UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

CARACTERITZACIONS DE SUCCESSIONS GRÀFIQUES

Autor: Josep Martí Sabaté

Director:	Dr. F. Javier Soria de Diego
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona,	18 de gener de 2019

Agraïments

M'agradaria agrair principalment al Dr. Javier Soria de Diego que acceptés dirigir-me aquest treball i la posterior ajuda que m'ha brindat. També m'agradaria agrair a tota la meva família i la meva parella el suport que m'han donat, tant amb la realització d'aquest treball com amb l'estudi del grau, ja que en moments de feblesa ells m'han transmès la força i els ànims que necessitava.

Abstract

Es diu que una successió és gràfica si defineix la successió de graus d'un graf simple. Hi ha diferents criteris que permeten comprovar si una successió és o no gràfica. En aquest treball s'estudien set dels diferents criteris que existeixen i es demostra l'equivalència entre tots ells. Usant aquests criteris també es troba la relació entre la mida i la probabilitat que una successió sigui gràfica i es dóna una funció que aproxima aquesta relació. Per fer-ho s'utilitza un software propi per fer les proves i que retorna, a partir de les mides que s'introdueixen com a paràmetre, el percentatge de successions creades aleatòriament que són gràfiques.

We say that a sequence is graphical if it defines the sequence of degrees of a simple graph. There are a bunch of different criteria to check whether a sequence is graphical or not. In this project, seven of these criteria are discussed and the equivalence between them is proved. By using this criteria, the relation between the size and the probability of a sequence being graphical is derived, and a function approximating this relation is stated. In order to do so, a software is created which, from a size parameter introduced by the user, finds the percentage of sequences of that size, randomly created, which are graphical.

2010 Mathematics Subject Classification. 05C85, 65S05

Índex

Capítol 1

Introducció

Durant molts anys nombrosos matemàtics s'han interessat en l'estudi dels grafs, concretament en els criteris que han de complir les successions de graus per saber si defineixen un graf simple, és a dir, saber si les successions són o no gràfiques. Entre aquests matemàtics destaca Euler, que va veure que una successió per ser gràfica havia de tenir com a resultat dels seus valors un nombre parell. Els matemàtics, entre els quals es troben Ryser, Berge, Erdös, Gallai, Fulkerson, Hoffman, McAndrew, Bollobás, Grünbaum i Hasselbart, es van centrar en trobar diferents criteris que havien de complir les successions per ser gràfiques. Els set criteris que van definir eren suficient per comprovar que la successió que complís qualsevol d'aquests criteris era gràfica. No obstant, no va ser fins l'any 1991 quan Gerard Sierksma i Han Hoogeveen van publicar l'article *"Seven criteria for integer sequences being graphic"* [3], on demostraven l'equivalència que existia en el compliment de qualsevol dels 7 criteris ja esmentats i l'afirmació que aquella successió fos gràfica. Aquest article va aconseguir interrelacionar els criteris definits pels matemàtics ja referenciats per determinar si una successió era gràfica. En aquest treball s'estudiaran els diferents criteris enunciats en aquest article i s'intentarà usar els criteris per trobar aplicacions i relacions entre les mides de les successions i la probabilitat que una successió sigui gràfica.

En el segon capítol donarem les definicions necessàries per entendre els criteris, enunciarem i demostrarem el Teorema d'Euler i altres proposicions i teoremes que usarem més endavant per estudiar les implicacions que existeixen entre els diferents criteris.

En el tercer capítol veurem els enunciats dels 7 criteris i demostrarem les implicacions que existeixen entre ells i l'afirmació que una successió sigui gràfica usant implicacions en cadena que ens permetran demostrar les equivalències que existeixen entre que una successió d decreixent i amb suma parella compleixi qualsevol dels 7 criteris i l'afirmació que la successió d sigui gràfica. Serà suficient l'estudi de 8 implicacions diferents per afirmar l'equivalència entre els criteris i el Teorema.

En el quart i últim capítol utilitzarem els diferents criteris ja demostrats per estudiar successions generades de forma aleatòria i comprovar si són o no successions gràfiques. Per fer-ho hem creat un programa Java anomenat Successions Gràfiques, que compta amb diferents opcions per estudiar successions i les seves propietats. Una de les aplicacions que té és calcular un nombre definit per pantalla de successions amb valors aleatoris d'una mida seleccionada i calcular usant qualsevol dels criteris ja vistos (o tots) si la successió és gràfica. Una altra de les possibilitats que proporciona el software és calcular totes les successions amb suma parella i valors entre 0 i $m-1$ d'una mida m indicada i calcular el percentatge de les successions calculades que són gràfiques. Finalment el programa també compta amb la possibilitat d'introduir una successió qualsevol i saber si és gràfica o no. Aquesta eina, tot i les limitacions que més endavant explicarem per l'alt cost computacional dels càlculs, ens ajudarà a extreure la relació entre la mida de les successions amb suma parella i les probabilitats que la successió sigui gràfica. Amb aquests resultats estudiarem la relació i donarem funcions logarítmiques que aproximaran la regressió lineal amb un alt coeficient de determinació R^2. Es pot descarregar el programa des d'aquest enllaç: `http://www.maia.ub.es/~soria/TFG_Josep_Marti/Successions_grafiques.jar`.

Capítol 2

Resultats previs

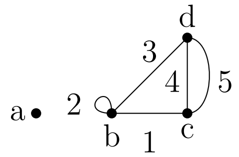
En aquest segon capítol donarem definicions bàsiques que ens ajudaran a entendre millor que és un graf i enunciarem algunes de les seves propietats. També definirem i demostrarem el Teorema d'Euler, en veure'm aplicacions i estudiarem els casos on el teorema és suficient per veure si una successió de graus pot definir un graf. Veurem que tot i que sigui necessari no sempre que es compleixi el teorema és suficient, per tant necessitarem altres criteris que ens ajudin a saber si, en complir-se, una successió de graus defineix un graf.

2.1 Definicions i Teorema d'Euler

Notació 2.1. Definim els nombres naturals com $\mathbb{N} = \{1, \dots\}$. Al llarg d'aquest treball quan parlem de nombres naturals tret que s'indiqui el contrari inclourem també el 0.

Definició 2.2. Un graf $G = (V, E)$ és un conjunt d'elements $V = V(G)$ anomenats vèrtexs i un conjunt d'arestes $E = E(G)$ que uneixen dos vèrtexs. Si dos vèrtexs estan units per dos o més arestes les anomenem arestes múltiples o paral·leles. Si una aresta uneix un vèrtex amb ell mateix l'anomenem un "loop" o llaç. Direm que un graf és simple si és un graf sense direcció, no conté cap llaç i no té més d'una aresta entre dos vèrtex qualssevol.

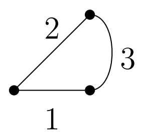
Exemple 2.3. Sigui el graf $G = (V, E)$ on $V = \{a, b, c, d\}, E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Anem a dibuixar el graf per veure si és un graf simple o no.



Graf compost

Veiem que G no és un graf simple ja que té un vèrtex amb 0 arestes, hi ha un vèrtex amb un "loop" i a més hi ha dos vèrtex que estan connectats per dos arestes paral·leles.

Exemple 2.4. Sigui el graf $G = (V, E)$ on $V = \{a, b, c\}, E = \{1, 2, 3\}$. Anem a veure si G és un graf simple.



Graf simple

Veiem que G és un graf simple ja que tots els seus vèrtex estan connectats entre ells per una única aresta i a més cap dels seus vèrtexs conté "loops".

Observació 2.5. Observació Fonamental. Tret que s'indiqui el contrari suposarem que tots els grafs en aquest treball són simples. A més a més, els grafs tindran com a mínim 2 vèrtexs i 1 aresta que els uneix.

Definició 2.6. Donat un graf sense direcció, una successió de graus és una successió no creixent de les valències dels vèrtex del graf.

Definició 2.7. Definim la matriu d'adjacència com una matriu simètrica on les files i columnes representen cadascun dels vèrtexs del graf. Un cop definit el nombre de files i columnes per cada posició a_{ij} s'indica el nombre d'arestes que uneixen el vèrtex i i el vèrtex j del graf. Definint tots els valors de la matriu d'aquesta forma obtenim una matriu que representa el nombre d'arestes que hi ha entre cada parell de vèrtexs.

Observació 2.8. Si el graf és simple la matriu d'adjacència té la particularitat de tenir zeros a la diagonal ja que per definició un graf simple no pot tenir "loops". A més com dos vèrtex no poden estar connectats per més d'una aresta tots els valors de la matriu són o bé zeros o bé uns.

Exemple 2.9. Sigui el graf $G = (V, E)$ on $V = \{a, b, c, d\}, E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. vist a l'Exemple 2.3. Anem a calcular la seva matriu d'adjacència.

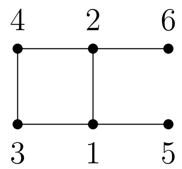
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veiem que el punt a no té cap aresta, per tant la primera fila i columna estan formades per 0. El punt b en canvi té un llaç i una aresta que l'uneix en el punt c i d. Finalment el punt c i d estan units per dos arestes, que es representa a la matriu amb un 2 a les posicions $(2, 3)i(3, 2)$.

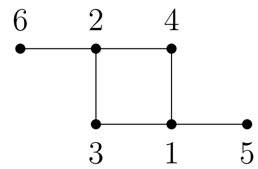
Definició 2.10. Sigui $(d_1, \cdots, d_n)$ una successió no positiva de nombres enters amb $n = d_1 + \cdots + d_n$ senar. La successió $(d_1, \cdots, d_n)$ l'anomenarem gràfica si i només si hi ha un graf simple que té $(d_1, ..., d_n)$ com a successió de graus.

Definició 2.11. Un isomorfisme entre dos grafs G i H és una bijecció f entre els conjunts de vèrtexs $f : V(G) \to V(H)$ que preserva la relació d'ajacència. És a dir, qualsevol parella de vèrtex (u, v) de G són adjacents si i només si ho són les seves imatges, $f(u)$ i $f(v)$ de H.

Exemple 2.12. Sigui el graf G definit per la successió gràfica $(3, 3, 2, 2, 1, 1)$. Anem a veure com la mateixa successió pot definir dos graf no homeomorfs.



Graf A

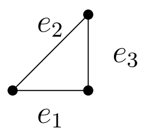


Graf B

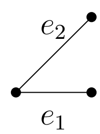
Veiem que els dos grafs venen definits per la mateixa successió gràfica però no són isomètrics, no podem definir cap isomorfisme que ens relacioni el graf A i el graf B.

Definició 2.13. Sigui $G(V, E)$ un graf i sigui e una aresta continguda en $E(G)$. Anomenem graf $G - e$ el subgraf resultant d'eliminar l'aresta e al graf G.

Exemple 2.14. Sigui el graf $G = (V, E)$ on $V = \{a, b, c\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Anem a veure com es dibuixa el graf $G - e_3$.



Graf G



Graf $G - e_3$

Definició 2.15. Sigui $G(V, E)$ un graf i sigui v un vèrtex contingut en $G(V)$. Anomenem graf $G - v$ el subgraf resultant d'eliminar el vèrtex v i totes les arestes que connecten el vèrtex amb els seus veïns G.

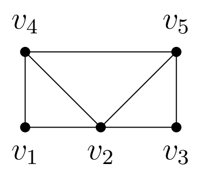
Exemple 2.16. Sigui el graf $G = (V, E)$ on

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

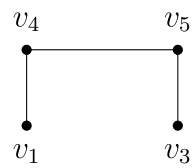
. Anem a veure com es dibuixa el graf $G - v_2$.

Teorema 2.17 (Teorema d'Euler [4], 1741)**.** *Per a tot graf simple G, la suma dels graus de tots els seus vèrtexs és igual al doble del nombre d'arestes:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$



Graf G



Graf $G - v_2$

Observem com el graf $G - v_2$ manté les arestes que no sortien del vèrtex v_2.

Demostració. Demostrarem el teorema fent inducció sobre m:
Per $m = 0$ el resultat és trivial. Prenem $m = 1$, llavors tenim que o bé $n = 2$ i els dos vèrtex tenen grau 1 o bé $n = 1$ i l'aresta forma un llaç. Veiem com els dos casos compleixen la igualtat. Suposem cert el teorema per $a \leq k$. Sigui G un graf amb $m = k + 1$ i considerem e una aresta de G tal que traient-la formem el graf H, $H = G - e$. Llavors tots els vèrtexs del graf H tenen el mateix grau que en G excepte dos vèrtex que tindran un grau menys (en el cas que e no sigui un llaç) o un vèrtex que tindrà dos graus menys (si e és un llaç). Usant la hipòtesi d'inducció:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V(H)} d_H(v) + 2 = 2(m-1) + 2 = 2m.$$

□

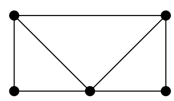
Exemple 2.18. Anem a veure algunes aplicacions del Teorema d'Euler:

- La suma dels valors de la successió és senar:

  Sigui $\{4, 3, 3, 2, 1\}$ una successió de graus dels vèrtex d'un graf G. Veiem com la suma dels graus dels diferents vèrtexs dóna $4 + 3 + 3 + 2 + 1 = 13$ senar. Per tant aplicant el Teorema d'Euler veiem que aquest graf no pot ser simple ja que hauria de tenir $13/2$ arestes, però $13/2 \notin \mathbb{N}$. Per tant aquesta successió de graus no és gràfica.

- La suma dels valors de la successió és parella:

  Sigui $D = \{4, 3, 3, 2, 2\}$ una successió de graus dels vèrtex d'un graf G. Veiem com la suma dels graus dels diferents vèrtexs dóna $4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 14$ parella. Per tant aplicant el Teorema d'Euler veiem que aquest graf simple pot existir. Anem a dibuixar un dels grafs que ho compleixen.

  Graf associat a D.

  Veiem com els vèrtex del graf compleixen els graus indicats en la successió.

- La suma dels valors de la successió és parella:

  Sigui $\{4, 3, 3, 2, 0\}$ una successió de graus dels vèrtex d'un graf G. Veiem com la suma dels graus dels diferents vèrtexs dóna $4 + 3 + 3 + 2 = 12$ parella. Per tant aplicant el Teorema d'Euler veiem que aquest graf simple pot existir. Però veiem com un vèrtex té valència 0, fet que ens permet afirmar que la successió no és gràfica.

