Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

EL MOVIMENT BROWNIÀ I LA SEVA APLICACIÓ AL CÀLCUL ESTOCÀSTIC

Irina Pi Jaumà

Director:	Dr. David Márquez Carreras
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

The main goal of this work is to rigorously define Brownian motion and understand its relevance when doing mathematical models of different phenomena from the reality. In addition, going from the properties of nowhere differentiability and finite quadratic variation of the sample paths, we illustrate the necessity of a new calculus in order to solve stochastic differential equations (SDE), which model dynamical systems with random perturbations, using the definition of the stochastic (or Itô) integral and its lemma. Finally, we apply the developed Mathematics theory to the problem of the motion of a Brownian particle in suspension in a fluid, being able to correctly describe the velocity distribution that follows the particle and recovering some important Physics' results.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és definir rigorosament el moviment Brownià i comprendre la seva rellevància al fer models matemàtics de diversos fenòmens de la realitat. A més a més, passant per les propietats de la no diferenciabilitat i la variació quadràtica finita de les seves trajectòries, il·lustrem la necessitat d'un nou càlcul per tal de resoldre les equacions diferencials estocàstiques (SDE), les quals modelen sistemes dinàmics amb pertorbacions aleatòries, tot fent ús de la definició d'integral estocàstica (o d'Itô) i del seu lema. Per acabar, apliquem la teoria matemàtica desenvolupada al problema del moviment d'una partícula Browniana en suspensió en un fluid, tot podent descriure correctament la distribució de velocitat que segueix la partícula i recuperant importants resultats de la física.

2010 Mathematics Subject Classification. 60G05, 60G07, 60G15, G0G17, 60H05, 60H10, 60H30, 82B31, 82D15.

Agraïments

Vull agrair enormement la dedicació al meu tutor, David Márquez, per la seva disponibilitat i proximitat en tot moment, tant per guiar-me a l'hora d'escollir el tema com per la seva paciència i compromís durant tot el treball. A més a més, no voldria acabar aquesta etapa tan important i estimulant de la meva vida sense donar les gràcies a tots els qui n'han format part i l'han fet possible. Per sobre de tot als meus pares, l'Arlet i tota la meva família pel seu suport incondicional i per recolzar-me en tot moment, als meus amics de classe per haver-me deixat aprendre tant de tots ells, a les meves amigues de la residència per haver fet d'aquesta etapa una etapa màgica, i a en Quim, per ser un puntal tan ferm i imprescindible en mi. Va per tots vosaltres.

Índex

1 Introducció

El projecte

El moviment Brownià pren el nom del botànic Robert Brown, que el 1828 va observar el moviment irregular de les partícules de pol·len en suspensió en aigua i el seu comportament difusiu, és a dir, de les trajectòries erràtiques de les partícules a nivell microscòpic (degudes a les col·lisions amb les molècules d'aigua), però provocant un comportament molt suau de la densitat de totes elles com a conjunt. El moviment Brownià és doncs una eina matemàtica per a modelar el moviment de les partícules difusores individualment, i tot i les nombroses contribucions de diferents personalitats al llarg de la història (més explicat en la secció 3), la descripció matemàtica rigorosa és atribuïda a Norbert Wiener (1923).

En un sentit més ampli, aquest moviment és un objecte central en l'estudi de processos estocàstics i en models matemàtics sobre fenòmens de disciplines molt diverses. No només serviex per modelar el moviment de partícules en un fluid, sinó que apareix en la majoria de models amb pertorbations aleatòries degudes a la interacció amb l'ambient o qualsevol altre paràmetre, en l'àmbit de la física, biologia i economia. Aquest fet és degut al *Teorema del Límit Central*, ja que la suma de variables aleatòries independents (per exemple forces externes en sistemes físics) té com a resultat una distribució normal, propietat dels increments del moviment Brownià. Per això, aquest és tan estès en models matemàtics i un punt clau per l'anàlisi estocàstic, ja que apareixen equacions diferencials estocàstiques (SDE) que cal resoldre, i també d'aquí neix la necessitat d'introduïr la integral estocàstica (Kiyoshi Itô el 1944) així com diverses eines per a trobar-ne la solució.

Estructura de la Memòria

Per tal de poder definir el moviment Brownià i les seves propietats més importants pel desenvolupament del càlcul estocàstic, primer en la secció 2 recordem nocions bàsiques de probabilitat i presentem els processos estocàstics en general. Seguidament en la 3 definim el moviment Brownià, provant-ne la seva existència i construcció així com la no diferenciabilitat de les seves trajectòries i la variació infinta. En la secció 4 introduïm la necessitat d'unes noves regles d'integració, ja que degut a la variació infinita del moviment, no es poden definir les integrals a trossos de Riemann-Stieljes. Expliquem la construcció de la integral d'Itô, central pel càlcul estocàstic, així com la fórmula d'Itô, que és l'anàleg a la regla de la cadena i permet calcular solucions de moltes SDE.

Finalment en 5, presentem una aplicació del càlcul estocàstic a l'anomenat procés d'Ornstein-Uhlenbeck, que és un model més realista (que el moviment Brownià descrit per Wiener) del moviment d'una partícula en un fluid, presentant més connexions amb la velocitat i la posició de les partícules. A més, a través del teorema d'equipartició de l'energia, ens permet deduïr constants i equacions físiques importants, com el teorema de fluctuació-dissipació i la llei d'Einstein-Stokes.

2 Preliminars

2.1 Definició de procés estocàstic

Fem primer memòria d'algunes definicions bàsiques de probabilitat.

Definició 2.1. *Un espai de probabilitat és una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on:*

1. Ω *és el conjunt de resultats possibles de l'experiència aleatòria (espai mostral).*
2. $\mathcal{F}$ *és una família de parts de* Ω *que descriu els esdeveniments possibles i té estructura de* σ*-àlgebra, és a dir compleix:*
   - *(i)* $\Omega \in \mathcal{F}$.
   - *(ii)* $\mathcal{F}$ *és estable per pas al complementari, i.e. si* $F \in \Omega \implies F^c \in \Omega$.
   - *(iii)* $\mathcal{F}$ *és estable per unions numerables, i.e. si* $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{F} \implies \bigcup_{n\geq 1} F_n \subset \mathcal{F}$.
3. P *és una aplicació* $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ *(probabilitat) tal que:*
   - *(i)* $P(\Omega) = 1$.
   - *(ii) Té la propietat de la* σ*-additivitat, i.e. si* $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ *disjunts dos a dos, aleshores* $P(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$.

Definició 2.2. *Un espai mesurable és un parell ordenat* $(S, \mathcal{L})$ *tal que* S *és un conjunt i* $\mathcal{L}$ *una* σ*-àlgebra de subconjunts de* S*. Aleshores es diu que una funció és mesurable si és funció entre dos espais mesurables.*

Definició 2.3. *Una variable aleatòria en un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *és una aplicació* $X : \Omega \longrightarrow S$ *que compleix que, sigui* $(S, \mathcal{L})$ *un espai mesurable,* $\forall L \in \mathcal{L}, X^{-1}(L) \in \mathcal{F}$*, on* $X^{-1}(L) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in L\}$*. La llei de la variable és la probabilitat sobre* $(S, \mathcal{L})$*,* Q*, tal que* $Q(L) = P(X^{-1}(L))$.

Recordem aleshores que la funció de distribució d'una variable aleatòria unidimensional ve donada per $F(x) = P \circ X^{-1}((-\infty, x])$, i la funció de densitat, si aquesta és contínua, serà f tal que $f(x) = dF(x)/dx$. Notem que les variables aleatòries són per definició funcions mesurables definides sobres espais mostrals (per convenció es diuen $\mathcal{F}/\mathcal{L}$-mesurables o simplement $\mathcal{F}$-mesurables). Ara estem ja en condicions de definir un procés estocàstic.

Definició 2.4. *Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries* $X = \{X_t, t \in T\}$ *indexades per un espai de paràmetres* T*, definides en un mateix espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i que prenen valors en un espai mesurable* $(S, \mathcal{L})$*, anomenat espai d'estats.*

El conjunt $T \subset \mathbb{R}$ sovint s'interpreta com un interval de temps, de forma que X_t descriu l'estat del procés a l'instant de temps t. Si $T = \mathbb{N}$ (o $\mathbb{Z}$) es diu que el procés és discret, mentre que si és un interval de $\mathbb{R}$ es diu que és continu. S és el conjunt on pren valors el procés estocàstic (normalment $\mathbb{R}$ o bé $\mathbb{C}$).

Per tal de caracteritzar els estats passats d'un procés (així com diverses propietats) serà interessant donar la definició de filtració.

Definició 2.5. *L'espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F})$ *es pot equipar amb una filtració, és a dir, una família de sub-*σ*-àlgebres de* $\mathcal{F}$, $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, *tal que* $\mathcal{F}_0$ *conté els subconjunts de* $\mathcal{F}$ *de probabilitat nul·la, i* $\forall s < t$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. *La filtració es diu contínua per la dreta si per qualsevol* $s \geq 0$, $\cap_{t>s}\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_s$.

Així doncs la filtració $\mathcal{F}_t$ conté la informació fins a l'instant de temps t, i aquesta es va acumulant (hi ha tanta o més informació a $\mathcal{F}_t$ que a $\mathcal{F}_s$ amb $s \leq t$). Direm que un procés estocàstic X està adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si $\forall t$, X_t és una variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable, i per tant, la informació disponible al temps t és suficient per avaluar-la. Òbviament tot procés està adaptat a la seva filtració natural, que és la generada pel mateix procés, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

2.1.1 Trajectòries i distribucions

Si no diem el contrari, durant tota la memòria el procés estocàstic X vindrà donat com en la Definició 2.4.

Definició 2.6. *Fixada* $\omega \in \Omega$, *una trajectòra o camí mostral del procés és una aplicació* $X(\cdot, \omega) : T \longrightarrow S$ *tal que* $t \mapsto X_t(\omega)$. *Així doncs cada procés determina una aplicacó* $X : \Omega \longrightarrow S^T$, *tal que* $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$ *i* S^T *és el conjunt de trajectòries del procés,* $\{X(\cdot, \omega) : T \longrightarrow S\}_{\omega\in\Omega}$.

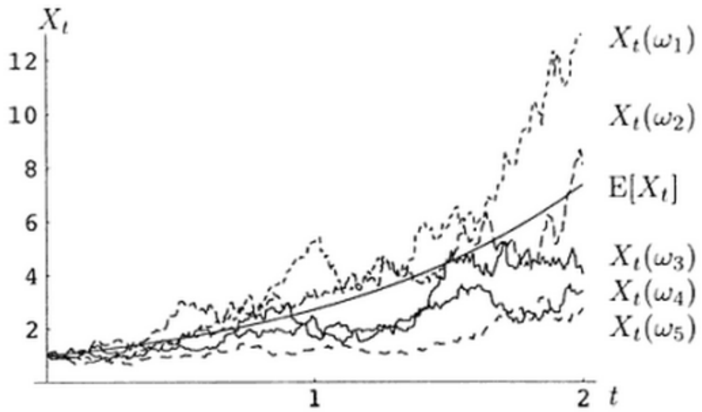

Figura 1: Simulació de cinc trajectòries d'un procés estocàstic (de moviment Brownià geomètric) i la seva esperança. Font: [9].

Finxant-nos doncs amb la figura, cada $X_t(\omega_i)$ és una trajectòria diferent i el conjunt de totes elles formen S^T. Podem pensar el procés com una elecció a l'atzar (seguint una certa distribució de probabilitat) d'un element de S^T, i en el cas de que T sigui discret es pot entendre com un vector aleatori (aplicació $X : \Omega \longrightarrow S^m$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$ tal que cada $X_i : \Omega \longrightarrow S$ és una variable aleatòria). Podem construïr una σ-àlgebra producte apropiada per S^T, $\mathcal{L}^T$, per tal de definir la llei del procés. Representem els $x \in S^T$ com $(x_t)_{t\in T}$.

Definició 2.7. *Donat $T_0 \subset T$, la projecció canònica és l'aplicació $\Pi_{T_0} : S^T \longrightarrow S^{T_0}$ tal que $\Pi_{T_0}(x) = x_{|T_0}$, amb $x \in S^T$. Aleshores denotem $\mathcal{L}^T$ com la σ-àlgebra que fa mesurables les aplicacions $\{\Pi_{\{t\}} = \Pi_t, t \in T\}$.*

De fet, es pot construir $\mathcal{L}^T$ com la σ-àlgebra generada pel conjunt de cilindres finits de S^T, donats per $C = \Pi_{T_0}^{-1}(A) = \{x \in S^T ; (x_t)_{t\in T_0} \in A\}$ on $A \subset S^{T_0}$ ([7] p.2).

Definició 2.8. *Sigui un procés estocàstic X i $T_0 = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ ordenat, la llei de probabilitat del vector aleatori $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) : \Omega \longrightarrow S^{T_0}$, donada per $Q_{t_1,\ldots,t_n} = P \circ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^{-1}$ en l'espai producte $(S^{T_0}, \mathcal{L}^{T_0})$, s'anomena distribució marginal en dimensió finita del procés.*

De manera anàloga podem pensar que la llei del procés, Q_X, ve donada per $Q_X = P \circ X^{-1}$ en $(S^T, \mathcal{L}^T)$, és a dir:

$$Q_X(L) = P(X^{-1}(L)), \; L \in \mathcal{L}^T.$$

Es pot demostrar, a través del teorema de Kolmogorov, l'existència d'un procés estocàstic associat a una família de distribucions marginals en dimensió finita i que compleixin la condició de consistència. El teorema diu el següent:

Teorema 2.9. *Sigui $\{Q_{t_1,\ldots,t_n}, t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 1, t_i \in T\}$ on:*

1. *$Q_{t_1,\ldots,t_n}$ és una probabilitat en S^T,*
2. *Si $\{t_{k_1} < \cdots < t_{k_m}\} \subset \{t_1 < \cdots < t_n\}$, $Q_{t_{k_1},\ldots,t_{k_m}}$ és la distribució marginal de $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ (condició de consistència).*

Aleshores, existeix un únic procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ amb llei Q_X en $(S^T, \mathcal{L}^T)$, tal que la família de distribucions marginals en dimensió finita és $\{Q_{t_1,\ldots,t_n}\}$.

No en donarem la demostració perquè ens estendríem massa, però la idea és provar el teorema sota condicions topològiques de l'espai $(S, \mathcal{L})$ i imposant les condicions de consistència de les distribucions marginals (demostració en [7] p.6 pel cas $(S, \mathcal{L}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on $\mathcal{B}$ denota la σ-àlgebra de Borel).

Pel que és d'interés en el treball, a partir d'ara considerarem $T = [0, \infty)$ i processos que prenen valors reals. Per tant $S = \mathbb{R}^d$ l'espai Euclidià d-dimensional i $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la σ-àlgebra de Borel, que és la més petita que conté tots els oberts de l'espai S. En aquest cas el procés X es diu mesurable si l'aplicació $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega) : ([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ és mesurable. En particular, estudiarem processos unidimensionals i per tant tindrem $d = 1$.

2.2 Principals classes de processos estocàstics

A continuació donarem les definicions d'algunes de les principals classes de processos que existeixen i que ens seran més útils. Considerem el subconjunt finit $\{t_1 < \cdots < t_n\} \subset T$ i els subconjunts de Borel $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (a cada apartat ja s'especifica a quin subconjunt pertanyen les variables).

Definició 2.10. *Es diu que un procés X té increments independents si les variables aleatòries $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ són independents.*

És a dir, per definició d'independència, s'ha de complir que $P(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n) = P(X_{t_1} \in A_1) \prod_{i=2}^{n} P(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \in A_i)$. Aleshores si $T = [0, \infty)$, les distribucions marginals del procés queden totalment determinades per X_{t_1} i $X_t - X_s$, per a tot $s, t \in T$ i $s < t$.

Definició 2.11. *X és un procés de Markov (o té la propietat de Markov) si donat $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ la probabilitat condicionada $P(X_{t_n} \in A | X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}) = P(X_n \in A | X_{t_{n-1}} \in A_{n-1})$ quasi segurament (q.s.), és a dir amb probabilitat 1.*

Per simplificar la notació sovint ometem els subconjunts de Borel i simplement escriurem $P(X_{t_n} | X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = P(X_n | X_{t_{n-1}})$, tant si fem referència a la probabilitat com a l'esperança. Intuïtivament i sense entrar-hi més formalment, donat el present d'un procés de Markov el seu futur i passat són independents (l'estat futur només depèn del present).

En aquest cas, per a variables contínues s'introdueix la funció de densitat de transició de la variable X, $p(s, t, x, y)$, que és la funció de densitat de probabilitat de X_t si $X_s = x$, amb $s \leq t$ (i és per tant una funció de y). En canvi, per a variables discretes, ve donada per $p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = i | X_n = j)$, on m representa el salt. Per a aquests processos és molt important l'*equació de Chapman-Kolmogorov* (demostració en [10] p.24 per una distribució Gaussiana), que per a les variables contínues és:

$$p(t_1, t_3, x_1, x_3) = \int_{\mathbb{R}} p(t_2, t_3, x_2, x_3) p(t_1, t_2, x_1, x_2) dx_2, \qquad (2.1)$$

i per a les discretes es converteix en una multiplicació de matrius de les probabilitats de transició de passos diferents.

Definició 2.12. *X és un procés estrictament estacionari si amb $\{t_1 + h < \cdots < t_n + h\} \subset T$, $P(X_{t_1+h} \in A_1, \ldots, X_{t_n+h} \in A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n)$.*

Definició 2.13. *Un procés X amb esperança finita $E(|X|) < \infty$ és una martingala si l'esperança condicionada compleix $E(X_{t_n} | X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = X_{t_{n-1}}$ q.s. És una supermartingala si enlloc de igualtat tenim $\leq$, i una submartingala si és $\geq$.*

Equivalentment podem definir-ho fent referència a una certa filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F})$, i direm que X és una martingala respecte $\{\mathcal{F}_t\}$ si cada variable pertany a $L^1(\Omega)$ (espai de funcions integrables) i:

1. X_t està adaptada a la filtració $\mathcal{F}_t$ per a tot $t \geq 0$,
2. per a tot $0 \leq s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.

L'esperança condicionada d'una variable aleatòria respecte d'una σ-àlgebra és doncs una eina crucial en l'estudi dels processos estocàstics, així que la podem trobar definida a l'apèndix A juntament amb algunes propietats que ens seran útils més endavant.

2.2.1 Processos de segon ordre

Definició 2.14. *Un procés $\{X_t, t \in T\}$ és de segon ordre si l'esperança $E(X_t^2) < \infty$ per a tot $t \in T$, i per tant, és una funció de t en l'espai de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (espai de funcions de quadrat integrables).*

La mitjana d'un procés (no forçosament de segon ordre) que pren valors reals és la funció $m_X : T \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $m_X(t) = E(X_t)$, i es diu que el procés és centrat si $m_X(t) = 0$.

Per processos de segon ordre podem definir també la funció de covariància, que és una funció $\Gamma_X : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Gamma_X(s,t) = Cov(X_s, X_t) \equiv E[(X_s - E(X_s))(X_t - E(X_t))]$. I aleshores la variància és $\sigma_X^2(t) = Var(X_t) \equiv E[(X_t - E(X_t))^2] = \Gamma_X(t,t)$. Com que $X_t - m(t)$ és centrat i d'igual covariància que X_t, a partir d'ara si no diem el contrari estarem considerant processos centrats, que compleixen $\Gamma_X(s,t) = E(X_s X_t)$.

