Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Aplicació dels models canònics a la demostració del teorema de completesa

---

Autor: Marta Planagumà Franco

Director: Dr. Joan Gispert Brasó
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

Completeness theorem establishes a correspondence between semantic and syntactic interpretations of mathematical logic. In this thesis we will construct canonical models in order to prove the completeness of the weakest normal modal logic, K. This construction will be useful to prove completeness theorems for other logics.

Resum

El teorema de completesa estableix una correspondència entre les interpretacions semàntica i la sintàctica de la lògica matemàtica. En aquest treball es donarà la construcció dels models canònics per demostrar la completesa de la menor lògica modal normal, K. Aquesta construcció serà útil per demostrar teoremes de completesa per altres lògiques.

2010 Mathematics Subject Classification. 03B45, 03B05, 03B20

Agraïments

Vull agrair al Dr. Joan Gispert tot allò que ha fet per aquest treball. En primer lloc, per la proposta d'un tema tan interessant. En segon lloc, per totes les hores que ha dedicat a corregir-ho tot. Però sobretot, per la paciència que ha tingut a l'hora d'explicar-me els conceptes que m'han costat més d'entendre.

També vull donar les gràcies a la família i als amics, per la seva contribució al treball donant-me ànims quan ho he necessitat.

Índex

1 Introducció

Motivació personal

Les matemàtiques, tot i ser una ciència formal que treballa sobre objectes abstractes, poden servir com a eina a l'hora de modelitzar fenòmens físics, biològics o socials. El meu interès per la lògica va sorgir de la idea de si la manera en què pensem es pot expressar matemàticament. La lògica clàssica permet expressar de manera rigorosa molts dels raonaments que fem. Tanmateix, les eines de la lògica clàssica són limitades, ja que, per exemple, hi ha afirmacions que no són completament certes o completament falses.

Quan vaig cursar l'assignatura de Modelització Matemàtica de Formes de Raonament, vaig descobrir que hi ha lògiques no clàssiques. Aquestes permeten expressar idees més complexes que la lògica clàssica i, per tant, s'assemblen més a la manera de raonar dels humans. És per això que vaig voler fer un treball sobre lògiques no clàssiques.

En aquest treball, però, no es donarà cap interpretació filosòfica del pensament, sinó que es treballarà sobre la lògica matemàtica. L'objectiu principal del treball serà demostrar el teorema de completesa per algunes lògiques, fent servir els models canònics com a eina.

La lògica

La lògica és la ciència formal que estudia els raonaments. La lògica matemàtica és l'estudi dels raonaments des d'un punt de vista matemàtic. Un raonament és un procés en què es dedueixen conclusions a partir de premisses. Per exemple,

La suma de dos nombres parells és un nombre parell.
2 i 4 són nombres parells.
Per tant, $2 + 4 = 6$ és un nombre parell.

El quocient de dues funcions contínues a $\mathbb{R}$ és una funció contínua a $\mathbb{R}$.
$f(x) = 1$ i $g(x) = x$ són funcions contínues a $\mathbb{R}$.
Per tant, $h(x) = \frac{1}{x}$ és una funció contínua a $\mathbb{R}$.

són dos raonaments. Tot i que sembla que el darrer raonament és incorrecte, des del punt de vista de la lògica, aquests dos raonaments són idèntics. És més, ambdós raonaments són correctes, ja que són de la forma

$$\forall x\ \forall y\ ((P(x) \wedge P(y)) \to P(x \backsim y))$$
$$P(a) \wedge P(b)$$
$$P(a \backsim b)$$

Així doncs, s'observa que la lògica estudia l'estructura dels raonaments i no pas el seu significat. Per tant, serà necessari un llenguatge que permeti manipular raonaments sense tenir en compte què volen dir. Com a llenguatge formal farem servir el llenguatge formal més senzill, que és el llenguatge proposicional, el qual definirem al capítol 2 del treball.

Fàcilment, hem vist que el raonament anterior és "correcte". Tanmateix, per a raonaments més complicats necessitem eines per poder decidir unívocament si aquests són o no correctes.

El primer en introduir una idea de "raonament correcte" va ser Aristòtil a la seva obra *Organon*, en què va presentar la deducció sil·logística, que permet inferir conclusions vertaderes a partir de premisses vertaderes. Més endavant, a principis del segle XIX, va néixer la lògica moderna o lògica simbòlica, que va permetre modelitzar els raonaments matemàticament. Veurem doncs, dues maneres de modelitzar raonaments: des d'un punt de vista semàntic i des d'un punt de vista sintàctic.

La lògica clàssica es basa en el principi de bivalència en què tot enunciat és o bé cert o bé fals. Aquest principi no és suficient per modelitzar totes les maneres de raonar que existeixen. És per això que hi ha una necessitat de tractar lògiques diferents la lògica clàssica. Aquestes són les lògiques no clàssiques.

També Aristòtil va introduir la idea que hi ha raonaments diferents del clàssic. Aristòtil va plantejar quatre maneres diferents de plantejar enunciats: allò que es necessari, allò que és possible, allò que és impossible i allò que és contingent. Així doncs, és diferent l'enunciat "és necessari que A sigui B" de "és possible que A sigui B". Aquesta idea dona lloc a la lògica modal, en què s'introdueixen dos operadors modals: $\Box$ i $\Diamond$.

$\Box A$ formalitza "A és necessari", és a dir, sempre passa A.
$\Diamond A$ formalitza "A és possible", és a dir, pot ser que passi A.

A mitjan del segle XX C. I. Lewis, amb la col·laboració de C. H. Langford, va presentar una implicació estricta $\rightharpoondown$ definida com

$$A \rightharpoondown B := \Box(A \to B),$$

que no satisfà les paradoxes de la implicació material

$$A \to (B \to A) \text{ i } A \to (\neg A \to B),$$

i va proposar uns càlculs deductius fent servir els operadors modals.

L'any 1963, S. A. Kripke va presentar la denominada *semàntica dels mons possibles*, que va permetre tractar la lògica modal des d'un punt de vista semàntic. Així doncs,

- $\Box A$ vol dir "A és veritat si en un món si ho és en tots els seus mons accessibles".
- $\Diamond A$ vol dir "A és veritat si ho és en algun dels seus mons accessibles".

En el capítol 3, veurem amb detall aquesta semàntica.

Estructura del treball

El cos d'aquest treball consta de tres parts: una introducció formal a la lògica, una presentació les eines necessàries per demostrar teoremes de completesa per algunes lògiques modals, i una adaptació de les eines presentades anteriorment per una lògica diferent a la modal.

Al capítol 2, en primer lloc, es presentarà la definició de lògica que es farà servir en aquest treball. Cal observar que, mentre que a la majoria de la literatura que he usat es tracta la lògica com un conjunt de fórmules, en el nostre cas la lògica es definirà a partir de la noció de relació de conseqüència estructural. Per nosaltres, una lògica serà una parella formada pel conjunt de fórmules proposicionals i una relació de conseqüència estructural.

Com a exemple de lògica, veurem la lògica clàssica, en què tindrem una semàntica bivalorada que ens permetrà dir que un raonament és correcte si, sempre que les premisses són vertaderes, també ho és la conclusió. D'altra banda, pels raonaments sintàctics, tindrem una noció de demostració, és a dir, tindrem una construcció a partir d'unes regles que definirem. En aquest treball, utilitzarem el càlcul tipus Hilbert per fer demostracions.

A continuació definirem el concepte de lògica modal proposicional, fent ús dels operadors modals $\Box$ i $\Diamond$. Definirem un tipus de lògiques modals, les lògiques normals, que seran les que farem servir en aquest treball.

Al capítol 3 donarem una definició formal de la semàntica que va concebre Kripke. Definirem estructures $\mathcal{M}$ que seran models de Kripke, formats per mons possibles α. Veurem dos tipus de relació de conseqüència: la conseqüència local ($\vDash_l$) i la conseqüència global ($\vDash_g$). Una fórmula proposicional φ serà conseqüència local (resp. global) d'un conjunt de fórmules Σ si en tot model i tot món (resp. tot model) en què Σ és veritat, també ho és φ. Aleshores veurem quina relació hi ha entre local i global mitjançant la construcció de models generats. Al capítol 4 donarem dos càlculs tipus Hilbert, també anomenats local ($\vdash_l$) i global ($\vdash_g$). Altra vegada, veurem quina relació hi ha entre ells.

Al capítol 5 demostrarem el teorema de completesa per lògiques definides als capítols 3 i 4. Ho veurem primer en el cas local. Demostrarem

$$\Sigma \vdash_l \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_l \varphi$$

Per veure $\Sigma \vdash_l \varphi \Rightarrow \Sigma \models_l \varphi$ comprovarem que totes les regles del càlcul tipus Hilbert són vàlides semànticament. Aquesta implicació del teorema de completesa sovint de l'anomena *coherència*.

D'altra banda, per veure la implicació recíproca, construirem un tipus de model de Kripke: els model canònic d'una lògica normal, $\mathcal{M}_c$. Aquest model ens permetrà provar $\Sigma \models_l \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash_l \varphi$ per un argument del contrarecíproc. Suposarem $\Sigma \nvdash_l \varphi$. Aleshores veurem que en un món T del model canònic $\mathcal{M}_c$, Σ serà veritat, però φ no. Aleshores tindrem $\Sigma \not\models_l \varphi$. Les relacions entre local i global obtingudes en els capítols anteriors ens permetran donar una demostració del teorema de completesa global a partir del local.

Al capítol 6 definirem tres lògiques modals normals, que seran extensions de les definides en els capítols 3 i 4. Farem servir el model canònic de cadascuna d'aquestes lògiques per demostrar els respectius teoremes de completesa.

Finalment, al capítol 7, veurem un exemple d'una lògica diferent a la modal: la lògica intuïcionista. Veurem que podem definir models de Kripke, diferents als de la lògica modal. Tot i així, podrem definir un model canònic d'aquesta lògica, i el farem servir per demostrar el teorema de completesa.

Les referències

El primer contacte que vaig tenir amb la lògica modal va ser a l'assignatura de Modelització Matemàtica de Formes de Raonament. Abans de començar el treball, sabent ja que es centraria en la lògica modal, vaig llegir el llibre de *Introducción a la lógica modal* [4], de Ramón Jansana. Quan vaig decidir que el teorema de completesa seria una part fonamental del treball, vaig llegir els capítols dos i sis dels llibres [2] i [3] de Hughes i Cresswell, que parlen de completesa i models canònics.

Per la part de lògica intuïcionista, a més a més del llibre *Introducción al intuicionismo* [1] en què Heyting presenta la lògica intuïcionista, m'ha estat molt útil *An introduction to non classical logics* [6], que dedica tot el capítol sis a aquesta lògica.

Finalment, per situar els conceptes a la història, m'he basat en alguns capítols del llibre *Historia de la lógica* [7].

2 Lògica clàssica i lògica modal

2.1 Preliminars

Un **llenguatge proposicional** $\mathcal{L}$ està format pel següent vocabulari:

- Un conjunt X de variables proposicionals, generalment numerable.
- Un conjunt de connectives $C = \{c_i : i \in I\}$, generalment finit.

Definició 2.1. *Es defineix per recursió el conjunt de **fórmules proposicionals** o **proposicions** d'un llenguatge proposicional $\mathcal{L}$, denotat per $Prop_{\mathcal{L}}(X)$, de la manera següent:*

- $\varphi \in X$ *implica* $\varphi \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$
- *Per cada connectiva $c \in C$ amb arietat n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$ implica $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$*

Com que $Prop_{\mathcal{L}(X)}$ està definit per recursió, tenim un **principi d'inducció** per a fórmules proposicionals:
Sigui P una propietat tal que:

- Tota variable proposicional satisfà P.
- Per cada connectiva $c \in C$ amb arietat n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ satisfan la propietat P implica $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ satisfà la propietat P.

aleshores tota fórmula proposicional satisfà la propietat P.

Definició 2.2. *Una **substitució** és una aplicació $\sigma : Prop_{\mathcal{L}}(X) \longrightarrow Prop_{\mathcal{L}}(X)$ tal que per tota connectiva $c \in C$, amb arietat n, i per totes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$*

$$\sigma(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = c(\sigma(\varphi_1), \ldots, \sigma(\varphi_n))$$

Definició 2.3. *Una relació*

$$\rhd \subseteq \mathcal{P}(Prop_{\mathcal{L}}(X)) \times Prop_{\mathcal{L}}(X)$$

*és **relació de conseqüència** sobre $Prop_{\mathcal{L}}(X)$ si per tot $\Sigma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$.*

1. $\varphi \in \Sigma$ *implica* $\Sigma \rhd \varphi$ (axioma)
2. $\Sigma \rhd \varphi$ *i* $\Sigma \subseteq \Delta$ *implica* $\Delta \rhd \varphi$ (monotonia)
3. $\Sigma \rhd \varphi$ *i* $\Delta \rhd \psi$ *per tota* $\psi \in \Sigma$ *implica* $\Delta \rhd \varphi$ (tall)

Definició 2.4. *Una relació $\rhd$ és **estructural** si $\rhd$ és una relació de conseqüència sobre $Prop_{\mathcal{L}}(X)$ i per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$ es compleix*

4. *$\Sigma \rhd \varphi$ i σ és una substitució implica $\sigma[\Sigma] \rhd \sigma(\varphi)$*

Definició 2.5. *Una relació de conseqüència estructural $\rhd$ sobre $Prop_{\mathcal{L}}(X)$ és **finitària** si per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$ es compleix*

5. *$\Sigma \rhd \varphi$ aleshores existeix $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finit tal que $\Sigma_0 \rhd \varphi$*

Definició 2.6. *Una **lògica** és una parella $(Prop_{\mathcal{L}}(X), \rhd)$, on $\rhd$ és relació de conseqüència estructural sobre $Prop_{\mathcal{L}}(X)$.*

Definició 2.7. *Es diu que $\varphi \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$ és un **teorema** a $(Prop_{\mathcal{L}}(X), \rhd)$ si $\emptyset \rhd \varphi$.*

Notació 1. *Fem servir $\rhd\varphi$ per denotar $\emptyset \rhd \varphi$.*

Definició 2.8. *Sigui $\Sigma \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$. Es diu que Σ és una **teoria** de $(Prop_{\mathcal{L}}(X), \rhd)$ si per tota $\varphi \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$*

$$\Sigma \rhd \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$$

Definició 2.9. *Sigui $\Sigma \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$. Es defineix la **teoria de** Σ com*

$$Th(\Sigma) := \{\varphi \in \Sigma : \Sigma \rhd \varphi\}$$

Observació 2.10. La teoria d'un conjunt és teoria.