Veiem com el Teorema d'Euler ens dóna una condició necessària per a què un graf sigui simple, però no és condició suficient per ser-ho. Aquest fet ens porta a preguntar-nos si hi ha criteris suficients per poder afirmar que una successió de graus defineix un graf.

Definició 2.19. Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Definim la matriu $(0,1)$ de Berge associada a la successió d com la matriu $A = (a_{i,j})$ amb els valors definits de la següent forma:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & j = i \\ 1, & j \in \{1, \cdots, d_i\}, \text{ si } d_i < i \\ 1, & j \in \{1, \cdots, d_{i+1}\}/\{i\} \text{ si } d_i \geq i \\ 0, & \text{la resta.} \end{cases}$$

Exemple 2.20. Sigui la successió $(4,3,3,2,2)$ una successió decreixent de nombres naturals. Aleshores construïm la matriu $(0,1)$ de Berge corresponent a la successió de la següent forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definició 2.21. Sigui d una successió decreixent de nombres naturals i sigui la matriu A de dimensió $m \times n$ la seva matriu de Berge associada. Aleshores definim $\bar{d} = (\bar{d}_1, \cdots, \bar{d}_n)$ com la successió que s'obté al sumar els valors de cada columna de la matriu A, és a dir, $\bar{d}_i = \sum_{k=0}^{m} a_{k,i}$.

Exemple 2.22. Usant la matriu vista a l'Exemple 2.20 veiem que

$$(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4, \bar{d}_5) = (4, 4, 2, 3, 1).$$

Definició 2.23. Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Definim la matriu $(0,1)$ de Ferrers associada a la successió d com la matriu $A = (a_{i,j})$ amb els valors definits de la següent forma:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & j \in \{1, \cdots, d_i\} \\ 0, & \text{la resta.} \end{cases}$$

Exemple 2.24. Sigui la successió $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió decreixent de nombres naturals. La matriu $(0, 1)$ de Ferrers associada a d és la següent:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definició 2.25. Sigui d una successió decreixent de nombres naturals i sigui la matriu A de dimensió $m \times n$ la seva matriu de Ferrers associada. Aleshores definim $d^* = (d_1^*, \cdots, d_n^*)$ com la successió que s'obté al sumar els valors de cada columna de la matriu A, és a dir, $d_i^* = \sum_{k=0}^{m} a_{k,i}$. Anomenem d^* a la partició conjugada de d.

Exemple 2.26. Usant la matriu vista a l'Exemple 2.24 veiem que:

$$(d_1^*, d_2^*, d_3^*, d_4^*) = (5, 5, 3, 1).$$

2.2 Teorema de Gale-Ryser

En aquesta secció del treball donarem algunes definicions necessàries per poder enunciar i demostrar el Teorema de Gale-Ryser, teorema que necessitarem més endavant per provar una implicació entre els criteris de Ryser i Berge.

Observació 2.27. En aquesta secció considerarem les matrius A com matrius formades per 0 i 1 i ens fixarem en la suma de les diferents columnes de la matriu $c(A)$ i les sumes de les files de la matriu, $r(A)$.

Definició 2.28. Siguin $d = (d_1, \cdots, d_k), q = (q_1, \cdots, q_l)$ dos successions decreixents de nombres naturals. Direm que d i q són particions de n si es compleix

$$d_1 + \cdots + d_k = n = q_1 + \cdots + q_l$$

.

Exemple 2.29. Donades les successions $d = (5, 4, 3, 2)$ i $q = (3, 3, 3, 3, 2)$ veiem que són particions de 14 ja que $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ i $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$.

Definició 2.30. Sigui d una successió decreixent de nombres naturals, usant la Definició 2.23 podem definir la seva matriu de Ferrers A complint $c(A) = d$. Si calculem la matriu trasposta de A obtenim la matriu A^* on $d^* = c(A^*)$.

Definició 2.31. Siguin $d = (d_1, \cdots, d_k), q = (q_1, \cdots, q_l)$ dos successions decreixents de nombres naturals tals que $d_1 + \cdots + d_k = n = q_1 + \cdots + q_n$. Direm que q està dominat per d si $\sum_{i=1}^{m} q_i \leq \sum_{i=1}^{m} d_i$ per tots els valors positius m, on $q_i = 0$ per tota $i > l$ i $d_i := 0$ per tota $i > k$. En aquest cas direm que $d \trianglerighteq q$.

Exemple 2.32. Donades les successions $a = (3, 3, 3, 1), b = (5, 0, 1)$ veiem que no existeix la relació de dominància entre a i b ja que per una banda veiem com per $m = 1$ tenim que $3 < 5$ i per altra banda per $m = 2$ tenim que $6 > 5$.

Definició 2.33. Sigui A una matriu $(0, 1)$ de dimensió $k \times l$. Direm que A té un forat si existeixen $i \leq k$, $j < h \leq l$ tals que $a_{i,j} = 0$ i $a_{i,h} = 1$.

Observació 2.34. Observem que $r(A)$ és una partició qualsevol de n i no guarda cap relació amb la matriu de Ferrers.

Observació 2.35. Utilitzarem $||\Delta||$ per parlar de la norma Euclidiana.

Lema 2.36. *Sigui A una matriu $(0, 1)$ de dimensió $k \times l$ tal que $d = c(A)$, $r(A) \trianglerighteq q$ i $r(A) \neq q$. Llavors podem trobar una matriu $(0, 1)$ de dimensió $k \times l$ que anomenarem A' tal que $c(A') = d$, $r(A') \trianglerighteq q$ i $||r(A') - q|| < ||r(A) - q||$.*

Demostració. Sigui $r(A) = (r_1, \cdots, r_l)$. Sigui i el mínim valor tal que $r_i > q_i$, i sigui j el mínim valor tal que $r_j < q_j$. Com $i < j$ veiem que $r(A) \trianglerighteq q$.

Definim ara el vector

$$r' := (r'_1, \cdots, r'_l) = (r_1, \cdots, r_{i-1}, r_i - 1, r_{i+1}, \cdots, r_{j-1}, r_j + 1, r_{j+1}, \cdots, r_l)$$

Amb aquesta definició és fàcil observar que $||r' - q|| < ||r - q||$. A més a més també veiem que $r' \trianglerighteq q$ ja que per tot $s < j$ veiem que $r'_s \geq q_s$i per tot $s \geq j$ tenim que $r'_1 + \cdots + r'_s = r_1 + \cdots + r_s \geq q_1 \cdots q_s$.

Com es compleix $r_i > q_i \geq q_j > r_j$, podem trobar una fila amb índex h tal que $a_{h,i} = 1$ i $a_{h,j} = 0$. Per tot valor h escollit podem trobar la matriu $A' = (a'_{s,t})$ intercanviant els valors $a_{h,i}$ i $a_{h,j}$, és a dir, definint al valor $a'_{s,t}$ de la següent forma:

$$a'_{s,t} = \begin{cases} 1, \text{ si } (s,t) = (h,j); \\ 0, \text{ si } (s,t) = (h,i); \\ a_{s,t}, \text{ en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

Aquesta matriu compleix que la suma dels valors de les columnes val d i la suma dels valors de les files val r'. □

Exemple 2.37. Siguin $c(A) = (3, 2, 2, 2, 1), r(A) = (3, 3, 3, 1)$.Usant el Lema 2.36 sabem que existirà la matriu A ja que el vector $c(A)^* = (5, 4, 1) \trianglerighteq (3, 3, 3, 1)$. Usant el lema podem passar de la matriu de Ferrers B a la nostra matriu A :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Teorema 2.38 (Teorema de Gale-Ryser)**.** *Siguin p i q dos particions, llavors podem afirmar que existeix una matriu $(0,1)$ amb $d = c(A)$ i $q = r(A)$ si i només si q està dominada per d^*.*

Demostració. Anem a veure que si existeix una matriu $(0,1)$ amb $d = c(A)$ i $q = r(A)$ llavors q està dominada per d^*. Sigui A una matriu $(0,1)$ de dimensió $k \times l$ tal que $d = c(A)$ i $r(A) = q$. Si la matriu és de Ferrers aleshores $d^* = q$ i la dominància es compleix. Suposem doncs que no ho és. Sigui (i,j) la posició on tenim el forat i sigui $1 = a_{i,h}$, $i \leq k, j < h \leq l$. Fent un canvi de valors entre $a_{i,j}$ i $a_{i,h}$ veiem que obtenim una matriu $\tilde{A}$ tal que $c(\tilde{A}) = d$ amb un nombre menor de forats que la matriu A. Com es compleix que $r(\tilde{A})$ domina $r(A)$ per inducció sabem que en un nombre finit de passos (tants com forats tinguem) tenim que d^* domina q, tal com volíem veure.
Veurem ara que si q està dominada per d^* llavors existeix una matriu $(0,1)$ amb $d = c(A)$ i $q = r(A)$. Siguin $d = (d_1, \cdots, d_k)$, $q = (q_1, \cdots, q_l)$ particions d'un natural n tals que $d^* \trianglerighteq q$. Podem observar com tenim una matriu de $(0,1)$ B de dimensions $k \times l$ tal que $c(B) = d$ i $r(B) \trianglerighteq q$. Aquesta matriu és la matriu de Ferrers per d amb $l - d_1$ columnes de zeros unides. Per veure la dominància de p^* podem aplicar el Lema 2.36, que ens afirma que podem trobar una matriu amb les particions donades tal que la suma dels valors de les seves columnes sigui $r(A) = q$ i la suma dels valors de les seves files sigui $c(A) = d$, tal com volíem demostrar. □

Exemple 2.39. Sigui A una matriu $(0,1)$ tal que $p = (3,3,2,1,1)$ i $q = (3,2,2,2,1)$. Anem a convertir la A amb una matriu de Ferrers que anomenarem A'.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Calculant la successió p^* d'aquesta nova matriu A' veiem que $p^* = (5,3,2,0,0)$ i domina q ja que $5 > 3$, $8 > 5$, $10 > 7$, $10 > 9$ i $10 = 10$.

Corol·lari 2.40. *Sigui una matriu A tal que p sigui una successió on p_i és la suma dels elements de la fila de A i sigui q una successió tal que q_j sigui la suma dels elements de la columna j de A. Llavors podem afirmar que p^* domina q si i només sí q^* domina p.*

Demostració. Per veure-ho usarem el Teorema de Gale-Ryser 2.38. Per definició de p i q usant el teorema veiem que p^* domina q. Per altra banda sabem que invertint la matriu A aleshores q_i passa a ser la suma dels elements de la fila i i p_j és la suma dels elements de la columna j. Per tant com a resultat del Teorema veiem que en aquest cas també es compleix q^* domina a p. □

Observació 2.41. Es pot provar que es compleix la igualtat $(p^*)^* = p$.

Exemple 2.42. Sigui $p = (3, 3, 2, 1, 1)$ una successió decreixent. Tal com hem vist a l'Exemple 2.39 sabem que $p^* = (5, 3, 2, 0, 0)$. Anem a calcular $(p^*)^*$. Per fer-ho primerament calcularem la matriu de Ferrers associada a p^*.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veiem doncs que podem calcular $(p^*)^*$ a partir de la matriu F. Comprovem ara si es compleix la igualtat.

$$(p^*)^* = (3, 3, 2, 1, 1) = p$$

.

Capítol 3

Els set Criteris i el Teorema

3.1 Introducció

En aquesta part del treball estudiarem els set criteris que ens permeten saber si una successió no creixent de nombres enters és gràfica. Primerament donarem la definició dels set criteris usats al teorema. Un cop tinguem els set criteris enunciats passarem a enunciar i demostrar el teorema usant implicacions entre els diferents criteris. Com a resultat final veurem que si es compleix qualsevol dels set criteris aleshores la successió és gràfica i intentarem veure quin dels set criteris és més fàcil de comprovar.

3.2 Enunciats dels set Criteris

1. El Criteri de Ryser

   Anomenem a la successió $(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_p)$ un gràfic bipartit si i només si existeixen dos grafs bipartits simples amb els graus dels vèrtexs definits per les successions de graus $(a_1, \cdots, a_p)$ i $(b_1, \cdots, b_n)$. Definim $f = \text{màx}\{i : d_i \leq i\}$. Definim també els valors $\tilde{d_i}$ de la següent forma:

   $$\tilde{d_i} = \begin{cases} d_i + 1 \text{ si } i \in \{1, \cdots, f\}. \\ d_i \text{ si } i \notin \{1, \cdots, f\}. \end{cases}$$

   Per tant el Criteri de Ryser es pot enunciar com:

   La successió d'enters $(\tilde{d_1}, \cdots, \tilde{d_n}; \tilde{d_1}, \cdots, \tilde{d_n})$ defineix un graf bipartit.

2. El Criteri de Berge

   Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Usant la Definició 2.21 podem calcular la successió $\bar{d} = (\bar{d_1}, \cdots, \bar{d_n})$. Amb aquesta successió podem enunciar el Criteri de Berge de la següent forma :

   $$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{d_i}, \text{ per tot } k \in \{1, \cdots, n\}. \tag{3.1}$$

3. El Criteri de Erdös-Gallai

   Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Direm que la successió d compleix el criteri de Erdös-Gallai si:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \text{mín}\{k, d_j\} \text{ per tot } k \in \{1, \cdots, n\}. \tag{3.2}$$

4. El Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew

   Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Direm que la successió d compleix el criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew si:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(n-m-1) + \sum_{i=n-m+1}^{n} d_i \tag{3.3}$$

   per tot $k \in \{1, \cdots, n\}$, $m \geq 0$ i amb $k + m \leq n$.

5. El Criteri de Bollobás

   Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Direm que la successió d compleix el criteri de Bollobás si:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{k} \text{mín}\{k-1, d_i\} \text{ per tot } k \in \{1, \cdots, n\}. \tag{3.4}$$

6. El Criteri de Grünbaum

   Sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$ una successió decreixent de nombres naturals. Direm que d compleix el criteri de Grünbaum si:

$$\sum_{i=1}^{k} \text{màx}\{d_i, k-1\} \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i \text{ per tot } k \in \{1, \cdots, n\}. \tag{3.5}$$

7. El Criteri de Hässelbarth

   Donada una successió $d = (d_1, \cdots, d_n)$ decreixent de nombres naturals usem la Definició 2.25 per definir $d^* = (d_1^*, \cdots, d_n^*)$. Direm que d compleix el criteri de Hässelbarth si:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} (d_i^* - 1) \tag{3.6}$$

   per tot $k \in \{1, \cdots, f\}$ on $f = \text{màx}\{i : d_i \geq i\}$.