Observació 2.15. Notem que Γ_X és simètrica i definida no negativa, ja que per a tot $n \geq 1$, $t_i \in T$ i $a_i \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_X(t_i, t_j) a_i a_j &= \sum_{i,j=1}^{n} E(X_{t_i} X_{t_j}) a_i a_j \\ &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_{t_i} a_i \sum_{j=1}^{n} X_{t_j} a_j\Big) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_{t_i} a_i\Big)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Definició 2.16. *Sigui X de segon ordre, es diu que és un procés estacionari en sentit ampli si $\forall t, t+h \in T$, $E(X_{t+h}) = E(X_t)$ i $Cov(X_{t+h}, X_{s+h}) = Cov(X_t, X_s)$.*

Definirem seguidament els processos Gaussians, que són processos de segon ordre i una part central en el moviment Brownià.

Definició 2.17. *Un procés estocàstic és Gaussià (o normal) si totes les seves distribucions marginals en dimensió finita segueixen lleis Gaussianes multidimensionals.*

Fent memòria, sigui $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, una variable Gaussiana unidimensional $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (amb mitjana μ i variància σ^2) segueix la següent funció de distribució:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)dx. \tag{2.2}$$

Aleshores

$$E(X) = \int_\Omega X dP = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = m,$$
$$Var(X) = E[(X-m)^2] = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 f_X(x) dx = \sigma^2.$$

A l'apèndix B s'hi pot trobar més informació sobre les lleis Gaussianes multidimensionals. La mitjana i funció de covariància d'un procés Gaussià determinen totalment les seves distribucions marginals. I inversament, siguin $m : T \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\Gamma : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ simètrica i definida no negativa, es pot demostrar (amb el teorema de Kolmogorov, [10] p.6) que existeix un procés estocàstic Gaussià, centrat i amb Γ com a funció de covariància. De fet, si Γ pren valors en els complexos també existeix un procés de segon ordre amb aquesta mitja i funció de covariància.

2.3 Continuïtat i diferenciabilitat

Donem algunes definicions de continuïtat i diferenciabilitat dels processos estocàstics, tenint en compte sempre amb quin tipus els estem definint.

Definició 2.18. *Es diu que un procés $X = \{X_t, t \in T\}$ és continu en probabilitat si $\lim_{h\to 0} X_{t+h} = X_t$ en P, és a dir, per a tot $\epsilon > 0$ i $t \in T$,*

$$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0.$$

Degut a que molts dels processos més interessants són de segon ordre, és útil definir la continuïtat i la diferenciabilitat dels processos en L^2.

Definició 2.19. *Sigui X de segon ordre, es diu que és continu en mitjana quadràtica en $t \in T$ si $\lim_{h\to 0} X_{t+h} = X_t$ en L^2, és a dir,*

$$\lim_{h\to 0} E(|X_{t+h} - X_t|^2) = 0.$$

I és diferenciable en L^2 en $t \in T$ si existeix el límit en mitjana quadràtica

$$X_t' \equiv \lim_{h\to 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h}.$$

Tot i això, la continuïtat del procés no implica forçosament que les trajectòries siguin contínues q.s., sinó que aquestes ho són si el conjunt de Ω que fa que tinguin discontinuïtats en T és negligible. En relació a les trajectòries doncs, tenim el següent criteri de Kolmogorov (veure la demostració en [5] p.24):

Proposició 2.20. *Sigui X un procés que satisfà per $\alpha, \beta, C > 0$ i $\forall s, t \in T$ que*

$$E(|X_t - X_s|^\alpha) \le C|t-s|^{1+\beta},$$

aleshores les trajectòries del procés són γ-Hölder contínues $\forall \gamma$ tal que $0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha}$, és a dir, $\exists K > 0$ constant tal que $|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le K|t-s|^\gamma$, $\omega \in \Omega$. I de fet això implica que són contínues en t q.s.

3 El moviment Brownià

El 1828 el botànic Robert Brown va observar un moviment irregular dels grans de pol·len en suspensió en aigua, que més tard es va conèixer com a moviment Brownià i es va poder explicar degut a col·lisions aleatòries de les partícules de pol·len (també anomenades partícules Brownianes) amb les molècules d'aigua. El primer en estudiar quantitativament aquest moviment fou Thorvald N. Thiele en un article sobre el mètode dels mínims quadrats publicat el 1880, i potseriorment Louis Bachelier, que interessat en les fluctuacions en els preus de les accions, el 1900 va publicar la tesi "La teoria de l'especulació". Cinc anys més tard, Albert Einstein i paral·lelament Marian Smoluchowski, van calcular la densitat de transició del moviment a partir de la teoria cinètica i de la termodinàmica, tot proposant l'equació de difusió i relacionant el coeficient de difusió amb el desplaçament quadràtic mitjà de la partícula Browniana. No fou però fins el 1923 quan Norbert Wiener va donar la descripció matemàtica més rigurosa del moviment, demostrant l'existència d'una probabilitat a l'espai de funcions contínues i provant-ne més tard la no diferenciabilitat de les trajectòries. De fet el moviment Brownià unidimensional es diu comunament procés de Wiener. Paul Lévy el 1948, va fer un anàlisi exhaustiu del procés, introduïnt la construcció per interpolació i altres propietats de les trajectòries. Definirem en aquesta secció el moviment, en demostrarem l'existència i en presentarem algunes propietats importants.

3.1 Definició del moviment

Definició 3.1. *El moviment Brownià estàndard o procés de Wiener unidimensional, és un procés estocàstic* $B = \{B_t, t \geq 0\}$ *Gaussià, centrat i amb funció de covariància* $\Gamma(s,t) = s \wedge t \equiv \min(s,t)$.

Per tant al ser Gaussià està clar que és un procés de segon ordre. A més, veurem que les seves trajectòries són contínues i que la llei del procés ve donada per distribucions multidimensionals normals amb vector de mitjanes nul i matriu de covariàncies Γ (veure apèndix B). Al ser centrat $m(t) = E(B_t) = 0$ i $\Gamma(s,t) = E(B_s B_t)$, i l'existència del procés ens l'assegura el teorema de Kolmogorov, provant que $\Gamma(s,t)$ és definida no negativa:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_X(t_i,t_j)a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} (t_i \wedge t_j) a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(r)\mathbf{1}_{[0,t_j]}(r)dr$$
$$= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{[0,t_i]}(r)dr \right)^2 \geq 0.$$

Veiem ara una definició equivalent de moviment Brownià amb la següent proposició.

Proposició 3.2. *Un procés estocàstic* $B = \{B_t, t \geq 0\}$ *és un moviment Brownià* $\iff$ $B_0 = 0$ *q.s.,* B *té increments independents i* $\forall\ 0 \leq s \leq t$ *la variable* $B_t - B_s$ *segueix una distribució normal* $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Demostració. En primer lloc suposem que B és un moviment Brownià.

(i) Suposem que $B_0 \neq 0$ i per tant $B_0^2 > 0$. Aleshores per les propietats de l'esperança, com que $0 < B_0^2 \implies 0 = E(0) < E(B_0^2)$, però per hipòtesis $E(B_0B_0) = 0$, que és una contradicció. Així doncs $B_0 = 0$ q.s.

(ii) Donades $s \leq t$, com que B_t i B_s tenen lleis Gaussianes, $B_t - B_s$ també serà Gaussiana al ser tranformació lineal d'ambdues (veure densitat de transformacions de vectors aleatoris de [11] p.73 i apèndix B). A més a més, com que per hipòtesis $m(t) = 0$, $E(B_t - B_s) = E(B_t) - E(B_s) = 0$, i la variància $Var(B_t-B_s) = E[(B_t-B_s)^2] = E(B_t^2-2B_tB_s+B_s^2) = t\wedge t-2t\wedge s+s\wedge s = t-s$. Per tant $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

(iii) Finalment cal veure que fixat $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ i $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ són independents $\forall i < j$. Com que variables normalment distribuïdes són independents si i només si no estan correlacionades (apèndix B propietat (iii)), únicament ens cal comprovar això últim. Així doncs,

$$E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = E(B_{t_{i+1}}B_{t_{j+1}}) - E(B_{t_{i+1}}B_{t_j}) - E(B_{t_i}B_{t_{j+1}}) + E(B_{t_i}B_{t_j}) = t_{i+1} - t_{i+1} - t_i + t_i = 0,$$

i per tant $E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \implies B$ té increments independents.

Ara demostrem el recíproc. Suposant que $\forall s, t$ tals que $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ i amb increments independents, altre cop per transformació lineal de vectors aleatoris B és un procés Gaussià centrat. Aleshores, utlitzant que per hipòtesis B_s i $B_t - B_s$ són independents i que $E(B_t - B_s) = 0$, la funció de covariància compleix: $E(B_sB_t) = E[B_s(B_t - B_s + B_s)] = E[B_s(B_t - B_s)] + E(B_s^2) = E(B_s^2) = s = s \wedge t$. Per tant queda vist que B és un moviment Brownià. □

Així doncs, amb aquesta proposició veiem que l'evolució que modelitza el moviment Brownià comença a $x = 0$ a l'instant de temps $t = 0$ i els canvis només depenen de la longitud dels increments de temps (llei d'estacionarietat) i no dels estats passats (propietat de Markov).

Observació 3.3. En general, la llei moviment Brownià (no estàndard) ve donada per distribucions multidimensionals normals $B_t \sim \mathcal{N}(x_0, \sigma^2 t)$, on σ fa el paper de la variància i x_0 el punt inicial, i llavors per a cada $s < t$, $B_t - B_s$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$. Tot i això, degut al seu interés ens centrem en l'estàndard amb $\sigma = 1$ i començant en 0.

A partir d'ara al parlar de moviment Brownià estarem fent referència tota l'estona a l'estàndard.

Proposició 3.4. *Sigui* $\{B_t, t \geq 0\}$ *un moviment Brownià, aleshores també ho són:*

1. $-B = \{-B_t, t \geq 0\}$ *(moviment simètric),*

2. $B^\lambda = \{\frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 t}, t \geq 0\}$ *per* $\lambda > 0$ *(invariància d'escala),*

3. $B^a = \{B_{t+a} - B_a, t \geq 0\}$ *per* $a \geq 0$*, i a més, és independent de* $\sigma(\{B_r\}_{r\in[0,a]})$ *(propietat simple de Markov),*

4. *Si* $\{B_t, t \in [0,T]\}$ *moviment Brownià, també ho és* $\{B_T - B_{T-t}, t \in [0,T]\}$ *(invariància sota inversió temporal).*

Demostració. Tots els processos anteriors són Gaussians en tant que transformació lineal de processos Gaussians, i les seves trajectòries són contínues ja que són composició de funcions contínues (a l'apartat 3.2 demostrem la continuïtat de les seves trajectòries). Només ens cal veure doncs que la seva funció de covariància és el mínim. Siguin $s \leq t$:

1. $\Gamma(s,t) = E[(-B_s)(-B_t)] = E(B_sB_t) = s \wedge t.$
2. $\Gamma(s,t) = E[(\frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 s})(\frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 t})] = \frac{1}{\lambda^2}E(B_{\lambda^2 s}B_{\lambda^2 t}) = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 s \wedge \lambda^2 t) = s \wedge t.$
3. $\Gamma(s,t) = E[(B_{s+a}-B_a)(B_{t+a}-B_a)] = E(B_{s+a}B_{t+a})-E(B_{s+a}B_a)-E(B_aB_{t+a})+E(B_aB_a) = (s+a)\wedge(t+a) - a - a + a = s \wedge t$. I són independents per la Proposició 3.2.
4. $\Gamma(s,t) = E[(B_T-B_{T-s})(B_T-B_{T-t})] = E(B_TB_T)-E(B_TB_{T-t})-E(B_{T-s}B_T)+E(B_{T-s}B_{T-t}) = T-(T-t)-(T-s)+(T-\max(s,t)) = s \wedge t.$ □

3.1.1 Martingala i propietat de Markov

Amb la Definició 2.13 de martingala es pot comprovar que el moviment Brownià n'és una. Considerem la filtració natural de B com $\mathcal{F}_s = \sigma(B_r, 0 \leq r \leq s)$ que és generada per B_r. Clarament B_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable i per definició del moviment (increments independents) sabem que $B_t - B_s$ i $B_r - B_0 = B_r$ amb $0 \leq r \leq s \leq t$, són independents. Per tant com que $\mathcal{F}_s$ és generat per B_r, en segueix que $B_t - B_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$. Aleshores, per les propietats $(a), (b)$ i (d) de l'esperança condicionada (veure apèndix A):

$$\begin{aligned} E(B_t|\mathcal{F}_s) &= E(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + E(B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E(B_t - B_s) + B_s = B_s. \end{aligned}$$

També veiem que posseeix la propietat de Markov. Fixant-nos amb la Definició 2.11, degut a que un procés de moviment Brownià segueix una llei amb distribucions multidimensionals normals i increments $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ la *funció de densitat de transició* és:

$$p(s,t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}.$$

Aleshores, siguin $t_1 < \cdots < t_n \in T$ i $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ subconjunts de Borel,

$$\begin{aligned} &P(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} p(0,t_1,0,x_1)p(t_1,t_2,x_1,x_2)\ldots p(t_{n-1},t_n,x_{n-1},x_n)dx_1\ldots dx_n, \end{aligned}$$

i es compleix l'equació de Chapman Kolmogorov.

3.1.2 El moviment Brownià d-dimensional

Sigui $d \geq 1$, el moviment Brownià d-dimensional és simplement el producte cartesià de d moviments Brownians unidimensionals i independents B_t^i amb $i = 1 \dots d$, és a dir, $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ amb $t \geq 0$. Per tant, només caldrà que estudiem la construcció i les propietats de moviments Brownians unidimensionals, ja que la seva extensió a les d dimensions serà directe.

3.2 Construcció de Lévy-Ciesielski

Hi ha vàries maneres de construïr el moviment Brownià. Una opció és escriure com han de ser les distribucions marginals en dimensió finita (tals que compleixin les propietats en la Proposició 3.2) i construïr una mesura de probabilitat en un espai mesurable per tal d'obtenir-les (teoremes de Daniell-Kolmogorov i Kolmogorov-Čentsov, veure [4] p. 49). També se'n pot demostrar l'existència com a límit d'una seqüència de camins aleatoris (teorema de Donsker, [10] p.12). Finalment, la tercera manera de demostrar-ho és a partir de la construcció de Paul Lévy del 1948 (amb la posterior simplificació de Ciesielski el 1961), explotant la propietat Gaussiana del procés. Aquesta és la més semblant a la construcció original de Wiener, i és en la que ens centrarem.

En primer lloc construïrem el moviment Brownià a l'interval $[0, 1]$ com un element aleatori de l'espai de funcions contínues $\mathcal{C}[0, 1]$, i després l'extendrem en tot $\mathbb{R}_+$. La idea és definir-lo pas a pas en el conjunt finit de punts diàdics $\mathcal{D}_n = \{\frac{j}{2^n}; j = 0, 1, \dots, 2^n\}$, per després interpolar linealment els valors obtinguts i demostrar que el límit uniforme d'aquestes funcions és justament un moviment Brownià amb totes les trajectòries contínues. Definirem primer les funcions de Haar i Schauder en l'espai de Hilbert $L^2([0, 1])$ (ja que el moviment Brownià és de segon ordre i per tant és una funció en l'espai de Hilbert) que és el conjunt de funcions de quadrat sumable ($\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$) dotat del producte intern $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

3.2.1 Funcions de Haar i de Schauder

Siguin $n = 0, 1, \dots$ i $k \in I_n$, on $I_n = \{k = 1, \dots, 2^n; k \text{ senar}\}$ definim en $0 \leq t \leq 1$ les funcions de Haar com $H_1^0(t) = 1$ i per $n \geq 1$:

$$H_k^n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & \frac{k-1}{2^n} \leq t \leq \frac{k}{2^n}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}}, & \frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n}, \\ 0, & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

Proposició 3.5. *$\{H_k^n\}$ formen una base ortonormal completa de $L^2([0, 1])$, i.e., $\langle H_{k_1}^{n_1}, H_{k_2}^{n_2} \rangle = \delta_{n_1 n_2} \delta_{k_1 k_2}$ (delta de Kronecker) i $\forall f \in L^2([0, 1])$ tal que $\langle f, H_k^n \rangle = 0$ $\forall n, k \implies f = 0$.*

Demostració. Si ens fixem amb la Figura 2 on hem representat alguns exemples de les funcions de Haar, és immediat veure que són ortonormals dos a dos

$\langle H_{k_1}^{n_1}, H_{k_2}^{n_2} \rangle = \delta_{n_1 n_2}\delta_{k_1 k_2}$, ja que o bé hi haurà un interval dins de $[0,1]$ en què una de les funcions de Haar és zero, o bé una serà constant i l'altra totalment simètrica en l'interval, pel que la integral serà igualment nul·la.

Per altra banda, sigui $f \in L^2([0,1])$, suposem $\langle f, H_k^n \rangle = \int_0^1 f(t)H_k^n dt = 0\ \forall n, k$. Si definim $J_j^n \equiv \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} f(t)dt$, per a $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ llavors, per $n \geq 1$:

$$0 = \langle f, H_1^n \rangle = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f(t) 2^{\frac{n-1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}} f(t)(-2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 2^{\frac{n-1}{2}}(J_0^n - J_1^n) \implies J_0^n = J_1^n.$$

Anàlogament és fàcil comprovar que $\langle f, H_k^n \rangle = 0 \implies J_{k-1}^n = J_k^n$. Però també, si ara considerem $n-1$:

$$0 = \langle f, H_1^{n-1} \rangle = \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(t) 2^{\frac{n-2}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2^{n-1}}}^{\frac{2}{2^{n-1}}} f(t)(-2)^{\frac{n-2}{2}} dt = 2^{\frac{n-2}{2}}(J_0^{n-1} - J_1^{n-1})$$
$$= 2^{\frac{n-2}{2}}(J_0^n + J_1^n - J_2^n - J_3^n) \implies 2J_0^n = 2J_2^n \implies J_0^n = J_1^n = J_2^n = J_3^n.$$

Per tant altra vegada es pot comprovar que $\langle f, H_k^{n-1} \rangle = 0 \implies J_{k-1}^n = J_k^n = J_{k+1}^n = J_{k+2}^n$. Per $n-2$ tindríem vuit igualtats, i així recursivament fins a obtenir que $\forall j, J_j^n = J_0^n$. Ara, utilitzant també que $0 = \langle f, H_1^0 \rangle$ per hipòtesis, tindrem:

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{j=0}^{2^n-1} J_j^n = 2^n J_0^n = 0 \implies J_0^n = 0 \implies J_j^n = 0 \quad \forall j.$$

Aleshores $\int_a^b f(t)dt = 0$ per a tots els nombres racionals diàdics $a, b \in [0,1]$. Com que l'àlgebra generada per aquests intervals genera al seu torn la σ-àlgebra de Borel, $\int_A f(t)dt = 0$ per a tot $A \in \mathcal{B}([0,1]) \implies f = 0$ i per tant la base és completa. $\square$

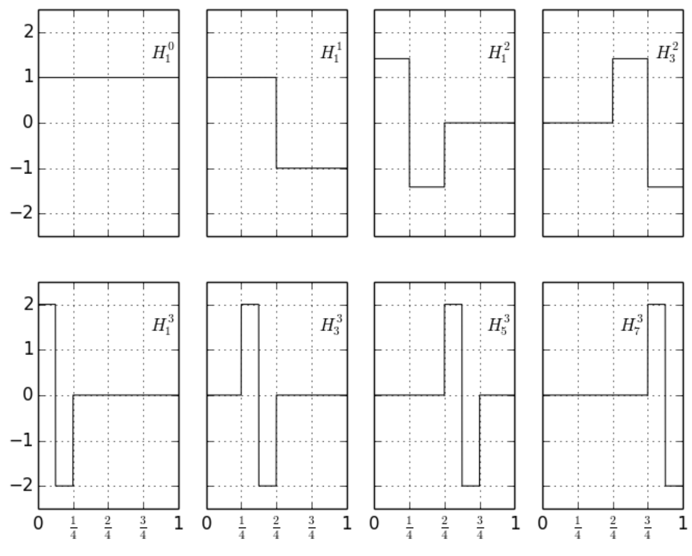

Figura 2: Alguns exemples de funcions de Haar. Font: pròpia (representat amb Python).