Definició 2.11. *Un conjunt $\Sigma \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$ és **inconsistent** a $(Prop_{\mathcal{L}}(X), \rhd)$ si $\Sigma \rhd \varphi$ per tota $\varphi \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$.*

Definició 2.12. *Sigui $\Sigma \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$. Es diu que Σ és **consistent** si no és inconsistent.*

Definició 2.13. *Un **càlcul** és un conjunt de regles de formació*

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

Definició 2.14. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\mathcal{L}}(X)$. Una **demostració** de φ a partir de Σ és una n-pla $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$, $\varphi_i \in Prop_{\mathcal{L}}(X)$, $n \geq 1$, on $\varphi_n = \varphi$ i tal que per tot $1 \leq i \leq n$ o bé $\varphi_i \in \Sigma$ o bé φ_i s'obté d'anteriors a partir de regles del càlcul.*

2.2 Lògica clàssica

Un **llenguatge proposicional clàssic** té com a connectives primitives:

- la connectiva monària $\neg$
- la connectiva binària $\rightarrow$

Notació 2. *Denotarem el conjunt de fórmules d'un llenguatge proposicional clàssic per* $Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$.

Notació 3. *Donades* $\varphi, \psi \in Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$, $p \in X$ *es defineixen les connectives següents:*

- $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \rightarrow \psi$
- $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\perp := \neg(p \rightarrow p)$

Càlcul Hilbert clàssic

Hi ha diferents tipus de càlcul per estudiar la part sintàctica de la lògica. En aquest treball utilitzarem només el càlcul tipus Hilbert. Definirem una sola regla, *Modus Ponens* (abreviat MP), i quatre axiomes, que s'han d'interpretar com una regla sense premisses. Així doncs, el càlcul Hilbert clàssic es defineix:

Axiomes:
Ax 1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
Ax 2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
Ax 3 $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
Ax 4 $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

Regla:
$\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ (Modus Ponens)

Definició 2.15. *Donat un conjunt de fórmules* $\Sigma \subseteq Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$, *es diu que una fórmula* $\varphi \in Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$ *es* ***dedueix*** *de* Σ *pel càlcul Hilbert, denotat per* $\Sigma \vdash \varphi$, *si existeix una demostració de* φ *a partir de* Σ.

Proposició 2.16. $(Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X), \vdash)$ *és una lògica*

Demostració. Comprovem les quatre propietats de la definició de conseqüència estructural:
(Axioma) Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$. Si $\varphi \in \Sigma$, $\langle\varphi\rangle$ és una demostració de φ a partir de Σ a $\vdash$, per tant $\Sigma \vdash \varphi$.

(Monotonia) Siguin $\Sigma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$ tals que $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Sigma \subseteq \Delta$. Com que $\Sigma \vdash \varphi$, existeix una demostració de φ a partir de Σ, $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$, tal que cada φ_i o bé s'obté d'anteriors a partir de MP, o bé $\varphi_i \in \Sigma$, o bé és instància d'un axioma del càlcul. Com que $\Sigma \subseteq \Delta$, $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una demostració de φ a partir de Δ, per tant, $\Delta \vdash \varphi$.
(Tall) Siguin $\Sigma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$ tals que $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Delta \vdash \psi$ per cada $\psi \in \Sigma$. Aleshores es té $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ una demostració de φ a partir de Σ i per cada $\psi_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq m$, que apareix en la demostració $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$, existeix $\langle \psi_1^i, \ldots, \psi_{n_i}^i \rangle$ una demostració de ψ_i a partir de Δ. Per tant $\langle \psi_1^1, \ldots, \psi_{n_1}^1, \ldots, \psi_1^m, \ldots, \psi_{n_m}^m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una demostració de φ a partir de Δ.
(Substitució) Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$ i σ una substitució. Com que $\Sigma \vdash \varphi$, existeix una demostració de φ a partir de Σ, $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$, tal que cada φ_i o bé s'obté d'anteriors a partir de MP, o bé $\varphi_i \in \Sigma$, o bé és instància d'un axioma del càlcul. Si $\varphi \in \Sigma$, clarament $\sigma(\varphi) \in \sigma(\Sigma)$. Si φ_i és instància d'un axioma, $\sigma(\varphi_i)$ també ho és. Si φ_i s'obté d'anteriors fent MP, existeixen $j, k < i$ tals que $\Sigma \vdash \varphi_j$, $\Sigma \vdash \varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$. Per HI, $\sigma(\Sigma) \vdash \sigma(\varphi_j)$, $\sigma(\Sigma) \vdash \sigma(\varphi_j \to \varphi_i)$, és a dir, $\sigma(\Sigma) \vdash \sigma(\varphi_j) \to \sigma(\varphi_i)$. Per tant, per MP, $\sigma(\Sigma) \vdash \sigma(\varphi)$.

Proposició 2.17. $\vdash$ *és finitària.*

Demostració. Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$. Si $\Sigma \vdash \varphi$, existeix una demostració de φ a partir de Σ, $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$. Aleshores, prenent $\Sigma_0 = \Sigma \cap \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, Σ_0 és finit i $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Proposició 2.18. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$.

$$\Sigma \text{ és inconsistent a } (Prop_{\{\neg,\to\}}(X), \vdash) \Leftrightarrow \Sigma \vdash \bot$$

Demostració. $\Rightarrow$) Per tota $\varphi \in Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$, $\Sigma \vdash \varphi$. En particular $\Sigma \vdash \bot$.
$\Leftarrow$) Per definició de $\bot$, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$. Fent servir MP i aplicant l'axioma 3 tenim $\Sigma \vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$. Com que $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, aplicant MP tenim $\Sigma \vdash \varphi$.

Semàntica bivalorada

Definició 2.19. *Una* ***assignació*** *és una aplicació*

$$I_x : X \longrightarrow \{0,\ 1\}$$

Tota assignació es pot estendre de manera única per recursió a una aplicació

$$I : Prop_{\{\neg,\to\}}(X) \longrightarrow \{0,\ 1\}$$

tal que

- $I(x) = I_x(x)$ *per tota* $x \in X$.
- $I(\neg\varphi) = 1 - I(\varphi)$ *per tota* $\varphi \in Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$.
- $I(\varphi \to \psi) = max\{1 - I(\varphi), I(\psi)\}$ *per totes* $\varphi, \psi \in Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$.

que s'anomena ***interpretació***.

Definició 2.20. *Sigui* $\varphi \in Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$.

- *Es diu que* φ *és una* ***tautologia*** *si per tota interpretació* I *és té* $I(\varphi) = 1$.
- *Es diu que* φ *és una* ***contradicció*** *si per tota interpretació* I *és té* $I(\varphi) = 0$.
- *Es diu que* φ *és* ***satisfactible*** *si existeix una interpretació* I *tal que* $I(\varphi) = 1$.

Definició 2.21. *Es diu que* $\varphi, \psi \in Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$ *són* ***equivalents****, denotat per* $\varphi \equiv \psi$ *si per tota interpretació* I *és té* $I(\varphi) = I(\psi)$.

Observació 2.22. Totes les tautologies són equivalents. Totes les contradiccions són equivalents.

Definició 2.23. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$. *Es diu que* φ *és* ***conseqüència lògica*** *de* Σ*, denotat per* $\Sigma \vDash \varphi$ *si per tota interpretació* I*,* $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$ *implica* $I(\varphi) = 1$.

Observació 2.24. Es pot veure que $(Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X), \vDash)$ és una lògica.

Teorema 2.25. *(Completesa) Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\neg,\rightarrow\}}(X)$.

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash \varphi$$

Demostració. Es pot trobar la demostració del teorema de completesa per a lògica clàssica al llibre *Introduction to Mathematical Logic* [5].

2.3 Lògiques modals i lògiques normals

Un **llenguatge modal proposicional** té com a connectives primitives $\neg$ i $\to$, i l'operador modal $\Box$.

Notació 4. *Denotarem el conjunt de fórmules d'un llenguatge proposicional modal per* $Prop_{\Box}(X)$.

Observació 2.26. El llenguatge modal proposicional és una extensió del clàssic, és a dir, $Prop_{\{\neg,\to\}}(X) \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

Notació 5. *Donada* $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$ *es defineix*

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$$

De la mateixa manera que al llenguatge proposicional clàssic, es poden definir les connectives $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ *i* $\perp$.

Definició 2.27. *Una* ***lògica proposicional modal*** *és una parella* $(Prop_{\Box}(X), \rhd)$, *on* $\rhd$ *és relació de conseqüència estructural a* $Prop_{\Box}(X)$.

Definició 2.28. *Una* ***lògica modal normal*** *és una lògica modal* $(Prop_{\Box}(X), \rhd)$ *tal que:*

- *Per tota tautologia clàssica* φ *es té* $\rhd\varphi$.
- *Està tancada sota Modus Ponens, és a dir, per qualssevol* $\varphi, \psi \in Prop_{\Box}(X)$ *es compleix* $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \rhd \psi$.
- *Per qualssevol* $\varphi, \psi \in Prop_{\Box}(X)$ *es compleix* $\rhd\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.
- *Per qualsevol* $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$, *si* $\rhd\varphi$ *aleshores* $\rhd\Box\varphi$.

3 Semàntica de Kripke

Hem vist que a la lògica clàssica es fa servir la noció d'interpretació per tractar la relació de conseqüència des d'un punt de vista semàntic. A la lògica modal hi ha dos tipus d'interpretació: local i global. Per tractar-los parlem de marcs i models de Kripke. Un marc és un conjunt d'estats o mons relacionats. Un model és un conjunt de mons relacionats en què podem determinar si una fórmula és vàlida en cada món.

3.1 Marcs i models de Kripke

Definició 3.1. *Un **marc de Kripke** és una parella $\mathcal{M} = \langle W, R \rangle$ tal que W és un conjunt no buit i R és una relació binària a W.*

Definició 3.2. *Un **model de Kripke** és una terna $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ tal que $\langle W, R \rangle$ és un marc de Kripke i V és una aplicació*

$$V : X \longrightarrow \mathcal{P}(W)$$

és a dir, és una aplicació que assigna a cada lletra proposicional de X un subconjunt de W.

A continuació, donats un model de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, un món $\alpha \in W$ i $\varphi \in Prop_\Box(X)$, definirem recursivament la noció que φ és **veritat** a α en $\mathcal{M}$, denotat per $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.

Definició 3.3. *Donats un model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, $\alpha \in W$ i $\varphi \in Prop_\Box(X)$:*

- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash x \Leftrightarrow \alpha \in V(x)$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ *implica* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow$ *per tot* $\beta \in W$, *si* $\alpha R \beta$ *aleshores* $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \nVdash \varphi$

Notació 6. *Farem servir*

- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ *per denotar que per a tot* $\alpha \in W$ *es té* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$ *per denotar que per a cada* $\psi \in \Sigma$ *es té* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$.

3.2 Conseqüència lògica

Definició 3.4. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$. Es diu que φ és* ***conseqüència local*** *de Σ, denotat per $\Sigma \vDash_l \varphi$, si per a tot model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ i tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.*

Observació 3.5. El concepte d'interpretació ve donat per $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ i $\alpha \in W$.

Definició 3.6. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$. Es diu que φ és* ***conseqüència global*** *de Σ, denotat per $\Sigma \vDash_g \varphi$, si per a tot model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$ implica $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.*

Observació 3.7. El concepte d'interpretació ve donat per $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$.

Proposició 3.8. *$\vDash_l$ és relació de conseqüència estructural a $Prop_\Box(X)$.*

Demostració. Siguin $\Sigma, \Delta\{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$. Comprovem les quatre propietats de conseqüència estructural.
(Axioma) Suposem que $\varphi \in \Sigma$. Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un model i $\alpha \in W$ tals que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$, és a dir, per tot $\psi \in \Sigma$ es té $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$. En particular, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, per tant $\Sigma \vDash_l \varphi$.
(Monotonia) Suposem que $\Sigma \vDash_l \varphi$ i que $\Sigma \subseteq \Delta$. Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un model i $\alpha \in W$ tals que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Delta$, és a dir, per tot $\psi \in \Delta$ es té $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$. Com que $\Sigma \subseteq \Delta$, per tot $\psi \in \Sigma$ es té $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$, és a dir, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$. Llavors $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Per tant, $\Delta \vDash_l \varphi$.
(Tall) Suposem que $\Sigma \vDash_l \varphi$ i que $\Delta \vDash_l \psi$ per tota $\psi \in \Sigma$. Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un model i $\alpha \in W$ tals que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Delta$. Aleshores $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ per tota $\psi \in \Sigma$, és a dir, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$. Per tant, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Per tant, $\Delta \vDash_l \varphi$.
(Estructural) Suposem que $\Sigma \vDash_l \varphi$. Siguin σ una substitució, $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un model i $\alpha \in W$. Suposem $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \sigma(\Sigma)$. Considerem el model $\mathcal{M}' = \langle W, R, V'\rangle$, on $V'(x) = \{\alpha : \mathcal{M}, \alpha \Vdash \sigma(x)\}$ per tot $x \in X$. Per tot $\beta \in W$ es té $\mathcal{M}', \beta \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \beta \Vdash \sigma(\varphi)$. Vegem-ho per inducció:
Si $\varphi \in X$, $\varphi = x$, $(\mathcal{M}', \beta \Vdash x) \Leftrightarrow (\beta \in V'(x) = \{\alpha : \mathcal{M}, \alpha \Vdash \sigma(x)\}) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \beta \Vdash \sigma(x))$.
Si $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, $(\mathcal{M}', \beta \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2) \Leftrightarrow (\mathcal{M}', \beta \Vdash \varphi_1$ implica $\mathcal{M}', \beta \Vdash \varphi_2) \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M}, \beta \Vdash \sigma(\varphi_1)$ implica $\mathcal{M}, \beta \Vdash \sigma(\varphi_2)) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \beta \Vdash \sigma(\varphi_1 \to \varphi_2))$.
Si $\varphi = \neg\psi$, $(\mathcal{M}', \beta \Vdash \neg\psi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}', \beta \nVdash \psi) \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M}, \beta \nVdash \sigma(\psi)) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \beta \Vdash \neg\sigma(\psi)) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \beta \Vdash \sigma(\neg\psi))$.
Si $\varphi = \Box\psi$, $(\mathcal{M}', \beta \Vdash \Box\psi) \Leftrightarrow$ (per tot $\gamma \in W$ tal que $\beta R \gamma$, $\mathcal{M}', \gamma \Vdash \psi) \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow}$ (per tot $\gamma \in W$ tal que $\beta R \gamma$, $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \sigma(\psi)) \Leftrightarrow \mathcal{M}, \gamma \Vdash \Box\sigma(\psi)) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \gamma \Vdash \sigma(\Box\psi))$.
Com que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \sigma(\Sigma)$, pel que acabem de demostrar, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \Sigma$. Com que $\Sigma \vDash_l \varphi$, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \varphi$, per tant $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \sigma(\varphi)$.