3.3 Teorema d'equivalència dels Criteris

En aquesta secció enunciarem el Teorema Principal i demostrarem les diferents equivalències que existeixen entre els set criteris i el teorema.

Teorema 3.1 (Teorema Principal)**.** *Sigui* $(d_1, ..., d_n)$ *una successió no positiva de nombres enters amb suma parella. Si la successió compleix qualsevol dels* 7 *criteris enunciats aleshores la successió és gràfica i defineix un graf simple amb les valències dels vèrtex corresponents als valors de la successió.*

Demostració. Per provar aquest teorema demostrarem de forma cíclica les implicacions que existeixen entre els diferents criteris comentats i les propietats d'un graf.

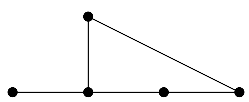
1. $(d_1, ..., d_n)$ defineix un Graf simple $\Rightarrow$ Criteri de Ryser:

   Sigui $G = (V, E)$ un graf simple amb els graus dels vèrtex complint la successió $(d_1, ..., d_n)$. Podem construir un graf bipartit que anomenarem $B(G)$ amb components V_1 i V_2 on $V_1 = V_2 = V$. Definirem també les arestes F usant la següent construcció:

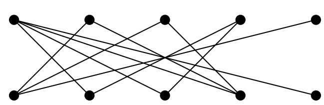
   Sigui V_1 el graf definit pels vèrtexs $(v_{1_1}, ..., v_{n_1})$ i sigui V_2 el graf definit pels vèrtexs $(v_{1_2}, ..., v_{n_2})$. Si els punts $d_i, d_j \in V$ estan units per una aresta f_{d_i,d_j} i $f_{d_i,d_j} \in E$ graf G aleshores definim una aresta que uneix els punts $v_{i_1}v_{j_2}$ i els punts $v_{j_1}v_{i_2}$. En canvi $f_{d_i,d_j} \notin E$ no definim cap aresta entre els vèrtex de V_1 i V_2. A més a més, si $i \in \{1, \cdots, f\}$, és a dir, $d_i \geq i$ aleshores també definim una aresta entre els vèrtex $v_{i_1}v_{i_2}$. Observem que gràcies a la construcció del graf bipartit $B(G)$ les dos components estan formades per una successió de graus de la forma$(d_1 + 1, \cdots, d_f + 1, d_{f+1}, \cdots, d_n)$, successió que compleix el Criteri de Ryser.

   Anem a veure un exemple.

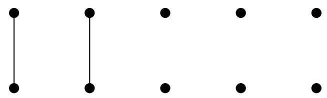
   Exemple 3.2. Sigui el graf $B(G)$ el graf amb successió $(3, 2, 2, 2, 1)$.



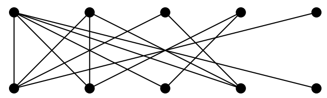
   Usant l'algoritme veiem que podem formar un graf bipartit amb les arestes següents:



Afegirem també arestes entre els vèrtex que tenen un índex menor al nombre d'arestes que surten d'ells, és a dir, el seu índex està contingut a $\{1, \cdots, f\}$.



Per tant el graf bipartit queda definit de la següent forma:



Podem observar com la successió $(4, 3, 2, 2, 1; 4, 3, 2, 2, 1)$ defineix un graf bipartit.

2. Criteri de Ryser $\Rightarrow$ Criteri de Berge

   Sigui A una successió de nombres enters que defineix un gràfic bipartit, $A = (\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n; \tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n)$. Pel Teorema de Ryser [2] sabem que es compleix la desigualtat $\sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i^*$ per tot $k \in \{1, \cdots, n\}$. Per la definició dels elements $\tilde{d}_i^*$ sabem que:

$$\tilde{d}_i^* = \begin{cases} \bar{d}_i + 1 \text{ per tot } i \in \{1, \cdots, f\}. \\ \bar{d}_i \text{ per tot } i \in \{f+1, \cdots, n\}. \end{cases}$$

   A més a més, a l'apartat anterior ja hem vist com es construeixen els elements $\tilde{d}_i$ per tant podem calcular desigualtats:

   Cas $k \leq f$:

$$\sum_{i=1}^{k} (d_i + 1) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i^* = \sum_{i=1}^{k} (\bar{d}_i + 1).$$

   Per tant, veiem que també es compleix la desigualtat $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i$.

   Cas $k \geq f + 1$:

   Primerament estudiarem $\sum_{i=1}^{k} d_i + f = \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} d_i &= \sum_{i=1}^{f} d_i + \sum_{i=f+1}^{k} d_i \\ &= \sum_{i=1}^{f} \tilde{d}_i - f + \sum_{i=f+1}^{k} \tilde{d}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i - f \end{aligned} \tag{3.7}$$

Per tant veiem que es compleix:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i + f = \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i^* = \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i + f.$$

D'on podem treure que $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i$.
Finalment podem observar com per tota k es compleix la desigualtat definida pel Criteri de Berge.

Exemple 3.3. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de graus que defineix un graf, tal com hem vist a l'Exemple 2.18. Aleshores construïm la matriu $(0, 1)$ de Berge corresponent a la successió de la següent forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usant la matriu A veiem que

$$(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4, \bar{d}_5) = (4, 4, 2, 3, 1).$$

Ens falta comprovar si $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i$. Veiem que $4 \leq 4$, $7 < 8$, $10 \leq 10$, $12 < 13$ i $14 \leq 14$ per tant d compleix el criteri de Berge.

3. Criteri de Berge $\Rightarrow$ Criteri de Erdös-Gallai

   Considerem la matriu $(0, 1)$ de Berge corresponent a la successió $(\bar{d}_1, \cdots, \bar{d}_n)$ de la Definició 2.21. Llavors per definició sabem que la suma $\sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i$ és el nombre de 1 que tenim a les primeres k columnes de la matriu. Com sabem en aquesta matriu els elements de la diagonal són 0, per tant podem parlar de la matriu de dimensió $k \times k$ definida per les primeres k files i k columnes on com a màxim $k^2 - k$ valors siguin 1.

   Per altra banda cada fila j sabem que té $\min\{k, d_j\}$ nombres 1 a les primeres k posicions. Per tant per tot $k \in \{1, \cdots, n\}$ podem trobar la desigualtat següent:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, d_j\}.$$

   Veiem que aquest és el Criteri de Erdös-Gallai.

Exemple 3.4. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de graus que defineix un graf, tal com hem vist a l'Exemple 2.18. Anem a veure si es compleix el criteri de Erdös-Gallai.

Per $k = 1$ tenim que $4 \leq 4$ ja que $\sum_{j=2}^{5} \text{mín}\{1, d_j\} = 4$.

Per $k = 2$ tenim que $7 \leq 8$ ja que $2 + \sum_{j=3}^{5} \text{mín}\{2, d_j\} = 8$.

Per $k = 3$ tenim que $10 \leq 13$ ja que $6 + \sum_{j=4}^{5} \text{mín}\{3, d_j\} = 13$.

Per $k = 4$ tenim que $12 \leq 14$ ja que $12 + \sum_{j=5}^{5} \text{mín}\{4, d_j\} = 14$.

Per $k = 5$ tenim que $14 \leq 20$.

4. Criteri de Erdös-Gallai $\Rightarrow$ Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew

Suposem que es compleix el Criteri de Erdös-Gallai, anem a veure que aleshores també es compleix el Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew per tot $k \in \{1, \cdots, n\}, m \geq 0$ i a més $n - m \geq k$. Per fer-ho construïm la següent cadena de desigualtats:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} d_i &\leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \text{mín}\{k, d_j\} \\
&= k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n-m} \text{mín}\{k, d_j\} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \text{mín}\{k, d_j\} \\
&\leq k(k-1) + k(n-m-k) + \sum_{j=n-m+1}^{n} \text{mín}\{k, d_j\} \\
&\leq k(n-m-1) + \sum_{j=n-m+1}^{n} d_j.
\end{aligned}$$

Amb aquesta desigualtat queda demostrada la implicació que existeix entre el Criteri de Erdös-Gallai i el Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew.

Exemple 3.5. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de graus que defineix un graf, tal com hem vist a l'Exemple 2.18. Anem a veure si es compleix el criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew.

- Per $k = 1$:
  - Per $m = 0$ tenim que $4 \leq 4$ ja que $(5 - 1) = 4$.
  - Per $m = 1$ tenim que $4 \leq 5$ ja que $(5 - 2) + 2 = 5$.
  - Per $m = 2$ tenim que $4 \leq 6$ ja que $(5 - 3) + 4 = 6$.
  - Per $m = 3$ tenim que $4 \leq 8$ ja que $(5 - 4) + 7 = 8$.
  - Per $m = 4$ tenim que $4 \leq 10$ ja que $(5 - 5) + 10 = 10$.
- Per $k = 2$:
  - Per $m = 0$ tenim que $7 \leq 8$ ja que $2 \times (5 - 1) = 8$.
  - Per $m = 1$ tenim que $7 \leq 8$ ja que $2 \times (5 - 2) + 2 = 8$.

  - Per $m = 2$ tenim que $7 \leq 8$ ja que $2 \times (5-3) + 4 = 8$.
  - Per $m = 3$ tenim que $7 \leq 9$ ja que $2 \times (5-4) + 7 = 9$.

- Per $k = 3$:
  - Per $m = 0$ tenim que $10 \leq 12$ ja que $3 \times (5-1) = 12$.
  - Per $m = 1$ tenim que $10 \leq 11$ ja que $3 \times (5-2) + 2 = 11$.
  - Per $m = 2$ tenim que $10 \leq 10$ ja que $3 \times (5-3) + 4 = 10$.
- Per $k = 4$:
  - Per $m = 0$ tenim que $12 \leq 16$ ja que $4 \times (5-1) = 16$.
  - Per $m = 1$ tenim que $12 \leq 14$ ja que $4 \times (5-2) + 2 = 14$.
- Per $k = 5$:
  - Per $m = 0$ tenim que $14 \leq 20$ ja que $5 \times (5-1) = 20$.

Per tant es compleix el criteri.

5. Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew $\Rightarrow$ Criteri de Bollobás

Anem a veure ara com el Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew implica el Criteri de Bollobás

Escollim una $k \in \{1, \cdots, n\}$ i sigui $d = (d_1, \cdots, d_n)$. Observem que si $d_1 \leq k-1, \cdots, d_k \leq k-1$ llavors podem definir $m = n-k$ i es compleix trivialment el Criteri de Bollobás. Suposem per tant que per una certa $l < k$ es compleix $d_1, \cdots, d_l \geq k-1$ i $d_{l+1}, \cdots, d_n < k-1$.

Suposant cert el Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew veiem que canviant k per l ens queda:

$$\sum_{i=1}^{l} d_i \leq l(n-m-1) + \sum_{i=n-m+1}^{n} d_i$$

i per tant:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{l} d_i + \sum_{i=l+1}^{k} d_i \leq l(n-m-1) + \sum_{i=n-m+1}^{n} d_i + \sum_{i=l+1}^{k} d_i$$

Usant la igualtat $m = n-k$ veiem que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} d_i &\leq l(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i + \sum_{i=l+1}^{k} d_i \\ &= \sum_{i=1}^{l} (k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i + \sum_{i=l+1}^{k} d_i\end{aligned}$$

Usant la l que compleix $d_1, \cdots, d_l \geq k-1$ i $d_{l+1}, \cdots, d_k \leq k-1$ veiem que:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{l} \text{mín}\{d_i, k-1\} + \sum_{i=l+1}^{k} \text{mín}\{d_i, k-1\}$$

i per tant:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{k} \text{mín}\{d_i, k-1\}.$$

que és el Criteri de Bollobás.

Exemple 3.6. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de graus que defineix un graf, tal com hem vist a l'Exemple 2.18. Anem a veure si es compleix el criteri de Bollobás.

- Cas $k = 1$: Veiem com $4 \leq \sum_{i=2}^{5} d_i + \sum_{i=1}^{1} \text{mín}\{d_i, 0\} = 10$.
- Cas $k = 2$: Veiem com $7 \leq \sum_{i=3}^{5} d_i + \sum_{i=1}^{2} \text{mín}\{d_i, 1\} = 9$.
- Cas $k = 3$: Veiem com $10 = \sum_{i=4}^{5} d_i + \sum_{i=1}^{3} \text{mín}\{d_i, 2\} = 10$.
- Cas $k = 4$: Veiem com $12 \leq \sum_{i=5}^{5} d_i + \sum_{i=1}^{4} \text{mín}\{d_i, 3\} = 13$.
- Cas $k = 5$: Veiem com $14 = \sum_{i=1}^{5} \text{mín}\{d_i, 4\} = 14$.

Per tant la successió compleix el criteri de Bollobás.

6. Criteri de Bollobás $\Rightarrow$ Criteri de Grünbaum

   Estudiem ara al implicació que existeix entre el Criteri de Bollobás i el Criteri de Grünbaum: per tot $k \in \{1, \cdots, n\}$ suposem certa la desigualtat del Criteri de Bollobás. Estudiem ara algunes equivalències:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{k} \text{mín}\{k-1, d_i\}$$

si i només si

$$\sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{i=1}^{k} \text{màx}\{-d_i, -(k-1)\} \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i$$

si i només si

$$\sum_{i=1}^{k} \text{màx}\{0, d_i - (k-1)\} \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i$$

si i només si

$$\sum_{i=1}^{k} [\text{màx}\{d_i, (k-1)\} - (k-1)] \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i$$

si i només si

$$\sum_{i=1}^{k} \text{màx}\{d_i, (k-1)\} \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i.$$

Per tant aquest conjunt d'equivalències demostren la implicació entre el Criteri de Bollobás i el el Criteri de Grünbaum.

Exemple 3.7. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de graus que defineix un graf, tal com hem vist a l'Exemple 2.18. Sigui

$$\sum_{i=1}^{k} \text{màx}\{d_i, (k-1)\} \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} d_i$$

el criteri de Grünbaum. Anem a veure com la successió compleix el criteri.

- Cas $k = 1$: Veiem com $4 \leq 10$.
- Cas $k = 2$: Veiem com $7 \leq 2 + 7 = 9$.
- Cas $k = 3$: Veiem com $10 \leq 6 + 7 = 13$.
- Cas $k = 4$: Veiem com $13 \leq 12 + 2 = 14$.
- Cas $k = 5$: Veiem com $20 = 20$.

Per tant la successió compleix el criteri de Grünbaum.