D'aquesta forma, qualsevol $f \in L^2([0,1])$ pot expressar-se com a combinació lineal de la base amb els coeficients com les projeccions:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle f, H_k^n \rangle H_k^n.$$

I si també $g \in L^2([0,1])$ la *igualtat de Parseval* sosté $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle f, H_k^n \rangle \langle g, H_k^n \rangle$.

Definim a continuació les funcions de Schauder com les integrals indefinides de les funcions de Haar, de forma que $S_1^0(t) = \int_0^t H_1^0(s)ds = t$ i per $n \geq 1$:

$$S_k^n(t) = \int_0^t H_k^n(s)ds = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} \left(t - \frac{k-1}{2^n}\right), & \frac{k-1}{2^n} \leq t \leq \frac{k}{2^n}, \\ 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{k+1}{2^n} - t\right), & \frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n}, \\ 0, & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Per a cada n, k, t fixades, es compleix que $|S_k^n(t)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}}$ ja que gràficament les funcions són com tendes de màxim $2^{-\frac{n+1}{2}}$ a $\frac{k}{2^n}$ i amb zeros a $\frac{k-1}{2^n}$ i $\frac{k+1}{2^n}$:

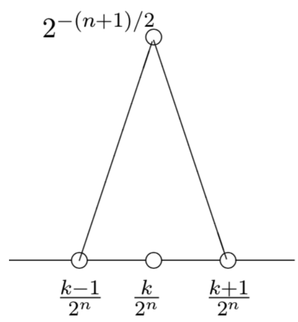

Figura 3: Funció de Schauder general. Font: http://wwwf.imperial.ac.uk/~mdavis/course_material/sp1/BROWNIAN_MOTION.PDF.

Finalment, si apliquem la igualtat de Parseval a $f = \mathbf{1}_{[0,t]}$ i $g = \mathbf{1}_{[0,s]}$ obtenim:

$$s \wedge t = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} S_k^n(t) S_k^n(s). \tag{3.2}$$

3.2.2 Recursió i interpolació de processos normals

Construcció en [0,1]

Per cada $n = 0, 1, \ldots$ el conjunt de punts diàdics és $\mathcal{D}_n = \{\frac{j}{2^n}; j = 0, 1, \ldots, 2^n\}$ i compleix per a $n \geq 1$ que $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n-1} \cup \{\frac{k}{2^n}; k \in I_n\}$ amb $\mathcal{D}_0 = \{0, 1\}$. Considerem $\{N_k^n, k \in I_n, n = 0, 1, \ldots\}$ com una família de variables aleatòries independents amb llei $\mathcal{N}(0,1)$ i definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Aleshores per cada $n \geq 0$ definim un procés $B^n = \{B_t^n, 0 \leq t \leq 1\}$ de manera que els valors en el conjunt finit de punts diàdics queden fixats per recursió, i per interpolació lineal en la resta de valors de l'interval $[0,1]$. Usarem indistintament N_k^n i $N_k^n(\omega)$ on $\omega \in \Omega$ (i també B_t^n i $B_t^n(\omega)$). La idea és la següent:

(i) Per $n = 0$, $\mathcal{D}_0 = \{0,1\}$. Definim $B_0^0 = 0$ i $B_1^0 = N_1^0$, i per interpolació lineal llavors $B_t^0 = tN_1^0$ amb $t \in [0,1]$.

(ii) Per $n \geq 1$, conservem els valors dels conjunts diàdics que haurem definit anteriorment, és a dir per $d \in \mathcal{D}_{n-1}$, fixem $B_d^n = B_d^{n-1}$ (que és el mateix que escriure $d = \frac{k\pm 1}{2^n}$ $\forall k \in I_n$). Aleshores els punts que falten de $\mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1} = \{\frac{k}{2^n}; k \in I_n\}$ els definim com:

$$B^n_{\frac{k}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(B^{n-1}_{\frac{k-1}{2^n}} + B^{n-1}_{\frac{k+1}{2^n}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} N_k^n, \tag{3.3}$$

on tots els termes que hi participen ja hauran estat definits. Obtindrem doncs tots els B_d^n amb $d \in \mathcal{D}_n$, i només ens caldrà interpolar linealment en cada interval.

D'aquesta manera veiem que a cada pas s'afegeixen components aleatoris de variables normals per tal de tenir definits tots els punts en el conjunt diàdic pertinent i després poder interpolar-los. Per a fer la construcció més visual, representem uns esquemes dels tres primers passos i l'últim a la Figura 4.

Fent ús de les funcions de Schauder, clarament $B_t^0 = tN_1^0 = S_1^0(t)N_1^0$, i per inducció en n es pot comprovar (fet a l'apèndix C) que podem expressar les B_t^n interpolades com una combinació lineal d'aquestes funcions ($n \geq 0$ i $\omega \in \Omega$):

$$B_t^n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I_m} N_k^m(\omega) S_k^m(t). \tag{3.4}$$

Exemple 3.6. Fem més explícit el cas $n = 1$ ($k = 1$) perquè sigui més entenedor. Com que $\mathcal{D}_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, conservem els punts $0, 1 \in \mathcal{D}_0$ de forma que $B_0^1 = B_0^0 = 0$ i $B_1^1 = B_1^0 = N_1^0$. El punt de $\mathcal{D}_1 \backslash \mathcal{D}_0 = \{\frac{1}{2} = \frac{k}{2^n}\}$ el definim com:

$$B_{1/2}^1 = \frac{1}{2}(B_0^0 + B_1^0) + \frac{1}{2}N_1^1 = \frac{1}{2}(N_1^0 + N_1^1).$$

Per tant interpolant linealment entre aquests tres punts, i amb les definicions de les funcions de Schauder en cada interval, tindrem:

- Si $t \in [0, \frac{1}{2}]$: $B_t^1 = \frac{B_{1/2}^1 - B_0^1}{1/2 - 0} t + B_0^1 = 2B_{1/2}^1 t = N_1^0 t + N_1^1 t = N_1^0 S_1^0 + N_1^1 S_1^1$.
- Si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$: $\frac{t-1}{1/2} = \frac{B_t^1 - B_1^1}{B_1^1 - B_{1/2}^1} \implies B_t^1 = 2(t-1)(N_1^0 - \frac{1}{2}(N_1^0 + N_1^1)) + N_1^0 = tN_1^0 + (1-t)N_1^1 = N_1^0 S_1^0 + N_1^1 S_1^1$.

Obtenint així la fórmula (3.4) per $n = 1$. Els càlculs per $n = 2$ en tots els intervals corresponents i la demostració del cas general per inducció es pot trobar a l'apèndix.

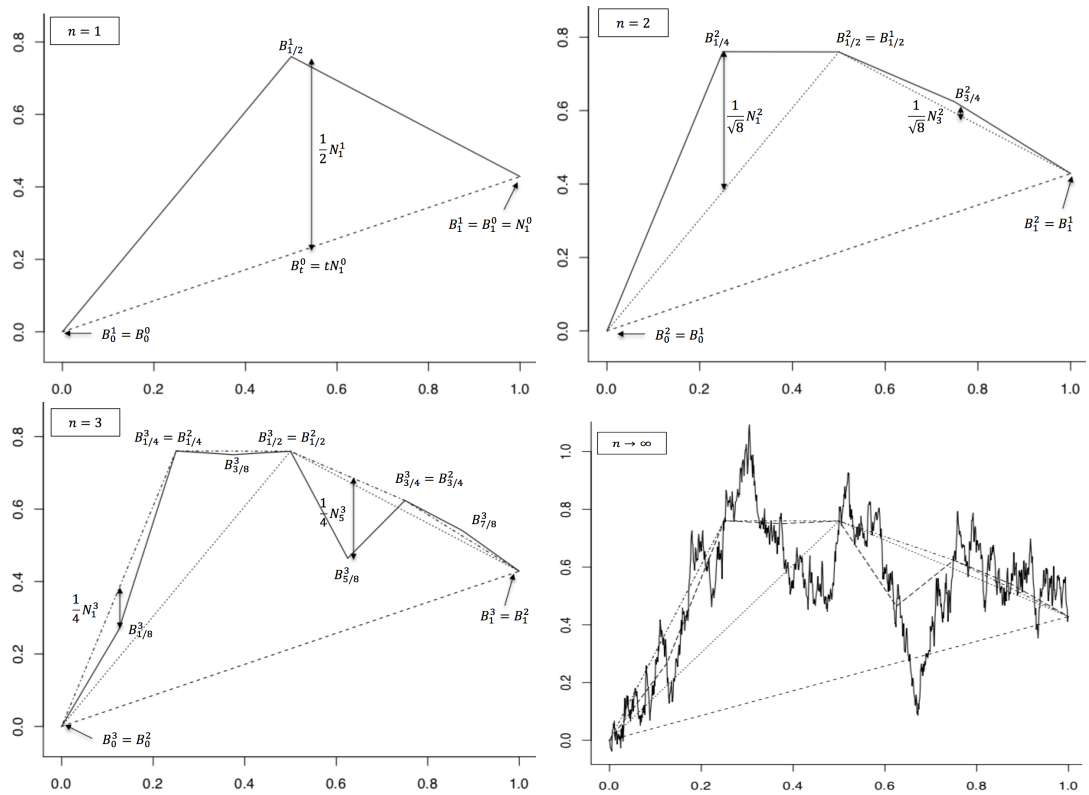

Figura 4: Processos de construcció de la seqüència B^n en $t \in [0,1]$ per a les n indicades en cada cas. En la primera figura la línia discontínua fa referència al cas $n = 0$ i per tant a (i). Notem també que per a $n = 3$ ens falta indicar la separació de $B^3_{3/8}$ que és $N^3_3/4$ i la de $B^3_{7/8}$ que és $N^3_7/4$. Font: Base dels gràfics obtinguts de https://www.stat.ncsu.edu/people/bloomfield/courses/ma547/slides/AE-03-2.pdf i anotacions pròpies.

Límit com a moviment Brownià

Un cop tenim la construcció de les seqüències B^n, ara cal que demostrem que el límit uniforme és un moviment Brownià. Donem primer un resultat d'anàlisi que farem servir posteriorment.

Lema 3.7. *Si $(f_n)_n$ és una successió de funcions contínues de $S \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que convergeixen uniformement a $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, aleshores f també és contínua.*

Demostració. Hem de veure que $\forall x \in S$ i $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $|x - y| < \delta$, amb $y \in S$.

Com que $f_n \longrightarrow f$ uniformement en S, aleshores $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ $\forall x \in S$. També al ser f_n contínua, $\exists \delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon/3$, si $|x - y| < \delta$. Per tant en aquestes condicions tindrem:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

I obtenim el que volíem demostrar. $\square$

Així doncs ja podem provar el següent teorema sobre la convergència de les seqüències B^n.

Teorema 3.8. *La seqüència de funcions $\{B_t^n(\omega), 0 \leq t \leq 1\}$ donada per (3.4) convergeix uniformement en t q.s. quan $n \to \infty$ a una funció contínua $\{B_t(\omega), 0 \leq t \leq 1\}$.*

Demostració. Per veure que $(B_t^n)_{n\geq 0}$ convergeix uniformement en t q.s. utilitzarem el resultat que diu que, sigui $\{c_n, n \geq 0\}$ una successió de nombres reals positius tals que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, i $\{X_n, n \geq 0\}$ una successió de variables aleatòries que compleixen $\sum_{n=1}^{\infty} P(||X_n - X_{n-1}|| > c_{n-1}) < \infty$, on $||\cdot|| \equiv \sup_{0\leq t\leq 1} |\cdot|$, aleshores X_n convergeix q.s. ([11] p.132). Així doncs,

$$||B^n - B^{n-1}|| = \sup_{0\leq t\leq 1} |B_t^n - B_t^{n-1}| = \sup_{0\leq t\leq 1} \left| \sum_{k\in I_n} N_k^n(\omega) S_k^n(t) \right| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \max_{k\in I_n} |N_k^n(\omega)|,$$

on hem utilitzat a la última igualtat que $\sup_{0\leq t\leq 1} |S_k^n(t)| = 2^{-\frac{n+1}{2}}$.

Ara podem escollir $c_n = 2^{-\frac{n+2}{4}}$ ja que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{n+2}{4}} < \infty$ pels criteris de convergència (per exemple el del quocient). Comprovem que el sumatori de les probabilitats de l'esdeveniment $||B^n - B^{n-1}|| > c_{n-1}$ és finit.

$$\begin{aligned}
P\Big(||B^n - B^{n-1}|| > 2^{-\frac{n+1}{4}}\Big) &\leq P\Big(\max_{k\in I_n} |N_k^n(\omega)| > 2^{\frac{n+1}{4}}\Big) \\
&= P\Bigg(\bigcup_{k\in I_n} \Big\{|N_k^n(\omega)| > 2^{\frac{n+1}{4}}\Big\}\Bigg) \\
&\leq \sum_{k\in I_n} P\Big(|N_k^n(\omega)| > 2^{\frac{n+1}{4}}\Big) \\
&< 2^n \exp\left(-\frac{(2^{\frac{n+1}{4}})^2}{2}\right) = 2^n e^{-2^{\frac{n-1}{2}}},
\end{aligned}$$

on en la darrera desigualtat hem utilitzat que el cardinal de $k < 2^n$ i que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, per a qualsevol $a \geq 1$ es té:

$$P(|X| > a) = 2P(X > a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}},$$

ja que $1 \leq \frac{x}{a}$. Fent ús de $\frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \leq 1$, s'obté $P(|X| > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2}}$. Per tant, amb els criteris de convergència de sèries infinites veiem fàcilment que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(||B^n - B^{n-1}|| > 2^{-\frac{n+1}{4}}\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-2^{\frac{n-1}{2}}} < \infty.$$

Llavors pel lema de Borel-Cantelli, si definim $A_n \equiv \{||B^n - B^{n-1}|| > 2^{-\frac{n+1}{4}}\}$, tenim que $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ o equivalentment, $P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 1$ ([11] p.127). És a dir, $\forall \omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n^c, \exists n_0(\omega)$ tal que $\omega \in A_n^c$ $\forall n \geq n_0(\omega)$. Per tant, si $n \geq n_0(\omega)$ tindrem $\omega \in A_n^c \implies ||B^n(\omega) - B^{n-1}(\omega)|| \leq 2^{-\frac{n+1}{4}}$.

Això ens diu que la successió $\{B_t^n(\omega), n \geq 0\}$ és convergent en $\mathcal{C}([0,1])$ per a un conjunt de ω de probabilitat 1, i definim en aquest conjunt el límit com $B_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} B_t^n(\omega)$. Per tant $B_t^n(\omega)$ convergeix uniformement en t q.s.

Finalment ens falta veure que el límit és una funció continua. Degut a que per a cada n, ω la funció $B_t^n(\omega)$ és continua (en tant que les funcions de Schauder també ho són), i que com acabem de provar $(B_t^n)_n$ convergeix uniformement en t, pel Lema 3.7 el límit B_t també és una funció continua. □

Veiem ara que aquest límit que hem definit és, en efecte, un moviment Brownià.

Teorema 3.9. *El procés $B = \{B_t, 0 \leq t \leq 1\}$ defineix un moviment Brownià indexat per $[0,1]$ amb trajectòries contínues q.s.*

Demostració. Segons la definició de moviment Brownià cal provar tres propietats. En primer lloc, que B segueix una distribució Gaussiana prové d'aplicar la fórmula de com varia la densitat per transformacions dels vectors aleatoris $\{N_k^n\}$, degut a que B_t^n s'expressen com a transformació lineal de les N_k^n (apèndix B).

Per provar que és centrat n'hi ha prou amb remarcar que B té trajectòries contínues (com hem provat al Teorema 3.8), i que a l'estar definit en l'interval tancat $[0,1]$ aleshores és acotat (també es pot veure degut a que les funcions de Schauder i les variables $\{N_k^n\}_n$ són acotades). Per tant, pel *Teorema de la convergència dominada* podrem intercanviar límits i esperances. Així, $E(B_t) = E(\lim_n B_t^n) = \lim_n E(B_t^n) = 0 \ \forall t \in [0,1]$ al ser B_t^n transformació lineal de variables normals centrades. I la funció de covariància és $E(B_sB_t) = s \wedge t$ ja que:

$$E(\lim_n B_s^n B_t^n) = \lim_n E(B_s^n B_t^n) = \lim_n E\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{k\in I_m} N_k^m(\omega)S_k^m(s)\sum_{k'\in I_m} N_{k'}^m(\omega)S_{k'}^m(t)\right)$$
$$= \lim_n \sum_{m=0}^{n} E\left(\sum_{k\in I_m} N_k^m(\omega)S_k^m(s)\sum_{k'\in I_m} N_{k'}^m(\omega)S_{k'}^m(t)\right) = \lim_n \sum_{m=0}^{n}\sum_{k\in I_m} S_k^m(s)S_k^m(t),$$

on a la última igualtat hem utlitzat que $E[N_k^m(\omega)N_{k'}^m(\omega)] = \delta_{kk'}$ degut a la independència de les variables normals i a la seva variància. Per la igualtat de Parseval (3.2), finalment obtenim $s \wedge t$, per tant queda provada l'existència del moviment Brownià en $t \in [0,1]$. □

Extensió a $\mathbb{R}_+$

Per acabar amb la construcció cal obtenir un moviment Brownià indexat per $\mathbb{R}_+$. Aquest es construeix reescalant el moviment obtingut a $[0,1]$ i unint una infinitat de tots aquests processos, com s'intueix a la Figura 5.