Proposició 3.9. *$\vDash_g$ és relació de conseqüència estructural a $Prop_\Box(X)$.*

Demostració. La demostració és anàloga a la de conseqüència local.

Corol·lari 3.10. *$(Prop_\Box(X), \vDash_l)$ i $(Prop_\Box(X), \vDash_g)$ són lògiques proposicionals modals.*

A continuació, veurem una sèrie de resultats que ens permetran demostrar que $(Prop_{\Box}(X), \vDash_l)$ i $(Prop_{\Box}(X), \vDash_g)$ són lògiques modals normals.

Proposició 3.11. *Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ un model, $\alpha \in W$ i $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$. Definim l'assignació*

$$I_x^{\alpha} \colon X \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$\varphi \longmapsto I_x^{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathcal{M}, \alpha \Vdash x \\ \\ 0 \text{ si } \mathcal{M}, \alpha \nVdash x \end{cases}$$

aleshores la interpretació I^{α} compleix $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ si, i només si, $I^{\alpha}(\varphi) = 1$.

Demostració. Fem inducció sobre la fórmula φ:
Si $\varphi = x \in X$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash x \Leftrightarrow I^{\alpha}(\varphi) = 1$.
Si $\varphi = \neg\psi$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \nVdash \psi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} I^{\alpha}(\psi) = 0 \Leftrightarrow I^{\alpha}(\neg\psi) = 1$.
Si $\varphi = \psi \to \chi$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \to \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} I^{\alpha}(\psi) = 1$ implica $I^{\alpha}(\chi) = 1 \Leftrightarrow I^{\alpha}(\psi \to \chi) = 1$.

Proposició 3.12. *Sigui $\varphi \in Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$. Si φ és una tautologia clàssica, $\vDash_l \varphi$.*

Demostració. Immediat de la proposició 3.11.

Corol·lari 3.13. *Sigui $\varphi \in Prop_{\{\neg,\to\}}(X)$. Si φ és una tautologia clàssica, $\vDash_g \varphi$.*

Proposició 3.14. *Per tota $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$,*

$$\vDash_l \varphi \Leftrightarrow \vDash_g \varphi$$

Demostració. $\vDash_l \varphi \Leftrightarrow$ per tot model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ i per tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ $\Leftrightarrow$ per tot model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, $\mathcal{M} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash_g \varphi$.

Notació 7. *Fem servir $\vDash$ per denotar que es dona tant $\vDash_l$ com $\vDash_g$.*

Proposició 3.15. *Per totes $\varphi, \psi \in Prop_{\Box}(X)$,*

$$\vDash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

Demostració. Per la proposició 3.14 és equivalent demostrar-ho en el local o en el global. Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ un model i $\alpha \in W$ qualssevol. Suposem que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box(\varphi \to \psi)$ (1) i que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi$ (2). Sigui $\beta \in W$ tal que $\alpha R \beta$. Per (2) tenim $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$. Per (1) és té que per tot $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$. Llavors tenim $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$. Per tant, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi$.

Proposició 3.16. *Per tota $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$,*

$$\vDash_l \varphi \textit{ implica } \vDash_l \Box\varphi$$

Demostració. Sigui $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ un model. Suposem que $\vDash_l \varphi$, és a dir, que per tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Volem veure que $\vDash_l \Box\varphi$, és a dir, que per tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi$, és a dir, que per tot $\alpha \in W$ i per tot $\beta \in W$ amb $\alpha \in \beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$. Com que per tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, en particular també es compleix pels β tals que $\alpha R \beta$.

Proposició 3.17. *Per tota* $\varphi \in Prop_\Box(X)$,

$$\{\varphi\} \vDash_g \Box\varphi$$

Demostració. Sigui $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un model. $\varphi \vDash_g \Box\varphi$ si, i només si, si per tot $\alpha \in W$ $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, llavors per tot $\gamma \in W$ $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \Box\varphi$, és a dir, per tot $\gamma \in W$ i per tot $\beta \in W$ amb $\gamma R\beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$. Sigui $\gamma \in W$ qualsevol i considerem $\beta \in W$ tal que $\gamma R\beta$. Com que $\beta \in W$ i per tot $\alpha \in W$ tenim $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, en particular, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$. Per tant tenim $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \Box\varphi$.

Corol·lari 3.18. *Per tota* $\varphi \in Prop_\Box(X)$,

$$\vDash_g \varphi \textit{ implica } \vDash_g \Box\varphi$$

Corol·lari 3.19. $(Prop_\Box(X), \vDash_l)$ *i* $(Prop_\Box(X), \vDash_g)$ *són lògiques modals normals.*

Proposició 3.20. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$.

$$\Sigma \vDash_l \varphi \textit{ implica } \Sigma \vDash_g \varphi$$

Demostració. Sigui $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ és un model tal que $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$. Llavors per tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$. Com que $\Sigma \vDash_l \varphi$, per tot $\alpha \in W$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Llavors $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

Tanmateix, $\Sigma \vDash_g \varphi$ no implica $\Sigma \vDash_l \varphi$. Per exemple, es té

$$\varphi \nvDash_l \Box\varphi$$

En efecte, si prenem $p \in X$ qualsevol podem veure que $p \nvDash_l \Box p$. Considerem el model $\mathcal{M} = \langle\{\alpha, \beta\}, \{(\alpha, \beta)\}, V\rangle$, on $V(p) = \{\alpha\}$ i $V(x) = \emptyset$ per tot $x \in X\backslash\{p\}$. Per definició del model, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash p$. Tanmateix, $\alpha R\beta$ i $\mathcal{M}, \beta \nVdash p$, per tant, $\mathcal{M}, \alpha \nVdash \Box p$.

3.3 Submodels generats

En aquesta secció definirem un tipus de models que serviran per obtenir la relació que hi ha entre la conseqüència global i local.

Definició 3.21. *Sigui* $\langle W, R\rangle$ *un marc i* n *un nombre natural. Es defineix* R^n *recursivament:*

- $R^0 = id_W$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

Observació 3.22. $aR^nb \Leftrightarrow$ existeixen $c_1, ..., c_{n-1} \in W$ tals que $aRc_1R\cdots Rc_{n-1}Rb$.

Definició 3.23. *Sigui* $\varphi \in Prop_\Box(X)$ *i* $n \in \omega$. *Es defineix* $\Box^n\varphi$ *recursivament:*

- $\Box^0\varphi = \varphi$
- $\Box^{n+1}\varphi = \Box(\Box^n\varphi)$

Definició 3.24. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

- $\Box^{\omega}\varphi := \{\Box^n\varphi : n \in \omega\}$
- $\Box^{\omega}\Sigma := \bigcup_{\psi\in\Sigma} \Box^{\omega}\psi = \{\Box^n\psi : n \in \omega \text{ i } \psi \in \Sigma\}$

Lema 3.25. *Siguin* $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$, $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *un model de Kripke i* $\alpha \in W$.

$$\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box^n\varphi \Leftrightarrow \textit{ per tot } \beta \in W, \textit{ si } \alpha R^n\beta,\ \mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$$

Demostració. Fem inducció sobre n:
El cas inicial $n = 0$ és immediat, ja que $\Box^0\varphi = \varphi$ i $R^0 = id_W$.
Suposem doncs que la propietat és certa fins n. $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box^{n+1}\varphi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\Box^n\varphi)$ $\Leftrightarrow$ (per tot $\beta \in W$ tal que $\alpha R\beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \Box^n\varphi$) $\overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow}$ (per tot $\beta \in W$ tal que $\alpha R\beta$ i per tot $\gamma \in W$ tal que $\beta R^n\gamma$, $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \varphi$) $\Leftrightarrow$ (per tot $\gamma \in W$ tal que $\alpha R^{n+1}\gamma$, $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \varphi$).

Definició 3.26. *Sigui* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *un model. Es diu que* $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ *és un* ***submodel generat*** *de* $\mathcal{M}$ *si*

1. $W' \subseteq W$ *i W' és tancat R, és a dir, per tot* $a, b \in W$ *si* aRb *i* $a \in W'$ *aleshores* $b \in W'$.
2. $R' = R \cap (W' \times W')$
3. $V'(x) = V(x) \cap W'$ *per tot* $x \in X$

Observació 3.27. Si $W' \subseteq W$ i W' és tancat per R, W' també és tancat per la clausura transitiva de R, és a dir, per tot $a, b \in W$ i per tot $n \in \omega$, aR^nb i $a \in W'$ implica $b \in W'$.

Proposició 3.28. *Sigui* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *un model de Kripke i* $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ *un submodel generat de M. Per tot* $\alpha \in W'$ *es compleix que per tota* $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$

$$\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}', \alpha \Vdash \varphi$$

Demostració. Sigui $\alpha \in W'$ i $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$. Fem inducció sobre φ:
Si $\varphi = x \in X$, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash x \Leftrightarrow \alpha \in V'(x) = V(x) \cap W' \overset{\alpha\in W'}{\Longleftrightarrow} \alpha \in V(X) \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash x$.
Si $\varphi = \neg\psi$, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \neg\psi \Leftrightarrow \mathcal{M}', \alpha \nVdash \psi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}, \alpha \nVdash \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\psi$.
Si $\varphi = \psi \to \chi$, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \psi \to \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}', \alpha \Vdash \psi$ implica $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \to \chi$.
Si $\varphi = \Box\psi$,
$\Rightarrow$) Sigui $\beta \in W$ tal que $\alpha R\beta$. Com que $\alpha \in W'$ i $\alpha R\beta$, aleshores $\alpha R'\beta$ i $\beta \in W'$. Com que $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \Box\psi$, $\mathcal{M}', \beta \Vdash \psi$. Per HI, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$, per tant $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\psi$.
$\Leftarrow$) Sigui $\beta \in W'$ tal que $\alpha R'\beta$. Com que $\alpha R'\beta$, $\alpha R\beta$. Com que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\psi$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$. Llavors, per HI $\mathcal{M}', \beta \Vdash \psi$. Per tant $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \Box\psi$.

Proposició 3.29. *Per tot* $\Sigma \subseteq Prop_\Box(X)$,

$$\Sigma \vDash_g \Box^\omega \Sigma$$

Demostració. Immediat de la proposició 3.17 i de la propietat del tall de conseqüència estructural.

Finalment, obtenim que $\vDash_g$ es pot interpretar dins de $\vDash_l$ de la següent manera:

Teorema 3.30. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$.

$$\Sigma \vDash_g \varphi \Leftrightarrow \Box^\omega \Sigma \vDash_l \varphi$$

Demostració. $\Leftarrow$) Si $\Box^\omega\Sigma \vDash_l \varphi$, per la proposició 3.20, $\Box^\omega\Sigma \vDash_g \varphi$. Per la proposició 3.29 i la propietat del tall de $\vDash_g$, $\Sigma \vDash_g \varphi$.
$\Rightarrow$) Pel contrarecíproc. Suposem que $\Box^\omega\Sigma \nvDash_l \varphi$. Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un model i $\alpha \in W$ tals que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box^\omega\Sigma$ i $\mathcal{M}, \alpha \nVdash \varphi$.
Sigui $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ tal que:

- $W' = [[\alpha]] = \{\beta \in W : \alpha R^n \beta$ per algun $n \in \omega\}$
- $R' = R \cap [[\alpha]]^2 = R \cap (W' \times W')$
- $V'(x) = V(x) \cap [[\alpha]] = V(x) \cap W'$ per tot $x \in X$

Observem que donats $\gamma, \delta \in W$ tals que $\gamma \in [[\alpha]]$, si $\gamma R \delta$ aleshores, com que $\gamma \in [[\alpha]]$, $\alpha R^n \gamma$. Com que $\gamma R \delta$, $\alpha R^{n+1} \delta$ per tot $\delta \in [[\alpha]]$. En conseqüència, $[[\alpha]]$ és tancat per R i, per tant, $\mathcal{M}'$ és submodel generat de $\mathcal{M}$.
Com que $\mathcal{M}'$ és submodel generat de $\mathcal{M}$, per la proposició 3.28, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \Box^\omega\Sigma$ i $\mathcal{M}', \alpha \nVdash \varphi$. Siguin $\psi \in \Sigma$ i $\beta \in W'$. Per tot $\beta \in W'$, existeix un $n \in \omega$ tal que $\alpha R^n \beta$. Com que $\Box^n\psi \in \Box^n\Sigma$, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \Box^n\psi$. Llavors, pel lema 3.25, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$. Per tant, $\mathcal{M}', \beta \Vdash \Sigma$ per tot $\beta \in W'$. Llavors $\mathcal{M}' \Vdash \Sigma$. Com que $\mathcal{M}', \alpha \nVdash \varphi$, $\mathcal{M}' \nVdash \varphi$. Per tant, $\Sigma \nvDash_g \varphi$.