7. Criteri de Grünbaum $\Rightarrow$ Criteri de Hässelbarth

   Demostrarem aquesta implicació usant la reducció a l'absurd. Suposem que existeix $k \in \{1, \cdots, f\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} d_i > \sum_{i=1}^{k} (d_i^* - 1).$$

   Suposarem que $f \leq n-2$. Si $f = n-1$ veiem que aleshores es compleix $d_i = n-1$ per tot $i \in \{1, \cdots, n\}$ i llavors la implicació és trivial. Per tant $f \leq n-2$. Podem afirmar que existeix $m \in \{k, \cdots, n\}$ tal que $d_i \geq k$ si $i \leq m$ i $d_i < k$ si $i \geq m+1$.

   Observem que al saber que per un m donat sabem que $k \leq d_i$ si $i \leq m$ i per tant al calcular la matriu de Ferrers donada a la Definició 2.23 ens queda una sub-matriu de dimensió $k \times m$ amb tots els valors igual a 1. Podem ara definir la igualtat següent:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i > \sum_{i=1}^{k} (d_i^* - 1) = k(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$$

i per tant:

$$\sum_{i=m+1}^{n} d_i < \sum_{i=1}^{k} d_i - k(m-1).$$

Aplicant el criteri de Grünbaum sobre m veiem que:

$$\sum_{i=1}^{m} \text{màx}\{m-1, d_i\} \leq \sum_{i=m+1}^{n} d_i + m(m-1).$$

Combinant les desigualtats veiem que:

$$\sum_{i=1}^{m} \text{màx}\{m-1, d_i\} < (m-k)(m-1) + \sum_{i=1}^{m} d_i.$$

Finalment:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \text{màx}\{m-1, d_i\} < (m-k)(m-1) + \sum_{i=1}^{m} d_i &= \sum_{i=k+1}^{m} (m-1) + \sum_{i=1}^{k} d_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \text{màx}\{m-1, d_i\} + \sum_{i=k+1}^{m} \text{màx}\{m-1, d_i\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \text{màx}\{m-1, d_i\}. \end{aligned}$$

Veiem que ens trobem amb una contradicció, per tant si es compleix el Criteri de Grünbaum es compleix

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} (d_i^* - 1),$$

que és l'enunciat del Criteri de Hässelbarth.

Exemple 3.8. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de graus que defineix un graf, tal com hem vist a l'Exemple 2.18. Anem a veure com la successió compleix el criteri.

Primerament veiem com en aquest cas tenim que $f = 3$ ja que $d_3 \geq 3$ i $d_4 < 4$. Anem ara a calcular la matriu de Ferrers que anomenarem A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primerament calculem el valor de la successió d^* tal com apareix a la Definició 2.25 i veiem que ens queda $d^* = (5, 5, 3, 1, 0)$. Anem ara a comprovar el criteri de Hässelbarth:

- Cas $k = 1$: Veiem com $4 = 4$.
- Cas $k = 2$: Veiem com $7 \leq 10$.
- Cas $k = 3$: Veiem com $10 \leq 13$.

Per tant la successió compleix el criteri de Hässelbarth.

8. Criteri de Hässelbarth $\Rightarrow (d_1, ..., d_n)$ Graf simple.

   Finalment anem a veure ara com qualsevol dels set criteris enunciats impliquen que la successió $(d_1, ..., d_n)$ defineix un graf simple. En particular, veurem que el Criteri de Hässelbarth implica que la successió d'enters $(d_1, ..., d_n)$ és gràfica.

   Definim per tota $i \in \{1, \cdots, f\}$

$$a_i = d_i - i + 1$$
$$b_i = d_i^* - i$$

   Usant aquestes igualtats podem reescriure el criteri com:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \text{ per tot } i \in \{1, \cdots, f\}.$$

   Per veure que aquesta successió defineix un graf primerament volem transformar la matriu $(0, 1)$ de Ferrers enunciada a la Definició 2.23 amb la matriu d'adjacència de grafs simples de la Definició 2.7. Per fer-ho prèviament trobarem la matriu A' mitjançant un algoritme i l'utilitzarem per calcular la matriu d'adjacència que anomenarem A''. Un cop calculada veurem que la matriu pot no complir la successió de graus $(d_1, ..., d_n)$, per tant haurem de transformar la matriu A'' en una matriu simètrica A^* amb la suma de cada fila complint la successió. Veiem l'algoritme que ens permetrà trobar A':

Pas 1: Definim $k = f$. Si la $k > 1$ implementem el pas 2, si $k = 1$ passem al pas 3.

Pas 2: Considerem 3 casos:

- Si $a_k = b_k$ llavors $a'_k = a_k$
- Si $a_k < b_k$ llavors $a'_k = a_k + [\frac{1}{2}(b_k - a_k)]$. Si $b_k - a_k$ és senar, $a_{k-1} = a_{k-1} + 1$
- Si $a_k > b_k$ llavors $a'_k = b_k$ i $a_{k-1} = a_{k-1} + a_k - b_k$

Després calculem novament la k, $k = k - 1$ i tornem al pas 1.

Pas 3: Calculem:

$a'_1 = a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$

Definim $b'_i = a'_i$ per tot $i \in \{1, \cdots, f\}$

   Observacions:

- Al pas on efectuem la resta $a_k - b_k$ veiem que els uns de la fila k s'eleven a la fila $k - 1$.

- La clau per a que aquest algoritme funcioni es troba amb el fet que després d'haver dut a terme tots els passos ens trobem que $b_1 - a_1$ té sempre un valor enter i no negatiu. Anem a veure el motiu:

  Suposem que hi ha un índex maximal $\alpha \geq 2$ tal que $b_i \leq a_i$ per tot $i \in \{2, \cdots, \alpha\}$. Per tant per les files $\alpha, \alpha - 1, \cdots, 2$ quan ens trobem al pas 2 només usarem el cas 2. La fila α té almenys un valor 1 a de la columna $\alpha + 1$, més si $b_{\alpha+1} - a_{\alpha+1}$ és imparell. Per tant podem definir $a_\alpha = m + 1$ amb $m \in \mathbb{N}$. Aquest fet implica que quan ens trobem al pas 2 i duem a terme el cas 3 ens trobem amb:

  $$a_1 = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \sum_{i=2}^{\alpha} b_i + 1.$$

  En canvi sabem que els elements a_i de la dreta d'aquesta igualtat són els a_i originals de la matriu A. Usant el Criteri de Hässelbarth anem a veure que $a_1 \leq b_1$:

  - Si ens trobem en el cas on $b_{\alpha+1} - a_{\alpha+1}$ és parell aleshores no tenim el $+1$ sumant a l'equació, per tant $a_1 \leq b_1$ és la definició del Criteri de Hässelbarth amb $k = \alpha$.
  - Si ens trobem en el cas on $b_{\alpha+1} - a_{\alpha+1}$ és imparell aleshores hem de provar la desigualtat següent:

    $$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \sum_{i=2}^{\alpha} b_i + 1 \leq b_1.$$

    Per fer-ho suposarem que no es compleix i arribarem a una contradicció. Suposem que

    $$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \sum_{i=2}^{\alpha} b_i + 1 > b_1.$$

    Per altra banda sabem també que

    $$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \sum_{i=2}^{\alpha} b_i \leq b_1,$$

    d'on podem treure que

    $$b_1 = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \sum_{i=2}^{\alpha} b_i.$$

    Però si es compleix aquesta igualtat aleshores és fàcil veure que

    $$1 + \sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \sum_{i=2}^{\alpha} b_i + b_1 = 1 + 2b_1.$$

    Observem que $1 + 2b_1$ és imparell per tot $b_1 \in \{1, \cdots, n\}$, que contradiu el fet que el nombre total de uns és parell i que $a'_2 = b'_2; \cdots a'_f = b'_f$.

Per tant hem demostrat que $a_1 \leq b_1$.
Notem que si no existeix el valor més petit α aleshores $b_2 \geq a_2$, on a_2 és el valor que obtenim iterant $f-2$ cops l'algoritme. Per tant al aplicar el Criteri de Hässelbarth veiem també que es compleix $a_1 \leq b_1$ on a_1 és el valor que obtenim iterant l'algoritme $f-1$ cops.

Construïm primer la matriu A' usant els a' i b' calculats. Per fer-ho per cada $a'_i > 0$ amb $i \leq f$ direm que la fila i de la matriu A' té $a'_i + i - 1$ valors 1 a les primeres $a'_i + i - 1$ posicions i cada columna j amb $j \leq f$ té $b'_j + j$ de 1 a les primeres $b'_j + j$ posicions.

Anem ara a construir la matriu A'' a partir de la matriu A'. Per tota $i \in \{1, \cdots, f\}$ substituïm els nombres 1 de la diagonal de les fila i per un 0. El 0 després del nombre 1 de la posició $a'_i + i - 1$ de la fila i es substitueix pel nombre 1. Per tant veiem que amb aquesta construcció la matriu resultant $A'' = \{a''_{ij}\}$ és simètrica i té zeros a la diagonal. Definim ara el vector $(d'_1, \cdots, d'_n)$ com el vector suma del les diferents files de la matriu A''.

Si $(d'_1, \cdots, d'_n) \neq (d_1, \cdots, d_n)$ considerarem la successió

$$(d'_1 - d_1, \cdots, d'_n - d_n)$$

.

Observant els passos 1) i 2) de l'algoritme veiem que eleva els uns a files de menor índex, per tant podem veure que existeixen índex s i t tals que el major índex a la successió és el s i el menor és el t. D'aquí podem extreure un parell de desigualtats:

$$d'_s \geq d_s + 1,\ d'_t \leq d_t - 1 \text{ i } s \leq t$$

.

Com sabem que $d_s \leq d_t$ per construcció de la successió podem definir una nova desigualtat:

$$d'_s \geq d_s + 1 \geq d_t + 1 \geq d'_t + 2 \text{ i a més existeix } k \text{ índex tal que } s \neq k \neq t \text{ i}$$

$$a''_{sk} = a''_{ks} = 1, \qquad a''_{kt} = a''_{tk} = 0.$$

Escollint aquest k i usant aquestes igualtats podem modificar la matriu $A'' = a''_{ij}$ per crear la matriu $A^* = a^*_{ij}$ que satisfà:

$$\begin{cases} \cdot a^*_{ij} = a''_{ij} \text{ per tot } i,j \text{ si } ij \neq sk, ks, lk, kl \\ \cdot a^*_{sk} = a^*_{ks} = 0 \text{ i } a^*_{lk} = a^*_{kl} = 1 \end{cases}$$

Seguim usant aquest mètode fins que els valors al calcular la suma de les files de la matriu A^* siguin $d_1, \cdots, d_n$. Als passos 1 i 2 de l'algoritme elevem diferents 1. El nombre d'elevacions que fem coincideix també amb el nombre de vegades que repetim el mètode.

Finalment veiem que hem trobat un graf definit per la matriu A^* que s'obté a partir de la nostra successió de valors $(d_1, \cdots, d_n)$, per tant hem demostrat que el Criteri de Hässelbarth implica que la successió $(d_1, \cdots, d_n)$ defineixi un graf.

Exemple 3.9. Sigui $d = (4, 3, 3, 2, 2)$ una successió de nombres naturals decreixent. Volem trobar la matriu d'adjacència vinculat a aquesta successió de graus. Veiem que la f d'aquesta successió és 3 ja que $d_f \leq f$ i $d_{f+1} \geq f + 1$. Anem a calcular la matriu de Ferrers d'aquesta successió:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cop calculada calculem ara les successions a i b definides de la següent forma: Definim per tota $i \in \{1, \cdots, f\}$

$$a_i = d_i - i + 1$$

$$b_i = d_i^* - i$$

per tant $a = (4, 2, 1)$ i $b = (4, 3, 0)$. Anem ara a usar l'algoritme ja definit per calcular a' i b'.

- Per $k = 3$ veiem que $a_3 > b_3$, per tant definim $a'_3 = b_3 = 0$ i actualitzem el valor de $a_3 = 2 + 1 - 0 = 3$.
- Per $k = 2$ veiem que $a_2 = b_2 = 3$, per tant definim $a'_2 = a_2 = 3$.
- Per $k = 1$ veiem que $a'_1 = a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = 4 + \frac{1}{2}(4 - 4) = 4$.

Veiem que ja hem calculat $a' = (4, 3, 0)$ i per tant $b' = (4, 3, 0)$.

Calculem ara la matriu A'. Definim les files i amb $i \leq f$ i $a_i > 0$ afegint $a'_i + i - 1$ 1 a les primeres $a'_i + i - 1$ posicions i les columnes j amb $j \leq f$ i $b_j > 0$ contenen $b'_j + j$ 1 a les primeres $b'_j + j$ posicions. Per tant en el nostre cas la matriu A' queda:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculem ara a partir d'A' la matriu A''. Per tota $i \in \{1, \cdots, f\}$ substituïm els nombres 1 de la diagonal de les fila i per un 0. El 0 després del nombre 1 a la fila

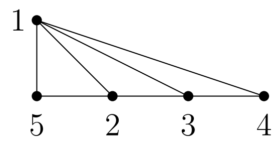
i a la posició $a'_i + i - 1$ es substitueix pel nombre 1. Per tant la matriu A'' queda definida com:

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprovem ara si la nova successió $d' = d$. Veiem que $d' = (4, 4, 2, 2, 2) \neq (4, 3, 3, 2, 2) = d$ per tant existeixen índex s i t tals que $d'_s \geq d_s + 1$, $d'_t \leq d_t - 1$ i $s \leq t$. Observem que $s = 2$ ja que $d'_s = 4 = d_s + 1$ i $t = 3$ ja que $d'_t + 1 = 3 = d_t$. Escollint l'índex $k = 4$ observem que a la matriu A'' es compleix $a''_{24} = a''_{42} = 1$ i $a''_{43} = a''_{34} = 0$ per tant podem definir la nova matriu A^* amb els valors $a^*_{ij} = a''_{ij}$ excepte pels casos $a^*_{24} = a^*_{42} = 0$ i $a^*_{43} = a^*_{34} = 1$. La matriu A^* queda doncs definida com:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calculem ara la nova successió veiem que $d' = (4, 3, 3, 2, 2) = d$, per tant hem trobat la matriu d'adjacència d'un graf amb les valències dels vèrtex iguals a la successió donada, fet que prova que existeix un graf definit per aquesta successió. Un graf amb aquesta matriu d'adjacència és:



Graf definit per A^*.