Corol·lari 3.10. *En un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, existeix un moviment Brownià unidimensional estàndard $B = \{B_t, t \geq 0\}$.*

Demostració. Podem considerar una seqüència de moviments Brownians independents i amb trajectòries contínues indexats per $[0,1]$, $B^m = \{B_t^m, t \in [0,1]\}$ per

$m \geq 1$, ja que n'hem provada l'existència en els teoremes anteriors. Llavors definim recursivament:

$$B_t = \begin{cases} B_t^1, & 0 \leq t \leq 1, \\ B_1^1 + B_{t-1}^2, & 1 \leq t < 2 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \sum_{i=1}^{m} B_1^i + B_{t-m}^{m+1}, & m \leq t < m+1. \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Aquest procés és Gaussià, centrat i amb les trajectòries contínues en tant que tots els B^m són processos Gaussians, centrats, mútuament independents, continus i $\lim_{t \to m} B_t = B_1^1 + \cdots + B_1^m$. Ens falta veure que té la funció de covariància adequada. Siguin $0 < s < t$ i $s \in [i, i+1), t \in [j, j+1)$ amb $i \leq j$, cal veure que:

$$E(B_s B_t) = E[(B_1^1 + \cdots + B_1^i + B_{s-i}^{i+1})(B_1^1 + \cdots + B_1^j + B_{t-j}^{j+1})] = s \wedge t = s.$$

Tenint en compte la independència dels processos B^m, i que per construcció són moviments Brownians, per $m_1, m_2 \geq 1$ $E(B_{t_1}^{m_1} B_{t_2}^{m_2}) = (t_1 \wedge t_2)\delta_{m_1 m_2}$. Distingim doncs dos casos:

(i) Si $i = j$: $E(B_s B_t) = \sum_{k=1}^{i} E[(B_1^k)^2] + E(B_{s-i}^{i+1} B_{t-i}^{i+1}) = i + (s-i) = s$.

(ii) Si $i < j$: $E(B_s B_t) = \sum_{k=1}^{i} E[(B_1^k)^2] + E(B_{s-i}^{i+1} B_1^{i+1}) = i + (s-i) = s$, ja que al ser $s \in [i, i+1)$ llavors $s - i < 1$.

Per tant el procés $B = \{B_t, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià indexat a tot $\mathbb{R}_+$. $\square$

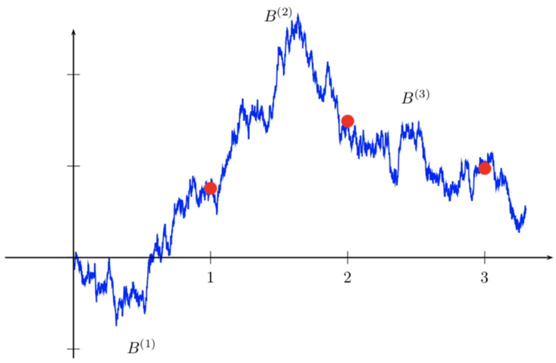

Figura 5: Extensió del moviment Brownià a $\mathbb{R}_+$. Font: [2] p.44.

3.3 Propietats de les trajectòries

Un cop provada l'existència del moviment Brownià i sabent que les seves trajectòries són contínues, veiem-ne dues altres propietats que seran importants per la definició de la integral estocàstica.

3.3.1 No diferenciabilitat

El teorema sobre la no diferenciabilitat de les trajectòries fou originalment anunciat per Paley, Wiener i Zigmund (1933), però en donarem una adaptació de la demostració feta per Dvoretski, Erdös i Kakutani (1961).

Teorema 3.11. *Per gairebé tot $\omega \in \Omega$, les trajectòries d'un moviment Brownià $\{B_t, t \geq 0\}$ no són enlloc diferenciables.*

Demostració. És suficient provar que les trajectòries no són diferenciables en cap $t \in [0,1]$, ja que hem construït el moviment Brownià a tot $\mathbb{R}_+$ com a recursió d'una seqüència de moviments Brownians indexats per $[0,1]$. Així doncs, volem veure que el conjunt $N \equiv \{\omega \in \Omega; B(\cdot,\omega)$ diferenciable per algun $t \in [0,1]\}$, és negligible. De fet, per la definició d'anàlisi de diferenciabilitat,

$$N = \Big\{\omega \in \Omega; \exists t \in [0,1], M, k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall s \in \Big[t, t+\frac{1}{k}\Big], |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq M|s-t|\Big\}.$$

Suposem que fixada $\omega \in N$ existeixen t, M, k tals que compleixen la hipòtesi de diferenciabilitat, i ens cal veure que $P(N) = 0$ per tal que les trajectòries no siguin enlloc diferenciables. N'hi haurà prou doncs trobant un conjunt $\widetilde{N}$ que contingui N i sigui de probabiliat nul·la. Per a fer-ho considerem uns intervals veïns que també queden descrits sota la hipòtsi de diferenciabilitat i tals que la seva intersecció ens donarà el conjunt que busquem.

Sigui un enter $n \geq 4k$, podem trobar un altre enter $i \in [1,n]$ tal que $\frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n}$ i per tant faci que els intervals $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $[\frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}]$ i $[\frac{i+2}{n}, \frac{i+3}{n}]$ estiguin tots continguts a $[t, t+\frac{1}{k}]$, ja que:

$$\frac{i+j}{n} - t \leq \frac{i+j}{n} - \frac{i-1}{n} \leq \frac{j+1}{n} \leq \frac{j+1}{4k} \leq \frac{1}{k} \tag{3.5}$$

es compleix només si $j = 0, 1, 2, 3$.

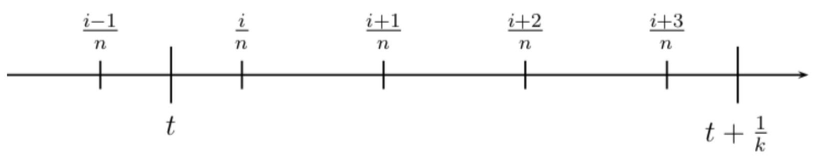

Figura 6: Esquema intervals. Font: [2] p.46.

Per tant en els intervals considerats estem dins la hipòtesi de diferenciabilitat (degut a (3.5)). Aleshores fent ús d'aquesta hipòtesi i la desigualtat triangular, per a $j = 1, 2, 3$ es compleix:

$$\big|B_{\frac{i+j}{n}} - B_{\frac{i+j-1}{n}}\big| \leq \big|B_{\frac{i+j}{n}} - B_t\big| + \big|B_t - B_{\frac{i+j-1}{n}}\big| \leq M\frac{j+1}{n} + M\frac{j}{n} = M\frac{2j+1}{n}.$$

D'aquesta forma, definim el conjunt:

$$C_i^{(n)} \equiv \bigcap_{j=1}^{3} \Big\{\omega \in \Omega; \big|B_{\frac{i+j}{n}}(\omega) - B_{\frac{i+j-1}{n}}(\omega)\big| \leq M\frac{2j+1}{n}\Big\},$$

i aleshores:

$$N \subseteq \widetilde{N} \equiv \bigcup_{M,k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq 4k} \bigcup_{i=1}^{n} C_i^{(n)}. \tag{3.6}$$

Ara trobem la probabilitat de $\widetilde{N}$, tot calculant primer la del conjunt $C_i^{(n)}$. Degut a que les variables $B_{\frac{i+j}{n}}(\omega) - B_{\frac{i+j-1}{n}}(\omega)$ són independents i amb llei $\mathcal{N}(0, 1/n)$:

$$\begin{aligned} P(C_i^{(n)}) &= \prod_{j=1}^{3} P\Big(|B_{1/n}| \leq M\frac{2j+1}{n}\Big) = \prod_{j=1}^{3} P\Big(|B_1| \leq \sqrt{n}M\frac{2j+1}{n}\Big) \\ &< M\frac{3}{\sqrt{n}}M\frac{5}{\sqrt{n}}M\frac{7}{\sqrt{n}} = \frac{105M^3}{n^{3/2}}, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que, amb el canvi $x' = \sqrt{n}x$,

$$P\big(|B_{1/n}| \leq \epsilon\big) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{n}\epsilon}^{\sqrt{n}\epsilon} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' < \frac{2\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{2\pi}} < \sqrt{n}\epsilon.$$

Aleshores:

$$P\Big(\bigcap_{n\geq 4k} \bigcup_{i=1}^{n} C_i^{(n)}\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(C_i^{(n)}) < \liminf_{n\to\infty} n\frac{105M^3}{n^{3/2}} < \liminf_{n\to\infty} \frac{105M^3}{\sqrt{n}} = 0.$$

I finalment utilitzant aquest resultat i (3.6), $P(N) \leq P(\widetilde{N}) = 0 \implies P(N) = 0$. D'aquesta forma queda provat que el conjunt de punts on $B(\cdot, \omega)$ és diferenciable és negligible. □

De fet, tot i que no ho demostrarem, modificant una mica el raonament anterior encara en podríem donar un resultat més fort ([10] p.17), que diu que les trajectòries d'un moviment Brownià $\{B_t, t \geq 0\}$ no són enlloc γ-Hölder contínues amb $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$, mentre que sí que ho són per $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Això implica la no diferenciabilitat de les trajectòries (cas $\gamma = 1$).

3.3.2 Variació quadràtica finita

Que la variació quadràtica del moviment Brownià sigui finita és important pel desenvolupament del càlcul infinitessimal, principalment en les regles de Itô.

Teorema 3.12. *Sigui* $\{B_t, t \geq 0\}$ *un moviment Brownià, considerem una successió de particions de l'interval* $[0, T]$ *com* $\{\Pi_n\}_{n\geq 1}$ *amb* $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{k_n}^n = T\}$ *i tal que* $|\Pi_n| = \sup_j (t_j^n - t_{j-1}^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *Definim l'increment* $\Delta_j B = B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}$ *per* $j = 1, \ldots, k_n$. *Aleshores la seqüència* $\{\sum_{j=1}^{k_n} (\Delta_j B)^2, n \geq 1\}$ *convergeix en* L^2 *a la variable* T.

Demostració. Hem de veure que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} (\Delta_j B)^2 = T$ en L^2, és a dir que

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k_n} (\Delta_j B)^2 - T\Big)^2\Big] = 0.$$

Per un n fixat, definim $\Delta_j t = t_j^n - t_{j-1}^n$ per $j = 1, \ldots, k_n$ de forma que $\sum_{j=1}^{k_n} \Delta_j t = T$. Fixem-nos que les variables $(\Delta_j B)^2 - \Delta_j t$ són independents (en tant que el moviment Brownià té increments independents) i centrades, perquè per definició de la funció de covariància, $E[(\Delta_j B)^2 - \Delta_j t] = E(B_{t_j^n}^2 - 2B_{t_j^n}B_{t_{j-1}^n} + B_{t_{j-1}^n}^2 - t_j^n + t_{j-1}^n) = t_j^n - 2t_{j-1}^n + t_{j-1}^n - t_j^n + t_{j-1}^n = 0$. Aleshores al fer el quadrat del sumatori, només són no nuls els termes d'igual j i podem entrar el quadrat dins:

$$\begin{aligned}
E\Bigg[\bigg(\sum_{j=1}^{k_n}(\Delta_j B)^2 - T\bigg)^2\Bigg] &= E\Bigg[\bigg(\sum_{j=1}^{k_n}\Big((\Delta_j B)^2 - \Delta_j t\Big)\bigg)^2\Bigg] \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} E\big[\big((\Delta_j B)^2 - \Delta_j t\big)^2\big] = \sum_{j=1}^{k_n} E\big[(\Delta_j B)^4 - 2(\Delta_j B)^2\Delta_j t + (\Delta_j t)^2\big] \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} \big[3(\Delta_j t)^2 - 2(\Delta_j t)^2 + (\Delta_j t)^2\big] = 2\sum_{j=1}^{k_n}(\Delta_j t)^2 \\
&\leq 2\sup_j |\Delta_j t| \sum_{j=1}^{k_n}(\Delta_j t) = 2|\Pi_n|T \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On per calcular els moments de les variables $\Delta_j B$ hem utlitzat que, sigui una variable normal $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ i $p \in \mathbb{N}$:

$$E[X^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} 2 \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{(\frac{1}{2\sigma^2})^{2(\frac{p+1}{2})}} = \sqrt{\frac{2^p}{\pi}} \sigma^p \Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big),$$

essent Γ la funció Gamma. Així doncs, per les variables $\Delta_j B$, que pel fet de ser increments d'un moviment Brownià tenen variància $\Delta_j t = \sigma^2$, i utilitzant la propietat $\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}$ per m enter positiu, tindrem:

$$\begin{aligned}
E[(\Delta_j B)^4] &= \sqrt{\frac{16}{\pi}}(\Delta_j t)^2 \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 3(\Delta_j t)^2, \\
E[(\Delta_j B)^2] &= \sqrt{\frac{4}{\pi}}(\Delta_j t) \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \Delta_j t.
\end{aligned}$$

D'aquesta forma queda provada la convergència en L^2. □

Corol·lari 3.13. *El moviment Brownià té variació infinita.*

Demostració. Suposant que té variació finita, $V \equiv \sup_n \sum_{j=1}^{k_n} |\Delta_j B| < \infty$, aleshores tindríem

$$\sum_{j=1}^{k_n}(\Delta_j B)^2 \leq \sup_j |\Delta_j B| \sum_{j=1}^{k_n} |\Delta_j B| \leq V \sup_j |\Delta_j B| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

I això contradiu la convergència en L^2 de la variació quadràtica cap a T. □

És interessant notar que de fet, per a alguns casos la convergència és quasi segura, però no en donarem la demostració ([10] p.20). A partir d'aquí tenim ja tots els ingredients per entrar al càlcul estocàstic del moviment Brownià.

4 Càlcul estocàstic

En disciplines com en la física o matemàtica financera, hi ha molts fenòmens que es poden explicar seguint un moviment Brownià, així que les equacions diferencials estocàstiques (SDE) regides per aquest procés són un important objecte d'estudi. Sigui l'equació diferencial ordinària d'un procés X_t tal que $dX_t/dt = f(t, X_t)$ amb condició inicial $X_0 = x_0$ (prenem $t_0 = 0$ sense pèrdua de generalitat), podem introduïr pertorbacions aleatòries al sistema (soroll Gaussià) tot definint l'objecte:

$$\frac{dX_t}{dt} = f(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\xi_t,$$

on σ i f funcions de t, X_t definides en el mateix espai de probabilitat que ξ_t, que idealment és un procés continu, estrictament estacionari, centrat i tal que si $t_1 \neq t_2$, ξ_{t_1} i ξ_{t_2} són independents. Un procés amb aquestes propietats no existeix ([9] p.21), però alternativament podem definir-ho introduint dB_t:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

on B_t és un moviment Brownià. Com que les trajectòries de B_t no són diferenciables, la interpretació d'aquesta equació s'ha d'entendre sempre en el marc de la forma integral $X_t = x_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$. Per resoldre l'equació, recordem com vénen definides les integrals a trossos de Riemann-Stieltjes i veiem que és impossible definir la integral estocàstica (respecte el moviment Brownià) a trossos.

Integració de Riemann-Stieltjes

Considerem una successió de particions de l'interval $[0, T]$ com $\{\Pi_n\}_{n\geq 1}$ amb $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{k_n}^n = T\}$ i tal que $|\Pi_n| = \sup_j (t_j^n - t_{j-1}^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, i sigui la successió de punts intermitjos $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ amb $\sigma_n = \{s_j^n | t_j^n \leq s_j^n \leq t_{j+1}^n, j = 0, \ldots, k_n - 1\}$. Si f i g són dues funcions en $[0, T]$, la integral de Riemann-Stieltjes ve donada per:

$$\int_0^t f dg = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k_n - 1} f(s_{j-1}^n)(g(t_{j+1}^n) - g(t_j^n)),$$

que existeix si f és contínua i g té variació finita, és a dir, $\sup_n \sum_{j=0}^{k_n-1}(g(t_{j+1}^n) - g(t_j^n)) < \infty$. Per tant, com que sabem que les trajectòries del moviment Brownià tenen variació infinita en qualsevol interval finit (demostrat al Corol·lari 3.13), és impossible definir la integral $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ a trossos com una integral de Riemann-Stieltjes.

Per aquest motiu necessitem un nou enfoc, que serà el càlcul d'Itô, per tal de poder construïr la integral $\int_0^t X_t dB_t$ (anomenada integral d'Itô) d'un integrand X_t (que compleix certes condicions de mesurabilitat i integrabilitat que veurem més endavant) respecte el moviment Brownià. Es fa amb un procediment probabilístic tenint en compte totes les $\omega \in \Omega$ i fent que es compleixin les propietats d'una integral. De forma més general, es pot donar una interpretació de $\int_0^t X_s dM_s$ on M_t és una martingala contínua i de quadrat integrable, però no hi entrarem ja que queda fora de l'abast d'aquest treball.

4.1 Construcció de la integral d'Itô

Considerem al llarg de tota la secció un moviment Brownià $B = \{B_t, t \geq 0\}$ definit a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Com hem dit abans, la construcció de la integral d'Itô es fa per integrands que són processos estocàstics que compleixen unes certes condicions. En particular, pertanyen al següent conjunt.

Definició 4.1. *$L^2_{a,T}$ és el conjunt de processos $h = \{h_t, t \in [0,T]\}$ tals que:*

1. *Estan adaptats i són mesurables en (t, ω), és a dir, $(t, \omega) \longrightarrow h_t(\omega)$ és mesurable en $[0,T] \times \Omega$ respecte la σ-àlgebra producte $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}$,*

2. *Són de quadrat integrable $E\big(\int_0^T h_t^2 dt\big) = \int_0^T E(h_t^2) dt < \infty$.*

Per tant els h com a funcions de dues variables són elements de l'espai de Hilbert $L^2([0,T] \times \Omega)$ amb norma $||h||_{L^2_{a,T}} = \big(\int_0^T E(h_t^2) dt\big)^{1/2}$. Per tal de construïr la integral, el que volem és un operador lineal $\mathcal{I}$ que satisfaci les condicions d'isometria i linealitat:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \colon L^2_{a,T} &\to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ h &\mapsto \mathcal{I}(h) = \int_0^T h_t dB_t, \end{aligned}$$

on, de la mateixa forma que B_t depèn de ω, el procés h_t també dependrà de la mateixa ω i de la informació disponible fins l'instant de temps t.

4.1.1 Processos simples

En realitat es definirà la integral d'un procés $h \in L^2_{a,T}$ com el límit en mitjana quadràtica de la integral d'un procés simple (o d'escala), que és constant en t en cada subinterval de $[0,T]$. Definim primer aquests processos.

Definició 4.2. *Un procés $u \in L^2_{a,T}$ es diu que és simple si ve donat per $u_t = \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$ amb $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ i u_j, $j = 1, \ldots, n$ variables aleatòries $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurables i de quadrat integrable. Denotem per $\mathcal{S}_T \subset L^2_{a,T}$ el conjunt d'aquests processos.*

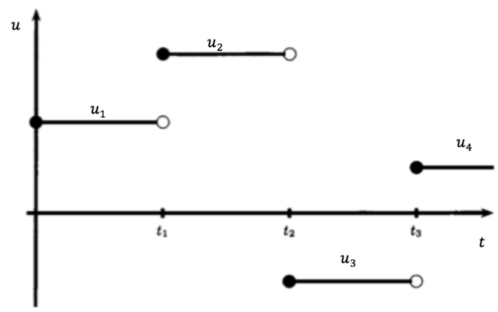

Figura 7: Exemple de procés simple. Font: [12] p.127.

En aquest cas doncs tenim:

$$\boxed{\int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^{n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})}, \tag{4.1}$$

que està ben definida ja que compleix les propietats de la següent Proposició.

Proposició 4.3. *Siguin $u, \widetilde{u} \in \mathcal{S}_T$ i $a, b \in \mathbb{R}$ es compleix:*

(i) Isometria d'Itô: $E\Big[\big(\int_0^T u_t dB_t\big)^2\Big] = E\big(\int_0^T u_t^2 dt\big)$.

(ii) Lineatitat: $\int_0^T (au_t + b\widetilde{u}_t) dB_t = a\int_0^T u_t dB_t + b\int_0^T \widetilde{u}_t dB_t$.

