se soporta la teoría de la elección de una inversión en función de la utilidad son:

■ Axioma 1.

Teniendo que elegir entre dos activos, A y B, el inversor preferirá A a B, B a A o ambos le serán indiferentes

■ Axioma 2.

La elección respeta la transitividad. Dados tres activos, A, B y C, Si A es preferible a B y B es preferible a C entonces A es preferible a C.

■ Axioma 3.

Si dos inversiones tienen la misma utilidad entonces tienen la misma preferencia.

Axioma 4.

Dadas tres inversiones en tres activos distintos (A,B,C), si $V(A) > V(B)$ y $V(B) > V(C)$ entonces existe una inversión compuesta por una cartera de activos A y C que da la misma utilidad que el activo B.

$$\alpha \cdot V(A) + \beta \cdot V(C) = V(B)$$

Ejemplo 61: Supóngase que se dispone de 6000€ a invertir en los siguientes activos: un activo renta el 8%, otro el 5% y otro el 3%. La cartera formada por 2400€ (40%) invertidos al 8% más 3600€ (60%) invertidos al 3%, da la misma rentabilidad que la inversión de 6000€ al 5%.

$$2400 \cdot (1 + 0,08) + 3600 \cdot (1 + 0,03) = 6000 \cdot (1 + 0,05) = 6300$$

Axioma 5.

Si la elección se produce entre dos inversiones y a estas dos se le agrega una tercera independiente de las dos, el criterio de elección no varía.

Ejemplo 60: Un inversor decide invertir 12000€ en una cuenta depósito a un año y 6000€ en acciones y tiene dos acciones donde elegir: A y B. La elección entre A o B será independiente de la cuenta depósito.

El binomio rentabilidad-riesgo.

La función de utilidad depende del consumo en t y del consumo en $t+1$. El consumo en t es un valor determinista, mientras que el consumo en $t+1$ dependerá de la certidumbre o incertidumbre que lleva asociada la inversión elegida, $U(C_t, C_{t+1})$ nos dará la utilidad en función de los dos consumos. Se puede expresar la utilidad como función de la rentabilidad ya que $C_{t+1} = Y_{t+1} + (Y_t - C_t) \cdot (1 + R_t)$, luego podemos expresarla como $U(R_t)$. Si la inversión elegida es aleatoria la utilidad esperada se podrá expresar a través de la rentabilidad esperada y el riesgo, medido por su desviación estándar. Si se expresa mediante una aproximación a través de un polinomio de McLaurin de grado dos, la utilidad tomará la forma de una parábola.

$$U(R_t) \rightarrow U(0) + U'(0) \cdot R_t + U''(0) \cdot \frac{R_t^2}{2}$$

La utilidad esperada se obtendrá calculando la esperanza matemática de esa expresión:

$$\bar{U}(R_t) \rightarrow U(0) + U'(0) \cdot \bar{R}_t + U''(0) \cdot \frac{\overline{R_t^2}}{2} = U(0) + U'(0) \cdot \bar{R}_t + \frac{U''(0) \cdot (\sigma_{R_t}^2 + \bar{R}_t^2)}{2}$$

Así, la utilidad se podrá expresar como una función de la rentabilidad y de su volatilidad, o riesgo, $U(R_t, \sigma_{R_t})$.

El comportamiento del inversor.

Todo inversor tiene un conjunto de oportunidades de inversión y su función de preferencias, definida a través de una función de utilidad. La elección de una inversión dependerá de su perfil.

El perfil de inversor se determinará sobre la base de las siguientes reglas:

 **No saturación.** La elección de una inversión debe ser consistente con la concepción de que “prefiere ganar a perder”. Es decir, es preferible mayor que menor riqueza, a mayor cantidad invertida mayor riqueza futura, luego la función de utilidad deberá ser creciente.

 **Aversión al riesgo.** La utilidad dependerá del nivel de riesgo que esté dispuesto a asumir el inversor. Se entenderá la aversión al riesgo al posible rechazo de una inversión asociado a la incertidumbre sobre la riqueza futura esperada. Se distinguirán tres tipos de inversores:

- ☀ **Inversores con aversión al riesgo.** Cuanto mayor sea el riesgo menor será el capital a invertir. Para que un inversor destine más dinero a esa inversión exigirá mayor rentabilidad, exigirá una prima de riesgo; además llegará a un nivel en que no estará dispuesto a invertir más dinero aunque le aporte mayor rentabilidad. La aversión al riesgo implica que a niveles pequeños de riqueza, un sacrificio en el ahorro exigirá mayores rentabilidades, mientras que a niveles altos de riqueza la exigencia relativa de rentabilidades es menor.
- ☀ **Inversores con indiferencia al riesgo.** La elección de una inversión se realizará al margen del nivel de riesgo. La rentabilidad no determinará la cantidad a invertir.
- ☀ **Inversores con aceptación del riesgo.** Se invertirá mayor capital cuanto mayor sea el riesgo de la inversión, porque considera que llevará asociada una rentabilidad mayor.
- ☀ **Cambio de preferencia en función del riesgo.** Si el inversor, ante un incremento de riqueza, realiza mayores inversiones en activos con riesgo, éste experimenta una tendencia decreciente a la aversión al riesgo. Si no modifica su comportamiento su aversión al riesgo se mantiene constante. Si, por el contrario, cambia a activos con menor riesgo, éste experimenta un incremento de la aversión al riesgo.

■ Equilibrio entre la inversión con riesgo y la inversión sin riesgo.

Una alternativa al conjunto de oportunidades es invertir “al mercado”. Supongamos que un inversor quiere invertir dinero en activos con riesgo y tiene la opción de prestar dinero, o pedirlo prestado, al tanto de interés de mercado exento de riesgo, i ; este inversor deberá decidir que cantidad deberá destinar al conjunto de oportunidades y que cantidad colocar al tanto de interés de mercado (o cuanto dinero deberá pedir prestado al tanto de interés de mercado para invertirlo en el conjunto de oportunidades).

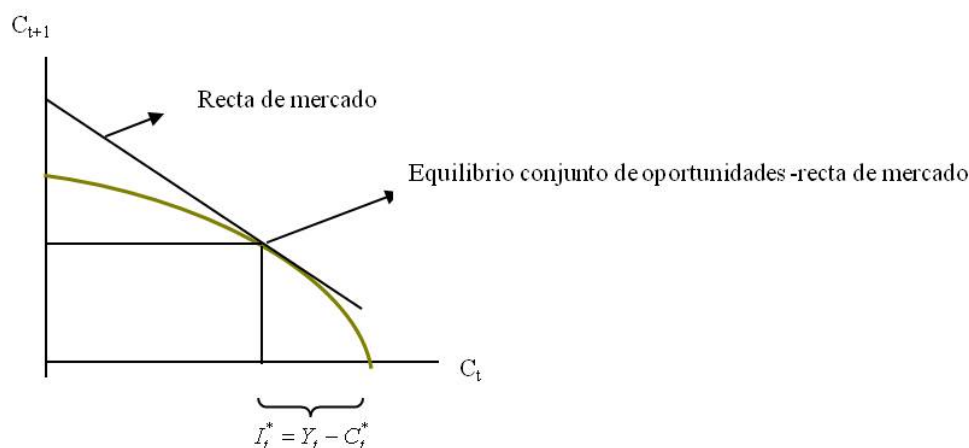
La **recta de mercado** se obtendrá a partir del siguiente razonamiento, supóngase que

$$\begin{cases} \text{en } t \text{ consume } C_t = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+i} \Rightarrow \text{en } t+1 \text{ no dispone de nada, } C_{t+1} = 0. \\ \text{en } t \text{ no consume nada, lo presta al tanto } i, C_t = 0 \Rightarrow \text{en } t+1 \text{ dispone de } C_{t+1} = Y_t \cdot (1+i) + Y_{t+1} \end{cases}$$

La recta de mercado será la recta que pase por los dos puntos: $(0, Y_t(1+i) + Y_{t+1})$ y $\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+i}, 0\right)$.

Esa recta es $C_{t+1} = Y_t(1+i) + Y_{t+1} - C_t(1+i)$, siendo la pendiente de la recta $-(1+i)$.

El equilibrio entre invertir en activos con riesgo o sin riesgo vendrá dado por el punto de tangencia entre el conjunto de oportunidades y la recta de mercado. Para consumos superiores al punto de tangencia, C_t^* , la renta no consumida $I_t = Y_t - C_t < I_t^*$, lo que le obligará a pedir prestado al tanto de interés del mercado, i , la diferencia $I_t^* - I_t$. Para consumos inferiores a C_t^* , el inversor invertirá $I_t^* = Y_t - C_t^*$ en el conjunto de oportunidades y el resto del dinero la colocará en el mercado de capitales prestándolo al tanto i .



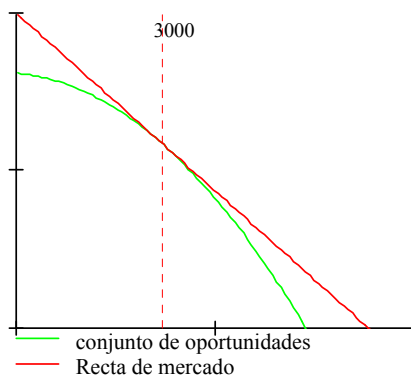
Punto que marca la frontera entre invertir en inversiones del conjunto de oportunidades o invertir al tanto de interés de mercado.

Ejemplo 62: Un inversor que tiene una renta periódica de 8000 u.m. sabe que la disponibilidad para consumir en $t+1$ depende del consumo que haga en t . El conjunto de oportunidades de ese inversor determina la siguiente relación, $C_{t+1} = -0,00032 \cdot C_t^2 + 0,86 \cdot C_t + 13600$.

El tanto de interés de mercado es el 6%.

La recta de mercado para este inversor será, $C_{t+1} = 8000(1 + 0,06) + 8000 - (1 + 0,06) \cdot C_t$

El dinero que puede destinar al consumo en el punto de equilibrio entre el conjunto de oportunidades y la recta de mercado es aquel que iguale ambas expresiones, luego $C_t^* = 3000$ u.m.; lo que le deja 5000 u.m. para invertir. La cantidad de dinero que obtendrá al inicio del periodo siguiente para consumir será de 21300 u.m. La gráfica de las dos curvas es:



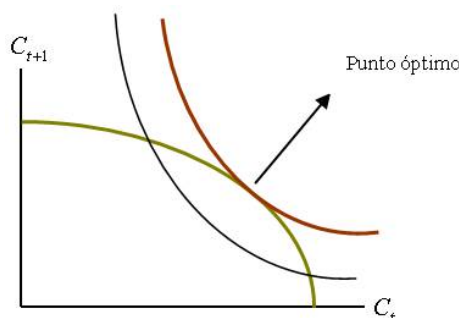
$C_t^* = 3000 \Rightarrow I_t^* = 8000 - 3000 = 5000$ (Cantidad a invertir en activos con riesgo). Si decidiera consumir 2000 u.m. tendría 6000 u.m. para invertir, 5000 u.m. las invertiría a riesgo y 1000 u.m. las invertiría al tanto de mercado al 6%. Por el contrario, si decidiera consumir 4000 u.m. sólo podría invertir 4000 u.m. y lo tendría que hacer prestándolas al 6% de interés de mercado.

■ Decisión óptima del inversor sin tener acceso al mercado de capitales.

La teoría de la elección explica la elección de una inversión del “conjunto de oportunidades” pero condicionada al nivel de satisfacción del inversor.

Las curvas de utilidad comparan las preferencias, o grado de satisfacción, que produce la renta destinada al consumo entre dos periodos consecutivos. A lo largo de una curva de indiferencia cualquier par de rentas

destinadas al consumo, (C_t, C_{t+1}) , proporcionan la misma satisfacción. Sin embargo, el inversor intentará colocarse en aquella curva que tenga asociado un nivel de satisfacción lo más alto posible (la más alejada del origen)

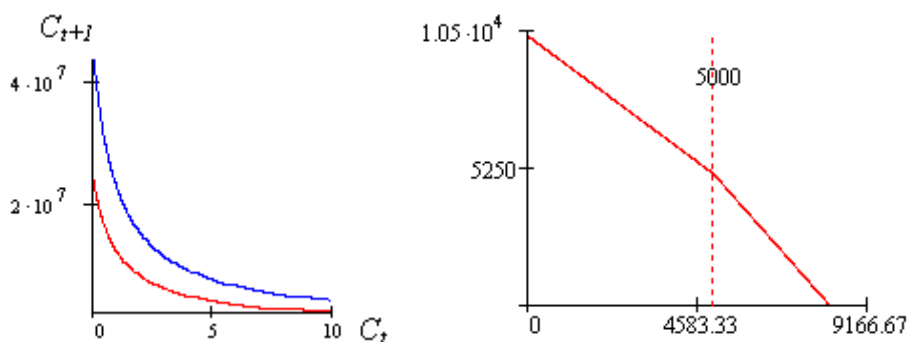


Las curvas de indiferencia (curvas de utilidad) y el conjunto de oportunidades son los instrumentos fundamentales para la solución del problema de elección. Para el inversor el punto óptimo de consumo en t será aquel en el que el conjunto de oportunidades sea tangente a la curva de indiferencia más alejada del origen. El punto óptimo se encuentra resolviendo el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } U(C_t, C_{t+1}) \\ &\text{restringida } C_{t+1} = f(C_t) \end{aligned}$$

Ejemplo 63: Un inversor tiene una renta periódica de 5000€, pedir dinero prestado le cuesta el 20% por periodo y puede invertir dinero al 10% por periodo. Su función de utilidad es $U = C_t + C_{t+1} + C_{t+1} \cdot C_t$

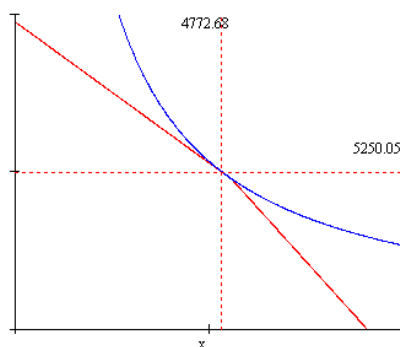
Las curvas de indiferencia del inversor para distintos valores de U y el conjunto de oportunidades de inversión son:



Lo que representa consumir en t como máximo $5000 + 5000 \cdot (1 + 0.2)^{-1} = 9166,66\text{€}$ o disponer en $t+1$ la cantidad $5000 \cdot (1 + 0.1) + 5000 = 10500\text{€}$. La poligonal que determina el conjunto de oportunidades es:

$$C_{t+1} = \begin{cases} (5000 - C_t) \cdot 1.1 + 5000 & 0 < C_t < 5000 \\ 5000 - (C_t - 5000) \cdot 1.2 & 5000 \leq C_t < 9166,66 \end{cases}$$

El punto de equilibrio entre el conjunto de oportunidades del inversor y las curvas de indiferencia de la función de utilidad del inversor será:



El punto de equilibrio que proporciona el grado de satisfacción óptimo se encuentra resolviendo el problema de optimización siguiente:

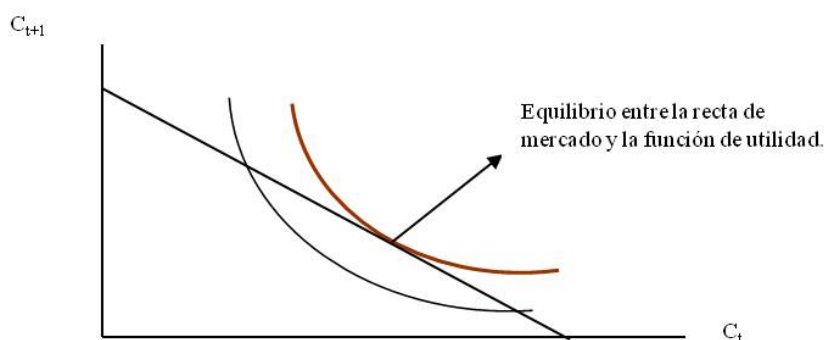
$$\text{Maximizar } U = C_t + C_{t+1} + C_{t+1} \cdot C_t$$

$$\text{Restringida a } C_{t+1} = \begin{cases} (5000 - C_t) \cdot 1.1 + 5000 & 0 < C_t < 5000 \\ 5000 - (C_t - 5000) \cdot 1.2 & 5000 \leq C_t < 9166,6\hat{6} \end{cases}$$

La solución que da la máxima satisfacción del inversor y está dentro del conjunto de oportunidades es: consumir hoy 4772,68 u.m. para tener al final del periodo una riqueza disponible para el consumo que asciende a 5250,07 u.m.

■ Decisión óptima del inversor cuando invierte sin riesgo.

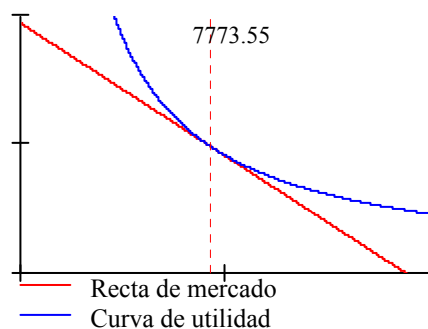
El equilibrio entre la utilidad y el mercado se produce cuando el inversor maximiza el grado de satisfacción restringido al precio del dinero sin riesgo en el mercado de capitales, ya que un inversor puede pedir prestado dinero al mercado para destinarlo al consumo y puede prestar dinero al mercado si no lo necesita para maximizar su nivel de satisfacción. El punto de óptimo se produce cuando existe un nivel de consumo en el que una curva de preferencia de la función de utilidad es tangente a la recta de mercado.



Ejemplo 64: La recta de mercado para este inversor es $C_{t+1} = 8000(1 + 0,06) + 8000 - (1 + 0,06) \cdot C_t$

Este inversor tiene la siguiente función de utilidad $U(C_t, C_{t+1}) = C_t + C_{t+1} + C_t \cdot C_{t+1}$.

El nivel de consumo en t que le maximiza la utilidad es aquel en que la recta de mercado y la curva de utilidad son tangentes. Esto se produce para $C_t^{**} = 7773,55$, lo que supone que si quiere obtener el máximo de satisfacción, sólo podrá invertir 227,45 u.m. de su renta actual; como están dentro de las 5000 u.m. las invertirá en activos con riesgo.



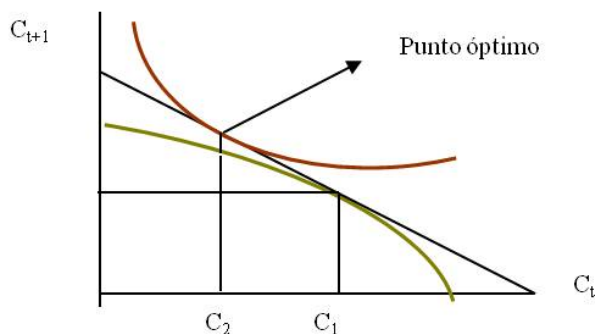
■ Decisión óptima del inversor cuando se puede invertir en activos con riesgo y se tiene acceso al mercado de capitales.

El inversor conoce:

- Su nivel de renta periódica, o riqueza.
- El tanto de interés exento de riesgo del mercado de capitales para prestar y endeudarse.
- Su función de utilidad en función del consumo: grado de satisfacción mediante el consumo.
- Las alternativas de inversión en activos financieros con riesgo.

Debe determinar:

- Cantidad a consumir para obtener el mayor grado de satisfacción.
- Cantidad a invertir en activos con riesgo, que le asegure una rentabilidad no inferior al tanto de interés de mercado.
- Si deberá endeudarse en el mercado de capitales para poder obtener los dos óptimos.



Según la gráfica precedente el inversor sólo podrá consumir C_2 para obtener la máxima satisfacción, luego invertirá $Y_t - C_1$ en una inversión del conjunto de oportunidades (que recoge las oportunidades de inversión más rentables) y, además, invertirá en el mercado de capitales $(C_1 - C_2)$, que es el excedente que no consume pero tiene disponible todavía.

Ejemplo 65: Un inversor que tiene una renta periódica de 8000 u.m. sabe que la disponibilidad para consumir en $t+1$ depende del consumo que haga en t . El conjunto de oportunidades de ese inversor determina la siguiente relación $C_{t+1} = -0,00032 \cdot C_t^2 + 0,86 \cdot C_t + 13600$. El tanto de interés de mercado es el 6%.

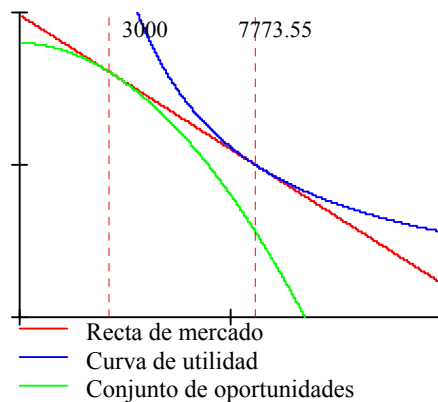
La recta de mercado para este inversor será:

$$C_{t+1} = 8000(1 + 0,06) + 8000 - (1 + 0,06) \cdot C_t$$

El punto de equilibrio entre el conjunto de oportunidades y la recta de mercado es $C_t = 3000$ u.m.; lo que le deja 5000 u.m. para invertir.

Este inversor tiene la siguiente función de utilidad: $U(C_t, C_{t+1}) = C_t + C_{t+1} + C_t \cdot C_{t+1}$.

El nivel de consumo en t que le maximiza la utilidad es aquel en que la recta de mercado y la curva de utilidad son tangentes. Ese punto es $C_t^{**} = 7773,55$ u.m.; esto quiere decir que el inversor deberá consumir 7773,55 u.m. hoy, la diferencia, 226,45 u.m., la invertirá en el mercado prestándola al 6% de interés. La cantidad que tendrá en $t+1$ para consumir será de 8240,04 u.m. Al mismo resultado se llegaría si ese inversor hubiera decidido invertir 5000 u.m. en activos financieros con riesgo, lo que supone disponer de 12773,55 u.m., como sólo tiene una renta de 8000 u.m. la diferencia, 4773,55, la tendrá que pedir prestada al 6%. La cantidad de dinero que ese inversor tendrá en el periodo siguiente para consumir será: $8000 + 13300 - 5059,96 = 8240,04$ u.m.



6. Instituciones de inversión colectiva.

6.1 Concepto y tipos de fondos.

Las instituciones de Inversión Colectiva son entidades cuyo objetivo es la captación de dinero a través de la emisión de participaciones y de acciones, su inversión en activos y la administración de las correspondientes carteras de inversión⁵¹.

Existen dos tipos de instituciones de inversión colectiva: Las que invierten en activos financieros y las que invierten en activos no financieros.

Son Instituciones de Inversión colectiva⁵²:

- ✳ Fondos de Inversión Mobiliaria (F.I.M.): renta fija, renta variable.
- ✳ Fondos de Inversión en Activos del Mercado Monetario (F.I.A.M.M.): activos de renta fija a corto plazo (letras, pagarés, etc.)
- ✳ Fondos de Inversión Inmobiliarios (F.I.I.). Son Fondos de reciente creación y la inversión del Patrimonio se realiza en bienes inmuebles.
- ✳ F.I.M. garantizados: Son FIM que garantizan una rentabilidad fijada con la creación del Fondo y durante un plazo fijado. La existencia de Fondos Garantizados puede aportar cierta tranquilidad al inversor ya que durante el plazo de garantía el riesgo queda prácticamente eliminado.
- ✳ Sociedades de Inversión Mobiliaria (S.I.M): renta fija, renta variable y mixta. Actúan jurídicamente como una S.A., y el Patrimonio está representado por acciones.
- ✳ Fontesoros. Son F.I.M de los que su Patrimonio se invierte en Deuda Pública del Estado.

Además de la clasificación anterior, aparecen:

- ✳ Fondos FIM Mixtos: Una parte de la inversión es renta fija y otra parte es renta variable.
- ✳ Fondos paraguas: Es una familia de fondos, cada uno especializado en un mercado y/o tipo de activo y el inversor decide libremente el paso de su inversión de un fondo a otro sin tener que pagar impuestos por las plusvalías.
- ✳ Fondos de Fondos: La inversión se realiza en participaciones de otros fondos.
- ✳ Fondos Garantizados: Estos fondos aseguran una rentabilidad mínima durante un plazo de tiempo fijado en el Reglamento del mismo. Es habitual que durante el periodo de garantía el inversor no pueda salir del fondo si quiere tener esa rentabilidad mínima.
- ✳ ETFs: Fondos que cotizan en bolsa. Sus carteras intentan replicar un índice bursátil.

6.2 Fondos de inversión mobiliaria.

Un Fondo de Inversión Mobiliaria es un patrimonio constituido por las aportaciones realizadas por diversos inversores, PARTÍCIPEs, administrado por una SOCIEDAD GESTORA, y una DEPOSITARIA, que custodia los valores.

⁵¹ Toda la reglamentación que regula los fondos de inversión se encuentra en:
<http://www.cnmv.es/Portal/legislacion/legislacion/tematico.aspx?id=10>

⁵² Se puede buscar información sobre un determinado fondo registrado en España en :
http://www.cnmv.es/buscadordefondos/bf_busqueda.aspx

La constitución del fondo se realiza mediante escritura pública, otorgada por la Sociedad Gestora y el Depositario; dicha escritura deberá contener: denominación del fondo, el objeto, el Patrimonio inicial, el nombre y domicilio de la Sociedad Gestora y del Depositario y el Reglamento de Gestión del Fondo.



✿ El Partícipe.

El Fondo es un patrimonio sin personalidad jurídica, en el que los partícipes son sus propietarios y cuyos derechos de propiedad están representados por certificados nominativos sin valor nominal, *participaciones*.

El conjunto de partícipes es el propietario del Patrimonio del Fondo, aporta el dinero al mismo mediante la suscripción de partes alicuotas del Patrimonio, o participaciones.

Las participaciones son títulos valor que no tienen valor facial y no existe un número fijo de participaciones (dependerá de la demanda o la oferta que de las mismas se haga)

El valor de la participación será el resultado de dividir el Patrimonio del Fondo, valorado de acuerdo a las normas especificadas por el Organismo Regulador, por el total de participaciones en circulación. A efectos de fijar el precio de la participación, el Patrimonio del Fondo podrá valorarse a los cambios de mercado, o equivalente, correspondientes al mismo día o al siguiente, según indique el Reglamento (nunca a precios de mercado del día anterior).

El partícipe tiene libertad para entrar y salir del fondo cuando lo desee y siempre que lo comunique dentro de los plazos estipulados en el Reglamento de Gestión, estipulándose en el mismo las comisiones por suscripción y por reembolso de participaciones.

✿ La Sociedad Gestora.

La representación del fondo lo tiene la Sociedad Gestora, quien realmente realiza las inversiones del Patrimonio en el Mercado de Capitales.

Como el Fondo no tiene personalidad jurídica, éste debe vincularse a una Sociedad Gestora, que tiene capacidad jurídica para contratar, la cual se responsabilizará de las compras y ventas de activos en el mercado financiero con el fin de obtener una rentabilidad y la liquidez necesaria para hacer frente al reembolso de participaciones. La Sociedad gestora está obligada a enviar a todos los partícipes un informe periódico con la composición de la Cartera de Inversión y el valor de la misma a precios de mercado. Como remuneración a sus funciones, la Gestora cobrará una comisión de gestión, el importe de la misma dependerá del tipo de fondo. Las comisiones están tabuladas en por el Organismo Público competente.

✿ El Depositario.

Normalmente, el Depositario es una Entidad de Crédito o Sociedad de Valores con capacidad para operar en el Mercado Financiero. Las funciones del Depositario consisten en la custodia de los valores mobiliarios en que se ha invertido el Patrimonio del Fondo, cursar las órdenes de compra y de venta en el Mercado de Valores que le indica la Sociedad Gestora y mantener el contacto directo con los partícipes, tanto para la suscripción como para el reembolso de participaciones. Estos servicios se remuneran mediante el cobro de unas comisiones, cuyo importe dependerá del tipo de Fondo.

✿ El Reglamento de Gestión del Fondo.

Conjunto de normas que ajustadas a la legislación vigente regirán en cada momento el funcionamiento del Fondo:

- Denominación del Fondo.
- Nombre y domicilio de la Sociedad Gestora y del Depositario.
- Requisitos de sustitución de Gestora y Depositario.
- Plazo de duración del Fondo.
- Criterios sobre inversiones y las normas para la selección de valores que hayan de integrar el Fondo.
- Patrimonio inicial del fondo y valor inicial de las participaciones.
- Procedimiento para la suscripción y reembolso de las participaciones.
- Características de los certificados de participación.
- Remuneración de la Sociedad Gestora y el Depositario.
- Comisiones por suscripción y reembolso de participaciones.
- Otras cláusulas de funcionamiento del Fondo.

6.3 Parámetros para comparar fondos de inversión.

La Sociedad Gestora del Fondo puede gestionar varios fondos simultáneamente. En el mercado de Fondos de Inversión no existe un índice de mercado de referencia, por ello, el mercado determina un conjunto de parámetros que permiten realizar comparaciones entre Fondos⁵³.

✿ *Parámetros indicativos de la dimensión de los Fondos vinculados a una Gestora:*

$$\text{Patrimonio medio} = \frac{\sum \text{Patrimonios}}{\text{número de Fondos}}$$

$$\text{Valor medio de la participación} = \frac{\sum \text{Patrimonios}}{\sum \text{participaciones}}$$

$$\text{Número medio de participaciones} = \frac{\sum \text{participaciones}}{\text{número de Fondos}}$$

✿ *Parámetros de rentabilidad y volatilidad de un Fondo.*

✿ Rentabilidad Anualizada de un Fondo de Inversión Mobiliaria.

La definiremos como la rentabilidad que se obtendría al final del año extrapolando la obtenida en un periodo de tiempo más corto y considerando que se mantenga constante la rentabilidad de dicho periodo durante el resto del año.

⁵³ Esta dirección contiene una base de información sobre Fondos muy extensa:
<http://www.morningstar.es/es/fundquickrank/default.aspx?lang=es-ES>

$$Rentabilidad\ anualizada_t = \frac{Rentabilidad_t^k \cdot 365}{k} \cdot 100$$

siendo la rentabilidad del periodo,

$$Rentabilidad_t^k = \frac{VL_t - VL_{t-k}}{VL_{t-k}} \text{ con } k \text{ los días de amplitud del periodo de observación}$$

☀ Tasa interna de rentabilidad, TIR. Es el tanto anual que hace que el valor actualizado neto de la cartera sea nulo.

☀ Volatilidad del Fondo, medida mediante:

$$Desviación : d_j = R_j - \bar{R}$$

$$Varianza : \sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (R_j - \bar{R})^2}{n} \cdot 100$$

$$Volatilidad\ anualizada : \sigma_{anualizada} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{365}{k}} \cdot 100$$

6.4 Valoración de los activos de la cartera de inversión. Criterios contables.

La Sociedad Gestora calculará diariamente el valor de cada uno de los títulos y activos financieros que integran la cartera del fondo de acuerdo a las normas emanadas del Órgano Público que controla estas instituciones.

El criterio general es precio de mercado del día, o día siguiente y tomando el precio del mercado más activo.

En concreto:

- 📌 Las acciones que cotizan en un mercado organizado por su precio de mercado.
- 📌 Las acciones que no cotizan: se aplicará el criterio de máxima prudencia y el de uniformidad y se tomará como precio el Valor Teórico.
- 📌 Los bonos que cotizan en el mercado secundario, si tienen un vencimiento superior a 6 meses por el precio de mercado. Si cotizan a precios “ex-cupón”, es decir, el precio es un porcentaje del nominal sin tener en cuenta el cupón, se debe sumar el importe del cupón corrido.

El cupón corrido es la parte proporcional de cupón que se ha devengado hasta la fecha y que no se ha cobrado porque todavía no ha vencido, es decir,

$$Cupón\ corrido = \frac{Cupón \cdot n}{m}$$

siendo n los días transcurridos desde el último pago de cupón hasta la fecha de valoración y m los días del periodo de devengo del cupón, con $0 < n < m$.

Ejemplo 66: Un Bono de nominal 1.000 u.m., que paga cupón anual de 50 u.m. y que se amortizará dentro de 3 años y 9 meses, cotiza hoy al 102% “ex cupón”.

Si consideramos que el trimestre ya vencido tiene 91 días, el precio del bono hoy será:

$$Precio\ del\ Bono = 1.000 \cdot 102\% + 50 \cdot \frac{91}{365} = 1.032,46 \text{ u.m.}$$

- Para los bonos que no coticen, se determinará el precio valorando al momento presente los cobros netos futuros del bono al tanto de interés de rentabilidad de la Deuda Pública asimilable por sus características financieras a dichos bonos.

Ejemplo 67: Un Bono de nominal 6.000 euros y cupón semestral del 4,5% nominal, pagará el próximo cupón el 31-3-A y se amortizará el 30-9-A+9. Dicho bono no cotiza en el mercado de renta fija y el tanto de interés de mercado de la Deuda Pública que se amortiza en septiembre del año A+9 es del 4,763%. El precio del Bono el día 15-2-A será:

$$\text{Precio del bono} = \left(\frac{135 \cdot a_{\overline{18}|0,023538} + 6.000 \cdot (1 + 0,023538)^{-18}}{(1 + 0,04763)^{\frac{138}{365}}} \right) = 6.014,35 \text{ euros.}$$

Siendo 0,023538 el tanto efectivo semestral equivalente al interés efectivo anual de la Deuda Pública.

- Los activos de renta fija con vencimiento inferior a seis meses, por su precio de adquisición más intereses devengados, calculados de acuerdo con la tasa de rentabilidad media asociada al precio de adquisición.

Ejemplo 68: Una Letra del Tesoro se adquirió el 1-1-A por 982 euros y se amortizará el 1-6-A por 1.000 euros, lo que da una rentabilidad interna media del 0,0437005, el valor hoy, 15-2-A, será:

$$982 \cdot \left(1 + 0,0437005 \cdot \frac{45}{360} \right) = 897,36 \text{ euros.}$$

- Para las operaciones en moneda extranjera, internamente se contabilizarán en unidades monetarias de cada divisa, vertiéndose al Balance su contravalor en euros, aplicando el cambio medio oficial del mercado de divisas (*fixing*) de la fecha de valoración⁵⁴.
- Las operaciones en futuros financieros, opciones financieras y *warrants* deberán reflejar diariamente en la cuenta de resultados la posición tomada y mantener, bajo la rúbrica “Cuentas de riesgo y compromiso” el importe nominal comprometido. Para este tipo de activos deberá separarse la cartera de cobertura de la cartera de inversión.
- Los cupones se periodificarán diariamente de acuerdo a la TIR.

Ejemplo 69: Hoy, 5-4-A, un fondo de inversión tiene 1500000 participaciones. El patrimonio del fondo está invertido en los siguientes activos financieros:

- ☀ 10000 Letras del Tesoro de 1000 u.m. cada una que vencen dentro de 96 días. Se sabe que hace 84 días cotizaban al 98,32%.
- ☀ 10000 Bonos del Tesoro de nominal 1000 u.m. que pagan un cupón anual del 3% y se amortizarán dentro de 6 años, dos meses y 20 días. Hoy cotizan al 97,5%.
- ☀ 30000 Acciones de la sociedad Tecno que cotizan a 3,5 u.m./acción.
- ☀ 100000 Acciones de la sociedad Mir que cotizan a 2 u.m./acción.

La sociedad gestora cobra unas comisiones del 1,5% anual del patrimonio neto y la depositaria del 0,5% anual del patrimonio neto. El patrimonio neto se estima en el 97% del valor de la cartera de inversión. El tanto de interés de mercado exento de riesgo para plazos de 90 días es el 4% nominal.

⁵⁴ La información sobre el tipo de cambio oficial se puede encontrar en la dirección http://app.bde.es/atn_www/jsp/webSearch.jsp?idioma=es&tipo=avanzado&acceso=bde&T5=Relevance&origen=busqueda_sugeridas&T1=divisas.

Para conocer el valor liquidativo de la participación hoy es necesario conocer el Valor de la cartera y el Patrimonio neto.

Para la valoración de los activos de renta fija se ha tenido en cuenta el vencimiento del mismo, en aquellos que vencen antes de seis meses se les ha aplicado la capitalización del precio “histórico” a la tir asociada a ese precio “histórico”; es el caso de las Letras del Tesoro. En cuanto a los Bonos del Tesoro, hay que tener en cuenta que cotizan “ex cupón”.

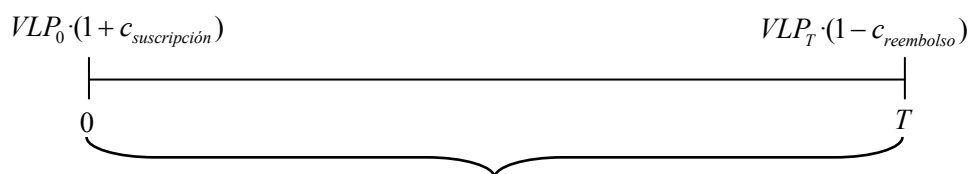
El Patrimonio Neto del Fondo se obtiene del Balance Contable, es decir, Activo-Pasivo exigible. Para determinar el valor de la participación se debe deducir el importe de las comisiones, calculadas para los días que van desde el 1-1-A hasta la fecha de valoración.

La siguiente tabla recoge el precio de cada activo y el valor total de la cartera.

Activos	nº de Activos	Precio unitario	Precio total
Letras del Tesoro	10000	989	9894400
Bonos del Tesoro	10000	998,42	9984200
Sociedad Tecno	30000	3,5	105000
Sociedad Mir	100000	2	200000
Valor de la cartera	20183600		
Patrimonio Neto	19578092		
Comisión gestora	84459,89		
Comisión depositaria	28160,15		
Total comisiones	112620,04		
Valor liquidativo	12,98		

6.5 Rentabilidad del partícipe en un fondo de inversión.

Un inversor que coloca dinero en un fondo de inversión deberá desembolsar por la suscripción de las participaciones el valor liquidativo del día y las comisiones de suscripción (normalmente un porcentaje sobre el valor liquidativo). En el momento que sale del fondo, reembolsando las participaciones, recibirá el valor liquidativo de ese día menos las comisiones por reembolso.



Sean:

I_1 = tanto de rentabilidad media anual

VLP_0 = valor liquidativo en el momento de entrar al fondo.

VLP_T = valor liquidativo en el momento de salir del fondo.

$c_{\text{suscripción}}$ = comisión por suscripción.

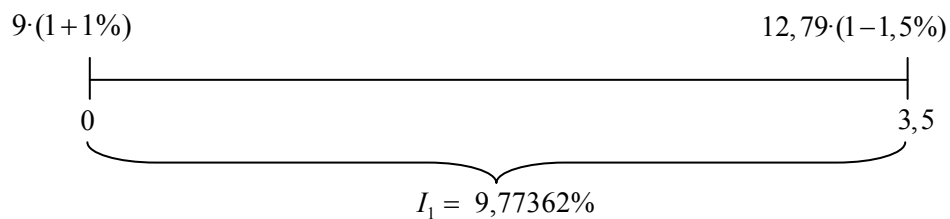
$c_{\text{reembolso}}$ = comisión por reembolso.

La rentabilidad obtenida será el tanto de interés que cumpla que:

$$VLP_0 \cdot (1 + I_1)^T \cdot (1 + c_{\text{suscripción}}) = VLP_T \cdot (1 - c_{\text{reembolso}})$$

Ejemplo 71: Supóngase que hace 3 años y medio un inversor compró 600 participaciones del fondo del ejemplo anterior a 9 u.m./participación. Las comisiones de suscripción son del 1% y las de reembolso del

1,5%. Hoy, el inversor desea salir del fondo; la rentabilidad final que habrá tenido con la inversión será el tanto de interés que haga equivalente el capital invertido con el capital que recupera.



7. Inversión en activos de renta fija.

7.1 Carteras de Activos de Renta Fija.

Una cartera de activos de renta fija está compuesta básicamente por: letras, pagarés, bonos, obligaciones, depósitos bancarios, etc., es decir, por activos cuyo rendimiento va vinculado a un tanto de interés. Dentro de la cartera se pueden encontrar activos a corto plazo (son activos del mercado monetario) y activos a medio y largo plazo (son activos del mercado de renta fija).

Activos del mercado de capitales.

Son activos cuya vida no excede el año y que se colocan al “tirón” o descuento, normalmente mediante oferta pública o subasta. El precio de adquisición es inferior al valor facial (valor nominal) del activo.

Para calcular la rentabilidad de un activo de ese mercado se deberá tener en cuenta: el precio que tiene el activo en el mercado, el criterio de conversión de los días a años, normalmente $ACT/360$ y el régimen financiero de valoración que se utiliza, normalmente es interés simple vencido: $(1 + i \cdot t)$ siendo t el plazo de vida que le queda a ese activo.

Ejemplo 72: Una Letra del Tesoro se adquirió el 1-1-A por 982 u.m. y se amortizará el 1-6-A por 1.000 u.m. y el año es bisiesto. La rentabilidad interna media de ese activo el 1-1-A se obtendrá a partir de la ecuación:

$$982 \left(1 + i \cdot \frac{152}{360} \right) = 1000 \rightarrow RIM = i = 0.04341301$$

Activos del mercado de renta fija.

Se acostumbra a denominar de esta forma a los bonos y obligaciones emitidos a plazos superiores al año. Normalmente, este tipo de activos pagan un cupón periódico hasta que se amortizan. La colocación en el mercado primario puede ser mediante oferta pública, poniendo un precio de emisión, o por subasta, en este caso el precio a pagar por un bono dependerá del resultado de la subasta.

Estos activos cotizan en el mercado secundario de dos formas: “ex cupón” o “con cupón”, en el primer caso la cotización no incorpora el “cupón corrido”, el precio del activo será la cotización más el “cupón corrido”; en el segundo caso el precio es la cotización (ya lleva incorporado el “cupón corrido”).

Ejemplo 73: Un Bono de nominal 1.000 u.m., que paga cupón anual de 50 u.m. y se amortizará dentro de 3 años y 9 meses, cotiza hoy al 102% “ex cupón”. Si consideramos que el trimestre ya vencido tiene 91 días, el precio del bono hoy será:

$$\text{Precio del Bono} = 1.000 \cdot 102\% + 50 \cdot \frac{91}{365} = 1.032,46 \text{ u.m.}$$

La rentabilidad de un activo dependerá del precio que tiene en el mercado, el conjunto de cobros futuros que quedan pendiente por cobrar de ese activo, el criterio de conversión de días a años (normalmente $ACT/365$) y del régimen financiero de valoración, normalmente interés compuesto: $(1 + i \cdot p)^{\frac{T'-T}{p}}$.

Ejemplo 74: Un Bono de nominal 1.000 u.m., que paga cupón anual de 50 u.m. y se amortizará dentro de 3 años y 9 meses, cotiza hoy al 102% “ex cupón”, lo que da un precio de 1.032,46 u.m. La rentabilidad interna media cotizada ese día se obtendrá de la ecuación, suponiendo que el trimestre vencido tiene 91 días.

$$1032,46 = \left(50 \cdot a_{\overline{4}|I_1} + 1000 \cdot (1 + I_1)^{-4} \right) \cdot (1 + I_1)^{\frac{91}{365}} \rightarrow I_1 = 0,044041$$

7.2 Carteras de renta fija y el tanto de interés de mercado.

La inversión en activos de renta fija, obliga a un seguimiento diario de las fluctuaciones de las cotizaciones de estos activos y tomar medidas destinadas a protegerlos.

Para ello, es necesario conocer determinados parámetros financieros: el tanto de interés que el mercado aplica para descontar capitales futuros, la sensibilidad del valor de un activo de renta fija a la variación del tanto de interés de mercado y el plazo de inversión elegido.

7.2.1 El tanto de interés de mercado.

En el mercado financiero podemos encontrarnos con múltiples tipos de interés vinculados a un mismo plazo, ello es consecuencia de la diversidad de activos financieros que hay en el mercado, los cuales se diferencian en aspectos como la credibilidad del emisor, el riesgo de impago, el tratamiento fiscal, etc. Sin embargo, cuando se tienen activos de características idénticas que llevan asociados tipos de interés distintos, éstos se deben exclusivamente al plazo de vencimiento de cada uno de ellos. Esta relación de tipos de interés derivados de un conjunto de activos financieros cuya única característica diferencial es el plazo de vida, se denomina Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI). Las teorías explicativas de la relación entre tipos de interés y plazos, básicamente, son dos: la teoría de las expectativas y la teoría del “*habitat*” preferido.

Ante la incertidumbre del mercado financiero y el carácter volátil de los tipos de interés, un inversor estará expuesto al riesgo cuando en una fecha futura tenga que comprar o vender activos a precios distintos de los actuales. Los inversores se clasifican sobre la base de su nivel de aversión al riesgo, su “*habitat*” preferido (plazo de inversión deseado) y las expectativas sobre la evolución futura de los tipos de interés.

• Teoría de las Expectativas.

En esta teoría los inversores son neutrales al riesgo, por lo que elegirán una inversión en función de la rentabilidad esperada, independientemente del plazo.

• Teoría sobre el “*habitat*” preferido.

Se supone que los inversores son adversos al riesgo y que sólo invertirán en alternativas cuyo plazo al vencimiento coincida con su horizonte de inversión. Dentro de esta teoría se incluyen dos casos particulares:

✶ La preferencia por la liquidez.

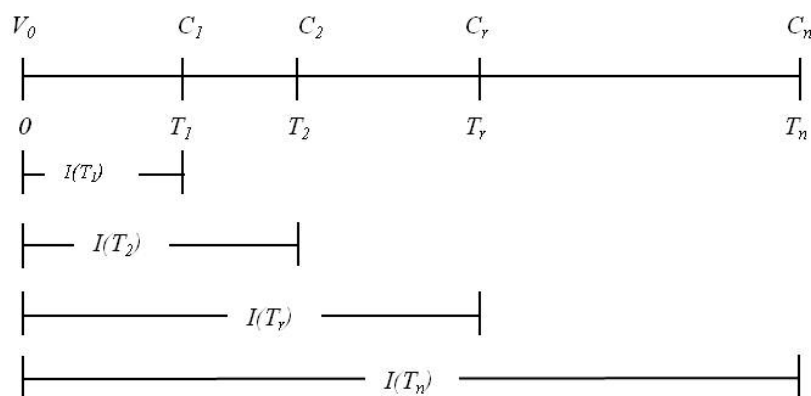
Los inversores prefieren el corto plazo al largo plazo y sólo cambiarán de decisión cuando la rentabilidad lleve asociada una prima adicional de riesgo.

✶ La segmentación del mercado.

Los inversores tienen aversión total al riesgo y solo invertirán al plazo que se adapta a sus expectativas de inversión. Ello supone que el mercado está segmentado en submercados independientes.

Sea $\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$ el conjunto de cobros netos futuros de una inversión, el valor actual será:

$$V_0 = \sum_{r=1}^n C_r \cdot f(T_r, 0), \text{ siendo } f(T_r, 0) \text{ el factor de descuento asociado al plazo } (0, T_r).$$



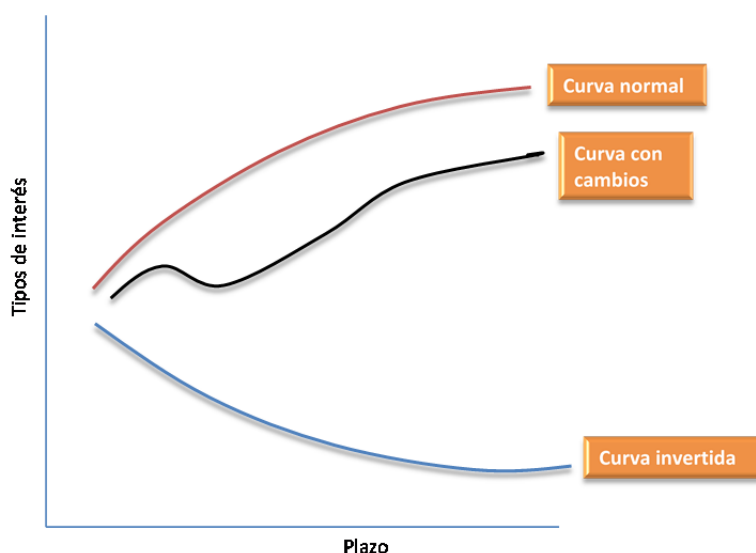
Si el factor financiero es el de interés compuesto, se podrá expresar de la siguiente forma:

$$V_0 = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I(T_r))^{-T_r}$$

Con $I(T_r)$ el tanto de interés efectivo anual que el mercado financiero aplica a capitales que vencen dentro de T_r años. El mercado los denomina tipos de interés “cupón cero”.

El conjunto de tantos $\{I(T_1), I(T_2), \dots, I(T_r), \dots, I(T_n)\}$ recibe el nombre de *Estructura Temporal de los Tipos de Interés* (E.T.T.I.) vigente en el momento presente⁵⁵.

En un ambiente financiero normal los tipos de interés a largo plazo deben ser mayores que los tipos de interés a corto plazo, mientras que en una situación de tasas de inflación negativas los tipos de interés a largo plazo serán menores que los tipos de interés a corto plazo. Si la curva presenta tramos crecientes y tramos decrecientes, entonces nos está indicando un momento de ajuste de los tipos de interés; una vez se ha producido el ajuste, la curva vuelve a tomar su forma normal.



En el caso de la curva con inflexión del gráfico anterior, se puede observar que los tipos de interés a corto plazo son superiores a los tipos de interés a medio plazo; ello hace presuponer que, en un futuro próximo, los tipos de interés a corto plazo deberán bajar.

Dada la incertidumbre que existe sobre la evolución futura de los tipos de interés, los operadores del mercado financiero intentan predecir esos tipos de interés basándose en la información que el mercado al contado les

⁵⁵ También se denominan tanto del contado o *spot*.

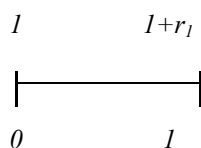
ofrece día a día. Al margen de que se pueda aplicar algún modelo estadístico, econométrico para la estimación de la curva de tipos de interés, se puede realizar un cálculo aproximado de la ETTI a partir de la curva de rendimiento de la Deuda Pública Anotada (D.P.)

Supongamos que el pago de los cupones y la amortización de la D.P. viva hoy se hacen efectivos en las mismas fechas y con periodicidad anual.

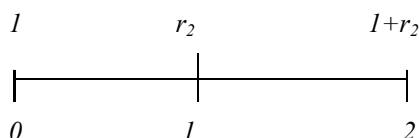
Para cada bono de D.P. que cotiza en el mercado al contado se conoce su rentabilidad media asociada, TIR; así, a cada plazo de amortización se le asociará su TIR correspondiente, teniendo en cuenta que el bono paga cupones anualmente.

Gráficamente se pueden representar los distintos bonos de la siguiente forma:

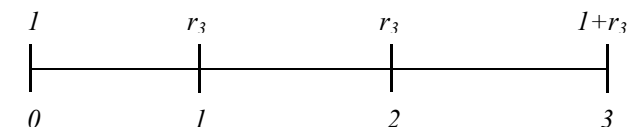
- Bono de D.P. con amortización dentro de 1 año:



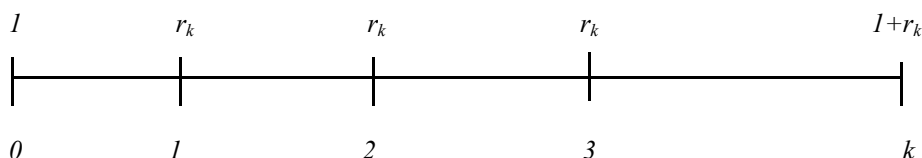
- Bono de D.P. con amortización dentro de 2 años:



- Bono de D.P. con amortización dentro de 3 años:



Así sucesivamente hasta el bono emitido con amortización dentro de k años.



Siendo, r_k el rendimiento interno medio de la D.P. a precios del contado, asociada al bono que se amortiza dentro de k años.

A partir de esta curva de rendimientos de la D.P. se puede aproximar la ETTI aceptando la siguiente hipótesis: cualquier disponibilidad monetaria disponible en un diferimiento k se podrá descontar al tanto de interés $I(T_k)$ obtenido de forma recursiva a partir de $\{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_n\}$.

Se debe verificar que para:

$$k = 1 \rightarrow I(1) = r_1$$

$$k = 2 \rightarrow 1 = r_2 \cdot (1 + I(1))^{-1} + (1 + r_2) \cdot (1 + I(2))^{-2}$$

$$k = 3 \rightarrow 1 = r_3 \cdot (1 + I(1))^{-1} + r_3 \cdot (1 + I(2))^{-2} + (1 + r_3) \cdot (1 + I(3))^{-3}$$

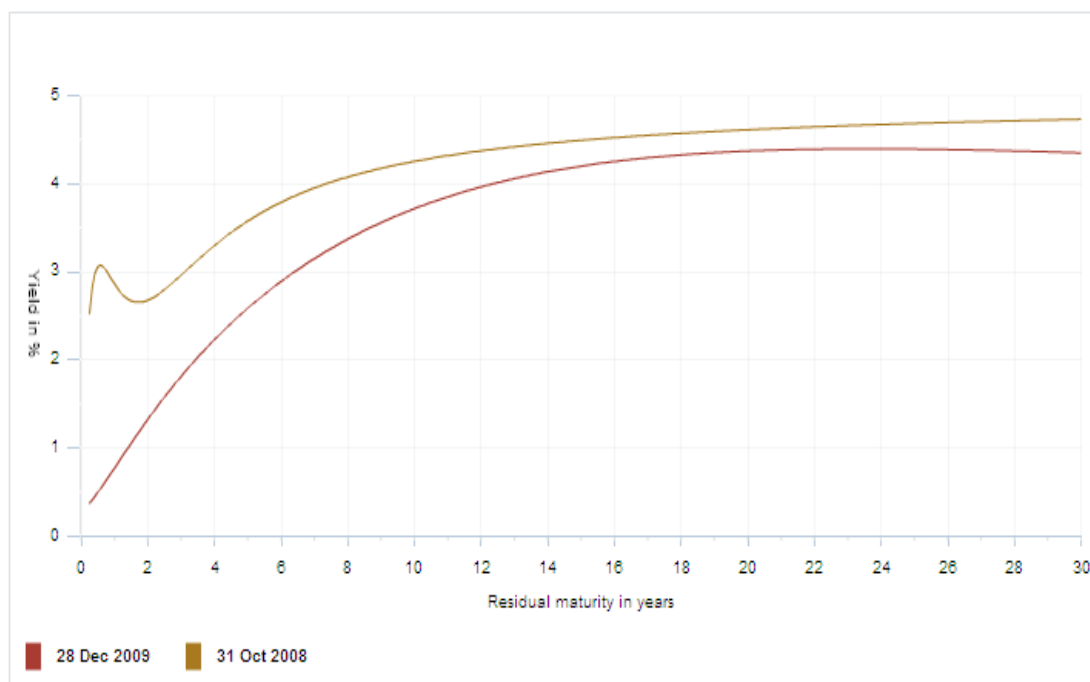
..

$$k = n \rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{n-1} r_n \cdot (1 + I(j))^{-j} + (1 + r_n) \cdot (1 + I(n))^{-n}.$$

Despejando las ecuaciones se obtiene que:

$$\begin{cases} \text{para } k=1 \rightarrow I(1) = r_1 \\ \text{para } k > 1 \rightarrow I(k) = \left(\frac{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_k \cdot [1 + I(j)]^{-j}}{(1 + r_k)} \right)^{-\frac{1}{k}} - 1. \end{cases}$$

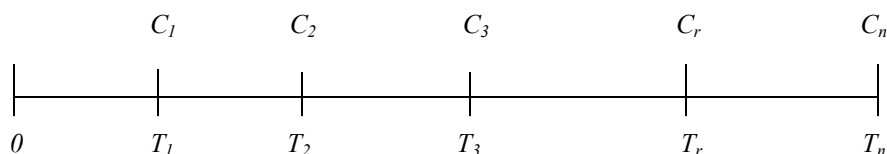
La gráfica siguiente recoge dos curvas de tipos de interés, 31-10-2008 y 28-12-2009. Como puede observarse, en octubre de 2008 la curva no era normal, sino que presentaba alteraciones en el corto plazo.⁵⁶



7.2.2 El tanto de interés de mercado y la rentabilidad de la renta fija.

■ Estudio en el momento de realizar la inversión.

La inversión en renta fija se representará por un conjunto de capitales financieros que recogerá los cobros netos futuros asociados a los activos que la componen.



Siendo 0 el momento presente, momento en que se realiza el análisis de la inversión.

En un modelo simplificado, se considera que el tanto de interés de mercado es constante en el tiempo (curva plana) y que los movimientos del tanto de interés de mercado se producen en paralelo a la curva plana, pero siempre constantes en el tiempo.

Llamaremos **Valor de la Inversión en 0** en el momento presente a $V(0, I'_1) = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I'_1)^{-Tr}$, siendo:

⁵⁶ Gráfica obtenida desde la página web del Banco Central Europeo:

<http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html>.

Existen varios modelos estadísticos en intentan modelizar la ETTI a partir de los precios de cestas de títulos de Deuda Pública.

- $\{(Cr, Tr)\}_{r=1,2,\dots,n}$, el conjunto de ingresos netos que proporcionará dicha inversión.
- I'_1 el tanto de interés de mercado vigente hoy, 0.

Si se toma como tanto de interés de mercado la tasa interna de rentabilidad de la inversión en 0, I_1 , entonces:

$$V(0, I_1) = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I_1)^{-T_r} = P_0$$

Que deberá coincidir con el precio de la inversión en 0 y representaremos con P_0 .

El mercado puede afectar al valor actual como consecuencia de la variación del tanto de interés de mercado.

Supongamos que el tanto de interés de mercado es I'_1 y permanece constante en el tiempo, entonces si $I'_1 \neq I_1$, el valor de la misma será $V(0, I'_1) \neq P_0$.

La incidencia que tiene la fluctuación del tanto de interés de mercado sobre el valor de un activo de renta fija será mayor o menor según sea la estructura de los cobros futuros de dicho activo, es decir, el valor que toman algunos elementos característicos de ese activo.

Para caracterizar a un activo de renta fija como *más atractivo* respecto de otro, se tomará como elemento de

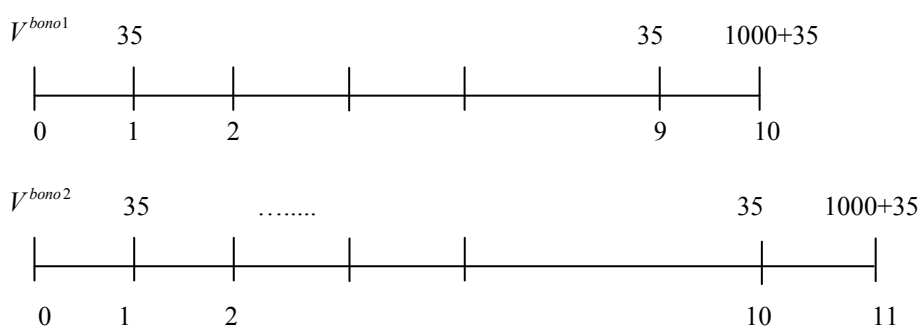
comparación la variación porcentual del valor de dicho activo: $c\% = \frac{\Delta P_0}{P_0} \cdot 100 = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 100$, siendo P_1 el

precio del activo asociado al nuevo tanto de interés de mercado y P_0 el precio que tiene antes del cambio del tanto de interés de mercado.

Si se compara la variación porcentual del valor de un activo de renta fija con la de otro activo de renta fija de características idénticas excepto en una concreta, se podrá establecer un criterio de selección según se prevea el movimiento del tanto de interés de mercado.



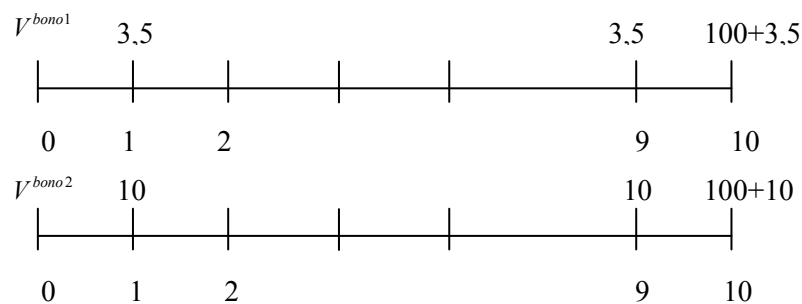
El vencimiento del activo. Se supondrán dos bonos que tienen el mismo nominal, pagan el mismo cupón pero uno tiene un vencimiento más largo que el otro (por ejemplo, un año más de vida).



El cupón es el 3,5% anual sobre un nominal de 1000 u.m. Si el tanto de interés de mercado es el 3,5% el valor de cada uno de los bonos es 1000, indistintamente del tiempo que vivan. Si el tanto de interés de mercado sube medio punto, es decir, se coloca en el 4%, el valor del primer bono es 959,44 u.m. y el valor del segundo es de 956,19 u.m., lo que representa sobre 1000 una pérdida del 4,055% en el bono a 10 años y del 4,38% en el bono a 11 años. Lo que nos permite afirmar que cuanto mayor es la vida del bono mayor es el impacto de pérdida (o ganancia) si suben (o bajan) los tipos de interés de mercado.⁵⁷

⁵⁷ Si el bono tuviera una vida de 100 años una subida de medio punto del tanto de interés provocaría una pérdida del valor 12,252%.

El importe del cupón.



Si hay dos bonos con el mismo vencimiento, el bono que paga el cupón más pequeño es el que sufre mayor impacto en la variación relativa del precio. Del gráfico anterior, el bono que paga un cupón del 3,5% anual experimenta una pérdida del 4,02% cuando el tipo de interés de mercado pasa del 4% al 4,5%, mientras que el bono que paga un cupón del 10% anual experimenta una pérdida del 3,461%.

El ambiente financiero. Si el bono está en un mercado con tipos de interés bajos, una variación del tanto de interés provoca mayor impacto sobre el valor que si el bono hubiera estado en un mercado con tipos de interés altos. Supongamos que un mismo bono se negocia en dos mercados, uno tiene tipos de interés bajos (3,5%) y otro los tiene altos (10%). Si hay un movimiento al alza en los tipos de interés de medio punto (0,5%), representa que en el mercado de tipos de interés bajos el incremento del tipo de interés de mercado ha sido del 14,286% mientras que el mercado de tipos de interés altos el incremento ha sido sólo del 3,603%. Luego el impacto es mayor en el mercado de tipos de interés bajos.

Si un inversor de renta fija tiene que hacer una elección de bonos para incorporarlos a su cartera deberá elegir aquel bono cuya estructura mejor responda a sus expectativas. Si es un inversor conservador invierte en un mercado con tipos de interés bajos y se estima que se va a producir una subida de los tipos de interés, elegirá un activo de renta fija con vencimiento bajo y cupón grande; por el contrario, si está en un mercado de tipos de interés altos y se estima una bajada de los tipos de interés deberá comprar activos de renta fija que tengan vencimiento largo y cupón bajo.

Existen parámetros que recogen de forma global esta incidencia sobre el valor de un activo de renta fija.

La sensibilidad del Valor de un activo de renta fija a la variación del tanto de interés.

● **Sensibilidad** de $V(0, I'_1)$ respecto a I'_1 :

$$\left[\frac{dV(0, I'_1)}{dI'_1} \cdot \frac{1}{V(0, I'_1)} \right]_{I'_1=I_1} = S(I_1) = \frac{-(1+I_1)^{-1} \cdot \sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (1+I_1)^{-Tr}}{V(0, I_1)}$$

La sensibilidad es un parámetro financiero que recoge la influencia de la vida del bono, el importe del cupón y el ambiente financiero sobre el precio del mismo. Es una función negativa.

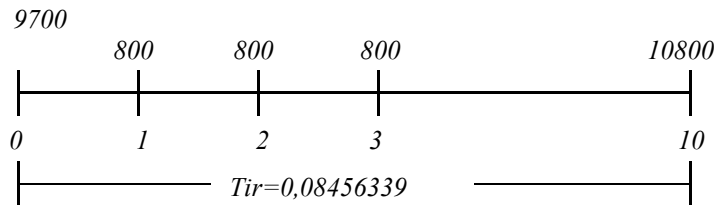
● **Elasticidad** de $V(0, I'_1)$ respecto a $(1+I'_1)$:

$$E[V(0, I'_1)]_{I'_1=I_1} = \frac{dV(0, I_1)}{d(1+I_1)} \cdot \frac{1+I_1}{V(0, I_1)}$$

☀ La “duración” como indicador del plazo de vida media de la inversión.

$$D(I'_1) = \frac{\sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (1 + I'_1)^{-T_r}}{\sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I'_1)^{-T_r}}$$

Ejemplo 75: Calcular la duración de un bono de 10.000 u.m., cupón anual del 8%, amortización a los 10 años y precio de mercado hoy el 97%.



La TIR, I_1 , es el tanto de interés anual que iguala el valor de los cobros asociados al bono con el precio de mercado hoy. Se debe cumplir que $9.700 = 800 \cdot a_{\overline{10}|I_1} + 10.000 \cdot (1 + I_1)^{-10} \Rightarrow I_1 = 0,084563339$

La duración será:

$$D = \frac{\sum_{r=1}^{10} 800 \cdot r \cdot (1 + 0.084563)^{-r} + 10000 \cdot 10 \cdot (1 + 0.084563)^{-10}}{9700} = 7,201 \text{ años}$$

Podemos indicar como propiedades de la duración las siguientes:

- ✓ D es una función decreciente respecto al tanto de interés.
- ✓ Es fácil ver cómo $\forall I_1 > 0$, D decrece al incrementar I_1 , su derivada será negativa.
- ✓ D tiende al **vencimiento medio aritmético** cuando el tanto de interés tiende a cero.
- ✓ D tiende a T_1 cuando el tanto de interés tiende a ∞ .
- ✓ D es una función creciente respecto al número de cobros.

☀ La duración de una cartera de activos de renta fija.

Se considerará una cartera con m activos, cada uno de ellos lleva asociado un conjunto de cobros netos; el k -ésimo activo tiene el siguiente conjunto de cobros: $\{(C_r^k, T_r^k)\}_{r=1,2,\dots,n_k}$ para $k \in \{1, 2, \dots, m\}$

La duración de toda la cartera al tanto de interés I'_1 será:
$$D_c = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{n_k} C_r^k \cdot T_r^k \cdot (1 + I'_1)^{-T_r^k}}{\sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{n_k} C_r^k \cdot (1 + I'_1)^{-T_r^k}}$$

Operando convenientemente se obtiene que: $D_c = \sum_{k=1}^m D_k \cdot \frac{V^k(0, I'_1)}{V(0, I'_1)} = \sum_{k=1}^m D_k \cdot B_k$, siendo:

- D_k , la duración del k -ésimo activo, al tanto de interés I'_1 .

- $V^k(0, I'_1)$, el valor actual del k -ésimo activo.

- $V(0, I'_1)$, el valor actual de la cartera. En el caso de que I'_1 sea la TIR inicial, deberá coincidir con el capital invertido P_0 .

- $B_k = \frac{V^k(0, I_1')}{V(0, I_1')}$, la proporción, o peso, del capital invertido en el k -ésimo activo.

La duración de la cartera se obtendrá mediante combinación lineal convexa de la duración de cada uno de los activos que la componen.

Ejemplo 76: Cálculo de la duración de una cartera de bonos que pagan cupón anual, compuesta por:

Nominal	Años al Vto.	Cupones	Precio hoy
$C_i \cdot N_i$	n_i	Cu_i	P_i
10.000.000	10	1.000.000	9.800.000
5.000.000	5	475.000	4.950.000
20.000.000	3	1.890.000	20.000.000

La TIR, I_1 , de cartera a precios de mercado hoy se obtiene de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^3 P_i = \sum_{i=1}^3 \left(Cu_i \cdot a_{n_i|I_1} + C_i \cdot N_i \cdot (1 + I_1)^{-n_i} \right)$$

Siendo la TIR, $I_1 = 0,099088259$.

Se calculará la duración de cada activo a la TIR de la cartera:

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} j \cdot Cu_i \cdot (1 + TIR)^{-j} + C_i \cdot N_i \cdot n_i \cdot (1 + TIR)^{-n_i}}{Cu_i \cdot a_{n_i|TIR} + C_i \cdot N_i \cdot (1 + TIR)^{-n_i}}$$

Además, $B_i = \frac{Cu_i \cdot a_{n_i|TIR} + C_i \cdot N_i \cdot (1 + TIR)^{-n_i}}{\sum_{i=1}^3 P_i}$ dando los siguientes valores:

D_i	B_i	Peso de cada activo en la cartera
6,769	0,289	28,9% del bono a 10 años
4,198	0,142	14,2% del bono a 5 años
2,747	0,569	56,9% del bono a 3 años

La duración de la cartera es $D_{cartera} = \sum_{i=1}^3 D_i \cdot B_i = 4,116$ años.

Ejemplo 77: Tomando como base de información los datos del ejemplo anterior, se plantea la situación de que el inversor desea que la Duración de su cartera sea 4 años (el plazo de inversión que desea) y, además, quiere que el 30% de la inversión sea en el bono con vencimiento 10 años y el 20% se invierta en el bono con vencimiento a 5 años. Se deberá cumplir que:

$$D_{cartera} = 4 = 0,3 \cdot D_1 + 0,2 \cdot D_2 + B_3 \cdot D_3 \rightarrow B_3 = \frac{4 - 0,3 \cdot D_1 + 0,2 \cdot D_2}{D_3} = 0,2584, \text{ es decir, que deberá invertir el}$$

25,84% de su dinero en el bono con vencimiento a 3 años.

☀ **Relación entre la sensibilidad de un activo de renta fija y la duración.**

La sensibilidad se ha definido matemáticamente como:

$$S(I_1) = -\frac{(1+I_1)^{-1} \cdot \sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (1+I_1)^{-T_r}}{V(0, I_1)} = -(1+I_1)^{-1} \cdot \frac{\sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (1+I_1)^{-T_r}}{V(0, I_1)} = -D(I_1) \cdot (1+I_1)^{-1}$$

Si se hace una aproximación lineal de $V(0, I_1)$, utilizando la recta tangente⁵⁸ en I_1 , cuando el tanto de interés varíe a un valor $I'_1 = I_1 + \Delta I$ próximo a I_1 , se tendrá, $V(0, I'_1) \rightarrow V(0, I_1) + V'(0, I_1) \cdot (I'_1 - I_1)$, donde:

$$V(0, I'_1) \rightarrow V(0, I_1) - \frac{D(I_1)}{1+I_1} \cdot V(0, I_1) \cdot (I'_1 - I_1) = V(0, I_1) + S(I_1) \cdot V(0, I_1) \cdot (I'_1 - I_1)$$

Si se simboliza $V(0, I'_1) - V(0, I_1)$ por ΔP_0 y $(I'_1 - I_1)$ por ΔI_1 , cuando I'_1 es un tanto de interés próximo a I_1 , tendremos $\Delta P_0 = P_0 \cdot S(I_1) \cdot \Delta I_1$

De ahí, que se acepte que, para variaciones pequeñas del tanto de interés de mercado, la variación del valor actual de la renta fija es proporcional a la variación del tanto de interés.

En el caso particular de que $I_1 = 1\%$ entonces $\Delta P_0 = P_0 \cdot S(I_1) \cdot 1\%$, que puede interpretarse de la siguiente forma: una variación al alza de un punto en el tanto de interés provoca una caída del precio del activo en un porcentaje igual a $S(I_1) \%$ sobre el precio.

Ejemplo 78: Un Bono de nominal 1.000 euros cotiza hoy al 101%, siendo su sensibilidad a ese precio de -3,45. Si el tanto de interés de mercado experimenta una subida de medio punto, la pérdida aproximada de valor del bono será, $\Delta P_0 = -1.000 \cdot 1,01 \cdot 3,45 \cdot 0,5\% = -17,42 \text{ €}$

El precio que alcanzará el bono para esa subida de tipos de interés estará, aproximadamente, en:

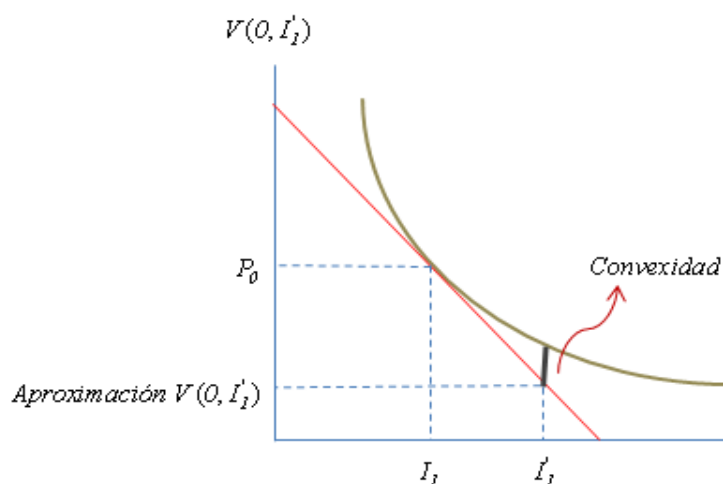
$$P_{\text{nuevo}} = P_0 - \Delta P_0 = 1.010 - 17,42 = 992,58 \text{ €}$$

✱ Convexidad.

Si la variación del tanto de mercado es grande, el cálculo de $V(0, I'_1)$ a partir de la recta tangente en I_1 pierde todo su sentido; en este caso, se deberá incorporar un nuevo parámetro que mida el error cometido al utilizar la recta y no la propia función, este parámetro se denomina “Convexidad”.

La convexidad es la diferencia entre el valor real $V(0, I'_1)$ y su aproximación mediante la recta tangente, es decir,

$$\text{Convex}(I'_1) = V(0, I'_1) - (V(0, I_1) - S(I_1) \cdot V(0, I_1) \cdot (I'_1 - I_1))$$



⁵⁸ La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en un punto a es $r(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$, siendo $f'(a)$ el valor de la derivada de $f(x)$ en el punto a .

El nuevo precio del activo se determinará a partir de la suma de dos magnitudes: el precio aproximado mediante la recta tangente y el error, o convexidad.

Se puede obtener una expresión que permite calcular la convexidad a partir del desarrollo de Taylor de la función $V(0, I_1)$ de segundo orden:

$$V(0, I'_1) = V(0, I_1) + V'(0, I_1) \cdot (I'_1 - I_1) + \frac{V''(0, I_1) \cdot (I'_1 - I_1)^2}{2} + \text{Resto}$$

Los dos primeros sumandos son la recta tangente y el tercero medirá la convexidad.

Se puede hacer un cálculo aproximado de la convexidad a partir de:

$$\frac{V''(0, I_1)}{2} = \frac{\sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (T_r + 1) \cdot (1 + I_1)^{-T_r}}{2} \cdot \frac{1}{(1 + I_1)^2}$$

El coeficiente de convexidad, expresado sobre $V(0, I_1)$ se calculará mediante la siguiente expresión:

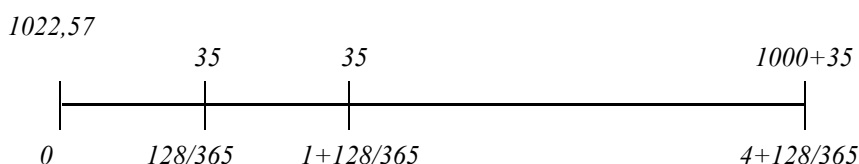
$$\text{Convex}(I_1) = \frac{V''(0, I_1)}{2} \cdot \frac{1}{V(0, I_1)} = \frac{\sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (T_r + 1) \cdot (1 + I_1)^{-T_r}}{2 \cdot (1 + I_1)^2} \cdot \frac{1}{V(0, I_1)}$$

Así pues, la variación del precio del activo, como consecuencia de la variación del tipo de interés de mercado, se podrá determinar de la siguiente forma:

$$\Delta P_0 = V(0, I'_1) - V(0, I_1) = V(0, I'_1) - P_0 = \left[S(I_1) \cdot (I'_1 - I_1) + \text{Convex}(I_1) \cdot (I'_1 - I_1)^2 \right] \cdot P_0,$$

El nuevo precio del activo será: $P_{\text{nuevo}} = P_0 + \Delta P_0$

Ejemplo 79: Un bono de nominal 1.000 euros se amortizará dentro de 4 años y 128 días, cotiza hoy al 102,257%, que representa una TIR del 3.5%, y paga un cupón anual de 35 euros, pagándose el primero dentro de 128 días. El conjunto de cobros futuros será:



La Duración será:
$$D(3.5\%) = \frac{\sum_{r=1}^5 C_r \cdot T_r \cdot (1 + 0.035)^{-T_r}}{1022,57} = 4,024 \text{ años.}$$

La Sensibilidad es:
$$S(3.5\%) = \frac{V'(0, 0.035)}{V(0, 0.035)} = \frac{V'(0, 0.035)}{1.022,57} = \frac{-D(0.035)}{(1 + 0.035)} = -3,888$$

La Convexidad es:
$$\text{Convexidad}(3,5\%) = \frac{\sum_{r=1}^5 C_r \cdot T_r \cdot (T_r + 1) \cdot (1 + 0.035)^{-T_r}}{2 \cdot (1 + 0.035)^2 \cdot 1.022,57} = 9,8486$$

La variación del precio del bono cuando el tanto de interés está 0,5 puntos por encima del 3,5% asciende a:

$$\Delta P = \left[-3,888(0,5\%) + 9,8486(0,5\%)^2 \right] \cdot 1.022,57 = -19,62 \text{ €}$$

El nuevo precio aproximado del bono será: $P = 1.022,57 - 19,62 = 1.002,95 \text{ €}$

☀ **Relación entre la rentabilidad de la cartera y la rentabilidad de los activos que la configuran.**

Supóngase una cartera de activos de renta fija formada por k activos distintos. Cada uno de ellos tiene hoy un precio en el mercado y una rentabilidad. El precio de la cartera será la suma de los precios de cada activo.