$\square$

Capítol 4

Aplicacions i resultats

En aquest apartat usarem els diferents criteris ja definits per veure si diferents successions decreixents de nombres no negatius poden definir grafs. A més a més també intentarem extreure el percentatge de successions que defineixen grafs per diferents mides. Per fer-ho usarem un software que nosaltres mateixos hem codificat i que ens permet aplicar els diferents algoritmes dels criteris a una successió per veure si aquesta defineix un graf o no. El software no només ens permetrà estudiar les successions que introduirem sinó que generarà successions aleatòriament de la mida que indiquem i ens indicarà quin tant per cent defineixen un graf.

El programa està dissenyat per a què l'usuari pugui entrar com a paràmetre el nombre de valors que ha de tenir la successió i també el nombre de successions que vol que es generin per tal d'executar la prova i poder extreure un tant per cent que ens doni una aproximació a la probabilitat que una successió generada aleatòriament generi un graf. Per generar les successions el programa comprovarà que tots els valors de la successió siguin menors que la mida de la successió n, és a dir, si d és la successió tindrem que $d_i < n$ per tota $i \in \{1, \cdots, n\}$. També comprovarà que la suma dels valors de la successió sigui parella, tal com indica el Teorema d'Euler 2.17. Explicarem primer com hem implementat els algoritmes dels diferents criteris.

Observació 4.1. Al llarg d'aquesta secció es veurà com alguns dels valors no corresponen entre els valors indicats a l'article [3] i el codi indicat. Aquesta diferència es deu a un canvi de notació, mentre que a l'article i als algoritmes demostrats en aquest treball el primer valor de la successió és el d_1 en el codi per facilitar els càlculs el primer valor de les cadenes de caràcters és el $d[0]$. Observarem que, tot i que els algoritmes són correcte, es podran apreciar diferències entre els diferents algoritmes que mostrarem en aquesta secció i els sumatoris estudiats anteriorment.

4.1 Implementació algorítmica dels Criteris

En aquesta secció explicarem com hem implementat els algoritmes dels diferents criteris al programa per poder usar-los per comprovar si diverses successions donades eren successions gràfiques o no.

Observació 4.2. Al llarg d'aquesta secció s'usarà la variable *sumaD* per parlar de les sumes parcials dels elements de la successió d i s'usarà *sumaExpressio* per calcular les sumes parcials de l'expressió del criteri calculat en cada cas. També apareixeran altres variables auxiliars i comptadors que usarem per codificar els criteris.

- Criteri de Berge

  Per aquest criteri primerament s'havien de calcular els diferents $\bar{d}_i$ però fer-ho tenia un cost computacional molt elevat, per tant s'ha optimitzat el càlcul dels $\bar{d}_i$ usant el següent algoritme:

  Sigui d la successió que volem estudiar, usarem , per calcular el $\bar{d}$ corresponent s'usa:

```
for(i = 0; i<d.length; i++){
    for(int j=0; j<d.length;j++){
        $if(i!=j && dAux[i]>0){
            dBarra[j]+=1;
            dAux[i]-=1;
        }
    }
}
```

  Amb aquest mètode veiem com amb el mínim de càlculs possibles podem calcular la $\bar{d}$ i per tant ja podem implementar l'algorisme definit al criteri.

```
i=0;
while( i<d.length && esCompleixCriteri){
    sumaD=sumaD+d[i];
    sumaDBarra=sumaDBarra+dBarra[i];
    if(sumaD>sumaDBarra){
        esCompleixCriteri = false;
    }
    i++;
}
```

  En aquest codi s'observa com es calculen els diferents sumatoris per totes les k mentre es compleixi la condició

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_i$$

  tal com es defineix a l'enunciat del criteri.

- Criteri de Erdös-Gallai

  Sigui d la successió que volem estudiar, el codi implementat per calcular el criteri de Erdös és el següent:

```
while(k<=n && esCompleixCriteri){
    int sumaD = 0;
    int sumaExpressio =0;
    for(int i=0;i<k;i++){
        sumaD += d[i];
    }
    for(int j=k; j<n; j++){
        if(k<d[j]){
            sumaExpressio +=k;
        }else{
            sumaExpressio += d[j];
        }
    }
    sumaExpressio += k*(k-1);
    if(sumaD > sumaExpressio){
        esCompleixCriteri = false;
    }
    k++;
}
```

  Veiem com utilitzem els dos “for”per calcular els sumatoris i analitzem les sumes parcials guardades a les variables *sumaD* i *sumaExpressio* després de cada iteració sobre k. Observem que no es necessita cap càlcul previ.

- Criteri de Fulkerson-Hoffman-McAndrew

  Sigui d la successió que volem estudiar, el codi implementat per calcular el criteri és el següent:

```
while(k<=n && esCompleixCriteri){

    int m=0;
    int sumaD = 0;
    for(int i=0;i<k;i++){
        sumaD += d[i];
    }
    while(m<=n-k && esCompleixCriteri){
        int sumaExpressio =0;
```

```
                for(int j=n-m; j<n; j++){
                    sumaExpressio += d[j];
                }
                sumaExpressio += k*(n-m-1);
                if(sumaD > sumaExpressio){
                    esCompleixCriteri = false;
                }
                m++;
            }
            k++;
        }
```

Observem que en aquest criteri hi ha una iteració més, que es deu a la inclusió de la variable m com un valor sobre el que iterar, sempre que compleixi que $m \leq n-k4$. Aquesta iteració addicional combinada amb la iteració sobre k provoca que el cost computacional per a successions de mida molt gran augmenti significativament.

- Criteri de Bollobás

  Sigui d la successió que volem estudiar, el codi implementat per calcular el criteri és el següent:

```
while(k<=n && esCompleixCriteri){
    int sumaD = 0;
    int sumaExpressio =0;
    for(int i=0;i<k;i++){
        sumaD += d[i];
    }
    for(int j=k; j<n; j++){
        sumaExpressio +=d[j];
    }
    for(int j=0; j<k; j++){
        if(k-1<d[j]){
            sumaExpressio +=k-1;
        }else{
            sumaExpressio += d[j];
        }
    }
    if(sumaD > sumaExpressio){
        esCompleixCriteri = false;
    }
    k++;
}
```

Observem que el càlcul d'aquest criteri es basa en calcular les sumes parcials dels elements de la successió i de l'expressió i seguir iterant sobre k mentre es compleixi el criteri i la k sigui menor o igual que la mida de la successió.

- Criteri de Grünbaum

  Sigui d la successió que volem estudiar, el codi implementat per calcular el criteri és el següent:

```
while(k<=n && esCompleixCriteri){
    int sumaD = 0;
    int sumaExpressio =0;
    for(int i=0;i<k;i++){
        if(d[i]<k-1){
            sumaD += k-1;
        }else{
            sumaD += d[i];
        }
    }
    sumaExpressio +=k*(k-1);

    for(int j=k; j<n; j++){
        sumaExpressio +=d[j];
    }
    if(sumaD > sumaExpressio){
        esCompleixCriteri = false;
    }
    k++;
}
```

  Observem que el càlcul d'aquest criteri es basa en calcular les sumes parcials dels elements de la successió i de l'expressió i seguir iterant sobre k mentre es compleixi el criteri i la k sigui menor o igual que la mida de la successió.

- Criteri de Hässelbarth

  Sigui d la successió que volem estudiar, veiem que per aquest criteri primerament hem de calcular els diferents d^*. Per fer-ho, hem implementat aquest mètode que calcula els elements sense haver de calcular la matriu de Ferrers, fet que ens estalvia un gran cost computacional.

```
for(int i = 0; i<d.length; i++){
    for(int j=0; j<d.length;j++){
        if(dAux[i]>0){
```

```
                    dEstrella[j]+=1;
                    dAux[i]-=1;
                }
            }
        }
```

Primerament calculem la f per poder aplicar el criteri. Aquest és el codi usat:

```
boolean busquemF=true;
        while(aux < n && busquemF){
            if(d[aux]<(aux+1)){
                f=aux;
                busquemF = false;
            }else{
                aux++;
            }
        }
        if(aux == n){
            f = d.length;
        }
```

Veiem que anem comparant la posició (”aux”) amb el valor que té la successió en aquella posició fins que veiem que el valor és menor a la posició, moment en que deixem de buscar. Si en cap cas es compleix, aleshores diem que f és la mida total de la successió. Cal observar que com en Java les posicions van de $0, \cdots, n-1$ al comparar la posició i el valor hem sumat 1 a la posició per poder fer correctament la comprovació.

Un cop calculats els d^* i la f ja podem implementar el criteri:

```
        while(k<=f && esCompleixCriteri){
            int sumaD = 0;
            int sumaExpressio =0;
            for(int i=0;i<k;i++){
                sumaD += d[i];
            }
            for(int j=0; j<k; j++){
                sumaExpressio +=dEstrella[j]-1;
            }
            if(sumaD > sumaExpressio){
                esCompleixCriteri = false;
            }
            k++;
        }
```

Veiem que al igual que a la resta de criteris hem calculat les sumes parcials mentre es complia el criteri, usant un for per cada sumatori i comparant després si es complia la desigualtat.

Per tant queden explicats els algoritmes emprats per calcular els diferents criteris, anem ara a extreure conclusions a partir d'aquests càlculs.

4.2 Aplicacions del programa

En aquesta secció explicarem les aplicacions que existeixen al software que hem programat i farem algunes observacions per entendre el funcionament i les limitacions que conté.

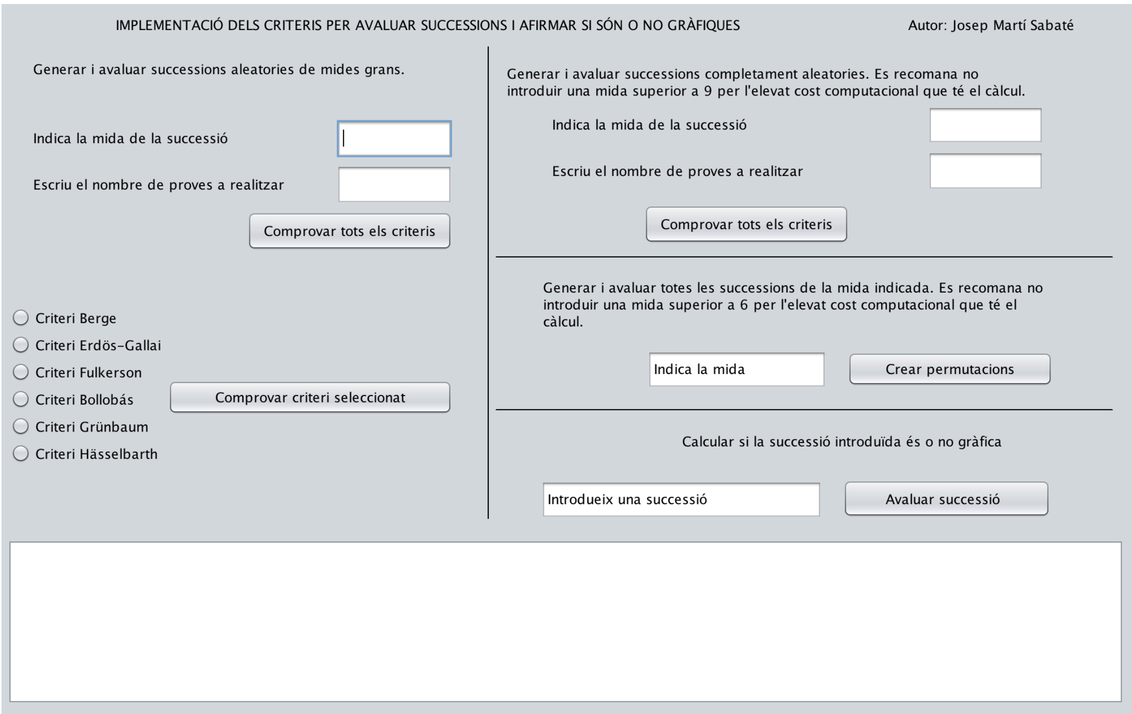


Figura 4.1: Imatge que mostra la part visual del software

- Càlcul de successions de mides petites.

  En aquesta part del programa veiem com el software ens permet introduir un valor per especificar la mida de les successions i la quantitat de successions aleatòries que volem generar. Un cop introduïts podem clicar al botó comprovar tots els criteris s'executa el càlcul aleatori de totes les successions que s'han especificat. Per fer el càlcul i garantir l'aleatorietat de les successions es calculen aleatòriament tots els valors de la successió, sempre compresos entre 0 i la mida -1. Un cop

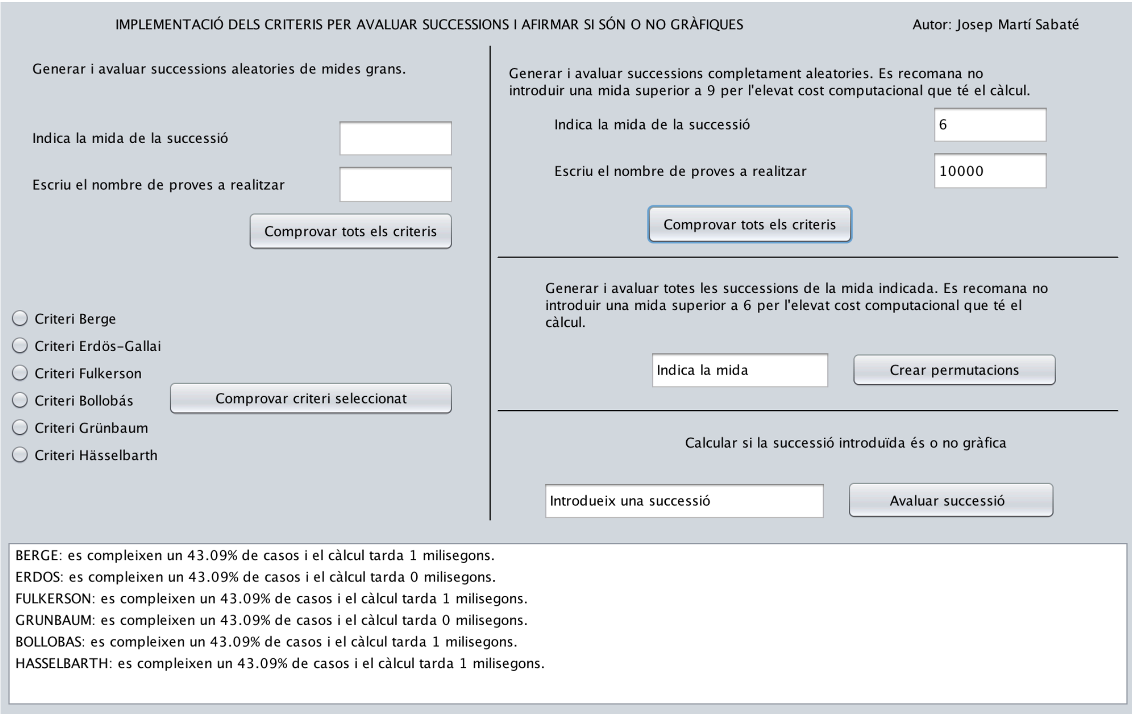


Figura 4.2: Imatge que mostra l'execució del càlcul de tots els criteris per mides petites

calculat un valor comprovem que sigui inferior o igual a l'anterior per assegurar que és decreixent. Si ho és seguim calculant, en cas contrari descartem la successió i en tornem a calcular una altra des de 0. Quan ja tenim la successió decreixent calculada comprovem si la suma és parella; si no ho compleix la descartem i en tornem a calcular una altra des de zero. Si en canvi sí que ho és la guardem i calculem la següent. Aquest mètode l'usem per assegurar que seran tan aleatòries com ens és possible ja que si les calculàvem obligant que el següent valor fos menor que el valor calculat ens trobàvem que en un percentatge de $\frac{1}{mida}$ les successions eren totes nul·les. També vam intentar generar successions aleatòries i després ordenar-les, però això provocava que les successions que tenien més possibles permutacions apareixien en molta més freqüència. Per tant l'opció òptima va ser per casos on el cost computacional no fos extremadament gran calcular totes les successions aleatòriament i només guardar les successions decreixents amb suma parella.