(iii) Centrada: $E\big(\int_0^T u_t dB_t\big) = 0$.

Demostració. Definim $\Delta_j B \equiv B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ i provem cada propietat per separat:

(i) Substituint la fórmula (4.1) i desenvolupant el quadrat del sumatori, tenim $E\Big[\big(\int_0^T u_t dB_t\big)^2\Big] = E\Big[\sum_{j=1}^n u_j^2 (\Delta_j B)^2\Big] + E\Big[2\sum_{i<j} u_j u_i (\Delta_j B)(\Delta_i B)\Big]$. Com que $\Delta_j B$ és independent de $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ per definició del moviment Brownià (increments independents) i u_j és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurable, tindrem que u_j^2 i $(\Delta_j B)^2$ són independents, i per $i < j$, $u_j u_i (\Delta_j B)$ i $\Delta_i B$ també ho són. Per tant:

$$\begin{aligned} E\Big[\Big(\int_0^T u_t dB_t\Big)^2\Big] &= \sum_{j=1}^n E(u_j^2) E[(\Delta_j B)^2] + 2\sum_{i<j} E[u_j u_i (\Delta_j B)] E[(\Delta_i B)] \\ &= \sum_{j=1}^n E(u_j^2)(t_j - t_{j-1}) = \int_0^T E(u_t^2) dt = E\Big(\int_0^T u_t^2 dt\Big), \end{aligned}$$

on hem fet servir les propietats del moviment Brownià $E[(\Delta_j B)^2] = t_j - t_{j-1}$ i $E[(\Delta_i B)] = 0$, i que al ser u_t constant en cada interval $[t_{j-1}, t_j)$ es pot convertir el sumatori en integral.

(ii) Ambdós u i $\widetilde{u}$ no tenen perquè estar definits en els mateixos intervals, però podem prendre'n la seva intersecció i considerar $u_t = \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$ i $\widetilde{u}_t = \sum_{j=1}^n \widetilde{u}_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$. Llavors:

$$\begin{aligned} \int_0^T (au_t + b\widetilde{u}_t) dB_t &= \sum_{j=1}^n (au_j + b\widetilde{u}_j)(\Delta_j B) = a\sum_{j=1}^n u_j (\Delta_j B) + b\sum_{j=1}^n \widetilde{u}_j (\Delta_j B) \\ &= a\int_0^T u_t dB_t + b\int_0^T \widetilde{u}_t dB_t. \end{aligned}$$

(iii) Finalment com que u_j i $\Delta_j B$ són independents i aplicant la definició de la integral, tenim:

$$E\Big(\int_0^T u_t dB_t\Big) = E\Big[\sum_{j=1}^n u_j (\Delta_j B)\Big] = \sum_{j=1}^n E(u_j) E[(\Delta_j B)] = 0.$$

$\square$

4.1.2 Seqüència de processos simples

Un cop definida la integral per processos simples, ara cal definir-la per processos més generals de $L^2_{a,T}$. De fet, això és possible degut a un resultat bàsic d'anàlisi funcional, que diu que un operador lineal definit en un espai X (en el nostre cas $\mathcal{S}_T$) i que pren valors a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es pot extendre de manera única a l'espai complet $\overline{X}$ ($\overline{\mathcal{S}_T} = L^2_{a,T}$) i preservant la norma. El següent lema és clau per demostrar que $\mathcal{S}_T$ és dens en $L^2_{a,T}$ i per a la construcció de la integral (se'n pot trobar la demostració a [10] p.31, [6] p.191).

Lema 4.4. *Per qualsevol $h \in L^2_{a,T}$ existex una seqüència de processos simples $(u^{(n)})_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}_T$ tal que convergeixen a h, és a dir que compleixen:*

$$\lim_{n\to\infty} E\bigg(\int_0^T |u_t^{(n)} - h_t|^2 dt\bigg) = 0. \tag{4.2}$$

La idea de demostració és que el procés simple que aproxima a l'integrand h es pot construïr triant una partició $\{t_j^n = \frac{jT}{n}, j = 1, \dots, n\}_{n\geq 1}$, i definint a cada subinterval $[t_{j-1}, t_j)$ el valor constant del procés simple u_j com $h_{t_{j-1}}$. Al fer que el salt entre intervals tendeixi a zero, tindrem la convergència a h (formalment s'utilitza el teorema de la convergència dominada). Tot i això, per a aquesta tria de $u^{(n)}$ cal que les trajectòries de h estiguin acotades i siguin contínues, així que la prova és més complexa si h no té aquestes propietats. Notem que la seqüència $u^{(n)}$ no és única.

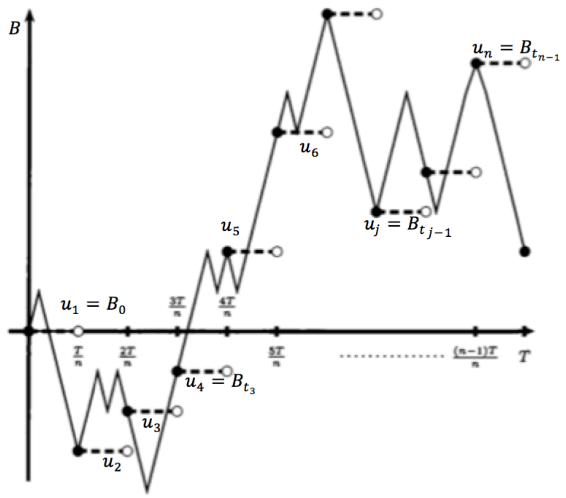

Figura 8: Exemple de moviment Brownià aproximat per processos simples. Font: [12] p.135.

En aquest cas, tindrem que la integral d'Itô és el límit en mitjana quadràtica de la integral per processos simples donada en (4.1):

$$\boxed{\mathcal{I}(h)_u \equiv \int_0^T h_t dB_t = L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_t^{(n)} dB_t}. \tag{4.3}$$

Per tal de veure que és una bona definició d'integral, cal comprovar que el límit existeix i que no depèn de l'aproximació de processos simples:

1. *El límit existeix*: Cal veure que $\int_0^T u_t^{(n)} dB_t$ és una seqüència de Cauchy en L^2 i que per tant és convergent:

$$E\bigg[\bigg(\int_0^T u_t^{(n)} dB_t - \int_0^T u_t^{(m)} dB_t\bigg)^2\bigg] = E\bigg(\int_0^T |u_t^{(n)} - u_t^{(m)}|^2 dt\bigg)$$
$$= E\bigg(\int_0^T |u_t^{(n)} - h_t + h_t - u_t^{(m)}|^2 dt\bigg)$$
$$\leq 2E\bigg(\int_0^T \big|u_t^{(n)} - h_t\big|^2 dt\bigg) + 2E\bigg(\int_0^T \big|u_t^{(m)} - h_t\big|^2 dt\bigg) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

on hem utilitzat la propietat d'isometria provada a la Proposició 4.3, la desigualtat triangular i el Lema 4.4.

2. *Està ben definida*: Siguin dues seqüències de processos simples $(u^{(n)})_n$ i $(\widetilde{u}^{(n)})_n$ que aproximen el mateix procés h, veiem que la integral coincideix. De manera anàloga al que acabem de provar tindrem que:

$$\lim_{n\to\infty} E\bigg[\bigg(\int_0^T u_t^{(n)} dB_t - \int_0^T \widetilde{u}_t^{(n)} dB_t\bigg)^2\bigg] = 0 \implies \mathcal{I}(h)_u = \mathcal{I}(h)_{\widetilde{u}},$$

on $\mathcal{I}(h)_u$ ve definit com en (4.3). □

Proposició 4.5. *Siguin $h, \widetilde{h} \in L^2_{a,T}$ i $a, b \in \mathbb{R}$ es tenen les següents propietats:*

(i) Isometria d'Itô: $E\Big[\big(\int_0^T h_t dB_t\big)^2\Big] = E\big(\int_0^T h_t^2 dt\big)$.

(ii) Linearitat: $\int_0^T (ah_t + b\widetilde{h}_t) dB_t = a\int_0^T h_t dB_t + b\int_0^T \widetilde{h}_t dB_t$.

(iii) Centrada: $E\big(\int_0^T h_t dB_t\big) = 0$.

Demostració. És directe utilitzant seqüències de $\mathcal{S}_T$ que aproximen h i $\widetilde{h}$ i els resultats de la Proposició 4.3. I de fet és imprescindible que la isometria d'Itô es preservi per tal que també ho faci la norma. □

Exemple 4.6. L'exemple més senzill i famós és la integració del propi moviment Brownià respecte ell mateix. Si B_t fos diferenciable amb $dB_t = \dot{B}_t dt$, seguint les regles d'integració ordinàries esperaríem tenir:

$$\int_0^T B_t dB_t = \int_0^T B_t \dot{B}_t dt = \frac{1}{2}\int_0^T \partial_t (B_t^2) dt = \frac{1}{2} B_T^2 \quad \textit{(procediment incorrecte)},$$

però com que les trajectòries de B_t no són diferenciables enlloc, veiem que això no és així. Si considerem una seqüència de particions de $[0, T]$ com $\{t_j^n = \frac{jT}{n}, j = 1, \ldots, n\}_{n\geq 1}$, i al ser les trajectòries de B_t contínues, podem escollir la seqüència de processos simples $u_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}^n}\mathbf{1}_{[t_{j-1}^n, t_j^n)}(t)$. Veiem que es compleix la condició de convergència (4.2):

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^T |u_t^{(n)} - B_t|^2 dt\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} |B_{t_{j-1}^n} - B_t|^2 dt\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} E(|B_{t_{j-1}^n} - B_t|^2) dt\\
&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} (t - t_{j-1}^n) dt\\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(t_j^n - t_{j-1}^n)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(\frac{T}{n}\right)^2 = \frac{T^2}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Llavors la integral del procés simple serà, fent ús de (4.1) i utilitzant la identitat $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^T u_t^{(n)} dB_t &= \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}^n}(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2\\
&= \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2.
\end{aligned}$$

I finalment, amb el Teorema 3.12 que diu que $\{\sum_{j=1}^n (\Delta_j B)^2, n \geq 1\}$ convergeix en L^2 a la variable T, tindrem que:

$$\int_0^T B_t dB_t = L^2 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2\right) = \frac{1}{2}(B_T^2 - T).$$

Podríem fer altres càlculs amb diferents integrands, per exemple

$$\int_0^T t dB_T = TB_T - \int_0^T B_t dt \tag{4.4}$$

$$\int_0^T B_t^2 dB_t = \frac{1}{3}B_T^3 - \int_0^T B_t dt \tag{4.5}$$

es poden trobar a la referència [1] p.214, però inclús en el que hem il·lustrat ja es veu que, tot i ser l'exemple més senzill, ens porta força feina de càlcul. Per tant la definició que tenim fins aleshores d'integral d'Itô no és molt pràctica i es preferirà utilitzar la fórmula del canvi de variable que presentarem més endavant.

Integral indefinida com a martingala

Definició 4.7. *Sigui $h \in L_{a,T}^2$ i $t \in [0,T]$, el procés $h\mathbf{1}_{[0,t]} = \{h_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\}_{0\leq s\leq T}$ també pertany a $L_{a,T}^2$. Aleshores la integral d'Itô indefinida, que compleix totes les propietats anteriorment esmentades, es defineix per $\mathcal{I}_t(h) \equiv \mathcal{I}(h\mathbf{1}_{[0,t]})$:*

$$\mathcal{I}_t(h) = \int_0^t h_s dB_s = \int_0^T h_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s.$$

Proposició 4.8. *El procés estocàstic $\{\mathcal{I}_t(h)\}_{0\leq t\leq T}$ és una martingala.*

Demostració. Sigui $u \in \mathcal{S}_T$ tal que $u_\xi = \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(\xi)$, primer provem que la integral estocàstica per aquest procés simple és una martingala, és a dir que $\mathcal{I}_t(u) = \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s$ n'és una. Per la Definició 2.13 de martingala caldrà veure:

$$E(\mathcal{I}_t(u)|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}_s(u),$$

per a tot $0 \leq s \leq t$. Així doncs, considerem la partició

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} = s < t_k < \cdots < t_m = t < t_{m+1} < \cdots < t_n = T,$$

i denotem $\Delta_j B = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$. Llavors $u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) = \sum_{j=1}^m u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(s)$ també és un procés simple, i amb la definició de la integral estocàstica per processos simples (4.1):

$$\mathcal{I}_t(u) = \mathcal{I}(u\mathbf{1}_{[0,t]}) = \sum_{j=1}^m u_j \Delta_j B.$$

Llavors per la linealitat de l'esperança condicionada (apèndix A propietat (a)), $E(\mathcal{I}_t(u)|\mathcal{F}_s) = \sum_{j=1}^m E(u_j \Delta_j B|\mathcal{F}_s)$ i podem separar dos casos:

(i) Si $j < k$: Com que $t_j \leq s$ i u_j és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurable per hipòtesi de procés simple, per a tots els j tindrem que u_j i $\Delta_j B$ són $\mathcal{F}_s$-mesurables. Per les propietats (b) i (c) de l'apèndix tenim:

$$E(u_j \Delta_j B|\mathcal{F}_s) = u_j \Delta_j B.$$

(ii) Si $j \geq k$: Ara $t_j > s$ i per tant $s \leq t_{j-1} \implies \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{j-1}}$, així que utilizem la propietat (e):

$$\begin{aligned} E(u_j \Delta_j B|\mathcal{F}_s) &= E(E(u_j \Delta_j B|\mathcal{F}_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_s) \\ &= E(u_j E(\Delta_j B|\mathcal{F}_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_s) \\ &= E(\Delta_j B) E(u_j|\mathcal{F}_s) = 0, \end{aligned}$$

ja que u_j és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurable, i $\Delta_j B$ és independent de $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ (propietats (b), (c) i (d)), i l'esperança del moviment Brownià és zero.

D'aquesta manera obtenim que $E(\mathcal{I}_t(u)|\mathcal{F}_s) = \sum_{j=1}^{k-1} u_j \Delta_j B = \mathcal{I}(u\mathbf{1}_{[0,s]}) = \mathcal{I}_s(u)$.

Suposem ara que $(u^{(n)})_{n\geq 1}$ és una seqüència de processos simples que aproximen $\mathbf{1}_{[0,t]} h \in L^2_{a,T}$ (existeix pel Lema 4.4). Llavors pel que acabem de provar, tenim que per a tot n:

$$E(\mathcal{I}_t(u^{(n)})|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}_s(u^{(n)}). \tag{4.6}$$

Si considerem la seqüència $(u^{(n)}\mathbf{1}_{[0,s]})_{n\geq 1}$, aquesta aproxima $h\mathbf{1}_{[0,s]}$ i per tant:

$$\mathcal{I}(u^{(n)}\mathbf{1}_{[0,s]}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathcal{I}(h\mathbf{1}_{[0,s]}),$$

i de la mateixa forma prenent $(u^{(n)}\mathbf{1}_{[0,t]})_{n\geq 1}$,

$$\mathcal{I}(u^{(n)}\mathbf{1}_{[0,t]}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathcal{I}(h\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

Per tant, prenent límits a banda i banda de (4.6) i fent ús del Lema A.3 de l'apèndix per a la banda esquerra, obtenim el que buscàvem:

$$E(\mathcal{I}(h\mathbf{1}_{[0,t]})|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}(h\mathbf{1}_{[0,s]}) \implies E(\mathcal{I}_t(h)|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}_s(h),$$

i queda provat que $\{\mathcal{I}_t(h)\}_{0\leq t\leq T}$ és una martingala. □

4.1.3 Extensions i alternatives a la integral d'Itô

Com hem dit a l'inici d'aquesta secció, hi ha diferents maneres de construïr la integral estocàstica o d'estendre-la per a integrands més generals. No hi entrarem massa ja que queda fora de l'abast d'aquest treball però en donarem quatre pinzellades que resulten interessants.

Per tal de generalitzar la integral d'Itô s'han de relaxar les condicions de mesurabilitat o integrabilitat. Una manera que és útil per a moviments Brownians multidimensionals, és considerar una filtració $\mathcal{H}_t$ més extensa que $\mathcal{F}_t$, tal que el moviment Brownià sigui una martingala respecte a ella i l'integrand hi estigui adaptat. La integral d'Itô serà igualment una $\mathcal{H}$-martingala. La segona manera d'estendre la construcció, és considerar integrands h tals que compleixin la condició 1 de la Definició 4.1 de $L^2_{a,T}$, però enlloc de la 2, $P(\int_0^T h_t^2 dt < \infty) = 1$. Aleshores amb un procediment anàleg a l'anterior i processos simples d'aquest nou espai, podríem acabar definint $\int_0^T h_t dB_t = P - \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_t^{(n)} dB_t$, així que ara el límit seria en probabilitat.

Pel que fa a alternatives de la integral d'Itô, la que ha resultat més útil és la de **Stratonovich**, que consisteix en agafar el punt mig de u de l'interval $[t_{j-1}, t_j)$ enlloc de l'extrem esquerre. Es denota per $\circ$ i ve donada per:

$$\int_0^T h_t \circ dB_t = L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{u_{j-1} - u_j}{2}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Aquesta i la d'Itô porten a fórmules del canvi de variable diferents i per tant les interpretacions de l'equació diferencial també diferiran. La de Stratonovich té l'avantatge de que amb un canvi de variable obtenim les regles de la cadena usuals però no és una martingala, mentre que com hem demostrat la d'Itô sí que ho és i per tant els càlculs són més senzills. A més, aquest fet de que la d'Itô no depengui del futur sembla ser una bona raó per utilitzar-la en molts casos, com podria ser en sistemes relacionats amb biologia. Pels propòsits del treball doncs ens centrem en la d'Itô.

4.2 Fórmula d'Itô

També anomenada fórmula del canvi de variable, és l'anàleg a la regla de la cadena del càlcul diferencial ordinari i és una eina crucial per al càlcul d'equacions diferencials estocàstiques (SDE), ja que ens permet calcular-ne la solució. Provada inicialment per Kyoshi Itô a la dècada dels 50 pel cas especial de la integració respecte del moviment Brownià, més endavant es va generalitzar per a martingales i, encara més, pel que s'anomenen semimartingales contínues (descomposició d'una martingala local i un procés adaptat amb variació finita), ja que aquestes són els processos més amplis respecte dels quals es pot definir la integral d'Itô (i de fet la de Stratonovich també). No és la intenció d'aquest treball entrar-hi, però qui n'estigui interessat pot adreçar-se per exemple a [4] i [5]. Així doncs ens centrarem en la descripció que va donar-ne Itô.

Definició 4.9. *Siguin a_t i b_t processos estocàstics tals que a_t està adaptat a $\mathcal{F}_t$ i és Lebesgue integrable, és a dir compleix $\int_0^T |a_t|dt < \infty$, i $b_t \in L^2_{a,T}$. Aleshores el procés definit per*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dB_s \tag{4.7}$$

s'anomena procés d'Itô.

En forma diferencial $dX_t = a_t dt + b_t dB_t$, tot i que aquesta no té un significat matemàtic ben definit, sinó que sempre s'ha d'entendre en el context de (4.7). Així doncs, la motivació principal de la fórmula d'Itô serà entendre els efectes del soroll blanc (fluctuacions aleatòries normalment no correlacionades) afegit en equacions diferencials ordinàries, com hem introduït a l'inici de la secció (on la funció a d'ara correspondria a f i b a σ).