📊 **Estudio de la renta fija al final del plazo de la inversión.**

📌 **Valor de la inversión al cabo de k años de su constitución.**

$V(0, I_1) = P_0$ es el valor actual de la inversión en 0 a su TIR, I_1 ; el tanto de interés de mercado puede variar y situarse en un valor $I'_1 \neq I_1$; si todos los rendimientos que produce dicha inversión se reinvierten a la tasa de interés de mercado, I'_1 , el **VALOR FINAL DE LA INVERSIÓN** al cabo de k periodos será:

$$P_k = V(k, I'_1) = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r} = V(0, I'_1) \cdot (1 + I'_1)^k.$$

Se estudiará el comportamiento de $V(k, I'_1)$ respecto a cada una de sus variables.

🔴 **Respecto a I'_1**

En un diferimiento dado, k , el valor acumulado de los cobros netos de la inversión, según un tanto de interés de mercado I'_1 , tiene un valor mínimo, cuando la duración de los cobros netos calculada a ese tanto coincide con el diferimiento k , $D(I'_1) = k$.

Para demostrarlo estudiaremos la función $V(k, I'_1)$ en función de I'_1 , considerando que k permanece fijo y que los vencimientos vienen expresados en periodos (T_r y k serán números naturales).

🔴 La función $V(k, I'_1)$ es convexa:

La función $V(k, I'_1)$ es estrictamente convexa para cualquier estructura de cobros netos que tenga más de dos capitales financieros.

Dada $V(k, I'_1) = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r}$ la derivada respecto al tanto de interés de mercado es:

$$\frac{\partial V(k, I'_1)}{\partial I'_1} = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (k - T_r) \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r-1}$$

y la derivada segunda será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(k, I'_1)}{\partial I'^2_1} &= \sum_{r=1}^n C_r \cdot (k - T_r) \cdot (k - T_r - 1) \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r-2} = \\ &= \sum_{r=1}^n C_r \cdot (k - T_r)^2 \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r-2} - \sum_{r=1}^n C_r \cdot (k - T_r) \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r-2} \end{aligned}$$

Esta expresión es siempre positiva en cualquier punto k (excepto para los diferimientos: $k = T_r$ o $k - 1 = T_r$ en que se anulan).

🔴 Existencia de un punto mínimo.

La derivada primera igualada a 0 nos dará el valor de I_1 que, en k , hace que $V(k, I'_1)$ sea mínimo:

$$\frac{\partial V(k, I'_1)}{\partial I'_1} = \sum_{r=1}^n C_r \cdot (k - T_r) \cdot (1 + I'_1)^{k-T_r-1} = 0.$$

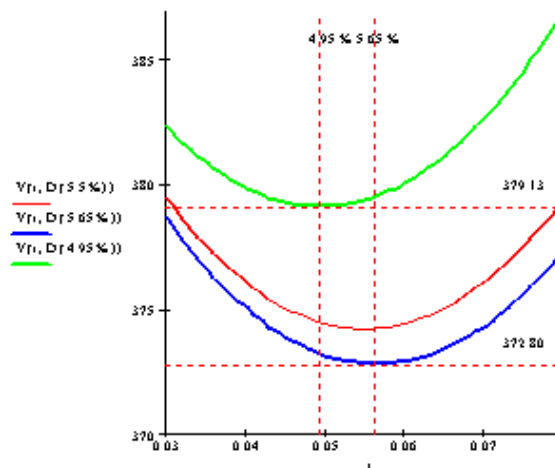
Igualdad que permite encontrar para cada plazo k el tanto de mercado $I_{1\min}$ en que el valor acumulado de la cartera $V(k, I'_1)$ es mínimo,

$$k = \frac{\sum_{r=1}^n C_r \cdot T_r \cdot (1 + I_{1\min})^{-T_r}}{V(0, I_{1\min})} = D(I_{1\min}).$$

Si la función $V(k, I'_1)$ es estrictamente convexa, en la duración de la inversión, $D(I_1)$, calculada según la TIR en el origen de la inversión, I_1 , se alcanza el valor mínimo $V(D(I_1), I_1)$

Luego, en $k = D(I_1)$ se verificará que $\forall I'_1 \neq I_1 \Rightarrow V(D, I'_1) > V(D, I_1)$.

Ejemplo 80: Se tiene un bono que renta un cupón anual de 10 u.m. y se amortizará a los 20 años por 200 u.m. El precio hoy en el mercado es de 188,05 u.m., lo que da una rentabilidad interna media del 5,5%. Se quiere saber cómo se comporta el valor final, capital final, si varía el tanto de interés de mercado. Se tomarán tipos de interés que irán desde 3.9% a 7% y se fijará el momento final de la inversión.



✿ Respecto a k .

Se analizará la función $V(k, I'_1)$ respecto a k , fijando el tipo de interés de mercado. $V(k, I'_1)$ es una función creciente respecto a k ,

$$\frac{\partial V(k, I'_1)}{\partial k} = V(k, I'_1) \cdot \ln(1 + I'_1) > 0 \quad \forall k > 0$$

Además, la función es convexa respecto a k al ser

$$\frac{\partial^2 V(k, I'_1)}{\partial k^2} = V(k, I'_1) \cdot \ln(1 + I'_1)^2 > 0 \quad \forall k > 0$$

Para tipos de interés de mercado próximos a la tir, se cumple que para:

$$\begin{cases} I'_1 > I_1 \Rightarrow \begin{cases} k > D(I_1) \Rightarrow V(k, I'_1) > V(k, I_1) \\ k < D(I_1) \Rightarrow V(k, I'_1) < V(k, I_1) \end{cases} \\ I'_1 < I_1 \Rightarrow \begin{cases} k > D(I_1) \Rightarrow V(k, I'_1) < V(k, I_1) \\ k < D(I_1) \Rightarrow V(k, I'_1) > V(k, I_1) \end{cases} \end{cases}$$

Demostración: Si se expresa mediante un desarrollo de Taylor para $I'_1 = I_1$, se tiene que

$$V(T, I'_1) = V(T, I_1) + V'(T, I_1)(I'_1 - I_1) + \varepsilon(I_1)$$

Si $I'_1 \rightarrow I_1$ se puede aceptar que el error cometido es poco significativo por lo que podemos dejar la expresión

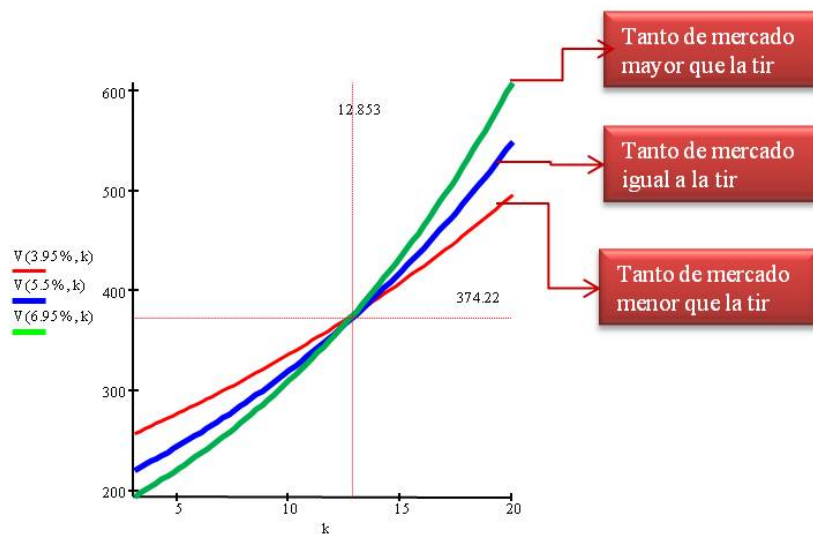
$$V(T, I'_1) = V(T, I_1) + V'(T, I_1)(I'_1 - I_1), \text{ luego } V(T, I'_1) - V(T, I_1) = V'(T, I_1)(I'_1 - I_1).$$

Desarrollando la derivada, $V(T, I'_1) - V(T, I_1) = \left(V'(0, I_1)(I + I_1)^T + V(0, I_1) \cdot T \cdot (I + I_1)^{T-1} \right) (I'_1 - I_1)$

Operando adecuadamente,

$$\begin{aligned} V(T, I'_1) - V(T, I_1) &= \left(S(I_1) \cdot V(0, I_1)(I + I_1)^T + V(0, I_1)(I + I_1)^T \frac{T}{I + I_1} \right) (I'_1 - I_1) = \\ &= V(T, I_1) \left(\frac{-D(I_1)}{I + I_1} + \frac{T}{I + I_1} \right) (I'_1 - I_1) \end{aligned}$$

Expresión que tomará un signo u otro según sea la relación entre $D(I_1)$ y T , además del signo que tome $I'_1 = I_1$.



Como puede observarse en el gráfico, cada línea es el capital final para distintos plazos de inversión; se han tomado plazos de inversión de 3 a 20 años. Cada curva representa el valor de la inversión al final de k años, considerando que el tanto de interés de mercado es un valor concreto (cada línea corresponde a un tanto de interés). La curva azul recoge el valor final de la inversión cuando el tanto de interés de mercado es la rentabilidad interna media obtenida en 0, 5,5%.

La curva roja corresponde al valor final para un tanto de interés de mercado del 3,95% < 5,5%.

Para plazos $k < D$, el capital que se recogerá al final es mayor que el que obtendría al 5,5% y para plazos $k > D$, el capital final es menor.

La curva verde corresponde al valor final de la inversión cuando el tanto de interés de mercado es el 6,95% > 5,5%; si $k < D$, el capital final a recuperar en ese momento es menor que el que obtendría a la rentabilidad interna media y si $k > D$, el capital final es mayor.

7.2.3 Rentabilidad final.

Llamaremos *Periodo Planificador* al plazo que se desea mantener la inversión.

Cabría determinar cuál ha sido la rentabilidad final, asociada al periodo planificador si se mantienen las condiciones siguientes:

- Después de realizar la inversión, el tanto de mercado se mantiene constante y se sitúa en el valor $I'_1 \neq I_1$
- Se efectúa la reinversión de todos los cobros netos al tanto de mercado I'_1 .
- El periodo planificador es T .

Llamaremos “rentabilidad final” de la inversión asociada al plazo T , al tanto de interés que verifique la siguiente ecuación:

$$P_0 \cdot (1 + R)^T = V(T, I'_1), \text{ es decir } P_0 \cdot (1 + R)^T = P_T$$

siendo:

- P_0 , el capital inicial invertido.
- I'_1 , el tanto de interés de mercado.
- R , la rentabilidad final.

La rentabilidad final incorpora al capital inicialmente invertido la ganancia o pérdida producida cuando el tanto de interés de mercado I'_1 es distinto de I_1 . Dada la forma de $V(k, I'_1)$, si calculamos R para un periodo planificador $T \neq D$, se tendrá que,

$$\begin{cases} \text{si } T < D \Rightarrow \begin{cases} I'_1 < I_1 \Rightarrow R > I_1 \\ I'_1 > I_1 \Rightarrow R < I_1 \end{cases} \\ \text{si } T > D \Rightarrow \begin{cases} I'_1 < I_1 \Rightarrow R < I_1 \\ I'_1 > I_1 \Rightarrow R > I_1 \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo 81: Un inversor decide invertir hoy 30-6-2009 un capital de 100.000 u.m. en una cesta compuesta por bonos que le proporcionarán los siguientes ingresos netos:

fecha valor	30/06/2009	
Fecha	Vencimientos en años	Importe
01/04/2010	0,753424658	10000
05/07/2010	1,01369863	25000
08/02/2011	1,610958904	21000
09/06/2013	3,945205479	34000
24/11/2013	4,405479452	27000
25/09/2014	5,24109589	22000
16/03/2015	5,712328767	25000

Si se iguala el valor actual de los cobros netos al capital invertido: $100000 = \sum_{i=1}^7 C_i \cdot (1 + I_1)^{-T_i}$, se obtendrá

la rentabilidad interna media $I_1 = 0.1629437 \sim 16.2843\%$. Supóngase que el tanto de interés de mercado es el 15,5%, y esa inversión se desea mantener durante 2 años y medio, el capital que el inversor recogerá al

final de los cuatro años será $P_T = \sum_{i=1}^7 C_i \cdot (1 + 15.5\%)^{2.5 - T_i} = 146385.72$ u.m.

La rentabilidad final obtenida será la que se obtenga de comparar el dinero invertido en 0 y el dinero que obtendrá a los 2 años y medio, $100000 \cdot (1 + R)^{2.5} = 146385.72 \rightarrow R = 16.4661\%$

Un tanto de interés de mercado inferior a la Rentabilidad media inicial le ha proporcionado una rentabilidad final superior a la rentabilidad interna media obtenida en 0.

Supóngase que ese inversor decide mantener esa inversión 7 años, el capital que obtendrá a los 7 años será:

$P_T = \sum_{i=1}^7 C_i \cdot (1 + 15.5\%)^{7 - T_i} = 279973.97$ u.m. La rentabilidad final obtenida será:

$$100000 \cdot (1 + R)^7 = 279973.97 \rightarrow R = 0.1584411$$

En este caso la rentabilidad final es inferior a la rentabilidad interna media obtenida en 0.

8. Inversión en activos de renta variable.

Este apartado está destinado al estudio de la renta variable, especialmente las acciones de las empresas que cotizan en Bolsa.

Los usuarios del mercado de renta variable deberán realizar la elección de activos bajo las hipótesis de que el mercado es eficiente, es decir, los precios de los activos son estimadores no sesgados de *valor intrínseco* de la sociedad que los emite. Trabajar con la hipótesis de un mercado eficiente implica aceptar que el mercado cumple las siguientes propiedades:

- a) Es líquido, se puede encontrar contraparte a una orden (ya sea de compra o de venta).
- b) Cualquier información sobre la entidad que ha emitido el activo es inmediatamente absorbida por el mercado e incorporada al precio. El mercado descuenta toda información sobre dicho activo.
- c) El mercado debe tener a disposición de todos los usuarios un procedimiento de cálculo y publicación del precio de los activos que negocia.

Para que un potencial inversor pueda determinar si el precio de un activo en el mercado es adecuado, debe determinar el *valor intrínseco*; éste se entenderá como el valor asociado a la capacidad de generar beneficios de la empresa emisora. Si la cotización de un activo es mayor que su valor intrínseco se considerará que el activo está sobre valorado en el mercado, y viceversa.

El problema básico que tiene el inversor en Bolsa es la elección de la acción y el momento adecuado para entrar y salir de la Bolsa. Para la elección de la acción se apoyará en la información económico financiera de la empresa, es decir, hará uso del “análisis fundamental”. Ahora bien, para saber en qué momento se debe entrar y en qué momento se debe salir el inversor deberá conocer los ritmos de la Bolsa y de la acción en la que va a invertir, para ello, utilizará el “análisis técnico”. El “análisis fundamental” va dirigido a la obtención del valor de la empresa y su evolución futura, y el “análisis técnico” recoge el movimiento del precio de la acción en función de la presión de la oferta y la demanda del mercado.

8.1 El análisis fundamental.

Graham, B. y Dodd, D. fueron los primeros en utilizar datos financieros de las empresas para evaluar la liquidez, la solvencia, la eficiencia y el potencial de beneficios de una empresa. Lo que se busca con el análisis fundamental es calcular el valor intrínseco de un activo, su rentabilidad y la evolución de la rentabilidad.

Hay dos formas de realizar el análisis: “Top-Dawn”, se parte de la visión global de mercado y se desciende hasta la empresa y “Botton-Up”, se parte de la empresa y se asciende al mercado.

Existen fuentes de información pública y gratuita que aporta datos refundidos de los informes financieros de las empresas; por ejemplo <http://www.factset.com/> que recogen y elaboran información financiera de más de 60000 empresas de todo el mundo.

Estas fuentes facilitan al inversor la búsqueda de la información que necesita para la toma de decisión. Parte de la información está a disposición del público de forma gratuita, un ejemplo de la información que se puede obtener gratuitamente.

Ejercicio 82: *Recopilar información económico-financiera de la sociedad ABERTIS disponible gratuitamente en la red.*

- a) *Cuadro resumen de los datos contables tanto históricos como previstos:*

Precio	Variación	Volumen (títulos)		Volumen (€)	Hora		
14,19€	-0,46% ▼ -0,07€	315.679	4.523.530,00	11:23:58			
		2009	2010	2011	2012	2013	2014
BPA (en €)		0,80	0,82	0,88	0,81	0,79	0,87
Rentabilidad por dividendo		4,25%	3,86%	8,11%	4,61%	4,82%	5,03%
Dividendo neto (en €)		0,53	0,55	1,16	0,66	0,69	0,72
PER (veces)		16,91	14,95	13,29	15,33	18,22	16,51
Beneficio neto (millones de €)		653,00	661,38	719,00	1.024,00	623,81	693,56
Deuda neta (millones de €)		14.590,00	14.651,00	13.882,00	14.130,00	14.227,70	13.927,30
Valor de los activos (por número de acciones)		5,27	4,94	3,90	4,71	4,55	4,78
Ebitda (millones de €)		2.435,00	2.494,00	2.454,00	2.459,00	3.086,57	3.267,50
Rentabilidad sobre recursos propios		15,24%	16,51%	22,64%	17,19%	17,25%	18,15%
EV / Ebitda (veces)(*)		10,54	9,86	9,56	9,86	8,39	7,83

(*) Capitalización más deuda entre beneficio antes de impuestos y amortizaciones

(*) Capitalización más deuda entre beneficio antes de impuestos y amortizaciones

Información ofrecida por: **FACTSET**

b) Información depositada en el Registro Mercantil

Datos de identificación		Información ofrecida por einforma
Situación de la empresa	Activa	
CIF/NIF	A08209769	
Número D-U-N-S	460013030	
Denominación	ABERTIS INFRAESTRUCTURAS, SA	
Domicilio Social	LUGAR PARC LOGISTIC DE LA ZONA FRANCA, 12 - 20 - 08040 BARCELONA (Barcelona)	
Domicilio Anterior	PLAZA GAL-LA PLACIDIA, 1 - 08006 BARCELONA (Barcelona)	
Telefono	932305000	
Fax	932285000	
URL	www.abertis.com	
Email corporativo	autopistas@autopistas.com	

Estructura legal		Información ofrecida por einforma
Forma Jurídica	Sociedad anónima	
Capital social	2.444.367.465	
Capital social desembolsado	2.444.367.465	
Cotiza en bolsa	SI	
Obligado a presentar cuentas	SI	
Censo cameral	2010	

Información financiera		Información ofrecida por einforma
Ventas Ultimo Años	1.046.253.000,00 (año 2011 - Registro Mercantil)	
Resultado Ultimo Año	3.048.088.000,00 (año 2011)	
Total Activo	13.259.773.000,00 (año 2011)	
Años elementos financieros	2011	

Información comercial		Información ofrecida por 
Fecha de constitución	24/02/1967	
Actividad Informa	1759000 - Otras actividades anexas a los transportes	
CNAE 2009	5229 Otras actividades anexas al transporte	
Código CNAE 2009	5229	
SIC	4789 Otros servicios anexas para el transporte SC	
Objeto social	CONSTRUCCION, CONSERVACION, EXPLOTACION DE AUTOPISTAS EN REGIMEN DE CONCESION, BIEN SOLO LA CONSERVACION Y EXPLOTACION, GESTION DE CONCESIONES DE CARRETERAS EN ESPANA Y EXTRANJERO. ADEMAS LA PROMOCION, ADMINISTRACION, DI	
Numero de empleados	164 (año 2012)	
Actividad Internacional	Exporta	

Otra información de interés		Información ofrecida por 
Fecha Última Actualización	28/11/2012	
Balance disponible	2011	
Fecha Última Investigación	23/03/2012	
Deposito Registro Mercantil	2011	

Estructura corporativa

Resumen	
Cargos no vigentes	111 miembros (09/10/2012)
Órgano de administración	41 miembros (09/10/2012)
Otros cargos	81 miembros (22/06/2012)
Audidores de cuentas	4 miembros (22/06/2012)
Directivos funcionales	5 miembros (27/05/2009)

Directivos funcionales			Información ofrecida por 
Cargo	Nombre	Fecha Nombramiento	
Director Financiero	ALJARO NAVARRO, JOSE	24/04/2008	
Director General	REYNES MASSANET, FRANCISCO	27/05/2009	
Director de Compras	BORNER, MIKAEL	24/04/2008	
Director de Operaciones	MARTINEZ VILA, JOSEP	27/05/2009	
Director de Informática	RODRIGUEZ DE LA RUBIA, JUAN	18/10/2005	

Audidores de cuentas			Información ofrecida por 
Cargo	Nombre	Fecha Nombramiento	
Auditor	DELOITTE SL	22/06/2012	
Auditor	PRICEWATERHOUSECOOPERS AUDITORES SL	25/10/2011	
Auditor Cuentas Consolidadas	DELOITTE SL	22/06/2012	
Auditor Cuentas Consolidadas	PRICEWATERHOUSECOOPERS AUDITORES SL	25/10/2011	

Remuneración del consejo	
Fuente	2011
Importe	1862000

Vinculaciones financieras

Accionistas		Información ofrecida por 			
Razon Social	NIF/País	%	Fuente	Fecha Inf.	
ABERTIS INFRAESTRUCTURAS, SA	A08209769	10,00 %	ELECONOMISTA	26/04/2012	
ACS, ACTIVIDADES DE CONSTRUCCION Y SERVICIOS, SA	A28004885	10,33 %	EXPANSIÓN	13/07/2011	
CRITERIA CAIXAHOLDING SA.	A62337084	19,66 %	REG.MERCAN.	31/12/2011	
INVERSIONES AUTOPISTAS S.L.	B62549159	7,75 %	REG.MERCAN.	31/12/2011	
CAIXA D'ESTALVIS UNIO DE CAIXES DE MANLLEU SABADELL I TERRASSA	G65345886	1,17 %	EXPANSIÓN	03/10/2011	
TREBOL INTERNATIONAL BV	PAÍSES BAJOS	15,55 %	REG.MERCAN.	31/12/2011	

Participaciones		Información ofrecida por 		
Razon Social	NIF/País	%	Fuente	Fecha Inf.
AUTOPISTA VASCO ARAGONESA CONCESIONARIA ESPAÑOLA SOCIEDAD ANONIMA	A28337764	100,00 %	F.PROPIAS	01/03/2012
ABERTIS TELECOM SA	A62202833	100,00 %	REG.MERCAN.	31/12/2011
ABERTIS SATELITES SA.	A65759045	100,00 %	B.O.R.M.E.	11/04/2012
ABERTIS AUTOPISTAS ESPAÑA SA	A81545790	100,00 %	F.PROPIAS	05/03/2012
SERVIABERTIS SL	B62937941	100,00 %	F.PROPIAS	28/02/2012
AUTOPISTAS DE PUERTO RICO Y CO SE	PUERTO RICO	100,00 %	REG.MERCAN.	31/12/2011

Análisis del balance

Cifras expresadas en miles de euros		Información ofrecida por 				
	Ejercicio 2011	%Activo	Ejercicio 2010	%Activo	Ejercicio 2009	%Activo
Activo						
Activo no corriente	12.831.342,00	96,77	10.217.120,00	95,81	10.066.358,00	95,40
Activo Corriente	428.431,00	3,23	446.410,00	4,19	485.312,00	4,60
Pasivo						
Patrimonio neto	5.554.004,00	41,89	3.824.772,00	35,87	3.653.684,00	34,63
Pasivo no corriente	7.332.857,00	55,30	6.338.397,00	59,44	6.058.533,00	57,42
Pasivo corriente	372.912,00	2,81	500.361,00	4,69	839.453,00	7,96

Análisis de la cuenta de pérdidas y ganancias

Cifras expresadas en miles de euros		Información ofrecida por 				
	Ejercicio 2011	% Ventas	Ejercicio 2010	% Ventas	Ejercicio 2009	% Ventas
Ventas	1.046.253,00		714.706,00		643.726,00	
Margen bruto	1.047.287,00	100,10	715.362,00	100,09	645.272,00	100,24
EBITDA	4.698.217,00	449,05	653.077,00	91,38	589.268,00	91,54
EBIT	4.379.682,00	418,61	652.635,00	91,32	588.174,00	91,37
Resultado Neto	3.048.088,00	291,33	590.846,00	82,67	551.327,00	85,65
Tipo impositivo efectivo (%)	26,43		-7,43		-5,56	

Ratios principales

Información ofrecida por 					
	31/12/2011	% Evolución	31/12/2010	% Evolución	31/12/2009
Ratios de equilibrio					
Fondo de maniobra (Euros)	55.519	202,90	-53.951	84,76	-354.141
Ratio fondo de maniobra	0		-0	66,66	-0,03
Ratio de solidez	0,43	13,15	0,38	2,70	0,37
Periodo Medio de Cobro (días)	14,04	333,33	3,24	50,00	2,16
Periodo Medio de Pago (días)	1.550,16	-49,93	3.096,36	-11,25	3.489,12
Ratios de liquidez					
Ratio de Liquidez (%)	114,89	28,77	89,22	54,33	57,81
Ratio de Liquidez Inmediata (%)	3,45	465,57	0,61	-55,79	1,38
Ratios de endeudamiento					
Porcentaje de endeudamiento (%)	48,62	-22,76	62,94	-1,88	64,16
Coste Medio de Financiación Externa	0,04		0,04		0,04
Cobertura del Servicio de la Deuda	8,39	-36,24	13,16	9,21	12,05
Cobertura de Intereses	15,22	531,53	2,41	4,32	2,31
Ratios generales y de actividad					
Autofinanciación generada por las ventas (%)	73,42	2,87	71,37	-18,20	87,25
Autofinanciación generada por los Activos (%)	5,79	21,13	4,78	-10,15	5,32
Punto Muerto	-0,31	-102,69	11,51	-0,69	11,59
Facturación media por Empleado	6.379,59	60,67	3.970,59	5,47	3.764,48
Coste Medio por Empleado	172,1	14,56	150,22	-0,79	151,43
Rotación de Activos	0,08	14,28	0,07	16,66	0,06
Ratios de resultados					
Rentabilidad Económica (ROA) (%)	33,03	439,70	6,12	9,87	5,57
Rentabilidad de Explotación (%)	58,75	856,84	6,14	9,44	5,6
Rentabilidad Financiera (ROE) (%)	76,68	438,48	14,24	0,49	14,17

c) Información depositada por la sociedad en el Mercado Continuo⁵⁹

BOLETÍN FINANCIERO

— ESCUELA DE FINANZAS —

[Home](#)
[Escuela de Finanzas](#)
[Suscripción al boletín](#)
[Presentación boletín](#)
[Contacto](#)

Clasificación sectorial

PETRÓLEO Y ENERGÍA
 MAT. BÁSICOS, INDUSTRIA Y CONSTRUCCIÓN
 BIENES DE CONSUMO
 SERVICIOS DE CONSUMO
 SERVICIOS FINANCIEROS E INMOBILIARIOS
 TECNOLOGÍA Y COMUNICACIONES
 FICHAS HISTÓRICAS

Clasificación I. Bursátil

IBEX 35®
 IBEX MEDIUM CAP®
 IBEX SMALL CAP®
 RESTO MERCADO CONTINUO
 MAB
 CORROS ELECTRÓNICOS

SERVICIOS DE CONSUMO



OTROS HECHOS RELEVANTES
 NOTICIAS
 ACUERDOS DEL CONSEJO, JUNTAS, ASAMBLEAS
 PRESENTACIONES A ANALISTAS E INVERSORES
 INFORMACIÓN FINANCIERA GENERAL
 DESCRIPCIÓN DE LA COMPAÑÍA

INFORMACIÓN FINANCIERA GENERAL

- (30-04-2013) Información financiera intermedia
- (19-02-2013) Información sobre resultados 2012.
- (19-02-2013) Información financiera intermedia 2S2012.
- (19-02-2013) Informe anual de gobierno corporativo 2012.
- (19-02-2013) Información Financiera 2º Semestre 2012
- (31-10-2012) Información financiera intermedia 3T2012.
- (25-07-2012) Información financiera intermedia 1S2012
- (24-04-2012) Información financiera intermedia 1T2012
- (23-02-2012) Información sobre resultados 2011
- (23-02-2012) Informe anual de gobierno corporativo 2011
- (23-02-2012) Información financiera intermedia 4S2011

Con la colaboración de:



El 9-2-2013 presentó la memoria anual del ejercicio 2012 con los datos financiero-contables.

⁵⁹ Se accede a través de <http://www.bolsamadrid.es/esp/asp/Empresas/Empresas.aspx>.

Las Bolsas son repositorios de los estados contables de las empresas cotizadas y el acceso a esa información es libre.

Los elementos básicos del análisis fundamental son los estados financieros, su evolución en ejercicios sucesivos, la comparación de los resultados respecto al sector económico al que pertenece y la dependencia de esos datos de la evolución económica de la zona geográfica donde opera.

Estos datos se utilizan para elaborar un conjunto de indicadores o ratios que permiten saber si se está en una situación económica buena o no.

Se expondrán aquellos indicadores más utilizados en el análisis fundamental.

✿ **PER (ratio precio/beneficio).**

El mercado de valores acepta como representante del valor intrínseco la ratio P.E.R. (*Price earning ratio*), que es el cociente entre la cotización del activo y el dividendo que paga en un momento concreto.

$$PER_t = \frac{Valor_t}{Beneficio\ neto\ por\ acción_t}$$

El modelo teórico más sencillo se basa en comparar el *valor financiero* de la empresa por acción y los beneficios netos por acción.

El *valor financiero* de la empresa será: $V_{financiero} = \sum_{t=1}^n B_t \cdot (1 + I_1)^{-t}$, siendo B_t el beneficio neto esperado

dentro de t años e I_1 el tanto anual medio de rentabilidad de la empresa. Si aceptamos que los beneficios se irán incrementando mediante una tasa media constante g y la empresa va a continuar su actividad indefinidamente, entonces, el valor financiero de la empresa será⁶⁰:

$$V_t = \frac{B_{t+1}}{I_1 - g} = \frac{B_t(1 + g)}{I_1 - g}$$

Existen distintos modelos para determinar el valor de la empresa, así como, para la obtención de valor de las variables que utiliza. Por ejemplo, si el valor de la empresa es el valor actual de los beneficios netos de la misma, utilizando como tanto de interés la rentabilidad de la empresa, uno de los problemas a resolver es la cuantificación de ese tanto de interés. Las posiciones más frecuentes son:

- El tanto de interés de rentabilidad de la empresa es la rentabilidad sobre los recursos propios, es decir $\frac{Beneficio\ neto}{Patrimonio\ Neto} = ROE$. Este dato es fácil de obtener a partir de los datos contables, igual que su evolución en el tiempo.

La crítica que se puede dar a esta forma de obtener I_1 cuando la empresa cotiza en bolsa es que se basa en datos históricos y no incorpora la influencia del mercado en el valor de la empresa.

- Si el mercado donde se negocian las acciones es eficiente y se cumplen las hipótesis del modelo CAPM, una forma de estimar I_1 es a través de la rentabilidad de la acciones en la bolsa, tomando como referencia la rentabilidad media del mercado y el coeficiente β de dependencia de la rentabilidad de la acción respecto a la rentabilidad del mercado. Si la prima de riesgo de bolsa respecto al tanto de interés exento de riesgo es

⁶⁰ Según el modelo de *Gordon-Shapiro*.

$\bar{R}_M - r$, siendo r el tanto de interés exento de riesgo, y se tiene el coeficiente β entonces la rentabilidad de la acción en función de la rentabilidad del mercado deberá ser $I_1 = r + \beta(\bar{R}_M - r)^{61}$.

Sustituyendo en la expresión anterior se tiene que:

$$PER_{teórico} = \frac{1+g}{r + \beta(\bar{R}_M - r) - g}.$$

En paralelo al $PER_{teórico}$ el inversor utiliza como ratio $PER_{bursátil} = \frac{Cotización}{beneficio_{acción}}$.

La siguiente tabla recoge, después de la observación del mercado, la interpretación del PER en función del valor que tiene.

N/A	<i>Si la empresa tiene pérdidas, su PER será indeterminado. Aunque se puede calcular un PER negativo, por convención se asigna un PER indefinido a éstas empresas</i>
0-10	<i>O bien la acción se encuentra infravalorada o los inversores creen que los beneficios de la empresa tienden al declive.</i>
10-17	<i>Para la gran mayoría de empresas, este valor de PER es el adecuado (i.e. retorno de inversión más beneficio estándar)</i>
17-25	<i>O bien la acción se encuentra sobrevalorada o los beneficios de la empresa han crecido desde que se publicaron los beneficios inmediatamente anteriores. También puede indicar que los inversores creen que en un futuro próximo los beneficios crecerán sustancialmente</i>
25+	<i>Un PER de esta magnitud se puede deber a grandes expectativas de crecimiento de los beneficios futuros, o bien que la empresa se encuentra en el contexto especulativo. Los precios están inflados.</i>

La información que se obtiene del PER depende de la interpretación que se dé:

- Informa sobre la rentabilidad de la acción, cuanto mayor es el PER menor es la rentabilidad.
- Informa sobre el tiempo de recuperación de la inversión a través de los beneficios, sería en este caso, el nº de años necesarios para recuperar la inversión.
- Informa sobre el nivel de confianza del inversor. Un PER alto y sostenido indica un nivel de confianza muy elevado del inversor en esa compañía. El inversor espera que en un futuro próximo aumente la rentabilidad y con ella el dividendo.

Ejemplo 83: Supóngase una acción que paga un beneficio neto de 1.5€ y cotiza en el mercado a 21€, el PER para el inversor es $\frac{21}{1,5} = 14$.

⁶¹ $\bar{R}_{acción} = \alpha + \beta \cdot \bar{R}_{bolsa}$, siendo β el coeficiente de riesgo sistemático, es decir, el riesgo de la acción es proporcional al riesgo del mercado, $\sigma_{acción} \rightarrow \beta \cdot \sigma_{mercado}$.

Ejemplo 84: Obtener el día 22 de Mayo de 2013 el PER teórico de Abertis, que está en el índice el IBEX35 (datos obtenidos del mercado continuo español).

Se calculará la rentabilidad de la empresa mediante CAPM y según datos contables.

▪ Según CAPM.

Se obtendrá la rentabilidad de la acción a partir del tanto de interés exento de riesgo (Euribor a 1 año) y la pendiente de la recta del modelo CAPM.

Se han anualizado las rentabilidades de Abertis y la del IBEX 35.

Fecha	Cierre	Rentabilidad diaria	Cierre Índice	Rentabilidad diaria Índice
22/05/2012	11,12		6661,3	
23/05/2012	10,79	-0,029676259	6440,5	-0,033146683
24/05/2012	10,91	0,011121409	6534,4	0,014579613
25/05/2012	11	0,008249313	6543	0,001316112
28/05/2012	10,94	-0,005454545	6401,2	-0,021672016
29/05/2012	10,79	-0,013711152	6251,7	-0,023354996
30/05/2012	10,46	-0,030583874	6090,4	-0,025800982
31/05/2012	10,3	-0,015296367	6089,8	-9,85157E-05
01/06/2012	9,76	-0,052427184	6065	-0,004072383
04/06/2012	9,81	0,005122951	6239,5	0,028771641
05/06/2012	9,73	-0,008154944	6267,8	0,00453562
06/06/2012	9,9	0,017471737	6418,9	0,024107342
07/06/2012	10,07	0,017171717	6438,1	0,002991167
08/06/2012	10,12	0,004965243	6552	0,017691555
11/06/2012	10,08	-0,003952569	6516,4	-0,005433455
12/06/2012	9,91	-0,016865079	6522,5	0,0009361
13/06/2012	9,96	0,005045409	6615,3	0,014227673
14/06/2012	10,02	0,006024096	6696	0,012198993
15/06/2012	10,12	0,00998004	6719	0,003434886

Se han tomado las cotizaciones de un año completo, de estos datos se ha podido calcular la pendiente de la recta de regresión. La rentabilidad anual media del índice, de la acción y el tanto exento de riesgo son:

Acción Abertis		Ibex 35	
Rentabilidad media diaria	0,001120033	Rentabilidad media diaria	0,001112675
Rentabilidad media anualizada	0,28448843	Rentabilidad media anualizada	0,282619533
Desviación media diaria	0,016539261	Desviación media diaria	0,016862657
Desviación media anualizada	0,263592445	Desviación media anualizada	0,268746537

Lo que permite hacer una estimación sobre la rentabilidad anual de Abertis según la evolución de los precios en el mercado continuo:

Pendiente recta regresión	0,573083859
Euribor 1 año:	0,0475
Prima de riesgo	0,134743209
Rentabilidad de Abertis (CAPM)	0,04857104

Si la tasa de crecimiento de los beneficios netos es la media de las obtenidas hasta hoy, 0,006208426 (según información obtenida de los estados financieros), el PER según el precio en la bolsa es,

$$PER = \frac{1 + 0,006208426}{0,04857104 - 0,006208426} = 23,75$$

Ese día, a través del análisis fundamental la Sociedad da información de la rentabilidad sobre los recursos propios⁶²:

ABERTIS

resumen noticias perfil  recomendaciones ratios/consenso gráficos interactivos velas carteras |

Precio	Variación	Volumen (títulos)		Volumen (€)	Hora		
14,25€	-0,04% ▼ -0,01€	477.095		6.815.180,00	14:16:18		
		2009	2010	2011	2012	2013	2014
	BPA (en €)	0,80	0,82	0,88	0,81	0,79	0,87
	Rentabilidad por dividendo	4,25%	3,86%	8,11%	4,61%	4,82%	5,03%
	Dividendo neto (en €)	0,53	0,55	1,16	0,66	0,69	0,72
	PER (veces)	16,91	14,95	13,29	15,33	18,22	16,51
	Beneficio neto (millones de €)	653,00	661,38	719,00	1.024,00	623,81	693,56
	Deuda neta (millones de €)	14.590,00	14.651,00	13.882,00	14.130,00	14.227,70	13.927,30
	Valor de los activos (por número de acciones)	5,27	4,94	3,90	4,71	4,55	4,78
	Ebitda (millones de €)	2.435,00	2.494,00	2.454,00	2.459,00	3.086,57	3.267,50
	Rentabilidad sobre recursos propios	15,24%	16,51%	22,64%	17,19%	17,25%	18,15%
	EV / Ebitda (veces)(*)	10,54	9,86	9,56	9,86	8,39	7,83
(*) Capitalización más deuda entre beneficio antes de impuestos y amortizaciones							

(*) Capitalización más deuda entre beneficio antes de impuestos y amortizaciones

Información ofrecida por: **FACTSET**

El PER publicado para 2013 es 18,22 y el PER calculado el 22-5-13 en base a la rentabilidad de las acciones en la Bolsa es 23,75. Ello indica que los inversores en Bolsa no esperan un aumento de los beneficios netos de la compañía. Esta aproximación tiene su justificación en la alta correlación que existe entre la acción y el Índice (coeficiente de correlación 0,8581).

▪ Según información contable.

Se debe conocer la rentabilidad de la empresa y la tasa de crecimiento de los beneficios. De la tabla anterior la rentabilidad media se medie por el ROE (rentabilidad de los recursos propios). El incremento medio de los beneficios de los 4 últimos años y la rentabilidad media de los recursos propios son:

Rentabilidad media (ROE) 2009-2012	0,17895
Incremento medio beneficios 2009-2012	0,006208426

El PER teórico según la información contable disponible debería ser

$$\frac{0,81 \cdot (1 + 0,006208426)}{0,17895 - 0,006208426} = 4,718197283.$$

Resultado muy alejado del publicado para 2013. Para realizar un cálculo fiable en base a datos contables es necesario tener más datos históricos. Cuando la acción está dentro de un índice bursátil y hay una elevada correlación entre la cotización y el índice la forma más fiable de estimar el PER es a través del modelo CAPM.

⁶² Fuente: <http://www.eleconomista.es/empresa/GAS-NATURAL/recomendaciones-consenso>

✿ **Ratios financieros.**

Es imprescindible dentro del análisis fundamental el análisis de ratios financieros para determinar si los precios que la empresa tiene en el mercado están respaldados por las magnitudes financieras básicas. Se destacarán algunos de ellos⁶³:

✿ **Ratios de liquidez, tesorería y disponibilidad.**

Pretenden dar información sobre la liquidez de la empresa.

$\text{Liquidez} = \frac{\text{Activo circulante}}{\text{Exigible a corto plazo}}$	$\text{Tesorería} = \frac{\text{Cientes} + \text{Disponible}}{\text{Exigible a corto plazo}}$	$\text{Disponibilidad} = \frac{\text{Disponible}}{\text{Exigible a corto plazo}}$
Intervalo: 1,5-2	Intervalo: 0,8-1	Sobre 0,3

✿ **Endeudamiento.**

Indica el grado de dependencia externa de la empresa.

$\text{Endeudamiento total} = \frac{\text{Deuda total}}{\text{Pasivo}}$	$\text{Calidad de la deuda} = \frac{\text{Exigible a corto}}{\text{Deuda total}}$
Intervalo: 0,5-0,6	

✿ **Ratio precio/valor contable:** relaciona la cotización de una empresa con su valor contable. Normalmente deben aparecer valores superiores a 1.

✿ **Pay Out:** ratio entre dividendo y beneficios de la empresa, indica el % de distribución de beneficios que llega al accionista.

$$\text{Pay Out} = \frac{\text{Dividendos}}{\text{Beneficios netos}}$$

✿ **Rentabilidad⁶⁴.**

$\text{Rtdad económica} = \frac{\text{BAII}}{\text{Activo total}}$	$\text{Rtdad financiera} = \frac{\text{BAI}}{\text{recursos propios}}$	$\text{Apalancamiento} = \frac{\text{Rtdad financiera}}{\text{Rtdad económica}}$ >1, la deuda le aporta un aumento de los beneficios =1, la deuda no le aporta nada <1, la deuda le provoca una pérdida de beneficios.
$\text{Autonomía financiera} = \frac{\text{recursos propios}}{\text{Deuda Total}}$ Sobre 0,7		

✿ **Ratios e indicadores bursátiles.**

-
$$\text{PayOut bursátil} = \frac{\text{Cotización}}{\text{Beneficio por acción}}$$

-
$$\text{Rentabilidad por dividendos} = \frac{\text{Dividendo}}{\text{Cotización}}$$

⁶³ Es muy interesante el contenido del manual: EL ANÁLISIS DE LA EMPRESA A TRAVÉS DE LOS RATIOS de **Eliseu Santandreu**.

⁶⁴ BAI=Beneficio antes de intereses e impuestos.

BAI= Beneficio antes de impuestos.

BN=Beneficio después de impuestos e intereses.

Recursos propios= Capital social+Reservas.

$$- \text{Ratio precio / valor contable} = \frac{\text{Cotización}}{\text{Valor contable por acción}}$$

- **Volatilidad:** σ , desviación estándar de las cotizaciones diarias calculada a través de la serie histórica de precios (como mínimo 250 días de mercado).

- **Beta:** β , coeficiente de proporcionalidad que determina la volatilidad de la acción en función de la volatilidad del mercado. Se obtiene calculando la recta de regresión entre el índice del mercado y las cotizaciones de la acción. La volatilidad de la acción es $\sigma_{acción} = \beta \cdot \sigma_{mercado}$. Si $|\beta| > 1$, la acción es más volátil que el mercado, luego, cualquier movimiento del mercado provocará un movimiento mayor en la cotización de la acción. Si $|\beta| = 1$, la acción tiene la volatilidad del mercado, se mueven en paralelo y si, $|\beta| < 1$, la acción es más resistente al cambio que el mercado.

- **Coefficiente de correlación** entre el índice del mercado y la cotización de la acción. Si el coeficiente de correlación es alto los precios de la acción se moverán en el mismo sentido que el mercado y si, además, tiene $|\beta| > 1$ el movimiento en términos absolutos será mayor que el del mercado.

🌸 **Información económica sobre el sector, área geográfica de negocio, ect.**

Se debe incorporar toda aquella información de contenido socio-económico que afecta a la actividad de la empresa.

Existen multitud de fuentes de información que aportan datos sobre la situación económica de un país, un determinado sector productivo, incluso del mercado de un determinado producto. La lectura habitual de este tipo de información ayuda a conocer el ambiente económico-financiero que envuelve a los mercados.

8.2 El análisis técnico.

Está basado en la teoría del comportamiento errático y se centra exclusivamente en el estudio de los datos internos del mercado. Su fundamento consiste en que todos los factores, económicos, financieros, políticos, sociológicos, etc., influyen en la determinación de los precios y, por tanto, están contenidos en el precio, afectando tanto a la oferta como a la demanda del mercado: la evolución de los volúmenes de contratación y las variaciones de las cotizaciones bastan para prever la evolución de los precios en el mercado.

Para entender este tipo de análisis se debe asumir que el clima bursátil es el reflejo del ambiente financiero que respira el mercado; este ambiente depende de la bondad de las variables económicas que inciden directamente sobre el mercado financiero:

🌸 **El tanto de interés.**

La volatilidad de los tipos de interés que las entidades financieras ofrecen por la captación de dinero afecta directamente a la cotización de los títulos. Una subida de los tipos de interés provoca una caída de las cotizaciones porque supone un aumento de los gastos financieros, empeorando los resultados de la empresa, reduce el consumo y las ventas. Por otro lado, un aumento del tanto de interés provoca un trasvase de dinero de la renta variable a la fija. Sin embargo, una baja de los tipos de interés provoca reacciones opuestas a las anteriores lo que produce una mayor afluencia de dinero a los mercados de valores y con ello un aumento de las cotizaciones de los activos.

🌸 **La inflación.**

La inflación es un indicador de la pérdida del valor adquisitivo del dinero como consecuencia de una subida de precios. Cuanto mayor es la inflación mayor rentabilidad se exige a los activos para que continúen siendo atractivos para el inversor. En una primera fase, un aumento de inflación genera un flujo de la renta fija a la variable, lo que hace subir las cotizaciones de las acciones, a continuación, si la inflación persiste, ésta se deja sentir en las cuentas de resultados de las empresas provocando una caída de las cotizaciones.

● *La regulación legal de los mercados.*

Un espacio geo-político que tenga una legislación muy restrictiva sobre los movimientos de capitales dará lugar a un mercado poco flexible y el dinero no acudirá a él. Por el contrario, si se liberaliza la movilidad de capitales y el mercado es flexible el dinero accederá a dicho mercado. Las normativas mercantiles, fiscales y de comercio exterior afectan directamente al precio de los activos.

● *Otros aspectos.*

Al margen de los factores expuestos, existen otros de carácter socio-económico que pueden afectar a las cotizaciones: conflictos bélicos, determinado color del partido político que gobierna, etc.

La primera referencia al análisis técnico vino de la mano de *Charles Henry Dow* en 1882 con lo que se conoce como “*Teoría de Dow*”. Esta ayuda a detectar señales de compra o de venta a partir de la información que proporciona el mercado. Para *Dow* tendencia alcista es aquella en que los mínimos del día son más altos que los máximos del día anterior y la tendencia bajista es aquella en que los máximos del día son inferiores a los mínimos del día anterior.

Se basa en los siguientes supuestos:

☀ Los inversores son racionales y, por tanto, los cambios diarios en los índices tienen en cuenta el juicio de todos los inversores. Estos descuentan toda información que puede afectar a la oferta y demanda de valores.

☀ El mercado tiene tres evoluciones:

➤ *Primaria*: Coge un horizonte temporal de uno a varios años y refleja una evolución alcista o una bajista.

La fase alcista se inicia con un aumento del volumen de contratación de los inversores expertos (se espera que suba la cotización en el futuro); ante la información generalizada de “Boom bursátil” acuden los inversores inexpertos acudiendo en masa (cenit de la cotización). Más tarde los expertos empiezan a vender ordenadamente los títulos (se inicia una baja tímida de las cotizaciones). Al generalizarse las ventas caen los precios y cunde el pánico entre los inversores inexpertos (caída libre de las cotizaciones). Las ventas continúan hasta que el precio sea lo suficientemente bajo para que los expertos vuelvan a entrar.

➤ *Secundaria*: va de uno a cuatro meses. Recoge retrocesos dentro de una tendencia alcista y subidas dentro de una tendencia bajista (se conocen como correcciones y suelen alcanzar un tercio del terreno recorrido por el movimiento primario).

➤ *Terciaria*: El plazo de observación es de unas horas y recogen las correcciones de los movimientos secundarios, la información que proporciona este movimiento es poco fiable.

📊 **Indicadores.**

Los indicadores de la bolsa nos permiten hacernos una idea aproximada del desarrollo de los mercados de valores, así como del probable crecimiento de estos mercados en un futuro y su repercusión en el precio de los activos que se negocian.

✿ **Amplitud auténtica:** distancia entre la cotización máxima y mínima del día. Puede ser un indicador de la volatilidad del día.



✿ **Líneas de tendencia.**

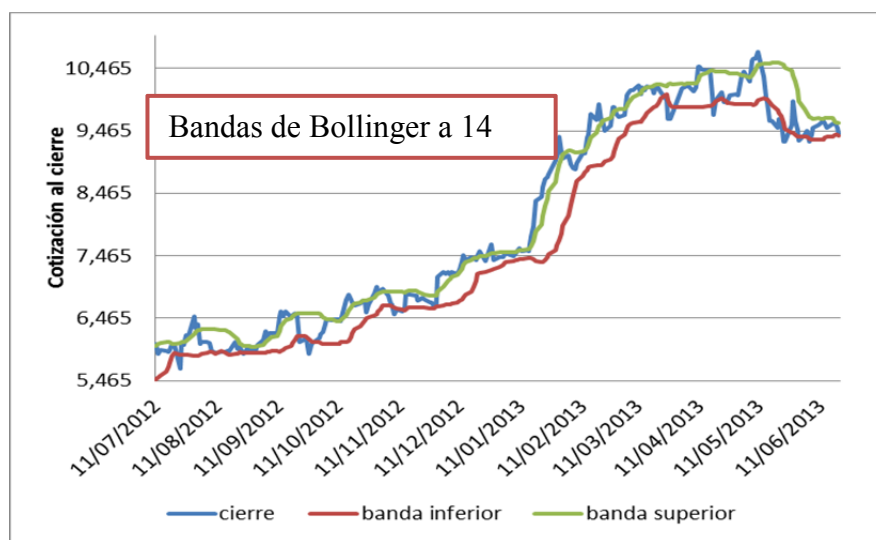
Una **línea de tendencia** es una línea recta que se traza uniando sucesivos mínimos, si se trata de una tendencia alcista, o sucesivos máximos, si se trata de una tendencia bajista.

Si es una tendencia alcista (soporte), deben existir dos mínimos consecutivos, de tal manera que el segundo mínimo sea superior al primero. La línea de tendencia se confirma si se vuelve a producir un tercer mínimo que toca la línea que se ha dibujado. De idéntica forma se razonaría para la tendencia bajista (resistencia), en este caso se tomarían dos máximos. La ruptura de una línea de tendencia normalmente anticipa un cambio de tendencia.



✿ **Envoltentes:** líneas paralelas y simétricas que encierran el área de fluctuación de las cotizaciones. La inferior es la línea de *soporte* y la superior la de *resistencia*. Se crean envoltentes para corto plazo dando una banda de fluctuación del 3% sobre la media, y para el medio y largo plazo se da una banda de fluctuación entre el 5% y el 10%. Una envolvente significativa es la **Banda de Bollinger**; si el comportamiento de los precios sigue una distribución normal, el 68,2% de los precios observados a lo largo de un número amplio de sesiones de mercado se situará alrededor del precio medio y dentro del intervalo cuyo radio es la desviación tipo, el 68,2% de los precios están dentro del intervalo centrado en la media de la cotización y con radio la desviación estándar de la cotización.

Almirall S.A.					Bollinger 14 días			
Fecha	Cierre	Máx	Mín	Volumen	media	desviación	bandas	
							inferior	superior
11/07/2012	6,05	6,18	6	214478	5,75133333	0,27293141	5,47840192	6,02426475
12/07/2012	5,89	6,02	5,89	127812	5,77733333	0,26624467	5,51108867	6,043578
13/07/2012	5,95	5,97	5,79	150343	5,80733333	0,25854636	5,54878697	6,0658797
16/07/2012	5,94	6,04	5,84	102799	5,844	0,2346572	5,6093428	6,0786572
17/07/2012	5,93	6,03	5,9	69968	5,88266667	0,19440393	5,68826273	6,0770706
18/07/2012	5,96	6,02	5,91	81855	5,916	0,15865266	5,75734734	6,07465266
19/07/2012	6,05	6,05	5,98	101209	5,956	0,10144292	5,85455708	6,05744292
20/07/2012	6,03	6,1	5,93	98695	5,98066667	0,06485539	5,91581127	6,04552206
23/07/2012	5,66	5,99	5,66	188085	5,96933333	0,09705439	5,87227894	6,06638773
24/07/2012	6,06	6,39	6,02	305448	5,97733333	0,09922813	5,8781052	6,07656147
25/07/2012	6,04	6,28	5,81	205763	5,97666667	0,09877022	5,87789645	6,07543688
26/07/2012	6,2	6,3	6,12	179568	5,98933333	0,11334118	5,87599216	6,10267451
27/07/2012	6,17	6,26	6,07	141472	6	0,12198361	5,87801639	6,12198361
30/07/2012	6,5	6,59	6,23	376121	6,032	0,17463104	5,85736896	6,20663104
31/07/2012	6,3	6,48	6,13	322404	6,04866667	0,18704248	5,86162419	6,23570915
01/08/2012	6,36	6,41	6,18	101603	6,06933333	0,20253285	5,86680048	6,27186618
02/08/2012	6,05	6,41	6,05	70894	6,08	0,19694331	5,88305669	6,27694331
03/08/2012	6,09	6,09	5,73	152115	6,08933333	0,19385447	5,89547886	6,2831878
06/08/2012	6,08	6,21	6,05	96510	6,09866667	0,18976711	5,90889956	6,28843378
07/08/2012	6,06	6,19	6,05	37861	6,10733333	0,18476892	5,92256441	6,29210226
08/08/2012	5,93	6,13	5,86	34926	6,10533333	0,18650707	5,91882626	6,29184041
09/08/2012	5,92	6,05	5,83	76695	6,09666667	0,19182168	5,90484499	6,28848834
10/08/2012	5,91	5,98	5,85	9883	6,08866667	0,19687108	5,89179559	6,28553775
13/08/2012	5,93	5,96	5,91	19990	6,10666667	0,16691981	5,93974686	6,27358647



Ejemplo 85: Se ha observado la cotización de un activo durante 3 meses, su cotización media es de 40€ y la desviación estándar es del 35% sobre la media. Si se acepta el comportamiento de normalidad, el 68,2% de las cotizaciones deberá estar comprendida dentro del intervalo [26€ ,54€].

Una señal de cambio en la cotización se puede obtener cuando la cotización corta la banda, ya que la tendencia de los precios será a situarse dentro de la banda.

✿ **Índice de fuerza relativa:** Lo más habitual es obtenerlo a partir de las cotizaciones de 14 días y fluctúa entre 0 y 100 (mayor que 70 da señal de venta, menor que 30 da señal de compra).

$$RSI_t^k = 100 - \frac{100}{1 + \frac{I_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]}}} = 100 \left(1 - \frac{D_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]} + I_{[t-k,t]}} \right)$$

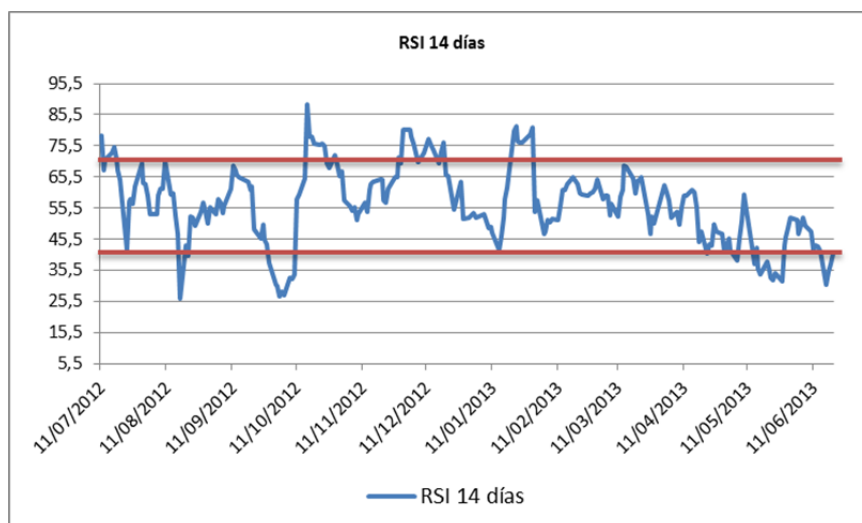
Siendo, I el promedio de los incrementos y D el promedio de las bajadas, del periodo considerado de k

sesiones. Si se realizan operaciones se obtiene que $RSI_t^k = 100 \frac{I_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]} + I_{[t-k,t]}}$.

Para $RSI_t^k = 100 \frac{I_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]} + I_{[t-k,t]}} > 70$, se tiene que $\frac{I_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]}} > \frac{7}{3}$, es decir si la media de los incrementos es superior a 2,333 veces la media de las bajadas se considera que la acción está sobrevalorada y por tanto lo más adecuado es vender.

Para $RSI_t^k = 100 \frac{I_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]} + I_{[t-k,t]}} < 30$, se tiene que $\frac{I_{[t-k,t]}}{D_{[t-k,t]}} < \frac{3}{7}$, es decir si la media de los incrementos es menor que 0,428 veces la media de las bajadas se considera que la acción está infravalorada y por tanto lo más adecuado es comprar.

Almirall S.A.					medias						
Fecha	Cierre	Máx	Mín	Volumen	subidas	bajadas	subidas	bajadas	RSI 14 días	I/D	acción
11/07/2012	6,05	6,18	6	214478		0	0,10714286	0,02857143	78,9473684	3,75	vender
12/07/2012	5,89	6,02	5,89	127812		0,16	0,10714286	0,05142857	67,5675676	2,08333333	mantener
13/07/2012	5,95	5,97	5,79	150343	0,06		0,10125	0,04166667	70,845481	2,43	vender
16/07/2012	5,94	6,04	5,84	102799		0,01	0,10125	0,03666667	73,4138973	2,76136364	vender
17/07/2012	5,93	6,03	5,9	69968		0,01	0,1	0,03285714	75,2688172	3,04347826	vender
18/07/2012	5,96	6,02	5,91	81855	0,03		0,09125	0,03666667	71,3355049	2,48868636	vender
19/07/2012	6,05	6,05	5,98	101209	0,09		0,07625	0,03666667	67,5276753	2,07954545	mantener
20/07/2012	6,03	6,1	5,93	98695		0,02	0,06285714	0,03428571	64,7058824	1,83333333	mantener
23/07/2012	5,66	5,99	5,66	188085		0,37	0,055	0,07625	41,9047619	0,72131148	mantener
24/07/2012	6,06	6,39	6,02	305448	0,4		0,10333333	0,07625	57,5406032	1,35519126	mantener
25/07/2012	6,04	6,28	5,81	205763		0,02	0,10333333	0,07375	58,3529412	1,40112994	mantener
26/07/2012	6,2	6,3	6,12	179568	0,16		0,11142857	0,08428571	56,9343066	1,3220339	mantener
27/07/2012	6,17	6,26	6,07	141472		0,03	0,12833333	0,0775	62,3481781	1,65591398	mantener
30/07/2012	6,5	6,59	6,23	376121	0,33		0,17833333	0,0775	68,7068404	2,30107527	mantener
31/07/2012	6,3	6,48	6,13	322404		0,2	0,17833333	0,1025	63,5014837	1,7398374	mantener
01/08/2012	6,36	6,41	6,18	101603	0,06		0,16142857	0,09428571	63,1284916	1,71212121	mantener
02/08/2012	6,05	6,41	6,05	70894		0,31	0,17833333	0,12125	59,527121	1,47079038	mantener
03/08/2012	6,09	6,09	5,73	152115	0,04		0,15857143	0,13714286	53,6231884	1,15625	mantener
06/08/2012	6,08	6,21	6,05	96510		0,01	0,15857143	0,13714286	53,6231884	1,15625	mantener
07/08/2012	6,06	6,19	6,05	37861		0,02	0,18	0,1225	59,5041322	1,46938776	mantener
08/08/2012	5,93	6,13	5,86	34926		0,13	0,198	0,12333333	61,6182573	1,60540541	mantener
09/08/2012	5,92	6,05	5,83	76695		0,01	0,198	0,12222222	61,8320611	1,62	mantener
10/08/2012	5,91	5,98	5,85	9883		0,01	0,198	0,08222222	70,6582078	2,40810811	vender
13/08/2012	5,93	5,96	5,91	19990	0,02		0,122	0,08222222	59,7388466	1,48378378	mantener
14/08/2012	5,92	5,97	5,81	36895		0,01	0,122	0,08111111	60,0656455	1,50410959	mantener
15/08/2012	5,93	5,97	5,92	9550	0,01		0,092	0,08111111	53,1450578	1,13424658	mantener
16/08/2012	5,94	6,07	5,93	75818	0,01		0,07833333	0,0875	47,2361809	0,8952381	mantener
17/08/2012	5,94	6,06	5,94	358989		0	0,028	0,07777778	26,4705882	0,36	comprar



Ejemplo 86: El promedio de los incrementos que han representado subidas en un plazo de sesiones de 15 días asciende a 0,6€ y el promedio de las bajadas es de 1,75€. El indicador RSI será:

$$RSI = 100 - \frac{100}{1 + \frac{0,6}{1,75}} = 25.52$$

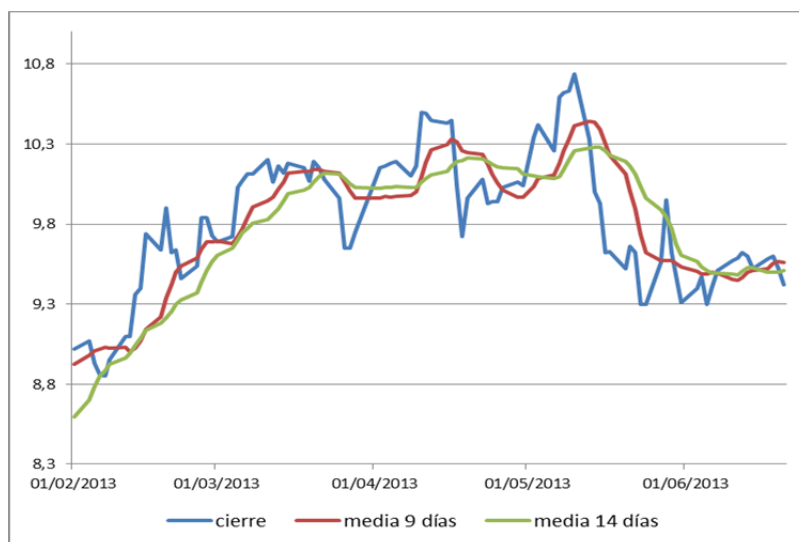
Como es menor que 30 será una señal de compra. También se podría obtener la misma conclusión haciendo

$$\frac{0,6}{1,75} = 0,3428 < 0,428.$$

✿ Media móvil aritmética.

Media simple de las cotizaciones dentro de un periodo de observación. Dado que se convierte en una tendencia allanada de las cotizaciones, las envolventes alrededor de la media móvil se convierten en líneas de soporte y de resistencia y su violación da señales de venta si está por debajo de la línea de soporte o de compra si está por encima de la línea de resistencia.

- Si la media móvil está por encima del precio de cierre aparece una señal de venta, hay mayor posibilidad que el precio tienda a bajar; si la media móvil está por debajo del precio de cierre aparece una señal de compra, hay mayor posibilidad que el precio tienda a subir.
- Si dos medias móviles se cortan y la corta pasa a estar por encima de la larga aparece una señal de compra, si la corta pasa a estar por debajo de la larga entonces la señal es de venta.
- Si hay tres medias móviles (a 9 días, 14 días y 20 días, respectivamente) si la corta cruza hacia arriba a la intermedia y ésta a la larga entonces se está en una *fase alcista*. Por el contrario, si la corta está por debajo de la intermedia y ésta por debajo de la larga, se está en una *fase bajista*.



✿ Media móvil exponencial.

Esta media móvil pretende dar más peso a las últimas cotizaciones, de esta forma los inversores pueden tomar decisiones más rápidas. La expresión es:

$$MME_t^k = Cot_t^{cierre} \cdot \frac{2}{k+1} + MME_{t-1}^k \left(1 - \frac{2}{k+1} \right)$$

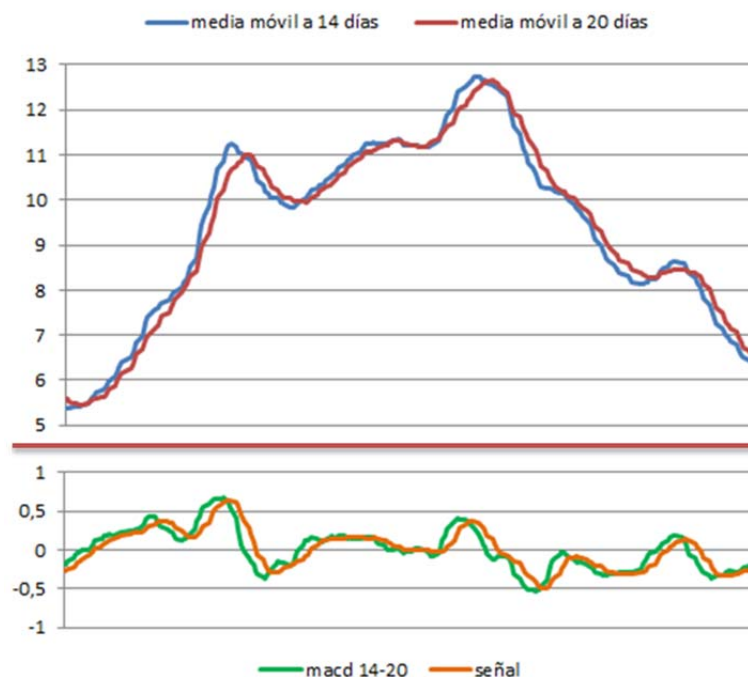
siendo el primer valor ($t = 1$) la media aritmética simple para k observaciones.

✿ **Oscilador de las medias móviles: MACD.**

Este indicador se obtiene por diferencia de una media móvil a corto y una media móvil a largo. El resultado de esta resta es el MACD. Como la media móvil a largo es menos volátil que la media móvil a corto, este indicador da el margen que se genera asociado a esta característica. Si las dos medias móviles están muy juntas en ese periodo los precios habrán tenido poca volatilidad, pero si están muy separadas, la volatilidad aumenta, entonces se entra en un escenario de posible cambio de tendencia.

Para poder detectar los puntos de posible inflexión se define la Señal. La Señal es la media móvil del MACD, cuya función es medir en media el margen entre la media móvil a corto y la media móvil a largo. Si el MACD cruza la Señal hacia arriba los precios están tomando fuerza ascendente y se genera una señal alcista, lo que indica una posición de compra; por el contrario, si el MACD cruza la Señal hacia abajo los precios están tomando una fuerza descendente y se genera una señal bajista, lo que supone una posición de venta.

Cuando el MACD baja y los precios suben, entonces la fuerza de subida del precio se agota ya que la media móvil a corto y la media móvil a largo se acercan, se llega a un punto de máximo y hay muchas posibilidades de que los precios empiecen a caer. Si, por el contrario, el MACD tiende a cero y los precios bajan, la distancia entre la media móvil a corto y la media móvil a largo tienden a igualarse, indicando que la caída de los precios se agota, lo que da lugar a una señal de compra.



Observando el gráfico se puede apreciar un periodo de tiempo en que la tendencia (en este caso alcista) se agota por las siguientes señales: la diferencia entre las dos medias móviles es muy pequeña y el MACD es casi paralelo y próximo a 0; puede comprobarse que la tendencia cambia y se produce un aumento considerable del MACD.

✿ **Oscilador R.**

Es un oscilador de tasa de cambio, ya que mide la variación porcentual del cociente entre la diferencia (cotización máxima-cotización al cierre) y la diferencia (cotización máxima-cotización mínima) de un

periodo. Se obtiene a partir de las cotizaciones de diez a veinte días y se calcula según la siguiente fórmula:

$$\%R_t^k = 100 \cdot \frac{Cot_{[t-k,t]}^{\max} - Cot_t^{cierre}}{Cot_{[t-k,t]}^{\max} - Cot_{[t-k,t]}^{\min}}$$

siendo la cotización máxima del periodo, la mínima y la de cierre del último día del periodo. Si es superior a 80 es señal de compra y si está por debajo de 20 es señal de venta. Si se comparan las tendencias de cotizaciones y del oscilador R, se pueden obtener señales de cambio de tendencia.

Si $\%R_t^k = 100 \cdot \frac{Cot_{[t-k,t]}^{\max} - Cot_t^{cierre}}{Cot_{[t-k,t]}^{\max} - Cot_{[t-k,t]}^{\min}} > 80$, realizando las operaciones oportunas se tiene que,

$$Cot_t^{cierre} < 0,2 \cdot Cot_{[t-k,t]}^{\max} + 0,8 \cdot Cot_{[t-k,t]}^{\min},$$

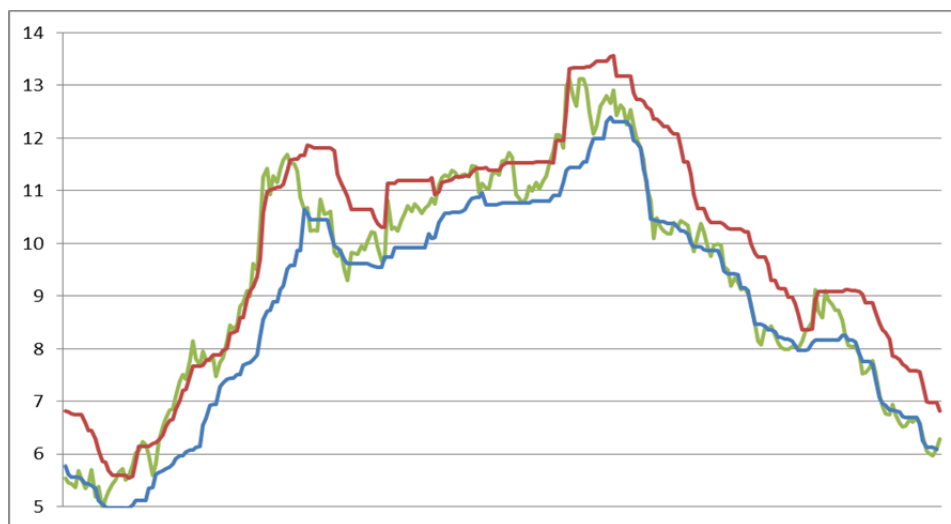
Lo que indica que la cotización es inferior a la media ponderada de la cotización máxima y mínima del periodo, usando una ponderación con un escenario pesimista, luego lo más adecuado es comprar.

Por el contrario, si $\%R_t^k = 100 \cdot \frac{Cot_{[t-k,t]}^{\max} - Cot_t^{cierre}}{Cot_{[t-k,t]}^{\max} - Cot_{[t-k,t]}^{\min}} < 20$, realizando las operaciones oportunas se tiene que,

$$Cot_t^{cierre} > 0,8 \cdot Cot_{[t-k,t]}^{\max} + 0,2 \cdot Cot_{[t-k,t]}^{\min},$$

Lo que indica que la cotización es mayor que la media ponderada de la cotización máxima y mínima del periodo, usando una ponderación con un escenario optimista, luego lo más adecuado es vender.

	cot. Max 14 días	cot. min. 14 días	cot. cierre	límite inferior	límite superior	posi ción
20/02/2009	7,14	5,53	5,54	5,852	6,818	comprar
23/02/2009	7,14	5,43	5,45	5,772	6,798	comprar
24/02/2009	7,14	5,22	5,43	5,604	6,756	comprar
25/02/2009	7,14	5,17	5,37	5,564	6,746	comprar
26/02/2009	7,14	5,17	5,68	5,564	6,746	mantener
27/02/2009	7,14	5,17	5,53	5,564	6,746	comprar
02/03/2009	6,93	5,17	5,35	5,522	6,578	comprar
03/03/2009	6,77	5,11	5,44	5,442	6,438	comprar
04/03/2009	6,77	5,11	5,7	5,442	6,438	mantener
05/03/2009	6,57	5,11	5,19	5,402	6,278	comprar
06/03/2009	6,32	5,1	5,39	5,344	6,076	mantener
09/03/2009	6,12	4,86	4,96	5,112	5,868	comprar
10/03/2009	6,12	4,77	5,16	5,04	5,85	mantener
11/03/2009	5,92	4,77	5,29	5	5,69	mantener
12/03/2009	5,79	4,77	5,43	4,974	5,586	mantener
13/03/2009	5,79	4,77	5,51	4,974	5,586	mantener
16/03/2009	5,79	4,77	5,65	4,974	5,586	vender
17/03/2009	5,79	4,77	5,72	4,974	5,586	vender
18/03/2009	5,79	4,77	5,51	4,974	5,586	mantener
19/03/2009	5,74	4,77	5,58	4,964	5,546	vender
20/03/2009	5,78	4,77	5,78	4,972	5,578	vender
23/03/2009	6,1	4,77	6,02	5,036	5,834	vender
24/03/2009	6,49	4,77	6,05	5,114	6,146	mantener
25/03/2009	6,49	4,77	6,24	5,114	6,146	vender
26/03/2009	6,49	4,77	6,18	5,114	6,146	vender
27/03/2009	6,49	4,77	5,98	5,114	6,146	mantener
30/03/2009	6,49	5,05	5,59	5,338	6,202	mantener
31/03/2009	6,49	5,08	5,8	5,362	6,208	mantener
01/04/2009	6,49	5,4	6,23	5,618	6,272	mantener
02/04/2009	6,6	5,4	6,51	5,64	6,36	vender



Ejemplo 87: La cotización máxima de un periodo de 15 días ha sido 20€, la mínima 17€ y la de cierre 22€. El

indicador será: $\%R = 100 \cdot \frac{22 - 26}{20 - 17} = 66,66$.

Como está dentro del intervalo $[20,80]$ no aporta ninguna señal.

✿ Tasa de cambio:

$$T\text{Cambio}_t^k = \frac{Cot_t - Cot_{t-k}}{Cot_{t-k}} \cdot 100 \quad \text{con} \quad t - k < t \quad \text{y} \quad k = \text{días entre dos cotizaciones}.$$

Se toman las cotizaciones al cierre. Si es creciente, hay señal de compra y, si es decreciente, hay señal de venta.

Ejemplo 88: Se compara la variación de la cotización de hoy, que ha sido de 4,36 u.m., con la cotización de

hace una semana, que fue de 5,23 u.m. La tasa de cambio es: $T\text{Cambio}_5^0 = \frac{4,36 - 5,23}{5,23} \% = -14,64\%$

✿ Volúmenes.

El volumen de los títulos negociados en cada sesión informa sobre el fortalecimiento o debilitamiento de la tendencia que esté siguiendo el valor (sea alcista o bajista).

La relación entre volumen y tendencia es la siguiente:

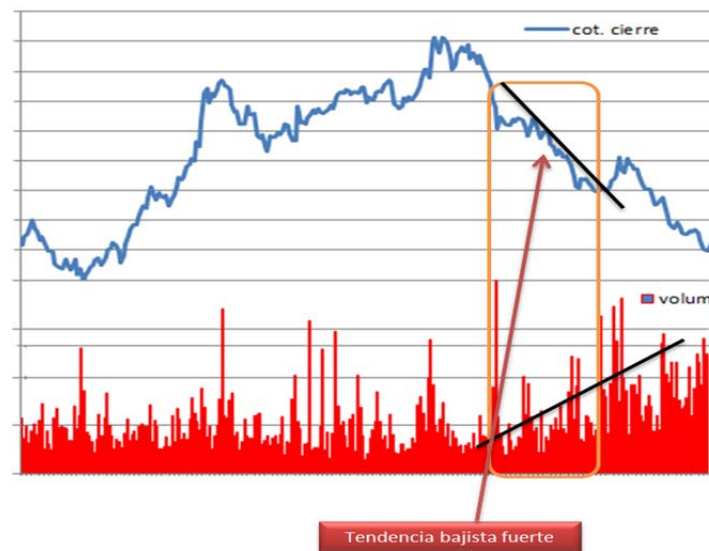
Tendencia alcista sólida: el volumen sube mientras la cotización sigue subiendo.

Tendencia alcista débil: la cotización sube pero el volumen va disminuyendo.

Tendencia bajista fuerte: el volumen sube mientras que la cotización sigue bajando.

Tendencia bajista débil: la cotización baja pero el volumen se va reduciendo.

En todo caso, los indicadores de volúmenes hay que interpretarlos conjuntamente con la gráfica de cotizaciones. Es importante tener en cuenta que un aumento de precios junto con una bajada de volumen marca una fase “vendedora” (*bearist*) y si bajan los precios y aumenta el volumen se está en una fase “compradora” (*bullist*).



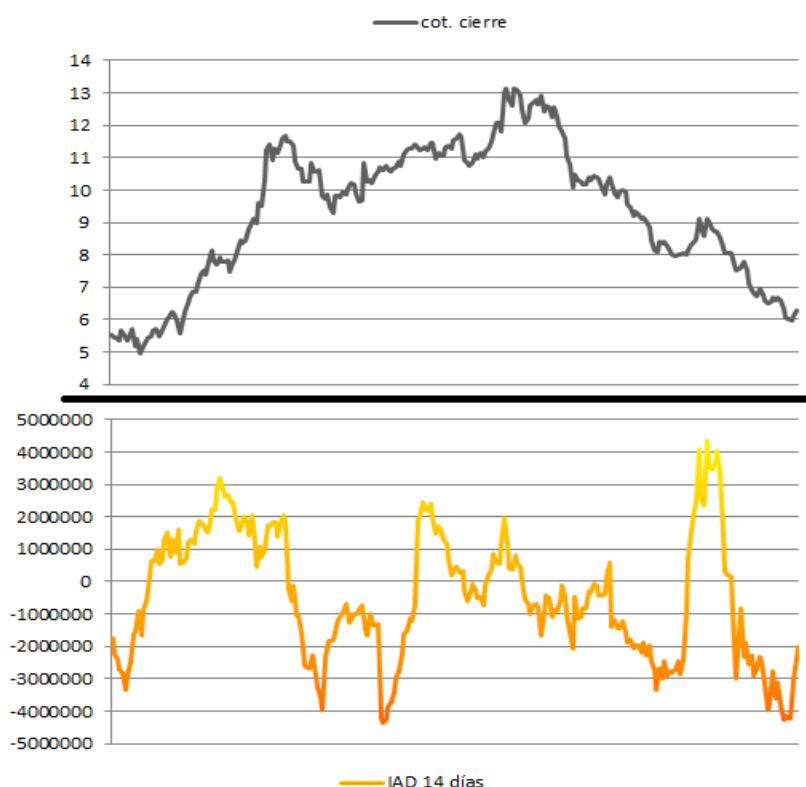
En este gráfico puede observarse un periodo de bajada de cotización y subida de volumen, lo que marca una tendencia bajista fuerte.