- Càlcul de successions de mides grans.

  En aquesta part del programa veiem que a part de tenir una casella on introduir la mida i una on introduir el nombre de proves que volem realitzar disposem d'una llista on podem seleccionar el criteri que volem utilitzar per comprovar si les successions generades són o no gràfiques. Un cop seleccionat el criteri que

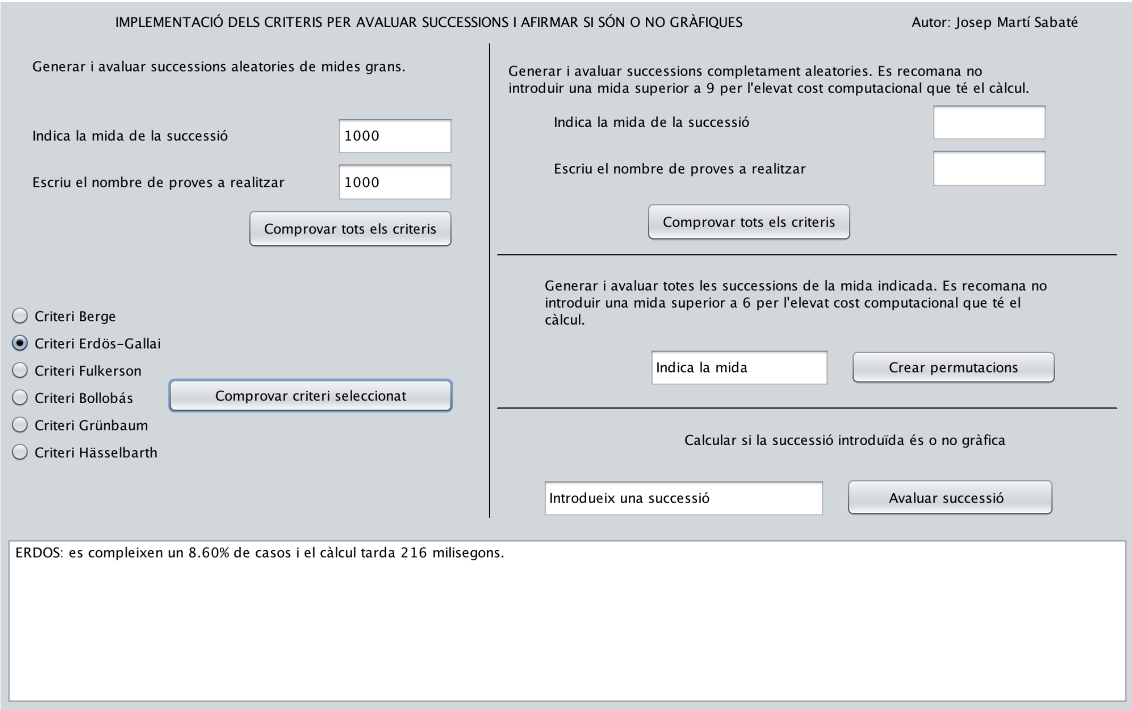


Figura 4.3: Imatge que mostra l'execució del càlcul del criteri seleccionat per mides grans

volem utilitzar si cliquem al botó calcular criteri s'executa el programa calculant totes les successions i avaluant-les només amb el criteri seleccionat. Per altra banda si volem comprovar tots els criteris també tenim l'opció de seleccionar el botó calcular tots els criteris. En aquest cas, com les successions tenen una mida molt superior al vist anteriorment, el mètode que he usat per calcular-les amb tota l'aleatorietat possible ha estat calcular una successió qualsevol, sense ser decreixent i, si la suma és parella, ordenar-la per a que sigui una successió decreixent i guardar-la com a vàlida. Aquest algoritme ens permet fer proves amb successions de mides superiors a mil amb també mil o més repeticions, permetent extreure una mostra prou sòlida del percentatge de successions vàlides per les mides indicades.

- Càlcul de totes les successions per una mida donada.

  En aquesta part del programa veiem que només ens permet indicar la mida que volem que tinguin les successions. Un cop introduïda si seleccionem el botó calcular totes les successions s'usarà un algoritme recursiu per calcular totes les successions decreixent i de suma parella amb aquesta mida. L'algoritme és el següent:

```
void permutacions(String[] elem, String aux,
  int n, int r, ArrayList<String> succes) {
  if (n == 0) { succes.add(aux);
  } else {
    for (int i = 0; i < r; i++) {
      permutacions(elem, aux+elem[i]+",", n-1, r, succes);
    }
  }
}
```

En aquest mètode recursiu introduïm per paràmetres tots els valors menors a la seva mida com una cadena de caràcters, definim la successió actual que estem calculant com aux, indiquem la mida que falta amb n i la màxima amb r. Finalment guardem totes les successions creades a la llista de cadenes que anomenem successions per poder després avaluar-les i veure si compleixen els criteris. Un cop es tingui el resultat, es mostra per pantalla el percentatge de successions de la mida introduïda que compleixen els criteris.

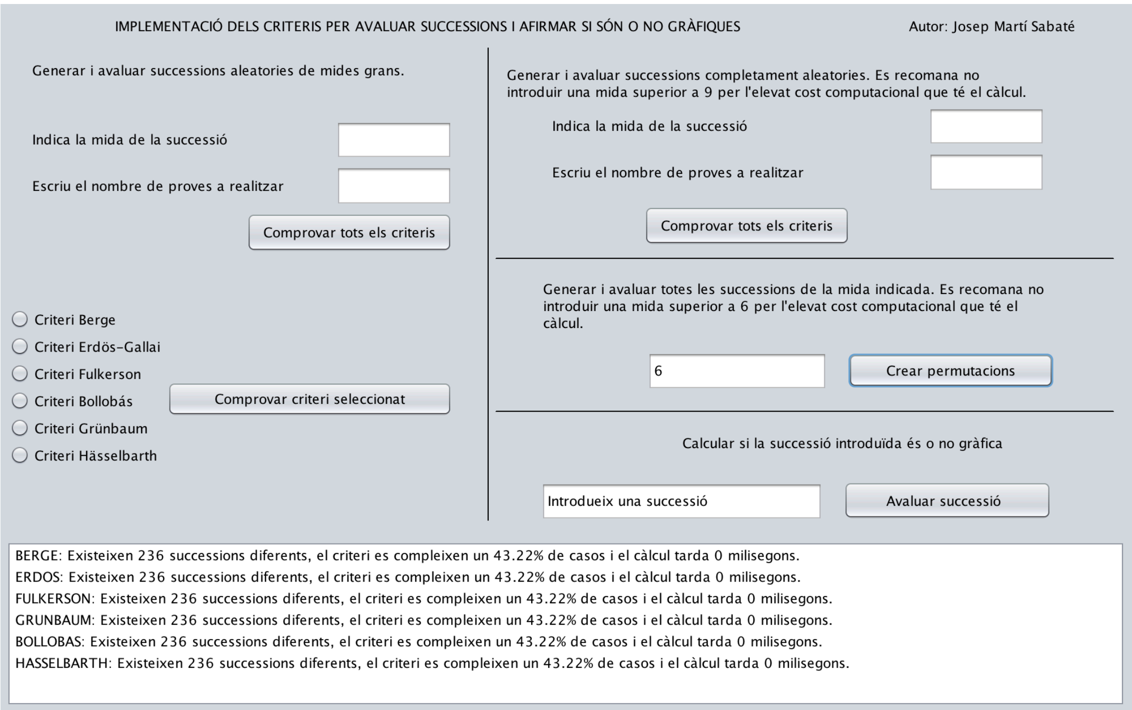


Figura 4.4: Imatge que mostra l'execució del càlcul de totes les successions d'aquella mida i el percentatge de les quals són gràfiques.

- Veure si una successió és gràfica

  En aquest apartat l'usuari pot introduir una successió qualsevol per pantalla. Per fer-ho ha d'introduir els valors de la successió separats per comes i un cop estigui tota introduïda seleccionar el botó avaluar successió. El programa l'ordenarà per a que sigui decreixent i calcularà la suma dels diferents valors. Si és imparella retornarà un missatge indicant que la successió és senar, és a dir, que no pot ser gràfica. Si la suma és parella comprovarà si compleix o no els criteris. Un cop comprovat retornarà el resultat per pantalla indicant si la successió és o no és gràfica.

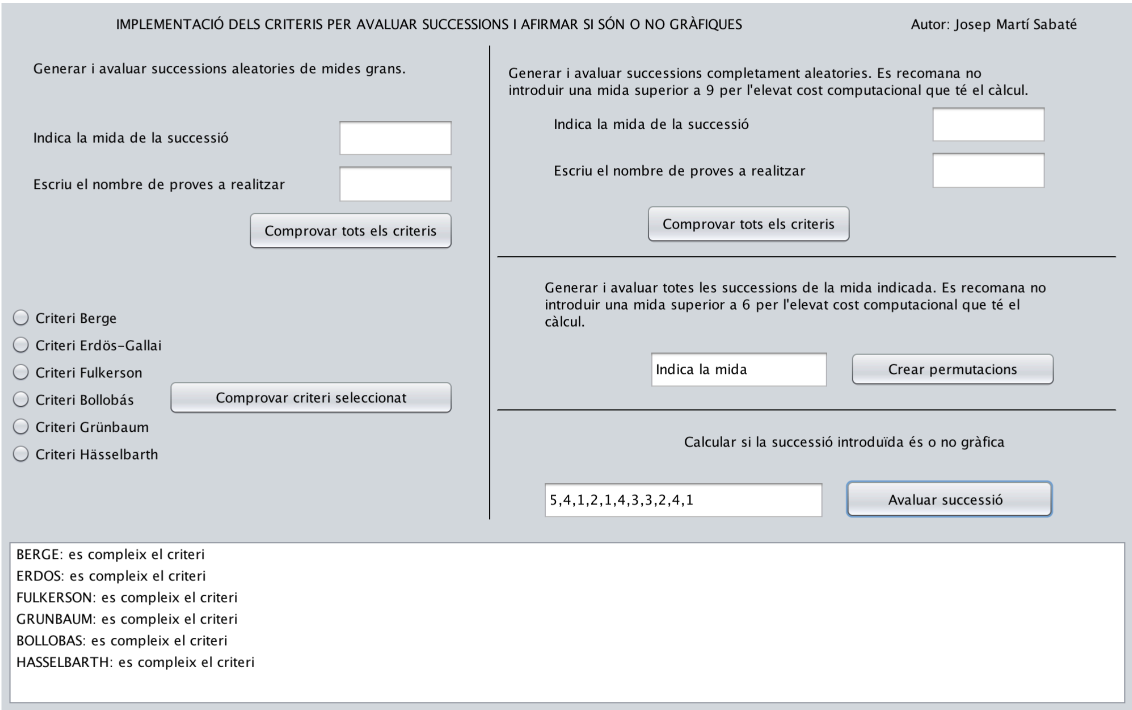


Figura 4.5: Imatge que mostra com el programa determina si la successió introduïda és o no gràfica.

4.3 Estudi dels casos de longitud menor o igual a 6

En aquesta secció calcularem totes les successions decreixents de nombres naturals amb suma parella que es poden construir de mida menor o igual a 6. Un cop les calculem estudiarem quin tant per cent compleixen els criteris enunciats i intentarem veure si existeix alguna relació entre la mida de la successió i el nombre de successions que compleixen els criteris. Per poder calcular totes les possibles successions usarem el mètode recursiu vist anteriorment.

Un cop calculades totes les possibles successions anem a veure per mida les successions que compleixen els criteris:

- Successions de mida 3. Les 6 successions són:

  (2,0,0) (1,1,0) (2,2,0) (2,1,1) (2,2,2) (0,0,0)

  Es compleixen els criteris en 4 de les 6 successions, és a dir, en un $66'67\%$ dels casos.

- Successions de mida 4. Les 11 successions són:

(2,0,0,0)	(1,1,0,0)	(3,1,0,0)	(2,2,0,0)	(3,3,0,0)	(2,1,1,0)	(3,2,1,0)
(2,2,2,0)	(3,3,2,0)	(1,1,1,1)	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(3,3,1,1)	(3,2,2,1)
(3,3,3,1)	(2,2,2,2)	(3,3,2,2)	(3,3,3,3)			

  Es compleixen els criteris en 11 de les 19 successions, és a dir, en un $57,89\%$ dels casos.