4 Càlcul Hilbert per a la lògica K

Definim ara dos càlculs que pretenen ser complets respecte les lògiques

$$(Prop_{\Box}(X), \models_l) \text{ i } (Prop_{\Box}(X), \models_g)$$

presentades al capítol anterior.

Càlcul Hilbert local $\vdash_{lK}$

Axiomes:
Ax 1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
Ax 2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
Ax 3 $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
Ax 4 $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Axioma de normalitat $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Regles:
$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ (Modus Ponens) $\qquad \dfrac{\vdash_{lK} \varphi}{\vdash_{lK} \Box\varphi}$ (Necessitat Restringida)

Observació 4.1. La regla de necessitat restringida s'ha d'interpretar com

$$\vdash_{lK} \varphi \Rightarrow \vdash_{lK} \Box\varphi$$

Càlcul Hilbert global $\vdash_{gK}$

Axiomes:
Ax 1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
Ax 2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
Ax 3 $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
Ax 4 $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Axioma de normalitat $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Regles:
$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ (Modus Ponens) $\qquad \dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$ (Necessitat)

Observació 4.2. L'aplicació de la regla de necessitat restringida és un cas particular de l'aplicació de la regla de necessitat.

Proposició 4.3. *$(Prop_\Box(X), \vdash_{lK})$ i $(Prop_\Box(X), \vdash_{gK})$ són lògiques modals normals finitàries.*

Demostració. Les demostracions que $\vdash_{lK}$ i $\vdash_{gK}$ són relacions de conseqüència estructural fintàries són anàlogues a les de les proposicions 2.16 i 2.17. Que les lògiques modals $(Prop_\Box(X), \vdash_{lK})$ i $(Prop_\Box(X), \vdash_{gK})$ són normals, és immediat del teorema de completesa per a la lògica clàssica i la definició dels càlculs.

Observació 4.4. $(Prop_\Box(X), \vdash_{lK})$ és la lògica modal normal més petita, és a dir,

$$\Sigma \vdash_{lK} \varphi \Rightarrow \Sigma \rhd \varphi \text{ per qualsevol lògica modal normal } (Prop_\Box(X), \rhd)$$

4.1 Propietats de $\vdash_{lK}$

Teorema 4.5. (Teorema de deducció, TD) *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop_\Box(X)$.*

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{lK} \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \psi$$

Demostració. $\Leftarrow$) Suposem $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \psi$. Per la propietat axioma de conseqüència estructural, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{lK} \varphi$. Per monotonia, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{lK} \varphi \to \psi$. Aplicant la regla MP, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{lK} \psi$.
$\Rightarrow$) Suposem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{lK} \psi$. Si $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ una demostració (a $\vdash_{lK}$) de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$, aleshores $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_i$ per tot $k = 1, \ldots, n$. Vegem-ho per inducció completa sobre k:
Considerem el cas inicial $k = 1$. Aleshores $\psi = \varphi_1$. Si $\varphi_1 \in \Sigma \cup \{\varphi\}$ o bé $\varphi_1 = \varphi$, o bé φ_1 és instància d'un axioma, o bé $\varphi_1 \in \Sigma$.
Si φ_1 és instància d'un axioma o $\varphi_1 \in \Sigma$ es té $\Sigma \vdash_{lK} \varphi_1$, aplicant MP a la instància de l'axioma 2 $\varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1)$, obtenim $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_1$.
Si $\varphi_1 = \varphi$,
1 $\quad \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \quad$ *(Ax 1)*
2 $\quad (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)) \quad$ *(Ax 2)*
3 $\quad (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi) \quad$ *(MP 1,2)*
4 $\quad \varphi \to (\varphi \to \varphi) \quad$ *(Ax 1)*
5 $\quad \varphi \to \varphi \quad$ *(MP 3,4)*
Per tant, $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi$.
Suposem ara que per tot $k \leq n$ es té $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_{k-1}$. Anem a veure que $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_k$. Sigui $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle$ una demostració de φ_k a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$.
Si $\varphi_k \in \Sigma \cup \{\varphi\}$ o φ_k és instància d'un axioma del càlcul, la demostració és anàloga al cas inicial concatenant demostracions.
Si φ_k s'obté d'anteriors per MP, existeixen φ_i, φ_j, $i, j < k$, tals que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$. Es té $\Sigma \vdash_{lK} (\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_k)) \to ((\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \varphi_k))$ per l'axioma 2 del càlcul. Per hipòtesi, $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_j$ i $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_i$. Aplicant MP dues vegades obtenim $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_k$.
Si φ_k s'obté per l'aplicació de la regla de necessitat restringida, existeix $i < k$ tal que $\Box\varphi_i = \varphi_k$ i $\vdash_{lK} \varphi_i$. Llavors $\vdash_{lK} \Box\varphi_i = \varphi_k$, per monotonia $\Sigma \vdash_{lK} \varphi_k$. Aplicant MP amb la instància de l'axioma 1 $\varphi_k \to (\varphi \to \varphi_k)$, s'obté $\Sigma \vdash_{lK} \varphi \to \varphi_k$.

Teorema 4.6. (Teorema de reducció a l'absurd, TRA) *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \vdash_{IK} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \textit{ és inconsistent.}$$

Demostració. $\Rightarrow$) Com que $\Sigma \vdash_{IK} \varphi$, per monotonia $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{IK} \varphi$. Per la propietat axioma de conseqüència estructural, com que $\Sigma \vdash_{IK} \varphi$, per monotonia $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{IK} \varphi$. Per l'axioma 3, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{IK} \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$. Per tant, aplicant MP dues vegades, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{IK} \psi$. Com que ψ és arbitrària, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ és inconsistent.
$\Leftarrow$) Si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ és inconsistent, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{IK} \varphi$. Pel TD (4.5) $\Sigma \vdash_{IK} \neg\varphi \to \varphi$. Aplicant MP amb l'axioma 4, $\Sigma \vdash_{IK} \varphi$.

Notació 8. *Totes les propietats que segueixen són per a* $\vdash_{IK}$. *Farem servir* $\vdash$ *per denotar* $\vdash_{IK}$.

Proposició 4.7. *Sigui* $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$. $\{\varphi, \neg\varphi\}$ *és inconsistent.*

Demostració. Per la propietat axioma de conseqüència estructural $\{\varphi\} \vdash \varphi$. Pel TRA (4.6) $\{\varphi, \neg\varphi\}$ és inconsistent.

Proposició 4.8. *Sigui* $\varphi \in Prop_{\Box}(X)$.

$$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \textit{ i } \{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$$

Demostració. Fent servir el mateix argument que a la proposició 4.7, tenim que $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$ és inconsistent. Llavors pel TRA (4.6) tenim $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$.
Com que $\{\neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, pel TRA $\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\}$ és inconsistent. Pel TRA $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$.

Lema 4.9. *Siguin* $\varphi, \psi \in Prop_{\Box}(X)$.

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \textit{ i } \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$$

Demostració. El conjunt $\{\varphi, \neg\varphi\}$ és inconsistent per la proposició 4.7, per tant, $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\psi$. Pel TD (4.5) $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\psi$. Pel TRA (4.6), $\{\varphi, \neg(\varphi \to \neg\psi)\}$ és inconsistent. Altra vegada pel TRA, $\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\} \vdash \varphi$, és a dir, $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. Anàlogament, s'obté $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$.

Proposició 4.10. (Conjunció esquerra) *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$$

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi$. Tenim $\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \{\varphi, \psi\}$ pel lema 4.9. Per la propietat del tall de conseqüència estructural, $\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.
$\Leftarrow$) Com que el conjunt $\{\varphi, \psi, \varphi \to \neg\psi\}$ és inconsistent, llavors per la proposició 4.8 $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$ és inconsistent. Pel TRA (4.6) $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$. És a dir, hem vist $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$. Llavors, $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$. Fent servir la propietat del tall, ja tenim $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi$.

Proposició 4.11. (Conjunció dreta) *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \vdash \varphi \textit{ i } \Sigma \vdash \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$$

Demostració. $\Rightarrow$) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ per la propietat axioma de conseqüència estructural . Per la proposició 4.10, $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$. Com que $\Sigma \vdash \{\varphi, \psi\}$, per la propietat del tall de conseqüència estructural, $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$.
$\Leftarrow$) Pel lema 4.9, $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \{\varphi, \psi\}$. Com que $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$, per la propietat del tall $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Sigma \vdash \psi$.

Lema 4.12. *Siguin* $\varphi, \psi \in Prop_\Box(X)$.

$$\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi \; i \; \{\psi\} \vdash \varphi \vee \psi$$

Demostració. $\{\varphi, \neg\varphi\}$ és inconsistent per la proposició 4.7, per tant, $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$. Pel TD (4.5) $\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi =: \varphi \vee \psi$.
Per la propietat axioma de conseqüència estructural, $\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$. Pel TD (4.5) $\{\psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi =: \varphi \vee \psi$.

Proposició 4.13. (Prova per casos / disjunció esquerra)
Siguin $\Sigma \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq Prop_\Box(X)$.

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \; i \; \Sigma \cup \{\psi\} \vdash \chi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$$

Demostració. $\Leftarrow$) Pel lema 4.12 $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$, per monotonia. Per la propietat axioma, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \Sigma$. Per tant, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\}$. Com que $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$, per la propietat del tall $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$. Anàlogament, $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \chi$.
$\Rightarrow$) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \chi$, aplicant en els dos casos el TRA (4.6) obtenim $\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vdash \{\neg\varphi, \neg\psi\}$. Per la proposició 4.11, $\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$, per tant, $\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$. Aplicant dues vegades el TRA $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$.

4.2 Relació entre $\vdash_{lK}$ i $\vdash_{gK}$

Proposició 4.14. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$.

$$\Sigma \vdash_{lK} \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash_{gK} \varphi$$

Demostració. Com que l'aplicació de la regla de necessitat restringida de $\vdash_{lK}$ també és vàlida en una demostració a $\vdash_{gK}$, si $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ una demostració a $\vdash_{lK}$ de φ a partir de Σ, també és una demostració a $\vdash_{gK}$ de φ a partir de Σ.

Proposició 4.15. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$.

$$\Sigma \vdash_{lK} \varphi \Rightarrow \Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\varphi$$

Demostració. Sigui $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ una demostració de φ a partir de Σ. Demostrarem per inducció sobre la demostració per tot $1 \leq i \leq n$ és té $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\varphi_i$.
Si φ_i és instància d'axioma, es té $\vdash_{lK} \varphi_i$. Aplicant la regla de necessitat restringida, es té $\vdash_{lK} \Box\varphi_i$. Per tant, $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\varphi_i$.
Si $\varphi_i \in \Sigma$, per definició, $\Box\varphi_i \in \Box\Sigma$. Per la propietat axioma de conseqüència estructural, $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\varphi_i$.
Si φ_i s'obté per la regla de necessitat restringida, $\varphi_i = \Box\varphi_j$ per a $j < i$ tal que $\vdash_{lK} \varphi_j$. Llavors, $\vdash_{lK} \Box\varphi_j$, per tant, $\vdash_{lK} \Box\Box\varphi_j$. Per monotonia, $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\Box\varphi_j = \Box\varphi_i$.
Si φ_i s'obté d'anteriors per MP, existeixen $j, k < i$ tals que $\Sigma \vdash_{gK} \varphi_k$ i $\Sigma \vdash_{gK} \varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$. Per HI $\Box\Sigma \vdash_{gK} \Box\varphi_k$ (1) i $\Box\Sigma \vdash_{gK} \Box\varphi_j = \Box(\varphi_k \to \varphi_i)$ (2). Per l'axioma de normalitat es té $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box(\varphi_k \to \varphi_i) \to (\Box\varphi_k \to \Box\varphi_i)$. Aplicant MP amb (2) s'obté $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\varphi_k \to \Box\varphi_i$. Aplicant MP amb (1) s'obté $\Box\Sigma \vdash_{lK} \Box\varphi_i$.

Proposició 4.16. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop_{\Box}(X)$*. Llavors* $\Sigma \vdash_{gK} \Box^{\omega}\Sigma$*.*

Demostració. $\Sigma \vdash_{gK} \Box^{\omega}\Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{gK} \Box^{n}\varphi$ per tota $\varphi \in \Sigma$ per tot $n \in \omega$. Fem inducció sobre n:
Si n=0, $\Sigma \vdash_{gK} \varphi$ per la propietat del tall se conseqüència estructural.
Si $\Sigma \vdash_{gK} \Box^{n}\varphi$, aplicant la regla de necessitat tenim, $\Sigma \vdash_{gK} \Box(\Box^{n}\varphi) = \Box^{n+1}\varphi$.

Finalment $\vdash_{gK}$ és interpretable a $\vdash_{lK}$ de la següent manera:

Proposició 4.17. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$*.*

$$\Sigma \vdash_{gK} \varphi \Leftrightarrow \Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi$$

Demostració. $\Leftarrow$) Si $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi$, per la proposició 4.14 $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{gK} \varphi$. Aleshores, per la proposició 4.16 i de la propietat del tall de conseqüència estructural $\Sigma \vdash_{gK} \varphi$.
$\Rightarrow$) Si $\Sigma \vdash_{gK} \varphi$, existeix una demostració $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ de φ a partir de Σ a $\vdash_{gK}$. Cal veure que per cada $1 \leq i \leq n$ es té $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_i$.
Si φ_i és instància d'un axioma del càlcul $\vdash_{gK}$, també ho és del càlcul $\vdash_{lK}$. Per tant, $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_i$.
Si $\varphi_i \in \Sigma$, com que $\Sigma \subseteq \Box^{\omega}\Sigma$, $\varphi_i \in \Box^{\omega}\Sigma$. Per la propietat axioma de conseqüència estructural es té $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_i$.
Si φ_i s'obté d'anteriors per MP, existeixen $j, k < i$ tals que $\Sigma \vdash_{gK} \varphi_j$ i $\Sigma \vdash_{gK} \varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$. Per HI $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_j$ i $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_j \to \varphi_i$. Aplicant MP, $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_i$.
Si φ_i s'obté per la regla de necessitat, $\varphi_i = \Box\varphi_j$ per a $j < i$ i $\Sigma \vdash_{gK} \varphi_j$. Per HI, $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_j$. Per la proposició 4.15 tenim $\Box(\Box^{\omega}\Sigma) \vdash_{lK} \Box\varphi_j$, per tant, $\Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi_i$.