✿ *Línea de Acumulación\distribución.*

Este indicador se basa en la premisa de que cuanto mayor sea el volumen más firme es la tendencia de los precios; actúa como ponderador de los cambios de precio. Un A/D creciente refleja “acumulación” o compras y si es decreciente indica “distribución” o ventas. Si comparamos la pendiente del gráfico de precios con la del A/D se puede saber si los movimientos del precio se producen con un volumen alto (la pendiente del A/D sería mayor) o por el contrario se producen con un volumen bajo (pendiente menor en el A/D que en los precios).

Otra forma útil de interpretar el A/C es la búsqueda de divergencias. Si el gráfico de precios marca máximos ascendentes y al mismo tiempo el A/D marca máximos descendentes, podríamos interpretar esta situación como de divergencia que marcará el cambio de tendencia de los precios (éstos empezarán a bajar); si, por el contrario, los precios marcan mínimos descendentes y el A/D mínimos ascendentes se podría interpretar como divergencia alcista, lo que indicaría un cambio en la tendencia de los precios al alza.

$$IAD_t^k = \sum_{i=1}^k \frac{2Cot_{t-i}^{cierre} - (Cot_{t-i}^{Min} + Cot_{t-i}^{Max})}{Cot_{t-i}^{Max} - Cot_{t-i}^{Min}} \cdot Volumen_{t-i}$$



En este gráfico puede verse que hay un periodo de fuerte acumulación en el principio de la serie lo que indica un aumento de las cotizaciones (compras), de igual forma hay un periodo de distribución en la último tramo de la serie lo que indica una baja de las cotizaciones (ventas).

• **Oscilador de volumen.**

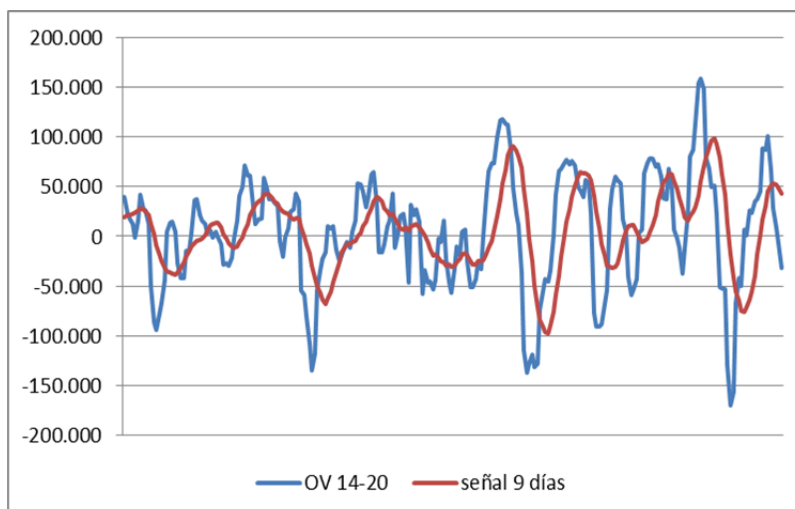
El Oscilador de Volumen actúa de la misma forma que el *MACD* pero para volúmenes:

$OV = \text{media móvil corta} - \text{media móvil larga}$; se puede expresar en porcentaje mediante la expresión:

$$OV\% = \frac{\text{media móvil corta} - \text{media móvil larga}}{\text{media móvil larga}} \cdot 100$$

Si este indicador está alrededor del 0, el volumen tiende

a mantenerse o acusa ligeros movimientos; si el indicador se sitúa por encima de 0 marca un aumento del volumen, lo que afianza la tendencia iniciada, y si el indicador es negativo entonces el volumen está descendiendo, lo que indica un agotamiento de la tendencia y se puede provocar una rotura de la tendencia.



● **Oscilador de saldo de volumen: OBV (on balance volum).**

El *OBV* (desarrollado por *Joseph Granville*) acumula el volumen según el sentido de la variación de las cotizaciones. Permite apreciar la presión compradora o vendedora y, por tanto, su fuerza o debilidad.

Un *OBV* ascendente indica presión compradora, si es descendente la presión es vendedora.

Cuando el *OBV* tiene tendencia contraria a la cotización lleva a una rotura de la tendencia en las cotizaciones.

Es un indicador que recoge la misma información del *IAD* pero es más sencillo de obtener.

Su expresión es⁶⁵:

$$OBV_t = \begin{cases} Si \Delta Cot_t > 0 \rightarrow OBV_{t-1} + Vol_t \\ Si \Delta Cot_t = 0 \rightarrow OBV_{t-1} \\ Si \Delta Cot_t < 0 \rightarrow OBV_{t-1} - Vol_t \end{cases}$$



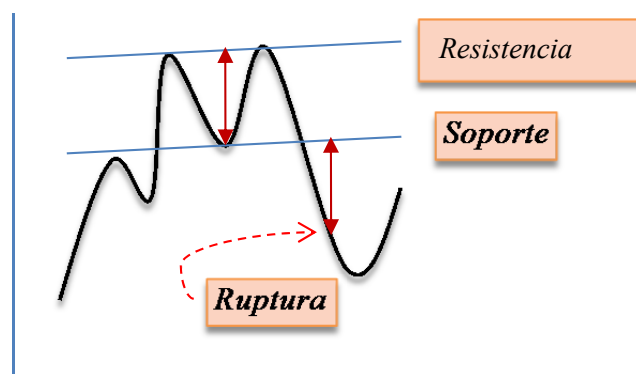
✚ **Figuras.**

✚ **Gráficos de líneas.**

Las figuras que se obtienen observando el perfil de las cotizaciones a lo largo del tiempo se pueden agrupar en: figuras que indican una ruptura de la tendencia y figuras que indican un mantenimiento de la tendencia.

✚ **Figuras que indican un cambio de tendencia.**

● **Doble pico.**

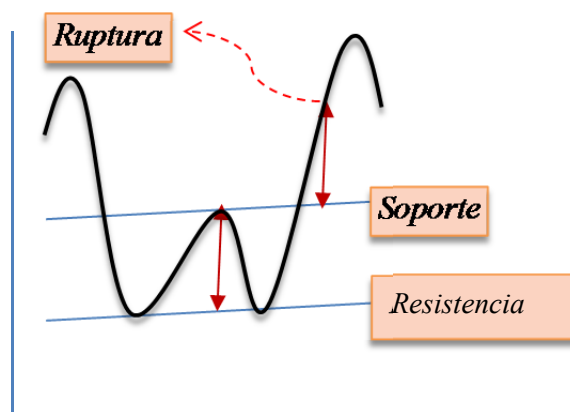


⁶⁵ Para $t=1$, el *OBV* es el volumen negociado ese día.

En una gráfica aparece un doble pico cuando se dan: un máximo, un mínimo y otro máximo (el segundo máximo inferior al primero); entre los dos máximo pueden transcurrir 1 o 2 meses; para confirmar el cambio de tendencia la caída después del segundo máximo debe ser como mínimo del 3%; el volumen desciende cuando se está llegando al segundo máximo.

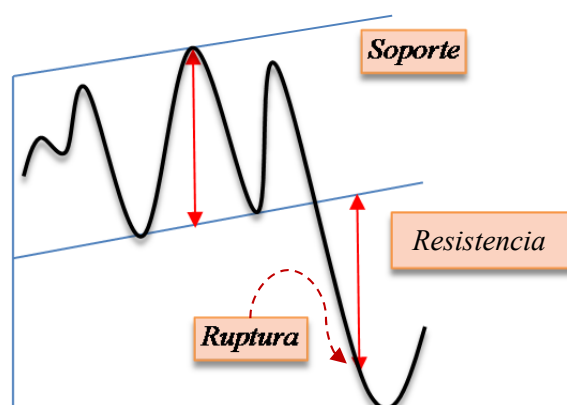
• **Doble valle.**

En una gráfica aparece un doble valle cuando se dan: un mínimo, un máximo y otro mínimo (el segundo mínimo superior al primero); entre los dos mínimos pueden transcurrir 1 o 2 meses; para confirmar el cambio de tendencia la subida después del segundo mínimo debe ser superior al 3%; el volumen desciende cuando se está llegando al segundo mínimo.

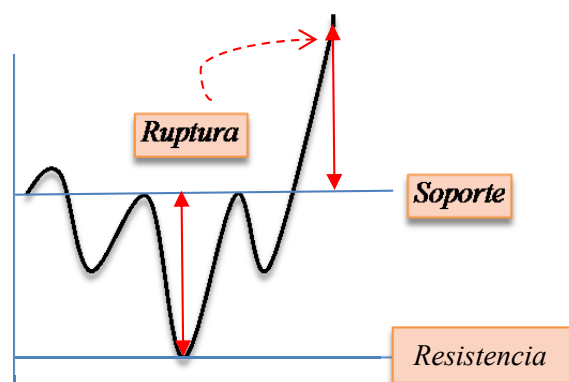


• **Hombro-Cabeza-Hombro.**

Es una de las figuras más típicas del análisis de gráficos, que indica un cambio de la tendencia alcista a bajista. Su nombre proviene de la semejanza a la cabeza y hombros de un hombre. Se caracteriza por comenzar con un pico, seguido de un segundo pico más alto y seguido de un tercer pico más bajo que el segundo, pero, aproximadamente, igual en altura al primero. El volumen es muy importante en esta figura: baja en el primer hombro, aumenta en la cabeza y vuelve a bajar en el segundo hombro. El cambio de tendencia se confirma cuando la caída toma la altura de la cabeza.

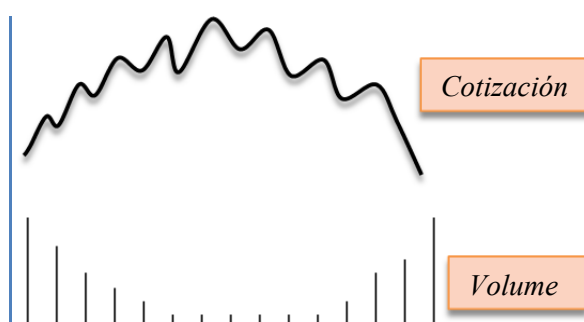


De la misma forma se forma la figura de cabeza y hombros invertidos.

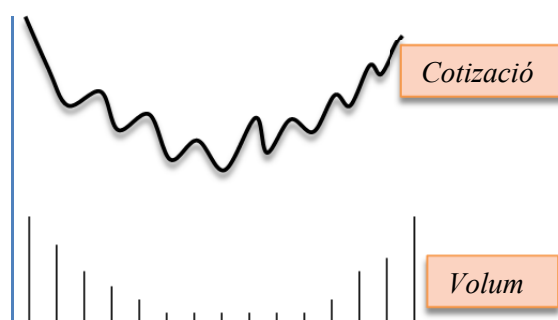


● *Cresta circular.*

Esta figura aparece en acciones que tienen un nivel bajo de contratación y el volumen más pequeño se da en el centro de la curva, cuando empieza a aumentar el volumen se confirma el cambio de tendencia.



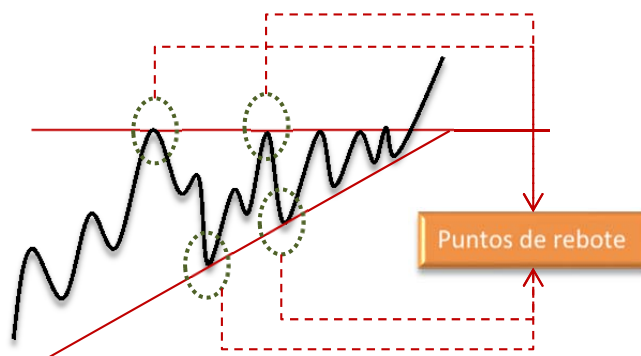
De la misma forma se configura el **Fondo Redondeado**.



✶ *Figuras que indican mantenimiento de la tendencia.*

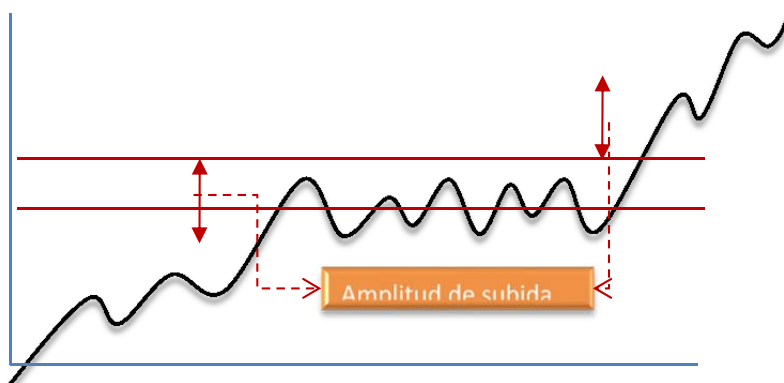
● *Triángulos.*

Son formaciones muy habituales y fáciles de encontrar. Se trata de figuras de equilibrio temporal, y no de cambio de tendencia, aunque en ocasiones puede serlo. Se pueden encontrar triángulos ascendente, descendentes y simétricos. Por ejemplo, en un triángulo ascendente la parte superior es horizontal y la parte inferior sigue la tendencia. Esta figura necesita cuatro puntos de rebote y el vértice es el punto de congestión; cuanto más tiempo se esté en el vértice más fuerte será el movimiento de salida, se observa una salida del punto de congestión por el aumento considerable del volumen. Es una figura que puede tardar varias semanas en formarse.



• Rectángulos.

Son formaciones de equilibrio temporal. No implican cambios de tendencia, ya que la ruptura puede ser al alza o a la baja. Se trata de un mercado que se encuentra en equilibrio entre oferta y demanda, que va formando un movimiento lateral de los precios en una banda determinada. Se forman dentro de una fase y actúan como periodos de descanso de las cotizaciones. Normalmente, el volumen tiende a bajar durante la duración de esta figura y se intuye que se sale de él cuando empieza a aumentar el volumen.



• Cuñas.

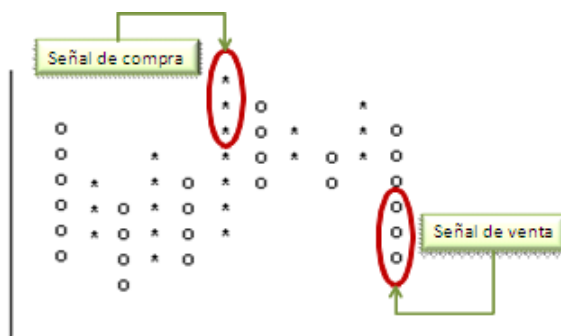
Son figuras que aparecen dentro de una tendencia y tienen una dirección contraria a la tendencia, representan rebajas ligeras de las cotizaciones (lo que se conoce como realización de beneficios); éstas pueden ser alcistas o bajistas, por ejemplo, si la cuña está en una fase alcista la dirección es contraria a la subida. El volumen va disminuyendo con la formación y alcanza su nivel más bajo en el vértice.



Como alternativa a las figuras obtenidas a partir del perfil de cotizaciones y volúmenes aparecen una serie de figuras que se basan en metodologías distintas, así, se pueden encontrar los gráficos de puntos, las ondas de *Elliott* o los gráficos de velas. Cada corriente de operadores de bolsa utiliza aquella metodología que cree va a dar señales más fiables.

✧ **Gráficos de puntos.**

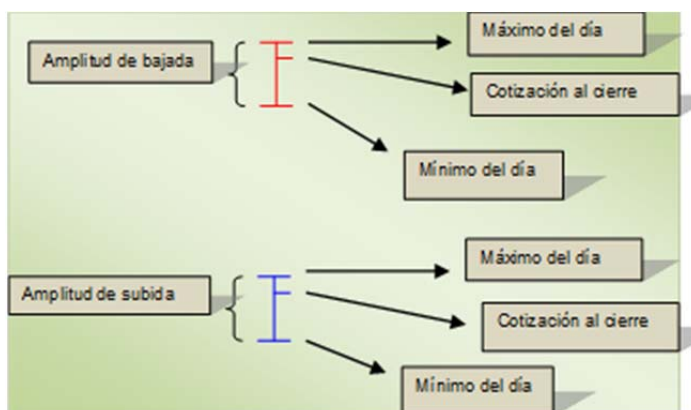
Los gráficos de puntos observan la evolución de las cotizaciones cuando presentan cambios de tendencia superiores al 5%. Las subidas se identifican con una estrella (x) y las bajadas con un círculo (o). A partir de estos movimientos se detectan señales de compra y de venta. Se construye dibujando sobre una misma columna un mismo movimiento y se salta de columna cuando cambia el sentido del movimiento de las cotizaciones.



✧ **Gráficos de barras.**

Los gráficos de barras se confeccionan teniendo en cuenta las cotizaciones máxima, mínima y cierre de cada sesión. Se complementa con el gráfico de volúmenes.

De la observación de los dos gráficos se puede extraer el carácter (fuerte o débil) de un activo en el mercado. Un activo con posición fuerte en el mercado presenta una elevada correlación entre la cotización y el volumen.

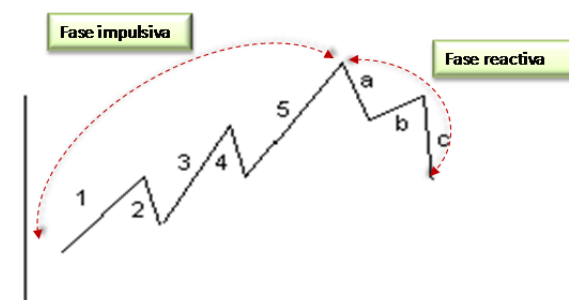


✧ **Las ondas de Elliott.**

La teoría de la Onda establece que cada decisión en el mercado está producida por una información relevante y, a su vez, cada decisión provoca una información significativa que el mercado absorbe. Mediante la observación de los movimientos en el mercado, Elliott descubrió que los precios siguen una estructura armónica básica que se encuentra revelada en la naturaleza. Esta estructura armónica descansa en la idea de acción-reacción y es la siguiente: la progresión última del mercado está determinada a través de una estructura específica de cinco ondas (cada movimiento de precios es una onda) tres marcan la dirección efectiva del mercado. Estas ondas están interrumpidas por ondas de sentido contrario.

Hay dos tipos de ondas:

- **Impulsivas:** se desarrollan en cinco ondas (3 directivas + 2 interrupciones).
- **Correctivas:** se desarrollan en tres ondas (2 directivas + 1 interrupción).



Las figuras que se describen por la sucesión de las ondas determinan señales de compra y de venta⁶⁶.

8.3. Introducción al diseño de carteras óptimas.

La Teoría de carteras enunciada por *Markowitz* en 1952 se basa en las siguientes hipótesis:

- ✱ El objetivo del inversor es maximizar la utilidad en términos de riqueza final en un periodo. La utilidad es la vía para determinar las preferencias individuales del inversor.
- ✱ Los inversores eligen en función del riesgo y de la rentabilidad. El riesgo se puede interpretar como “la posibilidad de lesión, daño o pérdida, asociado a una inversión”. Normalmente el riesgo vendrá medido por la desviación estándar de las rentabilidades de la inversión.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^n (R_r - \bar{R})^2}{n}}$$

Siendo R_r la rentabilidad del activo en la sesión r y $\bar{R}$ la rentabilidad media del activo después de n sesiones.

La rentabilidad de un activo en una sesión r se determinará a partir de la cotización del activo en dos sesiones consecutivas.

$$R_r = \frac{\text{Cotización}_r - \text{Cotización}_{r-1}}{\text{Cotización}_{r-1}}$$

Y la rentabilidad media será:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{r=1}^n R_r}{n}$$

- ✱ Los inversores tienen expectativas homogéneas de rentabilidad y riesgo. Ello supone la eficiencia del mercado con lo que el precio de un activo hoy es el mejor estimador de los posibles en el futuro:

$$\text{Cotización}_r = \text{Cotización}_{r-1} + \xi_r$$

Siendo ξ_r el término de perturbación no determinista que recoge toda la información sobre dicho activo que ha entrado en el mercado desde la última sesión.

- ✱ Los inversores tienen un horizonte temporal idéntico. Todos los inversores han planeado sus inversiones con una misma duración.
- ✱ La información del mercado está a disposición de todos los agentes que operan en él. No puede haber grupos que tengan información privilegiada.

El binomio (**rentabilidad, riesgo**) será los parámetros fundamentales para la selección óptima de activos. Un inversor decidirá invertir en aquella inversión que con el mismo nivel de riesgo le proporcione la máxima rentabilidad.

⁶⁶ Codina, J.; Torra, S. “Manual de las ondas de Elliott”. Ed. Inversión ediciones, Madrid.

Variables y relación entre las variables.

Para simplificar se considerará que un inversor dispone de un capital para invertir en una inversión con riesgo (por ejemplo acciones) y desea crear una cartera que tenga tres tipos distintos de activos. El inversor debe determinar qué proporción de ese capital destinará a cada tipo de activo para que con un nivel de riesgo σ_c obtenga la máxima rentabilidad posible. Para poder responder a la pregunta es necesario conocer:

- ✱ La rentabilidad media de cada activo: $\bar{R}_i \quad i = 1, 2, 3$
- ✱ La volatilidad de cada activo, medida por su desviación estándar: $\sigma_i \quad i = 1, 2, 3$
- ✱ La rentabilidad de la cartera: $\bar{R}_c = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \bar{R}_i$, siendo x_i la proporción de dinero a invertir en el activo i .
- ✱ Volatilidad de la cartera, medida por su desviación estándar:

$$\sigma_c = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2 + 2(x_1 x_2 \cdot \sigma_{12} + x_1 x_3 \cdot \sigma_{13} + x_2 x_3 \cdot \sigma_{23})}$$

Como $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad i \neq j \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2, 3$, se puede expresar el riesgo de la cartera en función del coeficiente de correlación.

- ✱ Participación del riesgo de un activo en el riesgo global de la cartera:

El activo 1 aporta el riesgo $x_1 (x_1 \sigma_1^2 + x_2 \cdot \sigma_{12} + x_3 \sigma_{13})$ que expresado en % sobre el riesgo total será:

$$\% \text{de riesgo total asociado al activo 1} = \frac{x_1 (x_1 \sigma_1^2 + x_2 \cdot \sigma_{12} + x_3 \sigma_{13})}{\sigma_c^2}$$

- ✱ El tanto de interés exento de riesgo al que un inversor puede endeudarse o prestar dinero, r .

Ejemplo 89: Los datos de rentabilidad y riesgo de una cartera formada por cuatro activos son:

Activo	Rentabilidad	Peso en la cartera	Matriz de varianzas y covarianzas en %			
Activo 1	3%	10%	30%	25%	15%	5%
Activo 2	4%	20%	25%	32%	14%	10%
Activo 3	2%	40%	15%	14%	20%	4%
Activo 4	5%	30%	5%	10%	4%	23%

La rentabilidad de la cartera ascenderá al 3,4% y la varianza de la cartera será del 13,75% (su desviación estándar o riesgo de la cartera es del 3,798%).

El siguiente cuadro recoge la participación de cada activo en el riesgo global de la cartera:

Activo	Rentabilidad	Peso en la cartera	Distribución del riesgo en %	Participación de cada activo en el riesgo global
Activo 1	3%	10%	1,55	11,273
Activo 2	4%	20%	3,5	25,455
Activo 3	2%	40%	6,4	39,273
Activo 4	5%	30%	3,3	24
Cartera	3,4%	Varianza	13,75	100

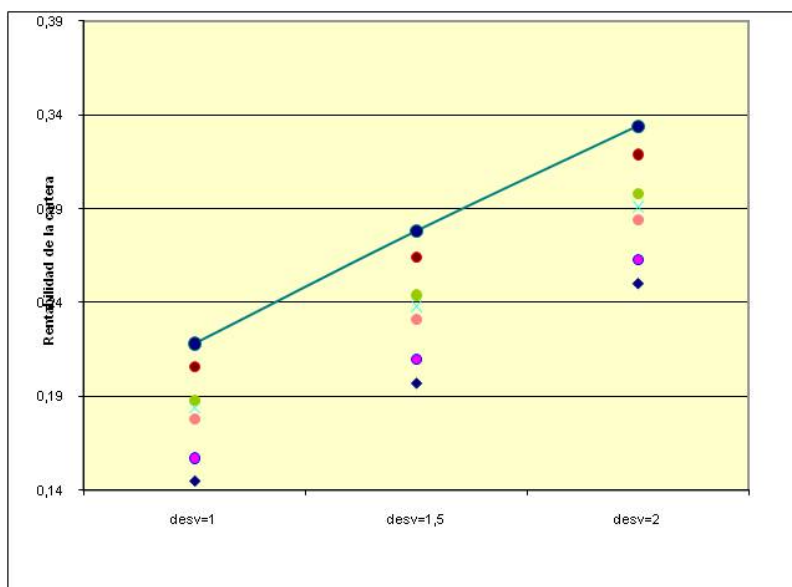
Frontera eficiente.

La frontera eficiente es la curva que recoge el conjunto de puntos $(\sigma_c, \max(R_c))$. Para un nivel de riesgo concreto, la rentabilidad obtenida dependerá de la distribución de la cartera, es decir, de que parte del capital se ha destinado a cada uno de los activos que debe tener la cartera. La distribución óptima será aquella que nos dé una rentabilidad que esté situada en la frontera eficiente.

Ejemplo 90: La siguiente tabla muestra distintas rentabilidades para un mismo nivel de riesgo, y la proporción a invertir en cada uno de los tres activos.

Rentabilidad de la cartera			Inversión en cada activo		
desv=1	desv=1,5	desv=2	x1	x2	x3
0.145	0.197	0.25	0.4	0.100	0.500
0.157	0.21	0.263	0.4	0.200	0.400
0.178	0.231	0.284	0.2	0.300	0.500
0.184	0.238	0.291	0.3	0.400	0.300
0.188	0.244	0.298	0.4	0.500	0.100
0.206	0.264	0.319	0.2	0.600	0.200
0.218	0.278	0.334	0.1	0.700	0.200

El gráfico siguiente dibuja la frontera eficiente: para un nivel de riesgo de 1,5 la rentabilidad mayor, 27,8%, se obtiene destinando el 10% al activo 1, el 70% al activo 2 y el 20% al activo 3.



Carteras que permiten ventas a corto y se tiene acceso al mercado del dinero, tanto para prestar como para endeudarse. Frontera eficiente.

En este caso, el inversor puede colocar su capital en la cesta de 3 activos con riesgo⁶⁷ y también en el mercado de capitales al tanto de interés exento de riesgo. La rentabilidad de la cartera será:

$$\bar{R}_c = (1 - x) \cdot r + x \cdot \bar{R}_A,$$

siendo A la cartera con riesgo que contiene los tres tipos de activos.

⁶⁷ Para simplificar las expresiones se ha considerado una cesta de e activos con riesgo.

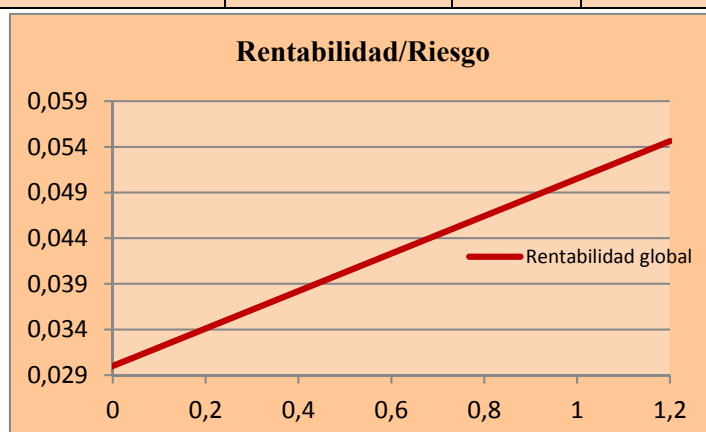
El riesgo de la cartera será $\sigma_c = x \cdot \sigma_A$, siendo x la proporción del capital a invertir a riesgo y σ_A el riesgo de la cesta de los tres activos. Despejando x y sustituyéndola en $\bar{R}_c$, se tiene,

$$\bar{R}_c = r + \left(\frac{\bar{R}_A - r}{\sigma_A} \right) \cdot \sigma_c = r + \theta \cdot \sigma_c,$$

recta que da la frontera eficiente de pendiente $\theta = \left(\frac{\bar{R}_A - r}{\sigma_A} \right)$.

Ejemplo 91: La siguiente tabla ilustra el resultado de la frontera eficiente. Se acepta un nivel de riesgo global y, definiendo el peso que debe tener en la cartera global la inversión con riesgo y la inversión al tanto de mercado sin riesgo, se obtiene la rentabilidad de la cartera global.

Interés exento de riesgo				3%	
Rentabilidad media de la cartera con riesgo				3,59%	
Riesgo de la Inversión en la cartera con riesgo				0,285	
Capital disponible para invertir				10000	
Riesgo global	Proporción a invertir a riesgo	Proporción a invertir sin riesgo	Capital invertido a riesgo	Capital invertido sin riesgo	Rentabilidad global
0	0	1	0	10000	0,03
0,05	0,175	0,825	1750	8250	3,103%
0,1	0,35	0,65	3500	6500	3,205%
0,15	0,525	0,475	5250	4750	3,308%
0,2	0,7	0,3	7000	3000	3,411%
0,25	0,875	0,125	8750	1250	3,513%
0,285	1	0	10000	0	3,585%
0,3	1,05	-0,05	10500	-500	3,616%
0,35	1,225	-0,225	12250	-2250	3,718%
0,4	1,4	-0,4	14000	-4000	3,821%
0,45	1,575	-0,575	15750	-5750	3,924%
0,5	1,75	-0,75	17500	-7500	4,026%
0,55	1,925	-0,925	19250	-9250	4,129%
0,6	2,1	-1,1	21000	-11000	4,232%
0,65	2,275	-1,275	22750	-12750	4,334%
0,7	2,45	-1,45	24500	-14500	4,437%
0,75	2,625	-1,625	26250	-16250	4,539%



El riesgo de la cesta de activos es del 0,285, si el inversor está dispuesto a asumir un riesgo global del 0,25 deberá invertir el 87,6% de su capital a riesgo y el 12,4% lo deberá prestar al 3%. Si el inversor está dispuesto a asumir un riesgo global de 0,35, deberá invertir el 122,5% del capital a riesgo y pedir prestado al 3%, en el mercado de capitales, el 22,5% del capital.

La frontera eficiente será la recta que tenga pendiente máxima. Se deberá resolver el problema de optimización siguiente:

$$\text{Max} \left(\frac{\bar{R}_A - r}{\sigma_A} \right) \text{ sujeta a la restricción } x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

La solución se encuentra a través de la función de Lagrange, obteniéndose las relaciones siguientes en el punto de máximo:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 - r &= z_1 \cdot \sigma_1^2 + z_2 \cdot \sigma_{12} + z_3 \cdot \sigma_{13} \\ \bar{R}_2 - r &= z_1 \cdot \sigma_{21} + z_2 \cdot \sigma_2^2 + z_3 \cdot \sigma_{23} \\ \bar{R}_3 - r &= z_1 \cdot \sigma_{31} + z_2 \cdot \sigma_{32} + z_3 \cdot \sigma_3^2 \end{aligned}$$

Siendo $z_1 = \lambda \cdot x_1$ $z_2 = \lambda \cdot x_2$ $z_3 = \lambda \cdot x_3$ y $\lambda = \frac{\bar{R}_A - r}{\sigma_A^2}$. Luego, $i = 1, 2, 3$ $x_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^3 z_i}$

Ejemplo 92: Un inversor quiere configurarse la cartera óptima invirtiendo dinero en 3 acciones de las cuales si tiene la siguiente información:

Acción	Rendimiento medio	Desviación estandar
Acción 1	14%	6%
Acción 2	8%	3%
Acción 3	20%	15%

Los coeficientes de correlación entre las acciones son: $\rho_{12} = 0,5$ $\rho_{13} = 0,2$ $\rho_{23} = 0,4$. El tanto de interés de mercado exento de riesgo el 5%.

Para poder hallar la frontera eficiente se debe obtener la pendiente máxima, teniendo en cuenta la restricción.

Primero se deben obtener los valores de z_i $i = 1, 2, 3$ resolviendo el sistema de ecuaciones. Para ello, es necesario conocer la matriz de varianzas y covarianzas:

0.36	0.09	0.18
0.09	0.09	0.18
0.18	0.18	2.25

Los valores, resultado del sistema lineal de ecuaciones, son: $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,222 \\ 0,016 \\ 0,048 \end{pmatrix}$

luego, $x_1 = \frac{z_1}{z_1 + z_2 + z_3} = 0,778$ $x_2 = \frac{z_2}{z_1 + z_2 + z_3} = 0,056$ $x_3 = \frac{z_3}{z_1 + z_2 + z_3} = 0,167$

La rentabilidad media de la cartera en activos con riesgo es del 14,7% y la volatilidad es del 0,0582. La recta que marca la frontera eficiente es $\bar{R}_c = r + \left(\frac{\bar{R}_A - r}{\sigma_A} \right) \cdot \sigma_c = 5\% + 0,166 \cdot \sigma_c$. La siguiente tabla recoge la frontera eficiente, el punto que marca la decisión de prestar dinero o endeudarse es aquel donde toda la inversión es en activos con riesgo y no pide dinero prestado.

Frontera eficiente				Distribución respecto al capital total de la inversión a riesgo.		
Rentabilidad de la cartera	Riesgo de la cartera	Proporción invertida en riesgo	Proporción invertida sin riesgo	Porcentaje a invertir x1	Porcentaje a invertir x2	Porcentaje a invertir x3
0.05	0	0	1	0.00	0.00	0.00
0.06	0.058	0.1	0.9	0.08	0.01	0.02
0.069	0.116	0.2	0.8	0.16	0.01	0.03
0.079	0.174	0.3	0.7	0.23	0.02	0.05
0.089	0.233	0.4	0.6	0.31	0.02	0.07
0.098	0.291	0.5	0.5	0.39	0.03	0.08
0.108	0.349	0.6	0.4	0.47	0.03	0.10
0.118	0.407	0.7	0.3	0.54	0.04	0.12
0.127	0.465	0.8	0.2	0.62	0.04	0.13
0.137	0.523	0.9	0.1	0.70	0.05	0.15
0.147	0.582	1	0	0.78	0.06	0.17
0.156	0.64	1.1	-0.1	0.86	0.06	0.18
0.166	0.698	1.2	-0.2	0.93	0.07	0.20
0.176	0.756	1.3	-0.3	1.01	0.07	0.22
0.185	0.814	1.4	-0.4	1.09	0.08	0.23
0.195	0.872	1.5	-0.5	1.17	0.08	0.25
0.205	0.931	1.6	-0.6	1.24	0.09	0.27
0.214	0.989	1.7	-0.7	1.32	0.10	0.28
0.224	1.047	1.8	-0.8	1.40	0.10	0.30
0.234	1.105	1.9	-0.9	1.48	0.11	0.32
0.243	1.163	2	-1	1.56	0.11	0.33

■ Modelo simple de mercado. Frontera eficiente.

El modelo más básico es el modelo de mercado. Este intenta hallar la relación lineal entre la rentabilidad del mercado y la rentabilidad de un activo que se negocie en él. La premisa de partida es que las fluctuaciones de las cotizaciones son debidas a la influencia del mercado y a las circunstancias específicas del activo. El riesgo de un activo dependerá de:

- El riesgo del mercado: RIESGO SISTEMÁTICO.
- El riesgo asociado a las características de la empresa: RIESGO ESPECÍFICO.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i$$

Donde, R_M es la rentabilidad del mercado y R_i es la rentabilidad del activo. La pendiente de la recta, β_i , determinará el grado de dependencia de los movimientos de las cotizaciones del activo respecto a los movimientos del mercado. Si $\beta_i > 1$ una variación del índice del mercado afectará más que proporcionalmente a la cotización del activo, si $\beta_i = 1$ los movimientos del índice del mercado y de la cotización del activo seguirán la misma proporción y si $\beta_i < 1$ la variación del índice afectará menos que proporcionalmente a la cotización del activo. Además, α_i es la parte del precio que no viene determinada por el mercado y ε_i es el término de perturbación asociado al riesgo no sistemático.

Las hipótesis en que se basa este modelo son:

- $E(\varepsilon_i) = 0$ $Cov(\varepsilon_i, R_M) = 0$ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$.
- $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ es constante.

Variables:

- Rentabilidad media del mercado: $\bar{R}_M$ y varianza del mercado σ_M^2
- Rentabilidad media de un activo: $\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \bar{R}_M$
- Varianza de un activo: $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$
- Covarianza entre dos activos: $\sigma_{ij} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_M^2$
- Covarianza entre un activo y el mercado: $\sigma_{im} = \beta_i \cdot \sigma_m^2$ y $\rho_{im} = \beta_i \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_i}$

La rentabilidad media de la cartera será: $\bar{R}_c = \sum_{i=1}^n x_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \alpha_i + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta_i \cdot \bar{R}_M$ y la varianza de la cartera será:

$\sigma_c^2 = x' \cdot V \cdot x$, siendo x el vector que recoge las proporciones a invertir en cada activo y V la matriz de varianzas y covarianzas de los activos:

$$\begin{aligned} i = j &\rightarrow V_{ij} = \sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \\ i \neq j &\rightarrow V_{ij} = \sigma_{ij} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_M^2 \end{aligned}$$

Por la configuración de la cartera, ésta también dependerá del mercado, luego: $R_c = \alpha_c + \beta_c \cdot R_M + \varepsilon_c$

y, por tanto, $\bar{R}_c = \alpha_c + \beta_c \cdot \bar{R}_M$, siendo $\beta_c = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta_i$ y $\alpha_c = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \alpha_i$.

La varianza de la cartera con riesgo se podrá expresar de la forma: $\sigma_c^2 = \beta_c^2 \cdot \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sigma_{\varepsilon_i}^2$.

Como el segundo sumando es pequeño cuando aumenta la diversificación, puede ser despreciado y poner $\sigma_c^2 = \beta_c^2 \cdot \sigma_M^2 \rightarrow \sigma_c = \beta_c \sigma_M$. Relación que determina el riesgo de la cartera como proporción respecto al riesgo del mercado.

Para determinar la frontera eficiente se debe determinar la distribución de los activos en función del “exceso de prima respecto a beta”: $\frac{\bar{R}_i - r}{\beta_i}$, siendo r el tanto de interés exento de riesgo del mercado de capitales. En

este modelo, $Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{e_i}^2} \left(\frac{\bar{R}_i - r}{\beta_i} - C^* \right)$, siendo C^* un parámetro que marca la frontera entre los activos a comprar y los que no hay que comprar.

Para determinar C^* se deberá:

➤ Calcular para cada activo el valor $C_i = \frac{\sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^i \frac{\bar{R}_j - r}{\sigma_{e_j}^2} \cdot \beta_j}{1 + \sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^i \frac{\beta_j^2}{\sigma_{e_j}^2}}$

➤ Ordenar los activos de más a menos respecto a $\frac{\bar{R}_i - r}{\beta_i}$

➤ La última posición de C_i que sea mayor que $\frac{\bar{R}_i - r}{\beta_i}$, será la que marcará la frontera y C^* será el valor de C_i que ocupe esa posición.

Conocidos Z_i , $x_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n^*} Z_i}$ será la proporción a comprar de los activos que estén situados por encima de la

línea de corte.

Como el inversor puede acceder al mercado de capitales para pedir dinero o prestar, su cartera eficiente será

aquella que esté en la recta $R_{portafolio} = r + \frac{\bar{R}_c - r}{\sigma_c} \cdot \sigma_{portafolio}$.

Ejemplo 93: Se han tomado las cotizaciones de un años de las siguiente acciones: Gas Natural, Repsol, Abertis, Banco Santander y Telefónica, así como del Ibex 35. Los resultados de la regresión lineal de cada acción con el índice, la rentabilidad media de cada acción, la matriz de varianzas y covarianzas es la siguiente:

Acción	Rendimiento medio	alfa	beta	matriz de varianzas y covarianzas				
Gas Natural	-0.010912	-0.00445	0.84043	0.005835	0.00143	0.001076	0.001699	0.001029
Repsol	-0.007094	0.00069	0.828218	0.00143	0.002713	0.001414	0.002232	0.001352
Abertis	-0.009651	-0.0007	1.307419	0.001076	0.001414	0.001739	0.001674	0.001014
Santander	-0.00552	0.00039	0.791953	0.001699	0.002232	0.001674	0.00331	0.001601
Telefónica	-0.007783	0.000565	1.103920	0.001029	0.001352	0.001014	0.00160	0.001351

Los datos de la cartera de acciones y el tanto de mercado exento de riesgo son:

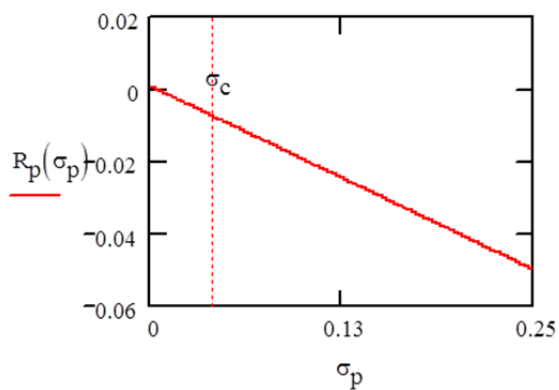
Rendimiento medio Ibex 35	Varianza Ibex 35	Rentabilidad media de la cartera	Volatilidad de la cartera	alfa de la cartera	beta de la cartera	Tanto de interés exento de riesgo
-0.007685	0.0015467	-0.0076615	0.0016886	-0.0000651	0.9972626	3.50%

La tabla siguiente recoge las acciones ordenadas en función del cociente prima/beta, con la proporción óptima a comprar de cada activo:

Acción	Rendimiento medio	alfa	beta	coeficiente de corte	Exceso de prima sobre beta	Z	Proporción en la cartera
Gas Natural	-0.010912	-0.004454	0.840433	-0.007421	-0.007821	-10.87	0.28
Repsol	-0.007095	0.000700	0.828218	-0.002581	-0.013785	-1.99	0.05
Abertis	-0.009651	-0.000730	1.307419	-0.007468	-0.007661	-6.76	0.18
Santander	-0.005521	0.000396	0.791953	-0.007271	-0.007897	-10.39	0.27
Telefónica	-0.007784	0.000565	1.103921	-0.0063848	-0.009379	-8.30	0.22

En este caso como se admiten ventas a corto plazo las cinco acciones deberán formar parte de la cartera.

La frontera eficiente es:
$$R_p(\sigma_p) = \frac{3,5\%}{52} + \frac{R_c - \frac{3,5\%}{52}}{\sigma_c} \cdot \sigma_p$$



9. Instrumentos a plazo.

9.1 El ambiente financiero. Riesgos del mercado financiero.

A principios de los años setenta se produce una alteración de las condiciones económicas que afectan directamente al mercado financiero mundial: elevada subida de los tipos de interés en USA, un repunte de la inflación y, como consecuencia, el abandono de los tipos de cambio fijo, pasando a un sistema de cambio flotante.

Desde principios de los años 80 los mercados financieros internacionales han introducido una elevada cantidad de productos financieros destinados a proteger a la actividad económica de ese ambiente tan inestable, llegando a la situación actual en la que se destacan:

- Numerosos productos bajo la forma de “operaciones fuera de balance”.
- Un desplazamiento de los prestatarios tradicionales de la banca hacia las emisiones de títulos en el mercado primario.
- Un elevado volumen diario de operaciones y una gran movilidad de los capitales entre los distintos mercados internacionales, facilitando la interrelación de éstos.

Ese ambiente ha propiciado una transformación del mercado financiero mundial cuyos efectos más relevantes han sido:

Globalización.

Internacionalización de la actividad bancaria como consecuencia de la eliminación de los controles, por parte de las autoridades monetarias, sobre la movilidad de capitales y sobre el control de los tipos de cambio.

Ha favorecido este proceso el avance tecnológico en el campo de las comunicaciones, aportando una reducción de los costes de transacción y permitiendo el desarrollo de mercados mundiales que negocian las 24 horas del día.

La desregulación o liberalización de la normativa ha ayudado a la apertura, mejora de la competitividad y adaptación de los mercados financieros a la situación real, gracias a que se han ido eliminando las leyes que reconocían determinados privilegios a las instituciones financieras nacionales.

La desintermediación o reducción del papel de los intermediarios financieros ha permitido la entrada en los mercados primarios mundiales de activos financieros directamente del emisor a los inversores finales, abaratando el coste de las transacciones en los mercados.

Innovación financiera.

La transformación tecnológica, la reducción de los costes de comunicación, rapidez de transmisión de datos y mejora de los medios de cálculo en las instituciones financieras, no fueron en si mismos los motores de la innovación financiera. El motor de la innovación fue la competencia entre las instituciones y la necesidad de protegerse de los riesgos del mercado financiero: volatilidad de los tipos de interés, de las tasas de inflación y de los tipos de cambio, principalmente.

La innovación financiera puede referirse tanto a un nuevo proceso como a un nuevo producto siendo, generalmente, una modificación de una idea preexistente, y surge como consecuencia de desequilibrios en el mercado financiero.

Pueden considerarse características de la innovación financiera:

- ☀ Aumentar la cantidad y variedad de instrumentos.

- ✳ Combinar instrumentos de forma más variada.
- ✳ Reducir las diferencias entre los diversos tipos de intermediación.
- ✳ Separación de los riesgos con el objeto de que puedan transferirse a quien tengan mayor capacidad para asumirlos.

Se debe utilizar la innovación financiera cuando se dan las condiciones siguientes:

- Que su uso permita influir positivamente sobre el riesgo asociado a la rentabilidad de la cartera de valores.
- Que se garantice un control de la cartera después de la utilización de la innovación.
- Que el precio de la innovación sea apropiado.
- Que la liquidez del mercado secundario sea suficiente.

En un ambiente financiero incierto, operar en un mercado sometido a fluctuaciones conlleva asumir unos riesgos: riesgos económicos, financieros y de transacción. Gran parte de la innovación financiera se produce como consecuencia de la existencia de dichos riesgos.

📌 **Riesgo de crédito.**

Es el riesgo de pérdida que asume un acreedor ante la imposibilidad de que el deudor pueda hacer frente a sus obligaciones. Se puede catalogar en:

- *Riesgo de país*: cuando se producen sucesos adversos que afectan a un país en concreto.
- *Riesgo de industria*: cuando se produce el deterioro de un sector industrial.
- *Riesgo de contrapartida*: cuando la contraparte no puede cumplir los términos del contrato.
- *Riesgo de transferencia*: como consecuencia de las trabas legales de un país concreto.

Normalmente se distingue entre *riesgo de liquidación*, que es la pérdida que puede surgir de la liquidación de una transacción en un día determinado, y el *riesgo de sustitución*, que es el riesgo potencial si una transacción tiene que sustituirse antes del vencimiento.

La gestión de este riesgo debe basarse en limitar el dinero total negociado con un país, sector o persona concreta.

📌 **Riesgo de tipos de interés.**

Es el riesgo de pérdida como consecuencia de la fluctuación de los tipos de interés y afectará directamente a cualquier entidad que tome fondos prestados o que los invierta. Se puede catalogar en:

- *Riesgo de interés neto*: debido a movimientos paralelos de la curva de tipos de interés.
- *Riesgo de margen*: debido a cambios en la forma de la curva de tipos de interés.
- *Riesgo de base*: debido a la divergencia de los tipos de interés calculados sobre bases diferentes.

Se puede gestionar este riesgo poniendo un límite a las fluctuaciones de los tipos de interés.

📌 **Riesgo de tipos de cambio.**

Es el riesgo de pérdida como resultado de movimientos desfavorables de los tipos de cambio. Se suele subdividir en:

- *Riesgo de transacción*: referido a circunstancias en que las fluctuaciones de las divisas afectan a los ingresos derivados de las transacciones corrientes.
- *Riesgo de traslación*: que afecta al valor de las partidas del activo y del pasivo del balance.

Se puede gestionar limitando la exposición neta a una cierta divisa, mediante un seguimiento diario.

📌 **Riesgo de mercado.** Es el riesgo de pérdida resultante de cambios en los precios del mercado.

Riesgo de liquidez.

- *Riesgo de liquidez de caja*: como consecuencia de la imposibilidad de hacer frente a las obligaciones financieras por falta de liquidez. Se puede gestionar imponiendo un límite de caja diario.
- *Riesgo de liquidez de mercado*: como consecuencia de la imposibilidad de poder realizar las transacciones en el mercado por falta de contrapartida.

9.2 Contratos a plazo sobre activos financieros.

Un contrato a plazo es un acuerdo entre las partes, comprador y vendedor, en el cual el comprador se compromete a adquirir un determinado bien, a un precio fijado y en una fecha concreta; el vendedor se compromete a entregar ese bien en la fecha fijada, recibiendo el precio pactado.

En este tipo de contratos existen las siguientes variables esenciales:

- La fecha de creación del contrato, el presente, 0.
- La fecha de ejercicio, T , fecha en que se debe hacer la entrega del bien.
- El precio de ejercicio, K , precio que se pagará por el bien en T .
- La garantía, cantidad que hoy, 0, se paga con la firma del contrato; esta garantía variará en su importe en función de que el vendedor posea, o no, el bien a entregar.

Descripción del contrato a plazo.

Cuando el bien que debe entregarse es un activo financiero, el contrato debe recoger las siguientes variables:

El activo subyacente.

Es el tipo de activo a entregar.

Pueden ser activos subyacentes:

- * Acciones.
- * Bonos y obligaciones.
- * Tipos de interés.
- * Índices bursátiles.
- * Divisas.

El precio del activo subyacente.

El activo subyacente tiene un mercado financiero propio al contado, que fija el precio en cada momento, lo denominaremos **precio al contado** (*Spot*); $S(0)$ será el precio al contado hoy, $S(t)$ será el precio al contado al cabo de t años, y $S(T)$ será el precio al contado en la fecha de ejercicio.

El tanto nominal de interés exento de riesgo del mercado, i .

Este tanto de interés se supondrá constante entre hoy y la fecha de ejercicio. El tanto de interés se aplicará tanto para colocar disponibilidades como para pedir dinero prestado.

El precio futuro (*forward*) .

Es el precio que hoy se estima alcanzará el activo subyacente en la fecha de ejercicio, aceptado como precio de ejercicio.

$F(t)$ es el precio que en t se estima alcanzará el activo subyacente en la fecha de ejercicio. Si $F(t)$ es el precio que en t se cree alcanzará el activo subyacente cuando llegue el momento T , se está aceptando que el precio futuro es un buen estimador del precio al contado en T del activo subyacente. Esto supone la existencia de una

relación ente el mercado al contado del activo subyacente y su mercado a plazo: cuando llegue la fecha de ejercicio, el precio del activo subyacente debería coincidir con el precio futuro en T . Luego:

$$\begin{cases} \text{para } t = 0 \rightarrow F(0) = K = S(0) \cdot (1 + i)^T \\ \text{para } t > 0 \rightarrow F(t) = S(t) \cdot (1 + i)^{T-t} \end{cases}$$

Siendo i la tasa de interés exenta de riesgo de mercado.

● Valor del contrato a plazo.

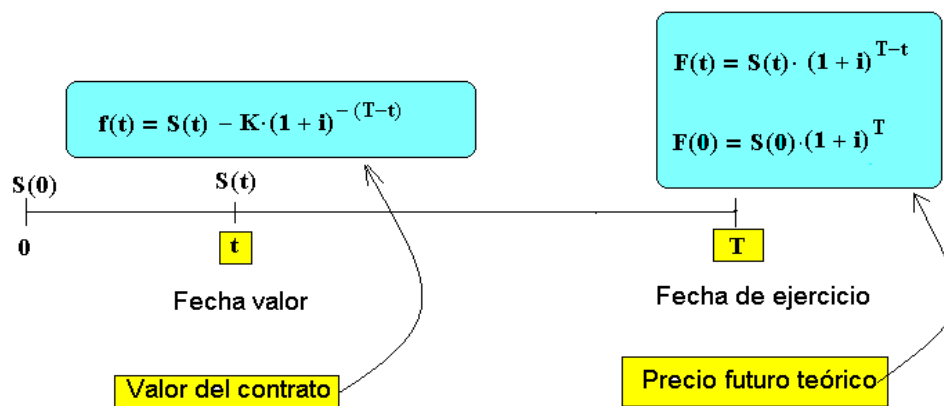
Si existe una correlación perfecta entre el mercado al contado del activo subyacente y el mercado a plazo, no podrá existir desviación entre los precios a futuro y contado, con lo cual no habrá posibilidad de poder conseguir una ganancia adicional debida a los desequilibrios del mercado; en este caso, el valor del contrato a plazo será nulo en cualquier momento t anterior a la fecha de vencimiento.

Normalmente las condiciones de correlación perfecta entre los dos mercados no se dan y puede suceder que, en un momento t , el activo subyacente se sobre valore, o infravalore, respecto a las condiciones del mercado a plazo. Esta situación asocia al contrato a plazo un **valor en t** , $f(t)$, que será la diferencia entre el precio futuro en t y el precio de ejercicio, valorada al momento t según la tasa exenta de riesgo i , es decir,

$$\begin{cases} f(t) = \text{Max}\{0, [F(t) - K] \cdot (1 + i)^{-(T-t)}\}, \text{comprador} \\ f(t) = \text{Max}\{0, [K - F(t)] \cdot (1 + i)^{-(T-t)}\}, \text{vendedor} \end{cases}$$

de donde:

$$f(t) = F(t) \cdot (1 + i)^{-(T-t)} - K \cdot (1 + i)^{-(T-t)} = S(t) - K \cdot (1 + i)^{-(T-t)}$$



● Cálculo del precio futuro teórico.

La determinación del precio futuro hoy se plantea a partir de diseñar una combinación de dos carteras: una que opera en el mercado al contado del activo subyacente y otra que opera en el mercado a plazo, de forma que la combinación de las dos anule el riesgo.

La operación de cobertura:

El objetivo es negociar el activo subyacente sin asumir ningún riesgo; para ello, se deben aceptar las siguientes hipótesis:

- * El riesgo y la exposición de capital propio deben ser nulos.
- * El precio futuro en 0 del activo subyacente debe ser un buen estimador del precio al contado en T , $F(0) \equiv \tilde{S}(T)$.

- * El precio de ejercicio, K , debe ser el precio al contado estimado del activo subyacente en T , $\tilde{S}(T) = K$.
- * Se pueden colocar las disponibilidades y pedir dinero prestado a la tasa exenta de riesgo i .

Se estudiará, seguidamente, la operación de cobertura⁶⁸ para distintos tipos de activos subyacentes.

🌸 Activos que no proporcionan ningún tipo de renta.

Son activos que durante el periodo de tiempo que media hasta la fecha de ejercicio, T , no proporcionan ningún ingreso. Los activos clásicos son las acciones que no pagan dividendos, un depósito a 90 días al EURIBOR, etc.

Cartera A:

Venta de un contrato a plazo sobre el activo subyacente:

En 0 no se desembolsa nada.

En T se cobra el precio de ejercicio K y se entrega el activo comprado en 0 por la cartera B.

Cartera B:

Compra del activo subyacente en el mercado al contado en 0 y petición de un préstamo para pagar la compra del activo.

En 0 no se desembolsa nada.

$$\begin{cases} \text{Cartera A: Desembolso 0} \\ \text{Cartera B: } \begin{cases} \text{Paga } S(0) \text{ por la compra del activo} \rightarrow \text{Saldo 0} \\ \text{Pide un préstamo de } S(0) \text{ a la tasa } i \end{cases} \end{cases}$$

En T se devuelve el préstamo y se entrega el activo para cumplir el contrato a plazo.

$$\begin{cases} \text{Cartera A: } \begin{cases} \text{Cobra } K \\ \text{Entrega el activo} \end{cases} \rightarrow \text{Saldo: } K - S(0) \cdot (1 + i)^T \\ \text{Cartera B: Se devuelve el préstamo} \end{cases}$$

Para que el saldo en T sea cero deberá cumplirse que:

$$K = S(0) \cdot (1 + i)^T = F(0)$$

Esta combinación de las dos carteras permite obtener el precio teórico futuro a partir del precio al contado.

Así, para $t > 0$, el precio futuro teórico será:

$$F(t) = S(t) \cdot (1 + i)^{(T-t)},$$

y el valor del contrato será:

$$f(t) = S(t) - K \cdot (1 + i)^{(T-t)}.$$

Ejemplo 94: Un contrato a plazo con vencimiento a un año sobre un activo que no paga dividendos ni cupones, se emite cuando el precio del activo subyacente es de 40 u.m.; la tasa de interés exenta de riesgo es del 10% anual.

El precio futuro teórico hoy será: $F(0) = S(0) \cdot (1 + 0,1)^1 = 44 \text{ u.m.}$

⁶⁸ Se entenderá como un conjunto de operaciones financieras, tanto en el mercado al contado como en el mercado a plazo, en las que globalmente hay una exposición nula al riesgo y, por tanto, sólo se puede obtener una rentabilidad igual a la tasa exenta de riesgo.

Si existe una correlación perfecta entre el mercado al contado y el mercado a plazo el precio de ejercicio deberá ser el precio futuro hoy, luego, $K = F(0) = 44$ y el valor del contrato de futuros $f(0)=0$.

Transcurridos 6 meses, si los tipos de interés no han variado y la cotización del activo subyacente en esa fecha es de 45 u.m., el precio futuro teórico es:

$$F(0,5) = S(0,5) \cdot (1 + 0,1)^{0,5} = 45 \cdot (1 + 0,1)^{0,5} = 47,2 \text{ u.m.}$$

El valor del contrato a plazo será:

$$f(0,5) = S(0,5) - K \cdot (1 + 0,1)^{-0,5} = 45 - 44 \cdot (1 + 0,1)^{-0,5} = 3,05 \text{ u.m.}$$

✿ Activos que pagan algún tipo de renta.

El activo subyacente proporciona una renta conocida durante el tiempo que media hasta la fecha de ejercicio, T . El valor en 0 de esa renta, descontada al tanto i , se destina a la financiación de la cartera conjunta.

Los activos subyacentes que se ajustan a esta descripción son los bonos que pagan cupones periódicamente y las acciones que pagan dividendos.

Cartera A: Venta de un contrato a plazo sobre dicho activo.

En 0 no se desembolsa nada.

En T se debe cobrar el precio de ejercicio, K , a cambio de entregar el activo que se compra en 0 con la cartera B.

Cartera B: Compra del activo que se financia con un préstamo.

En 0, se compra al activo pagando $S(0)$ y se pide un préstamo por la cantidad $S(0)-Y(0)$, siendo $Y(0)$ el valor actualizado de la renta que proporcionará el activo subyacente hasta la fecha de ejercicio. El saldo global en 0 es nulo.

$$\begin{cases} \text{Cartera A: Desembolso 0} \\ \text{Cartera B: } \begin{cases} \text{Paga } S(0) \text{ por la compra del activo} \rightarrow \text{Saldo 0} \\ \text{Pide un préstamo por } S(0) - Y(0) \end{cases} \end{cases}$$

En T , se devuelve el préstamo, siendo el importe a pagar $[S(0)-Y(0)] \cdot (1+i)^T$, y se entrega el activo para cumplir el contrato a plazo.

$$\begin{cases} \text{Cartera A: } \begin{cases} \text{Entrega el activo} \\ \text{Cobra } K \end{cases} \rightarrow \text{Saldo} = K - [S(0) - Y(0)] \cdot (1+i)^T \\ \text{Cartera B: Se devuelve el préstamo} \end{cases}$$

Si éste debe ser nulo, entonces, $K = [S(0) - Y(0)] \cdot (1+i)^T$.

El precio futuro teórico en $t > 0$ será: $F(t) = [S(t) - Y(t)] \cdot (1+i)^{(T-t)}$,

y el valor del contrato en t será: $f(t) = S(t) - Y(t) - K \cdot (1+i)^{-(T-t)}$.

Ejemplo 95: Sea un contrato a plazo con vencimiento dentro de 10 meses, sobre una acción que hoy cotiza a 50 u.m., dicha acción proporcionará un dividendo de 0,75 u.m. dentro de 3, 6 y 9 meses. Si el tanto de interés exento de riesgo es del 8% anual y la ETTI es plana, el precio futuro hoy será:

$$F(0) = \left(S(0) - 0,75 \cdot \sum_{r=1}^3 (1 + 0,08)^{\frac{-3r}{12}} \right) \cdot (1 + 0,08)^{\frac{10}{12}} =$$

$$= \left(50 - 0,75 \cdot \sum_{r=1}^3 (1 + 0,08)^{\frac{-3r}{12}} \right) \cdot (1 + 0,08)^{\frac{10}{12}} = 51 \text{ u.m.}$$

Si el precio de ejercicio se ha fijado en 52 u.m., $K = 52$, y dentro de 3 meses el precio del activo subyacente se ha situado a 52 u.m., el precio futuro teórico transcurridos 3 meses será,

$$F\left(\frac{3}{12}\right) = \left(S\left(\frac{3}{12}\right) - 0,75 \cdot \sum_{r=1}^2 (1 + 0,08)^{\frac{-3r}{12}} \right) \cdot (1 + 0,08)^{\frac{7}{12}} =$$

$$= \left(52 - 0,75 \cdot \sum_{r=1}^2 (1 + 0,08)^{\frac{-3r}{12}} \right) \cdot (1 + 0,08)^{\frac{7}{12}} = 52,86 \text{ u.m.}$$

El valor del contrato al cabo de 3 meses es

$$f\left(\frac{3}{12}\right) = \left(S\left(\frac{3}{12}\right) - 0,75 \cdot \sum_{r=1}^2 (1 + 0,08)^{\frac{-3r}{12}} \right) - K \cdot (1 + 0,08)^{\frac{7}{12}} =$$

$$= \left(52 - 0,75 \cdot \sum_{r=1}^2 (1 + 0,08)^{\frac{-3r}{12}} \right) - 52 \cdot (1 + 0,08)^{\frac{7}{12}} = 0,83 \text{ u.m.}$$

✿ Activos que proporcionan una rentabilidad de mercado conocida.

Cuando el activo subyacente proporciona una rentabilidad de mercado r (expresada como un porcentaje anualizado del precio), la operación de cobertura es idéntica a la del caso anterior, siendo el valor actualizado de la renta en 0, $Y(0) = S(0) \cdot [(1+r)^T - 1] \cdot (1+r)^{-T} = S(0) \cdot [1 - (1+r)^{-T}]$.

El activo subyacente que se adapta a estas características es el índice bursátil. El **índice bursátil** es una cesta de acciones que participan en una cierta proporción dentro de la configuración de la cotización del mismo. Invertir en el índice bursátil equivale a comprar todas las acciones que lo forman y en la misma proporción, siendo la cotización del índice la cotización de la cartera de acciones. Para aquellos inversores que no estén dispuestos a asumir un riesgo elevado les es más cómodo invertir en el índice que invertir en algunas de las acciones individualmente por dos motivos:

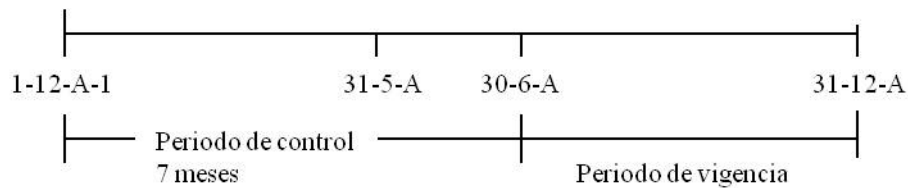
- La volatilidad de las acciones es mayor que la volatilidad del índice.
- Los costes de gestión individualizados para cada acción son más elevados que los costes de gestión del índice.

Para poder prever cual será la capacidad de respuesta del índice a las variaciones del mercado es necesario conocer los aspectos técnicos del mismo:

- * Valores a incluir en el índice: se elegirá una muestra de valores con elevado nivel de capitalización bursátil y alto volumen de negociación.
- * La ponderación de los valores elegidos: lo más usual es ponderar la cotización de cada acción por el volumen negociado (precio de la acciones x número de acciones)
- * La fórmula de cálculo del índice: generalmente son medias aritméticas ponderadas.
- * La fecha de comienzo del índice: el año de referencia respecto a la cotización actual.

En nuestro mercado se opera con el IBEX35: cesta de 35 acciones que en el mercado continuo han contado con mayor liquidez en un periodo fijado.

El periodo de vigencia de la cesta se basa en el siguiente esquema:



La fórmula de cálculo del IBEX35 es $IBEX35_t = IBEX35_{t-1} \cdot \frac{\sum_{s=1}^{35} cap_s(t)}{\sum_{s=1}^{35} cap_s(t-1) + J}$,

siendo:

$$cap_s(t) = Precio_s(t) \cdot num\ acciones\ emitidas_s(t).$$

J = Ajustes del índice por variaciones de capital.

El valor base del IBEX35 es 3000 referido al 29-12-89⁶⁹.

La cantidad a pedir prestada será: $S(0) - Y(0) = S(0) \cdot (1 + r)^{-T}$, en este caso deberá verificarse que:

$$\text{En } 0: \begin{cases} \text{Cartera A: Desembolso } 0 \\ \text{Cartera B: } \begin{cases} \text{Pago de } S(0) \text{ por el índice} \rightarrow \text{Saldo } 0 \\ \text{Solicitud del préstamo} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{En } T: \begin{cases} \text{Cartera A: Cobra } K \text{ y entrega el índice} \\ \text{Cartera B: Devuelve el préstamo} \end{cases} \rightarrow \text{Saldo} = K - S(0) \cdot \left(\frac{1+i}{1+r} \right)^T.$$

Si debe producirse un equilibrio el saldo deberá ser nulo, de donde: $K = S(0) \cdot (1+r)^{-T} \cdot (1+i)^T$.

El precio futuro teórico en $t > 0$ será: $F(t) = S(t) \cdot (1+r)^{-(T-t)} \cdot (1+i)^{(T-t)}$,

y el valor del contrato a plazo en t será: $f(t) = S(t) \cdot (1+r)^{-(T-t)} - K \cdot (1+i)^{-(T-t)}$

Ejemplo 96: Un índice bursátil lleva asociada una rentabilidad de mercado del 3,2% y hoy está a 150; si el tanto de interés exento de riesgo es del 7% el precio futuro teórico hoy de un contrato a plazo sobre el índice, con vencimiento dentro de 6 meses será:

$$F(0) = S(0) \cdot \left(\frac{1+0,07}{1+0,032} \right)^{\frac{6}{12}} = 150 \cdot \left(\frac{1+0,07}{1+0,032} \right)^{\frac{6}{12}} = 152,74.$$

✿ Contratos a plazo sobre tipos de interés.

Este tipo de contratos tienen como activo subyacente un activo financiero que devenga un tipo de interés en el futuro. Podemos distinguir dos tipos de activos subyacentes:

- * Los que vencen antes del año, en este caso el activo es un bono que no paga ningún tipo de cupón y cuyo precio inicial se calcula al descuento. Activos típicos son las Letras y Pagarés del Tesoro, depósitos a 90, 360 días, etc.

⁶⁹ Las condiciones generales de los contratos de futuros y opciones sobre el IBEX35 del Mercado Español de Futuros Financieros incluyen una nota técnica sobre el cálculo de IBEX35.

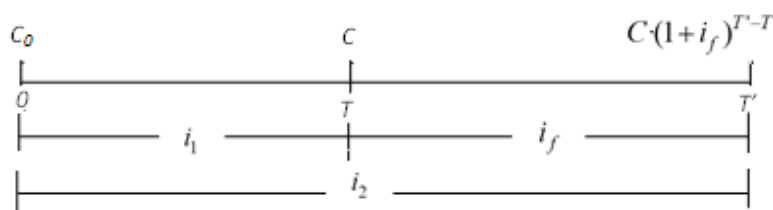
- * Los activos que vencen a más de un año y periódicamente pagan cupones. Son activos típicos los Bonos y Obligaciones del Tesoro.

Otro tipo de contratos a plazo sobre tipos de interés se crean como contratos de garantía sobre tipos de interés a aplicar en el futuro sobre una deuda futura: *forward-forward* y FRA.

Sea cual sea el activo subyacente, el **precio futuro es el tipo de interés que se aplicará en el futuro durante un plazo determinado.**

➤ Tipo de interés futuro dado de forma implícita.

Supongamos que deseamos solicitar un préstamo de C u.m. dentro de T años y que va a tener su vencimiento el año T . El precio de ejercicio será el tipo de interés que se aplicará al futuro préstamo. Para calcular ese tipo de interés se deberá aplicar el siguiente razonamiento:



En 0 se prestan una cantidad inicial C_0 al tanto i_1 que es el tipo de interés que el mercado paga a operaciones que duran T años.

En T se recupera la cantidad $C = C_0 \cdot (1 + i_1)^T$ que inmediatamente se vuelve a prestar durante $T' - T = t$ años. Al cabo de estos años la cantidad a recuperar será:

$$C' = C \cdot (1 + i_f)^{(T'-T)} = C_0 \cdot (1 + i_1)^T \cdot (1 + i_f)^{(T'-T)}.$$

El tipo de interés que el mercado aplica a operaciones que duran T' años es i_2 , luego si se quiere estar en una posición neutra, prestar C_0 durante T' años al tanto i_2 deberá proporcionar el mismo capital que en el caso anterior,

$$C_0 \cdot (1 + i_2)^{T'} = C_0 \cdot (1 + i_1)^T \cdot (1 + i_f)^{(T'-T)},$$

de donde,

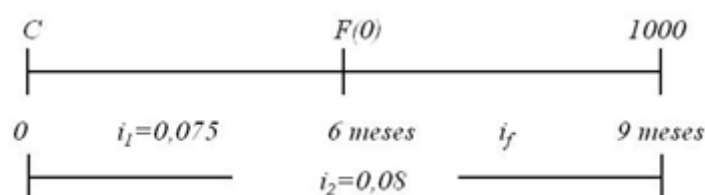
$$i_f = \left(\frac{(1 + i_2)^{T'}}{(1 + i_1)^T} \right)^{\frac{1}{T'-T}} - 1$$

es el tipo de interés futuro en 0 a aplicar dentro de T años a operaciones que duren $(T' - T)$ años.

Si el plazo es inferior a 1 año se aplicará el interés simple, luego,

$$i_f = \frac{i_2 \cdot T' - i_1 \cdot T}{(1 + i_1 \cdot T) \cdot (T' - T)}$$

Ejemplo 97: El tanto de interés para operaciones a 9 meses es del 8% anual de interés y el tipo de interés anual para plazos a 6 meses es del 7,5%. El precio futuro hoy de una letra del tesoro a 3 meses y nominal 1.000 euros., a emitir dentro de 6 meses se obtendrá a partir del siguiente planteamiento:



Debe verificarse que:

$$C \left(1 + 0,08 \cdot \frac{9}{12} \right) = C \left(1 + 0,075 \cdot \frac{6}{12} \right) \left(1 + i_f \cdot \frac{3}{12} \right)$$

de donde,

$$i_f = \frac{0,08 \cdot \frac{9}{12} - 0,075 \cdot \frac{6}{12}}{\left(1 + 0,075 \cdot \frac{6}{12} \right) \cdot \frac{3}{12}} = 0,086747$$

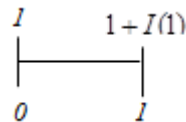
luego:

$$F(0) = 1.000 \cdot \left(1 + i_f \cdot \frac{3}{12} \right)^{-1} = 978,77 \text{ euros.}$$

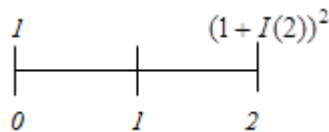
➤ Tipo de interés futuro a partir de la E.T.T.I.

El mercado al contado proporciona los tipos de interés de mercado para cada vencimiento, esta secuencia de tipos de interés configura la E.T.T.I. y, a partir de ella, se pueden calcular los tipos de interés futuros.

Para 1 periodo:

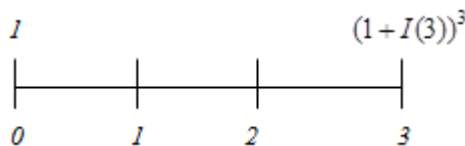


Para 2 periodos:



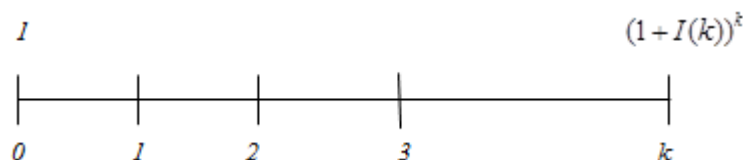
siendo $[1 + I(2)]^2 = [1 + I(1)] \cdot (1 + {}_1f_1)$.

Para 3 periodos:



siendo $[1 + I(3)]^3 = [1 + I(2)]^2 \cdot (1 + {}_2f_1)$.

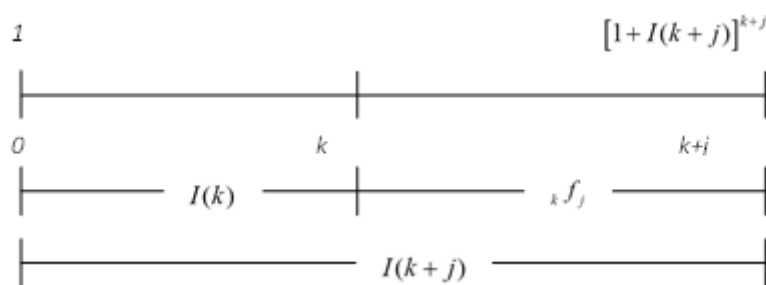
Para k periodos:



Siendo $[1 + I(k)]^k = [1 + I(k-1)]^{k-1} \cdot (1 + {}_{k-1}f_1)$, de donde ${}_{k-1}f_1 = \frac{[1 + I(k)]^k}{[1 + I(k-1)]^{k-1}} - 1$

El conjunto de tantos: $I_1, {}_1f_1, {}_2f_1, \dots, {}_{k-1}f_1$ son los tantos de interés futuros para plazos de 1 año en el intervalo de tiempo $[0, k]$.

En general, se puede hallar el tanto de interés *forward* a aplicar dentro de k años y para plazos de j años.



siendo: $[1 + I(k + j)]^{k+j} = [1 + I(k)]^k \cdot (1 + {}_k f_j)^j$,

de donde: ${}_k f_j = \left[\frac{[1 + I(k + j)]^{k+j}}{[1 + I(k)]^k} \right]^{\frac{1}{j}} - 1$.

Ejemplo 98: Los tipos de interés forward: ${}_3 f_2$, ${}_2 f_3$ y ${}_4 f_1$, asociados a la siguiente estructura temporal de los tipos de interés: $I(1) = 0,09$; $I(2) = 0,095$; $I(3) = 0,105$; $I(4) = 0,10$; $I(5) = 0,09$, serán:

$I(k+j)$	$I(k)$	Tipos forward
$I(5) = 0,09$	$I(3) = 0,105$	${}_3 f_2 = 0,067881$
$I(5) = 0,09$	$I(2) = 0,095$	${}_2 f_3 = 0,086679$
$I(5) = 0,09$	$I(4) = 0,10$	${}_4 f_1 = 0,050901$

✿ Contratos a plazos sobre divisas.

El contrato a plazos sobre divisas consiste en la compra a futuro de una determinada divisa, pactando anticipadamente el tipo de cambio que se pagará en la fecha de ejercicio por dicha divisa.

La determinación del tipo de cambio *forward* se fundamenta en la relación entre los tipos de interés de los países afectos a la divisa y el tipo de cambio al contado (*spot*). Se parte de realizar una inversión de dinero en dos países durante el mismo plazo de tiempo.

País A:

En 0 se invierten C_A u.m. al tanto de interés i_A durante T años.