Exemple 4.10. Veiem doncs que el moviment Brownià és un procés d'Itô amb $a_t = 0$ i $b_t = 1$, ja que $B_t = \int_0^T dB_t$. També podem calcular $d(B_t^2)$ fent ús de l'Exemple 4.6, ja que:

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T) \implies B_T^2 = \int_0^T dt + 2\int_0^T B_t dB_t,$$

per tant amb $a_t = 1$ i $b_t = 2B_t$ veiem que B_t^2 és un procés d'Itô i $d(B_t^2) = dt + 2B_t dB_t$. De manera semblant i amb les fórmules (4.4) i (4.5) podríem demostrar que tB_t i B_t^3 són processos d'Itô, amb $a_t = B_t, b_t = t$ en el primer cas, i $a_t = 3B_t, b_t = 3B_t^2$ en el segon.

Aquests exemples són casos particulars de la fórmula d'Itô que presentem a continuació.

Teorema 4.11. *Sigui $g(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^{1,2}$ ($\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial_x^2}$ contínues) i X_t un procés d'Itô donat per (4.7), aleshores el procés $g(t,X_t)$ és altra vegada un procés d'Itô que compleix:*

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s)(dX_s)^2 \tag{4.8}$$

o en forma diferencial:

$$dg(t,X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2.$$

L'últim terme d'aquesta equació s'anomena correcció d'Itô, ja que és lúnic terme que difereix de les regles de la cadena usuals.

Esbós de demostració. Veiem primer que és un procés d'Itô. Fent ús de $dB_t \cdot dB_t = dt$ (per la variació quadràtica finita 3.12) i degut a que els altres termes de productes de variacions són més petits i per tant negligibles ($dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$), tenim les regles:

$\times$	dB_t	dt
dB_t	dt	0
dt	0	0

i per tant podem calcular $(dX_t)^2 = (a_t dt + b_t dB_t)^2 = b_t^2 dt$. Substituint dX_t i $(dX_t)^2$ expressem totes les integrals respecte el moviment Brownià:

$$\begin{aligned} g(t, X_t) = g(0, X_0) &+ \int_0^t \Big(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) a_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) b_s^2 \Big) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) b_s dB_s, \end{aligned} \tag{4.9}$$

que, en efecte, és un procés d'Itô tal i com s'ha definit a (4.7), i amb notació diferencial:

$$dg(t, X_t) = \Big(\frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) a_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) b_t^2 \Big) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) b_t dB_t.$$

Ara ens falta demostrar (4.8) (o el seu equivalent (4.9)). Provarem el teorema en el cas especial de que la funció g i les derivades $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ siguin funcions acotades, i les funcions a i b processos simples i acotats. Aleshores el cas general es podria demostrar prenent seqüències en n acotades i que convergissin uniformement a g i les seves derivades, i seqüències de processos simples que convergissin a a i b (d'una manera semblant a com vam construïr la integral estocàstica). Per a veure el procediment de forma més detallada (en el cas de que a i b no siguin processos simples), dirigir-se a [10] p.47.

Considerem una successió de particions de l'interval $[0, t]$ com $\{\Pi_n\}_{n \geq 1}$ amb $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{k_n}^n = t\}$ i tal que $|\Pi_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Definim per $j = 1, \ldots, k_n$:

$$\Delta_j t = t_j^n - t_{j-1}^n, \quad \Delta_j B = B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \quad \Delta_j X = X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n},$$

i siguin a i b processos simples donats com en la Definició 4.2, aleshores

$$\Delta_j X = \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} a_s ds + \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} b_s dB_s = a_j \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} ds + b_j \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} dB_s = a_j \Delta_j t + b_j \Delta_j B.$$

Llavors:

$$g(t, X_t) - g(0, X_0) = \sum_{j=1}^{k_n} [g(t_j^n, X_{t_j^n}) - g(t_{j-1}^n, X_{t_{j-1}^n})]$$

i pel desenvolupament de Taylor a cada terme del sumatori de la dreta de la igualtat:

$$g(t,X_t)-g(0,X_0)=\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial g}{\partial t}\Delta_j t+\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial g}{\partial x}\Delta_j X+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta_j t)^2$$
$$+\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial x}(\Delta_j t)(\Delta_j X)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta_j X)^2+\sum_{j=1}^{k_n}R_j,$$

on totes les derivades estan avaluades al punt $(t_{j-1}^n, X_{t_{j-1}^n})$ (sovint ho ometem per estalviar-nos notació) i $R_j \equiv o(|\Delta_j t|^2+|\Delta_j X|^2)$. Al límit $n\to\infty$, tenim $\Delta_j t\to 0$ (ja que $|\Pi_n|\to 0$) i cal provar la convergència terme a terme d'aquest desenvolupament a les fórmules (4.8) i (4.9).

1. Pel que fa al primer terme, degut a que $\Delta_j t=\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} ds$, llavors el sumatori de les integrals a cada subinterval es converteix en una única integral:

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial g}{\partial t}(t_{j-1}^n, X_{t_{j-1}^n})\Delta_j t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s)ds.$$

Més finament es demostra convertint la integral de la banda dreta a un sumatori d'integrals definides en cada subinterval $[t_{j-1}^n, t_j^n]$, fent el suprem del mòdul de la diferència i veient que tendeix a zero degut a la continuïtat de $\frac{\partial g}{\partial t}$ i del procés X.

2. De la mateixa forma el segon terme, $\Delta_j X=\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} dX_s$ i aleshores:

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial g}{\partial x}(t_{j-1}^n, X_{t_{j-1}^n})\Delta_j X \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)dX_s,$$

que si ho separem en els dos termes de $\Delta_j X$ i amb $\Delta_j B=\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} dB_s$, llavors:

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial g}{\partial x}a_j\Delta_j t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)a_s ds,$$

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial g}{\partial x}b_j\Delta_j B \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)b_s dB_s.$$

Més finament (si a i b no fossin simples) es demostra amb la convergència en L^2 de cada terme. Pel primer es fa igual que en 1 aplicant el teorema de la convergència dominada, i pel segon es prova que l'esperança del mòdul al quadrat de la diferència tendeix a zero. Es fa convertint la integral de la banda dreta en sumatori d'integrals definides en cada $[t_{j-1}^n, t_j^n]$, aplicant que l'esperança dels termes creuats del sumatori serà 0 degut a la independència d'intervals disjunts i de que són variables centrades, i finalment s'aplica la isometria de la integral d'Itô juntament amb el teorema de la convergència dominada.

3. Els tercer i quart termes tendeixen a zero degut a que $\Delta_j t \to 0$, i es poden aplicar raonaments anàlegs als que vénen a continuació (veure (4.10) i (4.11)).

4. Pel penúltim terme cal veure:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{j-1}^n, X_{t_{j-1}^n})(\Delta_j X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)(dX_s)^2.$$

En primer lloc podem substituïr

$$(\Delta_j X)^2 = (a_j\Delta_j t + b_j\Delta_j B)^2 = a_j^2(\Delta_j t)^2 + b_j^2(\Delta_j B)^2 + 2a_jb_j(\Delta_j t)(\Delta_j B),$$

i aleshores cal provar els següents tres límits en la convergència q.s.:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j^2(\Delta_j t)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.10}$$

$$\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_jb_j(\Delta_j t)(\Delta_j B) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}b_j^2(\Delta_j B)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)b_s^2 ds. \tag{4.12}$$

Els dos primers es demostren de manera semblant. Cal veure que l'esperança del terme al quadrat és nul·la (convergència en L^2), així que per exemple en el primer cas al fer el quadrat el terme $(\Delta_j t)^4$ ho fa tendir a zero. Pel que fa al segon:

$$E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_jb_j(\Delta_j t)(\Delta_j B)\Big)^2\Big] = E\Big[\sum_{j=1}^{k_n}\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_jb_j(\Delta_j t)(\Delta_j B)\Big)^2\Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{k_n}E\Big[\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_jb_j\Big)^2\Big](\Delta_j t)^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

on hem utilitzat que degut a la independència dels increments del moviment Brownià i que són centrats, els termes creuats del sumatori al quadrat desapareixen, i també que $E[(\Delta_j B)^2] = \Delta_j t$. Tot plegat tendeix a zero ja que estem sota la hipòtesis de que la derivada, a i b són acotades, i $\Delta_j t \to 0$. Si a i b no fossin simples es podria provar la convergència a 0 en L^1 tot manipulant les expressions de l'esperança del mòdul de les integrals per tal que al final aparegués $|\Pi_n|^{1/2} \to 0$.

Veiem doncs el tercer límit (4.12). Definim $G(t) \equiv \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)b_t^2$ i també $G(t_{j-1}^n) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{j-1}^n, X_{t_{j-1}^n})b_j^2 \equiv G_j$ (deixem l'índex j enlloc de $j-1$ per analogia amb la definició dels processos simples, ja que el valor que pren b en t_{j-1}^n l'hem definit com b_j). Llavors com que

$$\int_0^t G(s)ds = \sum_{j=1}^{k_n}\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} G_j ds = \sum_{j=1}^{k_n} G_j\Delta_j t,$$

provem la convergència en L^2 :

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k_n} G_j(\Delta_j B)^2 - \sum_{j=1}^{k_n} G_j \Delta_j t\Big)^2\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} E\Big[G_j^2((\Delta_j B)^2 - \Delta_j t)^2\Big] + 2\sum_{i<j} E\Big[G_i((\Delta_i B)^2 - \Delta_i t)G_j((\Delta_j B)^2 - \Delta_j t)\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} E(G_j^2)E\big[((\Delta_j B)^2 - \Delta_j t)^2\big] = \sum_{j=1}^{k_n} E(G_j^2)E\big[((\Delta_j B)^4 - 2\Delta_j B\Delta_j t + (\Delta_j t)^2\big] \\
&= 2\sum_{j=1}^{k_n} E(G_j^2)(\Delta_j t)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

on a la segona igualtat hem utilitzat que els termes creuats del sumatori desapareixen degut a la independència dels increments del moviment Brownià i a que $E[(\Delta_j B)^2 - \Delta_j t] = 0$, en la tercera que G_j és independent de $((\Delta_j B)^2 - \Delta_j t)^2$ i finalment, amb un càlcul semblant al que vam fer per a la variació quadràtica finita del moviment Brownià (Teorema 3.12), en segueix el resultat de la última igualtat. Per tant d'aquesta manera queda provat que

$$
\sum_{j=1}^{k_n} G_j(\Delta_j B)^2 \to \sum_{j=1}^{k_n} G_j \Delta_j t = \int_0^t G(s)ds,
$$

que en efecte és el que volíem.

5. Per acabar el terme del residu es pot provar de manera anàloga a com acabem de fer, i veuríem que

$$
\sum_{j=1}^{k_n} R_j = \sum_{j=1}^{k_n} o(|\Delta_j t|^2 + |\Delta_j X|^2) \to 0.
$$

D'aquesta forma hem vist que terme a terme del desenvolupament de Taylor que hem fet de $g(t, X_t)$ convergeix a (4.8) al límit a l'infinit, i per tant queda demostrat el teorema sota les hipòtesis considerades. □

4.2.1 Fórmula d'Itô multidimensional

La fórmula d'Itô que acabem de presentar es pot estendre també en el marc de moviments Brownians multidimensionals. Considerant $B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d)$, a_t^i i b_t^{ij} amb $1 \le i \le n$, $1 \le j \le d$ processos estocàstics que compleixen les condicions de (4.7), es pot definir el procés d'Itô n-dimensional $dX_t = a_t dt + b_t dB_t$ amb notació matricial

$$
dX_t = \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ \vdots \\ dX_t^n \end{pmatrix}, \quad a_t = \begin{pmatrix} a_t^1 \\ \vdots \\ a_t^n \end{pmatrix}, \quad b_t = \begin{pmatrix} b_t^{11} & \cdots & b_t^{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_t^{n1} & \cdots & b_t^{nd} \end{pmatrix}, \quad dB_t = \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^d \end{pmatrix}.
$$

Teorema 4.12. *Sigui*

$$\begin{array}{rcl} g:[0,T]\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ (t,x) & \mapsto & (g_1(t,x),\dots,g_p(t,x)) \end{array}$$

una funció $\mathcal{C}^{1,2}$ i X_t un procés d'Itô n-dimensional, aleshores el procés $g(t,X_t)$ és altra vegada un procés d'Itô p-dimensional amb cada component $1\le k\le p$ complint

$$dg_k(t,X_t)=\frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X_t)dt+\sum_{i=1}^n\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i\partial x_j}(t,X_t)dX_t^i dX_t^j,$$

on $dB_t^i\cdot dB_t^j=\delta_{ij}dt$, $dB_t^i\cdot dt=dt\cdot dB_t^i=dt\cdot dt=0$.

La demostració és semblant a la del cas unidimensional.

4.3 Teorema d'existència i unicitat de solucions

Al motivar el càlcul estocàstic a l'inici de la secció hem presentat les equacions diferencials estocàstiques, i hem comentat que la fórmula d'Itô és útil per a resoldre-les. Tot i no fer-ne la demostració ja que queda fora de l'abast del treball, és important subratllar el teorema d'existència i unicitat de les solucions d'una SDE, per tal de ser conscients de que és correcte buscar-ne la solució amb la fórmula d'Itô ja que aquesta existeix. Considerem un moviment Brownià d-dimensional.

Definició 4.13. *Sigui x un vector aleatori n-dimensional independent del moviment Brownià, donat el problema de valors inicial*

$$\begin{array}{rcl} dX_t & = & f(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t \\ X_0 & = & x, \end{array} \tag{4.13}$$

amb $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ i $\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$ que sovint es denoten com $f(t,x)=(f^i(t,x))_{1\le i\le n}$ i $\sigma(t,x)=(\sigma^{ij}(t,x))_{1\le i\le n,1\le j\le d}$. Es diu que el procés estocàstic n-dimensional $\{X_t,t\ge 0\}$, mesurable i $\mathcal{F}_t$-adaptat, és una solució forta de (4.13) si es compleix:

(i) El procés $\{f^i(s,X_s),s\ge 0\}$ pertany a $L^2_{a,\infty}$ (Definició 4.1 amb $T\to\infty$) per a tot $1\le i\le n$.

(ii) El procés $\{\sigma^{ij}(s,X_s),s\ge 0\}$ pertany a $L^1_{a,\infty}$ per a tot $1\le i\le n$ i $1\le j\le d$.

(iii) L'equació integral

$$X_t=x_0+\int_0^t f(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s$$

és certa per a tot $t\ge 0$ amb probabilitat 1.

A més a més, es diu que la solució és única si dues solucions fortes X_1 i X_2 de (4.13) són indistingibles, de forma que $P\{X_{1t} = X_{2t}, \forall t \geq 0\} = 1$. El teorema d'existència i unicitat diu doncs el següent:

Teorema 4.14. *Si existeix una constant positiva L tal que f i σ satisfan, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ i $t \geq 0$:*

1. *Creixement lineal:* $\sup_t \Big(|f(t,x)| + |\sigma(t,x)|\Big) \leq L(1+|x|)$,
2. *Lipschitz en x:* $\sup_t \Big(|f(t,x) - f(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|\Big) \leq L|x-y|$.

Aleshores existeix una única solució forta del problema de valors inicial (4.13).

Es pot trobar la demostració per exemple a [10] p.70 o [9] p.69. Així doncs, per a les equacions diferencials estocàstiques complint les condicions 1 i 2 d'aquest teorema sabrem que sempre existeix solució, i podrem fer ús de la fórmula d'Itô per a trobar-la.

5 Aplicació en el moviment de partícules en un fluid

Com hem dit abans, les equacions diferencials estocàstiques són una part central per a models dinàmics en molts àmbits, principalment en matemàtica financera i en física. Centrant-nos en aquest últim, veiem que les SDE són útils per modelar tots els sistemes dinàmics amb soroll, és a dir regits per a pertorbacions aleatòries (deixant de banda efectes quàntics o tractant-los com a pertorbacions). Així, la majoria de sistemes reals estan sota aquestes condicions, des de dinàmiques moleculars fins a neurodinàmiques i objectes astrofísics, ja que pràcticament mai es troben aïllats de la influència estocàstica de l'ambient.

La manera més comuna de resoldre les SDE en física és resoldre l'equació de *Fokker-Planck* que és una equació diferencial parcial que descriu l'evolució temporal de la funció de densitat de probabilitat $p(t,x)$ (normalment de la velocitat d'una partícula sota la influència de forces externes). No hi entrarem perquè ens comportaria un treball sencer, però l'analogia amb la definició que hem donat de processos d'Itô, on $dX_t = a_t dt + b_t dB_t$, seria:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}(a_t p(t,x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b_t^2 p(t,x)), \tag{5.1}$$

i cal resoldre-la tot coneixent la distribució inicial. En general fent $\partial_t p = 0$ trobarem la solució estacionària de la densitat de probabilitat.

Tot i això, per una gran majoria de sistemes també es pot trobar la solució amb les tècniques de la fórmula d'Itô anteriorment presentades. Això és el que farem a continuació, per un exemple en concret de SDE que és l'anomenat procés d'Ornstein-Uhlenbeck i que més endavant compararem amb el moviment Brownià estàndard i en detallarem l'aplicació al problema físic d'una partícula Browniana en un fluid (de gran tamany en comparació amb les molècules del fluid).

5.1 Procés d'Ornstein-Uhlenbeck

Sigui U_t un procés estocàstic, s'anomena d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) si la seva equació diferencial ve donada, de forma general, per

$$dU_t = \theta(\mu - U_t)dt + \sigma dB_t, \tag{5.2}$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ i $\theta, \sigma \in \mathbb{R}^+$. Així doncs, veiem que es tracta d'un procés d'Itô tal i com s'ha donat a (4.7) amb $a_t = \theta(\mu - U_t)$ i $b_t = \sigma$ que compleixen les hipòtesis, i per tant es satisfà la fórmula d'Itô del Teorema 4.11. Per a trobar la solució es fa ús d'aquesta fórmula assajant-la amb la funció $g(t,x) = xe^{\theta t}$. D'aquesta forma tenim:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,U_t) = U_t\theta e^{\theta t}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(t,U_t) = e^{\theta t}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,U_t) = 0.$$

Posant $g(0, U_0) = u_0$ i utilitzant doncs (4.9):

$$g(t, U_t) = U_t e^{\theta t} = u_0 + \int_0^t \Big(U_s \theta e^{\theta s} + e^{\theta s}\theta(\mu - U_s) \Big) ds + \int_0^t e^{\theta s} \sigma dB_s =$$
$$u_0 + \mu\theta \int_0^t e^{\theta s} ds + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dB_s = u_0 + \mu(e^{\theta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dB_s,$$

i per tant aïllant U_t trobem:

$$U_t = u_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s, \tag{5.3}$$

on la integral és una integral d'Itô ja que s'integra respecte el moviment Brownià.

Propietats del procés

Veiem en primer lloc que U_t segueix una distribució Gaussiana igual que el moviment Brownià. Si considerem una partició de l'interval $[0, t]$ com $\{\Pi_n\}_{n \geq 1}$ amb $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{k_n}^n = t\}$ i tal que $|\Pi_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, llavors, com que l'integrand $e^{-\theta(t-s)}$ és una funció determinista, per la Definició d'integral d'Itô 4.3:

$$\int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k_n} e^{-\theta(t - t_{j-1})} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Aquesta doncs segueix una distribució normal ja que la suma de variables aleatòries independents i normalment distribuïdes (com són $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$) és altra vegada normal, així com el seu límit a $n \to \infty$. Per tant d'aquí se'n dedueix que U_t, degut a la seva expressió (5.3), segueix una distribució Gaussiana.