El teorema de deducció (4.5) que hem enunciat a $\vdash_{lK}$ no és vàlid a $\vdash_{gK}$, ja que, per exemple, per a $p \in X$,

$$p \vdash_{gK} \Box p, \text{ però } \nvdash_{gK} p \to \Box p$$

com es podrà comprovar més endavant. Tanmateix, tenim el següent teorema:

Teorema 4.18. (Teorema de deducció local) *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$*.*

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{gK} \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{gK} (\Box^0\varphi \wedge \Box^1\varphi \wedge \cdots \wedge \Box^n\varphi) \to \psi \textit{ per algun } n \in \omega$$

Demostració. $$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{gK} \psi$$
si, i només si, (per la proposició 4.17)

$$\Box^{\omega}\Sigma \cup \Box^{\omega}\{\varphi\} \vdash_{lK} \varphi$$

si, i només si, (per finitarietat de $\vdash_{lK}$)

$$\text{existeix } n \in \omega \text{ tal que } \Box^{\omega}\Sigma \cup \{\Box^0\varphi, \Box^1\varphi, \ldots, \Box^n\varphi\} \vdash_{lK} \varphi$$

si, i només si (per la proposició 4.10, conjunció a l'esquerra)

$$\text{existeix } n \in \omega \text{ tal que } \Box^{\omega}\Sigma \cup \{\Box^0\varphi \ \wedge \Box^1\varphi \ \wedge \cdots \wedge \Box^n\varphi\} \vdash_{lK} \varphi$$

si, i només si, (per teorema de deducció 4.5)

$$\text{existeix } n \in \omega \text{ tal que } \Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} (\Box^0\varphi \ \wedge \Box^1\varphi \ \wedge \cdots \wedge \Box^n\varphi) \to \varphi$$

si, i només si, (per la proposició 4.17)

$$\text{existeix } n \in \omega \text{ tal que } \Sigma \vdash_{gK} (\Box^0\varphi \wedge \Box^1\varphi \wedge \cdots \wedge \Box^n\varphi) \to \psi$$

5 Models canònics. Completesa per a K

En aquest capítol demostrarem els teoremes de completesa per a la lògica K. Per a $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\Box(X)$ veurem que

$$\Sigma \vdash_{lK} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{lK} \varphi \text{ i } \Sigma \vdash_{gK} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{gK} \varphi$$

És a dir, veurem que les nocions sintàctica i semàntica de relació de conseqüència són equivalents.

Per veure que si existeix una demostració a $\vdash$ de φ a partir de Σ, aleshores φ és conseqüència de Σ, veurem que totes les regles i axiomes del càlcul Hilbert per a K són vàlids en qualsevol model de Kripke.

Per a la implicació recíproca, suposarem que $\Sigma \nvdash \varphi$ i buscarem un model de Kripke $\mathcal{M}$ i un món α tals que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$, però $\mathcal{M}, \alpha \nVdash \varphi$. Aquest model serà el model canònic, que construirem en aquest capítol.

En primer lloc, veurem la demostració del teorema local, per això al llarg del capítol farem servir $\vdash$ per denotar $\vdash_{lK}$. Després farem servir la relació entre local i global que hem vist en els dos capítols anteriors per demostrar el teorema global.

5.1 Teories maximals i consistents

Definició 5.1. *Sigui $\Sigma \subseteq Prop_\Box(X)$ consistent. Es diu que Σ és* ***consistent maximal*** *si Σ és maximal dins del conjunt $\{\Gamma \subseteq Prop_\Box(X) : \Gamma \text{ consistent}\}$ amb la inclusió. És a dir, si per tot $\Delta \in \{\Gamma \subseteq Prop_\Box(X) : \Gamma \text{ consistent}\}$, $\Sigma \subseteq \Delta$ implica $\Sigma = \Delta$.*

Proposició 5.2. *Sigui $\Sigma \subseteq Prop_\Box(X)$ una teoria. Σ és consistent maximal si, i només si, per tota $\varphi \in Prop_\Box(X)$ es dona una, i només una, de les dues: $\Sigma \vdash \varphi$ o $\Sigma \vdash \neg\varphi$.*

Demostració. $\Rightarrow$) En primer lloc, veiem que $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Sigma \vdash \neg\varphi$ no passa alhora. Si es donessin les dues, per la proposició 4.10(conjunció esquerra) tindríem $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, que és una contradicció, llavors Σ seria inconsistent per la proposició 2.18.
Ara veiem que es dona almenys una de les dues $\Sigma \vdash \varphi$ o $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Suposem que $\Sigma \nvdash \varphi$. Pel TRA (4.6) tenim que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ és consistent. Com que $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ i Σ és maximal, $\Sigma = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, per tant, $\neg\varphi \in \Sigma$. Per tant, $\Sigma \vdash \neg\varphi$.
$\Leftarrow$) Suposem que Σ és inconsistent. Aleshores $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Sigma \vdash \neg\varphi$, que contradiu la hipòtesi. Per tant, Σ ha de ser consistent.
Suposem ara que Σ no és maximal, és a dir, que existeix $\Delta \subseteq Prop_\Box(X)$ tal que Δ és consistent i $\Sigma \subsetneq \Delta$. Llavors existeix $\psi \in Prop_\Box(X)$ tal que $\psi \in \Delta$ però $\psi \notin \Sigma$. Com que Σ és teoria, $\Sigma \nvdash \psi$. Llavors, per hipòtesi $\Sigma \vdash \neg\psi$. Com que $\Sigma \subsetneq \Delta$, per monotonia $\Delta \vdash \neg\psi$. Com que $\psi \in \Delta$, $\Delta \vdash \psi$. Contradiu el fet que Δ és consistent. Per tant Σ ha de ser maximal.

Proposició 5.3. *Sigui* $\Sigma \subsetneq Prop_\Box(X)$. *Si* Σ *és consistent i maximal, aleshores* Σ *és teoria consistent maximal.*

Demostració. En primer lloc, veiem que Σ és teoria. Sigui $\varphi \in Prop_\Box(X)$. Si $\varphi \in \Sigma$, per la propietat axioma de conseqüència estructural, $\Sigma \vdash \varphi$. Suposem ara que $\Sigma \vdash \varphi$, però $\varphi \notin \Sigma$. Per monotonia, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. A més, $\Sigma \cup \{\varphi\} \neq \Sigma$, ja que $\varphi \notin \Sigma$. Si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ fos consistent, com que $\Sigma \subsetneq \Sigma \cup \{\varphi\}$, Σ no seria maximal, per tant $\Sigma \cup \{\varphi\}$ no pot ser consistent. Com que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ és inconsistent, pel TRA (4.6), $\Sigma \vdash \neg\varphi$, que contradiu el fet que Σ és consistent.
Com que Σ és teoria i Σ és consistent, Σ és teoria consistent. Cal veure ara que Σ és maximal dins de $\{\Gamma \subseteq Prop_\Box(X) : \Gamma \text{ teoria consistent}\}$. Com que Σ és maximal dins de $\{\Gamma \subseteq Prop_\Box(X) : \Gamma \text{ consistent}\}$ i Σ és teoria consistent, ja tinc que Σ és maximal dins de $\{\Gamma \subseteq Prop_\Box(X) : \Gamma \text{ teoria consistent}\}$. Per tant Σ és teoria consistent maximal.

Lema 5.4. (Lema de Lindenbaum) *El conjunt de teories consistents té maximals.*

Demostració. Considerem una cadena de teories consistents $\{T_j : j \in J\}$. Anem a veure que $\bigcup_{j\in J} T_j$ és una teoria consistent. Suposem que $\bigcup_{j\in J} T_j$ no és consistent, és a dir $\bigcup_{j\in J} T_j \vdash \psi$ i $\bigcup_{j\in J} T_j \vdash \neg\psi$ per alguna $\psi \in Prop_\Box(X)$. Aleshores existeixen i, k tals que $T_i \vdash \psi$ i $T_k \vdash \neg\psi$. Com que $\{T_j : j \in J\}$ és una cadena, $T_i \subseteq T_k$ o $T_k \subseteq T_i$. Suposem que $T_k \subseteq T_i$. Aleshores $T_i \vdash \psi$ i $T_i \vdash \neg\psi$, per tant T_i no és consistent, que és una contradicció. Per tant $\bigcup_{j\in J} T_j$ ha de ser consistent. Com que $\bigcup_{j\in J} T_j$ és cota superior de qualsevol cadena $\{T_j : j \in J\}$, pel lema de Zorn existeix una teoria consistent Δ que és maximal amb la inclusió.

5.2 Model canònic d'una lògica normal

Definició 5.5. *Donada una lògica modal normal* $(Prop_\Box(X), \rhd)$, *es defineix el seu* ***model canònic*** $\mathcal{M}_c = \langle W_c, R_c, V_c \rangle$ *com:*

- $W_c = \{\Sigma : \Sigma \text{ és teoria maximal consistent de } (Prop_\Box(X), \rhd)\}$
- $R_c \subseteq (W_c \times W_c)$ *relació definida per*
$$\Sigma R_c \Delta \Leftrightarrow \{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \subseteq \Delta$$
- $V_c : X \longrightarrow \mathcal{P}(W_c)$ *aplicació definida per* $V_c(p) = \{\Sigma \in W_c : p \in \Sigma\}$

Proposició 5.6. *Siguin* $\mathcal{M}_c = \langle W_c, R_c, V_c \rangle$ *model canònic,* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop_\Box(X)$ *tal que* $\Sigma \in W_c$.
$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi \text{ implica } \Sigma \vdash \psi)$$

Demostració. $\Rightarrow$) Si $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, aplicant MP s'obté $\Sigma \vdash \psi$.
$\Leftarrow$) Suposem que $\Sigma \vdash \varphi$ implica $\Sigma \vdash \psi$. Diferenciem dos casos:
Si $\Sigma \vdash \varphi$, llavors $\Sigma \vdash \psi$. Aplicant MP amb la instància de l'axioma 1 $\psi \to (\varphi \to \psi)$ tenim $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.
Si $\Sigma \nvdash \varphi$, com que Σ és teoria, $\varphi \notin \Sigma$. Com que Σ és teoria maximal consistent, per la proposició 5.2, $\neg\varphi \in \Sigma$. Aplicant MP amb la instància de l'axioma 3 $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ tenim $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Teorema 5.7. *Per tot* $\Sigma \in W_c$ *i tota* $\varphi \in Prop_\Box(X)$,

$$\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

Demostració. Per inducció sobre la fórmula φ:
Si $\varphi \in X$, $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in V_c(X)$, que és cert per la definició de V_c
Si $\varphi = \psi \to \chi$, $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi \to \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi$ implica $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash \psi$ implica $\Sigma \vdash \chi \overset{5.6}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash \psi \to \chi$.
Si $\varphi = \neg\psi$ $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \neg\psi \Leftrightarrow \mathcal{M}_c, \Sigma \nVdash \psi \Leftrightarrow$ (per HI) $\Sigma \nvdash \psi \overset{5.2}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash \neg\psi$.
Si $\varphi = \Box\psi$,
$\Leftarrow$) Com que Σ és teoria, $\Sigma \vdash \Box\psi$ és equivalent a $\Box\psi \in \Sigma$. Sigui $\Delta \in W_c$ tal que $\Sigma R_c \Delta$, és a dir, $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \subseteq \Delta$. Llavors, $\psi \in \Delta$, per tant, per HI, $\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \psi$, i tenim $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \Box\psi$.
$\Rightarrow$) Per hipòtesi $\mathcal{M}_c, \Sigma \vdash \Box\psi$. Sigui $T = Th(\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \cup \{\neg\psi\})$. Si T fos consistent, pel lema de Lindenbaum (5.4), existiria una teoria consistent i maximal $T' \in W_c$ tal que $T \subseteq T'$ i $T' \nvdash \psi$. Com que $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \subseteq T'$, $\Sigma R_c T'$. Com $T' \nvdash \psi$, per HI, $\mathcal{M}_c, T' \nVdash \psi$, per tant, $\mathcal{M}_c, \Sigma \nVdash \Box\psi$, que contradiu la hipòtesi inicial. Per tant T ha de ser inconsistent. Pel TRA (4.6) $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \vdash \psi$. Com que $\vdash$ és finitari, existeixen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tals que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$. Per la proposició 4.15, $\{\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n\} \vdash \Box\psi$. Com que $\Box\varphi_i \in \Sigma$, $\{\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n\} \subseteq \Sigma$. Per la propietat del tall de $\vdash$, $\Sigma \vdash \Box\psi$.

5.3 Teorema de Completesa per a K

Finalment, tenim totes les eines per poder demostrar els teoremes de completesa per les lògiques lK i gK.