En T se obtendrá la cantidad: $C_A \cdot (1 + i_A)^T$

País B:

Se invierte al tipo de interés i_B durante T años, la cantidad correspondiente según el tipo de cambio al contado

$c_{A/B}(0)$, $C_B = \frac{C_A}{c_{A/B}(0)}$, equivalente a las C_A invertidas en el país A. En T esta cantidad se habrá convertido en:

$$C_B \cdot (1 + i_B)^T.$$

Si ambas inversiones deben ser indiferentes, el tipo de cambio al contado en T deberá ser:

$$c_{A/B}(T) = \frac{C_A \cdot (1 + i_A)^T}{C_B \cdot (1 + i_B)^T} = c_{A/B}(0) \cdot \frac{(1 + i_A)^T}{(1 + i_B)^T}$$

Luego, $F(0) = K = c_{A/B}(0) \cdot \frac{(1 + i_A)^T}{(1 + i_B)^T}$

El tipo de cambio futuro en t será,
$$F(t) = c_{A/B}(t) \cdot \frac{(1+i_A)^{T-t}}{(1+i_B)^{T-t}}.$$

y el valor del contrato a plazo sobre divisas en t será: $f(t) = (F(t) - K) \cdot (1+i_A)^{-(T-t)}.$

Cuando la operación sea a corto plazo el régimen financiero a aplicar será el de interés simple,

$$c_{A/B}(T) = c_{A/B}(0) \cdot \frac{(1+i_A \cdot T)}{(1+i_B \cdot T)}$$

El tipo de cambio futuro en t será:
$$F(t) = c_{A/B}(t) \cdot \frac{(1+i_A \cdot (T-t))}{(1+i_B \cdot (T-t))}.$$

y el valor del contrato a plazo sobre divisas en t será: $f(t) = (F(t) - K) \cdot (1+i_A \cdot (T-t))^{-1}.$

Ejemplo 99: La cotización spot del euro respecto al dólar es de 1,2 euros/\$; el tipo de interés nominal a 3 meses de la zona euro es del 2,5% y el tipo de interés a 3 meses en U.S.A. es del 5%. El tipo de cambio forward a 3 meses será:

$$F(0) = 1,2 \cdot \frac{1 + 0,025 \cdot \frac{3}{12}}{1 + 0,05 \cdot \frac{3}{12}} = 1,1925 \text{ €/\$}.$$

10. Futuros financieros.

10.1 El mercado de futuros financieros.

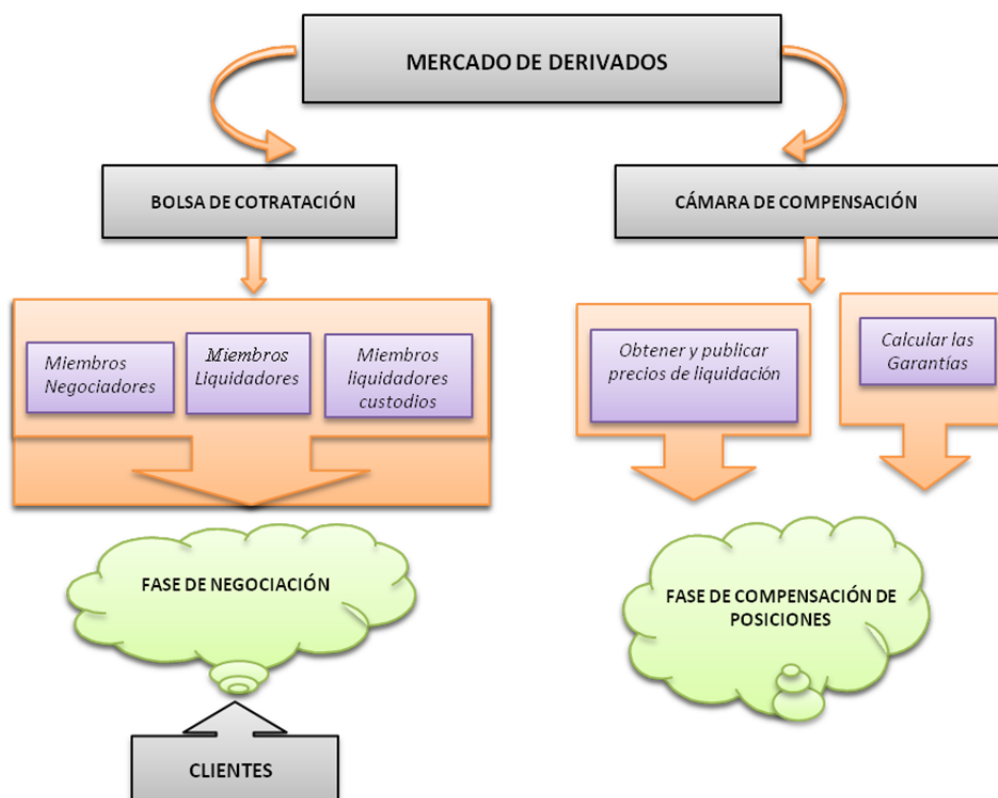
Los Mercados de Futuros nacieron como una necesidad de los agricultores para garantizar las ventas de sus cosechas. Por esta causa, aparecieron los primeros mercados de futuros sobre mercancías, donde se negociaban contratos que daban derecho a adquirir una determinada mercancía en una fecha futura y a un precio pactado en el momento de la creación del contrato. De esta forma, se garantizaba la venta de las mercancías a unos precios fijados antes de la entrega, estaban concebidos como contratos de garantía, tanto para el comprador como para el vendedor.

Posteriormente, se aplicó el mismo tipo de contratos sobre activos financieros que ya existían en el mercado; a partir de ese momento nacen los mercados de futuros financieros.

Mercados organizados de Futuros son el Chicago Mercantile Exchange, el Chicago Board of Trade y el New York Futures Exchange; en Europa podemos destacar el *Europe's Global Financial Marketplace* y el M.E.F.F. en España, etc. Las operaciones en el mercado de futuros financieros consisten en la negociación de unos contratos estándares de los que se conocen su precio de ejercicio y vencimiento futuros. La cotización es el precio futuro del activo subyacente, liquidándose diariamente la diferencia entre el precio al que se ha entrado en el mercado y la cotización en el mercado (*margin*); si el margen es positivo el intermediario entregará ese importe al poseedor del contrato, y si es negativo, será el poseedor del contrato el que tendrá que reponer ese margen al intermediario. Llegada la fecha de vencimiento del contrato el poseedor del mismo se verá obligado a ejecutarlo y cumplir los compromisos a que obliga dicho contrato.

10.2 Funcionamiento del mercado de futuros financieros.

El siguiente gráfico ilustra la estructura de un mercado de futuros:



☀ *Los agentes que participan en el mercado:*

- ☀ **Miembros negociadores:** Sólo pueden cursar órdenes por cuenta de terceros y no intervienen en el proceso de liquidación diaria de las posiciones abiertas en el mercado.
- ☀ **Miembros liquidadores:** responden de la liquidación diaria y al vencimiento, y de los ajustes de las garantías.
- ☀ **Miembros liquidadores custodios:** además deberán custodiar las garantías a favor del Meff de las posiciones abiertas.
- ☀ **Creadores de Mercado:** sólo pueden actuar por cuenta propia y deben marcar los precios para asegurar que se pueden cerrar posiciones.

☀ *Órdenes y tipos de órdenes:*

Una orden es una instrucción que el cliente da a su operador para que realice una acción en el mercado. Esta debe contener: el sentido (compra o venta), el tipo de contrato (sobre tipos de interés, sobre el índice, etc.), el número de contratos, el Miembro que la efectúa y la liquida, el precio, el tipo de orden, etc. Existen los siguientes tipos de órdenes:

- ☀ *Orden limitada:* Se fija el precio máximo de compra o el mínimo de venta, así como el volumen a negociar. Esta orden permanece en el sistema hasta su total ejecución o hasta su anulación por parte del operador.
- ☀ *Orden limitada inmediata:* Es como la orden limitada pero el sistema sólo intenta ejecutarla en el momento de la entrada, cancelándose automáticamente la cuantía que no ha podido ejecutarse.
- ☀ *Orden por lo mejor:* Se fija exclusivamente el volumen que desea negociarse, la orden se ejecuta al mejor precio del mercado y por todo el volumen. Si no se ejecuta en su totalidad por falta de contrapartida, la parte no ejecutada se cancela automáticamente.
- ☀ *Orden stop:* Se fija el volumen a negociar, así como el precio de disparo. Cuando el mercado alcanza el precio de disparo el sistema libera la orden e intenta ejecutarla por lo mejor. Si no puede ejecutarse queda eliminada.
- ☀ *Orden todo o nada:* Es una orden limitada inmediata pero debe ejecutarse la totalidad del volumen.
- ☀ *Orden ataque:* Es una orden limitada inmediata pero el precio es el mejor precio de contrapartida existente en ese momento en la pantalla del operador.
- ☀ *Orden Market maker:* Es la combinación de dos órdenes limitadas, una de compra y otra de venta, con diferentes precios y volúmenes sobre el mismo vencimiento del contrato.
- ☀ *Orden Straddle:* Es la combinación de dos órdenes limitadas inmediatas, una de compra y otra de venta, sobre contratos diferentes, o distintos vencimientos de un mismo contrato, y el volumen a negociar es el mismo en los dos contratos. El sistema las ejecuta conjuntamente y por el mismo volumen, el volumen restante es inmediatamente cancelado.

☀ *Garantías:*

Uno de los atractivos del mercado de futuros es el elevado apalancamiento, pues con una pequeña cantidad invertida se pueden obtener elevados resultados (ya sean beneficios o pérdidas)

El comprador o vendedor debe realizar un depósito inicial que se fijará sobre la base de:

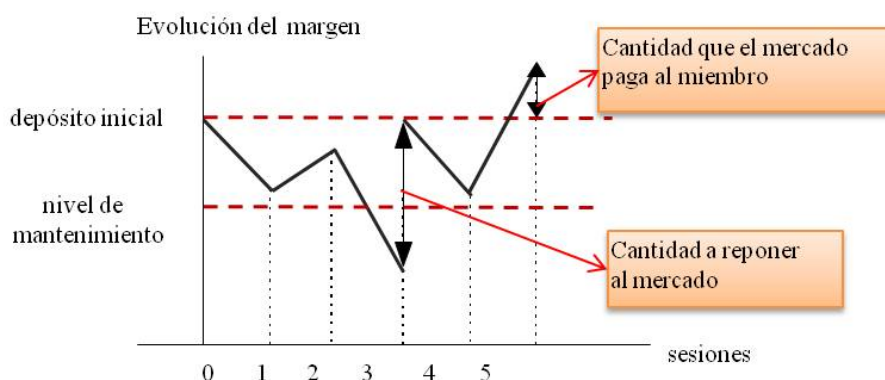
- ☀ La cantidad mínima para garantizar las posiciones abiertas de cada uno de los clientes.

- ✿ La volatilidad de los precios y la fluctuación máxima diaria permitida en los precios.
- ✿ La posición que en el mercado tenga el operador.

El proceso de mantenimiento del margen de las garantías se basa en:

- Pago del depósito inicial: dependerá de cada contrato.
- Fijar el nivel de mantenimiento, o límite, hasta el cual puede descender la garantía inicial sin necesidad de reponerla. Cantidad máxima que el mercado está dispuesto a asumir de pérdida por variación de los precios.

El mercado no exigirá fondos al Miembro del mercado mientras las pérdidas diarias sitúen el depósito inicial por encima del nivel de mantenimiento. En el momento en que las pérdidas sitúen el depósito por debajo del nivel de mantenimiento, el mercado exigirá el pago de los fondos necesarios para restaurar el depósito inicial.



Las garantías que tiene establecidas el Meff son:

- ◆ Garantía inicial exigida a los Miembros del mercado.
- ◆ Garantía diaria exigible a todos los Miembros del Mercado y Clientes con contratos abiertos.

Existen dos partes:

- * *Depósito inicial*: Es una cantidad porcentual del nominal del contrato. Se trata de una provisión de fondos para garantizar el cumplimiento de las obligaciones de las partes contratantes. Este depósito se cancela al vencimiento del contrato o al cerrar la posición abierta.
- * *Depósito para liquidación diaria de pérdidas y ganancias*: Se determina en función de la evolución diaria de la cotización del contrato. El que detente pérdidas deberá reponer la garantía hasta el nivel mínimo fijado.

El volumen de las garantías diarias depende de MEFF y del volumen de posiciones abiertas en cada serie. El importe de la garantía deberá conocerse antes de las 10 horas del día de negociación y la reposición del límite de la garantía será el siguiente día hábil.

- ◆ Garantía extraordinaria: Exigible cuando se dan circunstancias especiales que asocien alto riesgo.

✿ **Liquidación del contrato:**

Una vez casada la operación se envía al miembro liquidador un boleto con el número de contratos comprados, o vendidos, y el precio al que se ha cerrado la operación. La Cámara de Compensación (*Clearing House*) garantiza que la información de las operaciones en el mercado sea pública.

La liquidación de un contrato puede realizarse en dos instantes de tiempo:

➤ Antes del vencimiento realizando una operación contraria a la que tiene (si se es comprador, vender y si se es vendedor, comprar).

➤ En la fecha de vencimiento. La liquidación puede hacerse mediante:

- * entrega física del activo subyacente.
- * saldo por diferencias en efectivo.

● La **Liquidación diaria** de pérdidas y ganancias en el MEFF es, para:

- * Futuros comprados: el precio de liquidación del día menos el precio de futuro.
- * Futuros vendidos: el precio de futuro menos precio de liquidación diaria.
- * Futuros comprados y vendidos en una sesión: el precio de venta menos el precio de compra.

Si la liquidación diaria produce una pérdida para el inversor por debajo del nivel mínimo de mantenimiento, el inversor deberá ingresar en dinero la diferencia para cubrir el margen; por contra, si la liquidación diaria hace que el saldo de la cuenta del inversor esté por encima del margen, el mercado le paga al inversor la diferencia.

Una vez efectuada la liquidación diaria, el nuevo Precio futuro de todos los futuros abiertos será el Precio de Liquidación diaria del día que se trate.

La liquidación diaria será:

- * Futuros comprados: $PLD_t - PLD_{t-1}$.
- * Futuros vendidos: $PLD_{t-1} - PLD_t$.
- * Futuros comprados y vendidos en una sesión: $F_0^{venta} - F_0^{compra}$.

Ejemplo 100: Un contrato de futuros sobre el Bono Nocional a 30 años cotizó el día $t-1$ a 94,78 y el día t a 94,86. Toda posición compradora abierta hasta el día d tendrá una liquidación diaria de $94,86 - 94,78 = 0,08$ puntos y toda posición vendedora abierta hasta ese día tendrá la liquidación diaria de $94,78 - 94,86 = -0,08$ puntos. Si tenemos en cuenta que una centésima de punto corresponde a 1 tick, que vale 10 euros, entonces el comprador habrá ganado 80 euros y el vendedor los habrá perdido.

● La **Liquidación en la fecha de vencimiento** del contrato.

El cierre de una posición, compradora o vendedora, en el vencimiento se puede realizar de dos formas:

- Liquidando las diferencias entre la cotización del contrato ese día y el precio de ejercicio que marque el contrato.
- Entregando los títulos que forman parte de la relación de entregables.

Si la liquidación se realiza mediante la entrega de bonos, el importe a pagar por cada título entregable será:

$$\text{Cantidad a pagar} = PLC \cdot f \cdot \text{nominal entregable} + cc \text{ entregable},$$

siendo:

- PLC , el precio de liquidación del contrato de futuro al cierre de la última sesión, expresado en porcentaje sobre el nominal del bono entregable.
- f , el factor de conversión.
- $cc \text{ entregable}$, el cupón corrido del bono entregable calculado a la fecha de vencimiento del contrato de futuro.

✓ **Factor de conversión:**

Para cada bono entregable se deberá calcular el factor de conversión correspondiente,

$$f = \frac{\sum_{s=1}^n C_s \cdot (1+i)^{-\frac{t_s}{365}} - CC_{entregable}}{N}$$

siendo:

- i , el tanto de interés efectivo del bono nocional.
- n , el número de cobros pendientes del bono entregable.
- t_s , el número de días entre la fecha de cobro de C_s y la fecha de vencimiento del contrato.
- C_s , el importe de los cobros futuros del bono entregable.
- N , el nominal del valor entregable.

El factor de conversión nos deberá determinar cuantas unidades monetarias del bono entregable deben pagarse por cada unidad monetaria de nominal del bono nocional, para que se mantenga la misma TIR cotizada al vencimiento del contrato de futuro al precio de liquidación al vencimiento.

Ejemplo 101: Supongamos que el valor del bono entregable, al tanto de interés del nocional, es de 980 €, el nominal del entregable es de 1.000 € y no hay cupón corrido, el factor de conversión es 0,98; es decir, el 98% de los 1.000 euros. Por cada euro de cotización del nocional le corresponderán 0,98 euros del bono entregable.

Ejemplo 102: Un bono de la lista de entregables en un contrato de futuros sobre el Bono Nocional a 10 años, que vence el tercer miércoles del mes de Diciembre del año A , es un Bono del Tesoro emitido en $A-1$, cupón anual del 5% y amortización el 30-8- $A+9$. El factor de conversión el día del vencimiento del contrato, 22-12- A , será:

$$f = \frac{\left(50 \cdot a_{\overline{9}|0,04} + 1.000 \cdot (1+0,04)^{-9}\right) \cdot (1+0,04)^{\frac{114}{365}} - 50 \cdot \frac{114}{365}}{1.000} = 1,071978.$$

La Relación de Entregables dependerá del tipo de contrato y las condiciones generales del contrato detallan los requisitos que debe cumplir un bono para ser entregable.

✓ El bono entregable más económico.

Para cada bono de la relación de entregables, además del factor de conversión, se deberá conocer el precio de compra al contado y la diferencia entre el importe a pagar con la liquidación del contrato y el precio de compra al contado del entregable; aquel bono que de una diferencia mayor será el más económico. Como el vendedor del contrato deberá acudir al mercado al contado a comprar el bono entregable para cumplir con la entrega del subyacente, éste comprará aquel bono que le de más margen entre lo que pagará en el mercado al contado y lo que cobrará a través del contrato de futuros.

Ejemplo 103: El contrato sobre el Bono a 10 años que venció en Junio de 1.999 tenía como entregables los siguientes Bonos del Tesoro:

Emisión	Código	Vencimiento	factor conversión	Precio al contado el día de vto
7,35/ 96	00001162920	31-03-07	1,2202381	121,50
6,00/ 97	00001165220	31-01-08	1,1432606	112,538
5,15/ 98	00001206420	30-07-09	1,0881185	105,304

El contrato de Futuros cerró al vencimiento a 96,92.

Para hallar el entregable más económico se debe calcular la diferencia entre el precio de liquidación al vencimiento para cada entregable y el precio al contado de cada entregable:

Precio de liquidación al vencimiento	Precio al contado	Diferencia
$1.000 \cdot 0,9692 \cdot 1,2202381 = 1.182,7$	1.215	-32,30
$1.000 \cdot 0,9692 \cdot 1,1432606 = 1.108$	1.125,38	-17,38
$1.000 \cdot 0,9692 \cdot 1,0881185 = 1.054,6$	1.053,40	1,20

El entregable más económico es el Bono del Tesoro al 5,15% y vencimiento el 30-7-09, ya que el vendedor pagará en el mercado al contado 1.053,40 € y cobrará con el ejercicio del futuro 1.054,6 €⁷⁰.

✿ Cotización del contrato.

El contrato cotiza diariamente, expresando el precio en porcentaje, a excepción del contrato de futuros sobre el IBEX35 que cotiza el índice.

La variación mínima que puede sufrir el precio en una sesión se denomina “tick”. Generalmente, el tick es de una centésima de punto (1 punto básico). El valor del tick depende de cada contrato; en el contrato sobre el Nocional a 5, 10 y 30 años el tick vale 1 punto básico sobre 100.000 euros, es decir, 10 euros.

La cotización de los contratos de futuros sobre tipos de interés a 3 meses (*Euribor*) debe darse redondeada hasta la milésima, y una variación de 1/5 de centésima en la cotización equivale a un tick, es decir, 1/5 de un punto básico sobre 1 millón de euros da un tick de 5 euros.

La cotización de los contratos sobre el IBEX35 se da redondeada a las unidades y la variación de un punto equivale a 1 tick, que vale 10 euros⁷¹.

Ejemplo 104: La cotización de un contrato sobre el bono nocional a 5 años ha pasado del 98,67 a 98,50, la variación que se ha producido para la posición compradora es de -0,17 o -17 centésimas, lo que equivale a -17 ticks, que valorado en euros son -170 euros.

Ejemplo 105: La cotización de un contrato de futuros sobre el IBEX35 ha pasado de 9.780 a 9.786, lo que equivale para una posición compradora 6 ticks, como el tick vale 10 euros, el precio futuro a variado 60 euros.

El mercado va informando en tiempo real de las tres mejores órdenes de compra y de las tres mejores órdenes de venta, con su volumen de contratos, con el fin de que los miembros del mercado sepan los precios que se están pidiendo y, así, poder encontrar contrapartida a las órdenes.

Tipo de contrato	Compra	Contratos /Volumen	Venta
Bono a 10 años		144	97,82
		57	97,80
		95	9,79
Vto. Junio 99	97,78	20	
	97,77	42	
	97,76	86	

⁷⁰ No se ha incorporado al precio el cupón corrido ya que los dos activos cotizan “ex cupón”.

⁷¹ Cada contrato contempla la forma de calcular el tick y su importe.

En la tabla anterior se pueden ver las mejores órdenes de compra (20 contratos a 97,78) y de venta (95 contratos a 97,79); en el momento que el ordenador del mercado reciba, por ejemplo, una orden de compra a 97,79 y por 10 contratos se realizará la transacción y el mercado marcará una nueva cotización para ese contrato a 97,79.

❖ **Información que debe contener un contrato de futuros.**

❖ **Activo subyacente:**

El tipo de activo que se compra-vende en una fecha futura: Bono Nocional del Tesoro, Índices Bursátiles, Acciones, Tipos de interés, etc.

❖ **Vencimiento del contrato:**

Tercer miércoles de los meses de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre para la renta fija y tercer viernes de los meses de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre para la renta variable.

❖ **Último día de cotización:**

Hasta dos días antes a la fecha de vencimiento para los que se liquidan por entrega del subyacente y hasta el día de vencimiento para los que se liquidan por diferencias.

❖ **Forma de cotización:**

En porcentaje y redondeado a la centésima, para los contratos sobre bonos; en euros para las acciones, en porcentaje redondeado a la milésima para los tipos de interés y en puntos enteros para los índices bursátiles.

❖ **Fluctuación mínima (tick):**

Un punto para los índices, 1 céntimo de euro para las acciones, una centésima de punto para los Bonos Nocionales y 1/5 parte de centésima de punto para los tipos de interés.

❖ **Liquidación al vencimiento:**

Los Bonos Nocionales y acciones mediante entrega del subyacente. El resto de contratos por diferencias respecto al Precio de Liquidación al vencimiento.

La siguiente tabla recoge cotizaciones y los correspondientes precios futuros de algunos contratos de MEFF:

Subyacente	Ibex35	Euribor 90	Bono a 5	Bono a 10	Bono a 30
Cotización			Rentabilidad Interna Media		
Contado	10.141	2,58%	3,39%	4,28%	5,14%
Futuro vto Junio 99	10.135	97,42	107,97	97,67	120,57
F(t)	10.135	2,58%	3,72%	4,29%	5,14%

Ejemplo 106: Un inversor compró 10 futuros sobre el Ibex35 a 10.132. El depósito inicial es de 850 puntos por contrato y el nivel de mantenimiento de la cuenta está en el 80% del depósito inicial. Supóngase que el riesgo del mercado en ese contrato no exige un ajuste de la garantía inicial y las cotizaciones al cierre de las 8 sesiones posteriores a la compra son las recogidas en la cuenta de liquidación diaria de pérdidas y ganancias siguiente:

<i>Día</i>	<i>Cotización</i>	<i>ticks</i>	<i>Valor ticks</i>	<i>Cuenta Márgenes</i>	<i>Cobros/ Pagos</i>
0	10.132			8.500	
1	10.107	-25	-250	8.250	
2	10.095	-12	-120	8.130	
3	10.081	-14	-140	7.990	
4	10.110	29	290	8.280	
5	10.125	15	150	8.430	
6	10.137	12	120	8.500	50
7	10.140	3	30	8.500	30
8	10.156	16	160	8.500	160

El tick asciende a 10 euros.

El depósito inicial es de $850 \cdot 10 = 8.500$ euros.

El límite de mantenimiento de la cuenta es de 6.800 euros.

Si en la sesión 8 el inversor sale del mercado dando orden de venta del futuro comprado al precio de liquidación del día, el mercado le liquidará la cuenta entregándole la garantía de 8.500 euros y la última liquidación de pérdidas y ganancias de 160 euros.

La diferencia en ticks desde que entra en el mercado y sale del mismo es de 24, que equivalen a 240 euros, cantidad que coincide con el saldo total de los cobros y pagos realizados. Este resultado pone de manifiesto el elevado apalancamiento de este mercado, pues con un desembolso de 8.500 euros obtiene unas ganancias de 240 euro (no se han tenido en cuenta las comisiones del mercado y del intermediario)

Ejemplo 107: *Se cubrió una cartera de 1.000 Bonos del Tesoro con vencimiento a 3 años con 10 contratos de futuros sobre el Bono Nocional a 5 años, con vencimiento dentro de 9 meses. El precio de los Bonos del Tesoro era el 102% y el contrato de futuros cotizaba al 101%. Hoy, transcurridos 3 meses, los Bonos del Tesoro cotizan al 95% y el contrato de futuros cotiza al 98%. Si hoy es el momento de realizar la desinversión (6 meses antes del vencimiento del contrato de futuros) el resultado será:*

Por el Bono al contado: Pérdida de $102\% - 95\% = 7\%$ sobre $1.000.000 \text{ €} = 70.000\text{€}$

Por el futuro: Ganancia de $101\% - 98\% = 3\% = 300 \text{ ticks}$, a $10 \text{ euros/tick} \rightarrow 3.000 \cdot 10 = 30.000\text{€}$

Con lo que se pone de manifiesto que la cobertura a 3 meses ha sido ineficiente al no cubrir las pérdidas del contado con las ganancias de la posición en futuro.

Un margen es la diferencia entre los precios de dos contratos de futuros. Podemos distinguir dos tipos:

- ✿ *Intrasread:* diferencia entre los precios de dos contratos de futuros sobre el mismo activo subyacente y con diferentes vencimientos.
- ✿ *Intersread:* diferencia entre los precios de dos contratos de futuros con el mismo vencimiento pero con distinto activo subyacente.

10.3. Cobertura de activos financieros.

La cobertura consiste en la protección de un activo del mercado al contado con la toma de la posición contraria en el mercado de derivados, es decir, si se compra al contado se vende a futuro y si se vende al

contado se compra a futuro. La finalidad es marcar el precio de venta (o de compra) de forma anticipada para que la fluctuación de precios en el mercado no le afecte.

Se puede definir la operación de cobertura como *la cantidad a invertir en activos derivados con posición contraria a la inversión al contado que se desea proteger*. Para realizar una cobertura adecuada es necesario que se conozcan los datos siguientes:

- ✱ La correlación entre los precios al contado y los precios futuros.
- ✱ La variación prevista de los precios al contado.
- ✱ La variación prevista de los precios futuros.

Además, es necesario determinar:

- ✿ El plazo a cubrir.

Lleva asociado el riesgo de base en cuanto el plazo de cobertura sea inferior al del vencimiento del contrato.

- ✿ La ratio de cobertura óptima, o relación entre el activo a cubrir y el activo subyacente del contrato de futuros. Lleva asociado el riesgo de correlación cuando el activo subyacente del contrato de futuros es distinto del activo a cubrir.

- ✿ La cantidad de contratos de futuros a comprar (o vender). Lleva asociado el riesgo de redondeo, ya que no es posible comprar o vender fracciones de contratos de futuros.

- ✿ El tipo de cobertura que se desea.

📌 Cobertura total.

Se pretende eliminar totalmente el riesgo de pérdida y, como consecuencia, se anula la posibilidad de ganancia por encima de la determinada a priori.

Ejemplo 108: Se tienen 100 acciones cuyo precio hoy es de 10 euros / acción, para cubrirlas totalmente y asegurar una ganancia de 1 euro por acción, se venden mediante un contrato de futuros al precio futuro de 11 euros. La acción en los 4 días siguiente ha cotizado a:

día	cotización	Dif. contado	Dif. futuro	resultado
1	9	-1	2	1
2	10	0	1	1
3	11	1	0	1
4	12	2	-1	1

Como puede verse el resultado final es de 1 euro, independientemente de la cotización.

📌 Cobertura parcial.

Se pretende acotar el riesgo de pérdida pero a cambio de no limitar las ganancias.

Ejemplo 109: Hoy, para cubrir 100 acciones que cotizan a 10 euros / acción, se compra un derecho de venta a 11 euros / acción, que cuesta 1 euro / acción. Si la cotización de las acciones al vencimiento de la opción toma uno de los valores siguientes:

		ganancias con la venta		
cotización	Dif. contado	venta al contado	venta con la opción	resultado final
16	6	6	0	5
15	5	4	0	4
14	4	3	0	3
11	1	0	0	-1
10	-1	0	0	0
7	-3	0	1	2
6	-4	0	2	3
5	-5	0	3	4

Hay que tener en cuenta que cuando se ejerce el derecho se deben entregar las acciones y, por tanto, no hay operación al contado.

La pérdida mayor que se obtiene es el coste del derecho de venta, mientras que las ganancias no están acotadas.

10.4 Cobertura con futuros financieros.

Cobertura de acciones.

Se dispone de una cartera de m acciones de la Sociedad X que cotizan hoy a S_0 , ante una tendencia bajista de la Bolsa se puede proteger la cartera vendiendo contratos de futuros sobre dichas acciones. Sea F_0 el precio futuro del contrato y n la talla del contrato, el objetivo de la cobertura será:

$$V_{cubierta}(t) = m \cdot S_t + h \cdot (F_0 - F_t) \cdot n \geq m \cdot S_0$$

siendo h el número de contratos que se deberán vender: $h = \frac{m}{n}$

Ejercicio 110: Un inversor tiene una cartera de 2500 acciones de una sociedad X, que cotizan a 23 u.m./acción. Se estima que habrá una caída de la Bolsa y procede a proteger su inversión mediante la venta de contratos de futuros con vencimiento dentro de 3 meses sobre la sociedad X, cuya talla es de 100 acciones por contrato, al precio futuro de 21 u.m./acción.

La ratio de cobertura será: $h = \frac{2500}{100} = 25$ contratos. Si al cabo de un mes las acciones están cotizando a 19 u.m. y el contrato de futuros cotiza a 18 u.m. el valor de los activos cubiertos es de:

$$V_{cubierta}(1mes) = 2.500 \cdot 19 + 25 \cdot 100 \cdot (21 - 18) = 55.000 \text{ u.m.}$$

El valor de las acciones en el momento de la cobertura asciende a $2.500 \cdot 23 = 57.500 \text{ u.m.}$, luego, la cobertura ha amortiguado la caída pero no ha conseguido evitar las pérdidas.

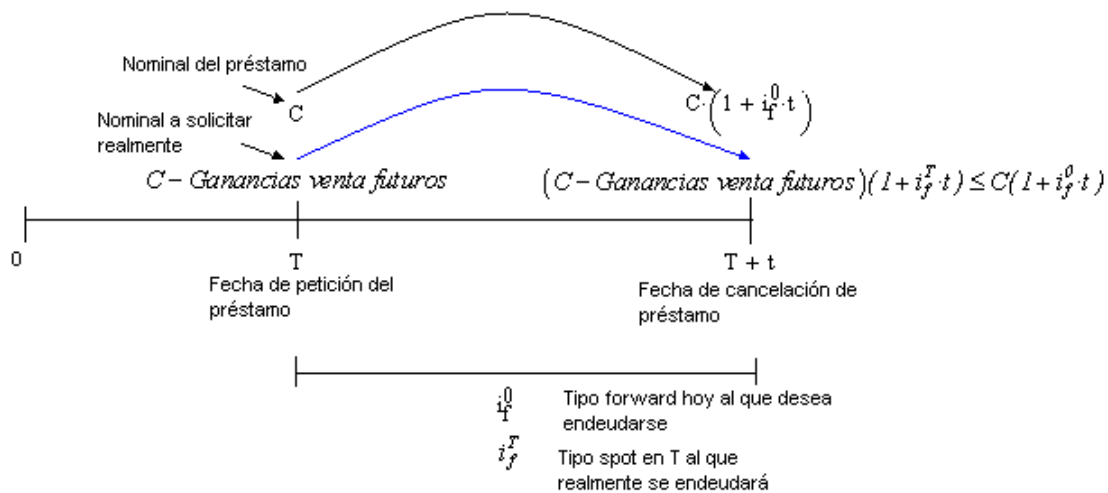
Este resultado es coherente ya que las caídas en el contado son más fuertes que las caídas en el mercado de futuros.

Cobertura del tipo de interés de un préstamo futuro.

Se debe pedir un préstamo dentro de T años, por un importe de C u.m, con una duración de t años y a un tanto de interés a fijar en el momento de la concesión. El prestatario quiere cubrir el tipo de interés de dicho préstamo y, para ello, vende en el mercado de futuros contratos sobre tipos de interés, que vencen en T , con

las características siguientes: Depósito interbancario de nominal C' , duración del depósito t' y tanto de interés futuro del depósito $i_f^0 = 100 - F(0)$. La valoración en u.m. del contrato es $C't' \cdot i_f^0$.

El prestatario ante una posible subida de los tipos de interés desea con la cobertura que la financiación de las C u.m. sea de i_f^0 , independientemente del tipo de interés al que realmente se endeude cuando llegue el momento de pedir el préstamo. Ello exige que al capital a devolver al final de la vida del préstamo no sea superior al que entregaría si el préstamo lo solicitase a un interés de i_f^0 .



La posición vendedora debe proporcionar un ingreso de dinero al prestatario, de esta forma éste podrá pedir el préstamo por un nominal inferior a C

$$\text{Nominal del préstamo} = C - \text{Ganancias por venta de futuros} = C - h(F(0) - F(T)) = C - h \cdot C' \cdot t' \cdot (i_f^T - i_f^0)$$

El capital a devolver por el préstamo será:

$$(C - h \cdot C' \cdot t' \cdot (i_f^T - i_f^0)) \cdot (1 + i_f^T \cdot t) \leq C \cdot (1 + i_f^0 \cdot t)$$

Para calcular la ratio de cobertura, la derivada de $(C - h \cdot C' \cdot (i_f^T - i_f^0)) \cdot (1 + i_f^T \cdot t)$ respecto i_f^T debe ser cero.

Luego,

$$h = \frac{C \cdot t}{C' \cdot t' \cdot (1 + i_f^0 \cdot t)}$$

Ejercicio III: Se cubre un préstamo de 10 millones de u.m. a solicitar dentro de 30 días y que se amortizará a los 60 días de su concesión. El tanto de interés del préstamo será el Euribor a 60 días, vigente en el momento de la solicitud. La cobertura se realiza mediante la venta de contrato de futuros sobre el Euribor 90 con vencimiento dentro de 30 días, siendo el subyacente un depósito interbancario de 1 millón de u.m., vencimiento a 90 días y con precio futuro hoy de 97,345. El tanto de interés que quiere obtener para el préstamo es $100 - 97,345 = 2,655\%$ nominal.

La ratio de cobertura será:

$$h = \frac{10.000.000 \cdot \frac{60}{360}}{1.000.000 \cdot \frac{90}{360} \cdot \left(1 + 2,655\% \cdot \frac{60}{360}\right)} = 6,63 \approx 7 \text{ contratos}$$

⁷² $F(0) - F(T) = (100 - i_f^0) - (100 - i_f^T) = i_f^T - i_f^0$

Si en el momento de pedir el préstamo el Euribor está al 2,9% el nominal a pedir en préstamo será:

$$10.000.000 - 1.000.000 \cdot 7 \cdot (2.9\% - 2.655\%) \cdot \frac{90}{360} = 9.995.712,5 \text{ u.m.}$$

El capital que cancelará el préstamo será: $9.995.712,5 \left(1 + 2.9\% \cdot \frac{60}{360} \right) = 10.044.025 \text{ u.m.} < 10.048.333 \text{ u.m.}$

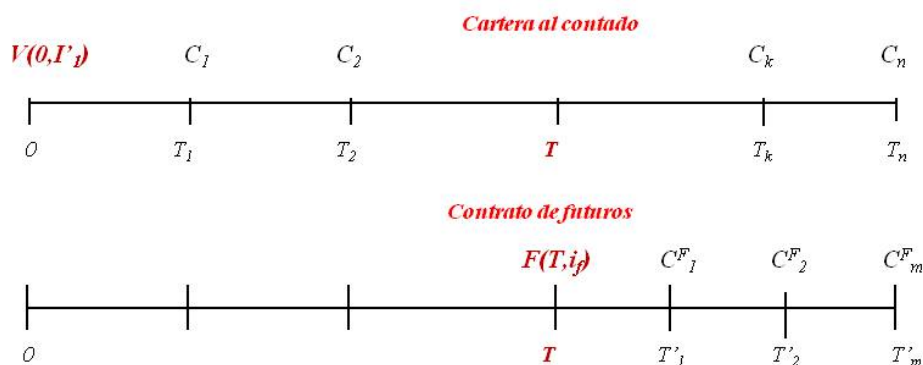
Ha conseguido tener la financiación de los 10 millones de u.m. a una financiación no superior al 2,655% nominal.

🚦 Cobertura de activos de renta fija.

Cuando se crea una cartera de renta fija se la está exponiendo a la fluctuación de los tipos de interés. Para evitar ese riesgo se puede proceder a una “cobertura”. La cobertura consiste en la creación de una cartera mixta que contenga títulos del mercado al contado y posición vendedora en contratos a futuro de forma que la suma del valor de ambos activos deje el valor de la cartera conjunta invariante a los tipos de interés.

Si se prevé que los tipos de interés van a subir, entonces se espera una bajada del valor de la cartera al contado; en ese caso, es conveniente vender los títulos a futuro fijando un precio de venta.

Consideremos los cobros que llevan asociados los títulos al contado y los del activo subyacente del contrato de futuros con vencimiento T .



🌸 Cobertura con una E.T.T.I. plana.

Si la E.T.T.I. es plana los tipos de interés al contado y futuro coinciden ($i_f = I'_1$) y los valores actuales al tanto de mercado I'_1 son:

$$V(0, I'_1) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot (1 + I'_1)^{-T_k}$$

$$F(T, I'_1) = \sum_{s=1}^m C_s^F \cdot (1 + I'_1)^{-(T'_s - T)}$$

Sea h la ratio de cobertura que determina las unidades monetarias a invertir en el mercado de futuros por unidad monetaria invertida en la cartera al contado.

Supongamos que después de constituida la cartera al contado se produce una subida del tanto de interés de mercado, la posición en el mercado de futuros será de venta.

El valor global de la cartera al tanto de mercado, I'_1 , será:

$$V_c(0, I'_1) = V(0, I'_1) + h[F(T, I_1^0) - F(T, I'_1)],$$

Siendo I^0_I el tanto de interés de mercado vigente en el momento de proceder a la cobertura e I'_I el tanto de mercado vigente después de haberse realizado la cobertura, con $I'_I > I^0_I$ ⁷³.

El valor de h adecuado será aquel que haga que el valor de la cartera conjunta sea constante respecto al tanto de mercado I'_I ; ello exigirá que $V'_c(0, I'_I)$ sea a igual a 0. Derivando y dando el valor $I'_I = I^0_I$ se obtiene:

$$[V'_c(0, I'_I)]_{I'_I=I^0_I} = V(0, I^0_I) - h \cdot F(T, I^0_I).$$

Teniendo en cuenta la relación que existe entre la derivada del valor de un título y su duración podemos expresar la relación anterior de la siguiente forma:

$$[V'_c(0, I^0_I)]_{I'_I=I^0_I} = \frac{-D_V(I^0_I)}{1 + I^0_I} \cdot V(0, I^0_I) - h \cdot \frac{D_F(I^0_I)}{1 + I^0_I} \cdot F(T, I^0_I).$$

Si $V_c(0, I_1)$ no debe ser inferior a $V(0, I^0_I)$, se deberá calcular el valor de h para que $V_c(0, I_1)$ tenga un mínimo en $I_1 = I^0_I$, luego su derivada deberá ser cero.

Para $I_1 = I^0_I$, debe verificarse que $V_c(0, I^0_I) = V(0, I^0_I)$ y $V'_c(0, I^0_I) = 0$, de donde:

$$h = \frac{D_V(I^0_I) \cdot V(0, I^0_I)}{D_F(I^0_I) \cdot F(T, I^0_I)}.$$

Siendo h la cantidad de contratos de futuros a vender para cubrir el total de la inversión en activos de renta fija al contado.

Ejercicio 112: Un inversor tiene invertido hoy un capital en 10.000 Bonos del Estado de nominal 1.000 u.m., que pagan cupón anual del 5%, se amortizarán dentro de 13 años, hoy cotizan al 108,063% (TIR del 4,430174%)

En un ambiente financiero de E.T.T.I. plana y ante una posible subida de los tipos de interés dentro de los cuatro próximos meses, el inversor desea proteger su cartera operando en el Mercado de Futuros vendiendo futuros sobre un Bono Nocional a 10 años, cupón del 4%, nominal 100.000 u.m. y que vence dentro de cuatro meses. La orden de venta de futuros se ejecuta cuando el contrato de futuros cotiza al 96,58% (TIR del 4,430174%)

Para determinar la ratio de cobertura se deberán calcular la duración de cada uno de los dos bonos:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{BE} = \frac{\sum_{r=1}^{13} 50 \cdot r \cdot (1 + 0,04430174)^{-r} + 1.000 \cdot 13 \cdot (1 + 0,04430174)^{-13}}{1.080,63} = 9,73 \text{ años} \\ D_{BN} = \frac{\sum_{r=1}^{10} 4.000 \cdot r \cdot (1 + 0,04430174)^{-r} + 100.000 \cdot 103 \cdot (1 + 0,04430174)^{-10}}{96.584,44} = 8,40 \text{ años} \end{array} \right.$$

siendo el precio hoy del bono al contado 1.080,63 u.m. y el precio del Bono Nocional de 96.584,44 u.m..

Como la E.T.T.I. es plana, los tipos futuros de interés y al contado deberán coincidir luego la ratio de cobertura será:

$$h = \frac{D_{BE} \cdot 1.080,63 \cdot 10.000}{D_{BN} \cdot 96.584,44} = \frac{9,73 \cdot 1.080,63 \cdot 10.000}{8,40 \cdot 96.584,44} = 129,49 \rightarrow 130.$$

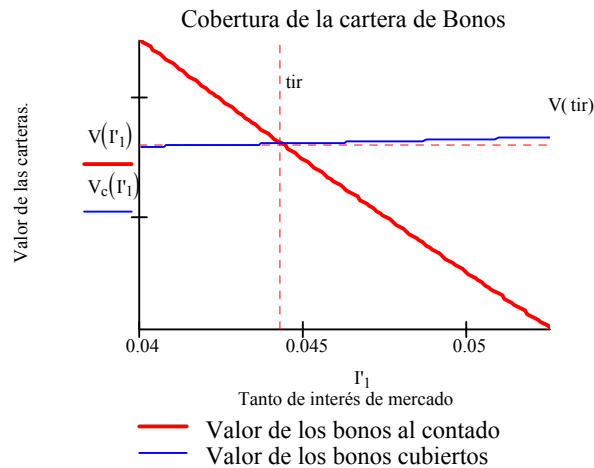
Es decir, por los 10 millones nominales invertidos al contado se deberán vender 130 contratos a futuro.

⁷³ El tanto de interés I^0_I a tener en cuenta en el momento de proceder a la cobertura acostumbra a ser el tanto de interés de rentabilidad de la cartera según el precio de mercado en 0, es decir, su TIR en 0.

Si el tanto de interés de mercado sube hasta el 5,25% el valor de la cartera cubierta será:

$$V_c(0; 5, 25\%) = V(0; 5, 25\%) + h(96.584,44 - F(0, 5, 25\%)) = 10.834.262,16 \text{ u.m.}$$

El valor de la cartera al contado según el nuevo tipo de interés de mercado es 10.038.598,63 u.m. y el valor de la cartera cubierta es de 10.834.262,16 u.m.



Para asegurar que el valor hallado para h hace mínimo a $V_c(0, I'_1)$ cuando $I'_1 = I_1^0$ se debe estudiar el signo de la derivada segunda, obteniéndose que $h < \frac{V''(0, I_1^0)}{F''(T, I_1^0)}$, lo que implica que la "duración" del bono a cubrir debe ser mayor que la "duración" del activo subyacente del contrato de futuros.

Ejemplo 113: Consideremos dos bonos de 10 millones u.m. de nominal, ambos pagan un cupón anual del 10%, es decir, 1.000.000 de u.m./año. Uno de los bonos se amortizará dentro de 8 años y el otro dentro de 13 años. El precio hoy del primer bono es de 9.700.004 u.m. y el precio del segundo bono es de 9.604.026 u.m., lo que da una rentabilidad interna media para ambos del 10,5741%.

Se desea cubrir hoy cada uno de estos bonos con un contrato de futuros sobre un bono nocional a 10 años de nominal 10 millones de u.m. y cupón anual del 9%. Si se acepta que la E.T.T.I. es plana, el tipo de interés forward deberá ser el mismo que el del contado. Luego, el precio del contrato de futuros hoy será de 90,56168% (el bono subyacente vale 9.056.168 u.m.).

La duración de cada bono al contado y del nocional del contrato de futuros, y la ratio de cobertura para cada bono toman los siguientes valores:

Activos	Duration	Ratio cobertura
Bono 1	5,833407	$h_1 = 0,914450242$
Bono 2	7,708460	$h_2 = 1,196428769$
Nocional Futuro	6,832658	

El valor de cada uno de los bonos cubiertos al tanto de mercado I'_1 será:

$$V_{\text{bono } 1}(I'_1) = 1.000.000 \cdot a_{\overline{8}|I'_1} + 10.000.000 \cdot (1 + I'_1)^{-8} + 0,914450242 \cdot (9.056.168 - 900.000 \cdot a_{\overline{10}|I'_1} - 10.000.000 \cdot (1 + I'_1)^{-10})$$

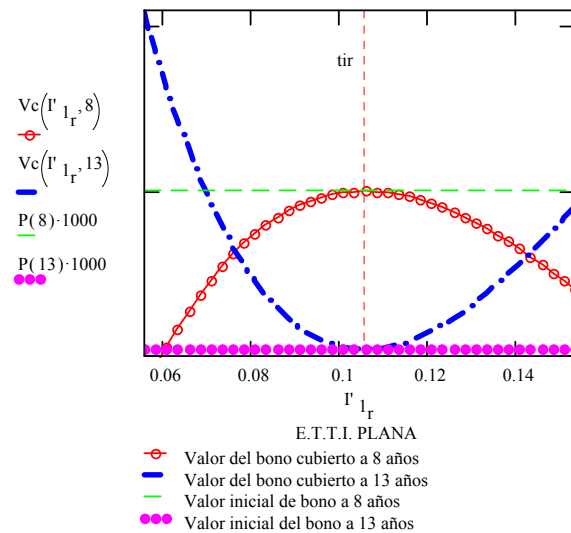
$$V_{\text{bono } 2}(I'_1) = 1.000.000 \cdot a_{\overline{13}|I'_1} + 10.000.000 \cdot (1 + I'_1)^{-13} + \\ + 1,196428769 \left(9.056.168 - 900.000 \cdot a_{\overline{10}|I'_1} - 10.000.000 \cdot (1 + I'_1)^{-10} \right).$$

Supongamos que el tipo de interés ha subido y está en el 11%, el valor de los bonos cubiertos asciende a:

$$V_{\text{bono } 1}(11\%) = 9.699.382,30 \text{ u.m.} < 9.700.004 \text{ u.m. (precio hoy sin cubrir)}$$

$$V_{\text{bono } 2}(11\%) = 9.604.994,59 \text{ u.m.} > 9.604.026 \text{ u.m. (precio hoy sin cubrir)}$$

El primer bono no verifica las condiciones de segundo orden mientras que el segundo sí.



El gráfico anterior representa el valor de cada uno de los bonos cubiertos para distintos tipos de interés y, como puede verse, el bono a 8 años lleva asociada una curva cóncava mientras que el bono a 13 años lleva asociada una curva convexa

🌸 Cobertura con una E.T.T.I. no plana.

En realidad los tipos de interés de mercado no son constantes y los tipos de interés al contado no coinciden con los tipos de interés futuros. En este caso, se debe determinar la ratio de cobertura aceptando la hipótesis siguiente: los tipos de interés futuros dependen de los tipos de interés al contado, siendo la relación funcional $i_f = g(I'_1)$ if $= g(I'_1)$

Si el valor de la cartera cubierta, a los tantos de interés de mercado, es:

$$V_c(0, I'_1, i_f) = V(0, I'_1) + h \left(F(T, i_f^0) - F(T, i_f) \right),$$

para que el valor sea constante respecto a los tipos de interés del mercado debe verificarse que:

$$\left[V'_c(0, I'_1, i_f) \right]_{(I_1^0, i_f^0)} = \left(V'(0, I'_1) - h \cdot F'(T, i_f) \cdot \frac{di_f}{dI'_1} \right)_{(I_1^0, i_f^0)} = 0.$$

Expresando las derivadas de V y F en función de sus respectivas sensibilidades, es decir, utilizando las “duraciones” se obtiene:

$$h = \frac{\frac{D_V(I_1^0)}{1 + I_1^0} \cdot V(0, I_1^0)}{\frac{D_F(i_f^0)}{1 + i_f^0} \cdot F(T, i_f^0) \cdot \frac{di_f}{dI'_1}},$$

Siendo I_1^0 e i_f^0 los tantos de interés al contado y futuro vigentes en el momento de cubrir la cartera.

En el caso particular que la relación funcional sea lineal, $i_f = a + \beta \cdot I_1'$, entonces la ratio de cobertura será:

$$h = \frac{\frac{D_V(I_1^0)}{1 + I_1^0} \cdot V(0, I_1^0)}{\frac{D_F(i_f^0)}{1 + i_f^0} \cdot F(T, i_f^0) \cdot \beta}$$

Para que la β obtenida sea representativa de la dependencia de ambos tipos, es necesario que el coeficiente de correlación entre los tipos al contado y los tipos futuros sea elevado, en caso contrario, no se realizaría una cobertura eficaz.

Para que se realice la cobertura, la función que nos da el valor de la cartera cubierta debe ser convexa, lo que supone la existencia de un punto mínimo cuando $I_1 = I_1^0$ e $i_f = i_f^0$. Luego, la derivada segunda de $V_c(0, I_1, i_f)$ debe ser positiva, obteniéndose que

$$h < \frac{V''(0, I_1^0)}{F''(T, i_f) \cdot \frac{di_f}{dI_1'} + F'(T, i_f) \cdot \frac{d^2 i_f}{dI_1'^2}}$$

Ejemplo 114: Consideremos dos bonos de 10 millones de u.m. de nominal, ambos pagan un cupón anual del 11%, es decir 1.100.000 de u.m./año. Uno de los bonos se amortizará dentro de 8 años y el otro dentro de 14 años. Supongamos que el precio hoy en el mercado de los dos bonos es de 10.950.000 u.m., lo que da una rentabilidad interna media para el primer bono del 9,2665% y para el segundo bono de 9,7293%.

Se desea cubrir hoy cada uno de estos bonos con un contrato de futuros sobre un bono nocional a 10 años de nominal 10 millones de u.m. y cupón anual del 9%, que cotiza al 95,25%, lo que da un rendimiento interno medio para el bono nocional del 9,8%. Si la ETTI no es plana, se ha supuesto una dependencia lineal entre los tipos de interés al contado y futuros, estimando $\beta_1 = 1,054$ (para plazos de 8 años) y $\beta_2 = 1,008$ (para plazos de 14 años).

La duración de cada bono y del nocional son:

Bono	Duration
Bono 1	15,819
Bono 2	8,016
Nocional	6,897

La ratio de cobertura para cada uno de los bonos es: $h_1 = 0,92$ y $h_2 = 1,278$

El valor de cada uno de los bonos cubiertos es:

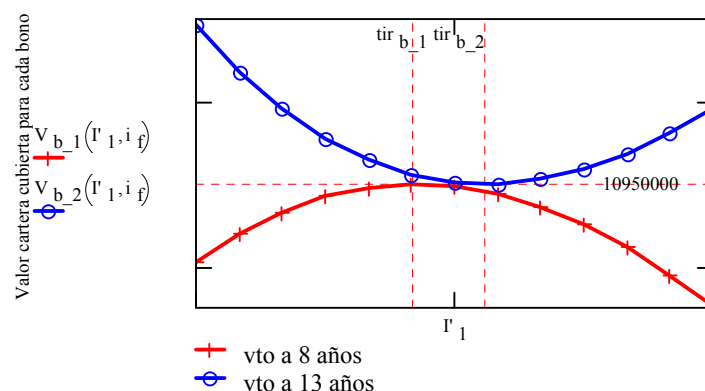
$$\begin{aligned}
 V_{\text{bono 1}}(I_1^1, i_f) &= 1.100.000 \cdot a_{\overline{8}|I_1^1} + 10.000.000 \cdot (1 + I_1^1)^{-8} + \\
 &\quad + 0,92 \left(9.525.000 - 900.000 \cdot a_{\overline{10}|i_f} - 10.000.000 \cdot (1 + i_f)^{-10} \right) \\
 V_{\text{bono 2}}(I_1^2, i_f) &= 1.100.000 \cdot a_{\overline{14}|I_1^2} + 10.000.000 \cdot (1 + I_1^2)^{-14} + \\
 &\quad + 1,278 \left(9.525.000 - 900.000 \cdot a_{\overline{10}|i_f} - 10.000.000 \cdot (1 + i_f)^{-10} \right)
 \end{aligned}$$

Supongamos que el tipo de interés al contado ha subido al 10%, para plazos de 8 años, y al 10,5% para plazos a 14 años; el tipo de interés futuro estimado para plazos de 10 años es del 10,48%.

El valor de cada bono cubierto será:

$$V_{\text{bono } 1}(10\%, 10,48\%) = 10.916.223 \text{ u.m.} < 10.950.000 \text{ u.m.},$$

$$V_{\text{bono } 2}(10,4\%, 10,48\%) = 10.964.212 \text{ u.m.} > 10.950.000 \text{ u.m.}$$



Como puede observarse una curva es convexa y la otra cóncava. Así, el bono a 8 años no está cubierto mientras que el bono a 14 años sí.

10.5 Contrato a plazo en el mercado O.T.C.

El mercado de mutuo acuerdo (O.T.C, *over the counter*) es un mercado a medida y permite responder de forma más directa a las necesidades específicas de las partes en cuanto a vencimiento, duración, montante, etc. Se trata de un mercado sin localización física, que opera mediante una red electrónica de forma similar al interbancario; para las entidades que intervienen en el mismo, las principales ventajas radican en la flexibilidad para pactar las condiciones financieras de las operaciones y un menor coste por el hecho de formar parte del propio mercado, ya que son usuarios e intermediarios.

Este mercado se empieza a desarrollar durante la década de los 80 y surge de forma espontánea, lo contrario del mercado de futuros financieros que surgen de iniciativas institucionales. Las operaciones que tienen lugar en dicho mercado son cerradas y para salir del mercado se debe contratar otra operación de sentido opuesto.

El mercado O.T.C. permite diseñar operaciones de cobertura de riesgos financieros de forma que:

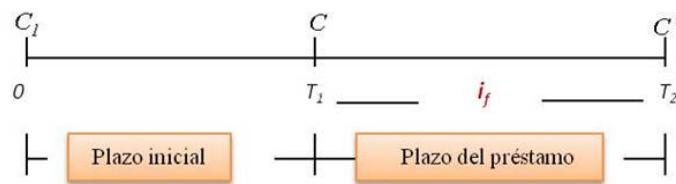
- ☀ Se asegura la desconexión entre las operaciones de préstamo y la gestión de los riesgos de tipos de interés: una entidad puede prestar el dinero y otra entidad puede realizar la operación de cobertura.
- ☀ Da lugar al pago de diferenciales de tipos de interés sin hacer entrega de los nominales (nacionales) sobre los que se calculan.
- ☀ Es reversible mediante la contratación de una operación de tipo inverso, anulando la posición inicial en el mercado, lo que depende en gran parte de la liquidez del mercado.

La ventaja fundamental de las operaciones que se negocian en este mercado es la gran flexibilidad de diseño, puesto que los contratos no son estándares; el inconveniente más relevante es el riesgo implícito de las operaciones (riesgos de: liquidez, mercado, crédito, etc.)

10.5.1. Contrato FORWARD-FORWARD.

Es una operación que permite fijar hoy las condiciones sobre cuantía y tipo de interés de un préstamo que se hará efectivo en el futuro. Las partes se comprometen a garantizar el tipo de interés y a realizar el préstamo en

su día. Se trata de realizar una cobertura de tipos de interés mediante una operación futura que obliga a las partes a una operación de préstamo.



Para calcular el tanto de interés garantizado se deberá tener en cuenta que:

- i_1 , es el tipo de interés para operaciones que duran t_1 años, siendo $t_1 = T_1 - 0$.
- i_2 , es el tipo de interés que rige para operaciones que duran t_2 años, siendo $t_2 = T_2 - 0$.
- i_f , es el tipo de interés *forward*, que se aplicará en el préstamo que se concederá en T_1 y vencerá al cabo de $t = T_2 - T_1$ años.

Mediante este contrato se podrá negociar hoy en firme un préstamo al tipo de interés i_f que se realizará en T_1 .

El diseño de la operación por parte del banco consiste en unir dos operaciones:

- * Prestar en 0 una cantidad C_1 a corto plazo, t_1 , en este caso el tanto de interés al contado será el que oferta el sujeto que garantiza el tanto de interés (normalmente es el tanto de oferta del banco)⁷⁴.
- * Endeudarse en 0 por la misma cantidad C_1 a largo plazo, t_2 . En este caso el tanto de interés será el tanto de interés que demanda el garante (normalmente es el tanto de demanda del banco).
- * La cantidad, C , que deberá recibir el banco al cabo de t_1 años por el préstamo a corto, deberá ser la necesaria para cubrir el préstamo del contrato *forward-forward*. C' será la cantidad a cobrar en T_2 y que deberá servir para cancelar la deuda a largo plazo.

Con esta operación conjunta el único riesgo que asume el banco es el riesgo de crédito del préstamo *forward-forward*.

Si el plazo del préstamo es corto, se utiliza el interés simple, es decir:

$$C_1 \cdot (1 + i_1 \cdot t_1) \cdot [1 + i_f \cdot (t_2 - t_1)] = C_1 \cdot (1 + i_2 \cdot t_2),$$

siendo en este caso:

$$i_f = \frac{i_2 \cdot t_2 - i_1 \cdot t_1}{(1 + i_1 \cdot t_1) \cdot (t_2 - t_1)}.$$

Si el préstamo se realiza a medio o largo plazo se valora a interés compuesto siendo, entonces:

$$i_f = \left(\frac{(1 + I_1^2)^{t_2}}{(1 + I_1^1)^{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1.$$

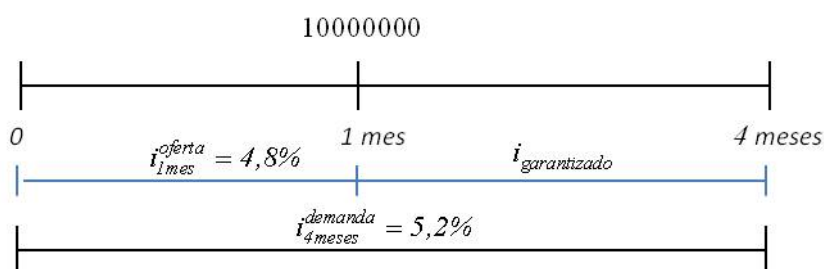
Ejemplo 115: Una empresa ante una posible subida de los tipos de interés desea asegurar el tanto de interés a pagar por un préstamo de 10 millones de u.m. que deberá pedir dentro de 1 mes. El préstamo se amortizará dentro de 3 meses. Solicita en un banco un contrato *forward-forward* que se asegure el tanto de interés a pagar por ese préstamo. Para determinar el tanto de interés que el banco está dispuesto a garantizar, éste debe conocer en el mercado interbancario cuales son los tipos de interés de oferta y de demanda cotizados

⁷⁴ En el mercado de capitales para cada plazo aparece un tanto de interés de oferta y un tanto de interés de demanda; son los tipos de interés que el banco ofrece para prestar dinero y los tipos de interés que el banco está dispuesto a pagar por pedir dinero prestado.

ese día para los distintos vencimientos. La información que le da el mercado es la contenida en la siguiente tabla:

TIPO DE INTERÉS INTERBANCARIO	DEMANDA	OFERTA
1 mes	4.5%	4.8%
2 meses	4.7%	5.1%
3 meses	4.9%	5.4%
4 meses	5.2%	5.6%

Si se tiene en cuenta que el tanto de oferta es al que presta hoy dinero el banco y el de demanda es el interés que le cobran al banco si pide dinero prestado, el esquema de la operación:



El tanto de interés que el banco puede garantizar en el préstamo es:

$$i_{garantizado} = \frac{i_{4meses}^{demanda} \cdot \frac{1}{3} - i_{1mes}^{oferta} \cdot \frac{1}{12}}{\left(1 + i_{1mes}^{oferta} \cdot \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5.2\% \cdot \frac{1}{3} - 4.8\% \cdot \frac{1}{12}}{\left(1 + 4.8\% \cdot \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{4}} = 5.312\%$$

10.5.2. Contrato F.R.A. (FORWARD RATE AGREEMENT).

Consiste en un préstamo diferido a plazo, concedido a un tipo fijo de interés pero sin el compromiso real del préstamo. Al eliminar del FRA los cobros y pagos del préstamo, éste desaparece del balance del banco, eliminando los riesgos de crédito que tan molestos les son, aunque es necesario hacer una reserva para cubrir las carteras de FRA.

Esencialmente es un acuerdo entre dos partes que quieren protegerse de los movimientos futuros de los tipos de interés durante un tiempo, moneda y cuantía concretos. Como operación del mercado O.T.C. el intermediario es el banco, pudiendo ser a la vez parte del FRA e intermediario.

El comprador de un FRA es el prestatario potencial de un préstamo futuro, que quiere protegerse de la evolución desfavorable de los tipos de interés sobre ese préstamo.

El vendedor del FRA no debe ser necesariamente el mismo banco que concede el préstamo.

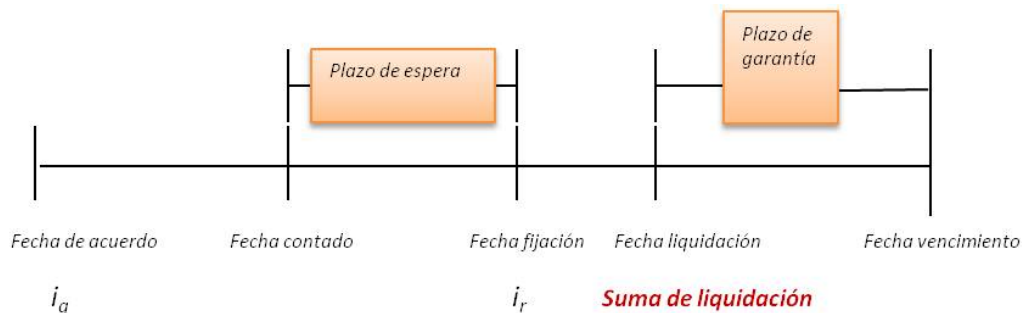
El acuerdo consiste en:

- ✳ El comprador acuerda hipotéticamente pedir un préstamo.
- ✳ El vendedor acuerda hipotéticamente conceder un préstamo.
- ✳ Por un nominal hipotético, Capital Nocional del préstamo.
- ✳ En una divisa.
- ✳ A un tipo de interés fijo.
- ✳ Durante un plazo específico.

- ✿ Con inicio en una fecha futura acordada anticipadamente.
- ✿ La protección se manifiesta en forma de un pago en efectivo, Suma de liquidación, que compensa a la parte lesionada por la diferencia entre el tipo de interés inicialmente acordado, tipo de interés garantizado, y el tipo vigente cuando venza el FRA, tipo de interés de referencia.

Cuando el tipo de referencia es superior (inferior) al tipo de interés que garantiza el FRA, el comprador cobrará del (pagará al) vendedor el diferencial de intereses. Se deberá tener en cuenta:

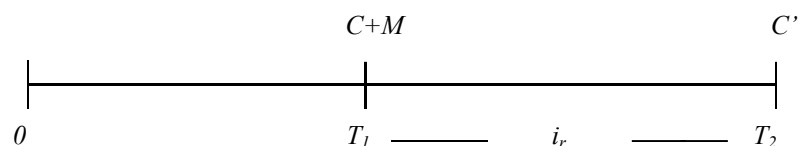
- El plazo del contrato, o plazo de espera, es el tiempo que media entre la firma del FRA y la fecha de liquidación (momento en que se realiza el cobro o pago de las diferencias de tipos de interés)
- El plazo del préstamo es el plazo garantizado con el FRA.
- i_1 , es el tipo de interés para operaciones a T_1 años.
- i_2 , es el tipo de interés para operaciones a T_2 años.
- i_g , es el tipo de interés que garantiza el FRA a ambas partes durante el periodo de garantía.
- i_r , es el tanto de interés de referencia que pactan las partes para el cálculo del diferencial de intereses durante el periodo de garantía.
- 0, es la fecha del acuerdo FRA.
- T_1 , es la fecha de liquidación, que coincide con el inicio del hipotético préstamo.
- Fecha de fijación, es la fecha en que se determina el tipo de interés de referencia.
- g , es el % de gastos sobre el nominal del FRA durante todo el plazo del contrato.



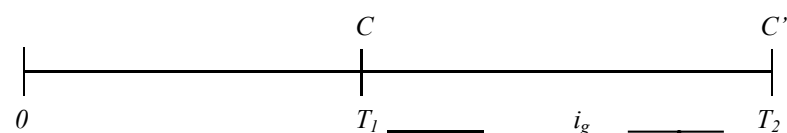
El tanto de interés garantizado debe proteger a la entidad financiera que vende el FRA de la volatilidad de los tipos de interés del mercado.

El capital que deberá intercambiarse entre los dos sujetos del FRA se obtendrá a partir del siguiente planteamiento:

- ✿ Respecto al tanto de interés de referencia:



- ✿ Respecto al tanto de interés garantizado:



debiéndose verificar que:

$$C' = C \cdot [1 + i_g \cdot (T_2 - T_1)] = (C + M) \cdot [1 + i_r \cdot (T_2 - T_1)],$$

de donde:

$$M = \frac{C \cdot (i_g - i_r) \cdot (T_2 - T_1)}{1 + i_r \cdot (T_2 - T_1)}.$$

Si $M > 0$ el comprador del FRA pagará al vendedor dicha cantidad.

Si $M < 0$ el vendedor pagará al comprador del FRA dicha cantidad.

El tanto de interés garantizado que el vendedor está dispuesto a pactar se calculará como un tanto *forward* a partir de la ETTI.

El tanto efectivo de coste de la financiación mediante el FRA, i^* , se obtendrá de la siguiente igualdad, teniendo en cuenta que los gastos y comisiones derivados del FRA se hacen efectivos en la fecha valor, se calculan sobre el nominal del préstamo y son proporcionales al plazo total del FRA, T_2 .

$$(C + M - C \cdot g \cdot T_2) \cdot [1 + i^* \cdot (T_2 - T_1)] = C \cdot [1 + i_g \cdot (T_2 - T_1)].$$

Si la operación se realiza a plazos superiores al año el régimen financiero que se utilizará será el de interés compuesto.

Ejemplo 116: Una empresa debe realizar un pago de 10.000 u.m. dentro de 30 días y para ello decide endeudarse pidiendo un préstamo a 90 días por ese importe, con fecha valor dentro de 30 días. Como el mercado está presionando al alza los tipos de interés, la empresa decide cubrirse de ese riesgo contratando con una entidad de crédito un FRA que le garantice el tanto de interés del préstamo. La entidad de crédito tiene la siguiente tabla de tipos de interés:

Tipos de interés	Compra	Venta
Préstamos a 30 días	3,5%	3,75%
Préstamos a 90 días	3,6%	3,9%
Préstamos a 120 días	3,8%	4,1%

Los gastos de gestión del FRA son del 0,25% del capital del FRA.

El tanto de interés que garantiza el FRA a la empresa es el tipo forward a 90 días aplazado 30 días.

El tanto de interés garantizado por el FRA será el que resulte de utilizar el tanto de interés de compra a 120 días y el de venta a 30 días (la base es ACT/360), es decir,

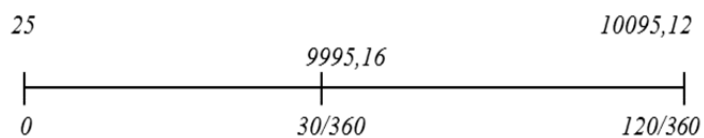
$$\left(1 + 0,0375 \cdot \frac{30}{360}\right) \left(1 + i_f \cdot \frac{90}{360}\right) = \left(1 + 0,038 \cdot \frac{120}{360}\right) \longrightarrow i_f = 0,03804777$$

En el momento de pedir el préstamo el banco concede el préstamo a la empresa al 4%. En ese momento la entidad de crédito deberá proceder a realizar la liquidación del FRA, siendo la suma de liquidación de

$$M = \frac{10000 \cdot (0,03804777 - 0,04) \cdot \frac{90}{360}}{1 + 0,04 \cdot \frac{90}{360}} = -4,83 \text{ u.m.}$$

El signo negativo indica que el que debe pagar es el vendedor del FRA, en este caso la entidad de crédito. La empresa deberá pedir el préstamo por un nominal de 9995,16 u.m.

El coste de la financiación incluida la garantía del tanto de interés será



$$25(1 + I_1)^{\frac{120}{360}} + 10095,12 = 9995,16(1 + I_1)^{\frac{90}{360}} \longrightarrow I_1 = 0,05112769$$

11. Opciones Financieras.

11.1 Concepto y características.

Una opción financiera es un contrato en el que se reconoce, en el momento de la compra del contrato, el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender un determinado número de activos financieros a un precio y hasta una fecha determinados. Si se puede ejercer el derecho sólo en la fecha fijada la opción se denominará Europea, por contra, si el derecho se puede ejercer en cualquier momento hasta la fecha fijada, la opción se denominará Americana.

Las componentes básicas de una opción son:

- ☀ El activo subyacente (*underlying security*), o activo financiero que el poseedor de la opción podrá comprar o vender.
- ☀ t , la fecha de vencimiento (*expiration date*), a partir de la cual la opción queda anulada.
- ☀ K , el precio de ejercicio (*exercise price*), que deberá pagarse por el activo subyacente en el caso de ejercerse el derecho de la opción.

En toda transacción con contratos de opciones existen dos partes:

- ◆ El emisor (*Writer*) del contrato. Actúa como elemento activo en la creación del contrato, ya que es quien debe cumplir las condiciones de intercambio del activo subyacente, en caso de que la opción se ejecute.
- ◆ El comprador o poseedor del derecho de ejercicio de la opción. Debe decidir hasta el momento del vencimiento de la opción si ejerce el derecho. En el caso de que decida ejercerla, el emisor será la contraparte teórica y deberá responder del buen término del contrato.

Básicamente existen dos tipos de opciones:

☀ Opción de compra (*Call*)

Una opción de compra, *Call*, es un contrato que da derecho a su poseedor a comprar un número determinado de activos subyacentes a un precio de ejercicio y hasta una fecha de vencimiento, fijados en el momento de la emisión del contrato.

En este caso, el emisor (*Writer*) se ha comprometido a entregar un número determinado de activos al poseedor de la opción de compra, a cambio recibirá como contraprestación monetaria el precio de ejercicio.

☀ Opción de venta (*Put*)

Una opción de venta, *Put*, es un contrato que da derecho a su poseedor a vender un cierto número de activos subyacentes a un precio y hasta una fecha de vencimiento, fijados en el momento de la emisión del contrato.

El emisor (*Writer*) de una opción de venta se ha comprometido a que le vendan (a comprar) un número determinado de activos; estos activos le serán entregados por el poseedor de la opción a cambio de pagar por ellos el precio de ejercicio.

El emisor, en el momento de generar una opción de compra, puede adoptar dos posiciones:

- a) Emitir una opción cubierta. Una opción se considerará cubierta cuando el emisor posee el activo subyacente requerido en la opción; en este caso el emisor no deberá pagar ningún margen de cobertura inicial al colocar el contrato de opción en el mercado, pues el activo subyacente garantiza la ejecución de la opción en el caso de ser ejercida.

b) Emitir una opción descubierta. Una opción se considerará descubierta cuando el emisor no sea propietario del activo subyacente del contrato de opción. En este caso, para poder garantizar la ejecución de la opción se exige al emisor el pago de una garantía, o margen, inicial.

11.2 Variables que inciden en el precio.

El precio, o prima, que deberá hacerse efectivo para la adquisición de una opción, ya sea de compra o de venta, estará determinado por:

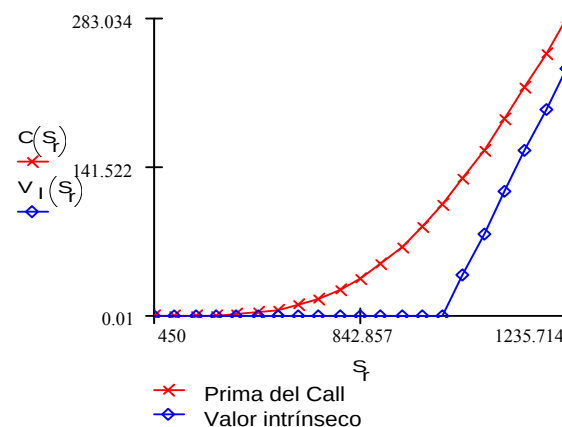
➤ *El precio del activo subyacente, S_t , y el precio de ejercicio, K .*

Podrán ser activos subyacentes:

- *Acciones.* La evolución de las cotizaciones de la acción determinará la variación del precio de la opción.
- *Instrumentos de deuda o tipos de interés.* El activo subyacente es un contrato de futuros sobre un bono nominal.
- *Divisas.* El activo subyacente es la cotización de una determinada divisa; por ejemplo, en el mercado de Filadelfia, el activo subyacente es la cotización al contado en el mercado interbancario de una determinada divisa traducida a dólares.
- *Índice bursátil.* El activo subyacente es una cartera de acciones, configurada en la proporción adecuada, de tal forma que su índice esté perfectamente correlacionado con el índice de la bolsa donde se negocian las acciones.

La diferencia entre el precio de ejercicio y la cotización del activo subyacente en un momento dado se denomina “*Valor Intrínseco de la opción*”,

$$\text{Valor intrínseco en } t = \begin{cases} \text{Max}\{0, S_t - K\} & \text{para el Call} \\ \text{Max}\{0, K - S_t\} & \text{para el Put.} \end{cases}$$



➤ *La volatilidad del precio del activo subyacente, σ .*

Cuando el precio del activo subyacente está sujeto a una fuerte volatilidad, el precio de la opción tenderá a ser más elevado que en el caso de activos poco volátiles; a mayor nivel de riesgo asociado al activo subyacente le corresponderá un precio mayor sobre la opción.

Hay varias maneras de medir la volatilidad:

- *Volatilidad histórica:* se fija en el comportamiento del activo subyacente en el pasado, sin embargo, el comportamiento en el pasado no es una garantía para el comportamiento futuro.
- *Predicción de la volatilidad:* intenta prever lo que pasará en el futuro con el activo subyacente.

- Volatilidad implícita: es la recogida en los precios de negociación hoy.
- Volatilidad futura: es la información que el mercado quiere conocer hoy.

El mercado marca precios tomando como media de la volatilidad la volatilidad implícita:

<i>Mercado</i>	<i>Modelos de valoración:</i>	<i>Volatilidad:</i>
<i>Precios reales →</i>	<i>Fórmula matemática →</i>	<i>Implícita</i>
<i>Precios teóricos ←</i>	<i>Fórmula matemática ←</i>	<i>Predicha</i>

Ejemplo 117: El activo subyacente de una opción call, con precio de ejercicio 1.450 y vencimiento dentro de 6 meses, está cotizando hoy a 1.300. El tanto de interés exento de riesgo es el 6% continuo y la opción, hoy, ha cotizado a 100.

La volatilidad implícita a través del modelo de valoración de opciones de Black-Scholes se obtendrá de la siguiente ecuación:

$$100 = 1.300 \cdot N[d_1(\text{var})] - 1.450 \cdot N[d_2(\text{var})] \cdot e^{-0,06 \cdot 0,5}$$

siendo,

$$d_1(\text{var}) = \frac{\ln\left(\frac{1.300}{1.450}\right) + \left(0.06 + \frac{1}{2} \cdot \text{var}\right) \cdot 0,5}{\sqrt{\text{var} \cdot 0,5}}$$

$$d_2(\text{var}) = \frac{\ln\left(\frac{1.300}{1.450}\right) + \left(0.06 - \frac{1}{2} \cdot \text{var}\right) \cdot 0,5}{\sqrt{\text{var} \cdot 0,5}}$$

Dando como valor de la varianza 0,15

➤ El plazo de vida de la opción.

El tiempo de vida que tiene la opción hasta la fecha de expiración quedará reflejado en el precio de la opción mediante la variable Valor Temporal (*Time Value*). El Valor Temporal es la diferencia entre la prima de la opción y su valor intrínseco,

$$\text{Valor Temporal en } t = \begin{cases} C - \text{Max}\{0, S_t - K\} & \text{para el Call} \\ P - \text{Max}\{0, K - S_t\} & \text{para el Put} \end{cases}$$

El Valor Temporal se puede interpretar como un sobreprecio añadido al valor intrínseco que intenta anticipar la evolución futura del precio del activo subyacente hacia posiciones favorables; por ello, el Valor Temporal disminuirá cuanto más cerca se esté de la fecha de vencimiento de la opción, ya que la posibilidad de evolución favorable del precio del activo subyacente será cada vez menor.

➤ El tipo de interés de mercado exento de riesgo, *i*.

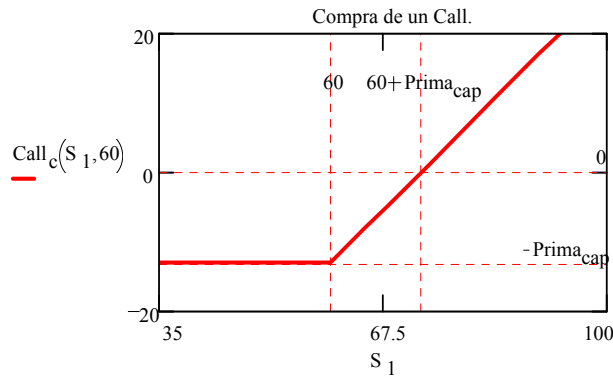
Si el tanto de interés exento de riesgo se incrementa, entonces el precio de la opción de compra crecerá y el de la opción de venta decrecerá.

11.3 El ejercicio de la opción.

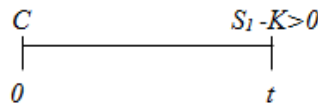
📌 Compra de una opción de compra.