Per a caracteritzar el procés doncs, simplement caldrà calcular els dos primers moments (esperança, covariància i variància) i n'obtindrem la seva distribució. Així doncs, fent ús de les propietats de la integral d'Itô de la Proposició 4.5, en particular que és centrada, tenim:

$$\begin{aligned} E(U_t) &= u_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma E\Big[\int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s \Big] \\ &= u_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) = \mu + (u_0 - \mu) e^{-\theta t}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Pel que fa a la covariància, si suposem que $s = s \wedge t \leq t$ (el cas $t < s$ és anàleg):

$$\begin{aligned} Cov(U_s, U_t) &= E[(U_s - E(U_s))(U_t - E(U_t))] \\ &= \sigma^2 E\Big[\int_0^s e^{-\theta(s-\xi)} dB_\xi \int_0^t e^{-\theta(t-\xi)} dB_\xi \Big] \\ &= \sigma^2 e^{-\theta(t+s)} \Bigg(E\Big[\Big(\int_0^{s \wedge t} e^{\theta\xi} dB_\xi \Big)^2 \Big] + E\Big[\int_0^s e^{\theta\xi} dB_\xi \int_s^t e^{\theta\xi} dB_\xi \Big] \Bigg), \end{aligned}$$

on primer hem substituït el resultat de l'esperança i després hem partit la integral de 0 a t en dos subintervals definits de $[0, s]$ i de $[s, t]$. Ara utilizem la propietat d'isometria de la integral d'Itô pel primer terme, i que les dues integrals que ens apareixen al segon són independents (ja que els intervals són disjunts) i centrades, per tant s'annul·len. Així doncs:

$$\begin{aligned} Cov(U_s, U_t) &= \sigma^2 e^{-\theta(t+s)} E\left[\int_0^{s\wedge t} e^{2\theta\xi} d\xi\right] = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta(t+s)}(e^{2\theta(s\wedge t)} - 1) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\theta}(e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Amb aquest resultat doncs és fàcil trobar la variància:

$$Var(U_t) = Cov(U_t, U_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}). \tag{5.6}$$

I per tant, tindrem que fixat t, U_t segueix una distribució normal

$$U_t \sim \mathcal{N}\left(u_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}), \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})\right),$$

amb la qual cosa la densitat de probabilitat de transició, si $U_s = u$, és:

$$p(t, u, x) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\theta t})}} \exp\left\{-\frac{\theta}{\sigma^2}\left[\frac{(x - \mu - (u - \mu)e^{-\theta t})^2}{1 - e^{-2\theta t}}\right]\right\},$$

que és la mateixa a la que haguéssim arribat fent servir l'equació de Fokker-Planck. Asimptòticament si $t \to \infty$, aleshores $U_t \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right)$ i:

$$p(t, u, x) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi\sigma^2}} e^{-\theta(x-\mu)^2/\sigma^2},$$

així que és un moviment Brownià reescalat.

5.1.1 Interpretació dels paràmetres

Amb els resultats anteriors, podem veure que μ és la mitjana asimptòtica del procés, θ la tendència a retornar a la mitjana (propietat "mean-reverting"), és a dir, la intensitat amb què el procés reacciona a pertorbacions (ritme de decaïment o de creixement), i finalment σ^2 la intensitat del soroll, similar a la variància d'un moviment Brownià.

El moviment Brownià no serveix per a modelar el moviment de partícules Brownianes en un fluid ni tampoc molts altres aspectes de la vida real, ja que a la que $t - s$ va a l'infinit la seva desviació estàndard també. Per tant, si eventualment es dispara tendirà a no retornar mai més a valors més petits. En canvi, veiem a la Figura 9 que això no és així pel que fa el procés d'OU (o algun altre procés amb la propietat de "mean-reverting"). Per tant, aquest servirà per a fer models molt més acurats de la realitat.

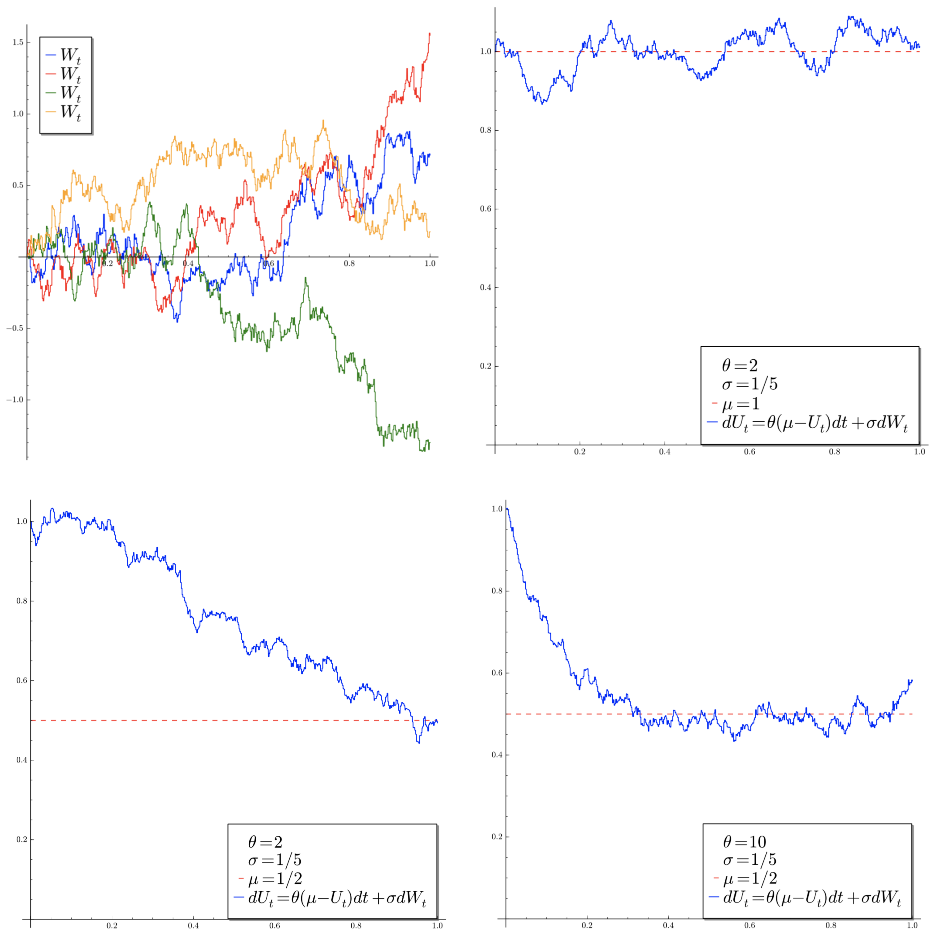

Figura 9: Simulació de trajectòries d'un moviment Brownià (dalt a l'esquerra) i simulació d'una trajectòria per a tres processos d'OU amb paràmetres diferents. Veiem que en els tres casos el procés tendeix cap a la mitjana μ i ho fa més ràpid quant més gran sigui θ. Font: http://michael.orlitzky.com/presentations/ornstein-uhlenbeck_processes.pdf.

5.2 Aplicació en física de fluids. Equació de Langevin

Considerem el problema físic que va donar lloc a la descripció matemàtica del moviment Brownià que ens ha estat ocupant tota l'estona, el d'una partícula de massa m (la partícula Browniana) immersa en un fluid compost de molècules molt més petites. El moviment de la partícula és degut a les col·lisions aleatòries amb les molècules del fluid, provocades al seu torn per les fluctuacions en la densitat. Com hem comentat, Einstein va estudiar aquest moviment en [3] des d'un punt de vista probabilístic, obtenint l'equació diferencial per la densitat de partícules $p(t,x)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad t > 0,$$

on D s'anomena coeficient de difusió. Aquesta té la forma d'una equació de Fokker-Planck (5.1) amb $a_t = 0$ i $b_t = \sqrt{D}$. Si a l'instant inicial la partícula es troba a $y \in \mathbb{R}^3$ (i per tant $p(0,y) = \delta_y$ és una Delta de Dirac), aleshores la solució ve donada per:

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(- \frac{(x-y)^2}{2Dt} \right),$$

és a dir, p és la densitat d'una llei $\mathcal{N}(y, Dt)$. A més a més, amb raonaments físics Einstein (i paral·lelament Smoluchowski) va demostrar que

$$D = \frac{k_B T}{\gamma},$$

on k_B és la constant de Boltzmann (pren el valor de $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$), T la temperatura del fluid i γ el coeficient de fricció, que per la llei de Stokes [13] ve donat per $\gamma = 6\pi\eta R$ amb η la viscositat del fluid i R el radi de la partícula Browniana. Tot i això, el treball d'Einstein no proporciona una teoria dinàmica del moviment, sinó que les primeres formulacions dinàmiques són degudes a Langevin i a Ornstein i Uhlenbeck (1930), com veiem a continuació.

Per la segona llei de Newton l'equació del moviment de la partícula Browniana vindrà donada per:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F(t),$$

on $v(t)$ és la velocitat i $F(t)$ la força instantània exercida sobre ella. A més, s'ha vist experimentalment que la força es pot descriure amb dues contribucions, una dominada per la força de fricció que exerceix el fluid ($-\gamma v(t)$), i l'altra com un terme estocàstic degut a les fluctuacions aleatòries ($\xi(t)$). Així doncs, l'equació del moviment, anomenada *equació de Langevin* és:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + \xi(t).$$

Considerarem els efectes de la força estocàstica com un soroll blanc Gaussià, és a dir, amb $\xi(t)$ seguint una distribució Gaussiana amb les variables no correlacionades (blanc), i per tant amb primer i segon moments donats per:

$$E[\xi(t)] = \langle \xi(t) \rangle_\xi = 0, \quad E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle_\xi = C\delta(t_1 - t_2),$$

on C és una mesura de la intensitat de la força que està actuant sobre la partícula. El fet que l'esperança sigui zero és degut a que ja hem restat el terme de la fricció, i la delta de Dirac apareix ja que no hi ha correlació entre impactes en diferents instants de temps. Això s'explica degut a que en un interval de temps petit respecte l'escala temporal característica del procés (la qual veurem que és $\tau = m/\gamma$) hi ha moltíssimes col·lisions, per tant no hi pot haver memòria entre elles. Valors típics són de $\tau \approx 10^{-3}s$ i $\tau_s \approx 10^{-12}s$ per l'escala atòmica, així que per exemple en un interval petit comparat amb τ, $dt = 10^{-5}s$ hi haurà $dt/\tau_s \approx 10^7$ col·lisions.

Tot i això, com vam comentar a l'inici de la secció 4 de càlcul estocàstic, no és clara la interpretació d'aquesta equació en termes del procés estocàstic $\xi(t)$, però amb les hipòtesis que hem fet podem posar $\xi(t)dt = dB_t$. Aleshores l'equació de Langevin és

$$dv(t) = -\frac{\gamma}{m}v(t)dt + \frac{1}{m}dB_t. \tag{5.7}$$

Estem a l'espai real tridimensional, però en realitat tenim un sistema de 3 equacions diferencials estocàstiques unidimensionals desacoblades, ja que podem considerar cada component (x, y, z en l'espai real) per separat. Per tant, sense pèrdua de generalitat, considerem la SDE unidimensional, la qual és exactament l'equació diferencial estocàstica del procés d'Ornstein-Uhlenbeck de (5.2) amb $v(t) = U_t$ i paràmetres $\mu = 0, \theta = \frac{\gamma}{m} \equiv \frac{1}{\tau}$ i $\sigma = \frac{1}{m}$.

Així doncs, trobem que la velocitat segueix una distribució Gaussiana, i substituïnt a les fórmules calculades anteriorment (tenint en compte els moments de $\xi(t)$ i per tant que ara caldrà multiplicar pel terme C de la intensitat de la força al calcular la covariància), podem trobar la seva expressió (5.3), l'esperança (5.4), covariància (5.5) i variància (5.6) d'aquest procés:

$$
\begin{aligned}
&v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{m}\int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} dB_s, \quad E[v(t)] = v_0 e^{-t/\tau}, \\
&Cov(v(s), v(t)) = \frac{\tau C}{2m^2}(e^{-\frac{|t-s|}{\tau}} - e^{-\frac{(t+s)}{\tau}}), \quad Var(v(t)) = \frac{\tau C}{2m^2}(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}).
\end{aligned}
$$

Relacionem finalment els resultats amb dos teoremes físics importants.

5.2.1 Teorema de fluctuació-dissipació

En mecànica estadística clàssica, el teorema d'equipartició de l'energia relaciona la temperatura d'un sistema amb les energies de les molècules o dels seus constituents. En el cas particular que ens pertoca (un únic grau de llibertat en una dimensió), s'expressa tal que a l'equilibri hem de tenir $\langle E\rangle_{eq} = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle_{eq} = \frac{k_BT}{2}$, així que $\langle v^2\rangle_{eq} = k_BT/m$. Com que aquest s'ha de complir sempre, podem trobar la intensitat de la força aleatòria $\xi(t)$ que actua sobra la partícula. Calculem primer $\langle v(t)^2\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle v(t)^2\rangle = E[v(t)^2] = E[v(t)]^2 + Var(v(t)) &= v_0^2 e^{-2t/\tau} + \frac{\tau C}{2m^2}(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}) \\
&= (v_0^2 - \frac{\tau C}{2m^2})e^{-\frac{2t}{\tau}} + \frac{\tau C}{2m^2},
\end{aligned}
$$

que per tal que a l'equilibri no pugui dependre del temps, caldrà que el primer terme s'annul·li i llavors pel teorema d'equipartició:

$$
\langle v_0^2\rangle_{eq} = \frac{\tau C}{2m^2} = \frac{k_BT}{m} \implies C = 2\frac{k_BTm^2\gamma}{m^2} = 2k_BT\gamma,
$$

resultat que es coneix pel teorema de fluctuació-dissipació. Per tant la força estocàstica anteriorment definida compleix

$$
\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\rangle_\xi = 2k_BT\gamma\delta(t_1 - t_2),
$$

i substituïnt, la velocitat de la partícula Browniana segueix una distribució normal:

$$
v(t) \sim \mathcal{N}\Big(v_0 e^{-t/\tau}, \frac{k_BT}{m}(1 - e^{-2t/\tau})\Big).
$$

5.2.2 Coeficient de difusió

Per acabar és interessant calcular el desplaçament quadràtic ja que és de les magnituds que s'observen més directament en els experiments. Integrem doncs altra vegada la solució per la velocitat per a trobar la posició. Tot i no ser molt rigorós matemàticament, a la segona igualtat utilitzem un Fubini estocàstic (en aquest cas es pot fer perquè la funció que s'està integrant és determinista). Així posant $x(0) = x_0$ tenim:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v_0 e^{-s/\tau} ds + \frac{1}{m}\int_0^t ds \int_0^s e^{-\frac{(s-\xi)}{\tau}} dB_\xi \\ &= x_0 + v_0\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{1}{m}\int_0^t dB_\xi \int_\xi^t e^{-\frac{(s-\xi)}{\tau}} ds \\ &= x_0 + v_0\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{\tau}{m}\int_0^t (1 - e^{-\frac{(t-\xi)}{\tau}}) dB_\xi. \end{aligned}$$

Aleshores per la centralitat de la integral estocàstica,

$$E[x(t)] = x_0 + v_0\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

i amb uns càlculs similars als fets anteriorment (aplicant la isometria d'Itô i sense deixar-nos el terme C), podem calcular doncs el desplaçament quadràtic com:

$$\begin{aligned} \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle &= v_0^2\tau^2(1 - e^{-t/\tau})^2 + \frac{\tau^2 C}{m^2} E\left[\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-s}{\tau}}\right)^2 ds\right] \\ &= v_0^2\tau^2(1 - e^{-t/\tau})^2 + \frac{\tau^2 C}{m^2}\left[t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) - \frac{\tau}{2}(1 - e^{-t/\tau})^2\right] \\ &= \tau^2(1 - e^{-t/\tau})^2\left[v_0^2 - \frac{k_B T}{m}\right] + \frac{2k_B T}{\gamma}\left[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})\right]. \end{aligned}$$

En equilibri el primer terme desapareix degut al teorema d'equipartició, i pel que fa al segon podem veure que el comportament asimptòtic segueix:

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle_{eq} = \begin{cases} \frac{k_B T}{m} t^2, & \text{si } t \ll \tau \text{ (fent un desenvolupament de Taylor)}, \\ \frac{2k_B T}{\gamma} t, & \text{si } t \gg \tau. \end{cases}$$

Així doncs, veiem que al principi el moviment és uniforme, ja que $\langle x(t) - x_0 \rangle_{eq} = \langle v \rangle_{eq} t$. Per a temps grans cal relacionar-ho amb l'equació de difusió, tal que $\frac{\partial c}{\partial t} = D\vec{\nabla}^2 c$ on c la concentració de partícules en el fluid, de la qual se'n dedueix que el desplaçament quadràtic és $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = 2dDt$, essent d és la dimensió del moviment. Així amb $d = 1$ i comparant-ho amb el que hem obtingut trobem:

$$D = \frac{k_B T}{\gamma},$$

reproduïnt així el resultat d'Einstein-Smoluchowski [3].

6 Conclusions

Durant la memòria hem dut a terme un estudi del moviment Brownià, des de la seva definició, construcció i motivació i importància a nivell de fer models matemàtics de molts fenòmens de la realitat, fins a provar-ne les propietats de la no diferenciabilitat de les trajectòries i variació quadràtica finita. Si bé haguéssim pogut entrar molt més en detall sobre altres propietats del moviment (com la propietat forta de Markov, el principi de reflexió, els temps d'espera, la impredictibilitat relacionada amb fractals, o la llei del logaritme iterat entre d'altres), ens haguéssim excedit en l'abast d'aquest treball, i les propietats demostrades eren les claus pel posterior desenvolupament del càlcul estocàstic.

A partir d'aquí, hem pogut descobrir la rellevància d'aquest moviment en models amb pertorbacions aleatòries i d'aplicar-lo al càlcul estocàstic per a la resolució de les SDE que modelen molts sistemes dinàmics. Ha sigut un procés molt enriquidor, passant de la construcció de la integral estocàstica fins a poder aplicar la fórmula d'Itô en un cas concret d'equació diferencial. Haguéssim pogut presentar la integral estocàstica respecte un procés més general que no el moviment Brownià, ja fossin martingales o, encara més, semimartingales contínues, però pel que era l'objectiu del treball no ha sigut necessari. Queda pendent per un treball d'aprenentatge futur. De la mateixa forma, un estudi rigorós de les SDE, de l'existència i unicitat de les solucions així com de propietats d'aquestes, també queda pendent.

Per acabar, he trobat molt interessant poder aplicar la teoria matemàtica que havia estat desenvolupant al model físic del moviment d'una partícula Browniana en un fluid. Hagués pogut escollir una altra aplicació degut a la gran quantitat de models (sobretot financers) que hi ha a la bibliografia, però degut al meu lligam amb la física em va cridar l'atenció el procés d'Ornstein-Uhlenbeck per tal de relacionar-lo amb l'equació de Langenvin. També aquí podria haver profunditzat més en qüestions com l'equació de Fokker-Planck, però veure que estudiant el procés amb la integral d'Itô em portava a recuperar resultats tan imporants com el teorema de fluctuació-dissipació o del coeficient de difusió, ha sigut molt satisfactori.