Teorema 5.8. (Completesa local per a K) *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \vdash_{lK} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{lK} \varphi$$

Demostració. $\Rightarrow$) Cal veure que les regles del càlcul i els axiomes són vàlids per a $\vDash$. Siguin $\varphi, \psi, \chi \in Prop_{\Box}(X)$.
(Axioma de normalitat) Per la proposició 3.15 tenim $\vDash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.
(Regla de necessitat restringida)Per la proposició 3.16, tenim que $\vDash \varphi$ implica $\vDash \Box\varphi$.
Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ un model de Kripke i $\alpha \in W$ qualssevol.
(Modus Ponens) Suposem que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \{\varphi, \varphi \to \psi\}$, és a dir $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ i $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$. De $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$ tenim $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$. Com que per hipòtesi $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, aleshores $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$. Per tant $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vDash \psi$.
(Axioma 1) Suposem $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Cal veure que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, que ja ho tenim, per hipòtesi, per tant $\vDash \varphi \to (\psi \to \varphi)$.
(Axioma 2) Suposem que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$, és a dir, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \to \chi$ (1). Suposem que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$, és a dir, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ (2). Si $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, per (2) tenim $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$. Llavors per (1) tenim $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi$. Per tant, tenim $\vDash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
(Axioma 3) $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \nVdash \varphi$. Llavors, tenim $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$. Per tant, $\vDash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.
(Axioma 4) $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\varphi \to \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \nVdash \varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Si $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, ja tenim que el volíem. Si $\mathcal{M}, \alpha \nVdash \varphi$ tenim una contradicció, llavors $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$. Per tant, $\vDash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$.
$\Leftarrow$) Pel contrarecíproc. Suposem que $\Sigma \nvdash_{lK} \varphi$. Pel TRA (4.6) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ és consistent. Sigui $T = Th(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$, que és teoria consistent. Pel lema de Lindenbaum (5.4) existeix una teoria consistent maximal Δ tal que $T \subseteq \Delta$. Per definició de model canònic, $\Delta \in W_c$. Com que $\neg\varphi \in \Delta$, per la proposició 5.2, $\Delta \nvdash_{lK} \varphi$. Pel teorema 5.7, $\mathcal{M}_c, \Delta \nVdash \varphi$. Com que $\Sigma \subseteq \Delta$, $\Delta \vdash_{lK} \psi$ per tota $\psi \in \Sigma$. Per tant, $\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \psi$ per tota $\psi \in \Sigma$, és a dir, $\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \Sigma$. Tenim doncs, $\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \Sigma$ i $\mathcal{M}_c, \Delta \nVdash \varphi$, per tant, $\Sigma \nvDash_{lK} \varphi$.

Teorema 5.9. (Completesa global per a K) *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \vdash_{gK} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{gK} \varphi$$

Demostració. $\Sigma \vDash_{gK} \varphi \overset{3.30}{\Longleftrightarrow} \Box^{\omega}\Sigma \vDash_{lK} \varphi \overset{5.8}{\Leftrightarrow} \Box^{\omega}\Sigma \vdash_{lK} \varphi \overset{4.17}{\Longleftrightarrow} \Sigma \vdash_{gK} \varphi$

6 Completesa d'altres lògiques normals

Hem vist que $(Prop_\Box(X), \vdash_{lK})$ és la menor lògica modal normal. En aquest capítol definirem tres extensions del càlcul $\vdash_{lK}$ i tres extensions de $\vdash_{gK}$. A continuació, definirem classes de models de Kripke segons propietats de la relació entre mons del model. Finalment veurem teoremes de completesa per aquestes lògiques.

6.1 Càlcul Hilbert

Definim tres càlculs locals:

- El càlcul local $\vdash_{lT}$ s'obté d'afegir als axiomes i regles del càlcul $\vdash_{lK}$ l'axioma $\mathrm{T} : \Box\varphi \to \varphi$.
- El càlcul local $\vdash_{lS_4}$ s'obté d'afegir als axiomes i regles del càlcul $\vdash_{lT}$ l'axioma $4 : \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.
- El càlcul local $\vdash_{lS_5}$ s'obté d'afegir als axiomes i regles del càlcul $\vdash_{lS_4}$ l'axioma $\mathrm{B} : \varphi \to \Box \diamond \varphi$.

Observacions 6.1. Els tres càlculs són extensions axiomàtiques de $\vdash_{lK}$, per tant:

- $\vdash_T$, $\vdash_{S_4}$ i $\vdash_{S_5}$ són relacions de conseqüència estructural (finitàries), per tant, $(Prop_\Box(X), \vdash_T)$, $(Prop_\Box(X), \vdash_{S_4})$ i $(Prop_\Box(X), \vdash_{S_5})$ són lògiques modals.
- $(Prop_\Box(X), \vdash_T)$, $(Prop_\Box(X), \vdash_{S_4})$ i $(Prop_\Box(X), \vdash_{S_5})$ són lògiques normals.
- El teorema de deducció (4.5), el teorema de reducció a l'absurd (4.6) i les propietats de les connectives clàssiques, lemes 4.12, 4.9, proposicions 4.10 (conjunció esquerra), 4.11 (conjunció dreta) i 4.13 (disjunció esquerra), són vàlides en aquestes tres lògiques.

Podem definir també tres càlculs globals:

- El càlcul global $\vdash_{gT}$ s'obté d'afegir als axiomes i regles del càlcul $\vdash_{gK}$ l'axioma $\mathrm{T} : \Box\varphi \to \varphi$.
- El càlcul global $\vdash_{gS_4}$ s'obté d'afegir als axiomes i regles del càlcul $\vdash_{gT}$ l'axioma $4 : \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.
- El càlcul global $\vdash_{gS_5}$ s'obté d'afegir als axiomes i regles del càlcul $\vdash_{gS_4}$ l'axioma $\mathrm{B} : \varphi \to \Box \diamond \varphi$.

Observació 6.2. Els tres càlculs són extensions axiomàtiques de $\vdash_{gK}$, per tant $(Prop_\Box(X), \vdash_T)$, $(Prop_\Box(X), \vdash_{S_4})$ i $(Prop_\Box(X), \vdash_{S_5})$ són lògiques modals normals.

6.2 Classes de marcs definibles

A continuació veurem quin significat semàntic tenen els axiomes que hem afegit a les lògiques $(Prop_\square(X), \vdash_{lK})$ $(Prop_\square(X), \vdash_{gK})$.

Definicions 6.3.

- $\mathbb{T} = \{\langle W, R, V\rangle$: $\langle W, R\rangle$ *és un marc amb R reflexiva*$\}$ *és la* ***classe de marcs reflexius***.

- $\mathbb{S}_4 = \{\langle W, R, V\rangle$: $\langle W, R\rangle$ *és un marc amb R reflexiva i transitiva*$\}$ *és la* ***classe de marcs reflexius i transitius***.

- $\mathbb{S}_5 = \{\langle W, R, V\rangle$: $\langle W, R\rangle$ *és un marc amb R relació d'equivalència*$\}$ *és la* ***classe de marcs d'equivalència***.

Podem donar una definició de conseqüència local per a les classes de marcs que acabem de definir.

Definicions 6.4. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\square(X)$.

- $\Sigma \vDash_{l\mathbb{T}} \varphi$ *si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *amb R reflexiva i tot* $\alpha \in W$, *si* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$, *aleshores* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.

- $\Sigma \vDash_{l\mathbb{S}_4} \varphi$ *si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *amb R reflexiva i transitiva i tot* $\alpha \in W$, *si* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$, *aleshores* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.

- $\Sigma \vDash_{l\mathbb{S}_5} \varphi$ *si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *amb R relació d'equivalència i tot* $\alpha \in W$, *si* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$, *aleshores* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.

També podem donar una definició de conseqüència global.

Definicions 6.5. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_\square(X)$.

- $\Sigma \vDash_{g\mathbb{T}} \varphi$ *si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *amb R reflexiva, si* $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$, *aleshores* $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

- $\Sigma \vDash_{g\mathbb{S}_4} \varphi$ *si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *amb R reflexiva i transitiva, si* $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$, *aleshores* $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

- $\Sigma \vDash_{g\mathbb{S}_5} \varphi$ *si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *amb R relació d'equivalència, si* $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$, *aleshores* $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

Observació 6.6. Les tres classes de models definides anteriorment són definibles per fórmules.

Anem a veure que els nous axiomes que hem definit pel càlcul Hilbert de $\vdash_T$, $\vdash_{S_4}$ i $\vdash_{S_5}$ caracteritzen les classes $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}_4$ i $\mathbb{S}_5$ respectivament.

Teorema 6.7. *Sigui $\langle W, R\rangle$ un marc.*

1. $\langle W, R\rangle \models \Box\varphi \to \varphi \Leftrightarrow R$ *és reflexiva.*

2. $\langle W, R\rangle \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi \Leftrightarrow R$ *és transitiva.*

3. $\langle W, R\rangle \models \varphi \to \Box \diamond \varphi \Leftrightarrow R$ *és simètrica.*

Demostració.

1. $\Leftarrow$) Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un marc i $\alpha \in W$. $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi \to \varphi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi) \Leftrightarrow$ (per tot $\beta \in W$, $\alpha R\beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$). Com que R és reflexiva, $\alpha R\alpha$. Per tant, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.
   $\Rightarrow$) Suposem que R no és reflexiva, és a dir, que existeix un $\alpha \in W$ tal que $\alpha \not R \alpha$. Definim la valoració $V : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ com $V(p) = \{\beta \in W : \alpha R\beta\}$ i $V(x) = \emptyset$ per tot $x \in X \setminus \{p\}$. Observem que $\langle W, R, V\rangle, \alpha \nVdash p$, ja que $\alpha \not R \alpha$. En canvi, com que per tot $\beta \in W$ tal que $\alpha R\beta$, $\langle W, R, V\rangle, \beta \Vdash p$, es té $\langle W, R, V\rangle, \alpha \Vdash \Box p$. Per tant, $\langle W, R, V\rangle, \alpha \nVdash \Box p \to p$.

2. $\Leftarrow$) Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un marc i $\alpha \in W$. $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ és equivalent a $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\Box\varphi)$ és equivalent a $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box\Box\varphi)$ és equivalent a
   (per tot $\beta \in W$, $\alpha R\beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$ implica per tot $\beta \in W$, $\alpha R\beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \Box\varphi$)
   és equivalent a
   (per tot $\beta \in W$, $\alpha R\beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$ implica que per tot $\beta \in W$, si $\alpha R\beta$, llavors per tot $\gamma \in W$, $\beta R\gamma$, $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \varphi$).
   Sigui $\beta \in W$ tal que $\alpha R\beta$ i sigui $\gamma \in W$ tal que $\beta R\gamma$. Com que R és transitiva, es té $\alpha R\gamma$. Per tant, $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \varphi$.
   $\Rightarrow$) Suposem que R no és transitiva, és a dir, existeixen $\alpha, \beta, \gamma \in W$ tals que $\alpha R\beta$, $\beta R\gamma$, però $\alpha \not R \gamma$. Definim la valoració $V : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ com $V(p) = \{\delta \in W : \alpha R\delta\}$ i $V(x) = \emptyset$ per tot $x \in X \setminus \{p\}$. Llavors $\langle W, R, V\rangle, \alpha \Vdash \Box p$, ja que per tot $\delta \in W$, $\alpha R\delta$, $\langle W, R, V\rangle, \delta \Vdash p$. En canvi, $\langle W, R, V\rangle, \alpha \nVdash \Box\Box p$, ja que existeixen $\beta, \gamma \in w$ tals que $\alpha R\beta$ i $\beta R\gamma$ i $\langle W, R, V\rangle, \gamma \nVdash p$, perquè $\alpha \not R \gamma$. Per tant, $\langle W, R\rangle \nVdash \Box p \to \Box\Box p$.

3. $\Leftarrow$) Siguin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un marc i $\alpha \in W$. $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \Box \diamond \varphi)$ és equivalent a $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ implica $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Box \diamond \varphi)$ és equivalent a
   ($\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ implica que per tot $\beta \in W$, $\alpha R\beta$, existeix un $\gamma \in W$ tal que $\beta R\gamma$ i $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \varphi$)
   Sigui $\beta \in W$. Si $\alpha R\beta$, com que R és simètrica, $\beta R\alpha$. com que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$, prenent $\gamma = \alpha$ tenim $\beta R\gamma$ i $\mathcal{M}, \gamma \Vdash \varphi$.
   $\Rightarrow$) Suposem que R no és simètrica, és a dir, existeixen $\alpha, \beta \in W$ tals que $\alpha R\beta$, però $\beta \not R \alpha$. Definim la valoració $V : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ com $V(p) = \{\gamma \in W : \beta \not R \gamma\}$ i $V(x) = \emptyset$ per tot $x \in X \setminus \{p\}$. Llavors, per tot $\gamma \in W$ tal que $\beta R\gamma$ tenim $\langle W, R, V\rangle, \gamma \nVdash \diamond p$. Per tant, per a $\alpha \in W$, $\alpha R\beta$, $\langle W, R, V\rangle, \alpha \nVdash \Box \diamond p$. Com que $\alpha \in W$ i $\beta \not R \alpha$, $\langle W, R, V\rangle, \alpha \Vdash p$. Per tant $\langle W, R\rangle \nVdash p \to \Box \diamond p$.

6.3 Teoremes de completesa

Farem servir el model canònic de les lògiques T, S_4 i S_5 per demostrar els teoremes de completesa. Hem de provar que les relacions del model canònic són reflexives, reflexives i transitives i d'equivalència, respectivament.

Proposició 6.8.

1. *El model canònic* $\mathcal{M}_c = \langle W_c, R_c, V_c \rangle$ *de la lògica* T *és tal que* R_c *és reflexiva.*

2. *El model canònic* $\mathcal{M}_c = \langle W_c, R_c, V_c \rangle$ *de la lògica* S_4 *és tal que* R_c *és reflexiva i transitiva.*

3. *El model canònic* $\mathcal{M}_c = \langle W_c, R_c, V_c \rangle$ *de la lògica* S_5 *és tal que* R_c *és relació d'equivalència.*

Demostració.

1. Suposem que R_c no és reflexiva. Aleshores existeix $\Sigma \in W_c$ tal que $\Sigma \not{R_c} \Sigma$, és a dir, $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \nsubseteq \Sigma$. Sigui $\varphi \in Prop_\Box(X)$ tal que $\Box\varphi \in \Sigma$, però $\varphi \notin \Sigma$. Com que Σ és teoria consistent maximal es té $\Sigma \vdash_T \Box\varphi$ i $\Sigma \nvdash_T \varphi$. Com que l'axioma T és vàlid, es té $\Sigma \vdash_T \Box\varphi \to \varphi$. Aplicant MP, $\Sigma \vdash_T \varphi$, que és una contradicció. Per tant R_c ha de ser reflexiva.