Una orden de compra de una opción de compra representa la adquisición del derecho a comprar un número determinado del activo subyacente al precio de ejercicio en la fecha de vencimiento.

Ante la compra de una opción de compra el comprador desembolsa en 0 el precio de la opción Call, C .



➤ Si $K < S_t$, el poseedor de la opción la ejercerá, pagando K , y venderá el activo adquirido por la opción al precio de mercado, S_t .



En este caso, se habrá obtenido un beneficio comparativo respecto a invertir a la tasa exenta de riesgo si se verifica que:

$$C \cdot (1 + i)^t < S_t - K;$$

con lo cual, en t el precio del activo subyacente en el mercado deberá ser:

$$S_t > C \cdot (1 + i)^t + K.$$

Siendo el umbral de rentabilidad aquel valor de S_t que permita recuperar, además del precio de ejercicio, la prima capitalizada al tanto exento de riesgo hasta la fecha de ejercicio.

➤ Si $K > S_t$, no se ejercerá la opción y se habrá pagado el precio de la opción sin que pueda recuperarse la inversión. La pérdida, referida a tanto de interés, será del 100% de la inversión realizada.

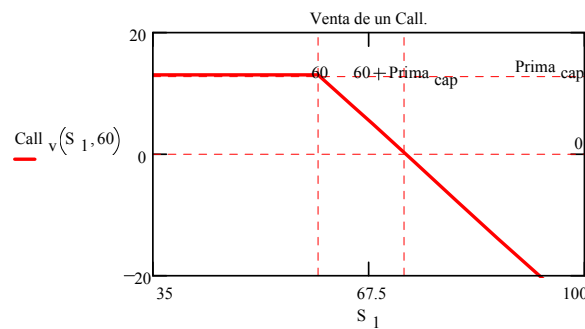
Ejemplo 118: Se compró hace un mes un CALL por 89 u.m. cuando el activo subyacente cotizaba a 3.400 u.m.; el precio de ejercicio de la opción es 3.500 u.m. Hoy, fecha de ejercicio, el precio del activo subyacente está a 3.550 u.m., luego el comprador del CALL ejercerá el derecho, pagando por el activo 3.500 u.m., lo que le representa una ganancia respecto a la compra en el mercado al contado de 50 u.m. Si tenemos en cuenta que pagó la prima de 89 u.m. y que es superior a 50 u.m., habrá tenido una pérdida al no poder recuperar el valor de la prima con el ejercicio de la opción.

Emisión (o venta) de una opción de compra.

Supongamos que la opción está cubierta, el emisor de la opción de compra emite un contrato que reconoce a su poseedor el derecho a comprar un número determinado del activo subyacente, al precio de ejercicio y a la fecha de ejercicio.

Si el precio del activo subyacente en t es superior al precio de ejercicio, el tenedor de la opción la ejercerá, con lo que el emisor estará obligado a vender; por ello, recibirá el precio de ejercicio y entregará los activos.

El posible beneficio para el emisor estará acotado superiormente por la prima capitalizada a t .



La posición alternativa se dará cuando el precio del activo subyacente sea inferior al precio de ejercicio. En este caso, la opción no se ejercerá y el emisor de la opción podrá vender el activo subyacente en el mercado, aunque a un precio inferior al que hubiese deseado en el momento de emitir la opción.

➤ Si $K > S_t$, al no ejercerse la opción Call, la operación para el emisor, o vendedor, podrá expresarse en el siguiente esquema:



Se habrá obtenido un beneficio con la operación respecto a la inversión a la tasa exenta de riesgo, i , si, en t , el precio del activo subyacente verifica la relación $(S_0 - C) \cdot (1 + i)^t < S_t$.

➤ Si $K < S_t$, se ejerce la opción Call, la operación podrá expresarse con el siguiente esquema:



En este caso, el emisor de la opción de compra habrá obtenido un beneficio cuando

$$(S_0 - C) \cdot (1 + i)^t < K,$$

de donde, el precio de la opción de compra deberá respetar la condición siguiente:

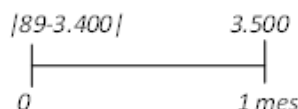
$$C > S_0 - K \cdot (1 + i)^t,$$

lo que determina que en cualquier momento τ :

$$C_\tau > \text{Max}\{0, S_t - K \cdot (1 + i)^{(\tau-t)}\}.$$

Ejemplo 119: El vendedor del CALL del ejemplo anterior recibió hace un mes las 89 u.m. y hoy, fecha de ejercicio, está obligado a entregar el activo subyacente cobrando las 3.500 u.m. Respecto al mercado al contado ha vendido 50 u.m. por debajo del precio de mercado pero cobró la prima en su día.

Si el CALL se vendió cubierto, es decir, teniendo el activo subyacente en cartera, el vendedor deberá analizar la operación globalmente: activo subyacente más venta del CALL.



$$\Delta C = 3.500 + 89 - 3.400 = 189 \text{ u.m.}$$

y compararla con la compra-venta del activo subyacente en el mercado al contado,

$$\Delta C = 3.550 - 3.400 = 150 \text{ u.m.}$$

La venta del CALL le ha proporcionado un beneficio mayor a la compra-venta en el mercado al contado del activo subyacente.

Si el CALL no está cubierto tendremos:



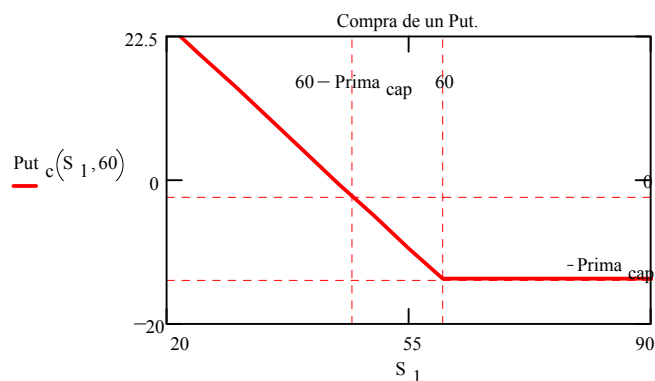
$$|\Delta C| = 39 \text{ u.m. exactamente } 189 - 150 \text{ u.m.}$$

• Compra de una opción de venta.

El comprador de una opción de venta adquiere el derecho a vender en una fecha determinada y a un precio fijado el activo subyacente.

Si el precio de ejercicio es inferior al precio de mercado del activo subyacente, el poseedor de la opción no la ejercerá y venderá el activo subyacente a precio de mercado en t , con lo cual se ha asegurado un precio de venta mínimo.

Por contra, si el precio de ejercicio es superior al precio de mercado del activo subyacente la opción se ejercerá, recibiendo K u.m. a cambio de entregar el activo subyacente.

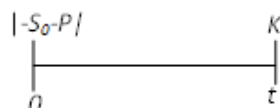


➤ Si $K < S_t$, en t el comprador de la opción deberá desembolsar el precio de la opción y de la compra de los activos subyacentes al precio S_0 , a cambio de recibir en t las S_t u.m. por la venta de los activos en el mercado, pues no se ejerce la opción de venta.



Con la operación se habrá obtenido un beneficio superior respecto a la inversión a la tasa exenta de riesgo cuando $(S_0 + P) \cdot (1 + i)^t < S_t$, siendo $(S_0 + P) \cdot (1 + i)^t$ el precio del activo subyacente a partir del cual se recupera la prima pagada.

➤ Si $K > S_t$, en 0 el comprador de la opción deberá desembolsar el precio de la opción y el precio de adquisición del activo subyacente, a cambio en t recibirá K por el ejercicio de la opción.



La obtención de un beneficio con la operación exigirá que $(S_0 + P) \cdot (1 + i)^t < K$,

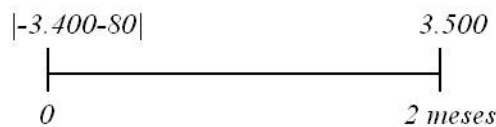
de donde, la prima de la opción de venta deberá cumplir la siguiente condición:

$$P < K \cdot (1 + i) - S,$$

y, por tanto, la prima a pagar en cualquier instante t deberá ser:

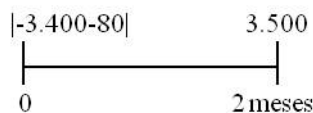
$$P_t < \text{Max} \{0, K \cdot (1 + i)^{(\tau-t)} - S_t\}.$$

Ejemplo 120: Hace dos meses se compró un PUT, pagando 80 u.m. en concepto de prima. El precio del activo subyacente estaba en 3.400 u.m. y el precio de ejercicio del PUT es de 3.500 u.m. Hoy, día de ejercicio, el activo subyacente está cotizando a 3.450 u.m., luego el comprador del PUT lo ejercerá y entregará el activo subyacente cobrando a cambio el precio de ejercicio. El resultado de esta operación se podrá representar en el siguiente esquema:



$$\Delta C = 3.500 - 3.480 = 20 \text{ u.m.}$$

Si hubiese comprado y vendido en el mercado al contado la operación sería:



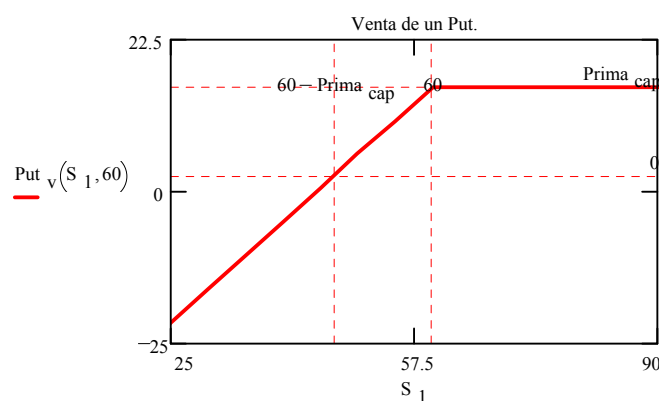
$\Delta C = 3.450 - 3.400 = 50 \text{ u.m.}$ Con la compra del PUT se ha obtenido peor resultado financiero que con la operación en el mercado al contado.

✿ Emisión (o venta) de una opción de venta.

El emisor de una opción de venta reconoce el derecho a que el poseedor de la opción le venda una cantidad determinada del activo subyacente, a un precio de ejercicio y en una fecha determinados.

Si el precio de ejercicio es inferior al precio de mercado del activo subyacente la opción no será ejercida, con lo cual, si quiere disponer del activo subyacente tendrá que ir al mercado y adquirirlo directamente a un precio más elevado que el precio de ejercicio; el precio de ejercicio será el precio mínimo al que podrá disponer del activo subyacente.

Si el precio de ejercicio es superior al precio de mercado la opción se ejercerá; en este caso el emisor dispondrá del activo subyacente al precio de ejercicio.



➤ Si $K < S_t$, la operación para el emisor quedará recogida en el esquema siguiente:



Lo que supone una rentabilidad infinita ya que cobra el precio de la opción y no entrega nada a cambio.

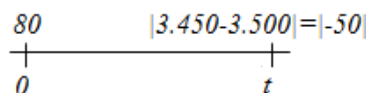
➤ Si $K > S_t$, el ejercicio de la opción para el emisor llevará asociado el siguiente esquema:



En este caso, el emisor de la opción de venta habrá realizado un beneficio superior a la inversión a la tasa exenta de riesgo cuando $P \cdot (1 + i)^t > K - S_t$.

El precio del activo subyacente en t deberá ser $S_t > K - P \cdot (1 + i)^t$.

Ejemplo 121: El vendedor del PUT del ejemplo anterior deberá comprar el activo al precio de ejercicio. En este caso, el vendedor del PUT puede venderse el activo subyacente en el mercado al contado por 3.450 u.m. y, además, habrá cobrado en su momento la prima. La operación se planteará bajo el siguiente esquema:



Como ha cobrado más de lo que tiene que desembolsar en la fecha de ejercicio habrá obtenido un beneficio.

El siguiente cuadro resume el resultado del ejercicio de la opción en la fecha de ejercicio:

Posición	Pérdida	Ganancia
Compra de un Call	Valor en t prima pagada	No acotada
Venta de un Call	No acotada	Valor en t prima cobrada
Compra de un Put	Valor en t prima pagada	No acotada
Venta de un Put	No acotada	Valor en t prima cobrada.

La decisión de comprar o vender un tipo de opción dependerá de las expectativas del inversor y del grado de aversión al riesgo que esté dispuesto a correr.

Una posible orientación de decisión de inversión podrá ser la siguiente:

Expectativas	Operación
Alcista	Comprar Call
Ligeramente alcista	Vender Put
Bajista	Comprar Put
Ligeramente bajista	Vender Call

11.4 Relación entre el precio de un Call y de un Put.

El modelo que se expone pretende determinar cuál debe ser la relación entre el precio de una opción de venta y el de una opción de compra sobre un mismo activo subyacente para que la oferta y demanda del mercado estén equilibradas.

Para ello, se parte de unas hipótesis sobre el mercado y el arbitraje entre el activo subyacente y la opción.

☀ Condiciones del mercado:

- No existen costes de transacción ni impuestos sobre la compra-venta de acciones u opciones.
- Se pueden comprar o vender acciones a crédito.

- Puede endeudarse o invertir cualquier cantidad de dinero a un tanto de interés exento de riesgo, que se supondrá constante hasta la fecha de ejercicio.
- No se producen variaciones en la estructura financiera de la empresa emisora de acciones u opciones que hagan alterar la cotización en el mercado durante el plazo de vida de la opción; ello implica que no se van a pagar dividendos, ni se van a realizar ampliaciones de capital, ni habrá emisiones de “bonos de suscripción de acciones” o de empréstitos convertibles.
- La opción sólo puede ejercerse en la fecha de vencimiento, opción tipo europeo.

● Arbitraje:

La operación de arbitraje consiste en vender una opción de compra, comprar una opción de venta sobre un mismo activo, al mismo precio de ejercicio y vencimiento, comprar el activo subyacente y pedir un préstamo por el valor actual del precio de ejercicio de la opción a un tanto anual de interés exento de riesgo, que deberá cancelarse en la fecha de vencimiento de las opciones.

Simbología:

- $0, t$, fechas de inicio y fin de la operación.
- S_0, S_t , cotización del activo subyacente en 0 y t , respectivamente.
- C , el precio de la opción de compra en 0 .
- P , precio de la opción de venta en t .
- i , tanto de interés efectivo anual exento de riesgo.

La operación se plantea de la siguiente forma:

En 0 la operación generará los siguientes pagos y cobros:

Pedir prestado: $V(K) = K \cdot (1 + i)^{-t}$.

Cobrar C por la venta del Call.

Pagar P por la compra del Put.

Pagar S_0 por la compra del activo subyacente.

El saldo de los cobros y pagos en t será: $C + V(K) - (P + S_t)$

En t los cobros y pagos dependerán del ejercicio de las opciones:

- Si $S_t > K$ la opción de compra será ejercida por el poseedor de la misma. Ello exige la entrega del activo subyacente a cambio de cobrar K u.m. No se ejercerá la opción de venta y se cancelará el préstamo pagando K u.m., por tanto el saldo en t será nulo.
- Si $S_t < K$ entonces no se ejercerá la opción de compra y si se ejercerá la opción de venta, con lo que se hará entrega del activo subyacente al emisor de la opción de venta, cobrando a cambio el precio de ejercicio, K . Se cancelará el préstamo contraído pagando K u.m., el saldo en t será nulo también.

Para que exista equilibrio deberá verificarse que en 0 el saldo deberá ser también nulo, luego

$$C + V(K) = P + S_0$$

de donde,

$$P = C - [S_0 - K \cdot (1 + i)^{-t}].$$

Relación que permite calcular el precio teórico de una opción de venta en función del precio teórico de una opción de compra.

Ejemplo 122: Se emiten hoy un PUT y un CALL sobre un mismo activo subyacente y con vencimiento a 3 meses; el precio de ejercicio para ambas es de 3.500, la tasa de interés exenta de riesgo es el 8% anual y el activo subyacente cotiza a 3.400. Si la prima del CALL es de 80 pts., la prima del PUT deberá ser:

$$P = 80 - [3.400 - 3.500 \cdot (1 + 0,08)^{-0,25}] = 113,30.$$

11.5 Sensibilidad del precio de una opción.

Como ya se ha expuesto anteriormente, el precio de una opción depende de un conjunto de variables. Las fluctuaciones que puedan sufrir dichas variables se harán sentir en el precio de la opción, es por ello que los analistas financieros utilizan un conjunto de parámetros, que son instrumentos de toma de decisión para cambiar su posición en el mercado.

Simbolizaremos por $C(S_t, K, \sigma(t'), \tau, i)$ el precio de una opción en un momento temporal t' .

$$\begin{cases} \text{Si } t' \leq t \rightarrow C(S_t, K, \sigma(t'), \tau, i) \in R^+ - \{0\} \\ \text{Si } t' > t \rightarrow C(S_t, K, \sigma(t'), \tau, i) = 0 \end{cases}$$

siendo:

- S_t , el precio en t del activo subyacente en su mercado.
- K , el precio de ejercicio de la opción.
- $\sigma(t')$, la volatilidad en t' del precio del activo subyacente en su mercado.
- τ , el plazo hasta la fecha de ejercicio, $\tau = t - t'$, expresado en años.
- i , el tanto efectivo anual de interés exento de riesgo para operaciones con plazo igual al de la opción.

Se definen los siguientes parámetros de sensibilidad:

✿ Sensibilidad al precio del activo subyacente.

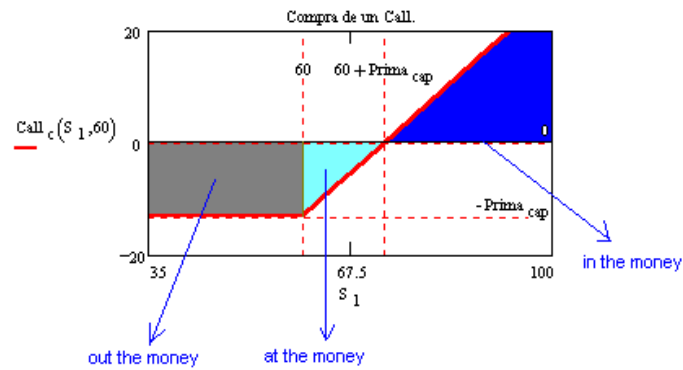
En este aspecto se tendrán en cuenta dos indicadores:

◆ Variación del precio de la opción respecto al precio del activo subyacente:

$$\Delta(t) = \frac{\partial C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)}{\partial S_t}$$

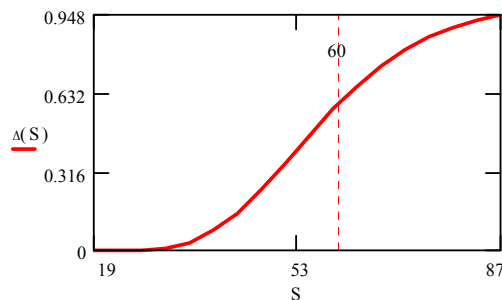
Para una opción CALL, si el precio del activo subyacente en t es inferior al valor actualizado en t del precio de ejercicio, la posición de la opción está por debajo del punto muerto, o de equilibrio (*out of the money*); de igual forma, si el precio del activo en t es superior al valor actualizado del precio de ejercicio, la opción está por encima del punto de equilibrio (*in the money*):

$$\begin{cases} K \cdot (1+i)^{-t} < S_t \rightarrow \text{in the money} \\ K \cdot (1+i)^{-t} > S_t \rightarrow \text{out the money} \\ K \cdot (1+i)^{-t} \approx S_t \rightarrow \text{at the money} \end{cases}$$



La situación de una opción PUT es la contraria a la de la opción CALL.

El indicador Delta, $\Delta(t)$, indica la variación del precio de la opción ante una variación del precio del activo subyacente. En el caso de una opción de compra, cuando más se está en una posición *in the money*, es decir, cuando es bastante apreciable la diferencia $S_t - K \cdot (1 + i)^{-\tau} > 0$ el valor de $\Delta(t)$ deberá ser próximo a 1, ya que una leve variación en el precio del activo subyacente se hará sentir en el precio de la opción. Por contra, si la posición de la opción es *out the money*, es decir cuando es bastante apreciable la diferencia $S_t - K \cdot (1 + i)^{-\tau} < 0$, una leve variación positiva del precio del activo subyacente no será incorporada al precio de la opción, el valor de $\Delta(t)$ tenderá a 0. De forma análoga se razonará con una opción de venta.

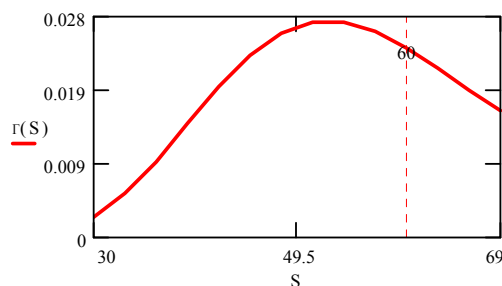


◆ Variación de $\Delta(t)$ a la variación del precio del activo subyacente.

Vendrá indicada por la función

$$\Gamma(t) = \frac{d\Delta(t)}{dS_t} = \frac{\partial^2 C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)}{\partial S_t^2}.$$

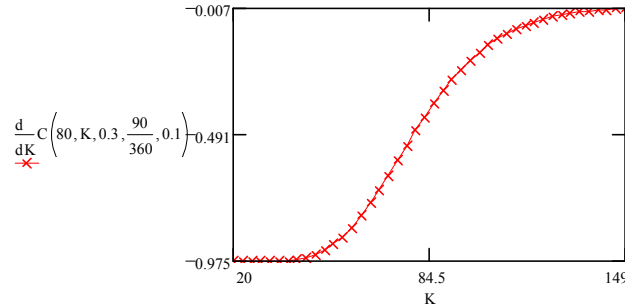
El indicador Gamma, $\Gamma(t)$, indica la curvatura del precio de la opción, si $\Gamma(t)$ es cóncava se apreciará una tendencia alcista en el precio de la opción ante el aumento de S_t y si es convexa se apreciará una tendencia bajista del precio de la opción cuando aumenta S_t .



☀ Sensibilidad respecto a la variación del precio de ejercicio.

El precio de una opción de compra es decreciente respecto al precio de ejercicio, mientras que el precio de una opción de venta es creciente respecto a K .

$$\frac{\partial C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)}{\partial K}.$$



☀ Sensibilidad a la volatilidad del precio del activo subyacente.

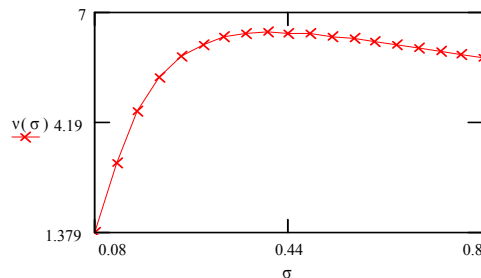
Dadas dos opciones de compra sobre dos activos, X e Y, ambos con igual vencimiento, rentabilidad esperada y precio de ejercicio, si un activo X tiene un precio más volátil que otro activo Y, entonces el precio de la opción de compra (venta) sobre X será mayor (menor) que el precio de la opción de compra (venta) sobre Y.

La desviación estándar estimada del precio del activo subyacente, $\sigma(t)$, según la Teoría de Mercado, es el indicador de la volatilidad del precio del activo subyacente, o riesgo sistemático, respecto al comportamiento del mercado.

El indicador Vega, $v(t)$, da la sensibilidad del precio de la opción respecto a la volatilidad del precio del activo subyacente será:

$$v(t) = \frac{\partial C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)}{\partial \sigma(t)} \geq 0.$$

$C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)$ debe ser creciente respecto $\sigma(t)$. Un aumento de la volatilidad lleva consigo un aumento del precio de la opción como consecuencia de un aumento del riesgo ya que a mayor riesgo será exigible un mayor precio; de igual forma, una disminución de la volatilidad del activo subyacente llevará asociada una disminución del precio de la opción



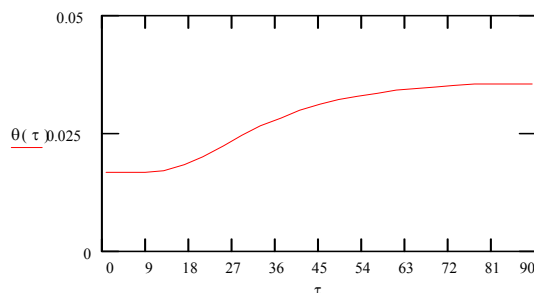
☀ Sensibilidad al plazo, τ .

El efecto del paso del tiempo hasta la fecha de ejercicio provoca un efecto negativo en el precio de la opción; este efecto queda reflejado en el Valor Temporal del precio de la opción.

El indicador Zeta, Θ , describe la variación del precio de la opción respecto al plazo de ejercicio:

$$\Theta(t) = \frac{\partial C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)}{\partial \tau},$$

Siendo $\Theta(\tau)$ una función positiva y creciente respecto a τ , lo que significa que cuanto más tiempo queda hasta la fecha de ejercicio mayor será el Valor Temporal de la opción, ya que será mayor la posibilidad de que el precio del activo subyacente varíe a posiciones favorables.

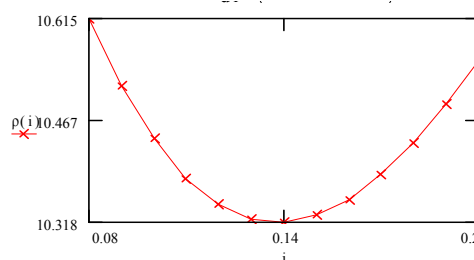


✿ Sensibilidad a la variación del tanto de interés exento de riesgo.

Dado que toda opción supone un aplazamiento en el pago de activo subyacente y las disponibilidades monetarias pueden ser invertidas hasta la fecha de ejercicio a un tanto de interés, i , exento de riesgo, un aumento de los tipos de interés sin riesgo llevará asociado un aumento del precio de la opción debido al efecto arbitraje. El indicador Ro, $\rho(i)$, será:

$$\rho(i) = \frac{\partial C(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)}{\partial i}.$$

De forma similar se estudia el comportamiento del precio de la opción de venta $P(S_t, K, \sigma(t), \tau, i)$.

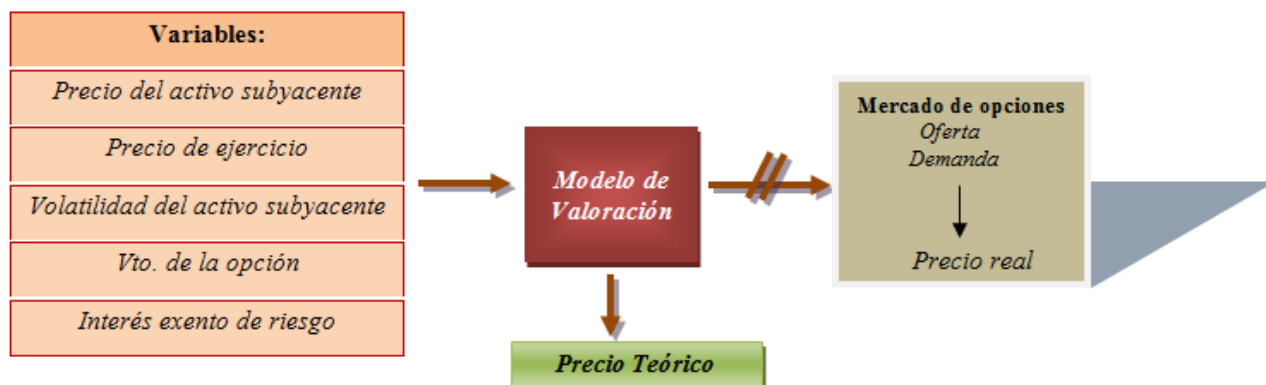


El siguiente cuadro recoge el efecto de los movimientos en las variables sobre las primas de las opciones de compra y de venta:

<i>Tipo de opción</i>		<i>Prima</i>	<i>Prima</i>
<i>Variables</i>	<i>Movimientos</i>	<i>Call</i>	<i>Put</i>
S_t	↑	↑	↓
	↓	↓	↑
K	↑	↓	↑
	↓	↑	↓
<i>Volatilidad</i> (σ^2)	↑	↑	↑
	↓	↓	↓
τ	↑	↑	↑
	↓	↓	↓
i	↑	↑	↓
	↓	↓	↑

La relación que existe entre estos parámetros y el comportamiento del precio, o prima, de una opción es la base de los diferentes modelos de valoración de opciones. Cuando se determina un precio a través de un

modelo o fórmula matemática, se está obteniendo un precio teórico de la opción y no tiene que coincidir, necesariamente, con el precio que el mercado marca a través de la oferta y la demanda.



11.6. Modelos de valoración de opciones.

Modelo de BLACK, F. y SCHOLES, M.

Estos autores definieron un modelo de movimiento de los precios de las opciones en tiempo continuo y basado en un movimiento aleatorio del precio subyacente. Las hipótesis de las que parte el modelo son:

- El tipo de interés a corto plazo es conocido y constante.
- El precio de la acción está representado por un camino aleatorio en tiempo continuo con una varianza proporcional al plazo. La distribución de los posibles precios de la acción al final de cualquier intervalo finito de tiempo es logarítmico-normal.
- La acción no recibe dividendos ni otro tipo de remuneración.
- La opción es “europea”, sólo puede ejercitarse a su vencimiento.
- No existen costes de transacción en la compra, o venta, de la acción, ni de la opción.
- Es posible endeudarse en cualquier cantidad, ya sea una fracción del precio de la acción, para su compra o tenencia, al tanto de interés a corto plazo.
- No existe penalización alguna sobre las ventas a descubierto.

Bajo estos supuestos se puede definir la variación del precio del subyacente de la siguiente forma:

$dS = S(\sigma dX + \mu dt)$, siendo σ la desviación estándar de la rentabilidad del subyacente y μ la rentabilidad media del subyacente (que se suponen constantes). dX es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 0 y varianza dt ; luego, se puede poner $dX = N(0,1) \cdot \sqrt{dt}$.

Se puede simular un comportamiento de los precios a lo largo del tiempo si se acepta que, en discreto,

$$dS = \Delta S = S_{t+1} - S_t. \text{ Así, se tendrá que } S_{t+1} = S_t + \Delta S_t = S_t + S_t \left(\sigma \cdot N(0,1) \cdot \sqrt{dt} + \mu dt \right).$$

Ejemplo 123: Supóngase un activo subyacente cuyo precio en el mercado hoy es de 20 u.m., la rentabilidad media del activo en el mercado es del 3% y la desviación estándar de la rentabilidad es de 0.02. Se considerará que la variación del tiempo es de 1 día, luego $dt = \frac{1}{365}$. A partir de estos datos y según las

hipótesis precedentes durante 6 días seguidos los precios tenderán a concentrarse dentro de las siguientes bandas:

<i>Posibles precios del activo en el mercado para un precio inicial de 20</i>					
<i>día 1</i>	<i>día 2</i>	<i>día 3</i>	<i>día 4</i>	<i>día 5</i>	<i>día 6</i>
19.991	20.139	20.305	20.512	20.593	20.478
19.995	20.143	20.309	20.516	20.597	20.482
19.996	20.144	20.310	20.517	20.598	20.483
19.996	20.144	20.310	20.517	20.598	20.483
19.997	20.145	20.311	20.518	20.599	20.484
20.003	20.151	20.318	20.525	20.605	20.490
20.004	20.151	20.318	20.525	20.605	20.491
20.005	20.153	20.319	20.526	20.607	20.492
20.006	20.154	20.321	20.528	20.608	20.493
20.008	20.155	20.322	20.529	20.609	20.495
20.009	20.157	20.324	20.531	20.611	20.496
20.016	20.163	20.330	20.537	20.618	20.503

La solución de la ecuación diferencial estocástica $dS = S(\sigma dX + \mu dt)$, permite obtener el valor de la opción, los dos autores llegan a la siguiente expresión:

$$C(S_0, \tau) = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-\rho\tau} \cdot N(d_2),$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \quad y \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}} = d_1 - \sqrt{\sigma^2\tau}$$

siendo:

- S_0 , el precio hoy de la acción.
- τ , el plazo hasta el vencimiento de la opción, $\tau = t - t'$.
- ρ , el tanto de interés continuo a corto plazo exento de riesgo y constante.
- σ^2 , la varianza de la rentabilidad esperada del activo subyacente.
- t , la fecha de vencimiento de la opción.
- K , el precio de ejercicio.
- C , el precio del warrant, o de la opción de compra.
- $N(d_1)$, el valor de la función de distribución normal para el valor d_1 .
- $N(d_2)$, el valor de la función de distribución normal para el valor d_2 .

Para este modelo, la variación del precio de la opción respecto a la variación del precio del subyacente es:

$$\Delta_{call} = N(d_1) \quad y \quad \Delta_{put} = N(d_1) - 1.$$

Los mismos autores encuentran adaptaciones de la fórmula anterior en los siguientes casos: reparto de dividendos, valoración de “warrants” (que son significativamente diferentes de una opción de compra estándar), valoración de bonos y de acciones, como opciones sobre el activo de la empresa. Sin embargo, también reconocen que determinadas opciones no pueden valorarse a partir de ella.

Ejemplo 124: Si el tanto de interés exento de riesgo es del 8% anual, la acción hoy cotiza a 3.550 u.m. y tiene una varianza del 30%, el precio teórico de una prima de un CALL sobre dicha acción, que vence dentro de 60 días y con precio de ejercicio de 3.500 u.m. será:

$$C(3.550, \frac{60}{365}) = 3.550 \cdot N(d_1) - 3.500 \cdot e^{-\rho \cdot \frac{60}{365}} \cdot N(d_2),$$

Siendo $\rho = \ln(1 + 0,08) = 0,076961$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{3.550}{3.500} + (0,076961 + \frac{1}{2} \cdot 0,3) \cdot \frac{60}{365}}{\sqrt{0,3 \cdot \frac{60}{365}}} = 0,23188$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{3.550}{3.500} + (0,076961 - \frac{1}{2} \cdot 0,3) \cdot \frac{60}{365}}{\sqrt{0,3 \cdot \frac{60}{365}}} = 0,09808,$$

de donde: $C(3.550, \frac{60}{365}) = 3.550 \cdot N(0,23188) - 3.500 \cdot e^{-0,076961 \cdot \frac{60}{365}} \cdot N(0,09808) = 207,88 \text{ u.m.}$

Modelo binomial.

Las hipótesis de las que se tienen que partir son:

- El precio de la acción sigue un proceso binomial multiplicativo en tiempo discreto.
- La tasa de rentabilidad de la acción al final de un periodo puede tener dos valores posibles: $u - 1$, con probabilidad q , y $d - 1$, con probabilidad $1 - q$.
- El tanto de interés para operaciones a corto plazo es constante.
- No existen costes de transacción, impuestos, ni se cobran dividendos durante el plazo de vida de la opción.
- Debe verificarse la relación $u > r > d$. De no ser así, se podrían encontrar oportunidades de arbitraje al tanto de interés exento de riesgo.
- En el proceso de valoración se considerarán los siguientes activos: la acción, la opción y la posibilidad de comprar, o vender, obligaciones al tanto I_m por periodo exento de riesgo con factor de capitalización asociado r .

La base del modelo está en la construcción de dos carteras, ambas neutrales respecto al riesgo; la primera incorporará la acción y los bonos, la segunda incorporará la opción de compra sobre la acción.

Cartera 1:

Δ , número de acciones que en 0 debe comprar al precio S_0 .

β , u.m. invertidas en to en bonos al tanto de interés exento de riesgo. Dichos bonos son con cupón cero y se podrán recuperar en la fecha de ejercicio de la opción t .

La inversión en 0 será: $\Delta \cdot S_0 + \beta$.

La cantidad que obtendrá en t será: $\Delta \cdot S_t + \beta \cdot r$.

Cartera 2:

Compra de una opción de compra sobre la acción en 0, pagando la prima C_0 por ella.

La cantidad que se obtendrá en t con la opción mediante el ejercicio del derecho, es $\delta(S_t) = \text{Max}\{0, S_t - K\}$.

El valor en t de la Cartera 1, según las acciones hayan subido o bajado, será:

$$\begin{cases} \Delta u \cdot S_0 + \beta \cdot r \\ \Delta d \cdot S_0 + \beta \cdot r \end{cases}$$

Tanto S_t como $\delta(S_t)$ son funciones que en t tomarán dos valores.

$$\text{El valor de la Cartera 2 en } t \text{ será: } S_1 = \begin{cases} u \cdot S_0 > S_0 \\ d \cdot S_0 < S_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B_u = \max\{0, S_0 \cdot u - K\} \\ B_d = \max\{0, S_0 \cdot d - K\} \end{cases}$$

Si lo que se pretende es crear dos carteras que generen una cobertura respecto al riesgo asociado a la variación futura del precio de la acción, se deberá calcular el número de acciones, Δ , y la cantidad β a invertir en bonos con el fin de obtener el mismo saldo en t con ambas carteras. Ello exigirá que:

$$\begin{aligned} B_u &= u \cdot S_0 \cdot \Delta + \beta \cdot r \\ B_d &= d \cdot S_0 \cdot \Delta + \beta \cdot r. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\Delta = \frac{B_u - B_d}{(u - d) \cdot S_0} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{u \cdot B_d - d \cdot B_u}{(u - d) \cdot r}$$

Parámetros que aseguran la cobertura de la compra de la acción sin que se vea afectada por la posible variación del precio futuro de la acción⁷⁵.

La prima de la opción en 0 deberá coincidir con la cantidad invertida en la cartera 1:

$$C_0 = \Delta \cdot S_0 + \beta = \frac{B_u - B_d}{(u - d)} + \frac{u \cdot B_d - d \cdot B_u}{(u - d) \cdot r}.$$

El precio de la opción se podrá expresar de la siguiente forma: $C_0 = \frac{\frac{r-d}{u-d} \cdot B_u + \frac{u-r}{u-d} \cdot B_d}{r}$, debiendo ser $C_0 \geq S_0 - K$.

Si se considera que $\frac{r-d}{u-d} = p$ y $\frac{u-r}{u-d} = 1-p$, como $0 < p < 1$, el valor de la opción se podrá describir como:

$$C_0 = \frac{p \cdot B_u + (1-p) \cdot B_d}{r},$$

Pudiéndose interpretar p como la probabilidad de una distribución binomial.

Los autores, después de fraccionar el plazo hasta la fecha de ejercicio en n periodos, y repitiendo el proceso iterativamente durante los mismos hasta la fecha de ejercicio, llegan a obtener una fórmula general para el valor de una opción de compra sobre una acción:

$$C_0 = \frac{1}{r^n} \left[S_0 \cdot \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot u^j \cdot d^{n-j} - K \cdot \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \right]$$

Donde $1/r^n$ es el factor de actualización al tanto de interés exento de riesgo, desde la fecha de ejercicio hasta

el momento de valoración de la opción y a es el menor entero no negativo mayor que $\frac{\ln(\frac{K}{S_0 \cdot d_n})}{\ln(u_d)}$, valor que

asegura que $\max\{0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S_0 - K\} > 0$, en el caso de que $a = n$ entonces $C_0 = 0$.

En la fórmula binomial no existe ninguna restricción respecto al valor que deben tomar u y d , pero como la fórmula de COX, ROSS y RUBINSTEIN coincide con la fórmula de BLACK y SCHOLES cuando $n \rightarrow \infty$; se

⁷⁵ Tanto Δ como β no tienen que ser valores enteros; se podrá adquirir parte de una acción.

pueden obtener unos valores de u y d a partir de la relación que existe en el límite entre los parámetros de los dos modelos. Así, el tanto instantáneo de interés exento de riesgo, ρ , utilizado por *BLACK* y *SCHOLES* se podrá asociar a r mediante la igualdad $r = e^{-\rho \frac{t}{n}}$, siendo n el número de periodos en que se ha fraccionado el plazo τ y $r = (1 + I_m)$ el factor de capitalización asociado al periodo, con interés exento de riesgo I_m . En el límite

$$u = e^{\sqrt{\sigma^2 \frac{\tau}{n}}}, \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{y} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\frac{\tau}{n}},$$

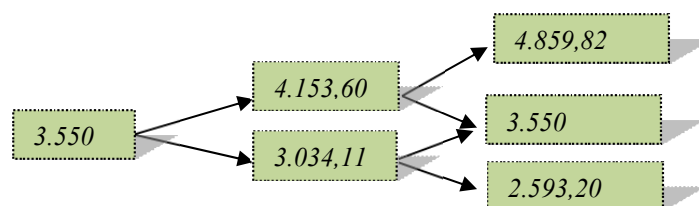
Donde σ^2 es la varianza constante del precio de la acción en el mercado.

La mayoría de los operadores del mercado que utilizan la fórmula binomial toman como valores de u , d y p los resultantes de su extensión al límite, sin tener en cuenta las posibles dispersiones respecto a unas fluctuaciones en dominio discreto del precio de la acción.

Dado que el mercado continúa teniendo más información que cualquiera de las dos fórmulas, ambas deberán entenderse como valores teóricos “de referencia” y nunca como precios de mercado. Si se interpretan ambas fórmulas de esta forma, los datos de u , d y p obtenidos a partir del límite pueden ser inicialmente válidos para poder calcular el valor “teórico” de una opción de compra en aquellos casos que la fórmula de *BLACK* y *SCHOLES* no recoge.

Ejemplo 125: Una acción cotiza a 3.550 u.m. hoy, la varianza de la cotización es del 30% y el tanto de interés exento de riesgo es del 8% anual. Una opción CALL sobre dicha acción vence dentro de 60 días y con precio de ejercicio 3.500 u.m.

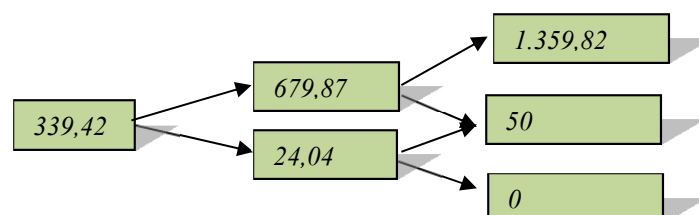
El precio de la prima obtenido mediante el modelo binomial con dos periodos se obtendrá a partir de la distribución bidimensional siguiente:



Teniendo en cuenta que:

$$u = e^{\sqrt{0,3 \cdot \frac{60}{2 \cdot 365}}} = 1,17, \quad d = \frac{1}{u} = 0,855, \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1 + 0,08) - \frac{1}{2} \cdot 0,3}{\sqrt{0,3}} \right) \sqrt{\frac{60}{2 \cdot 365}} = 0,48088,$$

el valor de la prima al final de cada periodo se recoge en el siguiente esquema,



siendo:

$$C_2 = [1359,82 \cdot 0,48088 + 50 \cdot (1 - 0,48088)] \cdot 0,48088 \\ + [50 \cdot 0,48088 + 0 \cdot (1 - 0,48088)] \cdot (1 - 0,48088) = 339,42 \text{ u.m.}$$

de donde,

$$C_0 = C_2 \cdot \frac{1}{(1 + 0,08)^{\frac{60}{365}}} = 335,15.$$

Como puede observarse el precio de la prima difiere respecto al obtenido con el modelo de Black y Scholes, ello se debe al efecto de la periodificación, sólo coincidirán cuando $n \rightarrow \infty$.

12 Mercado de opciones financieras.

12.1 Descripción del mercado.

El desarrollo de un mercado que ofrezca a sus participantes liquidez, seguridad y eficacia exige las siguientes características: normalización de los contratos, mercado único, contrapartida única y Cámara de Compensación (*Clearing House*)

Por normalización se entenderá la fijación de todas las características del contrato menos una, que es la que se negocia; en este caso es el precio del derecho o prima. El mercado compra al que vende y vende al que compra, sin tomar posiciones para sí, complementando la contrapartida única con un sistema de anotaciones en el que se registran las compras y ventas de cada participante con el fin de tenerlo puntualmente informado.

El primer mercado de opciones que surge con las características actuales es el “*Chicago Board Option Exchange*” (CBOE), tutelado por el “*Chicago Board of Trade*”, establecido en 1974 y que nace con la voluntad de evitar los abusos que hicieron fracasar a su antecesor. Se crea una cámara de negociación que actúa de intermediario entre los compradores y los vendedores; esta cámara debe asegurar la emisión de los contratos estandarizados y fácilmente negociables en un mercado secundario ágil.

12.2 Naturaleza del contrato.

✿ Estandarización del contrato.

Hace referencia al número de activos subyacentes que contiene cada contrato (100, 1000, ..) y nominal del contrato.

Los contratos de opciones que tienen el mismo activo subyacente forman una clase de opciones.

Dentro de una clase de opciones si existen contratos con la misma fecha de vencimiento y el mismo precio de ejercicio constituyen una serie de opciones.

En el mercado español, cada clase de opciones tiene como mínimo cuatro vencimientos en el año y cada clase se compone de 5 series para cada vencimiento.

El precio de ejercicio de una nueva serie se fija en un nivel próximo a la cotización en el mercado al contado del activo subyacente. Cualquier cambio en el valor del activo subyacente por ampliaciones de capital, etc. obliga a determinar un nuevo precio de ejercicio para la emisión de una nueva serie.

✿ Liquidez.

En la mayoría de los mercados de opciones existe un organismo de compensación, que es el único emisor de contratos en su mercado y, por tanto, garantiza su ejecución. El vendedor de una opción negocia con la Cámara de Compensación, al igual que el comprador, pero ni el vendedor ni el comprador mantienen ningún tipo de relación. Si un contrato de compra se ejerce la Cámara de Compensación elige, entre los vendedores de esa serie que han ofertado el mismo precio, la contrapartida para que se pueda garantizar la liquidez de la operación.

✿ Las garantías y los gastos de transacción.

En el momento de adoptar una posición en el mercado deben tenerse en cuenta dos factores que inciden de una forma especial en el coste real de la transacción:

✿ Las garantías.

Se calcularán diariamente teniendo en cuenta todas las posiciones abiertas de una misma cartera, valorándolos en el peor de los supuestos.

Se podrán aportar como garantía:

- El activo subyacente del contrato; entonces, la operación estará cubierta.
- Dinero en efectivo; un porcentaje del nominal del contrato.

✿ **Las Comisiones.**

- Comisiones del Mercado: El mercado contemplará una tarifa para el cálculo de las comisiones y no podrá cobrar otras distintas de las tarifadas por ningún concepto. En España la tarifa de comisiones del MEFF debe remitirse previamente a la Comisión Nacional del Mercado de Valores.
- Comisiones del Miembro: Serán los costes por los servicios prestados por el intermediario al cliente. La tarifa de comisiones de cada Miembro deberá ser pública y cumplir la legislación vigente.

✿ **Características de los contratos en MEFF.**

Los contratos de opciones con mayor volumen de negocio en el MEFF deben contener la siguiente información:

● **Activo subyacente:**

Existen opciones sobre acciones, futuros sobre índices futuros sobre euribor90 y futuros sobre el Bono Nocional. Las acciones deberán estar emitidas, totalmente desembolsadas y que coticen en el Sistema de interconexión bursátil.

● **Clase de contrato.**

Habrán opciones de compra y de venta simultáneamente. Además se deberá especificar si son tipo americano o tipo europeo.

● **Talla del contrato.**

Si la opción es sobre acciones la talla es de 100 acciones, en el caso de las opciones sobre futuros será el nominal del futuro subyacente.

● **Vencimiento.**

Los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Para las opciones sobre renta variable, el tercer viernes del mes de vencimiento y para las opciones sobre renta fija el tercer miércoles del mes de vencimiento.

Habrán que indicar cual es el último día de negociación.

● **Precio de ejercicio.**

Cada clase recogerá un vencimiento y éste se configurará en una serie. Cada serie corresponde a un vencimiento y precio de ejercicio.

● **Cotización.**

Cotizarán las primas en euros, indicando la fluctuación mínima que puede tener una prima en una sesión de mercado.

● **Liquidación al vencimiento.**

La liquidación al vencimiento dependerá del subyacente. Si es una opción sobre acciones se realizará la entrega del subyacente, pero si se trata de una opción cuyo subyacente es un futuro se liquidará abriendo la posición compradora (para el *call*) o vendedora (para el *put*) en el mercado de futuros.

● **Introducción de nuevas series.**

Al introducir un nuevo vencimiento se deberán crear como mínimo cinco series, tanto de compra como de venta. La serie central será la que tendrá como precio de ejercicio, aquella cantidad contenida en la Tabla que

publica el mercado, más próxima al último precio al contado del activo subyacente el día hábil anterior a la fecha de introducción de la nueva serie. Además, habrá dos series con precio de ejercicio superior al central y otras dos con precio de ejercicio inferior al central. El precio de ejercicio se podrá ajustar cuando se producen cambios que pueden afectar al precio del subyacente en el mercado al contado.

12.3 Cobertura con opciones financieras.

Uno de los destinos de la adquisición de opciones financieras es la cobertura de una cartera de activos del mercado al contado.

Como ya se ha expuesto en páginas anteriores el concepto de cobertura, en este apartado se desarrollará la forma de cálculo de la ratio de cobertura cuando se utilizan opciones financieras.

Para que la cobertura sea eficiente debe partirse de unas premisas previas:

- ◆ La previsión del comportamiento del mercado debe ser fiable. Ello quiere decir que debe aceptarse la tendencia a la baja (o al alza) de los precios en los mercados durante el plazo de la cobertura.
- ◆ El precio de ejercicio de las opciones financieras deberá ser el precio al contado del activo subyacente de la opción (*at the money*), es decir, si el activo subyacente en el momento de realizar la cobertura está en el mercado al contado a S'_0 , entonces el precio de ejercicio de la opción deberá ser el más próximo a S'_0 .

Se parte de un activo al contado que cotiza hoy a S_0 u.m. y se quiere evitar que le afecte una bajada de precios en el mercado; en este caso, se comprarán opciones de venta (*Puts*) para evitar la incidencia de la caída de los precios.

La cartera cubierta tendrá el siguiente valor: $V(S_t, S'_t) = m \cdot S_t + h \cdot n \cdot \max\{0, K - S'_t\}$,

siendo:

- m , el número de activos al contado a cubrir.
- S_t , el precio en t del activo al contado a cubrir.
- S'_t , el precio en t del activo subyacente de la opción de venta.
- n , la talla del contrato, o cantidad de activo subyacente asociado a la opción.
- $\max\{0, K - S'_t\}$, el beneficio obtenido con el ejercicio de la opción de venta en t .
- h , ratio de cobertura.
- K , el precio de ejercicio de la opción, que deberá ser S'_0 , es decir, el precio al contado del activo subyacente.

En el momento de realizar la cobertura el valor de la cartera cubierta será el valor de los activos al contado

$$V(S_0, S'_0) = m \cdot S_0 + h \cdot n \cdot \max\{0, K - S'_0\} = m \cdot S_0.$$

Teniendo en cuenta que $\max\{0, K - S'_0\}$ es el valor intrínseco de la prima y, por tanto, un valor muy representativo de la misma se podrá expresar el valor de la cartera cubierta de la siguiente forma:

$$V(S_t, S'_t) = m \cdot S_t + h \cdot n \cdot P(S'_t),$$

Siendo $P(S'_t)$ la prima de la opción de venta.

La ratio de cobertura debe ser aquel valor de h que haga que $V(S_t, S'_t)$ no sea inferior a $m \cdot S_0$.

Si expresamos la inversión al contado sobre la base del precio del activo subyacente tendremos:

$$m \cdot S_t = x \cdot S'_t \rightarrow x = \frac{m \cdot S_t}{S'_t},$$

y, sustituyendo esta relación, podemos expresar $V(S_t, S'_t)$ sólo en función de S'_t , es decir,

$$V(S'_t) = x \cdot S'_t + h \cdot n \cdot P(S'_t).$$

la derivada de $V(S_t, S'_t)$ respecto a S'_t deberá ser 0 para $S'_t = S'_0$ y para $S_t = S_0$,

$$\left[\frac{dV(S'_t)}{dS'_t} \right]_{S'_t=S'_0} = 0 = x + h \cdot n \cdot \Delta_P,$$

de donde:

$$h = \frac{-x}{n} \cdot \frac{1}{\Delta P} = -\frac{m \cdot S_0}{n \cdot S'_0} \cdot \frac{1}{\Delta_P},$$

Siendo, $\Delta_P = N(d_1) - 1$, la Delta del Put.

Ejemplo 126: Se tiene una cartera de 10.000 acciones de una sociedad que tiene un peso importante en el índice de la bolsa donde se negocian. El precio hoy de las acciones es de 2.000 u.m. y se prevé una bajada de la bolsa en los tres próximos meses. El inversor desea proteger sus acciones comprando opciones de venta sobre el índice bursátil. Hoy, se sabe que el índice está a 1.000, la volatilidad anual del índice es del 0,25 y la tasa exenta de riesgo es del 2,5% de interés continuo.

En el mercado de opciones el inversor compra puts sobre el índice bursátil con precio de ejercicio 1.000, talla de la opción 1.000 y vencimiento a tres meses.

La prima teórica obtenida mediante la fórmula de Black-Scholes asciende a 46,63 u.m. y la Delta del put asciende a -0,4552.

La ratio de cobertura de la cartera de acciones es:

$$h = -\frac{m \cdot S_0}{n \cdot S'_0} \cdot \frac{1}{\Delta P} = \frac{10.000 \cdot 2.000}{1.000 \cdot 1.000} \cdot \frac{1}{0,4552} = 44 \text{ puts}$$

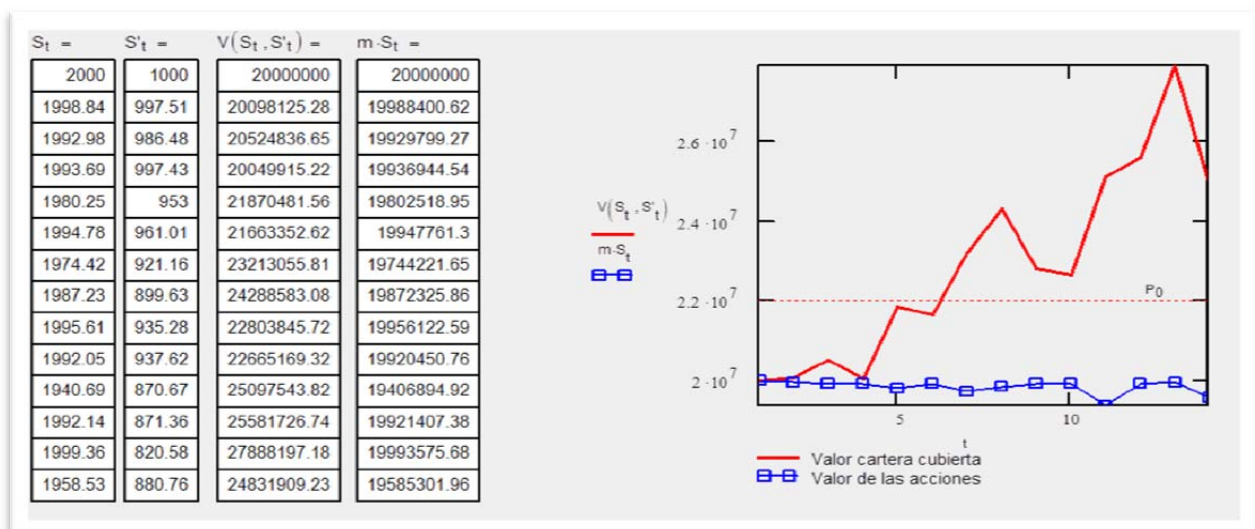
El coste de la cobertura y de las acciones asciende a:

$$P_0 = 2.000 \cdot 10.000 + 44 \cdot 1.000 \cdot 46,63 = 22.051.580 \text{ u.m.}$$

El valor de la cartera cubierta en función del precio de las acciones en bolsa y de la evolución del índice será:

$$V(S_t, S'_t) = 10.000 \cdot S_t + 44 \cdot 1.000 \cdot \max\{0, 1.000 - S'_t\}$$

La evolución del valor de la cartera cubierta de acciones y sin cubrir para distintos valores de S_t y S'_t , calculados aleatoriamente en 14 sesiones posteriores, es:



Como puede observarse en las tablas anteriores sólo se recupera el coste de la cobertura cuando el índice experimenta una caída importante. La cobertura que se ha realizado no es perfecta debido a que el activo a cubrir no es el subyacente de la opción y ambos tienen volatilidades distintas. Tan importante como determinar la ratio de cobertura es analizar el coste de la misma, ya que se tienen que comprar las opciones de venta, y la posibilidad que el precio del subyacente caiga lo suficiente para poder recuperar el coste de la protección.

12.4 Estrategias financieras.

Una combinación de opciones ya sea de compra, venta o de ambas permite diseñar operaciones financieras con una estructura más compleja que la opción simple y que pueden cubrir riesgos concretos.

Márgenes (spread)

Se entenderá como “margen” a una operación financiera consistente en la compra de una opción y en la venta simultánea de otra de los mismos tipos (ambas de compra o ambas de venta), sobre el mismo activo subyacente.

Se pueden distinguir tres tipos: Margen vertical, horizontal y mariposa.

Margen vertical.

Un margen vertical consistirá en la compra de una opción de compra (venta) y la venta de una opción de compra (venta), sobre un mismo activo subyacente, con la misma fecha de ejercicio, pero precios de ejercicio distintos.

En 0 se pagará la prima de la opción comprada y se cobrará la prima de la opción vendida.

En t el ingreso (o pago) neto dependerá del precio del activo subyacente, lo simbolizaremos por $B(S_t)$.

Sean:

S_t , el precio del activo subyacente en t .

K_1 , el precio de ejercicio de la opción que se ha comprado.

K_2 , el precio de ejercicio de la opción que se ha vendido.

$B(S_t)$, la función que recoge el saldo del ejercicio de las opciones en t , positivo o negativo según sea el precio del activo subyacente.

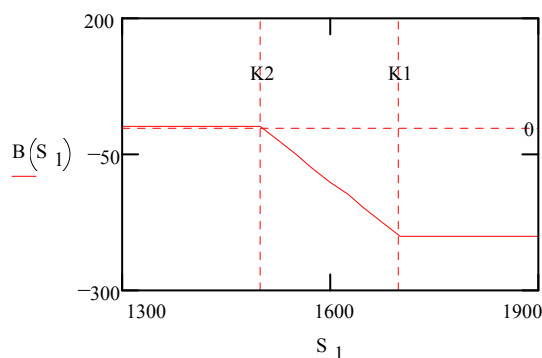
Margen vertical con opciones de compra:

La operación consiste en la compra de una opción de compra y en la venta de una opción de compra.

Margen vertical negativo.

Si $K_1 > K_2$, el precio de ejercicio de la opción que se ha comprado es superior al precio de ejercicio de la opción vendida y el saldo resultante del margen vertical en t dependerá de S_t :

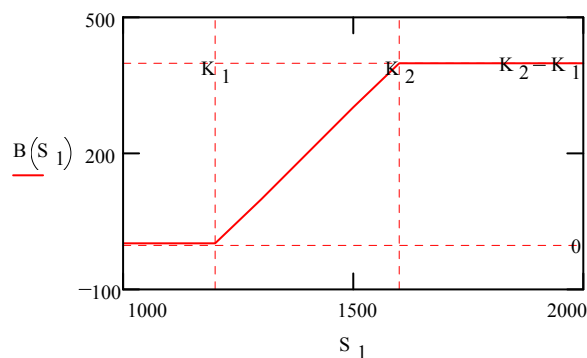
$$\left. \begin{array}{l} K_1 > K_2 \\ C_1 < C_2 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_t) = \left\{ \begin{array}{l} S_t \leq K_2 \rightarrow 0 \\ K_2 < S_t \leq K_1 \rightarrow K_2 - S_t \\ K_1 < S_t \rightarrow K_2 - K_1 \end{array} \right\} \leq 0.$$



➤ *Margen vertical positivo.*

Si $K_1 < K_2$, el precio de ejercicio de la opción que se ha comprado es inferior al precio de ejercicio de la opción vendida y el saldo resultante del margen vertical en t dependerá de S_T :

$$\left. \begin{array}{l} K_1 < K_2 \\ C_1 > C_2 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_1) = \begin{cases} S_1 \leq K_1 \rightarrow 0 \\ K_1 < S_1 \leq K_2 \rightarrow S_1 - K_1 \\ K_2 < S_1 \rightarrow K_2 - K_1 \end{cases} \geq 0.$$



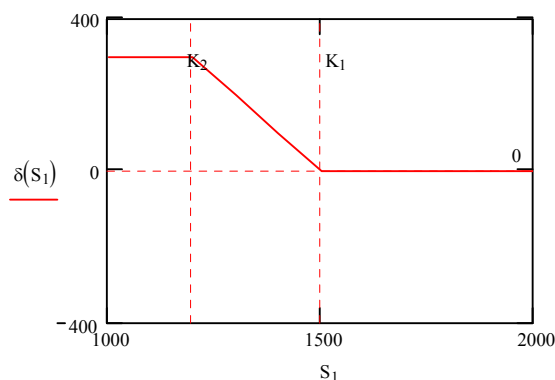
◆ Margen vertical con opciones de venta:

La operación consiste en la compra de una opción de venta y en la venta de una opción de venta.

Margen vertical positivo.

Si $K_1 > K_2$, el precio de ejercicio de la opción que se ha comprado es superior al precio de ejercicio de la opción vendida y el saldo resultante del margen vertical en t dependerá de S_T :

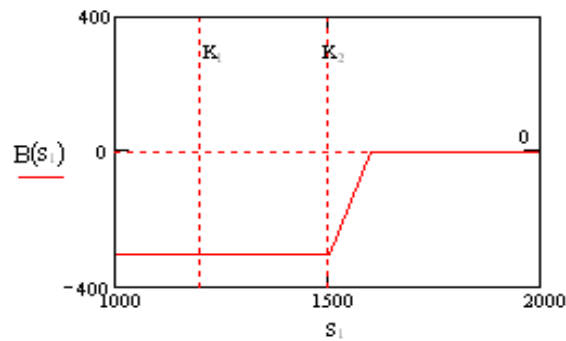
$$\left. \begin{array}{l} K_1 > K_2 \\ P_1 < P_2 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_1) = \begin{cases} S_1 \leq K_2 \rightarrow K_1 - K_2 \\ K_2 < S_1 \leq K_1 \rightarrow K_1 - S_1 \\ K_1 < S_1 \rightarrow 0 \end{cases} \geq 0.$$



➤ Margen vertical negativo.

Si $K_1 < K_2$, el precio de ejercicio de la opción que se ha comprado es inferior al precio de ejercicio de la opción vendida y el saldo resultante del margen vertical en t dependerá de S_t :

$$\left. \begin{array}{l} K_1 < K_2 \\ P_1 < P_2 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_1) = \begin{cases} S_1 \leq K_1 \rightarrow K_1 - K_2 \\ K_1 < S_1 \leq K_2 \rightarrow S_1 - K_2 \\ K_2 < S_1 \rightarrow 0 \end{cases} \leq 0.$$



Un margen vertical será positivo cuando $B(S_t) \geq 0$. Si es de opciones de compra debe verificarse que $K_1 < K_2$ y si es de opciones de venta que $K_1 > K_2$.

Un margen vertical será negativo cuando $B(S_t) \leq 0$. Si es de opciones de compra debe verificarse que $K_1 > K_2$ y si es de opciones de venta que $K_1 < K_2$.

La creación de un margen vertical permite eliminar totalmente el riesgo asociado a la evolución futura del precio del activo subyacente a cambio de limitar las ganancias, en el caso de que se espere una evolución favorable de las cotizaciones.

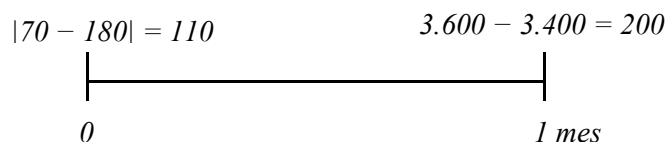
Ejemplo 127: Hace un mes, un inversor tomó la siguiente posición en el mercado de opciones sobre una acción que cotizaba a 3.500 u.m.

Posición	Precio de Ejercicio	Vencimiento	Prima
Compra de un Call	3.400	1 mes	180
Venta de un Call	3.650	1 mes	70

Con dicha posición el inversor creó un margen vertical positivo con opciones de compra, pues compra el activo subyacente por un precio menor al que lo vende.

Supóngase que hoy, fecha de vencimiento de las opciones, la acción cotiza en el mercado al contado a 3.600 u.m. y la tasa exenta de riesgo es del 3% anual. En este caso, se ejercerá el call comprado; ello significa que le entregarán una acción a cambio de pagar 3.400 u.m. No se ejercerá el call vendido, por lo que podrá venderse la acción en el mercado de acciones, cobrando 3.600 u.m.

El ingreso neto de dinero que tendrá en la fecha de ejercicio de las opciones será de 200 u.m. ($3.600 - 3.400 = 200$).



Como $110 \cdot (1 + 0,03)^{\frac{1}{12}} = 110,27 < 200$, el inversor habrá realizado una operación con rentabilidad superior a la tasa exenta de riesgo.

Margen horizontal.

Son carteras de opciones financieras sobre un mismo activo subyacente, con mismo precio de ejercicio pero fecha de ejercicio diferente.

Un margen horizontal será una operación financiera consistente en la venta de una opción de compra (venta) y compra de una opción de compra (venta) sobre un mismo activo subyacente, con mismo precio de ejercicio pero ésta última con fecha de ejercicio más lejana que la primera.

Margen horizontal con opciones de compra

Consistirá en la venta de una opción de compra con fecha de ejercicio t_1 y compra de una opción de compra con fecha de ejercicio t_2 y $t_1 < t_2$, siendo K el precio de ejercicio para ambas.

En 0 se realizará un desembolso neto de $C_1 - C_2$, siendo $C_1 < C_2$.

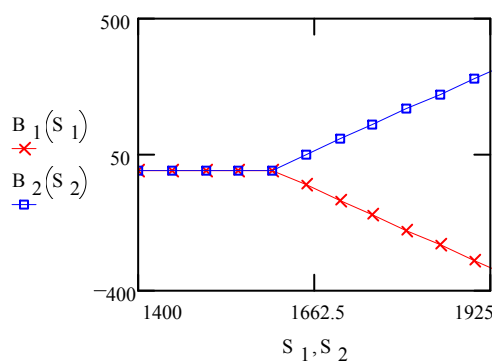
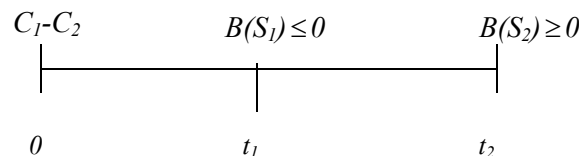
En t_1 , fecha de ejercicio de la opción de compra vendida, las posiciones posibles son:

$$\begin{cases} \text{Si } K < S_1 \rightarrow \text{Se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_1) = K - S_1 < 0 \\ \text{Si } K > S_1 \rightarrow \text{No se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_1) = 0. \end{cases}$$

En t_2 , fecha de ejercicio de la opción comprada, las posiciones posibles son:

$$\begin{cases} \text{Si } K < S_2 \rightarrow \text{Se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_2) = S_2 - K > 0 \\ \text{Si } K > S_2 \rightarrow \text{No se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_2) = 0. \end{cases}$$

Desde un enfoque estrictamente financiero el poseedor de un margen horizontal de opciones de compra puede representar su operación con el siguiente esquema:



Margen horizontal con opciones de venta.

Consistirá en la venta de una opción de venta con fecha de ejercicio t_1 y compra de una opción de venta con fecha de ejercicio t_2 y $t_1 < t_2$, siendo K el precio de ejercicio para ambas.

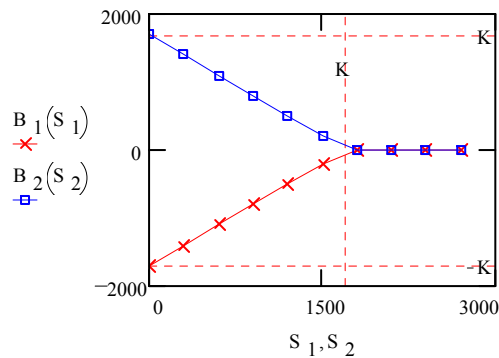
En 0 se realizará un ingreso neto de $P_1 - P_2$, siendo $P_1 > P_2$.

En t_1 , fecha de ejercicio de la opción de venta vendida, las posiciones posibles son:

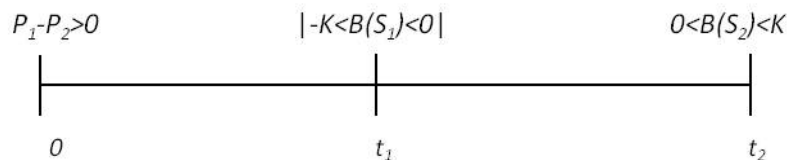
$$\begin{cases} \text{Si } K < S_1 \rightarrow \text{No se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_1) = 0 \\ \text{Si } K > S_1 \rightarrow \text{Se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_1) = S_1 - K < 0 \end{cases}$$

En t_2 , fecha de ejercicio de la opción comprada, las posiciones posibles son:

$$\begin{cases} \text{Si } K < S_2 \rightarrow \text{No se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_2) = 0 \\ \text{Si } K > S_2 \rightarrow \text{Se ejercerá la opción} \rightarrow B(S_2) = K - S_2 > 0. \end{cases}$$



El tenedor de un margen horizontal con opciones de venta puede plantear la operación con el siguiente esquema:



Ejemplo 128: Hace dos meses un inversor tomó las siguientes posiciones en el mercado de opciones sobre una acción:

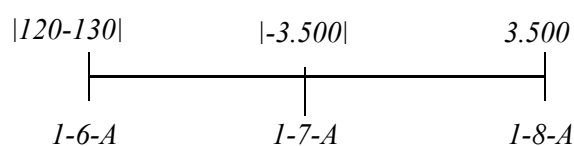
Posición	Fecha de entrada en el mercado	Vencimiento	Precio de ejercicio	Tipo	Prima
Venta	1-6-A	1-7-A	3.500	PUT	120
Compra	1-6-A	1-8-A	3.500	PUT	130

Dicho inversor creó un margen horizontal con opciones de venta. Con este margen se plantea la posibilidad de comprar la acción el día 1-7-A para venderla el día 1-8-A, con precios fijados el día 1-6-A.

El día 1-7-A la acción cotizó a 3.400, con lo que se ejerció el Put vendido; ello representó adquirir la acción por un precio mayor al del mercado, teniendo una pérdida de 100 ($3.400 - 3.500 = -100$).

El día 1-8-A la acción cotizó a 3.300, con lo que se ejerció el Put comprado; ello representó vender la acción a un precio mayor al del mercado, teniendo una ganancia de 200 u.m. ($3.500 - 3.300 = 200$).

El resultado financiero de dicho margen comparado, con la compraventa en el mercado al contado, se podrá representar en el siguiente esquema:

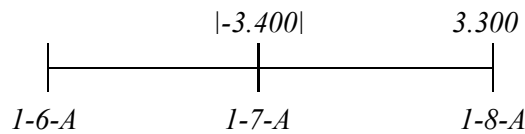


Si la tasa exenta de riesgos es del 8% anual, al ser

$$10 \cdot (1 + 0,08)^{\frac{2}{12}} + 3.500 - 3(1 + 0,08)^{\frac{1}{12}} = 3.532,64 > 3.500$$

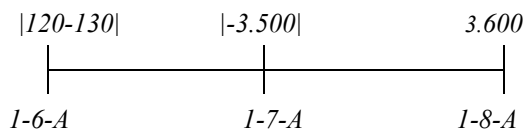
el inversor habrá perdido dinero.

Si se compara con la operación al contado del subyacente, que consiste en comprar en t_1 y vender en t_2



$\Delta C = -100$, lo que representa una pérdida de 100 (superior a la obtenida con el margen horizontal)

Supóngase que la cotización de la acción el día 1-8-A es de 3.600, en ese caso, no se ejercería la opción y se vendería la acción adquirida el día 1-7-A en el mercado al contado por 3.600. La operación se podría representar en el esquema siguiente:



En este caso si que habría obtenido una rentabilidad superior a la tasa exenta de riesgo.

Margen mariposa.

Consiste en combinar dos márgenes verticales, uno positivo y otro negativo, de forma que intervengan tres precios de ejercicio: los precios extremos corresponderán a los precios de ejercicio asociados a las compras de las opciones y el precio intermedio corresponderá a la venta de las opciones.

Margen mariposa con opciones de compra.

Se configurará con dos márgenes verticales pero con opciones de compra, uno positivo y otro negativo.

A indicará el primer margen vertical positivo, con K_1 precio de ejercicio del Call comprado y K_2 precio de ejercicio del Call vendido, y siendo $K_1 < K_2$.

B indicará el segundo margen vertical negativo, con K_3 precio de ejercicio del Call comprado y K_2 precio de ejercicio del Call vendido, y siendo $K_2 < K_3$.

Se deberá verificar, que:

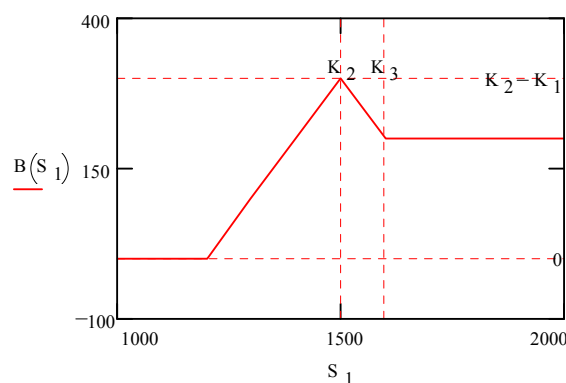
$$K_1 < K_2 < K_3 \quad \text{y} \quad C_1 > C_2 > C_3.$$

En la fecha de ejercicio el saldo de la operación estará determinado por los siguientes valores:

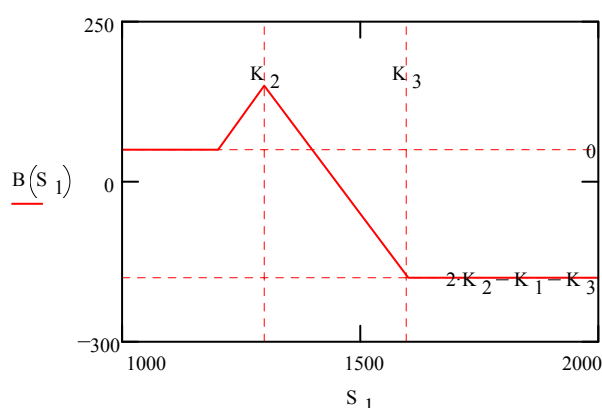
$$\left\{ \begin{array}{l} K_3 < S_1 \text{ se ejercen todas } \left\{ \begin{array}{l} K_2 - K_1 \\ K_2 - K_3 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_1) = 2K_2 - (K_1 + K_3) \\ K_2 \leq S_1 \leq K_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Se ejerce A} \\ \text{Se ejerce la venta de B} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} K_2 - K_1 \\ K_2 - S_1 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_1) = 2K_2 - K_1 - S_1 \\ K_1 < S_1 < K_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Se ejerce la compra de A} \\ \text{No se ejerce B} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} S_1 - K_1 \\ 0 \end{array} \right\} \rightarrow B(S_1) = S_1 - K_1 \\ S_1 = K_1 \text{ No se ejerce ninguna opción } \rightarrow B(S_1) = 0. \end{array} \right.$$

El perfil del margen mariposa será siempre positivo en función de que se verifique la siguiente relación:

- Si $K_2 > \frac{K_1 + K_3}{2}$, la operación nunca dará una pérdida siendo el perfil de su gráfica el siguiente:



- Si $K_2 < \frac{K_1 + K_3}{2}$, la operación generará una pérdida cuando S_1 sea mayor que $\frac{K_1 + K_3}{2}$; gráficamente, el perfil será:



Con los márgenes mariposa se elimina totalmente el riesgo asociado a la variación del precio del activo subyacente, y se sabe cual va a ser el saldo en la fecha de ejercicio, ya que el saldo final está acotado entre $(K_2 - K_1)$ y $2 \cdot K_2 - (K_1 + K_3)$.

◆ Margen mariposa con opciones de venta.

De la misma forma que se ha diseñado el margen mariposa con opciones de compra se puede realizar con opciones de venta. De hecho, consiste en combinar dos márgenes verticales con *put*, uno positivo y otro negativo. El resultado final del margen se analizará de forma idéntica.

Ejemplo 129: Hace un mes un inversor entró en el mercado de opciones en las siguientes posiciones:

Call	Precio de ejercicio	Vencimiento	Prima	Cantidad
Compra	$3.300 = K_1$	1 mes	70	1
Venta	$3.500 = K_2$	1 mes	65	2
Compra	$3.600 = K_3$	1 mes	62	1

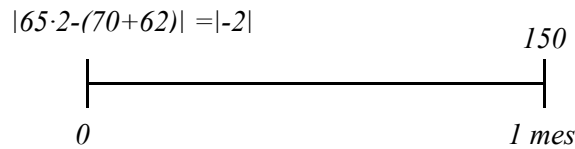
Realmente lo que hizo fue crear un margen mariposa, ya que tiene dos márgenes verticales, uno positivo y otro negativo (compra a 3.300-venta a 3.500) y (compra a 3.600-venta a 3.500)

Hoy, fecha de vencimiento de las opciones, el activo subyacente está cotizando en el mercado al contado a 3.550, y la tasa exenta de riesgo es del 8% anual.

El resultado dependerá del ejercicio de las opciones. Se ejercen todas las opciones menos las que tienen precio de ejercicio a 3.600, pues es más caro que el precio al contado.

Así, se tendrá que compramos un activo a 3.300, compramos el segundo activo al precio de mercado, 3.550, y se venden los dos activos a 3.500. El resultado será: $3.500 \cdot 2 - (3.300 + 3.550) = 150$.