Així doncs, he gaudit i après molt fent aquest treball, i el considero com una primera introducció al món del càlcul estocàstic que espero seguir descobrint en un futur.

A Apèndix: Esperança condicionada

Recordem que l'esperança d'una variable aleatòria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ve donada per la integral de Lebesgue $E(X) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$, de forma que es converteix en un sumatori en el cas de que la variable sigui discreta, o una integral amb la funció de densitat si és absolutament continua.

Per altra banda l'esperança condicionada ens dóna el valor esperat o mitjà que prendrà la variable després d'haver incorporat certa informació d'esdeveniments anteriors i que modifiquen lleugerament la seva funció de probabilitat. Aquesta informació pot ser d'un únic esdeveniment, d'una variable aleatòria discreta o d'una σ-àlgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Aquest és el cas general i en el que ens centrarem per tal de no estendre'ns massa, però si es vol llegir el pas a pas de la construcció (i demostració) de l'existència de l'esperança condicionada respecte una σ-àlgebra, dirigir-se a [1] p.17. Considerem tota l'estona que X té esperança finita.

Definició A.1. *Donada la variable aleatòria X, l'esperança condicionada respecte d'una σ-àlgebra $\mathcal{G}$ és una altra variable aleatòria que denotem per $E(X|\mathcal{G})$ que satisfà:*

1. ***(Mesurabilitat)*** *És $\mathcal{G}$-mesurable ($\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), Z^{-1}(A) \in \mathcal{G}$),*

2. ***(Mitjana parcial)*** *Per a tot $G \in \mathcal{G}$, $E(E(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G) = E(X\mathbf{1}_G)$, que és equivalent a $\int_G E(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP$.*

Les propietats més bàsiques i útils, que s'utilitzen al llarg del treball, són les de la següent proposició.

Proposició A.2. . *L'esperança condicionada tal i com s'ha definit anteriorment, compleix:*

(a) Linealitat: $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$, on $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Si X és $\mathcal{G}$-mesurable, llavors $E(X|\mathcal{G}) = X$.

(c) Factorització: si Y acotada i $\mathcal{G}$-mesurable, $E(YX|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$.

(d) Si X és independent de $\mathcal{G}$ (és a dir qualsevol $X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és independent de $\mathcal{G}$), aleshores $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.

(e) Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ són dos σ-àlgebres, $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$.

(f) Monotonia: $X \leq Y \implies E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.

(g) $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.

Demostracions. Considerarem tota l'estona $G \in \mathcal{G}$ i X, Y variables aleatòries.

(a) $\int_G E(aX + bY|\mathcal{G})dP = \int_G (aX + bY)dP = a\int_G E(X|\mathcal{G})dP + b\int_G E(Y|\mathcal{G})dP$.

(b) Si X és $\mathcal{G}$-mesurable, llavors es compleixen trivialment les condicions *1.* i *2.* de la Definició A.1 i per tant $E(X|\mathcal{G}) = X$.

(c) Provem-ho primer per a $Y = \mathbf{1}_A$ amb $A \in \mathcal{G}$. En aquest cas és trivial que $\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{G})$ és $\mathcal{G}$-mesurable, i:

$$\int_G \mathbf{1}_A E(X|\mathcal{G}) dP = \int_{A\cap G} E(X|\mathcal{G}) dP = \int_{A\cap G} X dP = \int_G \mathbf{1}_A X dP$$
$$= \int_G E(\mathbf{1}_A X|\mathcal{G}) dP \implies \mathbf{1}_A E(X|\mathcal{G}) = E(\mathbf{1}_A X|\mathcal{G}).$$

Anàlogament obtindríem el mateix resultat (utilitzant linealitat) si Y fos una variable aleatòria simple $\mathcal{G}$-mesurable, $Y = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{A_j}$, amb $A_j \in \mathcal{G}$, i aplicant convergència monòtona ho estendríem a variables aleatòries de $L^1(\Omega)$.

(d) Com que X és independent de $\mathcal{G}$, les variables X i $\mathbf{1}_G$ són independents i per tant $E(X\mathbf{1}_G) = E(X)E(\mathbf{1}_G)$. Llavors:

$$\int_G E(X|\mathcal{G}) dP = \int_G X dP = E(X\mathbf{1}_G) = E(X)E(\mathbf{1}_G) = \int_G E(X) dP,$$

així que $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.

(e) Sigui $G \in \mathcal{G}_1$, aleshores també $G \in \mathcal{G}_2$, i aplicant la definició d'esperança condicionada tres vegades:

$$\int_G E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) dP = \int_G E(X|\mathcal{G}_2) dP = \int_G X dP = \int_G E(X|\mathcal{G}_1) dP.$$

Per altra banda, com que $E(X|\mathcal{G}_1)$ és $\mathcal{G}_1$-mesurable per definició, aleshores per la propietat (b) $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1)$. D'aquesta forma:

$$E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1) = E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2).$$

(f) Per definició, i fent servir la monotonia de l'esperança de variables aleatòries llavors:

$$E(E(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G) = E(X\mathbf{1}_G) \leq E(\mathbf{1}_G Y) = E(E(Y|\mathcal{G})\mathbf{1}_G).$$

(g) Finalment si considerem $G = \Omega \in \mathcal{G}$, és fàcil veure de la definició:

$$E(E(X|\mathcal{G})) = E(E(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_\Omega) = E(X\mathbf{1}_\Omega) = E(X).$$

$\square$

Un resultat que ens serà útil és el que dóna l'esperança d'una sèrie convergent. Per a provar-lo és necessària la *desigualtat de Jensen*, que amb analogia a l'esperança de variables aleatòries, diu que si $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció convexa i $\xi, \phi(\xi)$ variables aleatòries de quadrat integrable, aleshores:

$$\phi(E(\xi|\mathcal{G})) \leq E(\phi(\xi)|\mathcal{G}) \text{ q.s.}$$

No ho demostrarem però es pot trobar a [12] p.70 ([11] p.104 per a l'esperança no condicionada).

Lema A.3. *Sigui $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una σ-àlgebra, i siguin $\xi_1, \xi_2, \dots$ variables aleatòries de quadrat integrable tals que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ en L^2, aleshores*

$$E(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} E(\xi|\mathcal{G}). \tag{A.1}$$

Demostració. Per la desigualtat de Jensen tenim que, sigui $\phi = |\cdot|^2$,

$$|E(\xi_n|\mathcal{G}) - E(\xi|\mathcal{G})|^2 = |E(\xi_n - \xi|\mathcal{G})|^2 \leq E\Big(|\xi_n - \xi|^2 \Big| \mathcal{G}\Big),$$

que implica que, prenent esperances a banda i banda, utilitzant la propietat (g) i la convergència en L^2 de ξ_n a ξ:

$$E\Big(|E(\xi_n|\mathcal{G}) - E(\xi|\mathcal{G})|^2\Big) \leq E\Big(E\Big(|\xi_n - \xi|^2\Big|\mathcal{G}\Big)\Big) = E(|\xi_n - \xi|^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Per tant, obtenim així ($A.1$). $\square$

B Apèndix: Llei Gaussiana multidimensional

A la Definició 2.17 es menciona la llei Gaussiana multidimensional (ja que tant els processos estocàstics Gaussians com el moviment Brownià vénen donats per aquesta llei). Bàsicament és la generalització de la llei Gaussiana unidimensional (2.2) a dimensions superiors.

Proposició B.1. *Sigui $\mu \in \mathbb{R}^n$ i Γ una matriu simètrica d'ordre n definida no negativa, existeix una probabilitat en $\mathbb{R}^n$ que s'anomena llei Gaussiana (o normal) n-dimensional $\mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$, que té per funció característica*

$$\varphi(u) = \exp\Big(iu^T\mu - \frac{1}{2}u^T\Gamma u\Big).$$

Demostració. Com que Γ és simètrica existeix una matriu ortogonal P tal que $P\Gamma P^T = D$, on D és una matriu diagonal amb coeficients $\lambda_1 \dots \lambda_n$ els autovalors de Γ (positius perquè Γ és definida positiva). Aleshores, sigui $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vector aleatori amb components independents i tals que

$$Y_i \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \lambda_i), \text{ si } \lambda_i \neq 0 \\ 0, \text{ si } \lambda_i = 0, \end{cases}$$

per a $i = 0 \dots n$, la seva funció característica serà:

$$\varphi_Y(u) = E(e^{iu^TY}) = E\Big[\exp\Big(i\sum_{j=1}^n u_jY_j\Big)\Big] = \prod_{j=1}^n E(e^{iu_jY_j}) = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}u_j^2\lambda_j} = e^{-\frac{1}{2}u^TDu},$$

on $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ i a la penúltima igualtat hem fet servir la funció característica d'una llei normal unidimensional. Si definim ara $X = P^T Y + \mu$, la funció característica del vector X serà:

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= E[e^{iu^T(P^TY+\mu)}] = e^{iu^T\mu}E[e^{i(Pu)^TY}] = e^{iu^T\mu}\varphi_Y(Pu) = e^{iu^T\mu}e^{-\frac{1}{2}(Pu)^TD(Pu)} \\ &= e^{iu^T\mu - \frac{1}{2}u^T\Gamma u},\end{aligned}$$

que en efecte, és la llei que busquem. □

Enunciem algunes propietats importants de les lleis normals multidimensionals (veure demostracions a [8] p.127). Sigui un vector aleatori $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ (amb llei normal multidimensional):

(i) El vector de mitjanes ve donat per $E(X) = \mu$ i la matriu de variàncies i covariàncies és $E[(X-\mu)(X-\mu)^T] = \Gamma$.

(ii) Si A és una matriu d'ordre $r \times n$, el vector AX té llei $\mathcal{N}_r(A\mu, A\Gamma A^T)$. En particular, tot vector aleatori $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$ amb $m \leq n$ té llei normal, i tota combinació lineal $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ també. El recíproc també és cert.

(iii) La independència de les variables $X_1, \ldots, X_n$ és equivalent a que la matriu Γ sigui diagonal, és a dir amb les variables $X_1, \ldots, X_n$ incorrelacionades.

(iv) En el cas no degenerat en què $\det(\Gamma) > 0$, si $x \in \mathbb{R}^n$ la funció de densitat del vector aleatori ve donada per:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Gamma)}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Gamma^{-1}(x-\mu)\Big)$$

Aquest últim cas de fet és doncs el que ens incumbeix pel moviment Brownià. Sigui $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un moviment Brownià (no estàndard sinó amb variància σ^2 i punt inicial x_0), tindrem que $\mu = (x_0, \ldots, x_0)^T$ i, com que $\Gamma(s,t) = \sigma^2(s \wedge t)$, és definida positiva i

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Per tant, siguin $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, i B_i subconjunts de la σ-àlgebra de Borel $\forall i = 0, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}&P(X_0 \in B_0, X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \\ &\delta_{x_0}(B_0) \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i - t_{i-1})}} \exp\Big\{\frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})}\Big\} dx_1 \ldots dx_n.\end{aligned}$$

En realitat, amb un canvi de variables trobaríem que la densitat del vector aleatori $(X_{t_1}-X_0, X_{t_2}-X_{t_1}, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}})$ és

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i-t_{i-1})}} \exp\Big\{\frac{-y_i^2}{2\sigma^2(t_i-t_{i-1})}\Big\},$$

i per tant està format per variables independents amb llei $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t_i-t_{i-1}))$.

C Apèndix: Demostració per inducció de la construcció en [0,1]

Quan es construeix el moviment Brownià, expressem la seqüència B^n en termes d'una combinació lineal de les funcions de Schauder i les variables normals N_k^n (3.4). Vam veure ja a l'Exemple 3.6 el cas $n=1$ i, abans de fer la demostració per inducció, podem il·lustrar novament el procediment per a $n=2$ (veure Figura 4 per a fer-ho més entenador).

Així doncs, si $n=2$ $(k=1,3)$ i $\mathcal{D}_2=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$, conservem els punts $0,\frac{1}{2},1\in\mathcal{D}_1$ de forma que $B_0^2=B_0^1=0$, $B_{1/2}^2=B_{1/2}^1=\frac{1}{2}(N_1^0+N_1^1)$ i $B_1^2=B_1^1=N_1^0$. Els punts de $\mathcal{D}_2\backslash\mathcal{D}_1=\{\frac{1}{4},\frac{3}{4}=\frac{k}{2^n}\}$ seran, utilitzant (3.3):

$$B_{1/4}^2=\frac{1}{2}(B_0^1+B_{1/2}^1)+\frac{1}{\sqrt{8}}N_1^2=\frac{1}{4}(N_1^0+N_1^1)+\frac{1}{\sqrt{8}}N_1^2,$$

$$B_{3/4}^2=\frac{1}{2}(B_{1/2}^1+B_1^1)+\frac{1}{\sqrt{8}}N_3^2=\frac{3}{4}N_1^0+\frac{1}{4}N_1^1+\frac{1}{\sqrt{8}}N_3^2.$$

Ara cal interpolar linealment entre aquests punts i fer ús de les funcions de Schauder (3.1) en cada interval:

- Si $t\in[0,\frac{1}{4}]$: $B_t^2=\frac{B_{1/4}^2-B_0^2}{1/4-0}t+B_0^2=4B_{1/4}^2t=N_1^0t+N_1^1t+\sqrt{2}N_1^2t=N_1^0S_1^0+N_1^1S_1^1+N_1^2S_1^2$, i $S_3^2=0$ en aquest interval.

- Si $t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$: $\frac{t-1/2}{1/4}=\frac{B_t^2-B_{1/2}^2}{B_{1/2}^2-B_{1/4}^2}\implies B_t^2=4(t-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}N_1^0+\frac{1}{4}N_1^1-\frac{1}{2\sqrt{2}}N_1^2)+\frac{1}{2}N_1^0+\frac{1}{2}N_1^1=t(N_1^0+N_1^1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-2t)N_1^2=N_1^0S_1^0+N_1^1S_1^1+N_1^2S_1^2$, i $S_3^2=0$ en aquest interval.

- Si $t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$: $\frac{t-1/2}{1/4}=\frac{B_t^2-B_{1/2}^2}{B_{3/4}^2-B_{1/2}^2}\implies B_t^2=4(t-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}N_1^0-\frac{1}{4}N_1^1+\frac{1}{2\sqrt{2}}N_3^2)+\frac{1}{2}N_1^0+\frac{1}{2}N_1^1=tN_1^0+(1-t)N_1^1+\sqrt{2}(t-\frac{1}{2})N_3^2=N_1^0S_1^0+N_1^1S_1^1+N_3^2S_3^2$, i $S_1^2=0$ en aquest interval.

- Si $t\in[\frac{3}{4},1]$: $\frac{t-1}{1/4}=\frac{B_t^2-B_1^2}{B_1^2-B_{3/4}^2}\implies B_t^2=4(t-1)(\frac{1}{4}N_1^0-\frac{1}{4}N_1^1-\frac{1}{2\sqrt{2}}N_3^2)+N_1^0=tN_1^0+(1-t)N_1^1+\sqrt{2}(1-t)N_3^2=N_1^0S_1^0+N_1^1S_1^1+N_3^2S_3^2$, i $S_1^2=0$ en aquest interval.

Per tant efectivament, obtenim el que volíem.

Demostració del cas general. Suposem que (3.4) és certa per a $n-1$, i prenem $k \in I_n$, de forma que $\frac{k}{2^n} \in \mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1}$ i $\frac{k+1}{2^n}, \frac{k-1}{2^n} \in \mathcal{D}_{n-1}$ (els casos $k=0, k=2^n$ s'haurien de fer apart però són anàlegs, així que els obviarem). Aleshores tenim que per hipòtesis d'inducció i per (3.3):

$$
\begin{aligned}
B^n_{\frac{k-1}{2^n}} &= B^{n-1}_{\frac{k-1}{2^n}} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in I_m} N^m_k S^m_k, \\
B^n_{\frac{k+1}{2^n}} &= B^{n-1}_{\frac{k+1}{2^n}} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in I_m} N^m_k S^m_k, \\
B^n_{\frac{k}{2^n}} &= \frac{1}{2}\Big(B^{n-1}_{\frac{k-1}{2^n}} + B^{n-1}_{\frac{k+1}{2^n}}\Big) + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} N^n_k = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in I_m} N^m_k S^m_k + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} N^n_k.
\end{aligned}
$$

Interpolem doncs linealment entre $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ utilitzant l'equació de la recta punt-vector:

$$
\frac{t - \frac{k+1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{B^n_t - B^n_{\frac{k+1}{2^n}}}{B^n_{\frac{k+1}{2^n}} - B^n_{\frac{k}{2^n}}},
$$

i per tant:

$$
\begin{aligned}
B^n_t &= 2^n\Big(t - \frac{k+1}{2^n}\Big)\Big(-\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} N^n_k\Big) + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in I_m} N^m_k S^m_k \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\Big(\frac{k+1}{2^n} - t\Big) N^n_k + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in I_m} N^m_k S^m_k.
\end{aligned}
$$

A més, $2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k+1}{2^n} - t\right) = S^n_k$ per la Definició 3.1 de les funcions de Schauder en l'interval corresponent. Per tant $B^n_t = \sum\limits_{m=0}^{n} \sum\limits_{k \in I_m} N^m_k S^m_k$. □

Referències

[1] Z. Brzeźniak and T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes. A Course Through Exercises*, Springer-Verlag London, 2005. ISBN: 3-540-76175-6.

[2] A. Eberle, *Stochastic Analysis. An Introduction*, Lecture notes in the University of Bonn, 2015 [https://wt.iam.uni-bonn.de/fileadmin/WT/Inhalt/people/Andreas_Eberle/StoAn1011/StoAnSkriptneu.pdf].

[3] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik **322** (8): 549-560 (1905).

[4] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag New York, 1998. ISBN: 9780-0-387-97655-6.

[5] J.F. Le Gall, *Brownian Motion, Martingales and Stochastic Calculus*, Springer International Publishing Switzerland, 2016. ISBN: 978-3-319-31088-6.

[6] P. Mörters and Y. Peres, *Brownian motion*, (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics), Cambridge University, 2010. ISBN: 978-0521760188.

[7] D. Nualart, *Processos Estocàstics*, Apunts de la Universitat de Barcelona, 1980.

[8] D. Nualart i M. Sanz-Solé, *Curs de probabilitats*, PPU Barcelona, 1990. ISBN: 84-7665-718-8.

[9] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. ISBN: 3-540-04758-1.

[10] M. Sanz-Solé, *An Introduction to Stochastic Calculus*, Lecture notes in the Master Degree in Advanced Mathematics from the University of Barcelona, 2017 [http://www.ub.edu/plie/Sanz-Sole/].

[11] M. Sanz-Solé, *Probabilitats*, Edicions Universitat de Barcelona, 1999. ISBN: 78-84-8338-091-8.

[12] S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*, Springer-Verlag New York, 2004. ISBN: 0-387-40101-6.

[13] G. Stokes, *On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums*, transactions of the Cambridge Philosophical Society. 9, part II: 8-106, 1851.

[14] P. Todorovic, *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*, Springer-Verlag New York, 1992. ISBN: 978-1-4613-9744-1.

[15] G.E. Uhlenbeck and L.S. Ornstein, *On the theory of the Brownian motion*, Phys. Rev. **36**, 823 (1930).