2. Com que a S_4 és vàlid l'axioma T, es té que R_c és reflexiva. Cal veure que R_c és transitiva. Siguin $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \in W_c$ tals que $\Sigma_1 R_c \Sigma_2$ i $\Sigma_2 R_c \Sigma_3$, és a dir, tenim $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma_1\} \subseteq \Sigma_2$ (1) i $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma_2\} \subseteq \Sigma_3$ (2). Sigui $\varphi \in Prop_\Box(X)$ tal que $\Box\varphi \in \Sigma_1$, per tant $\Sigma_1 \vdash_{S_4} \Box\varphi$. Com que a S_4 és vàlid l'axioma 4, $\Sigma_1 \vdash_{S_4} \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$. Per MP tenim $\Sigma_1 \vdash_{S_4} \Box\Box\varphi$, per tant, $\Box\Box\varphi \in \Sigma_1$. Per (1), $\Box\varphi \in \Sigma_2$. Per (2) $\varphi \in \Sigma_3$. Per tant $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma_1\} \subseteq \Sigma_3$, és a dir, R_c és transitiva.

3. Com que a S_5 són vàlids els axiomes T i 4, R_c és reflexiva i transitiva. Suposem que R_c no és simètrica. Siguin $\Sigma, \Delta \in W_c$ tals que $\Sigma R_c \Delta$, és a dir, $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \subseteq \Delta$ (1), però $\Delta \not{R_c} \Sigma$, és a dir, $\{\varphi : \Box\varphi \in \Delta\} \subseteq \Sigma$. Sigui $\varphi \in Prop_\Box(X)$ tal que $\Box\varphi \in \Delta$, però $\varphi \notin \Sigma$, és a dir, $\Delta \vdash_{S_5} \Box\varphi$ (2) i $\Sigma \nvdash_{S_5} \varphi$. Com que Σ és teoria consistent maximal, per la proposició 5.2 es té $\Sigma \vdash_{S_5} \neg\varphi$. Com que l'axioma B és vàlid a S_5, per monotonia es té $\Sigma \vdash_{S_5} \neg\varphi \to \Box \diamond \neg\varphi$. Aplicant MP, $\Sigma \vdash_{S_5} \Box \diamond \neg\varphi$. Per (1), $\Delta \vdash_{S_5} \diamond\neg\varphi$, és a dir, $\Delta \vdash_{S_5} \neg\Box\varphi$, que juntament amb (2) i la proposició 5.2 contradiu el fet que Δ és teoria consistent maximal. Per tant R_c ha de ser simètrica.

Teorema 6.9. (Teoremes de completesa local). *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \vdash_{lT} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{lT} \varphi$$

$$\Sigma \vdash_{lS_4} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{lS_4} \varphi$$

$$\Sigma \vdash_{lS_5} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{lS_5} \varphi$$

Demostració.

1. $\Rightarrow$) És anàloga a la demostració del teorema 5.8, afegint que $\vDash_{lT} \Box\varphi \to \varphi$ per la proposició 6.7.
   $\Leftarrow$) Anàloga a la demostració del teorema 5.8, prenent el model canònic de la lògica T, que és reflexiu per la proposició 6.8.

2. $\Rightarrow$) És anàloga a la demostració del teorema 5.8, afegint que $\vDash_{lS_4} \Box\varphi \to \varphi$ i $\vDash_{lS_4} \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ per la proposició 6.7.
   $\Leftarrow$) Anàloga a la demostració del teorema 5.8, prenent el model canònic de la lògica S_4, que és reflexiu i transitiu per la proposició 6.8.

3. $\Rightarrow$) És anàloga a la demostració del teorema 5.8, afegint que $\vDash_{lS_5} \Box\varphi \to \varphi$, $\vDash_{lS_5} \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ i $\vDash_{lS_5} \varphi \to \Box \Diamond \varphi$ per la proposició 6.7.
   $\Leftarrow$) Anàloga a la demostració del teorema 5.8, prenent el model canònic de la lògica S_5, que és reflexiu, transitiu i simètric per la proposició 6.8.

Teorema 6.10. (Teoremes de completesa local). *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\Box}(X)$.

$$\Sigma \vdash_{gT} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{gT} \varphi$$

$$\Sigma \vdash_{gS_4} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{gS_4} \varphi$$

$$\Sigma \vdash_{gS_5} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{gS_5} \varphi$$

Demostració. Observem que un submodel generat d'un model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ en què R és reflexiva (resp. transitiva, resp. simètrica) és reflexiu (resp. transitiu, resp. simètric). Per tant les demostracions són anàlogues a la demostració del teorema 5.9 a partir dels respectius teoremes de completesa locals.

7 Lògica intuïcionista

En aquesta secció veurem una lògica diferent de la lògica modal, que també també admet una semàntica de Kripke: la lògica intuïcionista. És la formalització que A. Heyting va donar de la concepció constructivista de les matemàtiques que E. J. Brower havia proposat.

En aquest capítol, exposarem el càlcul que Heyting va proposar. A continuació parlarem de marcs de Kripke intuïcionistes. Finalment, demostrarem el teorema de completesa per aquesta lògica fent servir models canònics.

El **llenguatge proposicional intuïcionista** es defineix a partir de les connectives primitives $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ i $\perp$.

Notació 9. *Denotarem el conjunt de fórmules d'un llenguatge proposicional intuïcionista per* $Prop_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\perp\}}(X)$.

Notació 10. *Donades* $\varphi, \psi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\perp\}}(X)$, $p \in X$ *es defineixen les connectives següents:*

- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp$

7.1 Càlcul Hilbert intuïcionista $\vdash_{H_{IPC}}$

Axiomes:

Ax 1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
Ax 2 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$
Ax 3 $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
Ax 4 $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
Ax 5 $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
Ax 6 $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
Ax 7 $(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi))$
Ax 8 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
Ax 9 $\perp \rightarrow \varphi$

Regla:

$\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ (Modus Ponens)

A la lògica intuïcionista es compleixen alguns dels metatoeremes del càlcul Hilbert per la lògica *lK*.

Teorema 7.1. (Teorema de deducció). $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$.

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{H_{IPC}} \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{H_{IPC}} \varphi \to \psi$$

Demostració. La demostració és anàloga a la del TD (4.5) usant l'axioma 1 i 8 de $\vdash_{H_{IPC}}$ que són els equivalents als axiomes 1 i 2 de $\vdash_{lK}$.

Proposició 7.2. *Siguin* $\varphi, \psi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$.

1. $\varphi \vdash_{H_{IPC}} \varphi \vee \psi$
2. $\psi \vdash_{H_{IPC}} \varphi \vee \psi$

Demostració.

1. Immediat de l'axioma 5 i TD (7.1).
2. Immediat de l'axioma 6 i TD (7.1).

Proposició 7.3. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$.

1. Conjunció dreta

$$\Sigma \vdash_{H_{IPC}} \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{H_{IPC}} \varphi \ i\ \Sigma \vdash_{H_{IPC}} \psi$$

2. Conjunció esquerra

$$\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{H_{IPC}} \chi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash_{H_{IPC}} \chi$$

3. Disjunció esquerra / prova per casos

$$\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{H_{IPC}} \chi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{H_{IPC}} \chi \ i\ \Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{H_{IPC}} \chi$$

Demostració.

1. Anàloga a la de la proposició 4.11.
2. Anàloga a la de la proposició 4.10.
3. Anàloga a la de la proposició 4.13.

Tanmateix, no es té un teorema de reducció a l'asbsurd. En canvi es té:

Teorema 7.4. (Teorema de pseudoreducció a l'absurd).
Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$.

$$\Sigma \vdash_{H_{IPC}} \neg\varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \textit{ és inconsistent.}$$

Demostració. $\Sigma \vdash_{H_{IPC}} \neg\varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{H_{IPC}} \varphi \to \bot \xLeftrightarrow{\text{TD (7.1)}} \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \bot \xLeftrightarrow{\text{Ax9, MP}} \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ per qualsevol $\psi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$.

7.2 Models i marcs de Kripke intuïcionistes

Definició 7.5. *Un* ***marc de Kripke intuïcionista*** $\mathcal{F}$ *és una parella* $\langle A, \leq \rangle$ *tal que* A *és un conjunt no buit i* $\leq$ *és una relació d'ordre a* A*, és a dir,* $\leq$ *és una relació a* A *reflexiva, transitiva i antisimètrica.*

Definició 7.6. *Un* ***model de Kripke intuïcionista*** $\mathcal{M}$ *és una tripleta* $\langle A, \leq, V \rangle$ *en què* $\langle A, \leq \rangle$ *és un marc de Kripke i* V *és una valoració,* $V : A \longrightarrow P\,(X)$*, tal que per qualssevol* $\alpha, \beta \in A$*, si* $\alpha \leq \beta$ *aleshores* $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$*.*

A continuació, donats un model de Kripke $\mathcal{M} = \langle A, R, V \rangle$, un món $\alpha \in A$ i una fórmula $\varphi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$, definirem recursivament la noció de que φ és **veritat** a α en $\mathcal{M}$, denotat per $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$.

Definició 7.7. *Donats un model* $\mathcal{M} = \langle A, R, V \rangle$*,* $\alpha \in A$ *i* $\varphi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$*:*

- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash x \Leftrightarrow x \in V(\alpha)$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ *i* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ *o* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow$ *per tot* $\beta \in A$ *tal que* $\alpha \leq \beta$*,* $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$ *implica* $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$
- *Per tot* $\alpha \in A$*,* $\mathcal{M}, \alpha \nVdash \bot$

Observació 7.8. A partir de la definició de les connectives $\neg$ i $\leftrightarrow$ podem veure:

- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ per tot $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$, $\mathcal{M}, \beta \nVdash \varphi$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow$ per tot $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \neg\neg\varphi \Leftrightarrow$ per tot $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$ existeix un $\delta \in A$ tal que $\beta \leq \delta$ i $\mathcal{M}, \delta \Vdash \varphi$

Definició 7.9. *Donat* $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V \rangle$ *un model de Kripke i* $\varphi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$*, es diu que* φ *és* ***vàlida*** *a* $\mathcal{M}$*, denotat per* $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ *si* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ *per tot* $\alpha \in A$

Proposició 7.10. (Intel·ligència hereditària) *Sigui* $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V \rangle$ *un model de Kripke,* $\varphi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$ *i* $\alpha, \beta \in A$*. Si* $\alpha \leq \beta$ *i* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$ *aleshores* $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$*.*

Demostració. Per inducció sobre la fórmula φ:
Si $\varphi = x$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash x \Leftrightarrow x \in V(\alpha)$. Com que $\alpha \leq \beta$, per la definició de valoració, $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$, per tant, $x \in V(\beta)$. Ja tenim $\mathcal{M}, \beta \Vdash x$.
Si $\varphi = \psi \wedge \chi$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \wedge \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ i $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi$. Per HI, com $\beta \in A$ i $\alpha \leq \beta$, es té $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$ i $\mathcal{M}, \beta \Vdash \chi$, per tant, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi \wedge \chi$.
Si $\varphi = \psi \vee \chi$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \vee \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ o $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi$. Per HI, com que $\beta \in A$ i $\alpha \leq \beta$, es té $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$ o $\mathcal{M}, \beta \Vdash \chi$, per tant, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi \vee \chi$.
Si $\varphi = \psi \to \chi$, sigui $\delta \in A$, $\beta \leq \delta$ tal que $\mathcal{M}, \delta \Vdash \psi$. Com que $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \delta$, es té $\alpha \leq \delta$. De $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$ es té $\mathcal{M}, \delta \Vdash \chi$. Per tant, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi \to \chi$.

Definició 7.11. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$. *Es diu que* φ *és* ***conseqüència local*** *de* Σ*, denotat per* $\Sigma \vDash_{l_i} \varphi$*, si per tot model de Kripke intuïcionista* $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V\rangle$ *i tot* $\alpha \in A$*, si* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \Sigma$*, aleshores* $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi$*.*

Definició 7.12. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$. *Es diu que* φ *és* ***conseqüència global*** *de* Σ*, denotat per* $\Sigma \vDash_{g_i} \varphi$*, si per tot model de Kripke* $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V\rangle$ *si* $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$*, aleshores* $\mathcal{M} \Vdash \varphi$*.*

7.2.1 Equivalència entre $\vDash_{li}$ i $\vDash_{gi}$

Anàlogament a les proposicions 3.14 i 3.20 de la lògica modal K, a la lògica intuïcionista es té

$$\vDash_{l_i} \varphi \Leftrightarrow\ \vDash_{g_i} \varphi$$

$$\Sigma \vDash_{l_i} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{g_i} \varphi$$

Tanmateix, en aquest cas també es té

$$\Sigma \vDash_{g_i} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{l_i} \varphi$$

és a dir, les relacions de conseqüència local i global són iguals.

Per demostrar-ho, donarem una definició de submodel generat d'un model anàloga a la de lògica modal.