El resultado financiero de la operación será:



Como $2 \cdot (1 + 0,08)^{\frac{1}{12}} < 150$, habrá obtenido una rentabilidad superior a la tasa exenta de riesgo.

Combinaciones.

Una combinación es una operación financiera consistente en la compra, o la venta, de dos opciones: una de compra y otra de venta, con el fin de cubrir el riesgo asociado al precio del activo subyacente cuando éste se encuentra en un entorno próximo al precio de ejercicio.

Straddle (Cono)

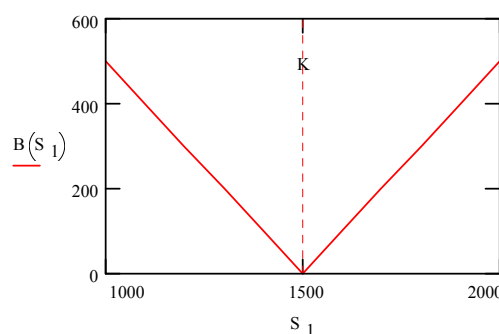
Si la volatilidad del precio del activo subyacente es fuerte, la combinación a realizar será la compra simultánea de una opción de compra y de una opción de venta (compra de un *Straddle*); por contra, si la volatilidad es pequeña, la estrategia consistirá en la venta de una opción de compra y de una opción de venta (venta de un *Straddle*).

En términos generales un *Straddle* consiste en la compra, o venta, de dos opciones: de compra y de venta, con mismo precio y fecha de ejercicio. Las opciones deben ser *at the money*.

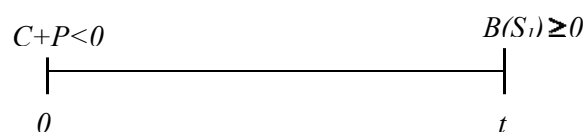
Compra de un Straddle.

En 0 se pagará $C+P$ por la compra de las dos opciones.

$$\text{En } t, \begin{cases} \text{Si } K < S_1 & \begin{cases} \text{se ejerce el call} \\ \text{se vende el activo} \end{cases} \rightarrow B(S_1) = S_1 - K > 0 \\ \text{Si } K > S_1 & \begin{cases} \text{no se ejerce el call} \\ \text{se ejerce el put} \end{cases} \leftarrow B(S_1) = K - S_1 > 0 \end{cases}$$



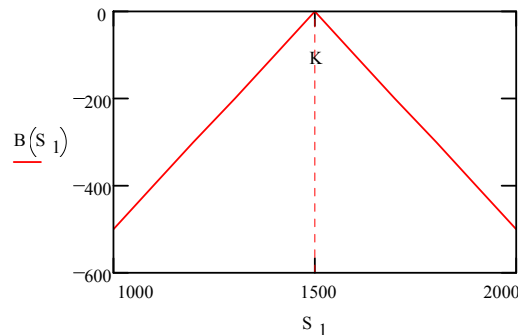
El comprador puede plantear su operación de la siguiente forma:



Venta de un Straddle.

En 0 se cobrará $C+P$ por la venta de las dos opciones.

$$\text{En } t, \begin{cases} \text{Si } K < S_1 \begin{cases} \text{se ejerce el call} \\ \text{se entrega el activo} \end{cases} \rightarrow B(S_1) = K - S_1 < 0 \\ \text{Si } K > S_1 \begin{cases} \text{no se ejerce el call} \\ \text{se ejerce el put} \end{cases} \leftarrow B(S_1) = S_1 - K \leq 0 \end{cases}$$



La operación se puede plantear de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} C+P > 0 \qquad \qquad \qquad B(S_1) \leq 0 \\ \hline 0 \qquad \qquad \qquad t \end{array}$$

El comprador del *Straddle* busca que el precio del activo subyacente se sitúe por encima del precio de ejercicio, pues en este caso no tiene cota el posible beneficio; sin embargo, intenta acotar las pérdidas cuando el precio del activo subyacente se sitúa por debajo del precio de ejercicio, aunque se limiten las ganancias.

El vendedor del *Straddle* busca que el precio del activo subyacente se sitúe por debajo del precio de ejercicio, pues limita las posibles pérdidas; sin embargo, no tiene ningún interés en que el precio del activo subyacente esté por encima del precio de ejercicio ya que las pérdidas no las tiene acotadas.

Ejemplo 130: Un inversor detecta una elevada volatilidad en una acción que cotiza en Bolsa a 20 u.m. En el mercado de opciones se negocian opciones americanas call y put sobre dicha acción con precio de ejercicio 20 u.m., siendo el precio respectivo de las primas 5 u.m. y 2 u.m. Intentando aprovechar esta situación del mercado compra 10 *Straddle* a esos precios.

Si las acciones sufren una caída del 40%, el valor de la acción será de $20 \cdot (1 - 0,4) = 12$ u.m. luego se ejercerá el put comprado, lo que representa una ganancia de 8 u.m. Si las acciones aumentan un 40% el precio de la acción será de $20 \cdot (1 + 0,4) = 28$ u.m. luego se ejercerá el call. Obteniendo una ganancia de 8 u.m.

Ante estos nuevos precios en Bolsa de la acción este inversor puede obtener un ingreso de 8 u.m. con un desembolso de 7 u.m. que es el precio de las dos primas, tanto si las acciones han subido o han bajado.

📌 *Strangle* (cuna).

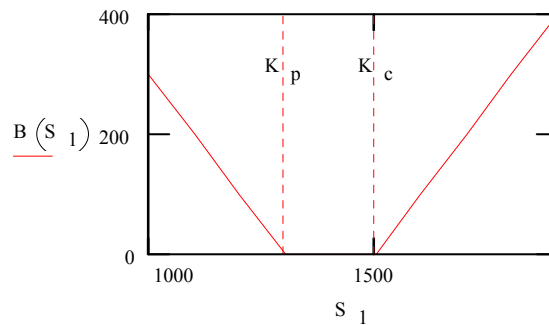
◆ Compra de un *Strangle*.

La operación consiste en la compra de una opción de compra y de una opción de venta pero el precio de ejercicio de la opción de venta es inferior al de la opción de compra, y ambos tienen la misma fecha de ejercicio.

Sea K_p el precio de ejercicio de la opción de venta y K_c el precio de ejercicio de la opción de compra, con $K_p < K_c$.

En 0 se paga $C+P$ por la compra de las dos opciones.

$$\text{En } t, \begin{cases} \text{si } S_1 \leq K_p < K_c \begin{cases} \text{se ejerce el put} \\ \text{se compra el activo} \rightarrow B(S_1) = K_p - S_1 \geq 0 \\ \text{no se ejerce el call} \end{cases} \\ \text{si } K_p < S_1 \leq K_c \begin{cases} \text{no se ejerce el put} \\ \text{no se ejerce el call} \end{cases} \rightarrow B(S_1) = 0 \\ \text{si } K_c < S_1 \begin{cases} \text{no se ejerce el put} \\ \text{se ejerce el call} \rightarrow B(S_1) = S_1 - K_c > 0 \\ \text{se vende el activo} \end{cases} \end{cases} .$$



La operación se puede plantear de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} C+P < 0 & & B(S_t) \geq 0 \\ | \text{-----} | \\ 0 & & t \end{array}$$

El inversor que desee realizar la compra-venta del activo subyacente mediante la combinación de estas dos opciones deberá ejercitarlas cuando el precio del activo subyacente esté fuera del intervalo $[K_p, K_c]$.

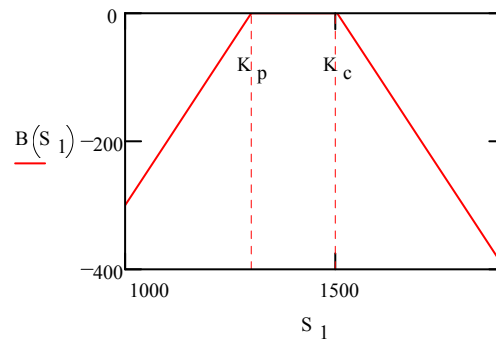
◆ Venta de un *Strangle*.

La operación consiste en la venta de una opción de compra y de una opción de venta pero el precio de ejercicio de la opción de venta es inferior al de la opción de compra, y ambos tienen la misma fecha de ejercicio.

Sea K_p el precio de ejercicio de la opción de venta y K_c el precio de ejercicio de la opción de compra, con $K_p < K_c$.

En 0 se cobra $C+P$ por la venta de las dos opciones.

$$\text{En } t, \begin{cases} \text{si } S_1 \leq K_p < K_c \begin{cases} \text{se ejerce el put} \\ \text{se vende el activo} \rightarrow B(S_1) = S_1 - K_p \leq 0 \\ \text{no se ejerce el call} \end{cases} \\ \text{si } K_p < S_1 \leq K_c \begin{cases} \text{no se ejerce el put} \\ \text{no se ejerce el call} \end{cases} \rightarrow B(S_1) = 0 \\ \text{si } K_c < S_1 \begin{cases} \text{no se ejerce el put} \\ \text{se ejerce el call} \rightarrow B(S_1) = K_c - S_1 < 0 \\ \text{se compra el activo} \end{cases} \end{cases} .$$



En este caso el desembolso mínimo se producirá cuando el precio del activo subyacente esté dentro del intervalo $[K_p, K_c]$.

La operación se puede plantear de la siguiente forma:

$$C+P>0 \quad B(S_1) \leq 0$$

$\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline t \\ \hline \end{array}$

Ejemplo 131: Se estima que la cotización de una acción oscilará entre 20 u.m. y 25 u.m.

En el mercado de opciones se negocian calls y puts americanas sobre dicha acción:

	Call	Put
Precio de ejercicio	25 u.m.	20 u.m.
Prima	5 u.m.	2 u.m.

Un inversor quiere aprovechar esta situación de los dos mercados y vende un Strangle con esos precios. Si la acción cotiza a 23 u.m. no se ejercerá ninguna de las opciones y dicho inversor no tendrá que realizar ningún desembolso de dinero, pero habrá cobrado las 7 u.m. de las primas de las opciones vendidas.

12.5 Operaciones que llevan incorporada una opción.

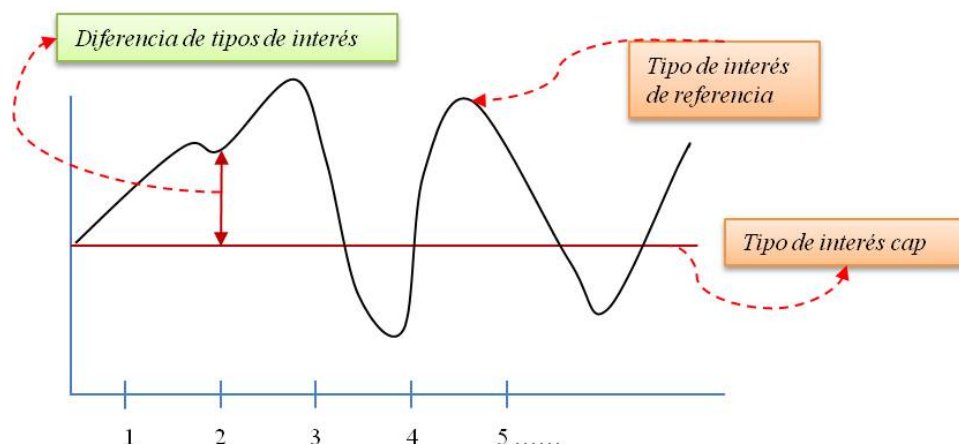
En el mercado de mutuo acuerdo (O.T.C.) se pueden contratar operaciones de cobertura de riesgos de tipos de interés cuya estructura fundamentalmente es una cartera de opciones *calls*, o/y *puts*, y cuyo activo subyacente es el tipo de interés. Básicamente, se describirán los siguientes: *Cap*, *Floor* y *Collar*.

12.5.1 Cap.

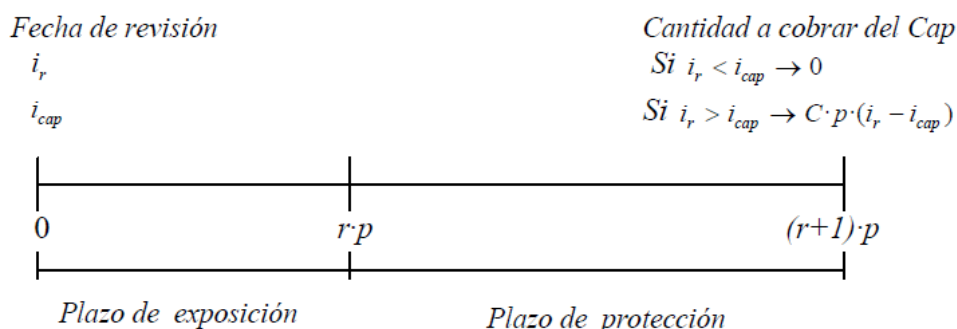
Un *Cap* es un contrato a través del cual el comprador pretende asegurar el tipo de interés máximo a pagar sobre una deuda futura. Contractualmente deberá especificarse:

- ◆ La duración de la protección, o duración del *Cap*.
- ◆ El tipo de interés de referencia del *Cap*, i_r , o tipo de interés variable futuro a pagar sobre una deuda.
- ◆ El tipo de interés a aplicar en el primer periodo. Normalmente, acostumbra a ser inferior al tipo de interés que garantiza el *Cap*.
- ◆ El tipo de interés que garantiza el *Cap*, i_{cap} .
- ◆ La fecha de la creación del contrato.
- ◆ La fecha efectiva a partir de la cual se devengan intereses.
- ◆ La periodicidad del pago de los intereses. Los intereses se pagarán al final de cada periodo.
- ◆ La fecha de fijación del tipo de interés, que normalmente coincide con el inicio de cada uno de los periodos.

El funcionamiento de la cláusula del *Cap* es muy simple: en cada fecha de revisión del tipo de interés, se compara el tipo de interés de referencia con el tipo de interés *Cap*, si el tipo de interés de referencia es superior al del *Cap*, el comprador del *Cap* recibirá al final del periodo la diferencia de intereses.



El esquema de la revisión del tipo de interés para un periodo concreto será:



Ejemplo 132: Hace dos años se compró un *Cap* sobre 100.000\$, al 5% de interés anual garantizado contra el Libor a 1 año para el \$ y con periodo de liquidación de intereses semestral. Hoy, fecha de fijación del tipo de interés, el Libor a 1 año es el 7,50%. Como el tipo de interés es superior al que garantiza el *Cap*, el comprador recibirá dentro de medio año la diferencia:

$$\text{Cantidad a cobrar} = 100.000 \cdot \frac{(0,075 - 0,05)}{2} = 1.250\$.$$

En este caso, se ha considerado que el semestre es la mitad exacta del año.

El precio a pagar por el *Cap* puede hacerse efectivo de dos formas: pagando una única cantidad a la firma del contrato o realizando pagos de igual importe, con la misma periodicidad que el *Cap* y durante el mismo tiempo.

Si se observa el gráfico anterior, se puede considerar que técnicamente, para cada uno de los periodos de pago de intereses, se tiene una opción call (que denominaremos *Caplet*) adquirida en el momento de la firma del *Cap*, 0, y con fecha de ejercicio $r \cdot p$.

Un *Cap* es una cartera de opciones *call*, cada una de ellas con un vencimiento, $r \cdot p$, y todas con el mismo precio de ejercicio. Si hay n periodos de pagos de intereses durante la vida del *Cap*, éste estará formado por $n-1$ opciones, ya que en el primer periodo la fecha de contratación coincide con la primera fecha de fijación y, por tanto, el plazo hasta el vencimiento de la primera opción sería cero, con lo cual la opción tendría valor nulo. El precio del *Cap* en 0 será la suma de las primas de las $n-1$ opciones *call*.

Para hallar la prima de cada una de las opciones mediante la fórmula de *Black-Scholes* es necesario realizar alguna adaptación del valor que toman las variables, al ser opciones sobre tipos de interés. Por tanto, se deberán definir, previamente, el precio actual del activo subyacente y el precio de ejercicio de la opción.

Consideremos la opción call número r , con $r = 1, 2, \dots, n-1$, el comprador del *Cap* tendrá que recibir la diferencia de intereses al final del periodo, es decir, en $(r+1) \cdot p$, siendo el importe de la diferencia:

$$Dif_r^{cap} = \max\{0, C \cdot p \cdot (i_r - i_{cap})\},$$

Donde, $C \cdot p \cdot i_{cap}$, es el precio de ejercicio de la opción, pero que se hace efectivo un periodo después del vencimiento de la opción. Su valor en $r \cdot p$, fecha de vencimiento de la opción, será:

$$K_r = C \cdot p \cdot i_{cap} (1 + {}_r f_1)$$

El precio en 0 del activo subyacente será el interés total que en el comprador del *Cap* deba pagar por su deuda en ese periodo, $C \cdot p \cdot {}_r f_1$, actualizado al momento presente, es decir,

$$S_o^r = \frac{C \cdot p \cdot {}_r f_1}{(1 + {}_r f_1)} \cdot [1 + I(r)]^{-r \cdot p},$$

con:

- ${}_r f_1$, el tipo de interés forward asociado hoy al periodo $[r \cdot p, (r+1) \cdot p]$.
- $I(r)$, el tipo de interés spot asociado al plazo, $r \cdot p$.

Si consideramos que $C=1$, la prima asociada a esta opción se podrá expresar en porcentaje sobre el capital nocional y será:

$$\text{Prima}(r)\% = \left(\frac{p \cdot [1 + I(r)]^{-r \cdot p}}{(1 + {}_r f_1)} \cdot ({}_r f_1 \cdot N(d_1) - i_{cap} \cdot N(d_2)) \right) \cdot 100,$$

con:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{{}_r f_1}{i_{cap}}\right) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot r \cdot p}{\sigma \sqrt{r \cdot p}} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot r \cdot p$$

El precio del *Cap* será: $\text{Precio Cap} = \sum_{r=1}^{n-1} \text{Prima}(r)\%.$

Ejemplo 133: Una empresa desea contratar con un Banco un *Cap* a 3 años y sobre un capital de 100.000\$ al 5% frente al Libor a 1 año para el \$. La liquidación de intereses se realizará anualmente y la base de cómputo del año es días naturales 360.

Hoy en Londres los tipos de interés para el \$ y para distintos vencimientos es el siguiente:

Vencimiento	Tipos de interés I(r) % para el \$
1 año	4,95
2 años	5
3 años	5,05

y tiene una volatilidad del tipo de interés es el 20%.

En este Cap tendremos que calcular dos primas de dos opciones Call, la que vence el año 1 y la que vence el año 2; para ello, será necesario calcular los tipos forward a un año hoy, el precio de ejercicio de las opciones y su precio al contado por dólar:

Vto. $r \cdot p$	Tipo forward a 1 f_1	Precio de ejercicio K_r	Precio contado S^e_0
0	4,95%		
1	5,050024%	0,0482574	0,0464414
2	5,150071%	0,0482115	0,0450418

Si se calcula la prima a través del modelo de Black-Scholes se obtendrán los siguientes valores:

r	d'_1	d'_2	$N(d'_1)$	$N(d'_2)$	Prima(r)%
0					
1	0,245867	-0,2013466	0,5971	0,4202	0,8408%
2	0,3629863	-0,2694692	0,6417	0,3937	1,1683%

El precio a pagar por el Cap será: Precio Cap = 0,8408% + 1,1683% = 2,0091%.

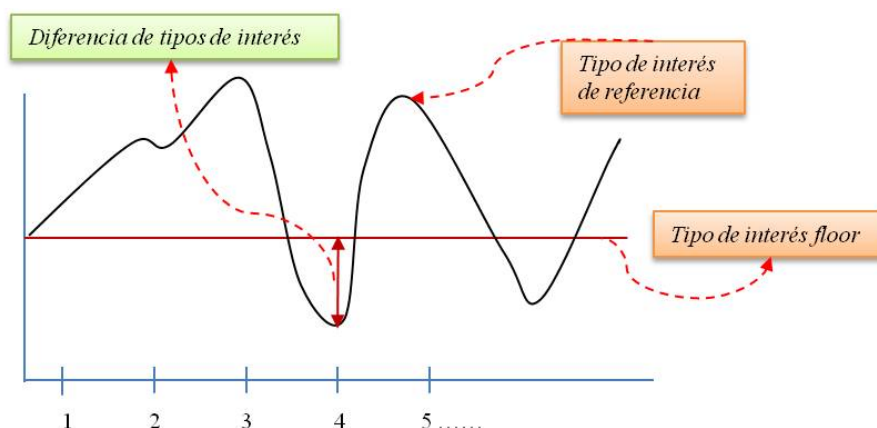
Ello quiere decir que, aplicando el 2,42995% sobre el capital nominal de 100.000\$, se deberán pagar 2.009,10\$.

12.5.2 Floor.

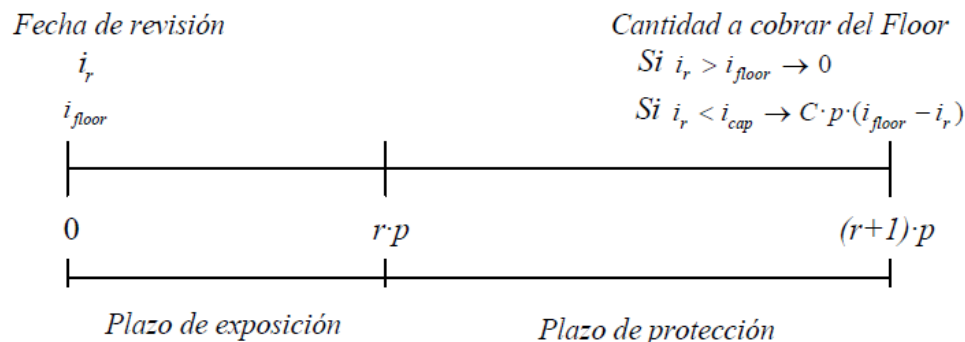
Un Floor es un contrato a través del cual el comprador pretende asegurar el tipo de interés mínimo a cobrar sobre un depósito futuro. Contractualmente deberá especificarse:

La duración de la protección, o duración del Floor.

- ◆ El tipo de interés de referencia del Floor, i_r , o tipo de interés variable futuro a cobrar sobre el depósito.
- ◆ El tipo de interés a aplicar en el primer periodo. Normalmente, acostumbra a ser superior al tipo de interés garantizado.
- ◆ El tipo de interés que garantiza el Floor, i_{floor} .
- ◆ La fecha de la creación del contrato.
- ◆ La fecha efectiva a partir de la cual se devengan intereses.
- ◆ La periodicidad del pago de los intereses. Los intereses se pagarán al final de cada periodo.
- ◆ La fecha de fijación del tipo de interés, que normalmente coincide con el inicio de cada uno de los periodos.



El funcionamiento de la cláusula del *Floor* es muy simple: en cada fecha de fijación del tipo de interés, se compara el tipo de interés de referencia con el tipo de interés *Floor*, si el tipo de interés de referencia es inferior al del *Floor*, el comprador del *Floor* recibirá al final del periodo la diferencia de intereses. El esquema de la revisión del tipo de interés para un periodo concreto será:



Ejemplo 134: Hace 3 años se contrató un *Floor* sobre 100.000\$, al 3% de interés anual garantizado contra el Libor a 1 año para el \$ y con periodo de liquidación de intereses anual, siendo la base de cómputo del tiempo días naturales 360. Hoy, fecha de fijación del tipo de interés, el Libor a 1 año es el 2,50%. Como el tipo de interés es inferior al que garantiza el *Floor*, el comprador recibirá dentro de un año la diferencia.

$$\text{Cantidad a cobrar} = 100.000 \cdot (0,03 - 0,025) \cdot \frac{365}{360} = 506,94\$.$$

El precio a pagar por el *Floor* puede hacerse efectivo de dos formas: pagando una única cantidad a la firma del contrato o realizando pagos de igual importe, con la misma periodicidad que el *Floor* y durante el mismo tiempo.

Si se observa el gráfico anterior, se puede considerar que, para cada uno de los periodos de pago de intereses, se tiene una opción *Put* (que denominaremos *Floorlet*) adquirida en el momento de la firma del *Floor*, 0, y con fecha de ejercicio $r \cdot p$.

Un *Floor* es una cartera de opciones put, cada una de ellas con un vencimiento, $r \cdot p$, y todas con el mismo precio de ejercicio. Si hay n periodos de pagos de intereses durante la vida del *Floor*, éste estará formado por $n-1$ opciones, ya que en el primer periodo la fecha de contratación coincide con la primera fecha de fijación y, por tanto, el plazo hasta el vencimiento de la primera opción sería cero, con lo cual la opción tendría valor nulo. El precio del *Floor* en 0 será la suma de las primas de las $n-1$ opciones *Put*, de la misma forma que en el *Cap*.

Consideremos la opción *Put* número r , con $r=1, 2, \dots, n-1$, el comprador del *Floor* tendrá que recibir la diferencia de intereses al final del periodo, es decir, en $(r+1) \cdot p$, siendo el importe de la diferencia:

$$\text{Dif}_{r, floor} = \max\{0, C \cdot p \cdot (i_{floor} - i_r)\},$$

Donde $C \cdot p$ es el precio de ejercicio de la opción, pero que se hace efectivo un periodo después del vencimiento de la opción. Su valor en la fecha de vencimiento de la opción será:

$$K_r = \frac{C \cdot p \cdot i_{floor}}{(1 + r \cdot f_1)}$$

El activo subyacente será el total de intereses que en el comprador del *Floor* deba cobrar por su inversión en ese periodo, $C \cdot p \cdot f_1$, actualizado al momento presente, es decir,

$$S_o^r = \frac{C \cdot p_r \cdot f_1}{(1 + f_1)^{r \cdot p}} \cdot [1 + I(r)]^{r \cdot p},$$

con:

- f_1 , el tipo de interés forward asociado hoy al periodo $[r \cdot p, (r+1) \cdot p]$.
- $I(r)$, el tipo de interés spot asociado al plazo $r \cdot p$.

Ejemplo 135: Un inversor contrata hoy un Floor a 3 años sobre 100.000\$ al 5% contra el Libor a 1 año para el \$. La liquidación del diferencial de intereses se realizará al final de cada año y la base de cómputo del plazo es días naturales 360. Hoy en Londres los tipos de interés para el \$ y para distintos vencimientos son:

Vencimiento	Tipos de interés $I(r)$ % para el \$
1 año	5,5
2 años	5,2
3 años	5,05

y tienen una volatilidad del 20%.

En este Floor tendremos que calcular dos primas de dos opciones Put, la que vence el año 1 y la que vence el año 2; para ello, será necesario calcular los tipos forward a un año hoy, el precio de ejercicio de las opciones y su precio al contado por dólar.

Vto. $r \cdot p$	Tipo forward a 1 f_1	Precio de ejercicio K_r	Precio contado S_o^r
0	5,5%		
1	4,90085%	0,0483261	0,0448984
2	4,75064%	0,0483954	0,0415484

Si se calcula la prima de cada uno de los dos Put a través del modelo de Black-Scholes se obtendrán los siguientes valores:

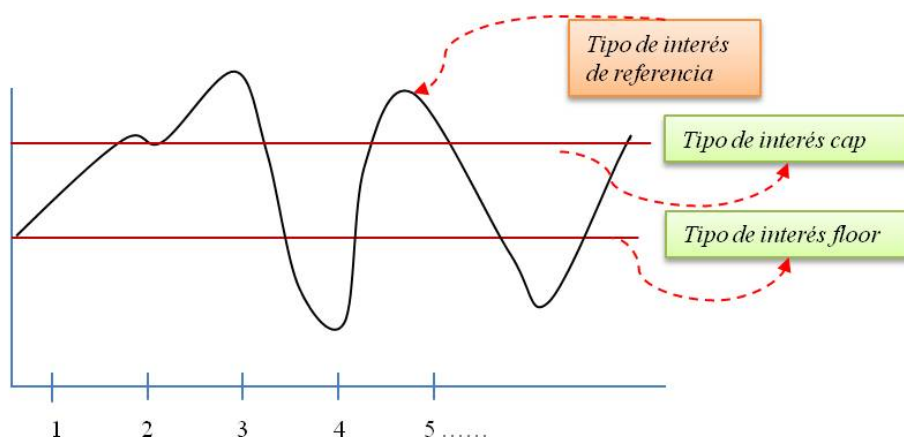
r	d_1^r	d_2^r	$N(d_1^r)$	$N(d_2^r)$	Prima(r)%
0					
1	0,1788214	-0,2683922	0,571	0,3942	0,8487%
2	0,2353394	-0,3971161	0,593	0,3456	1,1705%

El precio a pagar por el Floor será: $\text{Precio Floor} = 0,8487\% + 1,1705\% = 2,0192\%$.

Ello quiere decir que, aplicando el 2,4138% sobre el capital nocional de 100.000\$, se deberán pagar 2.019,20\$.

12.5.3 Collar.

Un Collar consiste en la compra de un Cap y la venta de un Floor, con el fin de asegurar que el tipo de interés se mantendrá dentro de una banda fija y, además, reducir el coste de la protección a través del cobro del precio del Floor. Los Collar son medios bastante efectivos para la protección de los riesgos de tipos de interés, porque proporcionan una protección ante el aumento y permite aprovechar hasta cierto punto las bajadas. Si el tipo Cap y el tipo Floor se eligen adecuadamente puede obtenerse un Collar de coste cero, ya que el importe pagado por el Cap queda compensado con el importe cobrado por el Floor.



Así, tendremos que el prestatario que está endeudado a tipo variable y no sabe cuál va a ser la evolución futura del tipo de interés de su deuda, puede contratar un *Cap*, el inversor que tiene un depósito a interés variable puede contratar un *Floor* y el prestatario que está endeudado pero quiere minimizar el coste de la protección del tipo de interés puede contratar un *Collar*.

13. Swaps.

13.1 Concepto y características.

Una operación *swap* (permuta financiera) es un contrato en el que dos sujetos acuerdan el intercambio del pago de los intereses futuros de una deuda y/o el intercambio del pago futuro de divisas, calculados sobre un capital y durante un plazo determinados previamente.

Para la creación de un *swap* es necesario que cada uno de los sujetos tenga contraída la obligación de realizar unos pagos futuros, ya sean intereses y/o divisas, con terceras personas.

En todo *swap* tendremos las siguientes características:

- ✱ *Rama del swap*: Será cada uno de los dos conjuntos de pagos futuros a realizar con el *swap*.
- ✱ *Nocional: Nominal*, o capital, sobre el que se van a calcular los pagos futuros a intercambiarse entre las dos partes.
- ✱ *Duración del swap*: Tiempo de vida del contrato de permuta financiera.

13.2 Tipos de swaps.

Podemos distinguir dos grupos de operaciones *swap*:

■ *Swap de tipos de interés.*

En este tipo, el intercambio de pagos futuros entre las dos partes del *swap* corresponde al pago de intereses sobre sendas deudas, expresadas en la misma moneda y sin que se realice el intercambio del Nocional.

Contractualmente, deberán acordarse los términos siguientes:

- La fecha del contrato o fecha de inicio del *swap*.
- El tipo de interés fijo, para la rama que pague interés a tipo fijo.
- La frecuencia de los pagos para cada una de las ramas.
- La base de cálculo del tipo de interés para la rama que paga interés variable.
- Las fechas de fijación del tipo de interés variable.
- Las fechas efectivas a partir de las cuales se empiezan a devengar periódicamente los intereses, tanto fijo como variable.
- Las fechas de pago de los respectivos intereses del *swap*.

Como las dos ramas deben pagar intereses sobre un mismo nocional, en la fecha de pago se determina que rama es deudora y cual es acreedora; es decir, que rama debe pagar más intereses respecto a la otra. De esta forma, la rama deudora (o con menor cuantía de intereses) entregará a la rama acreedora (o con mayor cuantía de intereses) la diferencia entre ambos importes, siendo normal que a lo largo de la vida del *swap* la situación deudor-acreedor se intercambie entre las dos ramas.

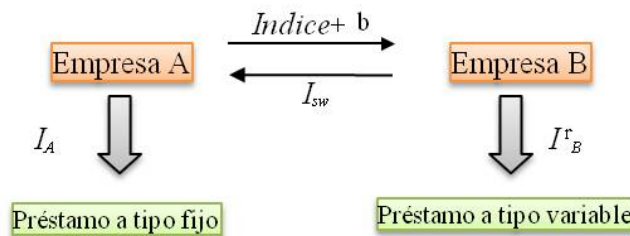
La base de cómputo del tiempo. En este punto se pueden utilizar distintos convenios:

<i>swap en £</i>	<i>swap en \$</i>	<i>Calendario comercial</i>	<i>Calendario natural</i>
<i>Días naturales</i> 365	<i>Días naturales</i> 360	<i>Días comerciales</i> 360	<i>Días naturales</i> <i>Año natural</i>

Dentro de este grupo distinguiremos los siguientes tipos:

■ *Swap genérico (Plain Vanilla o Coupon Swap).*

Una rama paga un interés fijo y la otra paga un interés variable, fijado al principio de periodo por adelantado y utilizando como referencia un tipo específico de interés del mercado; dichos intereses se pagan a final de cada periodo, ambas ramas pagan con la misma periodicidad, la duración acostumbra a ser entre 1 y 10 años, y el Nocional permanece constante durante toda la vigencia del contrato.



■ *Swap creciente, decreciente o alterno.*

En éstos el Nocional no permanece constante sino que puede crecer, decrecer o alternarse durante la vida del *swap*.

■ *Swap de bases.*

Es un *swap* en el que las dos ramas pagan interés variable pero cada una de ellas utiliza una base distinta para determinar el tipo de interés; por ejemplo, una rama puede utilizar el LIBOR a 3 meses y la otra el LIBOR a 6 meses.

■ *Swap de márgenes.*

En este caso, se añade un margen al tipo variable del *swap* genérico; por ejemplo, tipo fijo contra el $\text{LIBOR} + \text{margen}$. Como consecuencia, para determinar el tipo fijo también se deberá añadir el margen al tipo fijo del *swap* genérico.

■ *Swap de inicio aplazado.*

La fecha efectiva de devengo de intereses se retrasa semanas, meses o más tiempo, respecto a la fecha de inicio del *swap*. Existe una carencia hasta la fecha efectiva.

■ *Swap cupón cero.*

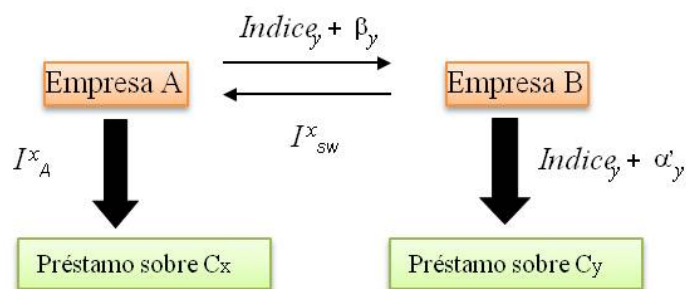
Se sustituye el pago periódico de la rama fija por un único pago, ya sea al principio o al final del *swap*.

■ *Swap de fijación retrasada.*

La fecha de fijación del tipo de interés variable se sitúa al final de cada periodo, pocos días antes de la fecha de pago.

■ *Swap de divisas.*

Es un *swap* de tipos de interés pero cada rama tiene el Nocional expresado en una divisa distinta. Se realiza el intercambio del Nocional al final del *swap* y puede haber un intercambio del mismo en la fecha efectiva, fijando el tipo de cambio para el Nocional en la fecha de contratación del *swap*. Ambas ramas pagan periódicamente los intereses (fijo contra variable) en sus respectivas divisas.



Dentro de este grupo podemos distinguir los siguientes tipos:

☀ *Swap fijo contra variable.*

Es el *swap* genérico de divisas; generalmente la rama variable paga el LIBOR a 6 meses para el \$.

☀ *Swap fijo contra fijo.*

Ambas ramas pagan un interés fijo en cada una de sus divisas.

Para realizar un *swap* de este tipo entre cualquier divisa y el dólar es necesario diseñar dos *swaps*: Un *swap* de divisas fijo contra el \$Libor a 6 meses y un *swap* genérico de tipos de interés en \$.

☀ *Swap variable contra variable.*

Ambas ramas pagan un interés variable pero en sus respectivas divisas; por ejemplo el \$Libor 6 meses contra el EURIBOR 6 meses en euros.

13.3 Cotización.

Aunque las operaciones *swap* no tienen un mercado similar a los futuros y opciones financieras, existe un mercado mundial de *swaps* que funciona mediante "Dealers" y que ha dotado a este tipo de operaciones de una cierta estandarización. La *International Swap Dealers Association* (ISDA), creada en 1.985, ha sido en parte responsable de dicha estandarización, ya que dentro de sus funciones está el velar por un funcionamiento armonioso del mercado y garantizar unos principios éticos en las relaciones entre los intermediarios y clientes de este mercado.

Las tareas abordadas por este organismo, entre otras, han sido el estudio de los problemas del riesgo de crédito, los problemas jurídico-contractuales y los problemas contables.

La estandarización de los contratos ha permitido crear un sistema de precios diarios de mercado, o cotizaciones, sin eliminar la posibilidad de crear un *swap* al margen de la dinámica de ese mercado.

Como el *swap* está configurado con dos ramas, se debe establecer una forma clara y rápida de cotización sin necesidad de tener que estar especificando a que rama se refiere.

Las principales formas de dar la cotización según el tipo de *swap* son:

☀ *Swap de tipos de interés fijo contra variable.*

La cotización se efectúa siempre indicando el tipo de interés de la rama a tipo fijo ya que se supone que la rama a tipo variable será el LIBOR a 6 meses.

Ejemplo 136: Un *swap* a 5 años cotiza al 7%, ello indica que hoy se negocian *swap* a 5 años con la rama a tipo fijo al 7%, siendo la rama a tipo variable el LIBOR a 6 meses.

Si el *swap* se realiza en U.S.A., la cotización es el tipo fijo pero expresado como un margen respecto al rendimiento de los Treasury Bonds que tienen el mismo vencimiento que el *swap*.

Ejemplo 137: *Un swap en \$ a 3 años cotiza a 75 puntos básicos sobre los Treasury Bonds, ello indica que hoy se cierran swap a 3 años en \$ con la rama fija a la tasa de rendimiento hoy de los T.Bonds + 75 p.b. contra el LIBOR a 6 meses.*

☼ *Swap de tipos de interés variable contra variable.*

En esta clase de swaps no existe una forma estándar de cotización. Se acostumbra a indicar las dos bases más un margen sobre una de las ramas.

Ejemplo 138: *LIBOR a 6 meses contra el PIBOR a 6 meses + 80 p.b.*

☼ *Swap de divisas fijo contra variable.*

Cotiza dando el tipo fijo contra el LIBOR a 6 meses para el \$, que es la referencia universal de los swaps de divisas.

Ejemplo 139: *Swap de divisas a 3 años al 6% para £, ello indica que la rama a tipo fijo, endeudada en £, pagará el 6% contra el LIBOR a 6 meses para el \$, de la rama a tipo variable.*

☼ *Swap de divisas variable contra variable.*

Se deberá indicar las bases de los dos tipos variables para cada una de las divisas y un margen de una sobre la otra. La forma de cotización es idéntica a la de los swap de interés variable contra variable.

☼ *Swap de divisas fijo contra fijo.*

En este caso el swap se descompone en dos swaps de divisas básicos, apareciendo dos ramas a tipo fijo contra una misma rama a tipo variable. La cotización se realiza dando los tipos fijos de los dos swaps básicos.

Ejemplo 140: *Swap de divisas Euro contra \$ a 3 años al 6% contra el 7%. El 6% indica el tipo fijo sobre el Euro contra el LIBOR a 6 meses para el \$, y el 7% indica el tipo fijo sobre el \$ contra el \$LIBOR a 6 meses.*

13.4 Ventajas comparativas del mercado (swap sin intermediario).

La liberalización de los mercados (y en concreto del mercado financiero) como consecuencia de los avances tecnológicos y de la eliminación de las barreras legales a la movilidad de bienes, mano de obra y capitales ha dado paso a un mercado globalizado con negociación continua (mercado de 24 horas). Esta globalización ha generado una segmentación del mismo en "nichos" y los usuarios tenderán a ubicarse en aquel "nicho" en que tengan ventaja comparativa relativa frente a otros usuarios.

En biología se entiende por ventaja comparativa "la explicación de por qué las especies biológicas que compiten por un nicho son superadas por las comparativamente más eficientes en ese nicho". La aplicación a la economía de las ventajas comparativas la formuló David Ricardo afirmando que "en un sistema de comercio absolutamente libre, cada país invertirá naturalmente su capital y su trabajo en empleos tales que sean lo más beneficiosos para ambos".⁷⁶

Dicha teoría la materializa en la conveniencia de la especialización de forma que "el país que tiene una ventaja comparativa relativa a otro en una producción deberá especializarse en la misma" y "el valor de los dos productos a comercializar entre de dos países será diferente del valor interno de dichos productos dentro de cada país, pero con una limitación: la relación interna entre los precios de los dos productos en cada uno de los dos países". En concreto, el éxito de la teoría de las ventajas comparativas del mercado reside en identificar

⁷⁶ Ricardo, David. "Principios de Economía Política y Tributación". ED. Fondo de Cultura Económica, México, 1973.

los "nichos", o segmentos del mercado, en que los que se puede ser fuerte y retirarse de aquellos en los que, comparativamente, se es débil.

Una de las preguntas que se podría formular es ¿Qué persiguen los dos sujetos con dicha operación financiera?. Si se acepta que el mercado de préstamos es una parte especializada del mercado financiero global, la operación swap será una operación favorable a ambos si cada uno de ellos se ha situado, dentro del mercado de préstamos, en el "nicho" en que es más fuerte, es decir, si cada uno de los dos sujetos se ha colocado en el lugar en que tiene ventaja comparativa relativa al otro.

Supóngase la siguiente situación: Dos sujetos, cada uno de un país, necesitan financiación en una divisa distinta de la habitual; el mercado de préstamos ofrece a cada uno de ellos préstamos a tipos de interés fijo y a tipos de interés variable en cada una de las dos divisas. Si los dos sujetos realizan un análisis de las ventajas comparativas relativas entre los dos, comparando que tipos de interés es el más favorable y cada uno se endeuda al tipo de interés más favorable relativamente al otro, mediante el swap, podrán conseguir la financiación más barata que la que les ofrece el mercado y reducir riesgos financieros.

El objetivo es determinar las condiciones necesarias y suficientes que deben darse en las ventajas comparativas relativas entre las dos ramas de un swap para que éste beneficie a ambas; así como, cuantificar el ahorro total de intereses y el reparto del mismo entre las dos ramas.

¿Bajo qué condiciones de mercado puede ser interesante realizar un swap? Para responder a dicha pregunta es necesario analizar la posición que ocupan las dos ramas del swap en el mercado. Consideraremos que hay ventaja comparativa del mercado, en este caso de préstamos, cuando una rama del swap está en mejor posición que la otra para acceder a préstamos con intereses más bajos.

Se supondrá que el mercado de préstamos ofrece préstamos a ambas ramas con tipos de interés distintos, tanto en el segmento a tanto de interés fijo como en el de interés variables.

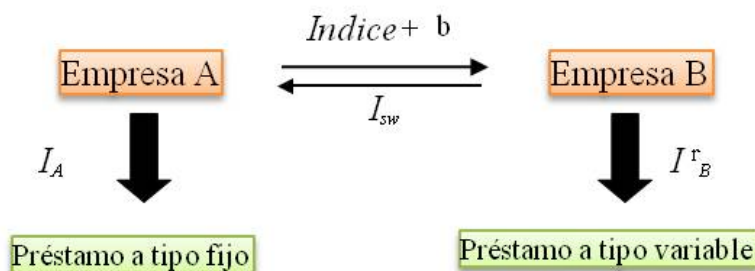
Antes de pactar un swap cada una de las ramas deberá responder a dos preguntas básicas: según la situación que tiene en el mercado de préstamos ¿Es más ventajoso endeudarse simplemente en la posición deseada al tipo de interés de mercado?; en caso de tener una respuesta negativa deberá responder a la siguiente pregunta ¿Es más ventajoso endeudarse en la posición contraria a la deseada y realizar un swap?.

El estudio de las ventajas comparativas del mercado determinará el "nicho" o segmento de mercado de préstamos en que deberá endeudarse cada rama del swap.

Swap de tipos de interés.

Swap fijo contra variable.

Consideremos la siguiente situación: una empresa A desea tener su deuda a tipo variable; otra empresa B desea tener la deuda a tipo fijo, el mercado les ofrece a ambas préstamos a interés fijo y variable.



Las dos empresas pueden acceder al mercado de préstamos a tipo fijo y a tipo variable, siendo los tipos de interés los siguientes:

	Empresa A	Empresa B	Swap
Tipo fijo	I_A	$I_B = I_A + \Delta I$	I_{SW}
Tipo variable	$I_A^r = \text{Indice} + \alpha$	$I_B^r = I_A^r + \Delta I^r = \text{Indice} + \alpha'$	$I_{SW}^r = \text{Indice} + \beta$

Se definirán:

$\Delta I = I_A - I_B$, diferencia entre los tipos fijos que el mercado ofrece a las dos empresas.

$\Delta I^r = I_A^r - I_B^r = \alpha - \alpha'$, diferencia entre los tipos variables que el mercado les ofrece.

Las posiciones que se pueden dar son:

● $\Delta I > 0$ y $\Delta I^r > 0$, la empresa B es la que está mejor situada globalmente que la empresa A.

Puede suceder:

- $\Delta I > \Delta I^r$, en este caso la empresa B tiene mejor posición comparativa en el segmento de préstamos a interés fijo que la empresa A, luego A debería endeudarse a tipo variable y B a tipo fijo.
- $\Delta I < \Delta I^r$, en este caso la empresa B donde mejor trato recibe, comparativamente con la empresa A, es el segmento de préstamos a interés variable. Luego A se debería endeudar a fijo y B a variable.
- $\Delta I < 0$ y $\Delta I^r < 0$, entonces la empresa A globalmente está mejor situada en el mercado que la empresa B.

Puede suceder que:

- $\Delta I > \Delta I^r$, en este caso la empresa A tiene mejor posición comparativa en el segmento de préstamos a interés variable que la empresa B, luego A debería endeudarse a tipo variable y B a tipo fijo.
- $\Delta I < \Delta I^r$, en este caso la empresa A donde mejor trato recibe, comparativamente con la empresa B, es el segmento de préstamos a interés fijo. Luego A se debería endeudar a fijo y B a variable para que al realizar el swap hubiese posibilidades de reducir los intereses de las respectivas deudas..
- $\Delta I < 0$ y $\Delta I^r > 0$, en este caso la empresa A está mejor comparativamente en el segmento a interés fijo y la empresa B en el segmento a interés variable, luego A se debería endeudar a fijo y B a variable.
- $\Delta I > 0$ y $\Delta I^r < 0$, en este caso la empresa B está mejor comparativamente en el segmento a interés fijo y la empresa A en el segmento a interés variable, luego B se debería endeudar a fijo y A a variable.

Ejemplo 141: La empresa A puede acceder al mercado de préstamos al 9% fijo y al LIBOR+50p.b. variable. La empresa B puede acceder al mercado de préstamos al 8% fijo y al LIBOR+100p.b. variable.

$\Delta I = 8\% - 9\% = -1\% < 0$, la empresa A está peor situada a tipo fijo que la empresa B; la empresa B está peor situada que la empresa A en el mercado de préstamos a tipo variable.

Ejemplo 142: La empresa A puede acceder al mercado de préstamos al 9% y al LIBOR+50p.b. y desea endeudarse a tipo variable. La empresa B puede obtener del mercado el 10% y el LIBOR+100p.b. y desea endeudarse a tipo fijo. El estudio de las ventajas comparativas determina:

$$\Delta I = 10\% - 9\% = 1\% > 0$$

$$\Delta I^r = \text{libor} + 100\text{p.b.} - (\text{libor} + 50\text{p.b.}) = 50\text{p.b.} > 0,$$

luego, globalmente, la empresa A está mejor situada en el mercado que la empresa B.

En el supuesto de que se quiera realizar un swap entre ambas empresas, como:

$$\Delta I - \Delta I^r = 1\% - 50p.b. = 50p.b. > 0,$$

La empresa A deberá endeudarse a tipo fijo, la empresa B a tipo variable.

Ejemplo 143: La empresa A puede acceder al mercado de préstamos al 9% fijo y al LIBOR+50p.b. y desea endeudarse a tipo variable. La empresa B puede obtener del mercado el 10% fijo y el LIBOR+90p.b. y desea endeudarse a tipo fijo. Ambas desean realizar un swap si con él pueden tener la estructura de deuda deseada y reducir el tipo de interés. Para ello, el diferencial de intereses del swap, I_{sw}^r , deberá estar comprendido entre los siguientes valores:

$$I_A^r - I_A = \text{libor} + 50p.b. - 9\% = \text{libor} - 8,5\%$$

$$I_B^r - I_B = \text{libor} + 90p.b. - 10\% = \text{libor} - (9\% + 10p.b.).$$

Supongamos que el swap se cierra al 8,7% cuando el LIBOR a 6 meses está al 7%, entonces:

$$I_A^r - I_A = \text{libor} + 50p.b. - 9\% = 7\% - 8,5\% = -1,5\%$$

$$I_B^r - I_B = \text{libor} + 90p.b. - 10\% = 7\% - (9\% + 10p.b.) = -(2\% + 10p.b.)$$

$$I_{sw}^r = I_{AB}^r - I_{BA} = \text{libor} - 8,7\% = 7\% - 8,7\% = -1,7\%.$$

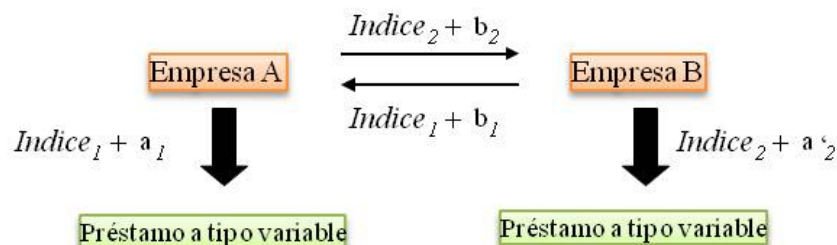
Como $I_A^r - I_A = -1,5\% > I_{sw}^r = -1,7\% > I_B^r - I_B = -(2\% + 10p.b.)$ el swap les permitirá obtener una rebaja del tipo de interés a ambas partes.

	Empresa A	Empresa B
Interés del préstamo	$I_A = 9\%$	$I_B^r = \text{libor} + 90p.b.$
Interés a pagar por el swap	$I_{AB}^r = \text{libor}$	$I_{BA} = 8,7\%$
Interés a cobrar por el swap	$I_{BA} = 8,7\%$	$I_{AB}^r = \text{libor}$
Pagos netos	$\text{libor} + 30p.b.$	9,6%

La empresa A obtiene la deuda a tipo variable y con una rebaja de 20p.b.; la empresa B consigue su deuda a interés fijo y con una rebaja de 40 p.b. en el tipo de interés.

■ Swap variable contra variable (swap de bases).

El swap de bases es un swap de tipos de interés en el que las dos ramas pagan intereses variables pero cada una de ellos referenciado a un índice (base) distinto.



Se debe tener en cuenta el tipo de cambio que en el momento de cerrar el acuerdo se aplicará para el intercambio de los Nacionales,

El mercado ofrece a cada empresa tipos de interés referenciados a cada índice:

Índice	Empresa A	Empresa B	Swap
$Indice_1$	$Indice_1 + \alpha_1$	$Indice_1 + \alpha'_1$	$Indice_1 + \beta_1$
$Indice_2$	$Indice_2 + \alpha_2$	$Indice_2 + \alpha'_2$	$Indice_2 + \beta_2$

Se definirá como:

$$\Delta Indice_1 = (Indice_1 + \alpha_1) - (Indice_1 + \alpha'_1) = \alpha_1 - \alpha'_1$$

$$\Delta Indice_2 = (Indice_2 + \alpha_2) - (Indice_2 + \alpha'_2) = \alpha_2 - \alpha'_2$$

a las diferencias de tipos de interés para cada catálogo.

Las posiciones que se pueden dar al comparar los tipos de interés que el mercado ofrece a cada rama son:

➤ $\Delta Indice_1 > 0$ y $\Delta Indice_2 > 0$, la Empresa B está en mejor posición que la Empresa A en el mercado. Puede suceder:

✱ $\Delta Indice_1 > \Delta Indice_2$, entonces B está mejor situada en el $Indice_1$ y deberá endeudarse al $Indice_1 + \alpha'_1$.

✱ $\Delta Indice_1 < \Delta Indice_2$, entonces B está mejor considerada que A en el $Indice_2$ y deberá endeudarse al $Indice_2 + \alpha'_2$.

➤ $\Delta Indice_1 < 0$ y $\Delta Indice_2 < 0$, entonces A está mejor situada que B en el mercado. Puede suceder que:

✱ $\Delta Indice_1 > \Delta Indice_2$, la Empresa A está mejor que la Empresa B en el $Indice_2$, luego deberá endeudarse al $Indice_2 + \alpha_2$.

✱ $\Delta Indice_1 < \Delta Indice_2$, la empresa A está mejor que la Empresa B en el $Indice_1$, luego deberá endeudarse al $Indice_1 + \alpha_1$.

➤ $\Delta Indice_1 > 0$ y $\Delta Indice_2 < 0$, en este caso B está mejor en el $Indice_1$ y A está mejor en el $Indice_2$, luego cada una se endeudará en el segmento que le es más favorable, la empresa B al $Indice_1 + \alpha'_1$ y la empresa A al $Indice_2 + \alpha_2$.

➤ $\Delta Indice_1 < 0$ y $\Delta Indice_2 > 0$, la situación es la contraria del caso anterior, A está mejor considerada que B en el mercado en el $Indice_1$ y B está mejor en el $Indice_2$, luego A se endeudará al $Indice_1 + \alpha_1$ y B al $Indice_2 + \alpha'_2$.

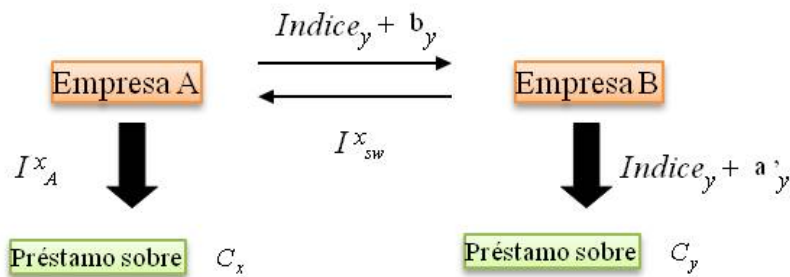
✚ Swap de divisas.

Para realizar el análisis de las ventajas comparativas del mercado en el swap de divisas se deberá aceptar como hipótesis que cada rama del swap tiene acceso a la divisa en la que desea finalmente pagar su deuda sin tener que recurrir al mercado de cambios. Por ello, si una rama del swap desea acabar pagando su deuda en la divisa y deberá endeudarse el mercado en la divisa x y después realizar el swap. Como en el swap de divisa se realiza el intercambio de Nacionales al final del mismo y se pacta en el origen un tipo de cambio, se dará la

relación $d_{x/y} = \frac{C_x}{C_y}$, siendo, C_x y C_y los respectivos Nacionales.

■ Swap fijo contra variable.

En esta operación financiera una rama del swap pagará un interés fijo en una divisa y la otra pagará un interés variable en otra divisa, con el swap se cambiarán el tipo de interés y la divisa.



El mercado ofrece a cada rama los siguientes tipos de interés en cada divisa:

	Empresa A		Empresa B	
Divisa x	I_A^x	$\text{Indice}_x + \alpha_x$	I_B^x	$\text{Indice}_x + \alpha'_x$
Divisa y	I_A^y	$\text{Indice}_y + \alpha_y$	I_B^y	$\text{Indice}_y + \alpha'_y$

Supóngase que A tiene acceso a la divisa y y que B tiene acceso a la divisa x sin tener que acceder al mercado de divisas. Por otro lado, A tiene la deuda en la divisa x y desea reflejar sus deudas respecto a la divisa y ; B tiene la deuda en la divisa y pero desea tener reflejada la deuda en la divisa x .

La empresa A se endeudará en la divisa x y B en la divisa y , las ventajas comparativas del mercado se realizarán comparando:

Empresa A	Empresa B
I_A^x	I_B^y
$\text{Indice}_x + \alpha_x$	$\text{Indice}_y + \alpha'_y$

$\Delta I = I_A^x \cdot d_{x/y} - I_B^y$ será la diferencia entre el interés fijo que el mercado ofrece a A y el interés fijo que el mercado ofrece a B, expresado en la divisa y .

$\Delta I' = (\text{Indice}_x + \alpha_x) \cdot d_{x/y} - (\text{Indice}_y + \alpha'_y) = (\text{Indice}_x \cdot d_{x/y} - \text{Indice}_y) + (\alpha_x \cdot d_{x/y} - \alpha'_y)$, la diferencia entre los intereses variables que el mercado ofrece a cada una de las ramas, expresado en la divisa y .

El estudio de las ventajas comparativas del mercado es idéntico que en el caso del swap de tipos de interés fijo contra variable.

Las situaciones que pueden darse son:

➤ $\Delta I > 0$ y $\Delta I' > 0$, la empresa B está mejor globalmente que la empresa A.

✱ $\Delta I > \Delta I'$, B está mejor tratada que A en el interés fijo, luego B se endeudará a fijo y A variable.

✱ $\Delta I < \Delta I'$, B está mejor tratada que A en el interés variable, luego B se endeudará a interés variable y A a interés fijo.

➤ $\Delta I < 0$ y $\Delta I' < 0$, la empresa A está mejor globalmente que la empresa B

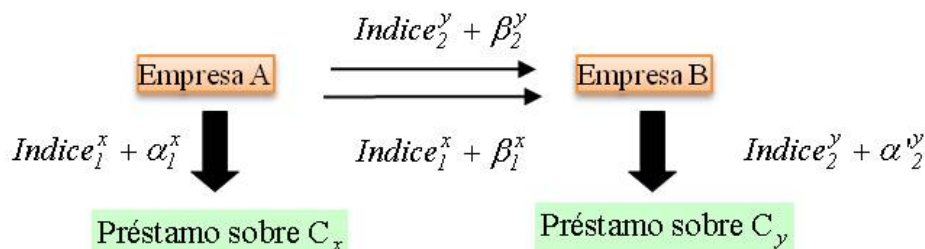
✱ $\Delta I > \Delta I'$, A está mejor tratada que B en el interés variable, luego B se endeudará a fijo y A variable.

✱ $\Delta I < \Delta I'$, A está mejor tratada que B en el interés fijo, luego B se endeudará a interés variable y A a interés fijo.

- $\Delta I > 0$ y $\Delta I' < 0$, B está mejor tratada que A en el interés fijo y A mejor que B a interés variable.
- $\Delta I < 0$ y $\Delta I' > 0$, B está mejor tratada que A en el interés variable y A mejor que B a interés fijo.

■ Swap variable contra variable.

En este swap ambas empresas desean tener el tipo de interés de su deuda a interés variable, pero desean cambiar de índice y de divisa.



El mercado ofrece a ambas los siguientes tipos de interés para cada divisa:

	Empresa A		Empresa B	
Divisa x	$Indice_1^x + \alpha_1^x$	$Indice_2^x + \alpha_2^x$	$Indice_1^x + \alpha_1^{yx}$	$Indice_2^x + \alpha_2^{yx}$
Divisa y	$Indice_1^y + \alpha_1^y$	$Indice_2^y + \alpha_2^y$	$Indice_1^y + \alpha_1^{yx}$	$Indice_2^y + \alpha_2^{yx}$

y el tipo de cambio será $d_{x/y}$.

Para el análisis de las ventajas comparativas del mercado se deberá tener presente los siguientes tipos de interés:

Indice	Empresa A	Empresa B
$Indice_1$	$Indice_1^x + \alpha_1^x$	$Indice_1^y + \alpha_1^{yx}$
$Indice_2$	$Indice_2^x + \alpha_2^x$	$Indice_2^y + \alpha_2^{yx}$

Sean:

$$\Delta Indice_1 = (Indice_1^x + \alpha_1^x) \cdot d_{x/y} - (Indice_1^y + \alpha_1^{yx}) = (Indice_1^x \cdot d_{x/y} - Indice_1^y) + (\alpha_1^x \cdot d_{x/y} - \alpha_1^{yx}),$$

la diferencia de tipos de interés referenciados al $Indice_1$, expresado en la divisa y.

$$\Delta Indice_2 = (Indice_2^x + \alpha_2^x) \cdot d_{x/y} - (Indice_2^y + \alpha_2^{yx}) = (Indice_2^x \cdot d_{x/y} - Indice_2^y) + (\alpha_2^x \cdot d_{x/y} - \alpha_2^{yx}),$$

la diferencia de tipos de interés referenciados al $Indice_2$, expresado en la divisa y.

Las situaciones que pueden darse son idénticas al swap de bases de tipos de interés:

- $\Delta Indice_1 > 0$ y $\Delta Indice_2 > 0$, la empresa B está mejor globalmente que la empresa A.
- ✳ $\Delta Indice_1 > \Delta Indice_2$. La Empresa B deberá endeudarse al $Indice_1^y + \alpha_1^{yx}$.
- ✳ $\Delta Indice_1 < \Delta Indice_2$. La Empresa B deberá endeudarse al.
- $\Delta Indice_1 < 0$ y $\Delta Indice_2 < 0$, la empresa A está mejor globalmente que la empresa B :
- ✳ $\Delta Indice_1 > \Delta Indice_2$. La Empresa A deberá endeudarse al $Indice_2^x + \alpha_2^x$.
- ✳ $\Delta Indice_1 < \Delta Indice_2$. La Empresa A deberá endeudarse al $Indice_1^x + \alpha_1^x$.

- $\Delta Indice_1 < 0$ y $\Delta Indice_2 > 0$, la Empresa A se endeudará al $Indice_1^x + \alpha_1^x$ y la empresa B al $Indice_2^y + \alpha_2^y$.
- $\Delta Indice_1 > 0$ y $\Delta Indice_2 < 0$, la Empresa A se endeudará al $Indice_2^x + \alpha_2^x$ y la Empresa B al $Indice_1^y + \alpha_1^y$.

El siguiente cuadro recoge las posiciones en el mercado de las dos ramas del swap:

	swap de interés
fijo contra variable	$\Delta I < \Delta I^r \Rightarrow A \text{ al } I_A \text{ y B al } Indice + \alpha'$ $\Delta I > \Delta I^r \Rightarrow A \text{ al } Indice + \alpha \text{ y B al } I_B$
variable contra variable	$\Delta Indice_1 < \Delta Indice_2 \Rightarrow A \text{ al } Indice_1 + \alpha_1 \text{ y B al } Indice_2 + \alpha'_2$ $\Delta Indice_1 > \Delta Indice_2 \Rightarrow A \text{ al } Indice_2 + \alpha_2 \text{ y B al } Indice_1 + \alpha'_1$
	swap de divisas
fijo contra variable	$\Delta I < \Delta I^r \Rightarrow A \text{ al } I_A^x \text{ y B al } Indice_y + \alpha'_y$ $\Delta I > \Delta I^r \Rightarrow A \text{ al } Indice_x + \alpha_x \text{ y B al } I_B^y$
variable contra variable	$\Delta Indice_1 < \Delta Indice_2 \Rightarrow A \text{ al } Indice_1^x + \alpha_1^x \text{ y B al } Indice_2^y + \alpha'_2$ $\Delta Indice_1 > \Delta Indice_2 \Rightarrow A \text{ al } Indice_2^x + \alpha_2^x \text{ y B al } Indice_1^y + \alpha'_1$

13.5 Condiciones que deben cumplirse para poder reducir el tipo de interés final a ambas ramas.

Se determinarán las condiciones necesarias y suficientes para cada uno de los cuatro grupos de swaps. Además, se determinará el ahorro de total de intereses que el mercado les permite y la relación entre los tipos de interés a intercambiarse en el swap para que dicho ahorro sea factible. Estas condiciones van referidas al momento de la contratación del swap.

🚦 Swap de tipos de interés.

🟢 Swap fijo contra variable.

Supongamos que la empresa A se endeuda a tipo fijo por ser su mejor posición relativa en el mercado, luego la empresa B se endeudará a tipo variable. Si ambas empresas desean, además de cambiar su estructura de deuda, reducir los intereses a pagar por sus respectivas deudas mediante un swap deberá cumplirse que el interés final a pagar deberá ser inferior al que le ofrecía el mercado.

El siguiente cuadro recoge los intereses a pagar y cobrar por las empresas A y B mediante el swap:

Pago de intereses	Empresa A	Empresa B
Interés del préstamo	I_A	$Indice + \alpha'$
Interés a pagar del swap	$Indice + \beta$	I_{sw}
Interés a cobrar del swap	$-I_{sw}$	$-(Indice + \beta)$
Interés final	$I_A + Indice + \beta - I_{sw}$	$Indice + \alpha' + I_{sw} - (Indice + \beta)$

Para que la empresa A puede tener la deuda a interés variable, la empresa B a interés fijo y obtener ambas un interés final inferior al que le ofrece el mercado debe verificarse que:

$$I_A + Indice + \beta - I_{sw} < Indice + \alpha \quad \text{y} \quad Indice + \alpha' + I_{sw} - (Indice + \beta) < I_B$$

es decir, $I_A - (Indice + \alpha) < I_{sw} - (Indice + \beta) < I_B - (Indice + \alpha') \Leftrightarrow I_A - \alpha < I_{sw} - \beta < I_B - \alpha'$

El diferencial de intereses que el mercado ofrece a la rama que se ha endeudado a fijo debe ser inferior al diferencial de intereses del swap y ambos inferiores al diferencial de intereses fijo-variable que el mercado ofrece a la rama que se ha endeudado a variable.

De la desigualdad anterior se obtiene la condición necesaria para que puede obtenerse una rebaja en el tipo de interés final, $I_A - I_B < \alpha - \alpha'$

El ahorro de intereses para cada rama será:

✿ Para la empresa A: $\alpha - I_A - \beta + I_{sw} = h_A > 0$

✿ Para la empresa B: $I_B - \alpha' + \beta - I_{sw} = h_B > 0$

de donde, el ahorro total será $h = h_A + h_B = (I_B - I_A) - (\alpha' - \alpha)$

Además, como debe cumplirse que

$$I_A - \alpha + h_A = I_{sw} - \beta \quad ; \quad I_B - \alpha' - h_B = I_{sw} - \beta$$

Sumando ambas igualdades, $I_{sw} - \beta = \frac{(h_A - h_B) + (I_A + I_B) - (\alpha + \alpha')}{2}$

Cualquier combinación que esté sobre la recta

$$I_{sw} = \beta + \frac{(h_A - h_B) + (I_A + I_B) - (\alpha + \alpha')}{2}$$

dará como resultado final el ahorro total de intereses h .

Para cada valor de β se obtendrá el interés fijo del swap que deberá pactarse para poder obtener la reducción del tipo de interés.

Ejemplo 144: El mercado ofrece a cada empresa los siguientes tipos de interés:

Interés	Empresa A	Empresa B
Fijo	9%	10%
Variable	Libor+50p.b.	Libor+90p.b.

La empresa A desea tener su deuda a tipo variable y la empresa B la desea tener a tipo fijo. Ambas desean realizar un swap si con él pueden tener la estructura de deuda deseada y reducir el tipo de interés final. Para ello, el diferencial de intereses del swap, ΔI_{sw}^r , deberá estar comprendido entre los siguientes valores:

$$I_A - I_B = 9\% - 10\% = -1\% \quad \text{y} \quad \alpha - \alpha' = 50\text{p.b.} - 90\text{p.b.} = -40\text{p.b.}$$

Como $-1\% < -40\text{p.b.}$ se verifica la condición necesaria para poder obtener una rebaja de intereses para ambas ramas, endeudándose A al 9% y B al Libor+90p.b.

El ahorro total de intereses es de $(I_B - I_A) - (\alpha' - \alpha) = 10\% - 9\% - (90\text{p.b.} - 50\text{p.b.}) = 60\text{p.b.}$

Supóngase que A y B acuerdan repartirse el ahorro de intereses, si $h_A = 20\text{p.b.}$ Entonces,

$$h_B = 60\text{p.b.} - 20\text{p.b.} = 40\text{p.b.},$$

esto quiere decir que el swap deberá verificar:

$$9\% - 50\text{p.b.} + 20\text{p.b.} = 8\% + 70\text{p.b.}$$

$$10\% - 90\text{p.b.} - 40\text{p.b.} = 8\% + 70\text{p.b.}$$

para el Libor y para cualquier β el tipo fijo del swap deberá ser:

$$I_{sw} = \beta + \frac{(20p.b. - 40p.b.) + (9\% + 10\%) - (50p.b. + 90p.b.)}{2} = \beta + 8\% + 70p.b.$$

lo que determina las condiciones del swap.

Por ejemplo, para $\beta = 30p.b.$ el swap que deberá pactarse es 9% contra el Libor + 30p.b.

El interés final pagado por cada una de las dos ramas del swap será:

	Empresa A	Empresa B
Interés del préstamo	9%	Libor + 90p.b.
Interés a pagar por el swap	Libor + 30p.b.	9%
Interés a cobrar por el swap	-9%	-Libor - 30p.b.
Interés final	Libor + 30p.b.	9,6%

La empresa A obtiene la deuda a tipo variable y con una rebaja de 20p.b.; la empresa B consigue su deuda a interés fijo y con una rebaja de 40 p.b. en el tipo de interés.

■ Swap variable contra variable.

Supóngase que la empresa A está mejor situada respecto a la empresa B en el segmento de tipos de interés indicados al $Indice_1$; la empresa B deberá endeudarse al tipos de interés indicados al $Indice_2$.

Los intereses que pagará cada rama serán:

Pagos	EmpresaA	EmpresaB
Interés préstamo	$Indice_1 + \alpha_1$	$Indice_2 + \alpha'_2$
Pagos swap	$Indice_2 + \beta_2$	$Indice_1 + \beta_1$
Cobros swap	$-(Indice_1 + \beta_1)$	$-(Indice_2 + \beta_2)$
Pagos netos	$Indice_2 + \alpha_1 - (\beta_1 - \beta_2)$	$Indice_1 + \alpha'_2 + (\beta_1 - \beta_2)$

Ambas empresas obtendrán una reducción del tipo de interés si:

$$Indice_2 + \alpha_1 - (\beta_1 - \beta_2) < Indice_2 + \alpha_2 \quad \text{e} \quad Indice_1 + \alpha'_2 + (\beta_1 - \beta_2) < Indice_1 + \alpha'_1$$

es decir, $\alpha_1 - \alpha_2 < \beta_1 - \beta_2$ y $\beta_1 - \beta_2 < \alpha'_1 - \alpha'_2$

lo que permite obtener la condición suficiente $\alpha_1 - \alpha_2 < \beta_1 - \beta_2 < \alpha'_1 - \alpha'_2$

siendo la condición necesaria $\alpha_1 - \alpha'_1 < \alpha_2 - \alpha'_2$

El swap permitirá cambiar el índice de referencia de la deuda de cada empresa y, además, el interés final pagado por cada una de las ramas será inferior al que les ofrece el mercado si se verifica que la diferencia entre los marginales del índice que da mayor ventaja comparativa es menor que la diferencia de los marginales del otro.

El ahorro total de intereses que se obtendrá será:

✿ Para la Empresa A: $\alpha_2 - \alpha_1 + (\beta_1 - \beta_2) = h_A > 0$

✿ Para la Empresa B: $\alpha'_1 - \alpha'_2 - (\beta_1 - \beta_2) = h_B > 0$

luego, el ahorro total asciende a $h = h_A + h_B = (\alpha_2 - \alpha'_2) - (\alpha_1 - \alpha'_1) = \Delta Indice_2 - \Delta Indice_1$

Sumando ambas igualdades anteriores,

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{(h_A - h_B) + (\alpha_1 + \alpha'_1) - (\alpha_2 + \alpha'_2)}{2}$$

lo que permite poner el marginal de un índice en función del otro:

$$\beta_1 = \beta_2 + \frac{(h_A - h_B) + (\alpha_1 + \alpha'_1) - (\alpha_2 + \alpha'_2)}{2}$$

Ejemplo 145: A las empresas A y B el mercado les ofrece las siguientes condiciones para préstamos a interés variable, referenciados a distintos índices:

	Empresa A	Empresa B
Indice₁	Libor+100p.b.	Libor+80p.b.
Indice₂	Euribor+75p.b.	Euribor+25p.b.

Mediante el análisis de las ventajas comparativas del mercado la empresa B está mejor situada que A en los dos segmentos del mercado. Además la diferencia en el Libor es menor que la diferencia en el Euribor, luego comparativamente B está mejor situada que A en el segmento de préstamos al Euribor.

Si la empresa A quiere tener su deuda indiciada al Euribor y la empresa B la quiere tener al Libor y, además, conseguir que la financiación final sea inferior a la que les ofrece el mercado ambas deberán posicionarse en el mercado en el segmento que les es más favorable comparativamente y, después, realizar un swap. Luego, B deberá endeudarse al Euribor+25p.b. y A deberá endeudarse el Libor+100p.b.

Para que realmente se produzca una reducción de los intereses finales se debe cumplir la condición suficiente:

$$100p.b. - 80p.b. = 20p.b. < \beta_1 - \beta_2 < 75p.b. - 25p.b. = 50p.b.$$

El ahorro total de intereses será: $(75p.b. - 25p.b.) - (100p.b. - 80p.b.) = 30p.b.$

Supóngase que A quiere un ahorro de 20p.b. entonces B sólo podrá conseguir un ahorro de 10p.b. Para que ello sea posible, el swap que deberá pactarse deberá cumplir la siguiente relación entre los marginales de cada índice

$$\beta_1 = \beta_2 + \frac{10p.b. + (100p.b. + 80p.b.) - (75p.b. + 25p.b.)}{2} = \beta_2 + 45p.b.$$

Ecuación de una recta que verificará siempre la condición suficiente al ser $\beta_1 - \beta_2 = 45p.b.$, valor comprendido entre 20p.b. y 50p.b.

Si se fija $\beta_2 = 20p.b.$ entonces $\beta_1 = 65p.b.$ con lo que el swap a pactar sería: Libor+65p.b. contra Euribor+20p.b.

El interés final que acabará pagando cada rama del swap será:

	Empresa A	Empresa B
Interés del préstamo	Libor+100p.b.	Euribor+25p.b.
Interés a pagar por el swap	Euribor+20p.b.	Libor+65p.b.
Interés a cobrar por el swap	-(Libor+65p.b.)	-(Euribor+20p.b.)
Interés final	Euribor+55p.b.	Libor+70p.b.

 Swap de tipos de divisas.

 Swap fijo contra variable.

Dado que en este tipo de swap interviene el tipo de cambio pactado para el intercambio de los Nacionales, se analizarán dos situaciones posibles.

 **La Empresa A se endeuda a tipo fijo en la divisa x.** Entonces la Empresa B se endeudará a interés variable en la divisa y.

Los intereses finales que pagará cada una de las ramas serán:

Intereses	Empresa A	Empresa B
Préstamo	$C_x \cdot I_A^x$	$C_y \cdot (Indice_y + \alpha'_y)$
Pagos del swap	$C_y \cdot (Indice_y + \beta_y)$	$C_x \cdot I_{sw}^x$
-Cobros del swap	$-C_x \cdot I_{sw}^x$	$-C_y \cdot (Indice_y + \beta_y)$
Intereses totales⁷⁷	$C_x \cdot (I_A^x - I_{sw}^x) \oplus C_y \cdot (Indice_y + \beta_y)$	$C_y \cdot (\alpha'_y - \beta_y) \oplus C_x \cdot I_{sw}^x$

Al ser $C_x = d_{x/y} \cdot C_y$ y $C_y = \frac{C_x}{d_{x/y}}$, la Empresa A acaba pagando un interés variable en la divisa y, y la Empresa

B pagará un interés fijo en la divisa x, que es lo que deseaban ambas. Para que, además, el tipo de interés final sea inferior a lo que el mercado les ofrece debe cumplirse que:

$$C_x \cdot (I_A^x - I_{sw}^x) \oplus C_y \cdot (Indice_y + \beta_y) < C_y \cdot (Indice_y + \alpha'_y) \quad y \quad C_y \cdot (\alpha'_y - \beta_y) \oplus C_x \cdot I_{sw}^x < C_x \cdot I_B^x$$

Aplicando la conversión a una divisa, de las desigualdades

$$d_{x/y} \cdot I_A^x - \alpha'_y < d_{x/y} \cdot I_{sw}^x - \beta_y \quad y \quad d_{x/y} \cdot I_{sw}^x - \beta_y < d_{x/y} \cdot I_B^x - \alpha'_y$$

con lo que la condición suficiente es $d_{x/y} \cdot I_A^x - \alpha'_y < d_{x/y} \cdot I_{sw}^x - \beta_y < d_{x/y} \cdot I_B^x - \alpha'_y$

y la condición necesaria será $d_{x/y} \cdot (I_A^x - I_B^x) < \alpha_y - \alpha'_y$

El ahorro de intereses que obtiene cada una de las ramas del swap será:

 Para la empresa A: $(\alpha_y - d_{x/y} \cdot I_A^x) - (\beta_y - d_{x/y} \cdot I_{sw}^x) = h_A^y$ sobre C_y

 Para la empresa B: $\left(I_B^x - \frac{1}{d_{x/y}} \cdot \alpha'_y \right) + \left(\frac{1}{d_{x/y}} \cdot \beta_y - I_{sw}^x \right) = h_B^x$ sobre C_x

es decir $(d_{x/y} \cdot I_B^x - \alpha'_y) + (\beta_y - d_{x/y} \cdot I_{sw}^x) = d_{x/y} \cdot h_B^x$ sobre C_x

El ahorro total de intereses será $h = h_A^y - d_{x/y} \cdot h_B^x = (\alpha_y - \alpha'_y) - d_{x/y} \cdot (I_A^x - I_B^x)$

Supóngase que se fija h_A^y entonces, $h_B^x = \frac{h - h_A^y}{d_{x/y}}$, cada una sobre su respectivo nacional.