- Successions de mida 5. Les 66 successions són:

(2,0,0,0,0)	(4,0,0,0,0)	(1,1,0,0,0)	(3,1,0,0,0)	(2,2,0,0,0)	(4,2,0,0,0)
(3,3,0,0,0)	(4,4,0,0,0)	(2,1,1,0,0)	(4,1,1,0,0)	(3,2,1,0,0)	(4,3,1,0,0)
(2,2,2,0,0)	(4,2,2,0,0)	(3,3,2,0,0)	(4,4,2,0,0)	(4,3,3,0,0)	(4,4,4,0,0)
(1,1,1,1,0)	(3,1,1,1,0)	(2,2,1,1,0)	(4,2,1,1,0)	(3,3,1,1,0)	(4,4,1,1,0)
(3,2,2,1,0)	(4,3,2,1,0)	(3,3,3,1,0)	(4,4,3,1,0)	(2,2,2,2,0)	(4,2,2,2,0)
(3,3,2,2,0)	(4,4,2,2,0)	(4,3,3,2,0)	(4,4,4,2,0)	(3,3,3,3,0)	(4,4,3,3,0)
(4,4,4,4,0)	(2,1,1,1,1)	(4,1,1,1,1)	(3,2,1,1,1)	(4,3,1,1,1)	(2,2,2,1,1)
(4,2,2,1,1)	(3,3,2,1,1)	(4,4,2,1,1)	(4,3,3,1,1)	(4,4,4,1,1)	(3,2,2,2,1)
(4,3,2,2,1)	(3,3,3,2,1)	(4,4,3,2,1)	(4,3,3,3,1)	(4,4,4,3,1)	(2,2,2,2,2)
(4,2,2,2,2)	(3,3,2,2,2)	(4,4,2,2,2)	(4,3,3,2,2)	(4,4,4,2,2)	(3,3,3,3,2)
(4,4,3,3,2)	(4,4,4,4,2)	(4,3,3,3,3)	(4,4,4,3,3)	(4,4,4,4,4)	(0,0,0,0,0)

  Es compleixen els criteris en 31 de les 66 successions, és a dir, en un $46,97\%$ dels casos.

- Successions de mida 6. Les 236 successions són:

(2,0,0,0,0,0)	(4,0,0,0,0,0)	(1,1,0,0,0,0)	(3,1,0,0,0,0)	(5,1,0,0,0,0)	(2,2,0,0,0,0)
(4,2,0,0,0,0)	(3,3,0,0,0,0)	(5,3,0,0,0,0)	(4,4,0,0,0,0)	(5,5,0,0,0,0)	(2,1,1,0,0,0)
(4,1,1,0,0,0)	(3,2,1,0,0,0)	(5,2,1,0,0,0)	(4,3,1,0,0,0)	(5,4,1,0,0,0)	(2,2,2,0,0,0)
(4,2,2,0,0,0)	(3,3,2,0,0,0)	(5,3,2,0,0,0)	(4,4,2,0,0,0)	(5,5,2,0,0,0)	(4,3,3,0,0,0)
(5,4,3,0,0,0)	(4,4,4,0,0,0)	(5,5,4,0,0,0)	(1,1,1,1,0,0)	(3,1,1,1,0,0)	(5,1,1,1,0,0)
(2,2,1,1,0,0)	(4,2,1,1,0,0)	(3,3,1,1,0,0)	(5,3,1,1,0,0)	(4,4,1,1,0,0)	(5,5,1,1,0,0)
(3,2,2,1,0,0)	(5,2,2,1,0,0)	(4,3,2,1,0,0)	(5,4,2,1,0,0)	(3,3,3,1,0,0)	(5,3,3,1,0,0)
(4,4,3,1,0,0)	(5,5,3,1,0,0)	(5,4,4,1,0,0)	(5,5,5,1,0,0)	(2,2,2,2,0,0)	(4,2,2,2,0,0)
(3,3,2,2,0,0)	(5,3,2,2,0,0)	(4,4,2,2,0,0)	(5,5,2,2,0,0)	(4,3,3,2,0,0)	(5,4,3,2,0,0)
(4,4,4,2,0,0)	(5,5,4,2,0,0)	(3,3,3,3,0,0)	(5,3,3,3,0,0)	(4,4,3,3,0,0)	(5,5,3,3,0,0)
(5,4,4,3,0,0)	(5,5,5,3,0,0)	(4,4,4,4,0,0)	(5,5,4,4,0,0)	(5,5,5,5,0,0)	(2,1,1,1,1,0)
(4,1,1,1,1,0)	(3,2,1,1,1,0)	(5,2,1,1,1,0)	(4,3,1,1,1,0)	(5,4,1,1,1,0)	(2,2,2,1,1,0)
(4,2,2,1,1,0)	(3,3,2,1,1,0)	(5,3,2,1,1,0)	(4,4,2,1,1,0)	(5,5,2,1,1,0)	(4,3,3,1,1,0)
(5,4,3,1,1,0)	(4,4,4,1,1,0)	(5,5,4,1,1,0)	(3,2,2,2,1,0)	(5,2,2,2,1,0)	(4,3,2,2,1,0)
(5,4,2,2,1,0)	(3,3,3,2,1,0)	(5,3,3,2,1,0)	(4,4,3,2,1,0)	(5,5,3,2,1,0)	(5,4,4,2,1,0)
(5,5,5,2,1,0)	(4,3,3,3,1,0)	(5,4,3,3,1,0)	(4,4,4,3,1,0)	(5,5,4,3,1,0)	(5,4,4,4,1,0)
(5,5,5,4,1,0)	(2,2,2,2,2,0)	(4,2,2,2,2,0)	(3,3,2,2,2,0)	(5,3,2,2,2,0)	(4,4,2,2,2,0)
(5,5,2,2,2,0)	(4,3,3,2,2,0)	(5,4,3,2,2,0)	(4,4,4,2,2,0)	(5,5,4,2,2,0)	(3,3,3,3,2,0)
(5,3,3,3,2,0)	(4,4,3,3,2,0)	(5,5,3,3,2,0)	(5,4,4,3,2,0)	(5,5,5,3,2,0)	(4,4,4,4,2,0)
(5,5,4,4,2,0)	(5,5,5,5,2,0)	(4,3,3,3,3,0)	(5,4,3,3,3,0)	(4,4,4,3,3,0)	(5,5,4,3,3,0)
(5,4,4,4,3,0)	(5,5,5,4,3,0)	(4,4,4,4,4,0)	(5,5,4,4,4,0)	(5,5,5,5,4,0)	(1,1,1,1,1,1)
(3,1,1,1,1,1)	(5,1,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1,1)	(4,2,1,1,1,1)	(3,3,1,1,1,1)	(5,3,1,1,1,1)
(4,4,1,1,1,1)	(5,5,1,1,1,1)	(3,2,2,1,1,1)	(5,2,2,1,1,1)	(4,3,2,1,1,1)	(5,4,2,1,1,1)
(3,3,3,1,1,1)	(5,3,3,1,1,1)	(4,4,3,1,1,1)	(5,5,3,1,1,1)	(5,4,4,1,1,1)	(5,5,5,1,1,1)
(2,2,2,2,1,1)	(4,2,2,2,1,1)	(3,3,2,2,1,1)	(5,3,2,2,1,1)	(4,4,2,2,1,1)	(5,5,2,2,1,1)
(4,3,3,2,1,1)	(5,4,3,2,1,1)	(4,4,4,2,1,1)	(5,5,4,2,1,1)	(3,3,3,3,1,1)	(5,3,3,3,1,1)
(4,4,3,3,1,1)	(5,5,3,3,1,1)	(5,4,4,3,1,1)	(5,5,5,3,1,1)	(4,4,4,4,1,1)	(5,5,4,4,1,1)
(5,5,5,5,1,1)	(3,2,2,2,2,1)	(5,2,2,2,2,1)	(4,3,2,2,2,1)	(5,4,2,2,2,1)	(3,3,3,2,2,1)
(5,3,3,2,2,1)	(4,4,3,2,2,1)	(5,5,3,2,2,1)	(5,4,4,2,2,1)	(5,5,5,2,2,1)	(4,3,3,3,2,1)
(5,4,3,3,2,1)	(4,4,4,3,2,1)	(5,5,4,3,2,1)	(5,4,4,4,2,1)	(5,5,5,4,2,1)	(3,3,3,3,3,1)
(5,3,3,3,3,1)	(4,4,3,3,3,1)	(5,5,3,3,3,1)	(5,4,4,3,3,1)	(5,5,5,3,3,1)	(4,4,4,4,3,1)
(5,5,4,4,3,1)	(5,5,5,5,3,1)	(5,4,4,4,4,1)	(5,5,5,4,4,1)	(5,5,5,5,5,1)	(2,2,2,2,2,2)
(4,2,2,2,2,2)	(3,3,2,2,2,2)	(5,3,2,2,2,2)	(4,4,2,2,2,2)	(5,5,2,2,2,2)	(4,3,3,2,2,2)
(5,4,3,2,2,2)	(4,4,4,2,2,2)	(5,5,4,2,2,2)	(3,3,3,3,2,2)	(5,3,3,3,2,2)	(4,4,3,3,2,2)
(5,5,3,3,2,2)	(5,4,4,3,2,2)	(5,5,5,3,2,2)	(4,4,4,4,2,2)	(5,5,4,4,2,2)	(5,5,5,5,2,2)
(4,3,3,3,3,2)	(5,4,3,3,3,2)	(4,4,4,3,3,2)	(5,5,4,3,3,2)	(5,4,4,4,3,2)	(5,5,5,4,3,2)
(4,4,4,4,4,2)	(5,5,4,4,4,2)	(5,5,5,5,4,2)	(3,3,3,3,3,3)	(5,3,3,3,3,3)	(4,4,3,3,3,3)
(5,5,3,3,3,3)	(5,4,4,3,3,3)	(5,5,5,3,3,3)	(4,4,4,4,3,3)	(5,5,4,4,3,3)	(5,5,5,5,3,3)
(5,4,4,4,4,3)	(5,5,5,4,4,3)	(5,5,5,5,5,3)	(4,4,4,4,4,4)	(5,5,4,4,4,4)	(5,5,5,5,4,4)
(5,5,5,5,5,5)	(0,0,0,0,0,0)				

Es compleixen els criteris en 102 de les 236 successions, és a dir, en un $43,22\%$ dels casos.

Anem a comparar ara els tants per cents de compliment dels criteris per les diferents mides estudiades.

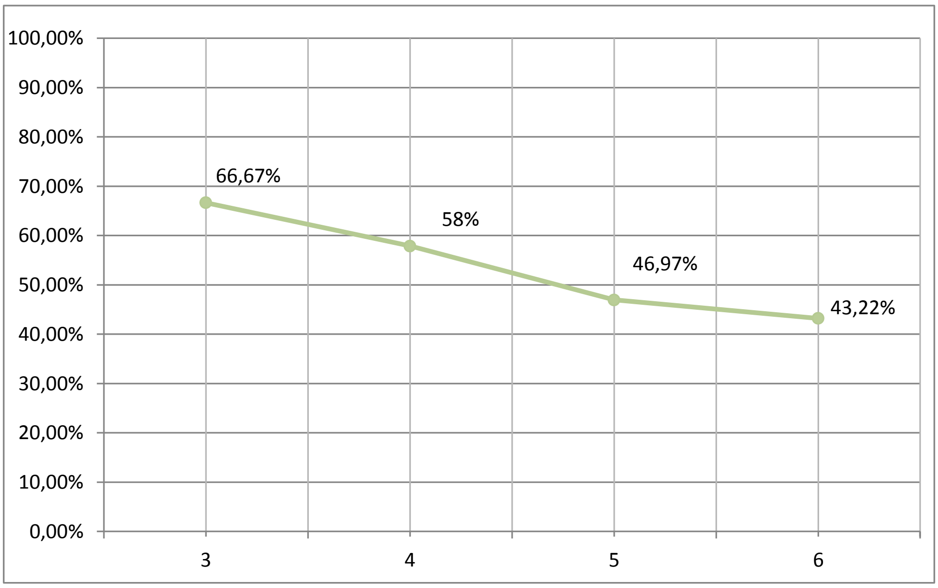


Figura 4.6: Gràfic que relaciona la mida amb el tant per cent de successions decreixents i amb suma parella que compleixen els criteris.

Volem ara trobar una funció sobre $\log(x)$ que aproximi el màxim possible aquests resultats. Amb l'ajuda del Mathematica trobem que la funció:

$$-48.8206 - \frac{103.217}{\log^2(x)} + \frac{221.007}{\log(x)}$$

Observem que aproxima els resultats de la següent forma:

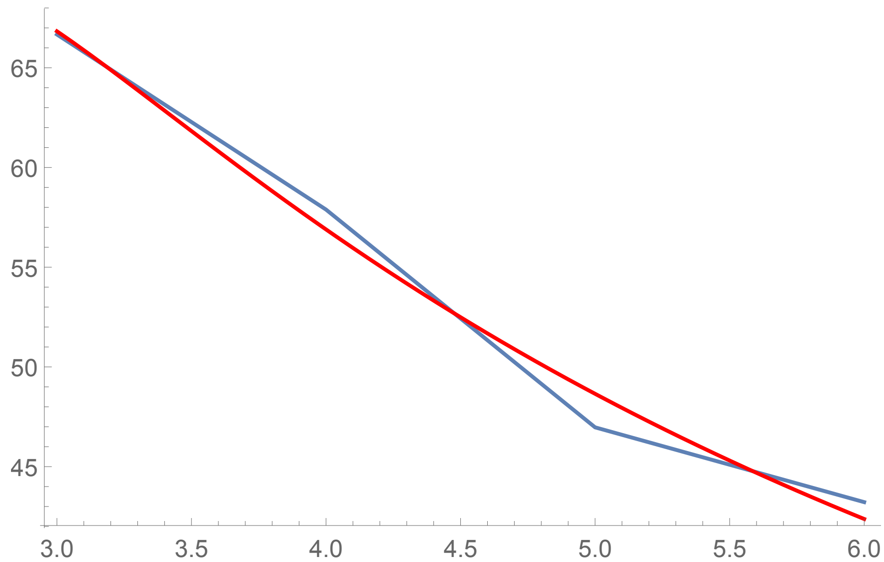


Figura 4.7: Gràfic que relaciona la nostra successió (blau) amb la funció trobada (roig).

Observem en aquest gràfic que quan major és la mida de les successions menor és el percentatge de successions gràfiques.