Definició 7.13. *Siguin* $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V\rangle$*,* $\mathcal{M}' = \langle A', \leq', V'\rangle$ *dos models de Kripke. Es diu que* $\mathcal{M}'$ *és* ***submodel generat*** *de* $\mathcal{M}$ *si*

1. $A' \subseteq A$ *i per tot* $\alpha \in A$*,* $\beta \in A'$*, si* $\beta \leq \alpha$*,* $\alpha \in A'$
2. $\leq' = \leq \cap (A' \times A')$
3. $V' = V_{\restriction A'}$

Lema 7.14. *Sigui* $\mathcal{M}' = \langle A', \leq', V'\rangle$ *un submodel generat de* $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V\rangle$*. Per tota* $\varphi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$ *i tot* $\alpha \in A'$

$$\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}', \alpha \Vdash \varphi$$

Demostració. Sigui $\alpha \in A'$ qualsevol. Fem inducció sobre la fórmula φ:
Si $\varphi \in X$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in V(\alpha)$. Com que $V' = V_{\restriction A'}$ i $\alpha \in A'$, $V(\alpha) = V'(\alpha)$, $\mathcal{M}', \alpha \Vdash \varphi$.
Si $\varphi = \psi \wedge \chi$, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \wedge \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ i $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}', \alpha \Vdash \psi$ i $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}', \alpha \Vdash \psi \wedge \chi$.
Si $\varphi = \psi \vee \chi$, $(\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi$ o $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi) \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M}', \alpha \Vdash \psi$ o $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \chi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}', \alpha \Vdash \psi \vee \chi)$.
Si $\varphi = \psi \to \chi$,
$\Rightarrow$) Sigui $\beta \in A'$ tal que $\alpha \leq' \beta$. Suposem que $\mathcal{M}', \beta \Vdash \psi$. Com que $\beta \in A' \subseteq A$, per HI, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$. Com que $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \psi \to \chi$ i $\alpha \leq \beta$ (perquè $\alpha \leq' \beta$), aleshores

$\mathcal{M},\beta \Vdash \chi$. Llavors, per HI $\mathcal{M}',\beta \Vdash \chi$. Per tant, $\mathcal{M}',\alpha \Vdash \psi \to \chi$.
$\Leftarrow$) Sigui $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$. Com que $\alpha \in A'$ i $\alpha \leq \beta$, $\beta \in A'$. Si $\mathcal{M},\beta \Vdash \psi$, per HI, $\mathcal{M}',\beta \Vdash \psi$. Com que $\mathcal{M}',\alpha \Vdash \psi \to \chi$, aleshores $\mathcal{M}',\beta \Vdash \chi$. Llavors, per HI, $\mathcal{M},\beta \Vdash \chi$.Per tant, $\mathcal{M},\alpha \Vdash \psi \to \chi$.
Si $\varphi = \bot$, com que $\mathcal{M},\alpha \nVdash \bot$, si $\mathcal{M},\alpha \Vdash \bot$, implica qualsevol cosa, en particular, $\mathcal{M}',\alpha \Vdash \bot$. Anàlogament, com que $\mathcal{M}',\alpha \nVdash \bot$, si $\mathcal{M}',\alpha \Vdash \bot$, es té $\mathcal{M},\alpha \Vdash \bot$.

Teorema 7.15. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$.

$$\Sigma \vDash_{l_i} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{g_i} \varphi$$

Demostració. $\Rightarrow$) La relació de conseqüència local implica la relació de conseqüència global (demostració anàloga a la de la proposició 3.20).
$\Leftarrow$) Suposem ara que $\Sigma \nvDash_{l_i} \varphi$. Aleshores existeix un model $\mathcal{M} = \langle A, \leq, V\rangle$ i un $\alpha \in A$ tal que $\mathcal{M},\alpha \Vdash \Sigma$ però $\mathcal{M},\alpha \nVdash \varphi$. Sigui $\mathcal{M}' = \langle [\alpha], \leq \cap [\alpha]^2, V_{\restriction[\alpha]}\rangle$, on $[\alpha] = \{\beta \in A : \alpha \leq \beta\} \subseteq A$. $\mathcal{M}'$ és submodel generat de $\mathcal{M}$, ja que per qualssevol $\gamma \in A$, $\delta \in [\alpha]$ amb $\delta \leq \gamma$, com $\delta \in [\alpha]$, $\alpha \leq \delta$, per tant, $\alpha \leq \gamma$ i llavors, $\gamma \in [\alpha]$. Aplicant el lema 7.14, tenim $\mathcal{M}',\alpha \Vdash \Sigma$ i $\mathcal{M}',\alpha \nVdash \varphi$. Per la proposició 7.10, $\mathcal{M}' \Vdash \Sigma$ i $\mathcal{M}' \nVdash \varphi$, per tant, $\Sigma \nvDash_{g_i} \varphi$.

Notació 11. *A partir d'ara farem servir* $\vDash_i$ *per denotar* $\vDash_{l_i}$ *i* $\vDash_{g_i}$

7.3 Teorema de completesa

Anem a veure ara una demostració del teorema de completesa per a lògica intuïcionista. En aquest cas, enlloc de teories consistents maximals definirem teories consistents saturades o primeres. Construirem un model canònic, que en aquest cas serà un model de Kripke intuïcionista.

Notació 12. *Al llarg de la secció farem servir* $\vdash$ *per denotar* $\vdash_{H_{IPC}}$.

Definició 7.16. *Sigui* $T \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$ *teoria de* $(Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X), \vdash_{H_{IPC}})$. *Es diu que* T *és* ***consistent primera*** *o* ***saturada*** *si* T *és consistent i per tot* $\varphi, \psi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$ *és té*

$$\varphi \vee \psi \in T \Leftrightarrow \varphi \in T \text{ o } \psi \in T$$

Teorema 7.17. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X)$. *Si* $\Sigma \nvdash \varphi$, *existeix* Γ *teoria consistent primera tal que* $\Sigma \subseteq \Gamma$ *i* $\Gamma \nvdash \varphi$.

Demostració. Per fer aquesta demostració suposarem que X és numerable. Per tant, $Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\bot\}}(X) = \{\varphi_i : i \in \omega\}$. Sigui $\Gamma_0 = Th(\Sigma)$. Es té, $\Gamma_0 \nvdash \varphi$. Construïm una cadena $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$ tal que $\Gamma_i \nvdash \varphi$ de la manera següent. Si Γ_i és saturada, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$. Si Γ_i no és saturada, considerem la primera disjunció $\psi \vee \chi$ tal que $\psi \vee \chi \in \Gamma_i$, $\psi \in \Gamma_i$ i $\chi \in \Gamma_i$. Com que $\Gamma_i \nvdash \varphi$, per la prova per casos (7.3) o bé $\Gamma_i \cup \{\psi\} \nvdash \varphi$ o bé $\Gamma_i \cup \{\chi\} \nvdash \varphi$. Si es compleix $\Gamma_i \cup \{\psi\} \nvdash \varphi$, aleshores $\Gamma_{i+1} = Th(\Gamma_i \cup \{\psi\})$. Si no es compleix $\Gamma_i \cup \{\psi\} \nvdash \varphi$, aleshores $\Gamma_{i+1} = Th(\Gamma_i \cup \{\chi\})$. Sigui $\Gamma = \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$. Γ és teoria per ser unió de teories. Sigui $\psi \vee \chi$ una disjunció tal que $\Gamma \vdash \psi \vee \chi$. Per definició, $\Gamma_n \vdash \psi \vee \chi$ per algun $n \in \omega$. Per la construcció de la cadena, existeix un k tal que $\Gamma_{n+k} \vdash \psi \vee \chi$ i també $\Gamma_{n+k} \vdash \psi$ o $\Gamma_{n+k} \vdash \chi$. Per tant Γ és primera. A més a més, com que per tot $n \in \omega$, $\Gamma_n \nvdash \varphi$, tenim $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definició 7.18. *Donada la lògica intuïcionista, es defineix el seu* ***model canònic*** $\mathcal{M}_c = \langle A_c, \subseteq, V_c \rangle$ *com*

1. $A_c = \{T : T$ *és teoria consistent primera*$\}$
2. $\subseteq$ *és la inclusió entre conjunts*
3. $V_c(T) = \{p : p \in T\}$

Teorema 7.19. *Sigui* $\mathcal{M}_c = \langle A_c, \subseteq, V_c \rangle$ *model canònic,* $\Sigma \in A_c$ *i* $\varphi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\perp\}}(X)$.

$$\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

Demostració. Per inducció sobre la fórmula φ.
Si $\varphi \in X$, $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in V_c(\Sigma) \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$.
Si $\varphi = \psi \wedge \chi$, $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi \wedge \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi$ i $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash \psi$ i $\Sigma \vdash \chi \overset{7.3}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash \psi \wedge \chi$.
Si $\varphi = \psi \vee \chi$, $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi \vee \chi \Leftrightarrow \mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi$ o $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash \psi$ o $\Sigma \vdash \chi \xLeftrightarrow{\Sigma \text{ primera}} \Sigma \vdash \psi \vee \chi$.
Si $\varphi = \psi \to \chi$,
$\Rightarrow$) Suposem que $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi \to \chi$, és a dir, que per tot $\Delta \in A_c$ tal que $\Sigma \subseteq \Delta$, $\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \psi$ implica $\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \chi$. Suposem que $\Sigma \nvdash \psi \to \chi$. Pel teorema 7.1 (de deducció) $\Sigma \cup \{\psi\} \nvdash \chi$. Llavors pel teorema 7.17 sabem que existeix una teoria consistent primera T tal que $\Sigma \cup \{\psi\} \subseteq T$ i $T \nvdash \chi$. Però com que $\psi \in T$, tenim $T \vdash \psi$ i $\Sigma \subseteq T$, per tant, $T \vdash \chi$. Hem arribat a una contradicció.
$\Leftarrow$) Suposem que $\Sigma \vdash \psi \to \chi$. Sigui $T \in A_c$ teoria consistent primera tal que $\Sigma \subseteq T$ (per tant, $T \vdash \psi \to \chi$). Suposem que $\mathcal{M}_c, T \Vdash \psi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} T \vdash \psi$. Aplicant MP $T \vdash \chi \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}_c, T \Vdash \chi$. Per tant, $\mathcal{M}_c, \Sigma \Vdash \psi \to \chi$.

Teorema 7.20. (Completesa). *Per tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\perp\}}(X)$,

$$\Sigma \vdash_{H_{IPC}} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_i \varphi$$

Demostració. $\Rightarrow$) Es demostra que la regla de Modus Ponens és vàlida igual que a lògica modal.
Es demostra que axiomes del càlcul $\vdash_{H_{IPC}}$ són vàlids a $\vDash_i$ com a la demostració a la lògica modal. Vegem-ne alguns:
Siguin $\varphi, \psi \in Prop_{\{\wedge,\vee,\to,\perp\}}(X)$. Sigui $\mathcal{M} = \langle A, R, \leq \rangle$ un model de Kripke intuïcionista i $\alpha \in A$.
(Axioma 3) Sigui $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$ i $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi \wedge \psi$. Aleshores $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$ i $\mathcal{M}, \beta \Vdash \psi$. Per tant, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$. Finalment, $\vDash_i (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.
(Axioma 5) Sigui $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$ i $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$. Aleshores $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi \vee \psi$. Per tant, $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$. Finalment, $\vDash_i \varphi \to (\varphi \vee \psi)$.
(Axioma 9) Sigui $\beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$ i $\mathcal{M}, \beta \Vdash \perp$. Per definició $\mathcal{M}, \beta \nVdash \perp$. Així, en particular, $\mathcal{M}, \beta \Vdash \perp$ implica $\mathcal{M}, \beta \Vdash \varphi$. Per tant $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \perp \to \varphi$. Finalment, $\vDash_i \perp \to \varphi$.
De manera semblant es poden comprovar la resta d'axiomes.

$\Leftarrow$) Pel contrarecíproc. Suposem que $\Sigma \nvdash_{H_{IPC}} \varphi$. Sigui $\mathcal{M}_c = \langle A_c, \subseteq, V_c \rangle$ model canònic. Com que $\Sigma \nvdash_{H_{IPC}} \varphi$, pel teorema 7.17 existeix una teoria consistent primera T tal que $\Sigma \subseteq T$ i $T \nvdash_{H_{IPC}} \varphi$. Com que $\Sigma \subseteq T$, $T \vdash \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$. Aleshores pel teorema 7.19 $\mathcal{M}_c, T \Vdash \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$, és a dir, $\mathcal{M}_c, T \Vdash \Sigma$. Com que $T \nvdash_{H_{IPC}} \varphi$, pel teorema 7.19 $\mathcal{M}_c, T \nVdash \varphi$. Per tant, $\Sigma \nvDash_i \varphi$.

8 Conclusions

Durant tot el treball hem parlat de lògica com a relació de conseqüència estructural a $Prop_{\mathcal{L}}(X)$, per a llenguatges $\mathcal{L}$. Totes les propietats i teoremes els hem provat amb aquesta definició. Així, alternativament a la definició de les lògiques com a un conjunt de fórmules, podem entendre una lògica proposicional com una parella de $Prop_{\mathcal{L}}(X)$ i una relació de conseqüència estructural.

Totes les relacions de conseqüència estructural que hem vist es poden classificar en dos grups: sintàctiques i semàntiques. Amb el teorema de completesa per la lògica K hem vist que aquestes dues nocions són equivalents. D'altra banda, a les lògiques modals proposicionals, diferenciem conseqüència (resp. càlcul) local i conseqüència (resp. càlcul) global. Hem vist que tot allò que és global és interpretable localment. Per tant, hem pogut demostrar el teorema de completesa global a partir del teorema de completesa local.

La part més important de la demostració del teorema de completesa per a la lògica K ha sigut la construcció del model canònic. Quan hem definit altres lògiques modals normals hem fet servir el seu model canònic per obtenir demostracions del teorema de completesa anàlogues a la demostració del teorema de completesa per K. Després hem definit una lògica diferent a les lògiques modals normals, la lògica intuïcionita. Per aquesta lògica també hem definit marcs de Kripke, que tot i que són diferents dels definits per lògiques modals, admeten una definició anàloga de model canònic. D'aquesta manera, la demostració del teorema de completesa per lògica intuïcionista ha tingut moltes similituds amb la de la lògica K.

En conclusió, els teoremes de completesa són molt importants a la lògica. En aquest treball, tanmateix, el més important ha estat la manera de demostrar-los, ja que ens ha permès, a partir d'una primera demostració, fer-ne d'altres seguint el mateix esquema.

Referències

[1] Heyting, A.: *Introducción al intuicionismo*, Tecnos, Madrid, 1976.

[2] Hughes, G. E.; Cresswell, M. J.: *A Companion to Modal Logic*, Methuen, New York, 1984.

[3] Hughes, G. E.; Cresswell, M. J.: *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London, 1996.

[4] Jansana, R.: *Una introducción a la lógica modal*, Tecnos, Madrid, 1990.

[5] Mendelson, E.: *Introduction to Mathematical Logic*, D. van Nostrand Company, New York, second edition, 1979.

[6] Priest, G.: *An introduction to non classical logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[7] Prior, A. N.: *Historia de la lógica*, Tecnos, Madrid, 1976.