Las condiciones con que se deberá pactar el swap son

⁷⁷ Se utiliza el símbolo $\oplus$ para indicar la agregación de cantidades monetarias referidas a divisas diferentes. Para poder sumarlás es necesario convertirlas a una misma divisa.

$$d_{x/y} \cdot I_{sw}^x - \beta_y = \frac{(h_A^y - d_{x/y} \cdot h_B^x) + d_{x/y} \cdot (I_A^x + I_B^x) - (\alpha_y + \alpha'_y)}{2}$$

obteniéndose la recta que relaciona el interés fijo del swap con el marginal del interés variable:

$$I_{sw}^x = \frac{1}{d_{x/y}} \left(\beta_y + \frac{(h_A^y - d_{x/y} \cdot h_B^x) + d_{x/y} \cdot (I_A^x + I_B^x) - (\alpha_y + \alpha'_y)}{2} \right)$$

🚩 La Empresa A se endeuda a tipo variable en la divisa x.

En este caso la empresa A se endeuda al $Indice_x + \alpha_x$ en la divisa x y la empresa B se endeuda al interés I_B^y en la divisa y. El interés final pagado por A y por B será inferior al que les ofrece el mercado si se verifica:

$$C_x \cdot (\alpha_x - \beta_x) \oplus C_y \cdot I_{sw}^y < C_y \cdot I_A^y \quad \text{y} \quad C_y \cdot (I_B^y - I_{sw}^y) \oplus C_x \cdot (Indice_x + \beta_x) < C_x \cdot (Indice_x + \alpha'_x)$$

Haciendo la conversión a una misma divisa, la condición suficiente es:

$$I_B^y - d_{x/y} \cdot \alpha'_x < I_{sw}^y - d_{x/y} \cdot \beta_x < I_A^y - d_{x/y} \cdot \alpha_x$$

y la condición necesaria será $d_{x/y} \cdot (\alpha_x - \alpha'_x) < I_A^y - I_B^y$

Si se verifican estas condiciones, el ahorro de intereses que obtendrá cada rama del swap asciende a:

🌸 Para la Empresa A: $(I_A^y - d_{x/y} \cdot \alpha_x) - (I_{sw}^y - d_{x/y} \cdot \beta_x) = h_A^x > 0$ siendo, h_A^x el porcentaje de ahorro sobre C_y .

🌸 Para la Empresa B: $(d_{x/y} \cdot \alpha'_x - I_B^y) + (I_{sw}^y - d_{x/y} \cdot \beta_x) = d_{x/y} \cdot h_B^x > 0$ siendo, h_B^x el ahorro sobre C_x .

El ahorro total de intereses ascenderá a $h = h_A^x + d_{x/y} \cdot h_B^x = (I_A^y - I_B^y) - d_{x/y} \cdot (\alpha_x - \alpha'_x)$

Si se fija el valor de h_A^x , entonces $h_B^x = \frac{h - h_A^x}{d_{x/y}}$, pudiendo encontrar la relación entre los tipos de interés del

swap que garanticen dicho ahorro de intereses.

Se obtiene la recta que dará las condiciones a las que deberá pactarse el swap es:

$$I_{sw}^y = d_{x/y} \cdot \beta_x + \frac{(d_{x/y} \cdot h_B^x - h_A^x) + (I_A^y + I_B^y) - d_{x/y} \cdot (\alpha_x + \alpha'_x)}{2}$$

Ejercicio 146: El mercado ofrece a cada una de las ramas del swap tipos de interés para cada una de las divisas:

Divisa	Empresa A	Empresa B
x	9% $Indice_x + 50 \text{ p.b.}$	10% $Indice_x + 30 \text{ p.b.}$
y	10% $Indice_y + 80 \text{ p.b.}$	12% $Indice_y + 90 \text{ p.b.}$

El tipo de cambio pactado para el intercambio de Nacionales es $d_{x/y} = 0.9$. Se va a suponer que la Empresa A puede tener divisa y sin tener que ir al mercado de cambios y la Empresa B puede tener divisa x de la misma forma. Si la empresa A se endeuda en la divisa x y la empresa B se endeuda en la divisa y, el swap permitirá que ambas ramas acaben pagando su deuda en la divisa adecuada.

El análisis de las ventajas comparativas del mercado deberá determinar cuál es la rama del swap que mejor situada está en el mercado:

<i>Interés de mercado</i>	<i>Empresa A (divisa x)</i>	<i>Empresa B (divisa y)</i>
<i>Fijo</i>	9%	12%
<i>Variable</i>	$\text{Indice}_x + 50 p.b.$	$\text{Indice}_y + 90 p.b.$

Si en el momento de negociar el swap el $\text{Indice}_x = 6\%$ y el $\text{Indice}_y = 4\%$, el resultado es que A está mejor que B en el segmento de préstamo a tipo fijo, mientras que B está mejor en el segmento de préstamos a interés variable al ser $9\% - 12\% < 0$ e $\text{Indice}_x + 50 p.b. - (\text{Indice}_y + 90 p.b.) > 0$

Además, se cumple la condición necesaria para que pueda haber un ahorro de intereses:

$$0.9 \cdot (9\% - 10\%) < 80 p.b. - 90 p.b.$$

luego, la Empresa A se endeudará a tipo fijo en la divisa x y la Empresa B se endeudará en la divisa y a tipo variable.

El ahorro total de intereses asciende a $(80 p.b. - 90 p.b.) - [0.9 \cdot (9\% - 10\%)] = 80 p.b.$

Si la Empresa A quiere un ahorro de $h_A^y = 44 p.b.$, la Empresa B sólo se podrá ahorrar $h_B^x = \frac{36 p.b.}{0.9} = 40 p.b.$

Para que sea posible dicho ahorro de intereses, el swap deberá pactarse teniendo en cuenta que la relación entre el interés fijo del swap y la tasa marginal del variable del swap debe ser

$$I_{sw}^x = \frac{1}{0.9} \left(\beta + \frac{(44 p.b. - 0.9 \cdot 40 p.b.) + 0.9 \cdot (9\% + 10\%) - (80 p.b. + 90 p.b.)}{2} \right) = \frac{1}{0.9} \cdot (\beta + 7.74\%)$$

A modo de ejemplo si se pacta $\beta = 36 p.b.$ entonces $I_{sw}^x = 9\%$, el swap a pactar será $\text{Indice}_y + 36 p.b.$ contra el 9%:

El interés final pagado por cada una de las ramas del swap asciende a:

✿ Para la Empresa A:

$$C_x \cdot (9\% - 9\%) \oplus C_y \cdot (\text{Indice}_y + 36 p.b.) = C_y \cdot (\text{Indice}_y + 36 p.b.) < C_y \cdot (\text{Indice}_y + 80 p.b.)$$

✿ Para la Empresa B:

$$C_y \cdot 54 p.b. \oplus C_x \cdot 9\% = C_x \cdot \left(\frac{54 p.b.}{0.9} + 9\% \right) = C_x \cdot (9\% + 60 p.b.) < C_x \cdot 10\%$$

Como puede comprobarse, la empresa A se ha ahorrado 44 p.b. y la Empresa B 40 p.b.

■ Swap variable contra variable.

Supóngase que la Empresa A tiene acceso a la divisa y y la Empresa B a la divisa x, luego A se endeudará en la divisa x, B se endeudará en la divisa y, después realizarán el swap.

El mercado ofrece tipos de interés para cada índice y para cada divisa:

Divisa	Empresa A	Empresa B
x	$Indice_1^x + \alpha_1^x$	$Indice_1^x + \alpha_1^{1x}$
	$Indice_2^x + \alpha_2^x$	$Indice_2^x + \alpha_2^{1x}$
y	$Indice_1^y + \alpha_1^y$	$Indice_1^y + \alpha_1^{1y}$
	$Indice_2^y + \alpha_2^y$	$Indice_2^y + \alpha_2^{1y}$

El análisis de las ventajas comparativas se realizará entre:

Empresa A	Empresa B
$Indice_1^x + \alpha_1^x$	$Indice_1^y + \alpha_1^{1y}$
$Indice_2^x + \alpha_2^x$	$Indice_2^y + \alpha_2^{1y}$

Se analizarán las dos posibles situaciones.

✚ **La Empresa A se endeuda al $Indice_1^x$.**

Luego, la Empresa B se endeudará al $Indice_2^y$.

El pago neto de intereses de las dos ramas del swap asciende a:

Intereses	Empresa A	Empresa B
Interés préstamo	$C_x \cdot (Indice_1^x + \alpha_1^x)$	$C_y \cdot (Indice_2^y + \alpha_2^{1y})$
Pago swap	$C_y \cdot (Indice_2^y + \beta_2^y)$	$C_x \cdot (Indice_1^x + \beta_1^x)$
Cobro swap	$-C_x \cdot (Indice_1^x + \beta_1^x)$	$-C_y \cdot (Indice_2^y + \beta_2^y)$
Interés final	$C_x \cdot (\alpha_1^x - \beta_1^x) \oplus C_y \cdot (Indice_2^y + \beta_2^y)$	$C_y \cdot (\alpha_2^{1y} - \beta_2^y) \oplus C_x \cdot (Indice_1^x + \beta_1^x)$

Para que ambas ramas del swap reduzcan el tipo final debe cumplirse que:

$$C_x \cdot (\alpha_1^x - \beta_1^x) \oplus C_y \cdot (Indice_2^y + \beta_2^y) < C_y \cdot (Indice_2^y + \alpha_2^y) \quad \text{y} \quad C_y \cdot (\alpha_2^{1y} - \beta_2^y) \oplus C_x \cdot (Indice_1^x + \beta_1^x) < C_x \cdot (Indice_1^x + \alpha_1^{1x})$$

Teniendo en cuenta el tipo de cambio pactado para los Nacionales, $d_{x/y}$, se obtiene la condición suficiente

para que se pueda reducir el tipo de interés $d_{x/y} \cdot \alpha_1^x - \alpha_2^y < d_{x/y} \cdot \beta_1^x - \beta_2^y < d_{x/y} \cdot \alpha_1^{1x} - \alpha_2^{1y}$

siendo la condición necesaria $d_{x/y} \cdot (\alpha_1^x - \alpha_1^{1x}) < \alpha_2^y - \alpha_2^{1y}$

Aplicando el tipo de cambio para operar en una misma divisa, el ahorro de intereses será:

✚ Para la Empresa A: $C_y \cdot \left[(\alpha_2^y - d_{x/y} \cdot \alpha_1^x) + (d_{x/y} \cdot \beta_1^x - \beta_2^y) \right] = h_A^y \cdot C_y$

✚ Para la Empresa B: $C_x \cdot \left[(\alpha_1^{1x} - \frac{1}{d_{x/y}} \cdot \alpha_2^{1y}) - (\beta_1^x - \frac{1}{d_{x/y}} \cdot \beta_2^y) \right] = h_B^x \cdot C_x$

El ahorro total de intereses ascenderá a $h = h_A^y + d_{x/y} \cdot h_B^x = (\alpha_2^y - \alpha_2^{1y}) - d_{x/y} \cdot (\alpha_1^x - \alpha_1^{1x})$

Supóngase que la Empresa A desea un ahorro de h_A^y , la Empresa B sólo podrá acceder a un ahorro de

$$h_B^x = \frac{h - h_A^y}{d_{x/y}}, \text{ cada uno sobre su respectivo Nacional.}$$

La relación entre las tasas marginales de los intereses del swap es

$$\beta_1^x = \frac{1}{d_{x/y}} \left(\beta_2^y + \frac{(h_A^y - d_{x/y} \cdot h_B^x) + d_{x/y} \cdot (\alpha_1^x + \alpha_1^{ix}) - (\alpha_2^y + \alpha_2^{iy})}{2} \right)$$

recta que determina las condiciones a las que debe pactarse el swap para conseguir el ahorro de intereses que el mercado permite.

✚ **La Empresa A se endeuda al Índice₂^x.**

Luego, la Empresa B se endeudará al Índice₁^y. El pago neto de intereses será:

Intereses	Empresa A	Empresa B
Interés préstamo	$C_x \cdot (\text{Índice}_2^x + \alpha_2^x)$	$C_y \cdot (\text{Índice}_1^y + \alpha_1^{iy})$
Pago swap	$C_y \cdot (\text{Índice}_1^y + \beta_1^y)$	$C_x \cdot (\text{Índice}_2^x + \beta_2^x)$
Cobro swap	$-C_x \cdot (\text{Índice}_2^x + \beta_2^x)$	$-C_y \cdot (\text{Índice}_1^y + \beta_1^y)$
Interés final	$C_x \cdot (\alpha_2^x - \beta_2^x) \oplus C_y \cdot (\text{Índice}_1^y + \beta_1^y)$	$C_y \cdot (\alpha_1^{iy} - \beta_1^y) \oplus C_x \cdot (\text{Índice}_2^x + \beta_2^x)$

Para que ambas ramas del swap reduzcan el tipo final debe cumplirse que:

$$C_x \cdot (\alpha_2^x - \beta_2^x) \oplus C_y \cdot (\text{Índice}_1^y + \beta_1^y) < C_y \cdot (\text{Índice}_1^y + \alpha_1^{iy})$$

y

$$C_y \cdot (\alpha_1^{iy} - \beta_1^y) \oplus C_x \cdot (\text{Índice}_2^x + \beta_2^x) < C_x \cdot (\text{Índice}_2^x + \alpha_2^x)$$

De las dos desigualdades anteriores la condición suficiente es $d_{x/y} \cdot \alpha_2^x - \alpha_1^{ix} < d_{x/y} \cdot \beta_2^x - \beta_1^y < d_{x/y} \cdot \alpha_2^{ix} - \alpha_1^{iy}$

siendo la condición necesaria $d_{x/y} \cdot (\alpha_2^x - \alpha_2^{ix}) < \alpha_1^{iy} - \alpha_1^{ix}$

El ahorro total de intereses será:

✚ Para la Empresa A: $C_y \cdot \left[(\alpha_1^{iy} - d_{x/y} \cdot \alpha_2^x) + (d_{x/y} \cdot \beta_2^x - \beta_1^y) \right] = h_A^y \cdot C_y$

✚ Para la Empresa B: $C_x \cdot \left[(\alpha_2^{ix} - \frac{1}{d_{x/y}} \cdot \alpha_1^{iy}) - (\beta_2^x - \frac{1}{d_{x/y}} \cdot \beta_1^y) \right] = h_B^x \cdot C_x$

El ahorro total de intereses asciende a $h = h_A^y + d_{x/y} \cdot h_B^x = (\alpha_1^{iy} - \alpha_1^{ix}) - d_{x/y} \cdot (\alpha_2^x - \alpha_2^{ix})$

La relación entre las tasas marginales de los intereses del swap es:

$$\beta_1^x = d_{x/y} \cdot \beta_2^y - \frac{(h_A^y - d_{x/y} \cdot h_B^x) + d_{x/y} \cdot (\alpha_1^x + \alpha_1^{ix}) - (\alpha_2^y + \alpha_2^{iy})}{2}$$

recta que determina las condiciones a las que deberá pactarse el swap.

Ejercicio 147: El mercado ofrece a las dos ramas del swap los siguientes tipos de interés en cada una de las dos divisas:

Divisa	Empresa A	Empresa B
x	$\text{Indice}_1^x + 70 \text{ p.b.}$	$\text{Indice}_1^x + 90 \text{ p.b.}$
	$\text{Indice}_2^x + 90 \text{ p.b.}$	$\text{Indice}_2^x + 100 \text{ p.b.}$
y	$\text{Indice}_1^y + 90 \text{ p.b.}$	$\text{Indice}_1^y + 40 \text{ p.b.}$
	$\text{Indice}_2^y + 100 \text{ p.b.}$	$\text{Indice}_2^y + 70 \text{ p.b.}$

El tipo de cambio pactado para el intercambio de Nacionales es $d_{x/y}=0.8$. Supóngase que la Empresa A puede acceder a la divisa y y la Empresa B puede acceder a la divisa x sin tener que acudir al mercado de cambios. La Empresa A se endeudará en la divisa x y la Empresa B en la divisa y, con la finalidad que con el swap la financiación la obtengan en la divisa deseada y a un tipo de interés inferior al del mercado.

Para saber en qué segmento debe posicionarse cada rama del swap se comparará:

Interés de mercado	Empresa A	Empresa B
Indice_1	$\text{Indice}_1^x + 70 \text{ p.b.}$	$\text{Indice}_1^y + 40 \text{ p.b.}$
Indice_2	$\text{Indice}_2^x + 90 \text{ p.b.}$	$\text{Indice}_2^y + 70 \text{ p.b.}$

En el momento de realizar se conocen los índices: $\text{Indice}_1^x = 5\%$, $\text{Indice}_2^x = 5\% + 50 \text{ p.b.}$, $\text{Indice}_1^y = 4\%$, $\text{Indice}_2^y = 5\%$, luego,

$$\Delta \text{Indice}_1 = (5\% + 70 \text{ p.b.}) - (4\% + 40 \text{ p.b.}) = 1,3\% > 0$$

$$\Delta \text{Indice}_2 = (5\% + 50 \text{ p.b.} + 90 \text{ p.b.}) - (5\% + 70 \text{ p.b.}) = 70 \text{ p.b.} > 0$$

La Empresa B está mejor considerada en el mercado que la Empresa A, pero sobre todo en el segmento de tipos de interés referidos a la base del Indice_1 , luego B se deberá endeudar al $\text{Indice}_1^y + 40 \text{ p.b.}$ y A al $\text{Indice}_2^x + 90 \text{ p.b.}$

La condición necesaria para poder obtener un ahorro de intereses es:

$$0.8 \cdot (90 \text{ p.b.} - 100 \text{ p.b.}) < (80 \text{ p.b.} - 40 \text{ p.b.}) \Leftrightarrow -8 \text{ p.b.} < 40 \text{ p.b.}$$

El ahorro total de intereses que podrán obtener asciende a:

$$(80 \text{ p.b.} - 40 \text{ p.b.}) - 0.8 \cdot (90 \text{ p.b.} - 100 \text{ p.b.}) = 48 \text{ p.b.}$$

Supóngase que la Empresa A desea un ahorro de $h_A^y = 24 \text{ p.b.}$, la Empresa B sólo podrá ahorrarse

$h_B^x = \frac{48 \text{ p.b.} - 24 \text{ p.b.}}{0.8} = 30 \text{ p.b.}$ y la relación entre las tasas marginales de los intereses a pactar por el swap

será:

$$\beta_2^x = \frac{1}{0.8} \left(\beta_1^y + \frac{(24 \text{ p.b.} - 24 \text{ p.b.}) + 0.8 \cdot (90 \text{ p.b.} + 100 \text{ p.b.}) - (80 \text{ p.b.} + 40 \text{ p.b.})}{2} \right) = \frac{1}{0.8} \cdot (\beta_1^y + 16 \text{ p.b.})$$

Por ejemplo, para $\beta_1^y = 28 \text{ p.b.} \Rightarrow \beta_2^x = \frac{1}{0.8} \cdot (28 \text{ p.b.} + 16 \text{ p.b.}) = 55 \text{ p.b.}$, luego, el swap a pactar será:

$$\text{Indice}_2^x + 55 \text{ p.b. contra } \text{Indice}_1^y + 28 \text{ p.b.}$$

Los intereses finales que pagará cada rama ascenderá a:

✿ Para la Empresa A:

$$0.8(90 p.b. - 55 p.b.) + (Indice_1^y + 28 p.b.) = Indice_1^y + 56 p.b. < Indice_1^y + 80 p.b.$$

✿ Para la Empresa B:

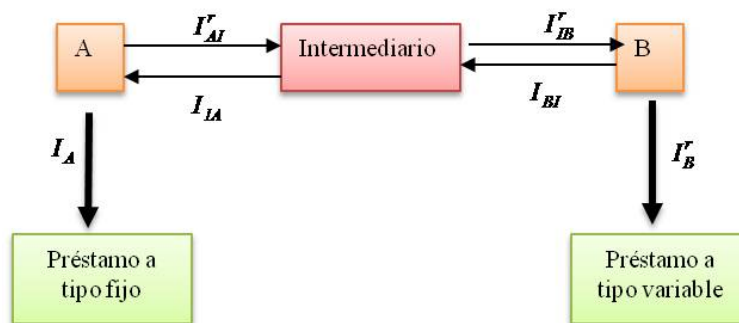
$$\frac{1}{0.8}(40 p.b. - 28 p.b.) + (Indice_2^x + 55 p.b.) = Indice_2^x + 70 p.b. < Indice_2^x + 100 p.b.$$

Como puede apreciarse ambas consiguen tener la reducción de intereses inicialmente determinados.

13.6 Swap de tipos de interés con intermediario

La mayoría de las operaciones *swap* se realizan mediante la intervención de un intermediario (*Dealer*) quien realiza dos *swaps* simultáneos: uno entre la empresa A y el *Dealer* y otro entre la empresa B y el *Dealer*.

El esquema será:



Supongamos que la empresa A se endeuda a tipo fijo y la empresa B a tipo variable, el siguiente cuadro recoge los intereses a cobrar y pagar por cada una de las partes del *swap*:

	<i>Empresa A</i>	<i>Empresa B</i>	<i>Intermediario</i>
<i>Interés préstamo</i>	I_A	$I_B^r = I_A^r + \Delta I_r$	
<i>Interés a pagar por el swap</i>	I_{AI}^r	I_{BI}	$I_{IB}^r + I_{IA}$
<i>Interés a cobrar por el swap</i>	I_{IA}	I_{IB}^r	$I_{AI}^r + I_{BI}$
<i>Intereses netos</i>	$I_A + I_{AI}^r - I_{IA} = I_A + I_{swA}^r$	$I_B^r + I_{BI} - I_{IB}^r = I_B^r - I_{swB}^r$	$I_{swA}^r - I_{swB}^r > 0$

El estudio de las condiciones necesarias para la realización del *swap* se realizará en dos pasos: el primer *swap* entre la empresa A y el intermediario y el segundo *swap* entre la empresa B y el intermediario.

La condición necesaria para el primer *swap* (la empresa A se endeuda a fijo y el intermediario a variable) exigirá que se verifique que:

$$I_A^r - I_A > I_{swA}^r > I_I^r - I_I.$$

La condición necesaria para el segundo *swap* (el intermediario se endeuda a fijo y la empresa B a variable) exigirá que se verifique que:

$$I_I^r - I_I > I_{swB}^r > I_B^r - I_B.$$

Por tanto, se deberá verificar que:

$$I_A^r - I_A > I_{swA}^r > I_I^r - I_I > I_{swB}^r > I_B^r - I_B$$

Si se realiza el estudio de las ventajas comparativas de cada una de las dos empresas en sus respectivos mercados y se compara con el resultado del *swap*, para que ambas consigan la estructura de deuda deseada y una reducción del tipo de interés deberán cumplirse las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} I_A^r - (I_A + I_{AI}^r - I_{IA}^r) > 0 \\ I_B - (I_B^r + I_{BI}^r - I_{IB}^r) > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (I_B - I_A) - (I_B^r - I_A^r) - (I_{swA}^r - I_{swB}^r) > 0 \Leftrightarrow (I_B - I_A) - (I_B^r - I_A^r) > (I_{swA}^r - I_{swB}^r)$$

ya que para que al intermediario le sea conveniente realizar el *swap* la diferencia entre intereses pagados e intereses cobrados debe ser positiva, es decir, $I_{swA}^r - I_{swB}^r > 0$. Luego la condición necesaria para la realización del *swap* es:

$$(I_B - I_A) - (I_B^r - I_A^r) = \Delta I - \Delta I^r > (I_{swA}^r - I_{swB}^r)$$

Ejemplo 148: Dos empresas A y B deben endeudarse y su situación en el mercado de préstamos es la reflejada en el siguiente cuadro:

	Tipo fijo	Tipo variable
Empresa A	8%	LIBOR+60p.b.
Empresa B	9%	LIBOR+90p.b.
Intermediario	8,5%	LIBOR+70p.b.

El estudio de las ventajas comparativas determina los siguientes valores:

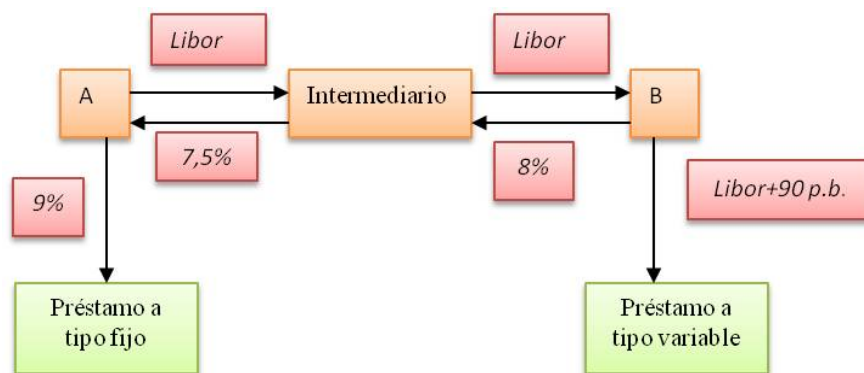
$I_A^r - I_A$	$I_I^r - I_I$	$I_B^r - I_B$
Libor-(7%+40p.b.)	> Libor-7%+80p.b.	> libor-(8%+10p.b.)

En este caso se cumple la primera de las condiciones.

Si el *swap* entre el intermediario y la empresa A se pacta al 7,5% contra el LIBOR y el *swap* entre el intermediario y la empresa B se pacta al 8% contra el LIBOR, tendremos:

$I_{swA}^r = I_{AI}^r - I_{IA}$	$I_I^r - I_I$	$I_{swB}^r = I_{BI}^r - I_{IB}$	$\Delta I - \Delta I^r$	$I_{swA}^r - I_{swB}^r$
Libor-7,5%	> Libor-7%+80p.b.	> libor-8%	1%-30p.b.=70p.b.	50p.b.

El esquema del *swap* es:



El *swap* con intermediario determinará los siguientes intereses a pagar sobre el Nominal, para cada una de las partes:

	Empresa A	Empresa B	Intermediario
Interés préstamo	8%	libor+90p.b.	
Interés a pagar del swap	libor	8%	libor+7,5%
Interés a cobrar del swap	7,5%	Libor	libor+8%
Intereses netos a pagar	8%+libor-7,5%= =libor+50p	libor+90p.b.+8%-libor= =8%+90p.b.	libor+8%-(libor+7,5%) =0,5%>0

Como puede verse, la empresa A y la empresa B consiguen su deuda a un tipo de interés inferior al que les ofrece el mercado y el intermediario obtiene una ganancia de 50 p.b. como prima de riesgo.

13.7 Valoración de un swap.

■ Valoración de swap de tipos de interés.

Se considerará el *swap* fijo contra variable. La valoración de un *swap* puede realizarse en dos momentos distinto: el origen de la operación y cualquier momento, t , posterior al origen.

En el origen de la operación, poner precio a un *swap* normalmente supone encontrar el tipo de interés fijo tal que el valor actual neto de los dos flujos de intereses sea nulo. Por otro lado, valorar un *swap* en un momento posterior, t , implica encontrar el valor actual neto de un *swap* ya existente y para el que el tipo de interés fijo ya se ha determinado anteriormente.

Para determinar el precio del *swap* en el origen se deberá tener en cuenta:

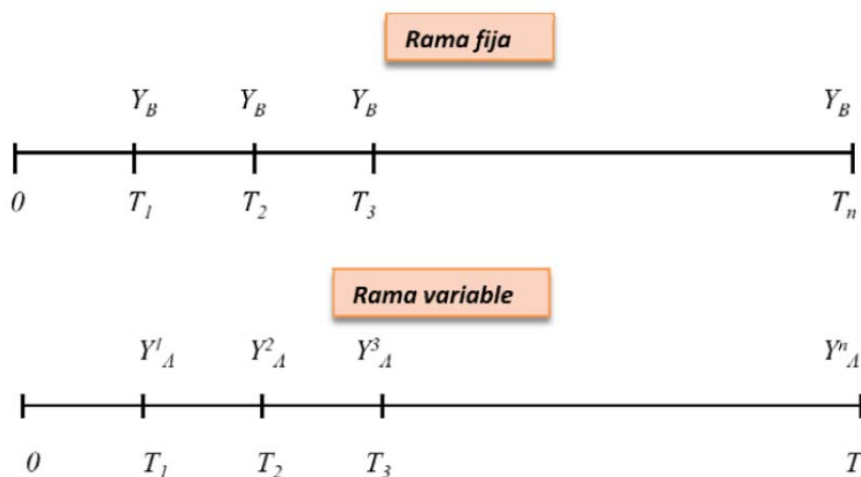
- La Estructura Temporal de Tipos de Interés (*E.T.T.I.*) vigente en el momento de la valoración.
- Que cualquier capital futuro se podrá actualizar utilizando los factores de descuento asociados a la *E.T.T.I.*
- Los tipos de interés *forward* para determinar los pagos de la rama que paga tipo variable. En un *swap* genérico de tipos de interés la rama flotante es el LIBOR a 6 meses para la divisa en que se realiza el *swap*. Si se conoce la *E.T.T.I.* para esa divisa se podrán calcular los tipos de interés *forward* a 6 meses a aplicar en cada una de las fechas efectivas del *swap*; de esta forma, se podrán estimar anticipadamente los pagos a tipo variable.
- Que un *swap* es una serie de flujos monetarios a cobrar o pagar.

Aunque existen diversos modelos de valoración de *swap*, el método más utilizado por los analistas financieros se basa en la valoración financiera mediante los tipos de interés cupón cero del mercado. Consiste en:

- ◆ Identificar los flujos futuros de las dos ramas del *swap*.
- ◆ Actualizar los flujos futuros utilizando los tipos de interés de mercado; es decir, utilizando la *E.T.T.I.*
- ◆ El valor actual de la rama a tipo variable deberá ser igual al valor actual de la rama a tipo fijo.

El precio del *swap* será el tanto de interés fijo que haga que el valor actual de las dos ramas coincida.

Consideremos el siguiente esquema que recoge los flujos futuros de cada rama del *swap*:



donde,

$$Y_B = C \cdot I_{BA} \quad e \quad Y_A^r = C \cdot I_{AB}^r = C \cdot ({}_{T_{r-1}}f_p + \Delta I)$$

Siendo I_{BA} el tanto de interés fijo del *swap* que la empresa B pagará a la empresa A, I_{AB}^r el tanto de interés variable del *swap* (normalmente el LIBOR a 6 meses para la divisa correspondiente) que la empresa A pagará a la B, ${}_{T_{r-1}}f_p$ es tipo de interés (índice) *forward* de referencia a aplicar en la fecha efectiva T_{r-1} y para un plazo igual al periodo de devengo de intereses del *swap*, y ΔI el marginal a añadir al índice de referencia.

Sean $\{I(T_1), I(T_2), \dots, I(T_n)\}$ la Estructura Temporal de Tipos de Interés para la divisa del *swap* y $v(T_r) = (1 + I(T_r))^{-T_r}$ el factor de descuento asociado, entonces el valor actual de los pagos a tipo variable será:

$$V_{rama\ variable} = \sum_{r=1}^n Y_A^r \cdot v(T_r) = \sum_{r=1}^n C \cdot ({}_{T_{r-1}}f_p + \Delta I) \cdot v(T_r),$$

y el valor actual de los pagos a tipo fijo será:

$$V_{rama\ fijo} = \sum_{r=1}^n Y_B \cdot v(T_r) = \sum_{r=1}^n C \cdot I_{BA} \cdot v(T_r).$$

El precio del *swap* será aquel valor de I_{BA} que verifique la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=1}^n {}_{T_{r-1}}f_p \cdot v(T_r) + \Delta I \cdot \sum_{r=1}^n v(T_r) = \sum_{r=1}^n I_{BA} \cdot v(T_r)$$

de donde,

$$I_{BA} = \frac{\sum_{r=1}^n {}_{T_{r-1}}f_p \cdot v(T_r)}{\sum_{r=1}^n v(T_r)} + \Delta I$$

Ejemplo 149: Dos empresas desean realizar un *swap* de márgenes de tipos de interés a 4 años sobre 10 millones de \$, fijo contra el LIBOR a 1 año + 50 p.b. siendo los pagos anuales y la base de cómputo del tiempo el año natural.

Hoy, los tipos de interés *forward* LIBOR a 1 año para el \$ y el tipo de interés variable del *swap* son:

Plazo	I(k)	Forward LIBOR a laño	Tipo variable del swap
0	-	5%	5,5%
1	5%	5,4%	5,9%
2	5,2%	5,8%	6,3%
3	5,4%	6,61%	7,11%
4	5,7%	-	-

El precio del *swap*, o tipo fijo a pagar anualmente durante los cuatro años será:

$$I_{BA} = \frac{0,055 \cdot (1+0,05)^{-1} + 0,059 \cdot (1+0,052)^{-2} + 0,063 \cdot (1+0,054)^{-3} + 0,0711 \cdot (1+0,057)^{-4}}{(1+0,05)^{-1} + (1+0,052)^{-2} + (1+0,054)^{-3} + (1+0,057)^{-4}} = 0,0616$$

Supongamos la siguiente situación entre las dos partes del *swap*. A la rama que debe cobrar los intereses a tipo variable se le ofrece la entrega del Nocional a cambio de que lo devuelva al final de la vida del *swap*; durante ese tiempo se invierte en el mercado cobrando los intereses al tanto de mercado vigente en cada momento; es

decir cobrará los tipos de interés al contado del futuro o lo que es lo mismo los tipos *forward* hoy para los distintos vencimientos futuros. La operación para la rama que cobrará los intereses a tipo variable será:

$$\{(C, 0)\} \sim \{(C_{T_{r-1}} f_p, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n} \cup \{(C, T_n)\}.$$

$$\downarrow$$

$$ETTI$$

Luego,

$$C = \sum_{r=1}^n C_{T_{r-1}} f_p \cdot v(T_r) + C \cdot v(T_n),$$

de donde,

$$C - C \cdot v(T_n) = \sum_{r=1}^n C_{T_{r-1}} f_p \cdot v(T_r),$$

Como precio del *swap*, I_{BA} , debe verificar la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=1}^n C_{T_{r-1}} f_p \cdot v(T_r) + \Delta I = \sum_{r=1}^n I_{BA} \cdot v(T_r)$$

se obtiene que:

$$I_{AB} = \frac{1 - v(T_n)}{\sum_{r=1}^n v(T_r)} + \Delta I$$

Para obtener el precio de un *swap* genérico se pueden sustituir las corrientes de pagos a tipo variable por el intercambio de Nacionales, con lo cual la valoración de la rama variable se simplifica considerablemente.

Ejemplo 150: El *swap* del ejemplo anterior es un *swap* de márgenes y para determinar el precio, o interés fijo, mediante el intercambio de nacionales se deberá obtener el precio del *swap* genérico y sumar a dicho tipo de interés el margen. En el ejemplo anterior tenemos que $v(T_n) = (1+0,057)^{-4} = 0,8011246$ y

$$\sum_{r=1}^n v(T_r) = (1+0,05)^{-1} + (1+0,052)^{-2} + (1+0,054)^{-3} + (1+0,057)^{-4} = 3,5111294$$

de donde, el tipo de interés fijo del *swap* genérico será: $\frac{1-0,8011246}{3,5111294} = 0,056641$

y el tipo de interés fijo del *swap* de márgenes es: $I_{BA} = \frac{1-0,8011246}{3,5111294} + 0,005 = 0,061641,$

resultado idéntico al obtenido en el ejemplo anterior.

■ Valoración de un *swap* de divisas.

Se supondrá un *swap* de divisas fijo contra variable. Poner precio a un *swap* en el origen, normalmente, supone encontrar el tipo de interés fijo tal que el valor actual neto de los dos flujos de intereses sea nulo. Por otro lado, valorar un *swap* en un momento posterior, t , implica encontrar el valor actual neto de un *swap* ya existente, y en el que el tipo de interés fijo ya se ha determinado en el momento de contratarlo.

Para determinar el precio en el origen del *swap* fijo contra variable se deberá tener en cuenta:

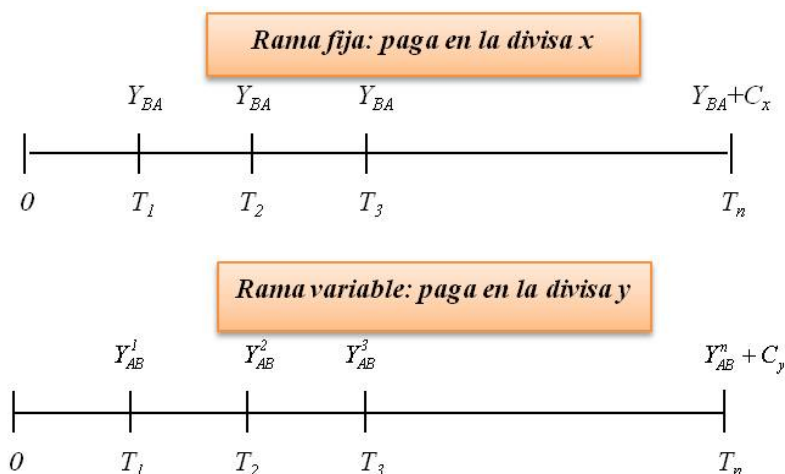
- La Estructura Temporal de Tipos de Interés (*E.T.T.I.*) vigente en el momento de la valoración para cada una de las divisas que intervienen.
- Que cualquier capital futuro se podrá actualizar utilizando los factores de descuento asociados a la *E.T.T.I.* de su respectiva divisa.

- Los tipos de interés *forward* para determinar los pagos de la rama que paga tipo variable. Si se conoce la E.T.T.I. para esa divisa se podrán calcular los tipos de interés *forward* a aplicar en cada una de las fechas efectivas del *swap*; de esta forma, se podrán estimar anticipadamente los pagos a tipo variable⁷⁸.
- El tipo de cambio que pactan en el origen para realizar el intercambio de los Nacionales respectivos, $d_{x/y}$.
- Que un *swap* es una serie de flujos monetarios a cobrar o pagar.

Aunque existen diversos modelos de valoración de *swap*, el método más utilizado por los analistas financieros se basa en la valoración financiera mediante los tipos de interés cupón cero del mercado. Consiste en:

- ◆ Identificar los flujos futuros de las dos ramas del *swap*.
- ◆ Actualizar los flujos futuros utilizando los tipos de interés de mercado; es decir, utilizando la E.T.T.I. para cada una de las dos divisas.
- ◆ El valor actual de la rama a tipo variable deberá ser igual al valor actual de la rama a tipo fijo, aplicando el tipo de cambio pactado en el origen.

El precio del *swap* será el tanto de interés fijo que haga que el valor actual de las dos ramas coincida. Consideremos el siguiente esquema que recoge los flujos futuros de cada rama del *swap*:



donde, $Y_{BA} = C_x \cdot I_{BA}^x$ e $Y_{AB}^r = C_y \cdot I_{AB}^{y^r} = C_y \cdot \left({}_{T_{r-1}}f_p^y + \Delta I^y \right)$.

Siendo I_{BA}^x el tanto de interés fijo del swap que la empresa B pagará a la empresa A, $I_{AB}^{y^r}$ el tanto de interés variable del swap (normalmente el LIBOR a 6 meses para la divisa correspondiente más un marginal fijo) que la empresa A pagará a la B, ${}_{T_{r-1}}f_p^y$ es tipo de interés *forward* a aplicar en la fecha efectiva T_{r-1} y para un plazo igual al periodo de devengo de intereses del swap

Sean $\{I^x(T_1), I^x(T_2), \dots, I^x(T_n)\}$ la Estructura Temporal de Tipos de Interés para la divisa x y $\{I^y(T_1), I^y(T_2), \dots, I^y(T_n)\}$ la Estructura Temporal de Tipos de Interés para la divisa y . Sea $v^y(T_r) = (1 + I^y(T_r))^{-T_r}$ el factor de descuento asociado a la curva de tipos de interés de la divisa y ,

⁷⁸ El tanto efectivo de interés a pagar por la rama variable será: $I_{BA}^{y^r} = {}_{T_{r-1}}f_p^y + \Delta I^y$

$v^x(T_r) = (1 + I^x(T_r))^{-T_r}$ el factor de descuento asociado a la curva de tipos de interés de la divisa x, entonces el valor actual de los pagos a tipo variable será:

$$V^y_{rama\ variable} = \sum_{r=1}^n Y_{AB}^r \cdot v^y(T_r) + C_y \cdot v^y(T_n) = \sum_{r=1}^n C_y \cdot \left({}_{T_{r-1}}f_p^y + \Delta I^y \right) \cdot v^y(T_r) + C_y \cdot v^y(T_n),$$

y el valor actual de los pagos a tipo fijo será:

$$V^x_{rama\ fija} = \sum_{r=1}^n Y_{BA} \cdot v^x(T_r) + C_x \cdot v^x(T_n) = \sum_{r=1}^n C_x \cdot I_{BA}^x \cdot v^x(T_r) + C_x \cdot v^x(T_n).$$

El precio del swap será aquel valor de I_{BA}^x que verifique la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=1}^n C_y \cdot \left({}_{T_{r-1}}f_p^y + \Delta I^y \right) \cdot v^y(T_r) + C_y \cdot v^y(T_n) \approx \sum_{r=1}^n C_x \cdot I_{BA}^x \cdot v^x(T_r) + C_x \cdot v^x(T_n)$$

expresando ambas valoraciones en la misma divisa, $C_x = C_y \cdot d_{x/y}$:

$$\sum_{r=1}^n \left({}_{T_{r-1}}f_p^y + \Delta I^y \right) \cdot v^y(T_r) + v^y(T_n) \approx d_{x/y} \cdot \sum_{r=1}^n I_{BA}^x \cdot v^x(T_r) + d_{x/y} \cdot v^x(T_n)$$

$$I_{BA}^x = \frac{\sum_{r=1}^n \left({}_{T_{r-1}}f_p^y + \Delta I^y \right) \cdot v^y(T_r) + v^y(T_n) - d_{x/y} \cdot v^x(T_n)}{d_{x/y} \cdot \sum_{r=1}^n v^x(T_r)} = \frac{1 + \Delta I^y \cdot \sum_{r=1}^n v^y(T_r) - d_{x/y} \cdot v^x(T_n)}{d_{x/y} \cdot \sum_{r=1}^n v^x(T_r)} \quad 79$$

Ejemplo 151: Dos empresas desean realizar un swap de divisas \$/€ 5 años sobre 100.000 € y tomado como tipo de cambio 1.11 €/\$. El swap a pactar será fijo en € contra el \$LIBOR a 1 año + 30 p.b., siendo los pagos anuales y la base de cómputo del tiempo 30/360.

Hoy, los tipos de interés para el \$LIBOR a 1 año y para el € son los siguientes:

Plazo	ETTI €	ETTI \$
1	0,021831903	0,060026768
2	0,021939722	0,060171168
3	0,022396165	0,060498748
4	0,022940016	0,061352358
5	0,022974911	0,061594992
6	0,022977674	0,061805292

además, $C_x = 100.000 €$ y $C_y = \frac{100.000}{1.11} = 90.090,09 \$$ al ser $d_{€/ \$} = 1.11$

Como el swap es de márgenes se deberá determinar el tanto variable de la rema que paga variable en dólares, para ello, se deberá determinar el tipo forward a 1 año a partir de su ETTI y agregarle el marginal de 30 p.b.

⁷⁹ Teniendo en cuenta que $\sum_{r=1}^n \left({}_{T_{r-1}}f_p^y \right) \cdot v^y(T_r) + v^y(T_n) = 1$

<i>Fecha de fijación</i>	<i>Forward a 1 año</i>	<i>Tanto variable</i>
<i>0</i>	0.06002677	0.063026768
<i>1</i>	0.06031559	0.063315587
<i>2</i>	0.06115421	0.064154214
<i>3</i>	0.06391731	0.06691731
<i>4</i>	0.06256609	0.065566086

Los factores de actualización de los dos conjuntos de pagos, para cada divisa son:

<i>Plazo</i>	<i>Factor de actualización para el €</i>	<i>Factor de actualización para el \$</i>
<i>1</i>	0.978634546	0.943372404
<i>2</i>	0.957523495	0.889709078
<i>3</i>	0.935712356	0.838435231
<i>4</i>	0.913270288	0.788064282
<i>5</i>	0.892637418	0.741661429

El precio del swap, o tipo fijo a pagar anualmente durante los cinco años será:

$$I_{BA}^€ = \frac{1 + 0,3\% \cdot \sum_{r=1}^5 v^y(T_r) - 1,11 \cdot v^x(T_n)}{1,11 \cdot \sum_{r=1}^n v^x(T_r)} = 0,41939125\%$$

14 EJERCICIOS.

Ejercicio 1: Una entidad bancaria oferta una cuenta depósito a plazo de un año con las condiciones financieras siguientes:

- Franquicia de 200 u.m.

- El interés anual que devenga la cuenta se calcula por tramos⁸⁰ siendo la escala:

- o Hasta 1000 de u.m. el 4% nominal.
- o de 1001 a 5000 de u.m. el 5% nominal.
- o más de 5000000 de u.m. el 6% nominal.

Calcular la T.A.E. de dicha cuenta para imposiciones de 700, 4000 y 8000 de u.m.

SOLUCIÓN:

Para cada imposición se calculará el capital obtenido al cabo del año; para ello, se deberá desglosar la imposición en cuantías que respeten los tramos para el cálculo de los intereses, así, tendremos:

Imposición	Cuantías desglosadas	interés a aplicar
700	{ 200, 500 }	{ 0%, 4% }
4000	{ 200, 800, 3000 }	{ 0 %, 4%, 5% }
8000	{ 200, 800, 40000, 3000 }	{ 0%, 4%, 5%, 6% }

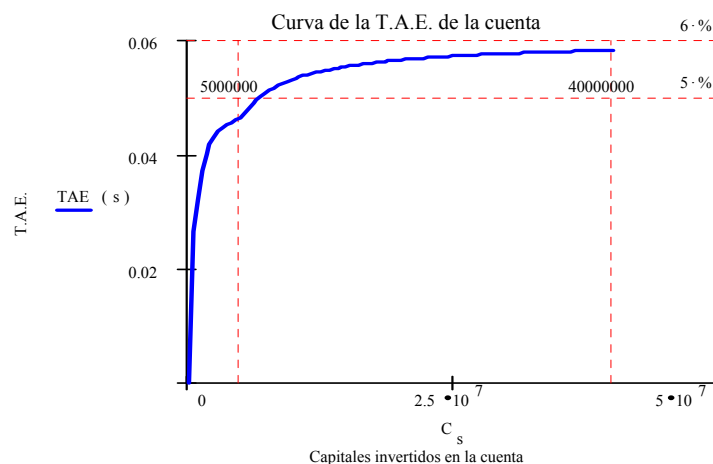
Al final del año cada capital habrá proporcionado el capital siguiente:

Imposición	Intereses	Montante
700	0 + 20	720
4000	0 + 32 + 150	4182
8000	0 + 32 + 200 + 180	8412

La T.A.E. se obtendrá a partir de la ecuación $C \cdot (1 + TAE) = C'$, dando como resultado para cada capital:

Capital impuesto	T.A.E.
700	0,02857143
4000	0,0455
8000	0,0515

Como puede observarse, el Tanto Anual está muy influenciado por la franquicia inicial, siendo la curva para capitales entre 200.000 y 50 millones de u.m. la siguiente:



Ejercicio 2: Una empresa residente en una localidad X⁸¹ abrió el día 1-8-A una cuenta corriente en un banco con una imposición inicial de 1 millón de u.m. Las condiciones de la cuenta son las siguientes:

⁸⁰ Un tipo de interés definido a tramos quiere decir p.e. que del importe del depósito de 2000 u.m., las 200 u.m. primeras no tienen intereses, las 800 u.m. siguientes tienen un interés del 4% y las 1000 u.m. últimas tienen un interés del 5%.

-Interés para saldos positivos: el interés se aplicará por tramos según el saldo medio a favor del cuentacorrentista, siendo la escala a aplicar por tramos:

Tramo	Interés nominal en %
0 a 100.000	0,1
100.001 a 250.000	0,995
250.001 a 350.000	3,445
350.001 a 500.000	4,410
500.001 a 600.000	4,889
600.001 a 700.000	5,128
700.001 a 800.000	5,366
800.001 a 900.000	5,604
900.001 a 1.000.000	5,841
1.000.001 a 3.000.000	6,314
3.000.001 a 10.000.000	6,785
10.000.001 a 25.000.000	7,019
25.000.001 a 50.000.000	7,487
más de 50 millones	7,720

- Interés para saldos negativos: 20,464% nominal, utilizando el método hamburgués.

- Interés para excedidos en crédito: el 25% nominal, utilizando el método hamburgués.

- El límite de la póliza de crédito negociado es de 3 millones de u.m.

La liquidación de intereses se efectuará el último día de cada mes.

- Gastos y comisiones:

- Comisión de mantenimiento: 100 u.m./mes o fracción de mes, cuando el saldo medio sea inferior a 30.000 u.m.

- Comisión de administración: 25 u.m./ apunte, quedando exentos los 3 primeros apuntes.

- Comisión de disponibilidad: 5 por mil sobre el saldo medio no dispuesto de la póliza de crédito.

- Comisión por descubierto en cuenta y excedidos en cuenta de crédito: 2 por mil mensual sobre el mayor saldo deudor del trimestre.

Los movimientos de la cuenta realizados hasta el día de hoy, 30-9-A, han sido:

El día 4-8-A, descuento de una remesa de efectos que vencen el 15-12-A, nominal 400.000 u.m., descuento comercial al 15% nominal y gastos del descuento del 4 por mil sobre el nominal.

El día 5-8-A, transferencia por correo a Ceuta de 900.000 u.m. y que llegó a destino 4 días más tarde.

El día 11-8-A, orden de compra de 500 acciones de la sociedad A de nominal 500 u.m./acción al cambio de 1.350 u.m./acción. Gastos de compra-venta del 5 por mil sobre el valor nominal (mínimo 1.000 u.m.). La compra se realizó el día 12-8-A.

El día 16-8-A, devolución de un efecto comercial de nominal 120.000 u.m. y vto.

El día 9-8-A. Comisión de devolución del 50 por mil, mínimo 1.250 u.m.

El día 26-8-A, ingreso en efectivo de 120.000 u.m., realizado a las 14 horas.

⁸¹ Es importante la ubicación de la entidad bancaria y conocer los días no laborables de esa entidad ya que afecta a la fecha valor y como consecuencia al cálculo de los intereses.

El día 30-8-A, orden de pago de nóminas por un total de 3.500.000 u.m., comisión del 0,2 por mil.

El día 4-9-A, descuento de una remesa de efectos comerciales con vencimiento el día 20-12-A y nominal de 2.500.000 u.m., siendo las condiciones del descuento las mismas del mes de agosto.

El día 9-9-A, ingreso de un cheque de 500.000 u.m. de una entidad distinta.

El día 16-9-A, ingreso de 100.000 u.m. en efectivo a las 9 de la mañana.

El día 23-9-A, orden de venta de 100 acciones de la sociedad B, de nominal 500 u.m., al cambio de 1.550 u.m., formalizándose la venta el día 25-9-95. Las comisiones de compra-venta son las mismas que las del mes de agosto.

El día 29-9-A, orden de pago de nóminas por un total de 3.500.000 u.m. Se mantienen las mismas comisiones por este concepto.

SOLUCIÓN:

La primera observación que debe tenerse en cuenta es la fecha valor de los distintos apuntes, teniendo en cuenta que día laborable para una entidad de crédito es aquel en que sus empleados trabajan en la localidad.

Los importes de los distintos movimientos de la cuenta y su fecha valor han sido.

Agosto				números	números	números	Saldo
Fecha Valor	Apunte	Saldo	Días	negros	rojos	excedidos	no dispuesto
1-8	1000000	1000000	3	3000000			3000000
4-8	376701	1376701	5	6883506			3000000
9-8	-900000	476701	0				3000000
9-8	-126000	350701	3	1052104			3000000
12-8	-676250	-325548	16		5208778		2674452
28-8	120000	-205548	2		411097		2794452
30-8	-3500700	-3706248	1		3000000	706248	
Comisiones	-21075						
Intereses	-4858						
Saldo 31-8		-3732182					

Las comisiones que se devengan el mes de agosto son:

- Comisiones de mantenimiento:

0 al ser el saldo medio de 53.649,57, superior a 30.000 u.m.

- Comisiones de disponibilidad:

El saldo medio no dispuesto de la póliza de crédito asciende a 2.712.670,82 u.m., siendo las comisiones de

$$2.712.670,82 \cdot \frac{5}{1000} = 13.563 \text{ u.m.}$$

- Comisiones por descubierto: sobre el mayor saldo descubierto, $3.706.248,63 \cdot \frac{2}{1000} = 7.412 \text{ u.m.}$

- Comisiones por apunte: $(7-3) \cdot 25 = 100 \text{ u.m.}$ El total de comisiones asciende a 21.075 u.m.

Los intereses devengados a favor del cuentacorrentista durante el mes se computarán por el saldo medio para los saldos positivos ya que el tanto de interés a aplicar depende del saldo al estar definido por tramos.

Saldo medio positivo: 364.520,37

Con la siguiente distribución, $364.520,37 = 100.000 + 150.000 + 100.000 + 14.520,37$.

Se aplicará la escala de intereses, ascendiendo estos a 458,45 u.m.

Los intereses a favor del banco, incluidos los excedidos en crédito, ascienden a $4.832,45 + 483,73$

El total de intereses devengados en los 30 días del mes de agosto son contra el cuentacorrentista y ascienden a 4.858 u.m.

Septiembre				números	números	números	Saldo
Fecha Valor	Apunte	Saldo	Días	negativos	rojos	excedidos	no dispuesto
31- 8		-3732182	4		12000000	2928730	
4- 9	2381096	-1351086	9		12159780		1648914
13- 9	500000	-851086	3		2553260		2148914
16- 9	100000	-751086	10		7510866		2248914
26- 9	154000	-597086	3		1791260		2402914
29- 9	-3500700	-4097786	1		3000000	1097786	
Comisiones	-16918						
Intereses	-24632						
Saldo 30-9		-4139336					

Las comisiones que se devengan en el mes de septiembre son:

Comisiones de mantenimiento: 100 u.m. al ser el saldo medio de $-1.434.722,79 < 30.000$ u.m.

Comisiones de disponibilidad: el saldo medio no dispuesto de la póliza de crédito asciende a 1.699.494,44 u.m., siendo las comisiones de

$$1.699.494,44 \cdot \frac{5}{1000} = 8.497,47 \text{ u.m.}$$

Comisiones por descuento: sobre el mayor saldo negativo, $4.097.786,67 \cdot \frac{2}{1000} = 8.195,57 \text{ u.m.}$

Comisiones por apunte: $5 \cdot 25 = 125 \text{ u.m.}$

El total de comisiones asciende a 16.918 u.m.

Los intereses devengados a favor del cuentacorrentista durante el mes se computarán por el saldo medio para los saldos positivos.

Saldo medio positivo: no hay saldo a favor del cuentacorrentista.

Los intereses a favor del banco, incluidos los excedidos en crédito, ascienden a $21.874,15 + 2.757,89 \text{ u.m.}$ El total de intereses devengados en los 30 días del mes de septiembre son contra el cuentacorrentista y ascienden a 24.632 u.m.

El saldo a 30 de septiembre será de $-4.139.336 \text{ u.m.}$

Ejercicio 3: Hace 3 años un partícipe adquirió 200 participaciones de un FIM, a 30 euros / participación, siendo los gastos de suscripción del 0,5%.

El patrimonio del Fondo está hoy, día 23-6-A, invertido en los siguientes activos:

- 10.000 Bonos de la Sociedad X: nominal de 500 euros / bono, cupón anual del 5,4%, amortización el día 15-7-(A+2) y próximo cupón el día 15-7-A. Dichos bonos no cotizan.

- 20.000 bonos del Tesoro, cupón anual del 4%, nominal de 1.000 euros / bono, amortización el día 30-5-(A+3) por el nominal, próximo cupón el día 30-5-(A+1), cotización "ex cupón" el día 23-6-A al 102%.
- Letras del Tesoro a un año, adquiridas al 96% en la subasta del día 15-3-A.
- 20.000 Letras del Tesoro a 6 meses, adquiridas en la subasta del día 20-4-A al 98%.

El Balance de situación hoy 23-6-A es:

ACTIVO	Importe	PASIVO	Importe
Inmovilizado	200.000	Acreedores	150.000
Deudores	100.000		
Cartera de inversión			
Tesorería	3% del Patrimonio Neto		

Las comisiones de la Sociedad Gestora son del 1% anual del Patrimonio Neto y las de la Depositaria del 0,5 por mil del Nominal custodiado de la Cartera de Inversión.

Si el fondo tiene hoy 1 millón de participaciones, el tanto de interés de mercado es el 3% y los gastos de reembolso son del 1%, determinar la rentabilidad obtenida por el partícipe si hoy liquida su participación en el Fondo.

SOLUCIÓN:

Se determinará el valor de la cartera del Fondo a precios de mercado y atendiendo a la normativa vigente:

- Bonos de la Sociedad X.

Los bonos no cotizan y tienen un plazo de vida superior a 6 meses, luego el valor será el valor financiero, es

decir, $P_{sx} = \left(27 \cdot a_{\overline{3}|0,03} + 500 \cdot (1 + 0,03)^{-3} \right) \cdot (1 + 0,03)^{\frac{343}{365}} = 548,98 \text{ €/bono.}$

- Bonos del Tesoro.

Los bonos cotizan y tienen un plazo superior a 6 meses, luego el precio será la cotización más el cupón

corrido, $P_{BT} = 1.000 \cdot 1,02 + 40 \cdot \frac{24}{365} = 1.022,63 \text{ €/bono.}$

- Letras del Tesoro a 1 año.

Como el vencimiento de las letras está entre 6 meses y un año, y al ser un activo del mercado monetario, aplicaremos el mismo criterio que para los activos con vencimiento no superior a 6 meses. El precio de las Letras a un año será el precio de adquisición con los intereses acumulados a la TIR a precio de adquisición.

La TIR se obtendrá a partir de la siguiente igualdad: $960 \cdot (1 + TIR)^{\frac{365}{360}} = 1.000$, siendo $TIR = 0,0410959$

El valor de la Letra será: $P_{LT1 \text{ año}} = 960 \cdot (1 + 0,0410959) \cdot \frac{100}{360} = 970,96 \text{ €/Letra.}$

- Letras del Tesoro a 6 meses.

El criterio de valoración será el mismo que para las Letras a 1 año.

La TIR será:

$$TIR = \left(\frac{1.000}{980} - 1 \right) \cdot \frac{360}{183} = 0,0401472,$$

luego: $P_{LT6 \text{ meses}} = 980 \cdot (1 + 0,0401472) \cdot \frac{64}{360} = 986,99 \text{ €/Letra.}$

El Valor de la Cartera del Fondo ascenderá a:

Precio	N. Títulos	Valor
548,98	10.000	5.489.800
1.022,63	20.000	20.452.600
970,96	1.000	970.960
986,99	20.000	19.739.800
Valor Total: 46.653.160 euros		

Para hallar el valor liquidativo de la participación es necesario conocer el Patrimonio Neto:

$$\text{Patrimonio neto} = \frac{\text{Inmovilizado} + \text{Deudores} + \text{Cartera} - \text{Acreedores}}{1 - 0,03} = 48.250.680.412,37 \text{ €}$$

El Valor Liquidativo de la participación, deduciendo las comisiones de la Gestora y la Depositaria, será ⁸²:

$$\begin{aligned} \text{Valor Liquidativo} &= \frac{48.250.680.412,37 \cdot (1 - 0,01) - 46.000.000 \cdot 0,0005}{1.000.000} = \\ &= 43,40 \text{ € / participación.} \end{aligned}$$

La rentabilidad obtenida por el partícipe dependerá de la inversión hace 3 años y el dinero que obtiene hoy con el reembolso de las participaciones.

$$\begin{array}{ccc} 30 \cdot 200 \cdot (1+0,005) = 6.030 & & 47,74 \cdot 200 \cdot (1-0,01) = 8.593,71 \\ \hline 23-6-A-3 & & 23-6-A \end{array}$$

El tanto efectivo anual al que le ha resultado la inversión será: $I_1 = \left(\frac{8.593,71}{6.030} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,1253$.

Ejercicio 4: Del Fondo del ejercicio anterior, calcular la TIR de la cartera al valor del día 23-6-A, Duration, Sensibilidad y Convexidad para una variación del tipo de interés de 0,5 puntos respecto a la TIR de la cartera.

SOLUCIÓN:

Para ello se deberán conocer los cobros a obtener en el futuro por cada uno de los activos de la cartera ordenados por vencimientos

fecha cobros	cuantías	diferimientos
15/07/A	270000	0,060274
20/10/A	20000000	0,3260274
15/03/A+1	1000000	0,7287671
30/05/A+1	800000	0,9369863
15/07/A+1	270000	1,0630137
30/05/A+2	800000	1,9369863
15/07/A+2	5270000	2,0630137
30/05/A+3	20800000	2,9369863

⁸² En este ejercicio se supone que la fecha valor para la aplicación de las comisiones es el 23-6 de cada año, por lo que la comisión se descuenta completa.

La TIR de la cartera se obtendrá a través de la ecuación financiera que iguala el valor de la cartera del Fondo el 23-6-A y el valor de los cobros futuros en esa fecha; es decir,

$$46.653.160 = \sum_{r=1}^8 C_r \cdot (1 + TIR)^{-T_r} \Rightarrow TIR = 0,03310.$$

La duración de la cartera será:

$$D = \frac{\sum_{r=1}^8 C_r \cdot T_r \cdot (1 + 0,03310)^{-T_r}}{46.651.990} = 1,615 \text{ años.}$$

La Sensibilidad y la Convexidad serán:

$$S = \frac{-D}{1 + TIR} = \frac{-1,614}{1 + 0,03310} = -1,5627.$$

$$C = \frac{\sum_{r=1}^8 C_r \cdot T_r \cdot (T_r + 1) \cdot (1 + 0,03310)^{-T_r}}{46.653.160} \cdot \frac{1}{(1 + 0,03310)^2} \cdot \frac{1}{2} = 2,6687.$$

El valor de la cartera ante una subida de medio punto del tipo de interés de mercado respecto a la TIR experimentará una pérdida aproximada de:

$$\text{Variación valor} = 46.653.160 \left(-1,5627 \cdot 0,5\% + 0,026687 \cdot (0,5\%)^2 \right) = -361.412€$$

Con lo que el valor de la cartera caerá a 46.291.748 €.

Ejercicio 5: Del Fondo del Ejercicio anterior, obtener la rentabilidad final en el plazo de inmunización financiera, un año antes y un año después, si el tanto de mercado está medio punto por encima de la TIR de la cartera.

SOLUCIÓN:

El plazo de inmunización financiera para este fondo, con la cartera de valores configurada el 23-6-A, será la duración a la TIR obtenida. Luego, la Tasa de Rendimiento Realizada será el tanto de interés anual que verifique la siguiente igualdad:

$$46.653.160 \cdot (1 + R)^{1,615} = \sum_{r=1}^8 C_r \cdot (1 + TIR + 0,5\%)^{1,615 - T_r} \rightarrow R = 0,0331105 \sim TIR.$$

Para un periodo planificador de $T = D - 1$ y $T = D + 1$, tendremos que:

$$46.653.160 \cdot (1 + R)^{0,615} = \sum_{r=1}^8 C_r \cdot (1 + TIR + 0,5\%)^{0,615 - T_r} \rightarrow R = 0,0250431 < TIR$$

$$46.653.160 \cdot (1 + R)^{2,615} = \sum_{r=1}^8 C_r \cdot (1 + TIR + 0,5\%)^{2,615 - T_r} \rightarrow R = 0,0350158 > TIR.$$

Resultado que pone de manifiesto que, si el tanto de interés de mercado es superior a la TIR inicial, la rentabilidad final será menor que la TIR si se desinvierte antes del plazo de inmunización financiera y será mayor que la TIR cuando la inversión se mantenga durante un plazo superior a la duración.

Ejercicio 6: En el mercado continuo se ha obtenido la serie histórica de un año de la compañía Iberdrola y del IBEX35. A partir de esa serie se ha obtenido la rentabilidad semanal tanto de la compañía como del índice, para obtener después la rentabilidad anualizada. Los datos obtenidos reflejan en la siguiente tabla:

Fecha	IBEX35 Cierre	IBERDROLA Cierre				
12/01/2009	9.199,90	6,17	RENDIMIENTO DEL IBEX Y DE IBERDROLA			
13/01/2009	9.057,30	6,21	IBEX35	IBERDROLA	IBEX 35	IBERDROLA
14/01/2009	8.692,70	5,94	SEMANAL	SEMANAL	ANUALIZADO	ANUALIZADO
15/01/2009	8.611,10	5,92				
16/01/2009	8.620,10	5,93	-6,302242%	-3,889789%	-316,372569%	-195,267423%
19/01/2009	8.494,80	5,97	-6,210460%	-3,864734%	-311,765096%	-194,009662%
20/01/2009	8.276,50	6,09	-4,787926%	2,525253%	-240,353860%	126,767677%
21/01/2009	8.230,70	6	-4,417554%	1,351351%	-221,761215%	67,837838%
22/01/2009	8.159,30	6,01	-5,345646%	1,349073%	-268,351411%	67,723440%
23/01/2009	8.172,80	6,1	-3,790554%	2,177554%	-190,285822%	109,313233%
26/01/2009	8.375,20	6,15	1,192533%	0,985222%	59,865160%	49,458128%
27/01/2009	8.349,50	6,15	1,443377%	2,500000%	72,457507%	125,500000%
28/01/2009	8.701,50	6,24	6,645178%	3,826955%	333,587930%	192,113145%

La información adicional que se debe conocer para poder calcular el PER teórico a partir de la información de Bolsa es el tanto de interés exento de riesgo vigente el 12-1-2009. Se tomó el Euribor a 1 año, que ascendía al 0,362%⁸³.

El proceso para obtener el PER teórico es:

- Obtener la pendiente de la recta de regresión de la rentabilidad de la acción respecto a la rentabilidad del índice. En Excel la instrucción es =PENDIENTE(G7:G255;F7:F255). El valor de la pendiente es $\beta = 0,865297585$.
- Obtener la rentabilidad media tanto de la acción como del índice. La instrucción en Excel es PROMEDIO(F7:F255). La rentabilidad media del índice es $\bar{R}_{\text{Índice}} = 27,947957\%$.
- La prima de riesgo de Iberdrola obtenida a partir de la prima de riesgo del mercado es $\Delta I_1 = \beta (\bar{R}_{\text{Índice}} - r) = 0,86527585 \cdot (0,27947957 - 0,00362) = 23,870\%$.
- El tanto de rentabilidad anual de la empresa obtenido a partir de los precios en Bolsa es $I_1 = r + \Delta I_1 = 0,0362\% + 23,87\% = 24,232\%$.
- El PER teórico será $PER_{\text{teórico}} = \frac{1}{I_1 - g} = \frac{1}{24,232\% - 2\%} = 4,106$, si se considera que la tasa media de crecimiento de los beneficios de la empresa es el 2%.

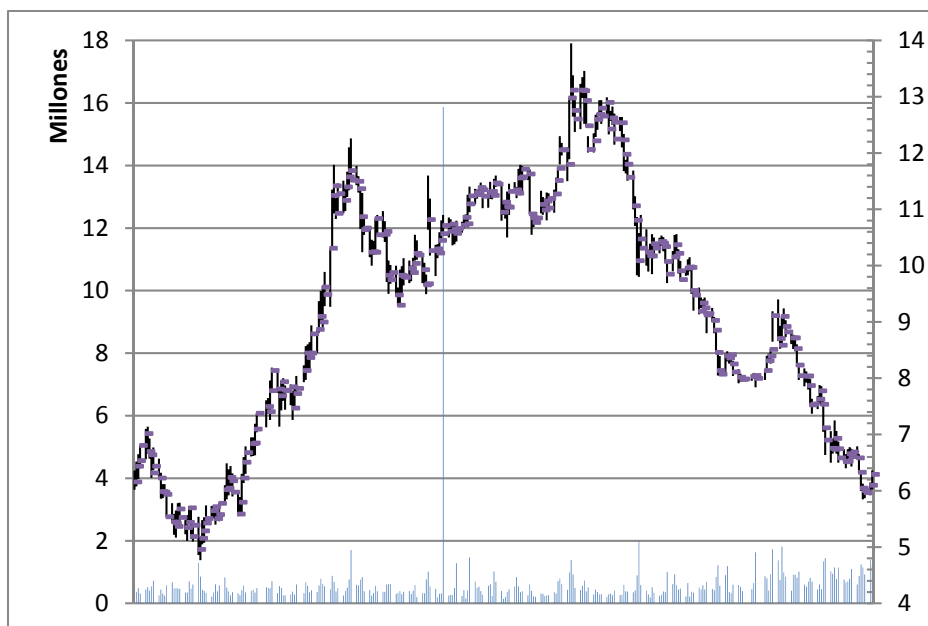
Ejercicio 7: Seleccionar una acción que cotice en el mercado continuo, obtener las serie histórica como mínimo de un año y obtener y graficar los indicadores más relevantes del análisis técnico.

Se ha seleccionado la información de la compañía Sacyr:

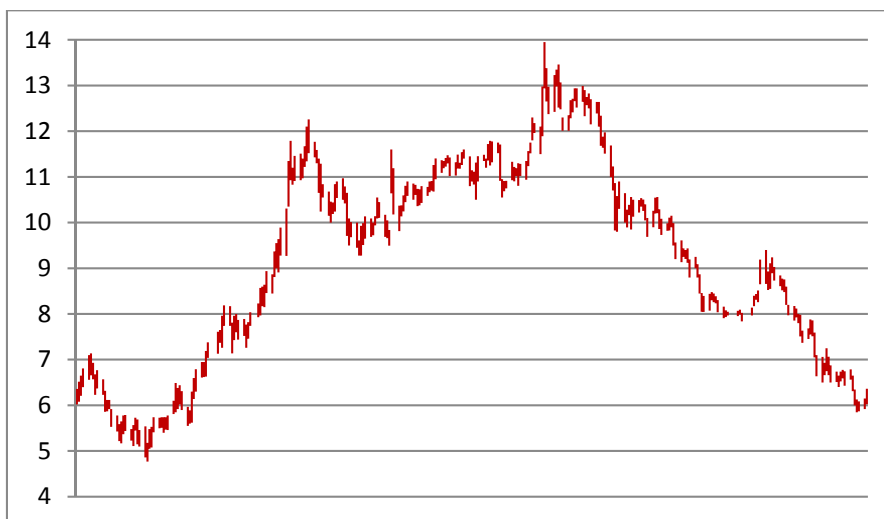
⁸³ La información histórica del Euribor se puede obtener a partir de la página www.bde.es.

Nombre	Mercado	Ticker	ISIN			
SACYR VALLEHERMOSO	Mercado Continuo	SYV	ES0182870214			
Fecha	Cierre	Referencia	Volumen	Efectivo	Último	Máximo
03/02/2009	6,16	6,17	572.218	3.508.538,71	6,16	6,36
04/02/2009	6,44	6,16	372.898	2.360.422,63	6,44	6,52
05/02/2009	6,54	6,44	489.675	3.168.027,30	6,54	6,65
06/02/2009	6,81	6,54	313.193	2.093.910,43	6,81	6,81
09/02/2009	7,02	6,81	440.953	3.068.372,77	7,02	7,1
10/02/2009	6,7	7,02	520.647	3.588.870,80	6,7	7,14
11/02/2009	6,64	6,7	405.760	2.712.212,39	6,64	6,93
12/02/2009	6,32	6,64	549.779	3.505.197,21	6,32	6,68
13/02/2009	6,44	6,32	724.330	4.759.977,33	6,44	6,77
16/02/2009	6,23	6,44	260.499	1.647.852,67	6,23	6,57
17/02/2009	5,99	6,23	440.299	2.655.514,76	5,99	6,32
18/02/2009	5,98	5,99	312.004	1.867.544,47	5,98	6,12
19/02/2009	5,94	5,98	245.439	1.475.665,40	5,94	6,12
20/02/2009	5,54	5,94	573.928	3.253.303,37	5,54	5,92
23/02/2009	5,45	5,54	678.376	3.809.009,62	5,45	5,78
24/02/2009	5,43	5,45	480.332	2.584.254,22	5,43	5,59
25/02/2009	5,37	5,43	488.336	2.621.200,70	5,37	5,65
26/02/2009	5,68	5,37	480.807	2.694.703,44	5,68	5,78
27/02/2009	5,53	5,68	469.394	2.619.808,10	5,53	5,79
02/03/2009	5,35	5,53	347.520	1.858.787,05	5,35	5,48
03/03/2009	5,44	5,35	348.346	1.861.929,27	5,44	5,57
04/03/2009	5,7	5,44	701.151	3.942.606,74	5,7	5,73
05/03/2009	5,19	5,7	467.735	2.470.999,60	5,19	5,69

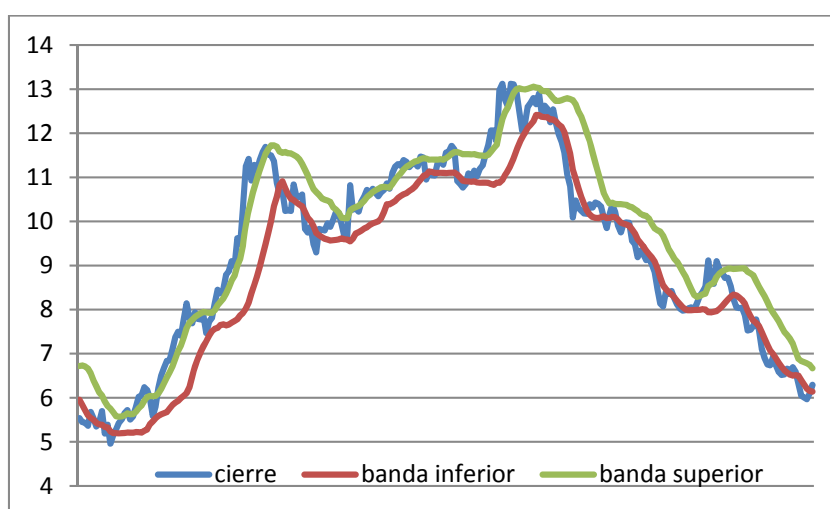
● Gráfico de cotizaciones y volúmenes.



● Amplitud auténtica: Diferencia entre máximo y mínimo del día. Si la distancia es grande indica una volatilidad alta ese día.



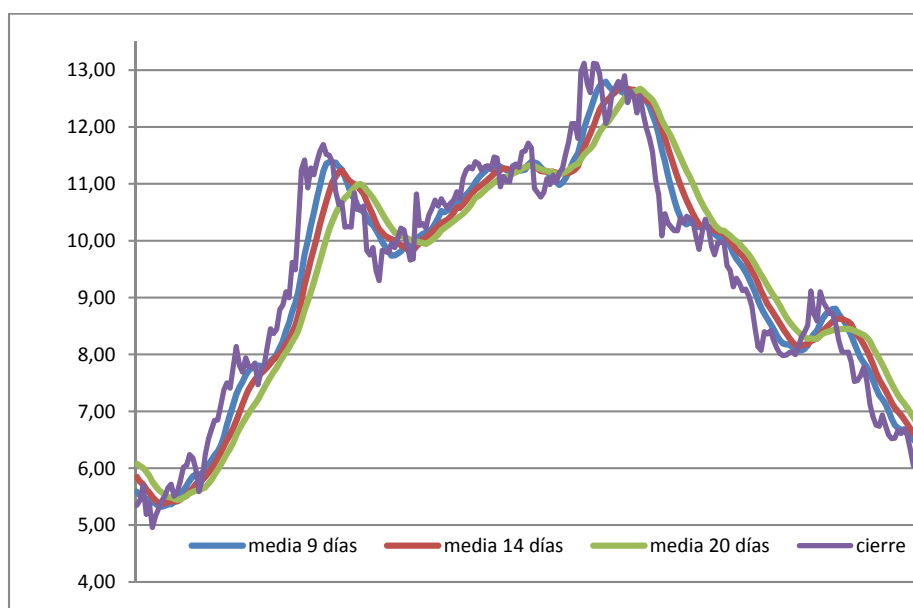
● *Envoltentes: Bandas de Bollinger con un periodo de observación de 14 días.*



Fecha	Cierre	Volumen	Máximo	Mínimo	Medio				
03/02/2009	6,16	572.218	6,36	6,02	6,13				
04/02/2009	6,44	372.898	6,52	6,08	6,33				
05/02/2009	6,54	489.675	6,65	6,21	6,47				
06/02/2009	6,81	313.193	6,81	6,4	6,69				
09/02/2009	7,02	440.953	7,1	6,56	6,96				
10/02/2009	6,7	520.647	7,14	6,66	6,89				
11/02/2009	6,64	405.760	6,93	6,57	6,7				
12/02/2009	6,32	549.779	6,68	6,23	6,38				
13/02/2009	6,44	724.330	6,77	6,37	6,57				
16/02/2009	6,23	260.499	6,57	6,23	6,33				
17/02/2009	5,99	440.299	6,32	5,86	6,03				
18/02/2009	5,98	312.004	6,12	5,87	5,99				
19/02/2009	5,94	245.439	6,12	5,92	6,01	media de 14 días	des. Estándar	banda inferior	banda superior
20/02/2009	5,54	573.928	5,92	5,53	5,67	6,34	0,38	5,96	6,72
23/02/2009	5,45	678.376	5,78	5,43	5,6	6,29	0,45	5,84	6,73
24/02/2009	5,43	480.332	5,59	5,22	5,38	6,22	0,49	5,72	6,71
25/02/2009	5,37	488.336	5,65	5,17	5,37	6,13	0,53	5,60	6,66
26/02/2009	5,68	480.807	5,78	5,37	5,6	6,05	0,51	5,55	6,56
27/02/2009	5,53	469.394	5,79	5,44	5,58	5,95	0,44	5,50	6,39
02/03/2009	5,35	347.520	5,48	5,23	5,34	5,85	0,42	5,43	6,27
03/03/2009	5,44	348.346	5,57	5,11	5,35	5,76	0,37	5,40	6,13
04/03/2009	5,7	701.151	5,73	5,45	5,62	5,72	0,33	5,39	6,05
05/03/2009	5,19	467.735	5,69	5,15	5,28	5,63	0,29	5,34	5,92
06/03/2009	5,39	604.275	5,46	5,1	5,31	5,57	0,24	5,33	5,81

● *Medias móviles a 9, 14 y 20 días.*

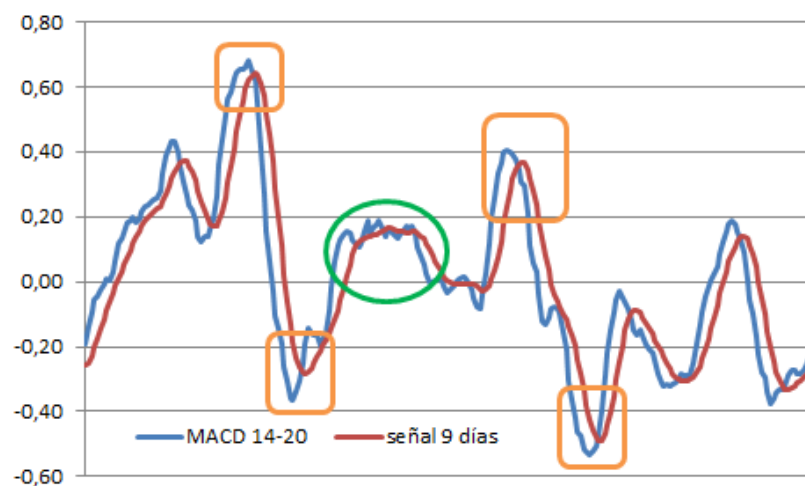
Fecha	Cierre			
03/02/2009	6,16			
04/02/2009	6,44			
05/02/2009	6,54			
06/02/2009	6,81			
09/02/2009	7,02			
10/02/2009	6,7			
11/02/2009	6,64			
12/02/2009	6,32	media 9 días		
13/02/2009	6,44	6,56		
16/02/2009	6,23	6,57		
17/02/2009	5,99	6,52		
18/02/2009	5,98	6,46		
19/02/2009	5,94	6,36	media 14 días	
20/02/2009	5,54	6,20	6,34	
23/02/2009	5,45	6,06	6,29	
24/02/2009	5,43	5,92	6,22	
25/02/2009	5,37	5,82	6,13	
26/02/2009	5,68	5,73	6,05	
27/02/2009	5,53	5,66	5,95	media 20 días
02/03/2009	5,35	5,59	5,85	6,08
03/03/2009	5,44	5,53	5,76	6,04
04/03/2009	5,7	5,50	5,72	6,01
05/03/2009	5,19	5,46	5,63	5,94
06/03/2009	5,39	5,45	5,57	5,87



Los indicadores y la observación de la forma que adoptan los dos gráficos (estudio de figuras) aportan información a los analistas de bolsa.