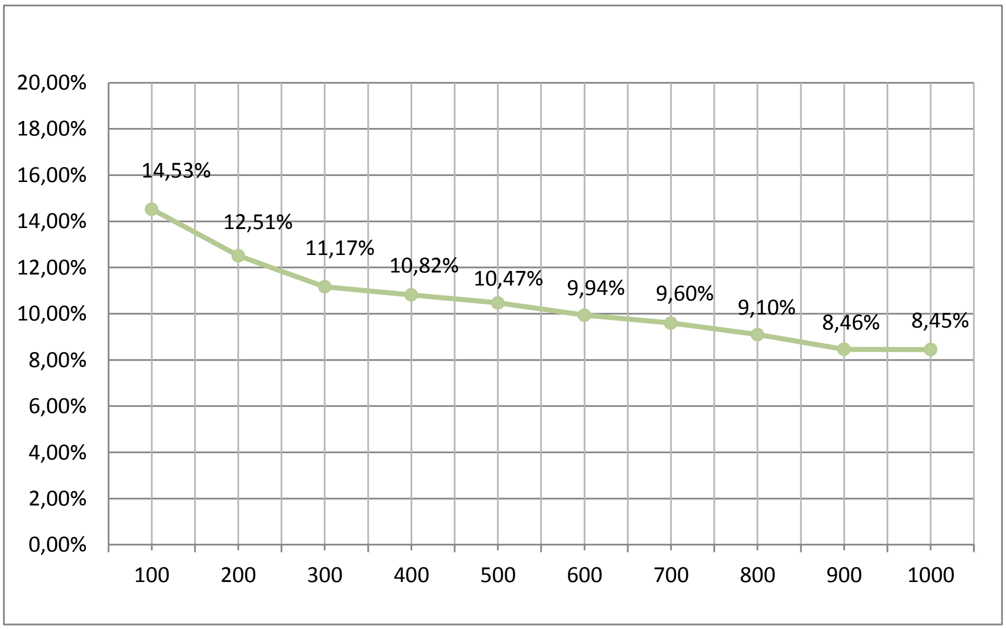
4.4 Estudi de successions de mida gran

En aquest apartat estudiarem la probabilitat que una successió d'una mida gran pugui ser o no una successió gràfica. Per fer-ho com no podem calcular totes les successions possibles per mides molt grans hem usat un mètode aleatori que tot i no ser òptim ens ajudarà a veure clarament com es comporten les successions de diferents mides.

Per calcular les successions hem usat la classe Random per generar nombres aleatoris amb valor menor a la mida. Un cop generats tots els valors de la successió hem comprovat si la suma era parella i en cas de ser-ho hem donat la successió per vàlida i l'hem ordenat per a que sigui decreixent. En calcular d'aquesta forma les successions es veu com no és del tot aleatori ja que tot i generar els valors aleatòriament quantes més permutacions pot tenir la successió més possibilitats té que el mètode la calculi. Tot i això, els resultats són prou bons per poder extreure conclusions respecte al comportament de les successions i la relació amb la seva mida. Per calcular cada percentatge hem realitzat 10000 repeticions per cada successió de mida m estudiada.

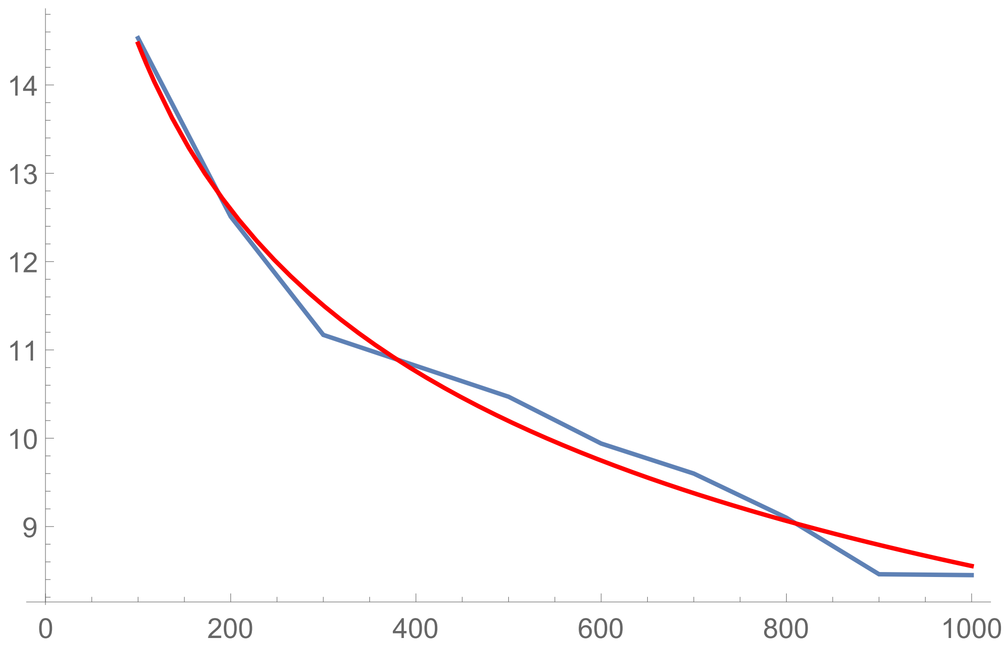
```
private static int[] crearD(int[] d) {

    int i;
    int suma = 0;
    boolean sumaSenar = true;
    while(sumaSenar){
        suma = 0;
        for(i=0;i<d.length;i++){
            Random rand = new Random();
            int randomNum = rand.nextInt((d.length-1) + 1);
            d[i]= randomNum;
            suma += d[i];
        }
        if(suma%2==0){
            sumaSenar=false;
        }
    }
    Arrays.sort(d);
    reverse(d);
    return d;
}
```

Anem a veure ara un gràfic que mostra els resultats extrets del programa per successions de mida major que 100 i menor que 1000.



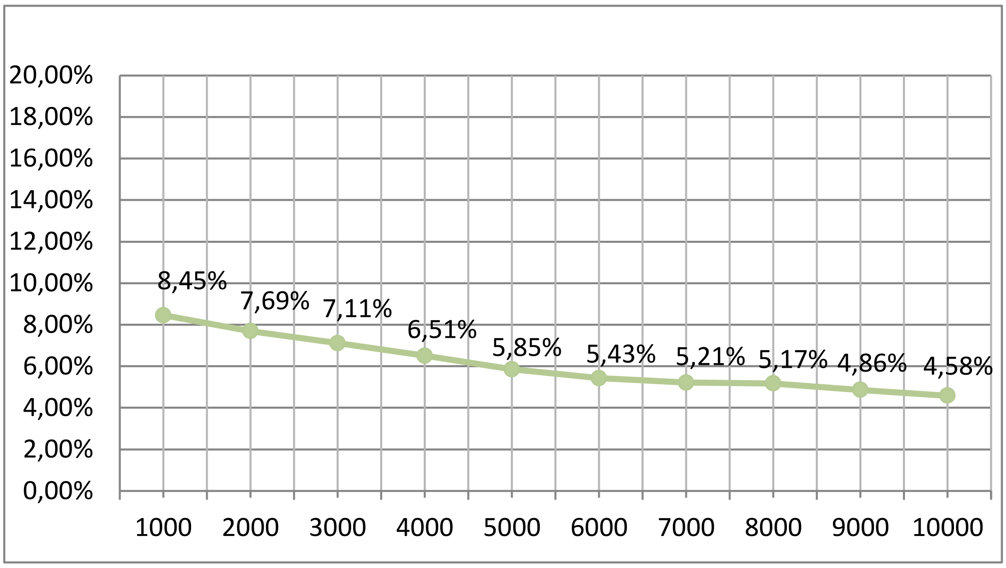
(a) Gràfic que relaciona la mida de les successions amb la probabilitat que siguin gràfiques

Podem observar que en augmentar la mida de les successions disminueix el percentatge de successions gràfiques. Veiem que podem extreure una funció logarítmica f per extrapolar els resultats on $f(x) = -14.4344 - \frac{354.985}{\log^2(x)} + \frac{210.184}{\log(x)}$. Anem a veure com aquesta funció aproxima la nostra gràfica:



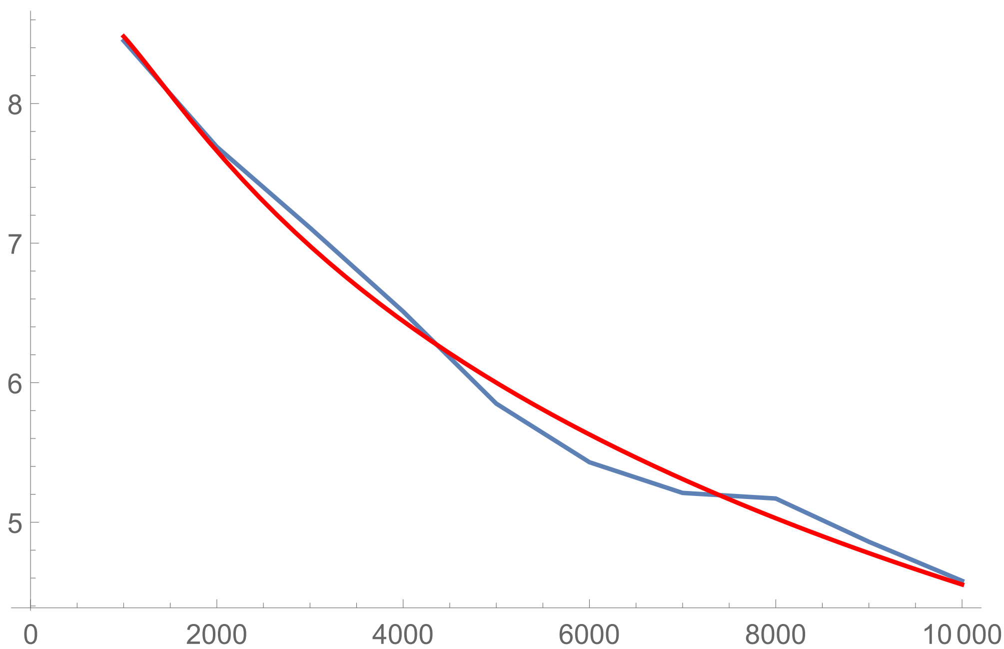
(b) Superposició dels valors extrets del programa i l'aproximació usant la $f(x)$.

Finalment veurem ara un gràfic que mostra els resultats extrets del programa per successions de mides 1000 fins a 10000 valors. Com els temps d'execució era per mides grans molt elevat he optat per avaluar les successions solament amb el Criteri de Erdös-Gallai, ja que és amb diferència el criteri més ràpid comprovant si les successions donades són o no gràfiques.



(a) En aquest gràfic podem observar la relació entre la mida de les successions i la probabilitat que siguin gràfiques.

Veiem que la relació es redueix a mesura que augmentem la mida de les successions. Calculem ara una funció logarítmica g per extrapolar els nostres resultats, $g(x) = -38.9233 - \frac{2016.68}{\log^2(x)} + \frac{619.398}{\log(x)}$ i observem com aproxima els resultats obtinguts.



(b) Superposició dels valors extrets del programa i l'aproximació usant la $g(x)$.

Per concloure l'anàlisi dels resultats obtinguts en aquest treball hem calculat la funció $F = -5.71246 - \frac{23.2857}{\log^2(x)} + \frac{101.513}{\log(x)}$ extreta a partir de totes les mostres estudiades anteriorment. Al següent gràfic es pot observar la relació entre la gràfica de la funció F i la gràfica dels percentatges de successió gràfica que hem calculat per les diferents mides estudiades.

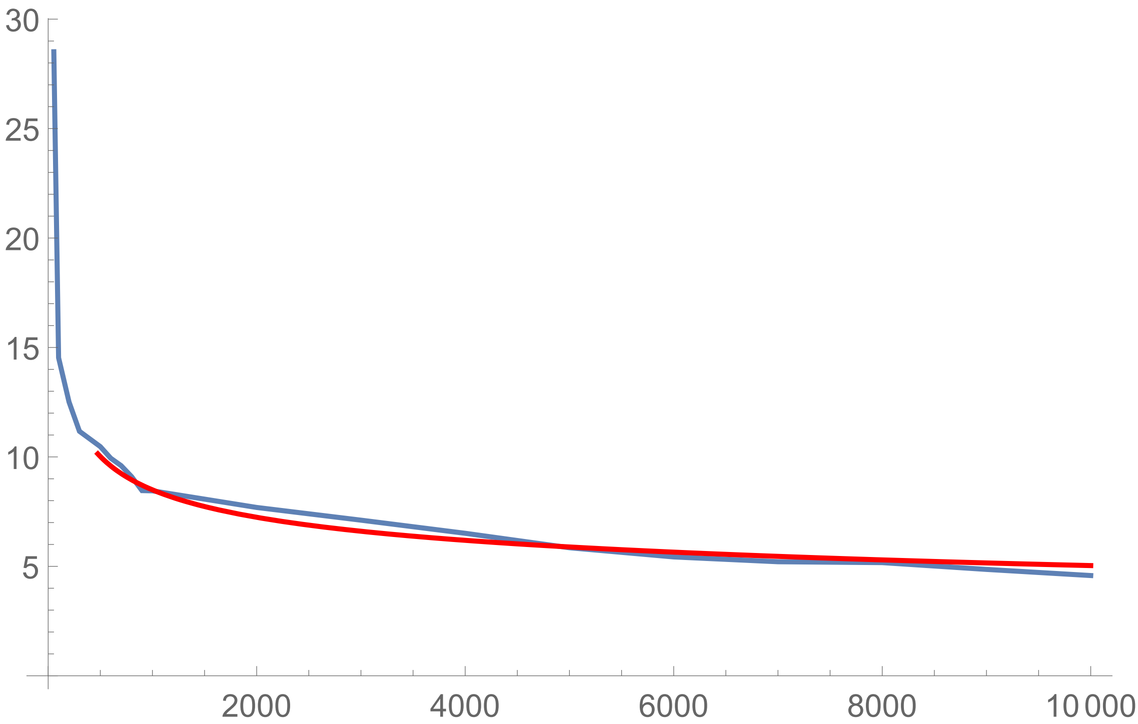


Figura 4.10: Superposició dels valors extrets del programa i l'aproximació usant la $F(x)$. Per tant ja hem estudiat el comportament de la relació entre la mida de les successions i la probabilitat que siguin gràfiques. Es veu fàcilment que el tant per cent decreix amb velocitat logarítmica seguint l'aproximació que hem donat.

Bibliografia

[1] A. Bondy i U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

[2] M. Krause, *A simple proof of the Gale-Ryser theorem*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 335–337.

[3] G. Sierksma i H. Hoogeveen, *Seven criteria for integer sequences being graphic*, J. Graph Theory **15** (1991), 223–231.

[4] J. Soria, *Graphs,* Apunts de l'assignatura de Grafs de la Universitat de Barcelona.