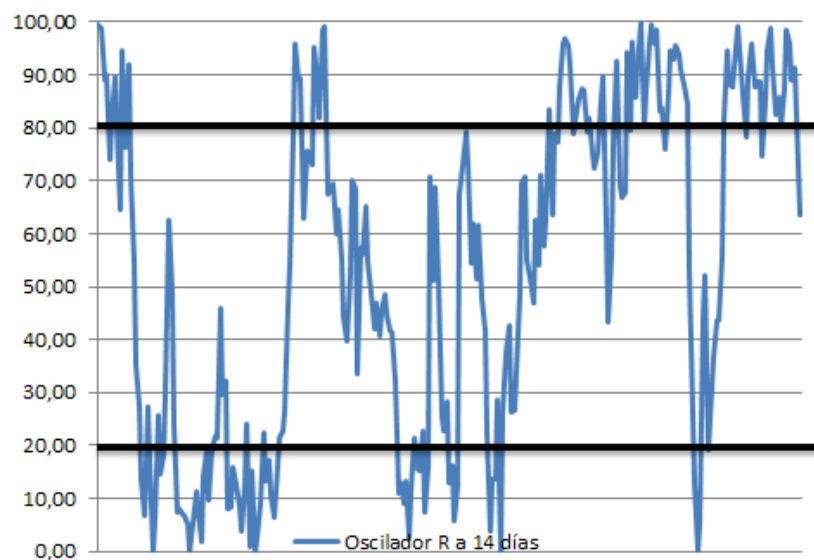
Pueden observarse tres momentos claros de cambio de tendencia, dos de bajada y uno de subida.

- *MACD 14-20. La señal será a 9 sesiones.*



Fecha	Cierre				
19/02/2009	5,94	media 14 días			
20/02/2009	5,54	6,34			
23/02/2009	5,45	6,29			
24/02/2009	5,43	6,22			
25/02/2009	5,37	6,13			
26/02/2009	5,68	6,05			
27/02/2009	5,53	5,95	media 20 días	MACD 14-20	
02/03/2009	5,35	5,85	6,08	-0,23	
03/03/2009	5,44	5,76	6,04	-0,28	
04/03/2009	5,7	5,72	6,01	-0,29	
05/03/2009	5,19	5,63	5,94	-0,31	
06/03/2009	5,39	5,57	5,87	-0,30	
09/03/2009	4,96	5,496428571	5,7635	-0,27	
10/03/2009	5,16	5,437857143	5,6865	-0,25	
11/03/2009	5,29	5,391428571	5,619	-0,23	señal 9
12/03/2009	5,43	5,383571429	5,5745	-0,19	-0,26
13/03/2009	5,51	5,387857143	5,528	-0,14	-0,25
16/03/2009	5,65	5,403571429	5,499	-0,10	-0,23
17/03/2009	5,72	5,428571429	5,4855	-0,06	-0,20
18/03/2009	5,51	5,416428571	5,462	-0,05	-0,17
19/03/2009	5,58	5,42	5,444	-0,02	-0,14
20/03/2009	5,78	5,450714286	5,456	-0,01	-0,11
23/03/2009	6,02	5,492142857	5,4845	0,01	-0,09
24/03/2009	6,05	5,517142857	5,5155	0,00	-0,06

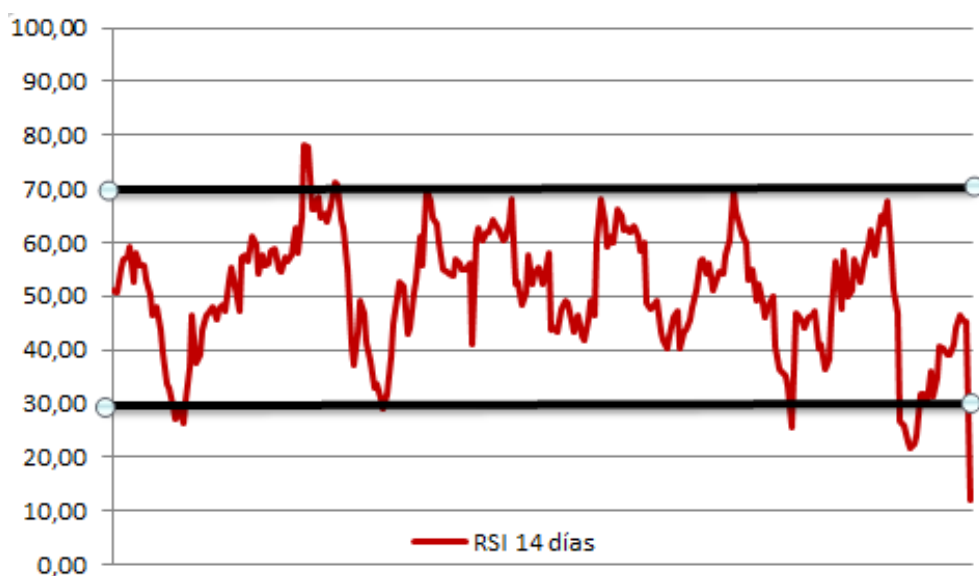
- *Oscilador R para un plazo de 14 días.*



Fecha	Cierre	Volumen	Máximo	Mínimo						
					máximo 14	mínimo 14	cota inferior	cota superior	oscilador R 14	posición
19/02/2009	5,94	245.439	6,12	5,92						
20/02/2009	5,54	573.928	5,92	5,53	7,14	5,53	5,85	6,82	99,38	comprar
23/02/2009	5,45	678.376	5,78	5,43	7,14	5,43	5,77	6,80	98,83	comprar
24/02/2009	5,43	480.332	5,59	5,22	7,14	5,22	5,60	6,76	89,06	comprar
25/02/2009	5,37	488.336	5,65	5,17	7,14	5,17	5,56	6,75	89,85	comprar
26/02/2009	5,68	480.807	5,78	5,37	7,14	5,17	5,56	6,75	74,11	mantener
27/02/2009	5,53	469.394	5,79	5,44	7,14	5,17	5,56	6,75	81,73	comprar
02/03/2009	5,35	347.520	5,48	5,23	6,93	5,17	5,52	6,58	89,77	comprar
03/03/2009	5,44	348.346	5,57	5,11	6,77	5,11	5,44	6,44	80,12	comprar
04/03/2009	5,7	701.151	5,73	5,45	6,77	5,11	5,44	6,44	64,46	mantener
05/03/2009	5,19	467.735	5,69	5,15	6,57	5,11	5,40	6,28	94,52	comprar
06/03/2009	5,39	604.275	5,46	5,1	6,32	5,1	5,34	6,08	76,23	mantener
09/03/2009	4,96	1.302.571	5,54	4,86	6,12	4,86	5,11	5,87	92,06	comprar
10/03/2009	5,16	858.052	5,18	4,77	6,12	4,77	5,04	5,85	71,11	mantener
11/03/2009	5,29	435.211	5,48	5,05	5,92	4,77	5,00	5,69	54,78	mantener
12/03/2009	5,43	398.125	5,53	5,08	5,79	4,77	4,97	5,59	35,29	mantener
13/03/2009	5,51	331.653	5,74	5,41	5,79	4,77	4,97	5,59	27,45	mantener
16/03/2009	5,65	217.455	5,73	5,5	5,79	4,77	4,97	5,59	13,73	vender
17/03/2009	5,72	349.676	5,74	5,51	5,79	4,77	4,97	5,59	6,86	vender
18/03/2009	5,51	609.181	5,74	5,4	5,79	4,77	4,97	5,59	27,45	mantener

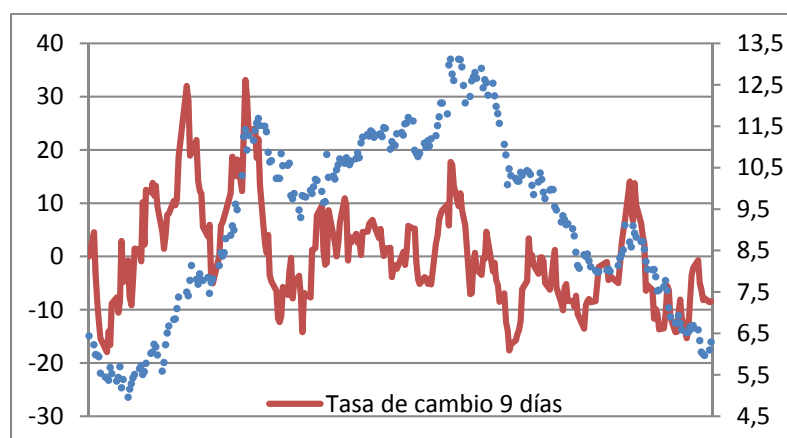
Si las líneas de tendencia del Oscilador R y las líneas de tendencia de las cotizaciones tienen pendiente contraria se obtiene una señal de cambio de tendencia en el movimiento de los precios.

● Índice de fuerza relativa, RSI 14 días.



Fecha	Cierre	Volumen	Máximo	Mínimo					
19/02/2009	5,94	245.439	6,12	5,92	media subidas	media bajadas	ratio	posición	RSI 14 días
20/02/2009	5,54	573.928	5,92	5,53	0,20	0,19	1,04	mantener	51,07
23/02/2009	5,45	678.376	5,78	5,43	0,18	0,17	1,02	mantener	50,58
24/02/2009	5,43	480.332	5,59	5,22	0,20	0,16	1,24	mantener	55,42
25/02/2009	5,37	488.336	5,65	5,17	0,21	0,16	1,33	mantener	57,00
26/02/2009	5,68	480.807	5,78	5,37	0,22	0,16	1,34	mantener	57,33
27/02/2009	5,53	469.394	5,79	5,44	0,22	0,15	1,45	mantener	59,17
02/03/2009	5,35	347.520	5,48	5,23	0,17	0,16	1,11	mantener	52,57
03/03/2009	5,44	348.346	5,57	5,11	0,20	0,14	1,39	mantener	58,21
04/03/2009	5,7	701.151	5,73	5,45	0,22	0,17	1,27	mantener	55,89
05/03/2009	5,19	467.735	5,69	5,15	0,22	0,17	1,26	mantener	55,84
06/03/2009	5,39	604.275	5,46	5,1	0,22	0,19	1,14	mantener	53,22
09/03/2009	4,96	1.302.571	5,54	4,86	0,21	0,21	1,01	mantener	50,37
10/03/2009	5,16	858.052	5,18	4,77	0,20	0,23	0,86	mantener	46,30
11/03/2009	5,29	435.211	5,48	5,05	0,19	0,21	0,92	mantener	48,01
12/03/2009	5,43	398.125	5,53	5,08	0,18	0,23	0,78	mantener	43,93
13/03/2009	5,51	331.653	5,74	5,41	0,17	0,27	0,65	mantener	39,30
16/03/2009	5,65	217.455	5,73	5,5	0,16	0,32	0,51	mantener	33,79
17/03/2009	5,72	349.676	5,74	5,51	0,15	0,30	0,49	mantener	32,96
18/03/2009	5,51	609.181	5,74	5,4	0,14	0,33	0,42	comprar	29,33
19/03/2009	5,58	388.304	5,74	5,47	0,14	0,38	0,37	comprar	27,26
20/03/2009	5,78	571.483	5,78	5,46	0,16	0,38	0,41	comprar	29,09
23/03/2009	6,02	829.435	6,1	5,81	0,14	0,38	0,36	comprar	26,24

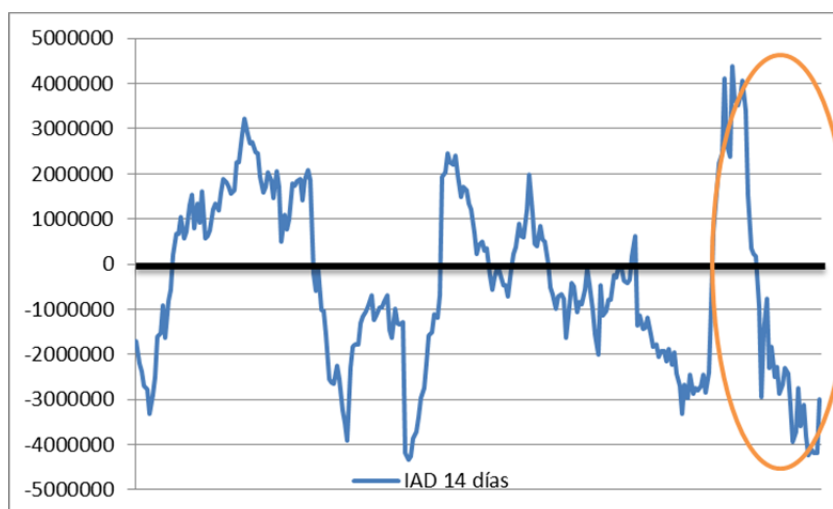
● Tasa de cambio a 9 días.



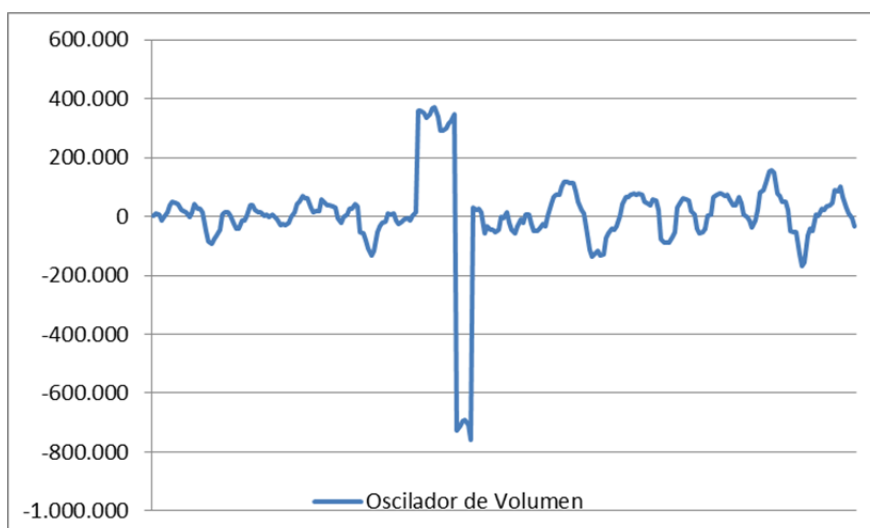
Fecha	Cierre	Tasa de cambio 9 días
03/02/2009	6,44	4,5455
16/02/2009	6,23	-3,2609
17/02/2009	5,99	-8,4098
18/02/2009	5,98	-12,188
19/02/2009	5,94	-15,3846
20/02/2009	5,54	-17,3134
23/02/2009	5,45	-17,9217
24/02/2009	5,43	-14,0823
25/02/2009	5,37	-16,6149
26/02/2009	5,68	-8,8283
27/02/2009	5,53	-7,6795
02/03/2009	5,35	-10,5351

● *IAD 14 días.*

Fecha	Cierre	Volumen	Máximo	Mínimo	IAD 14 días
20/02/2009	5,54	573.928	5,92	5,53	-1708089,828
23/02/2009	5,45	678.376	5,78	5,43	-2207957,495
24/02/2009	5,43	480.332	5,59	5,22	-2380346,492
25/02/2009	5,37	488.336	5,65	5,17	-2706573,326
26/02/2009	5,68	480.807	5,78	5,37	-2773499,326
27/02/2009	5,53	469.394	5,79	5,44	-3311790,956
02/03/2009	5,35	347.520	5,48	5,23	-2891819,256
03/03/2009	5,44	348.346	5,57	5,11	-2492400,029
04/03/2009	5,7	701.151	5,73	5,45	-1611628,272
05/03/2009	5,19	467.735	5,69	5,15	-1539254,698
06/03/2009	5,39	604.275	5,46	5,1	-909476,5315
09/03/2009	4,96	1.302.571	5,54	4,86	-1637504,066
10/03/2009	5,16	858.052	5,18	4,77	-825723,9763
11/03/2009	5,29	435.211	5,48	5,05	-578766,8461
12/03/2009	5,43	398.125	5,53	5,08	186909,5044
13/03/2009	5,51	331.653	5,74	5,41	657105,6368

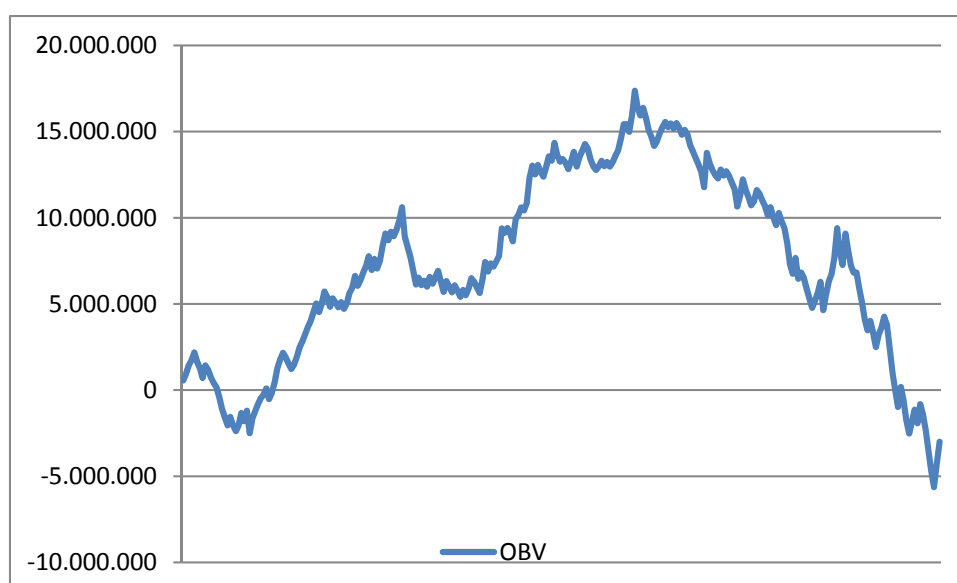


● *Oscilador de Volumen.*



Fecha	Volumen	media 14 días	media 20 días	Oscilador Vol.
02/03/2009	347.520	461.200	458.319	2.881
03/03/2009	348.346	457.099	447.126	9.973
04/03/2009	701.151	467.912	463.538	4.373
05/03/2009	467.735	449.583	462.441	-12.858
06/03/2009	604.275	474.139	476.996	-2.857
09/03/2009	1.302.571	535.730	520.076	15.653
10/03/2009	858.052	574.733	536.947	37.786
11/03/2009	435.211	588.288	538.419	49.869
12/03/2009	398.125	575.731	530.837	44.894
13/03/2009	331.653	550.965	511.203	39.762
16/03/2009	217.455	532.188	509.050	23.137
17/03/2009	349.676	522.284	504.519	17.764
18/03/2009	609.181	531.453	519.378	12.075
19/03/2009	388.304	525.661	526.521	-860

● **Oscilador de saldo de volumen: OBV (on balance volum).**



Fecha	Cierre	Volumen	OBV
03/02/2009	6,16	572.218	572.218
04/02/2009	6,44	372.898	945116
05/02/2009	6,54	489.675	1434791
06/02/2009	6,81	313.193	1747984
09/02/2009	7,02	440.953	2188937
10/02/2009	6,7	520.647	1668290
11/02/2009	6,64	405.760	1262530
12/02/2009	6,32	549.779	712751
13/02/2009	6,44	724.330	1437081
16/02/2009	6,23	260.499	1176582
17/02/2009	5,99	440.299	736283
18/02/2009	5,98	312.004	424279
19/02/2009	5,94	245.439	178840
20/02/2009	5,54	573.928	-395088
23/02/2009	5,45	678.376	-1073464
24/02/2009	5,43	480.332	-1553796
25/02/2009	5,37	488.336	-2042132

● Figuras.

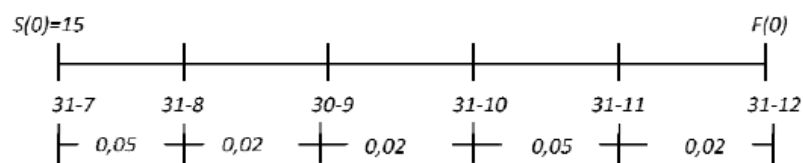


Puede observarse claramente un doble pico, en la parte alta el volumen disminuye y empieza a crecer cuando la caída es mayor a la altura del mayor de los picos.

Ejercicio 8: La tasa exenta de riesgo es del 9% de interés continuo y la rentabilidad del índice bursátil varía a lo largo del año, estimándose que en los meses de Febrero, Mayo, Agosto y Noviembre es del 5% continuo y el resto de los meses del 2% continuo. Se sabe que el índice el 31 de Julio del año A está a 150. Obtener el 31 de julio el precio futuro de un contrato de futuros sobre el índice que vence el 31 de diciembre de ese año.

SOLUCIÓN:

El precio futuro dependerá de la rentabilidad del mercado y de la tasa exenta de riesgo, el siguiente esquema representa ambas magnitudes:



El precio futuro será
$$F(0) = 150 \cdot e^{-\frac{1}{12}(0,05+0,02+0,02+0,05+0,02)} \cdot e^{0,09 \cdot \frac{5}{12}} = 153,67 \text{ u.m.}$$

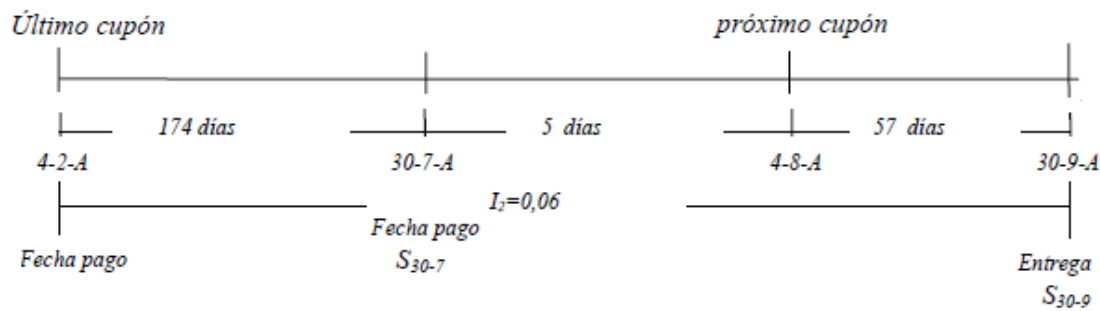
Ejercicio 9: Hoy 30 de Julio del año A se negocia un contrato de futuros sobre un bono nocional, con vencimiento el 30 de Septiembre próximo. La liquidación al vencimiento se realiza por entrega del activo subyacente siendo el bono más económico a entregar a la fecha de vencimiento un bono de 100 u.m. de nominal, que paga cupón semestral del 13% nominal el 4 de febrero y 4 de agosto respectivamente cada año.

La E.T.T.I. es plana, el tanto nominal de interés de mercado pagadero semestralmente es del 12%, el factor de conversión para ese bono es de 1,5 y hoy el bono ha cotizado 110 u.m.

Obtener el Precio Futuro del contrato de futuros.

SOLUCIÓN:

El siguiente esquema representa los cobros asociados al entregable hasta el vencimiento del contrato:



Para obtener el precio futuro del contrato sobre la base del bono entregable se deberá conocer el precio al contado del entregable hoy:

$$S_{30/7} = P + cc_{30/7} = 110 + 6,5 \cdot \frac{174}{182} = 116,21 \text{ u.m.}$$

El Precio del bono entregable en la fecha de entrega deberá ser el precio futuro teórico de dicho entregable. Para ello, se deberá tener en cuenta que se devengará un cupón y que hay el cupón corrido por los 57 días entre el pago del cupón de agosto y la fecha de vencimiento del contrato.

Luego, el precio futuro del bono entregable será:

$$F_{\text{entregable}(30/9)} = \left(S_{30/7} - 6,5 \cdot (1 + 0,06)^{\frac{5}{182}} \right) \cdot (1 + 0,06)^{\frac{62}{182}} - 6,5 \cdot \frac{57}{182} = 109,89 \text{ u.m.}$$

Como el factor de conversión es de 1, 5; es decir 1,5 u.m. por u.m. de precio cotizado del contrato de futuro, la cotización teórica del contrato de futuro debería ser:

$$\text{Cotización}_{\text{futuro}} = \frac{F_{\text{entregable}(30/9)}}{1,5} = 73,26 \text{ u.m.}$$

Ejercicio 10: Un contrato de futuros sobre un Bono Nocional a 10 años, con nominal de 10 millones de u.m., y cupón anual del 9% venció el tercer miércoles de diciembre del año A, siendo la cotización al cierre del 91,52%.

Los bonos que forman la lista de entregables eran las Obligaciones del Estado de 10.000 u.m. y que pagaban cupón anual:

O.E.	Amortización	Cupón	Cotización al vto. del contrato
1	30-8-A+8	10,90%	102%
2	30-10-A+8	10,50%	101%
3	30-5-A+9	8%	99%
4	28-2-+10	10%	100%
5	31-1-A+11	10,15%	100,5%

Obtener los factores de conversión para ese vencimiento, el precio de liquidación al vencimiento para cada entregable y el precio de liquidación al vencimiento del bono entregable más económico.

SOLUCIÓN:

Para calcular los factores de conversión asociados al 20 de Diciembre de año A, fecha de vencimiento del contrato, se deberá tener en cuenta el número de cobros futuros asociadas a cada bono, así como el cupón corrido desde el último pago de cupón. Se deberá contar en base al año natural y teniendo en cuenta la existencia de años bisiestos. Los factores de conversión para el vencimiento de diciembre son:

$$f_1 = \frac{\left(1.090a_{\overline{8}|0.09} + 10.000(1+0,09)^{-8}\right) \cdot (1+0,09)^{\frac{112}{365}} - 334,466}{10.000} = 1,101329$$

$$f_2 = \frac{\left(1.050a_{\overline{8}|0.09} + 10.000(1+0,09)^{-8}\right) \cdot (1+0,09)^{\frac{51}{365}} - 46,712}{10.000} = 1,081470$$

$$f_3 = \frac{\left(800a_{\overline{9}|0.09} + 10.000(1+0,09)^{-9}\right) \cdot (1+0,09)^{\frac{204}{365}} - 447,123}{10.000} = 0,941720$$

$$f_4 = \frac{\left(1.000a_{\overline{10}|0.09} + 10.000(1+0,09)^{-10}\right) \cdot (1+0,09)^{\frac{295}{365}} - 808,219}{10.000} = 1,060117$$

$$f_5 = \frac{\left(1.015a_{\overline{11}|0.09} + 10.000(1+0,09)^{-11}\right) \cdot (1+0,09)^{\frac{323}{365}} - 898,205}{10.000} = 1,073885$$

El precio de liquidación al vencimiento para cada uno de los entregables, en u.m., es:

$$PL1 = 0,9152 \cdot 1,101329 \cdot 10.000 + 334,46 = 10.410$$

$$PL2 = 0,9152 \cdot 1,081470 \cdot 10.000 + 146,71 = 10.040$$

$$PL3 = 0,9152 \cdot 0,941720 \cdot 10.000 + 447,12 = 9.066$$

$$PL4 = 0,9152 \cdot 1,060117 \cdot 10.000 + 808,22 = 10.051$$

$$PL5 = 0,9152 \cdot 1,073885 \cdot 10.000 + 898,20 = 10.730.$$

Para determinar el bono entregable más económico se debe obtener la diferencia entre el Precio de Liquidación al vencimiento para cada entregable y el precio que dicho bono tiene en el mercado al contado:

$$\text{Diferencia}^1 = 10.410 - (10.200 + 334,46) = -124,50$$

$$\text{Diferencia}^2 = 10.040 - (10.100 + 146,71) = -206,70$$

$$\text{Diferencia}^3 = 9.066 - (9.900 + 447,12) = -1.281,12$$

$$\text{Diferencia}^4 = 10.051 - (10.000 + 808,22) = -757,2$$

$$\text{Diferencia}^5 = 10.730 - (10.500 + 898,20) = -668,2.$$

Al ser todas las diferencias negativas, el bono entregable más económico será el que tenga una diferencia menor en valores absolutos; en este caso corresponde al primer bono. La diferencia entre lo que pagará en el mercado al contado para comprar el entregable y lo que cobrará con el ejercicio el futuro debe ser la más favorable al vendedor, si es negativa la más pequeña en valor absoluto y si es positiva la más grande.

En la fecha de vencimiento del contrato al comprador le entregarán 1.000 bonos del Tesoro de cupón anual de 1.090 u.m., con vencimiento 30-8-A+1, siendo el precio a pagar por los 1.000 bonos:

$$\text{Cantidad a pagar} = 1.000 \cdot 10.410 = 10.410.000 \text{ u.m.}$$

Ejercicio 11: El día xx-xx-A se publicó la cotización de la Deuda Pública en el Mercado, de ella se obtuvo la fecha de amortización y la rentabilidad asociada a los precios de ese día. A partir de estos datos obtener una aproximación de la E.T.T.I. y la tabla de tipos de interés forward para distintos plazos y años de aplicación.

SOLUCIÓN:

10	10,33										
----	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ejercicio 12: Hace tres meses se emitió un contrato de futuros sobre el tipo de interés interbancario a 3 meses de nominal 1 millón de u.m. y vencimiento dentro de 3 meses.

Los tipos de interés al contado en la fecha de compra eran del 4% nominal para plazos de 6 meses y del 3,5% nominal para plazos de 3 meses.

Hace un mes se compró dicho contrato al 96,5%, siendo las condiciones del mercado:

- La garantía inicial del 0,1% del nominal del contrato.
- El tick de 1/8 de punto básico.
- El límite de mantenimiento del margen del 80% de la garantía inicial y la reposición de fondos es total.

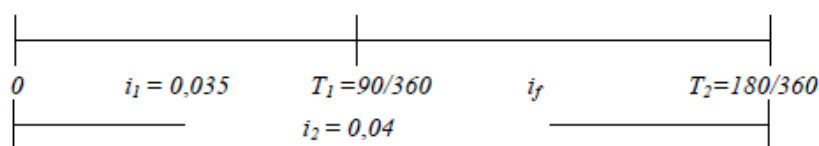
Hoy vence el contrato y se sabe que las cotizaciones del último mes han sido:

ía	cotización	día	cotización
1	96,53	11	96,49
2	96,50	12	96,52
3	96,35	13	96,50
4	96,28	14	96,53
5	96,30	15	96,59
6	96,32	16	96,57
7	96,38	17	96,60
8	96,41	18	96,63
9	96,40	19	96,60
10	96,45	20	96,64

Obtener el precio futuro teórico en la fecha de emisión del contrato y la liquidación de la cuenta de márgenes.

SOLUCIÓN:

a) El precio futuro teórico será el tipo de interés forward para un plazo de 3 meses y a aplicar dentro de 3 meses. Se obtendrá a partir de los tipos de interés al contado vigentes hace 3 meses.



Siendo,

$$\left(1 + i_1 \cdot \frac{90}{360}\right) \cdot \left(1 + \frac{90}{360} \cdot \frac{f_{90}}{360} \cdot \frac{90}{360}\right) = \left(1 + i_2 \cdot \frac{180}{360}\right),$$

de donde,

$$\frac{90}{360} \cdot \frac{f_{90}}{360} = 0,0446096.$$

La cotización o precio futuro teórico del contrato asciende a $100 - 4,461 = 95,539$.

b) La cuenta de márgenes se abrió con la garantía inicial de $1.000.000 \cdot 0,1\% = 1.000$ u.m.

El límite de mantenimiento de la cuenta es del 80% de la garantía inicial es $1.000 \cdot 80\% = 800$ u.m.

El importe del tick: $\text{tick} = 1.000.000 \cdot 0,01\% \cdot \frac{1}{8} = 12,50$ u.m.

El movimiento de la cotización del contrato determina los siguientes movimientos de la cuenta, así como los correspondientes cobros o pagos que deberá realizar el mercado al cliente, según sea su posición. Para el

comprador la liquidación diaria es Precio de liquidación del día menos el Precio Futuro, siendo el Precio Futuro el Precio de liquidación del día anterior ($\text{tick}_{\text{comprador}} = PL_r - PL_{r-1}$)

día	tick	valor	Margen	Cobros/pagos
0	0	0	1.000	
1	3	37,5	1.000	37,5
2	-3	-37,5	962,5	
3	-15	-187,5	1.000	-225
4	-7	-87,5	912,5	
5	2	25	937,5	
6	2	25	962,5	
7	6	75	1.000	37,5
8	3	37,5	1.000	37,5
9	-1	-12,5	987,5	
10	5	62,5	1.000	50

día	tick	valor	Margen	Cobros/pagos
11	4	50	1.000	50
12	3	37,5	1.000	37,5
13	-2	-25	975	
14	3	37,5	1.000	12,5
15	6	75	1.000	75
16	-2	-25	975	
17	3	37,5	1.000	12,5
18	3	37,5	1.000	37,5
19	-3	-37,5	962,5	
20	4	50	1.000	12,5

En la fecha de vencimiento del contrato el mercado le entregará al comprador 1.012,50 u.m. brutas.

El movimiento total de ticks en el mes es de 14, que representan $14 \cdot 12,50 = 175$ u.m. que coincide con el saldo neto de todos los cobros y pagos que ha tenido que realizar.

Las ganancias brutas han sido de 175 u.m., lo que pone en evidencia el fuerte apalancamiento de este tipo de operaciones, pues con un desembolso de 1.000 u.m. en concepto de garantía consigue unos beneficios brutos totales de 175 u.m. en un mes y recuperando, además, las 1.000 u.m. de la garantía.

Ejercicio 13: Un Fondo de Inversión tiene dos paquetes de títulos de renta fija:

Número	Nominal	años al vto.	Cupón anual	Cotización
1.000	1.000	8	73	120%
2.000	1.000	9	55	108%

Ante una posible subida de tipos de interés se desea proteger dicha cartera vendiendo en el MEFF futuros sobre el Bono Nocional a 10 años, que vencen en diciembre de 1.999, cuando cotizan al 95,5%. Los tipos de interés spot y forward de los 10 últimos días en el mercado han sido:

Sesión	Spot	Forward
1	0,0500	0,0648
2	0,0507	0,0517
3	0,0523	0,0501
4	0,0514	0,0579
5	0,0532	0,0590
6	0,0506	0,0524
7	0,0528	0,0567
8	0,0512	0,0508
9	0,0503	0,0617
10	0,0505	0,0577

Determinar la cobertura mediante contratos de futuros de dicha cartera y obtener el valor de la cartera cubierta si el tanto de interés spot se sitúa en el 4,75% y el tipo de interés forward se estima en el 5%.

SOLUCIÓN:

Para poder realizar la cobertura es necesario obtener la TIR de los bonos al contado y la TIR del Bono Nocional a las cotizaciones marcadas:

$$1.200 = 73 \cdot a_{8|TIR_1}^- + 1.000 \cdot (1 + TIR_1)^{-8}$$

$$1.080 = 553a_{\overline{9}|TIR_2} + 1.000 \cdot (1 + TIR_2)^{-9}$$

$$98.500 = 4.000 \cdot a_{\overline{10}|TIR_F} + 100.000 \cdot (1 + TIR_F)^{-10}$$

de donde:

Bonos	TIR
Bono 1	0,042934
Bono 2	0,044042
Bono Nocional	0,045707

Como la E.T.T.I. no es plana se deberá aceptar una dependencia de los tipos forward respecto de los tipos spot. Dicha dependencia se considerará lineal de la forma: $i_f = \alpha + \beta \cdot i$.

La recta se obtendrá sobre la base de los datos históricos a través de una regresión mínimo cuadrática. Así tendremos que $\beta = 0,843$; siendo el coeficiente de correlación de $0,957$.

Se calcularán las sensibilidades de cada uno de los bonos a su TIR y la duración modificada, o sensibilidad, del Bono Nocional a su TIR. Luego:

$$S_{B1} = \frac{-\sum_{r=1}^8 73 \cdot r \cdot (1 + TIR_1)^{-r} + 1.000 \cdot 8 \cdot (1 + TIR_1)^{-8}}{1.200 \cdot (1 + TIR_1)} = -6,227$$

$$S_{B2} = \frac{-\sum_{r=1}^9 55 \cdot r \cdot (1 + TIR_2)^{-r} + 1.000 \cdot 9 \cdot (1 + TIR_2)^{-9}}{1.080 \cdot (1 + TIR_2)} = -7,093$$

$$S_F = \frac{-\sum_{r=1}^{10} 4.000 \cdot r \cdot (1 + TIR_F)^{-r} + 100.000 \cdot 10 \cdot (1 + TIR_F)^{-10}}{98.500 \cdot (1 + TIR_F)} = -8,025.$$

La ratio de cobertura para cada uno de los paquetes de bonos será:

$$h_1 = \frac{S_{B1} \cdot 1.200 \cdot 1.000}{S_F \cdot 98.500 \cdot 0,989} = 11,56 \approx 12 \quad h_2 = \frac{S_{B1} \cdot 1.080 \cdot 2.000}{S_F \cdot 98.500 \cdot 0,989} = 23,69 \approx 24.$$

El valor de la cartera cubierta para tipos de interés: spot del 4,75% y forward del 5%, será:

$$\begin{aligned} V_c(0; 4,75\%; 5\%) = & \left(73 \cdot a_{\overline{8}|0,0475} + 1.000 \cdot (1 + 0,0475)^{-8} \right) \cdot 1.000 + \\ & + \left(55 \cdot a_{\overline{9}|0,0475} + 1.000 \cdot (1 + 0,0475)^{-9} \right) \cdot 2.000 + \\ & + (h_1 + h_2) \cdot \left(98.500 - 4.000 \cdot a_{\overline{10}|0,05} - 100.000 \cdot (1 + 0,05)^{-10} \right) = 4.175.732,71 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

El valor de los bonos antes de realizar la cobertura es de 3.360.000 u.m., y el valor de los bonos cuando el tipo de interés spot es del 4,75% es de 3.274.304,78 u.m.

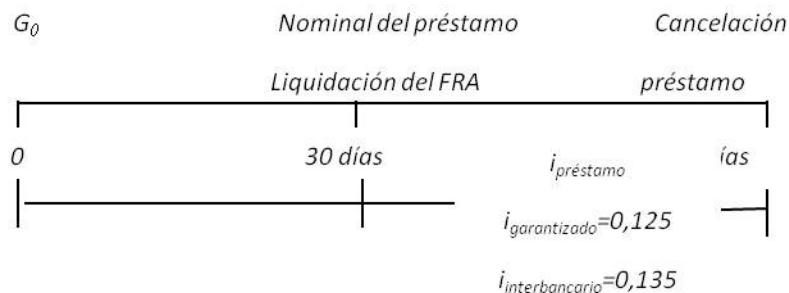
Si las expectativas de evolución de tipos de interés se mantienen en los datos fijados, se habrá conseguido que el valor total de la cartera cubierta no sea inferior al de los bonos al contado.

Ejercicio 14: Una compañía contrata un FRA que le garantice el tanto de interés de un préstamo de 30 millones de u.m., que deberá pedir dentro de 30 días; el plazo del préstamo es de 60 días y el tanto de interés es el tanto interbancario a 60 días. El tanto de interés que garantiza el FRA respecto al interbancario es del 12'5%.

Transcurridos los 30 días se sabe que:

- el interbancario a dos meses está al 13'5%.
- solicita el préstamo a un tanto de interés 5/8 de punto más barato que el interbancario a 60 días.
- los gastos del FRA ascienden al 0,25% sobre el nominal y plazo, haciéndose efectivo el día de contratación del FRA.

SOLUCIÓN: El esquema de la operación será:



El diferencial entre el interés del FRA y el interbancario a 60 días es de 1 punto y, como no coinciden, se deberá calcular el capital que deberán intercambiarse las partes del FRA.

El capital que cancela el préstamo al tanto garantizado es:

$$C' = 30.000.000 \cdot \left(1 + 0,125 \cdot \frac{60}{360}\right) = 30.625.000 \text{ u.m.}$$

El Nominal del préstamo a solicitar deberá ser aquel cuyo capital de cancelación sea C , siendo el tanto de interés, a aplicar sobre ese nominal, el tanto de referencia, en este caso el interbancario a 60 días, luego:

$$(30.000.000 + M) \cdot \left(1 + 0,135 \cdot \frac{60}{360}\right) = 30.625.000,$$

de donde: $M = -48.899,75 \text{ u.m.}$

Como M es negativo el vendedor del FRA deberá pagar al comprador dicha cantidad, de donde, el nominal que realmente deberá pedir en préstamo es:

$$C = 30.000.000 - 48.899,75 = 29.969.850,25 \text{ u.m.}$$

El préstamo se consigue más barato que el interbancario, al 0,12875, y el capital, que lo cancelará dentro de 60 días, asciende a 30.612.953,28 u.m. < 30.625.000 u.m.

El coste real de la financiación de los 30 millones de u.m.. a través del FRA se obtendrá, teniendo en cuenta los gastos del FRA, a partir de la siguiente ecuación:

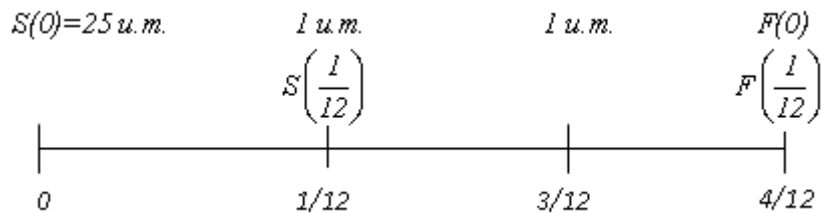
$$0,0025 \cdot 30.000.000 \cdot \frac{90}{360} \cdot (1 + I_1)^{\frac{90}{360}} + 30.612.953,28 = 30.000.000 \cdot (1 + I_1)^{\frac{60}{360}}$$

de donde: $I_1 = 0,1333134 < 0,135.$

Ejercicio 15: Se emite hoy una opción de venta sobre una acción que cotiza en bolsa a 25 u.m., con vencimiento a 4 meses; la acción subyacente pagará un dividendo de 1 u.m. dentro de un mes y otro dividendo de 2 u.m. dentro de tres meses. Si la tasa de interés exenta de riesgo es el 2,5%, hallar:

- El precio futuro del subyacente al vencimiento, dentro de cuatro meses.
- El valor del contrato dentro de un mes, si el precio de ejercicio es 24 u.m. y la cotización de la acción aumentará el 1%.

SOLUCIÓN:



El precio futuro teórico hoy será:

$$F(0) = \left(25 - 1 \cdot (1 + 0,025)^{\frac{1}{12}} - 1 \cdot (1 + 0,025)^{\frac{3}{12}} \right) \cdot (1 + 0,025)^{\frac{4}{12}} = 23,19 \text{ u.m.}$$

Para hallar el valor teórico del contrato de opción de venta dentro de un mes se deberá tener en cuenta: la cotización del subyacente dentro de un mes, el precio de ejercicio de la opción, ya que la opción tendrá valor cuando al ejercer el derecho se obtenga una ganancia, es decir, cuando la venta de la acción a través del put sea a un precio más elevado al que tendría en su propio mercado.

Así, tendremos que:

$$f\left(\frac{1}{12}\right) = \text{Max}\left\{0; K - F\left(\frac{1}{12}\right)\right\} \cdot (1 + 0,025)^{\frac{-3}{12}} = \text{Max}\{0; 24 - 24,29\} = 0$$

El valor teórico del contrato es nulo al ser precio futuro del subyacente mayor que el precio de ejercicio.

Ejercicio 16: Hace 3 meses un inversor tenía en cartera acciones de la sociedad B, cuya cotización en el mercado al contado era de 1.500 u.m. y la volatilidad, medida por la varianza, ascendía al 60%. En ese momento el mercado marcaba una tendencia a la baja de la cotización y tenía previsto desinvertir al cabo de 3 meses.

En el mercado de derivados se negociaban opciones de compra y de venta sobre dichas acciones con vencimiento a 3 meses y precio de ejercicio 1.300 u.m., correspondiendo una acción por opción.

Si la tasa de interés exenta de riesgo es del 10% anual, obtener las primas teóricas hace 3 meses de la opción de compra y de la opción de venta, antes indicadas.

Hoy, fecha de vencimiento de las opciones, se sabe que las acciones están cotizando en el mercado al contado a 1.100 u.m., analizar qué hubiese sido mejor: vender las acciones en el mercado al contado o venderlas a través de la compra hace 3 meses de una opción de venta.

SOLUCIÓN:

Para obtener las primas teóricas se utilizará la fórmula de Black y Scholes,

$$C = 1.500 \cdot N(d_1) - 1.300 \cdot N(d_2) \cdot e^{-\ln(1,1) \cdot \frac{1}{4}},$$

siendo:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{1.500}{1.300}\right) + \left(\ln(1 + 0,1) + \frac{1}{2} \cdot 0,6\right) \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{0,6 \cdot \frac{1}{4}}} = 0,624656; \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{1.500}{1.300}\right) + \left(\ln(1 + 0,1) - \frac{1}{2} \cdot 0,6\right) \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{0,6 \cdot \frac{1}{4}}} = 0,237358$$

Como $N(0,624656) = 0,7339017$ y $N(0,237358) = 0,5938105$, sustituyendo se obtiene que el precio teórico de la opción de compra es: $C = 347,075 \text{ u.m.}$

Para calcular la prima teórica de la opción de venta, se aplicará la relación entre ambas primas, es decir:

$$P = C - \left(1.500 - 1.300 \cdot (1 + 0,1)^{\frac{1}{4}} \right) = 347,075 - \left(1.500 - 1.300 \cdot (1 + 0,1)^{\frac{1}{4}} \right) = 116,46 \text{ u.m.}$$

Respecto a determinar la alternativa mejor para vender las acciones de la Sociedad B, deberá tenerse en cuenta cual hubiera sido el resultado en cada una de ellas:

➤ *Venta al contado:*

Hace 3 meses	Hoy	Beneficio/pérdida bruto
Valor de la acción: 1.500	Venta de la acción: 1.100	-400

➤ *Venta a través de la compra de un put.*

Hace 3 meses	Hoy	Beneficio/pérdida bruto
Valor de la acción: 1.500 Compra del Put: 116,46	Ejercicio del Put: 1.300	-316,46

La alternativa mejor es la venta a través de la compra del Put, pues pierde menos dinero.

Ejercicio 17: Hace un mes, un inversor compró para su cartera financiera 1.000 acciones de la Sociedad A, que cotizaban a 3.800 u.m. En esa época el mercado indicaba una bajada de las cotizaciones y para protegerse accedió al mercado de opciones, donde cotizaban opciones sobre dichas acciones.

Adquirió un margen vertical positivo con opciones Call, posicionándose adecuadamente en la serie con vencimiento a un mes y precio de ejercicio 3.550 u.m. y en la serie con vencimiento a un mes y con precio de ejercicio 3.650 u.m. Cada opción da el derecho a la adquisición de una acción.

Si la tasa de interés exenta de riesgo era del 8,5% anual y la volatilidad de las acciones, medida por la varianza, era del 45%, determinar:

a) Primas teóricas de las dos opciones.

b) Resultado de la operación global si hoy, transcurrido el mes, se vende las acciones en el mercado al contado cuando cotizan a 3.780 u.m. y, además, se debe ejercer el margen vertical, teniendo en cuenta que las opciones se compraron por sus primas teóricas y no se tienen en cuenta los gastos de transacción ni las comisiones.

SOLUCIÓN:

a) Para calcular las primas teóricas se utilizará la fórmula de Black-Scholes.

Prima con precio de ejercicio $K_1=3.550$:

$$C_1 = 3.800 \cdot N(0,483358) - 3.550 \cdot N(0,289708) \cdot e^{-\ln(1,085) \cdot \frac{1}{12}} = 440,33 \text{ u.m.}$$

ya que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{3.800}{3.550}\right) + \left(\ln(1 + 0,085) + \frac{1}{2} \cdot 0,45\right) \cdot \frac{1}{12}}{\sqrt{0,45 \cdot \frac{1}{12}}} = 0,483358$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{3.800}{3.550}\right) + \left(\ln(1 + 0,085) - \frac{1}{2} \cdot 0,45\right) \cdot \frac{1}{12}}{\sqrt{0,45 \cdot \frac{1}{12}}} = 0,289708$$

Prima con precio de ejercicio $K_2 = 3.650$:

$$C_1 = 3.800 \cdot N(0,339905) - 3.650 \cdot N(0,146255) \cdot e^{-\ln(1,085) \cdot \frac{1}{12}} = 382,12 \text{ u.m.}$$

ya que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{3.800}{3.650}\right) + \left(\ln(1 + 0,085) + \frac{1}{2} \cdot 0,45\right) \cdot \frac{1}{12}}{\sqrt{0,45 \cdot \frac{1}{12}}} = 0,339905$$

y

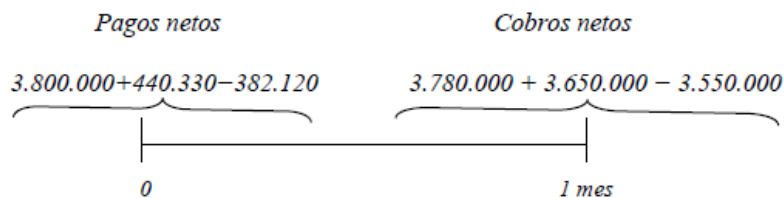
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{3.800}{3.650}\right) + \left(\ln(1 + 0,085) - \frac{1}{2} \cdot 0,45\right) \cdot \frac{1}{12}}{\sqrt{0,45 \cdot \frac{1}{12}}} = 0,146255$$

b) El margen vertical positivo con opciones Call lo realizará comprando el Call que tiene precio de ejercicio más barato y vendiendo el Call que tiene precio de ejercicio más caro. Es decir, comprará un Call de 3.550 u.m. y venderá el Call de 3.650 u.m. El resultado del margen vertical dependerá de la cotización de las acciones en la fecha de ejercicio. La operación global será:

Operación	Pagos hace un mes	Ejercicio	Cobros hoy
Acciones	$1.000 \cdot 3.800 = 3.800.000$		$1.000 \cdot 3.780 = 3.780.000$
Call compradas	$440,33 \cdot 1.000 = 440.330$	ejerce	$-1.000 \cdot 3.550 = -3.550.000$
Call vendidas	$-382,12 \cdot 1.000 = -382.120$	ejerce	$1.000 \cdot 3.650 = 3.650.000$

Siendo el ingreso neto de dinero con el margen de 100 u.m./margen, es decir 100.000 u.m. en total, ya que ha tenido que comprar 1.000 márgenes verticales para cubrir las acciones.

El siguiente esquema recoge los cobros y pagos de la operación global:



La rentabilidad obtenida será:

$$I_1 = \left(\frac{3.780.000 + 3.650.000 - 3.550.000}{3.800.000 + 440.330 - 382.120} \right)^{-12} - 1 = 0,069918.$$

Ejercicio 18: Un inversor posee hoy una cartera formada por 10.000 acciones de Telecall y 20.000 acciones de Enlux, la cotización hoy de dichas acciones es de 3.500 u.m./acción y 2.300 u.m./acción, respectivamente. Desea mantener la cartera durante 3 meses y el mercado marca una tendencia bajista para ese periodo. Para cubrir el valor de sus acciones decide comprar opciones de venta sobre Telecall y Enlux en la proporción necesaria para realizar la cobertura.

Las opciones de venta las adquiere a los precios teóricos obtenidos a partir de los siguientes datos:

- Volatilidad de las acciones: Telecall el 10% y Enlux el 15%.
- Tasa de interés exenta de riesgo: 5% efectivo anual.
- Talla del contrato, 100.
- Precio de ejercicio de las opciones. Los más próximos a los precios al contado de las acciones hoy que se negocian en el mercado de opciones son: para Telecall 3.550 u.m. y para Enlux 2.350 u.m.

Determinar:

- a) El importe de las primas teóricas de las opciones de venta.
- b) Las Delta de las opciones de venta.
- c) Ratio de cobertura para cada tipo de acción.
- d) Valor de la cartera cubierta en el supuesto que, dentro de 3 meses, las acciones coticen en Bolsa a 3.300 u.m./acción para Telecall y 2.100 u.m./acción para Enlux.

SOLUCIÓN:

Para hallar el importe de las primas se utilizará la fórmula de Black-Scholes a partir de los siguientes datos:

	S_0	K	σ^2	t	i	n
Telecall	3.500	3.550	10%	3 meses	5%	10.000
Enlux	2.300	2.350	15%	3 meses	5%	20.000

A partir de estos datos se obtendrán d_1 y d_2 , para cada opción.

$$d_1^{Telecall} = \frac{\ln\left(\frac{3.500}{3.550}\right) + \left(\ln(1 + 0,05) + \frac{0,1}{2}\right) \cdot 0,25}{\sqrt{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$d_2^{Telecall} = \frac{\ln\left(\frac{3.500}{3.550}\right) + \left(\ln(1 + 0,05) - \frac{0,1}{2}\right) \cdot 0,25}{\sqrt{0,1 \cdot 0,25}}$$

$$d_1^{Enlux} = \frac{\ln\left(\frac{2.300}{2.350}\right) + \left(\ln(1 + 0,05) + \frac{0,15}{2}\right) \cdot 0,25}{\sqrt{0,15 \cdot 0,25}}$$

$$d_2^{Enlux} = \frac{\ln\left(\frac{2.300}{2.350}\right) + \left(\ln(1 + 0,05) - \frac{0,15}{2}\right) \cdot 0,25}{\sqrt{0,15 \cdot 0,25}}$$

$$C^{Telecall} = 3.500 \cdot N(d_1^{Telecall}) - 3.550 \cdot e^{-\ln(1,05) \cdot 0,25} \cdot N(d_2^{Telecall})$$

$$C^{Enlux} = 2.300 \cdot N(d_1^{Enlux}) - 2.350 \cdot e^{-\ln(1,05) \cdot 0,25} \cdot N(d_2^{Enlux})$$

$$P^{Telecall} = C^{Telecall} - 3.500 + 3.550 \cdot e^{-\ln(1,05) \cdot 0,25}$$

$$P^{Enlux} = C^{Enlux} - 2.300 + 2.350 \cdot e^{-\ln(1,05) \cdot 0,25}$$

Los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla:

	d_1	d_2	C	P
Telecall	0,06648946	-0,09162443	217,30	224,26
Enlux	0,04875485	-0,14489432	167,68	189,20

b) El valor de Δ para las opciones de venta es:

$$\Delta_{put}^{Telecall} = N(d_1^{Telecall}) - 1 = -0,47349408 \quad ; \quad \Delta_{put}^{Enlux} = N(d_1^{Enlux}) - 1 = -0,48055733.$$

c) La ratio de cobertura será:

$$h^{Telecall} = -\frac{10.000 \cdot 3.500}{3.500 \cdot 100} \cdot \frac{1}{-0,47349408} = 211,19588408 \quad ; \quad h^{Enlux} = -\frac{20.000 \cdot 2.300}{2.300 \cdot 100} \cdot \frac{1}{-0,48055733} = 416,18343218$$

Si se tiene en cuenta que el tamaño de cada contrato de opciones es de 100, el inversor deberá comprar 212 contratos de opciones de venta sobre Telecall y 417 contratos de opciones de venta sobre Enlux.

En el momento de realizar la cobertura, el importe de las primas asciende a:

$$(212 \cdot 224,26 + 417 \cdot 189,20) \cdot 100 = 12.643.937 \text{ u.m.}$$

y el valor de las acciones más los contratos de opciones se eleva a:

$$V_0^{cubierta} = 12.643.937 + 10.000 \cdot 3.500 + 20.000 \cdot 2.300 = 93.643.937 \text{ u.m.}$$

d) El valor de la cartera cubierta en el supuesto de que las acciones coticen a 3.300 u.m./acción para Telecall y 2.100 u.m./acción para Enlux será:

$$V_t^{Cubierta} = 10.000 \cdot 3.300 + 212 \cdot (3.550 - 3.300) \cdot 100 + \\ + 20.000 \cdot 2.100 + 417 \cdot (2.350 - 2.100) \cdot 100 = 90.725.000 \text{ u.m.}$$

El valor de las acciones a esos precios es de:

$$V_t^{acciones} = 10.000 \cdot 3.300 + 20.000 \cdot 2.100 = 75.000.000 \text{ u.m.}$$

mientras que el valor de las acciones en el momento de realizar la cobertura ascendía a:

$$V_0^{acciones} = 10.000 \cdot 3.500 + 20.000 \cdot 2.300 = 81.000.000 \text{ u.m.}$$

luego, la pérdida asociada a las acciones sin cubrir es de $81.000.000 - 75.000.000 = 6.000.000 \text{ u.m.}$ y la

pérdida asociada a las acciones cubiertas es de $93.643.93 - 90.725.000 = 2.918.936,97 \text{ u.m.}$

Como puede observarse, las opciones han amortiguado la pérdida pero no la han evitado. Ello es debido a que los precios de ejercicio de las opciones no coinciden con los precios al contado de las acciones en el momento de realizar la cobertura, siendo el importe de las primas mayor que los ingresos procedentes del ejercicio de las opciones.

Ejercicio 19: Calcular el precio de un Collar a 5 años sobre 1.000.000 de \$ al 5%-4% contra el Libor a 1 año para el \$, si el periodo de liquidación es anual y los intereses se pagan por vencido.

Hoy Londres da la siguiente curva de tipos de interés para el \$:

Plazo	Libor para \$ $I(r)$
1	4,75%
2	4,85%
3	5,1%
4	4,75%
5	4,45%

y con una volatilidad del 20%.

¿Cuál sería el tipo de interés floor que haría cero el precio del Collar?

SOLUCIÓN:

Un Collar es una operación financiera que consiste en la compra de un Cap y la venta de un Floor. El precio del Collar será la diferencia entre el precio que se paga por el Cap y el precio que se cobra por el Floor.

Para hallar los precios del Cap y el Floor se deberá obtener los tipos forward a 1 año asociados a la curva de tipos de interés:

$${}_r f_1 = \frac{(1 + I(r+1))^{r+1}}{(1 + I(r))^r} - 1 \quad \text{para } r = 1, \dots, 4$$

Plazo	f_1
1	0,04950095
2	0,05601789
3	0,03706977
4	0,03258567

A partir de estos tipos forward se calculará el precio de ejercicio del Cap y del Floor, así como, el precio al contado, para cada una de los cuatro vencimientos.

i_{cap}	0,05	0,05	0,05	0,05
f_1	0,04950	0,05601	0,037069	0,0325856
i_{floor}	0,04	0,04	0,04	0,04

0	1	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---

Precio al contado del activo subyacente:

$$S_0^r = {}_r f_1 (1 + {}_r f_1) \cdot (1 + I(r))^{-r} \quad \text{para } r = 1, \dots, 4.$$

Precio de Ejercicio del Cap por \$:

$$K_r^{cap} = 0,05(1 + {}_r f_1) \quad \text{para } r = 1, \dots, 4.$$

Precio de Ejercicio del Floor por \$:

$$K_r^{floor} = 0,04(1 + {}_r f_1) \quad \text{para } r = 1, \dots, 4.$$

Los valores que se obtienen son:

r	S_0^r	K_r^{cap}	K_r^{floor}
1	0,0450274	0,0476417	0,0381134
2	0,0482524	0,0473477	0,0378781
3	0,0307896	0,0482128	0,0385702
4	0,0262111	0,0484221	0,0387377

Mediante la fórmula de Black-Scholes se obtendrán los importes por \$ para cada una de las opciones.

Primas asociadas al Cap: Opciones de compra para $r=1, \dots, 4$

$$d_1^{cap}(r) = \frac{\ln\left(\frac{r f_1}{0,05}\right) + \frac{0,2 \cdot r}{2}}{\sqrt{0,2 \cdot r}} \quad ; \quad d_2^{cap}(r) = d_1^{cap}(r) - \sqrt{0,2 \cdot r}$$

$$Prima^{cap}(r) = \frac{(1+I(r))^{-r}}{1+r f_1} [r f_1 \cdot N(d_1^{cap}(r)) - 0,05 \cdot N(d_2^{cap}(r))] \cdot 100,$$

siendo los valores obtenidos:

r	$d_1^{cap}(r)$	$d_2^{cap}(r)$	$Prima^{cap}(r)$ en %
1	0,2011767	-0,2460369	0,7782166
2	0,4959214	-0,13653415	1,40996419
3	0,0010057	-0,77359095	0,62878944
4	-0,031473	-0,92590017	0,564776

Primas asociadas al Floor: Opciones de venta para $r = 1, \dots, 4$.

Se calculará la prima de la opción de compra para obtener a continuación la de la opción de venta.

$$d_1^{floor}(r) = \frac{\ln\left(\frac{r f_1}{0,04}\right) + \frac{0,2 \cdot r}{2}}{\sqrt{0,2 \cdot r}} \quad ; \quad d_2^{floor}(r) = d_1^{floor}(r) - \sqrt{0,2 \cdot r}$$

$$C^{floor}(r) = \frac{(1+I(r))^{-r}}{1+r f_1} \left(r f_1 \cdot N(d_1^{floor}(r)) - 0,04 \cdot N(d_2^{floor}(r)) \right)$$

$$Prima^{floor}(r) = (C^{floor}(r) - S_0^r + K_r^{floor} \cdot (1+I(r))^{-r}) \cdot 100,$$

siendo los valores obtenidos:

r	$d_1^{floor}(r)$	$d_2^{floor}(r)$	$Prima^{floor}(r)$ en %
1	0,7001408	0,2529272	0,3666917
2	0,8487423	0,21628678	0,47229568
3	0,2890828	-0,48551386	1,0909917
4	0,2180091	-0,67641809	1,33071083

El precio del Collar será:

$$Precio \text{ Collar} = \sum_{r=1}^4 Prima^{cap}(r) - Prima^{floor}(r) = 3,3817462\% - 3,2606899\% = 0,1210562\%$$

Con este Collar se consigue proteger la deuda con un interés máximo del 5% y, a cambio de pagar la diferencia de intereses si éstos descienden por debajo del 4%, se paga en el momento de la firma de la operación el 0,1210562% sobre el millón de dólares.

Si se quiere obtener un Collar de coste cero se deberá obtener el tipo floor asociado al 5% cap que verifique la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=1}^4 Prima^{cap}(r) = Prima^{floor}(r)$$

En este caso, el tipo floor es el 4,063367%.

Ejercicio 20: Una empresa A desea endeudarse por 10 millones de \$ a tipo variable y debe decidir si pide un préstamo a tipo variable por dicho importe o realiza un swap de tipos de interés en dólares fijo anual contra el \$LIBOR a 6 meses+30p.b. con el fin de obtener una financiación más barata. El Nominal es de 10 millones de \$ y con una duración de 5 años. La base de cómputo es ACT/360 y la curva de tipos de interés en Londres para el \$ es la siguiente:

Vencimiento en años	Tipo de interés
1	5%
2	5,25%
3	5,30%
4	5,65%
5	5,9%

El mercado ofrece las siguientes condiciones a la empresa A y a la empresa B, con la que podría realizar el swap:

Empresa	Tipo fijo	Tipo variable
A	5,75%	\$LIBOR 1 año+10p.b
B	6,15%	\$LIBOR 1 año+25p.b.

Determinar:

- El tipo fijo del swap.
- Que posición debe tomar cada empresa en el swap.
- Resultado final de la operación.

SOLUCIÓN:

- Para conocer el tipo a pagar por la rama fija se deberá calcular el tipo fijo del swap genérico a partir de la curva de tipos de interés que se dispone:

Vencimiento T_r	Tipo de interés I_1^r	Factor de descuento $v(T_r) = (1 + I_1^r)^{-T_r}$
1	0,05	0,95238
2	0,0525	0,90273
3	0,053	0,85648
4	0,0565	0,80264
5	0,059	0,75079
		Suma =4,26502

El tipo fijo del swap genérico será: $I = \frac{1 - 0,75079}{4,26502} = 0,0584$

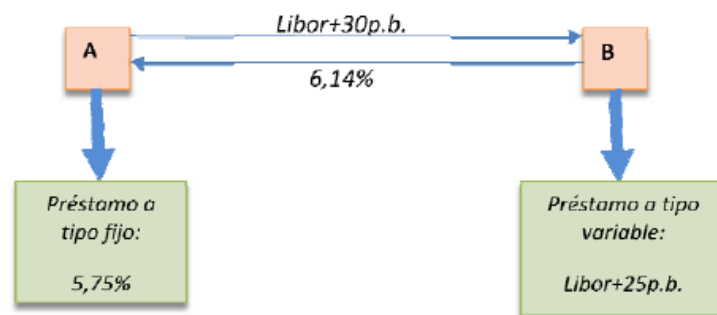
luego, el tipo fijo a pagar será: $I_{rama\ fija} = I + 30p.b. = 0,0584 + 0,0030 = 0,0614 \sim 6,14\%$

b) El mercado ofrece distintos tipos de interés, tanto fijo como variable, a cada una de las empresas. Para poder aprovechar esta situación en el mercado de préstamos, la empresa que esté mejor tratada por el mercado se posicionará en el segmento que le es más favorable,

Tipo de interés	Empresa A	Empresa B	Diferencial de intereses
Fijo	5,75%	6,15%	$\Delta I = 6,15 - 5,75 = 40p.b.$
Variable	libor+10p.b.	libor+25p.b.	$\Delta I' = 15p.b.$

La empresa A está mejor posicionada en el mercado que la empresa B, pero el segmento donde la distancia es mayor es el segmento de préstamo a tipo fijo; luego, la empresa A pedirá su préstamo a tipo fijo y la empresa B a tipo variable y realizarán el swap.

c) El resultado final de la financiación de los 10 millones de \$ se obtendrá de la unión del préstamo que solicita y el swap.



La empresa A pagará un tanto variable inferior al que le ofrece el mercado:

$$5,75\% + \text{LIBOR} + 30p.b. - 6,14\% = \text{LIBOR} - 9p.b. < \text{LIBOR} + 10p.b.$$

La empresa B pagará un tipo fijo e inferior al que le ofrece el mercado:

$$\text{LIBOR} + 25p.b. + 6,14\% - (\text{LIBOR} + 30p.b.) = 6,09\% < 6,15\%$$

Con el swap se ha conseguido la financiación deseada y a un tipo de interés inferior al que a ambas les ofrece el mercado.

Ejercicio 21: Una empresa contrató con una entidad bancaria un swap de tipos de interés fijo contra variable con las características siguientes:

- Fecha de contratación: 30 de Junio del año A-1.
- Fecha efectiva del swap: 30 de Junio del año A.
- Fecha de vencimiento: 30 de Junio del año A+3.
- Tipo de interés variable: LIBOR a 1 año + 1% para el \$.
- Duración del swap: 4 años incluyendo una carencia de 1 año.
- Periodicidad del swap: anual, a pagar el 30 de Junio de los años A+1, A+2 y A+3, respectivamente.
- Nocional: 3 millones de \$ en el año A+1; 5 millones de \$ en el año A+2 y 7 millones de \$ en el año A+3.
- La base de cómputo del tiempo será días naturales/360.

Determinar:

a) El tipo fijo de contratación del swap, si la curva de tipos de interés para el \$ el día 30 de Junio del año A-1 era:

Plazo base año A-1	Interés I(k)
1	7,3%
2	7,456%
3	7,778%
4	7,997%

b) El valor del swap al año de su contratación si la curva de tipos de interés para el \$ ha variado y el 30 de Junio del año A es:

Plazo base año A	Interés
1	7,404%
2	7,943%
3	8,388%

SOLUCIÓN:

Este swap no corresponde a un swap genérico, sino que es un swap diferido 1 año, de márgenes al ser el tipo variable el LIBOR a 1 año más un marginal del 1% y creciente al no tener el capital nocional constante sino creciente durante la vida del swap.

a) Para hallar el precio del swap, es decir, el tipo de interés fijo de contratación del swap se utilizará el método de actualización mediante los tipos de interés cupón cero.

A partir de los tipos de interés cupón cero, $I(k)$, se determinarán los tipos de interés forward a 1 año, LIBOR a 1 año, los factores de descuento de mercado y el tipo variable del swap.

El LIBOR a 1 año se obtendrá a partir de la siguiente expresión:

$${}_{k-1}f_1 = \begin{cases} I(1)=7,3\% & \text{para } k=1 \\ \frac{[1+I(k)]^k}{[1+I(k-1)]^{k-1}} - 1 & \text{para } k>1, \end{cases}$$

así, para $k=2$ será:

$${}_1f_1 = \frac{(1+0,07456)^2}{(1+0,073)} - 1 = 0,07611$$

El factor de descuento se obtendrá de la fórmula siguiente: $v(k) = (1+I(k))^{-k \frac{365}{360}}$, por ejemplo:

$$v(2) = (1+0,07456)^{-2 \cdot \frac{365}{360}} = 0,86432.$$

El interés variable del swap será el LIBOR a 1 año más 1%.

Los intereses a pagar por la rama variable se calcularán de la siguiente forma:

$$\text{Intereses rama variable} = C \cdot I_{BA}^r \cdot \frac{365}{360}.$$

La tabla siguiente recoge los resultados obtenidos:

k Base A-1	I(k)	LIBOR 1año ${}_{k-1}f_1 = I_{BA}^r$	Factor de descuento	Interés variable swap. LIBOR 1año + 1%
1	7,3%	7,3%	0,93105	8,3%
2	7,456%	7,611%	0,86432	8,611%
3	7,778%	8,425%	0,79626	9,425%
4	7,997%	8,656%	0,73198	9,656%

El valor el 30 de Junio del año A-1 de los intereses a pagar por la rama variable se recoge en el siguiente cuadro:

<i>Año</i>	<i>Nocional</i>	<i>Interés variable</i>	<i>Intereses rama variable</i>	<i>Factor de descuento</i>	<i>Valor en A-1 de la rama variable</i>
<i>A-1</i>					
<i>A</i>					
<i>A+1</i>	3.000.000	8,611%	261.930,60	0,86432	223.290,54
<i>A+2</i>	5.000.000	9,425%	477.810,85	0,79626	375.250,69
<i>A+3</i>	7.000.000	9,656%	685.342,67	0,73198	494.785,33
<i>Total=</i>					<i>1.093.326,57\$</i>

El tipo de interés a aplicar a la rama a tipo fijo deberá ser aquel que verifique la ecuación siguiente:

$$(3.000.000 \cdot 0,86432 + 5.000.000 \cdot 0,79626 + 7.000.000 \cdot 0,73198) \cdot I_{AB} \cdot \frac{365}{360} = 1.093.326,57$$

de donde,

$$I_{AB} = 0,09346, \text{ es decir, } 9,346\% \text{ de interés fijo.}$$

b) Transcurrido un año, se deben calcular de nuevo los tipos de interés a plazo, LIBOR a 1 año, así como los factores de descuento, pues ha variado la curva de tipos de interés para el \$. Siguiendo el mismo proceso utilizado en el apartado a) se obtienen los siguientes resultados:

<i>k</i>	<i>I(k)</i>	<i>LIBOR 1año</i> ${}_{k-1}f_1 = I_{BA}^r$	<i>Factor de descuento</i>	<i>Interés variable swap.</i> <i>LIBOR 1año + 1%</i>
<i>1</i>	7,404%	7,404%	0,93014	8,404%
<i>2</i>	7,943%	9,031%	0,85642	10,031%
<i>3</i>	8,388%	9,732%	0,78271	10,732%

El valor actualizado el día 30 de Junio del año A de la rama a tipo variable es:

<i>Año</i>	<i>Nocional</i>	<i>Interés variable</i>	<i>Intereses rama variable</i>	<i>Factor de descuento</i>	<i>Valor en A de la rama variable</i>
<i>A</i>					
<i>A+1</i>	3.000.000	8,404%	255.612,65	0,93014	237.756,42
<i>A+2</i>	5.000.000	10,031%	508.528,14	0,85642	435.551,76
<i>A+3</i>	7.000.000	10,732%	761.673,44	0,78271	596.168,78
<i>Total=</i>					<i>1.269.436,97\$</i>

El valor el día 30 de Junio del año A de la rama a tipo fijo asciende a:

$$(3.000.000 \cdot 0,93014 + 5.000.000 \cdot 0,85642 + 7.000.000 \cdot 0,78271) \cdot 0,09346 \cdot \frac{365}{360} = 1.189.374,43\$.$$

Como han variado las condiciones financieras del mercado del \$, el valor de las dos ramas ya no coincide, siendo el valor del swap el día 30 de junio del año A:

$$\text{Valor rama variable} - \text{Valor rama fija} = 1.269.436,97 - 1.189.374,43 = 80.062,54\$.$$

BIBLIOGRAFÍA.

ALEGRE, P.; BADÍA, C.; BORRELL, M.; SANCHO, T. Ejercicios resueltos de Matemática de las operaciones financieras. Ed. AC, Madrid, 1.995.

ALEXANDER, G.; SHARPE, W.F.; BAILEY, J.V. Fundamentos de inversiones. Teoría y práctica. Méjico: Prentice Hall, 2.003.

AMAT, O. La bolsa. Fundamentos y técnicas para invertir. Bilbao: Ediciones Deusto, 2.004.

BIERWAG, G.O. Duration Análisis. Managing interest rate risk. Ed. Ballinger Pub. Co.; Cambridge, 1.987.

BISIÈRE, C.; La structure par terme des taux d'intérêt. Ed. Press Universitaires de France. Paris, 1.997.

BLACK, F. ; SHOLES, M. ; "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, May-June 1.973, pp.637-654.

COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M.; " Options pricing: A simplified approach", *Journal of Financial Economics*, n.7, 1.979, pp-229-263.

DEVOLDER, P.; Financer Stochastique. Editions de L'université de Bruxelles. 1.993.

ELTON, E.J; GRUBER, M.J. Modern Portofolio theory and investment analysis. New York: John Wiley & Sons, 1987

FLAVELL, R.; Swaps and other derivatives. ED.Wiley finance. Chichester, 2.002.

GALITZ, L.; Ingenieria Financiera (tomos I y II). ED. Ediciones Folio, Barcelona, 1.994.

HULL, J. C. Introducción a los mercados de futuros y opciones. Madrid: Prentice Hall, 2002.

MASCAREÑAS, J. Gestión de Activos financieros de renta fija. Madrid: Piràmide, 2.002.

M.E.F.F.; Condiciones generales de los contratos.

NUÑEZ RAMOS, S. Estimación de la Estructura Temporal de los tipos de interés: elección entre métodos alternativos. Servicio de Estudios del Banco de España. Documento de trabajo nº 9522, Madrid 1.995.

PLISKA, S.; Introduction to mathematical finance. Ed. Blackwell Pub. Inc. Massachusetts, 1.997.

SABER, N.; Interest rate swaps. Ed. Irwin, Burr Ridge, 1.994

SANCHEZ, J.L. Curso de bolsa y mercados financieros. Barcelona: Ariel, 2.007.

SANTANDREU, E.. El análisis de la empresa a través de los ratios. Año 2000

SHARPE, W.; Investments. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1.985.

TORRE, A. De la; Operaciones de permuta financiera (swaps). Ed. Ariel Económica. Madrid, 1.996.

WILMOTT, P.; DEWYNNE, j.; HOWISON, S. Option pricing: mathematical models and computation. Ed. Oxford financial press, Oxford, 1.993.

Para los indicadores de bolsa se ha consultado: <http://www.walmaster.com/analysetechnique/index.asp>